



Théorie spectrale inverse pour les opérateurs de Toeplitz 1D

Yohann Le Floch

► **To cite this version:**

Yohann Le Floch. Théorie spectrale inverse pour les opérateurs de Toeplitz 1D. Théorie spectrale [math.SP]. Université Rennes 1, 2014. Français. <NNT : 2014REN1S031>. <tel-01065441>

HAL Id: tel-01065441

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01065441>

Submitted on 18 Sep 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1
sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne

pour le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mention : Mathématiques et applications

Ecole doctorale MATISSE

présentée par

Yohann Le Floch

Préparée à l'unité de recherche 6625 du CNRS : IRMAR
Institut de Recherche Mathématique de Rennes
U.F.R. de Mathématiques

**Théorie spectrale
inverse pour les
opérateurs de
Toeplitz 1D**

**Thèse soutenue à Rennes
le 19 juin 2014**

devant le jury composé de :

Yves COLIN DE VERDIÈRE

Professeur émérite, Université Joseph Fourier /
rapporteur

Steven ZELDITCH

Professor, Northwestern University (États-Unis) /
rapporteur

Nicolas LERNER

Professeur, Université Pierre et Marie Curie /
examineur

Stéphane NONNENMACHER

Ingénieur-chercheur, CEA Saclay / *examineur*

Francis NIER

Professeur, Université Rennes 1 / *examineur*

Laurent CHARLES

Maître de conférences, Université Pierre et Marie
Curie / *co-directeur de thèse*

San VŨ NGỌC

Professeur, Université Rennes 1 / *directeur de
thèse*

Théorie spectrale inverse pour les opérateurs de Toeplitz 1D

Yohann Le Floch

Remerciements

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à tous ceux qui ont, directement ou indirectement, contribué à l'élaboration de cette thèse. J'espère n'oublier personne ; sachant pertinemment qu'il s'agit d'un vœu pieux, je m'excuse par avance pour ceux qui, par omission, ne figureront pas dans ces quelques lignes.

Avant toute chose, je voudrais remercier mes deux directeurs de thèse, San Vũ Ngoc et Laurent Charles, aux côtés de qui j'ai vraiment apprécié passer ces trois années, non seulement du point de vue professionnel, mais également sur le plan humain. Ils ont su me laisser mon indépendance tout en étant toujours disponibles et à l'écoute à chaque fois que j'ai eu besoin d'eux malgré leurs emplois du temps parfois surchargés. Leurs points de vue et remarques, souvent complémentaires et toujours pertinents, qu'ils ont su m'exposer en faisant preuve de beaucoup de patience et de pédagogie, m'ont énormément apporté, même si je suis loin d'avoir assimilé toutes les informations qu'ils ont essayé de me transmettre. Mais outre l'étendue de leurs connaissances mathématiques, c'est aussi leur sympathie que j'ai beaucoup appréciée. Ce sont avant tout deux personnes dotées de qualités humaines indéniables ; fins psychologues, ils ont toujours su me motiver quand j'en avais besoin, et leur aide m'a été très précieuse dans les quelques petits moments de panique. Pour toutes ces raisons, j'espère que nos routes se recroiseront bientôt.

Yves Colin de Verdière et Steven Zelditch m'ont fait l'honneur de rapporter cette thèse ; je leur en suis extrêmement reconnaissant, et je les remercie pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux. Je souhaite également remercier Nicolas Lerner, Francis Nier et Stéphane Nonnenmacher pour avoir accepté de faire partie de mon jury. Je suis grandement honoré qu'un si prestigieux jury se réunisse pour examiner ma modeste contribution.

Le dernier chapitre de cette thèse est le fruit d'un travail en collaboration avec Álvaro Pelayo, qui m'a fait le plaisir de m'accueillir à St. Louis et de me présenter ce sujet qui m'était inconnu. Je l'en remercie, et j'espère sincèrement pouvoir continuer à travailler avec lui à l'avenir. J'en profite pour saluer son étudiant Joey, qui m'a rendu ce séjour encore plus agréable et m'a fait visiter cette belle ville de St. Louis.

J'ai préparé cette thèse au sein de l'IRMAR, dans de très bonnes conditions. Il fait bon vivre dans ce laboratoire et, pour parler de ce qui me concerne, dans l'équipe d'équations aux dérivées partielles. De plus, les personnels administratifs y effectuent un travail admirable ; je pense notamment à Carole, Chantal, Claude et Marie-Aude, dont j'ai apprécié l'efficacité et la bonne humeur permanente. D'autre part, j'exprime toute ma gratitude aux organisateurs des Journées Louis Antoine, plus spécialement à Serge Cantat et Jürgen

Angst, pour m'avoir proposé d'y exposer et, par la même occasion, m'avoir fait découvrir un sujet passionnant dont je ne soupçonnais pas l'existence. Je ne voudrais pas oublier la fameuse pause gourmande du mardi après-midi, dont je remercie les organisateurs. Enfin, merci à ceux qui ont partagé mon bureau, à savoir Nicolas puis Loïc et Felipe.

J'ai également sévi en tant que moniteur à l'ENS Rennes (puisqu'il faut maintenant l'appeler ainsi). J'ai ainsi pu découvrir cet aspect fascinant et exigeant du métier d'enseignant-chercheur qu'est l'enseignement. Merci à ceux qui m'ont accompagné dans cette tâche, c'est-à-dire Arnaud Debussche, Thibaut Deheuvels, Nicolas Raymond, Nicolas Souêtre et Rozenn Texier-Picard. Merci également à Michel Pierre pour m'avoir permis d'officier comme membre de jurys d'oraux blancs d'agrégation à Ker Lann. Bien sûr, je n'aurais rien pu faire sans élèves; merci donc aux motivés, aux travailleurs, à ceux qui ont osé poser des questions ou venir résoudre des exercices au tableau, à ceux qui ont été assez attentifs pour corriger les erreurs que je faisais dans mes mauvais jours, mais merci aussi aux autres, qui n'étaient de toute façon pas si nombreux. J'ai beaucoup apprécié la bonne ambiance qui a globalement régné dans ces divers TD, et j'espère avoir pu apporter quelque chose de mon côté.

Merci aussi à tous ceux qui font ou ont fait vivre le foot de l'IRMAR, qu'ils soient assidus ou qu'ils viennent seulement ponctuellement : Andrew, Bachir, Delphine, Fred, Grand Ju, Gweltaz, Hamdi, Jean-Philippe, Kodjo, Laurent, Mouton, Nizar, Pascal, Renan, Quentin, Tristan, Valentin, et tous ceux dont j'ai oublié ou n'ai jamais vraiment su le nom et qui viennent taper dans le ballon le vendredi soir. Tous contribuent à préserver ce moment de détente nécessaire en fin de semaine. J'espère que cette tradition se perpétuera longtemps!

Je ne serais pas en train d'apporter la dernière touche à la rédaction de ce manuscrit si je n'avais pas eu la chance d'être l'élève, fût-ce pour un an ou simplement un module, de professeurs de mathématiques passionnés ayant su me transmettre la curiosité mais aussi la rigueur inhérentes à cette matière. Chacun a apporté sa pierre à l'édifice, mais j'aimerais en citer quelques-uns qui m'ont particulièrement marqué, par ordre chronologique : M. Démézet (qu'il me pardonne d'avoir oublié son prénom), Marc Fleury, Roland Louboutin, Michel Pierre, Alain Chenciner. Bien évidemment, j'aurais pu citer l'ensemble de l'équipe pédagogique de l'ENS Rennes, dont je suis très content d'avoir été élève, tant pour l'enseignement qui y est prodigué que pour les rencontres que j'ai pu y faire.

Justement, merci à tous ceux que j'ai connus à cette époque de mon passage à l'ENS. En premier lieu, je remercie Élise et Naïck pour avoir toujours été à l'écoute de mes histoires et petits problèmes souvent inintéressants; leur disponibilité et leur patience m'ont fait beaucoup de bien. Je n'ai pas toujours été très agréable avec Élise; je suis d'autant plus heureux que notre amitié perdure. Quant à Naïck, elle mériterait un diplôme en psychologie; ma santé mentale pendant ces trois ans lui doit beaucoup. Merci à mon ami et colocataire Thomas, dont je ne me lasse pas d'entendre les histoires pour la énième fois et dont j'aime me moquer gentiment. Même si j'en ai parfois assez d'entendre parler de kinball (je salue en passant mon autre colocataire Thierry), il faut reconnaître que cela change des maths. Merci à Julien pour apprécier comme moi les jeux de mots laids, pour les parties de Pyramide et autres énigmes et pour avoir pratiquement risqué sa vie en conférence

pour me rapporter un autographe. Merci à Vassili pour contribuer sans cesse avec moi, Thomas et Julien à des débats hautement passionnants tels que « pain au chocolat contre chocolatine », ou encore « la Bretagne est-elle au nord ou à l'ouest ? ». Merci à Quentin et Romain pour avoir rendu l'année de préparation à l'agrégation bien plus sympathique, et pour tout le reste depuis ; merci au passage aux deux Lisa, en particulier à la première pour nous avoir supportés, moi et Grand Ju, lors des innombrables soirées foot chez elle et Quentin. Puisque j'en parle, merci à Quentin et Grand Ju pour les sempiternelles discussions footballistiques, mais aussi sur bien d'autres thèmes, et pour parfois rire à mes blagues (pas) drôles. Merci à Guillaume et Marie pour m'avoir si souvent accueilli chez eux et fait découvrir un grand nombre de jeux de société. Merci à Loris et Manue, auxquels je souhaite beaucoup de courage pour s'occuper des jumeaux. Merci à Yann pour ses discours politiques et surtout, pour me faire l'honneur de me tutoyer. Merci aussi à ceux que j'ai tout simplement aimé côtoyer, même si je n'ai pas forcément gardé le contact avec tous, bien que je le regrette parfois : Fabien, Florent, François, Jérémy, Hélène, Laurent, Quenton, Sébastien, Tuong-Huy, Xavier.

En préparant mon doctorat à Rennes, j'ai eu la chance de continuer à passer du temps avec plusieurs des personnes citées ci-dessus, mais j'ai également fait la connaissance de Boris et son flegme légendaire, Christophe et ses théories fumeuses, Kodjo et ses improbables excuses pour ne pas venir jouer le vendredi, et Salomé qui jongle avec les dates pour organiser le séminaire des doctorants en analyse ; merci d'ailleurs à ces derniers—Jean-Philippe, Julie, Hélène, Matthew pour citer quelques-uns de ceux qui n'apparaissent pas ailleurs dans ces lignes—de faire vivre celui-ci. Je réserve une place spéciale à mes frères et sœurs de thèse : ceux qui ont déjà soutenu, Quang Sang et son rire communicatif ainsi que Christophe et ses questions à rallonge, mais aussi Ophélie qui s'est lancée cette année dans cette grande aventure qu'est la thèse mais qui, encadrée par San et Laurent, est entre de bonnes mains. Je lui souhaite une bonne continuation, ainsi qu'aux autres doctorants que je croise sans vraiment les connaître, malheureusement.

Avant l'ENS et la thèse, il y a eu les classes préparatoires et les amis que j'ai connus là-bas, que je ne revois hélas pas assez souvent : les deux Alexandre, Bastien, Jean et Nicolas—qui m'étaient déjà familiers avant mais que j'ai surtout appris à connaître durant ces trois ans, les trois Samuel, Thomas, les deux Vincent, entres autres. Et puis il y a mes amis d'enfance, que j'aime retrouver tous les étés sur la plage dans mon Finistère natal : Thierry, Vianney, Vincent, et toute la bande.

Même si cela peut paraître ridicule, je ne pouvais pas omettre mes amis à quatre pattes Gino, Macha, Nougat et bien sûr Oslow. Je vous transmets des caresses en pensée.

Pour finir par le plus important, je voudrais exprimer toute ma gratitude aux membres de ma famille, qui me supportent depuis bien plus longtemps que ces trois dernières années, et qui m'ont toujours soutenu et énormément apporté. En passant du temps avec eux, j'ai eu la chance de pouvoir à chaque fois oublier pour quelques jours les petites contrariétés et autres réflexions amenées par ce travail. En particulier, merci à ma mère Ida pour s'être toujours bien occupée de moi, merci à ma sœur Nathalie pour notre complicité de toujours et son hospitalité, pour laquelle je remercie également mon beau-frère Damien et sa mère Andrée, merci aux deux petits monstres Ewan et Killian avec qui c'est toujours un plaisir

de jouer—même quand ils sont capricieux—et qui font bien rire leur tonton, merci à mon oncle Bruno pour ses visites régulières. J'espère pouvoir passer encore beaucoup de temps à leurs côtés, et j'ai bien sûr une pensée pour ceux qui n'ont malheureusement pas pu être là aujourd'hui.

Résumé

Dans cette thèse, nous prouvons des résultats de théorie spectrale, directe et inverse, dans la limite semi-classique, pour les opérateurs de Toeplitz autoadjoints sur les surfaces. Pour les opérateurs pseudo-différentiels, les résultats en question sont déjà connus, et il est naturel de vouloir les étendre aux opérateurs de Toeplitz. Les conditions de Bohr-Sommerfeld usuelles, qui caractérisent les valeurs propres proches d'une valeur régulière du symbole principal, ont été obtenues il y a quelques années seulement pour les opérateurs de Toeplitz. Notre contribution consiste en l'extension de ces conditions près de valeurs critiques non dégénérées. Nous traitons le cas d'une valeur critique elliptique à l'aide d'une technique de forme normale; l'opérateur modèle est la réalisation de l'oscillateur harmonique sur l'espace de Bargmann, dont le spectre est bien connu. Dans le cas d'une valeur critique hyperbolique, la forme normale ne suffit plus et nous complétons l'étude en faisant appel à des arguments dus à Colin de Verdière et Parisse, à qui l'on doit le résultat analogue dans le cas pseudo-différentiel. Enfin, nous établissons un résultat de théorie spectrale inverse pour les opérateurs de Toeplitz autoadjoints sur les surfaces; plus précisément, nous montrons que sous certaines hypothèses génériques, la connaissance du spectre à l'ordre deux dans la limite semi-classique permet de retrouver le symbole principal à symplectomorphisme près. Ce résultat s'appuie en grande partie sur l'écriture des règles de Bohr-Sommerfeld.

Abstract

In this thesis, we prove some direct and inverse spectral results, in the semiclassical limit, for self-adjoint Toeplitz operators on surfaces. For pseudodifferential operators, these results are already known, and it is natural to expect their extension to the Toeplitz setting. The usual Bohr-Sommerfeld conditions, characterizing the eigenvalues close to a regular value of the principal symbol, have been obtained a few years ago for Toeplitz operators. Our contribution consists in extending these conditions near nondegenerate critical values. We handle the case of an elliptic value thanks to a normal form technique; the model operator is the realization of the harmonic oscillator in the Bargmann space, whose spectrum is well-known. In the case of a hyperbolic value, the normal form is no longer sufficient and we conclude by using additional arguments due to Colin de Verdière and Parisse, who derived the analogous result for pseudodifferential operators. Finally, we write an inverse spectral result for self-adjoint Toeplitz operators on surfaces; more precisely, we show that under some generic hypotheses, the knowledge of the spectrum up to order two in the semiclassical limit allows to recover the principal symbol up to symplectomorphism. This result essentially relies on Bohr-Sommerfeld rules.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Cadre général	2
1.2	Opérateurs de Toeplitz	3
1.3	Problématique	4
1.4	Plan de la thèse	5
1.5	Conditions de Bohr-Sommerfeld	5
1.5.1	Près d'une valeur critique elliptique	6
1.5.2	Près d'une valeur critique hyperbolique	7
1.5.3	Résumé des résultats précédents	8
1.6	Problème inverse	9
1.7	Formules d'Euler-MacLaurin pour les polytopes	10
2	Opérateurs de Toeplitz	13
2.1	Quantification géométrique	14
2.2	Opérateurs de Toeplitz, calcul symbolique	17
2.3	La méthode des orbites coadjointes	19
2.3.1	Représentation coadjointe	19
2.3.2	Structure symplectique des orbites	20
2.3.3	Application moment	22
2.3.4	Le cas de $SU(2)$	23
2.3.5	La méthode des orbites dans le cas compact	25
2.3.5.1	La forme de Killing	26
2.3.5.2	Structure complexe des orbites coadjointes	27
2.3.5.3	Structure kählérienne des orbites	27
2.3.5.4	Quantification et représentations irréductibles	28
2.4	Exemples	29
2.4.1	Le plan complexe et l'espace de Bargmann	29
2.4.2	Sur le tore	30
2.4.2.1	Données de la quantification	30
2.4.2.2	Opérateurs de Toeplitz	31
2.4.2.3	Fonction hauteur	31
2.4.2.4	Hamiltonien de Harper	32
2.4.3	Sur la sphère	33

2.4.3.1	Quantification de la droite projective complexe	33
2.4.3.2	Coordonnées sur la sphère	34
2.5	Opérateurs de Toeplitz sur le plan complexe	35
2.5.1	Classes de symboles	36
2.5.2	Opérateurs de Toeplitz	36
3	Conditions de Bohr-Sommerfeld usuelles	47
3.1	Solutions microlocales	48
3.2	Le faisceau des solutions microlocales	48
3.3	Le cas régulier	49
3.4	Sections lagrangiennes	50
3.5	Holonomie	52
3.6	Avec un paramètre spectral	54
4	Conditions de Bohr-Sommerfeld dans le cas elliptique	57
4.1	Introduction	58
4.1.1	Main theorem	58
4.1.2	Link with the usual Bohr-Sommerfeld conditions	59
4.1.3	Structure of the article	60
4.2	Preliminaries and notations	60
4.2.1	Quantum spaces	60
4.2.2	Geometric notations	60
4.2.3	Admissible and negligible sequences	61
4.2.4	Toeplitz operators	61
4.3	Toeplitz operators on the complex plane	62
4.3.1	Bargmann spaces	62
4.3.2	Admissible and negligible sequences	63
4.3.3	Toeplitz operators	63
4.4	Fourier integral operators	65
4.5	Microlocal normal form	70
4.5.1	The local model	70
4.5.2	A symplectic Morse lemma	70
4.5.3	Semiclassical normal form	70
4.6	Bohr-Sommerfeld conditions	73
4.6.1	Statement of the result	73
4.6.2	Computation of the principal and subprincipal terms	76
4.6.3	First terms of the asymptotic expansion of the eigenvalues	79
4.7	An example on the torus	79
4.7.1	The setting	79
4.7.2	Figures	81
4.8	Remarque finale	84

5	Conditions de Bohr-Sommerfeld dans le cas hyperbolique	87
5.1	Introduction	88
5.1.1	Main result	88
5.1.2	Structure of the article	89
5.2	Preliminaries and notations	89
5.2.1	Symbol classes	89
5.2.2	Function spaces	90
5.2.3	Weyl quantization and pseudodifferential operators	90
5.2.3.1	Pseudodifferential operators	91
5.2.3.2	Wavefront set	91
5.2.4	Geometric quantization and Toeplitz operators	92
5.2.4.1	Admissible and negligible sequences	92
5.2.4.2	Toeplitz operators	92
5.2.4.3	The case of the complex plane	93
5.3	The Bargmann transform	95
5.3.1	Definition and first properties	95
5.3.2	Action on Toeplitz operators	96
5.3.3	Microlocalization and Bargmann transform	97
5.4	The sheaf of microlocal solutions	97
5.4.1	Microlocal solutions	97
5.4.2	The sheaf of microlocal solutions	98
5.4.3	Regular case	99
5.4.4	Lagrangian sections	99
5.4.5	Holonomy	101
5.4.6	Spectral parameter dependence	104
5.5	Microlocal normal form	104
5.5.1	Normal form on the Bargmann side	104
5.5.2	Link with the pseudodifferential setting	105
5.5.3	Microlocal solutions of $(P_k - E)u_k = 0$	106
5.6	Bohr-Sommerfeld conditions	107
5.6.1	The sheaf of standard basis	107
5.6.2	Singular invariants	108
5.6.3	Computation of the singular holonomy	110
5.6.4	Derivation of the Bohr-Sommerfeld conditions	117
5.6.5	The case of a unique saddle point	118
5.7	Examples	119
5.7.1	Height function on the torus	119
5.7.2	xy on the 2-sphere	124
5.7.3	Harper's Hamiltonian on the torus	127

6	Théorie spectrale inverse	131
6.1	Introduction	132
6.2	Graphes de Reeb	132
6.3	Topologie globale	134
6.3.1	Singularités	134
6.3.2	Composantes connexes	136
6.3.3	Équivalence topologique	137
6.4	Géométrie symplectique	137
6.4.1	Longueurs des arêtes	137
6.4.2	Séries de Taylor aux points de bifurcation	138
6.4.3	Équivalence symplectique	138
7	Formules d'Euler-MacLaurin pour des polytopes	141
7.1	Introduction	142
7.2	Main Result	143
7.3	Guillemin-Sternberg formulas	145
7.3.1	Formula for regular wedges	145
7.3.2	Formula for Delzant (i.e. regular and simple) polytopes	145
7.4	Asymptotic expansion for regular wedges	146
7.5	Explicit asymptotic expansion for wedges	148
7.5.1	General results	149
7.5.2	Results for regular 2 and 3-dimensional wedges	150
7.6	Expansion for polygons and 3D polytopes	155
7.7	Explicit formula in dimension $n = 2$	156
7.8	Example	159
7.9	Final remarks	160
8	Perspectives	161
8.1	Conditions de Bohr-Sommerfeld	162
8.2	Théorie spectrale inverse	162
8.3	Applications des opérateurs de Toeplitz	163
8.4	Formules d'Euler-MacLaurin	163

Chapitre 1

Introduction

1.1 Cadre général

Le sujet principal de cette thèse est la théorie spectrale (directe et inverse) des opérateurs de Toeplitz. Ceux-ci ont fait l'objet d'intenses recherches au cours des quarante dernières années, depuis leur introduction par Berezin [4], et apparaissent dans des domaines variés des mathématiques tels que la physique mathématique, comme par exemple en théorie quantique des champs topologique (voir [1, 25, 26, 77], etc.), ou encore les géométries algébrique et kählérienne (par exemple [41, 75, 87]). Leur étude fait intervenir des outils mathématiques divers comme la géométrie kählérienne, l'analyse microlocale, les systèmes intégrables.

Dans le formalisme hamiltonien de la mécanique classique, on a l'habitude de travailler sur le fibré cotangent de l'espace des positions. Par exemple, pour une particule de masse 1 à un degré de liberté soumise à une force dérivant d'un potentiel V , l'espace des phases est $T^*\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^2$ et le hamiltonien est $H(x, \xi) = \xi^2/2 + V(x)$. La dynamique de la particule est alors donnée par le flot hamiltonien associé à H . Du point de vue quantique, on représente ce hamiltonien par l'opérateur de Schrödinger $-\hbar^2 d^2/dx^2 + V$ agissant sur $L^2(\mathbb{R})$. Dans cette description, le spectre de cet opérateur correspond aux gammes d'énergies possibles du système. Sous certaines hypothèses sur le potentiel, le spectre de l'opérateur est composé d'une suite de valeurs propres ; les énergies sont quantifiées. Le carré du module d'une fonction propre normalisée correspond alors à la densité de probabilité de présence de la particule.

De manière plus générale, l'espace des phases de la mécanique classique est le fibré cotangent T^*X d'une variété X qui contient les positions possibles du système. Les états quantiques sont des éléments de l'espace de Hilbert $L^2(X)$. Par exemple, si (X, g) est une variété riemannienne, on peut considérer l'opérateur de Schrödinger $-\hbar^2 \Delta_g + V$ agissant sur $L^2(X)$, où Δ_g est l'opérateur de Laplace-Beltrami associé à la métrique g . La dynamique hamiltonienne sous-jacente est alors celle de $H(x, \xi) = \sum_{i,j} g_{ij} \xi_i \xi_j + V(x)$ sur T^*X . On peut effectuer un pas supplémentaire et inclure l'opérateur de Schrödinger dans une classe plus générale, à savoir celle des opérateurs pseudo-différentiels. Ceux-ci ont été, et sont toujours, très largement étudiés depuis leur introduction et leur développement par Duistermaat et Hörmander [61, 43] dans les années 70, puis par Maslov [78], Leray [74], Helffer et Robert [55] dans le cadre d'une théorie avec petit paramètre.

Néanmoins, il peut arriver de rencontrer des espaces de phases qui ne sont pas des fibrés cotangents, mais des variétés symplectiques compactes, dans des contextes physiques assez naturels. On peut par exemple penser aux systèmes contraints, au spin classique dont l'espace des phases est la sphère de dimension deux, ou encore aux systèmes obtenus par réduction symplectique de systèmes définis sur des cotangents et possédant des symétries. Dans ce cas, la théorie pseudo-différentielle n'est plus adaptée ; la quantification de ces espaces est alors donnée par la procédure de quantification géométrique, introduite par Kostant, afin d'étudier les représentations des groupes de Lie [68], et Souriau [90], dans les années 70. L'espace d'états est alors l'espace des sections holomorphes d'un fibré préquantifiant L au-dessus de la variété M supposée kählérienne, autrement dit un fibré en droites complexes holomorphe, hermitien et dont la connexion de Chern a pour

courbure $-i\omega$ avec ω la 2-forme fondamentale de M . Les opérateurs pertinents sont les opérateurs de Toeplitz, introduits par Berezin [4] et dont l'analyse microlocale a été initiée par Boutet de Monvel et Guillemin [12]. Remarquons que l'espace d'états est dans ce cas de dimension finie; le spectre de ces opérateurs est donc constitué d'un nombre fini de valeurs propres. Enfin, précisons que la quantification géométrique du plan complexe, faisant intervenir des espaces L^2 à poids exponentiels, et les opérateurs de Toeplitz, jouent un rôle dans d'autres circonstances comme par exemple l'étude de certains opérateurs pseudo-différentiels non-autoadjoints (voir [89, 60] entre autres).

On a parlé jusqu'ici de systèmes classiques et de leur quantification. Une question naturelle est de savoir en quelle mesure les propriétés d'un système quantique permettent de comprendre celles du système classique sous-jacent, quand celui-ci existe. C'est l'une des motivations de l'analyse semi-classique (voir les livres [86, 99, 106] par exemple), qui consiste à considérer la constante de Planck \hbar comme un petit paramètre que l'on peut faire tendre vers zéro et à étudier le comportement asymptotique des objets quantiques (spectre, états propres, etc.) dans cette limite. Dans le contexte de la quantification géométrique, on étudie cette limite en introduisant un grand paramètre k , qu'on voit comme l'inverse de la constante de Planck, et on remplace l'espace d'états par l'espace des sections du fibré $L^{\otimes k} \rightarrow M$. Les opérateurs de Toeplitz sont donc représentés par des matrices de taille croissante. Les opérateurs de Toeplitz avec paramètre semi-classique ont connu un essor récent, notamment à travers les travaux de Borthwick, Paul et Uribe [10], Charles [19], Ma et Marinescu [76], entre autres.

1.2 Opérateurs de Toeplitz

Soit M une variété kählérienne compacte, connexe, et de 2-forme fondamentale ω . Supposons M munie d'un fibré préquantifiant L , c'est-à-dire un fibré en droites complexes holomorphe et hermitien dont la connexion de Chern a pour courbure $-i\omega$. Soit K un autre fibré en droites complexes holomorphe et hermitien; on définit l'espace de Hilbert \mathcal{H}_k comme l'espace des sections holomorphes du fibré $L^{\otimes k} \otimes K$, pour tout entier positif k . Celui-ci est équipé du produit scalaire :

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_M h_k(\phi, \psi) \mu_M$$

avec h_k le produit hermitien sur $L^k \otimes K$ induit par ceux de L et K , et $\mu_M = \omega^{\wedge n}/n!$ la forme de Liouville sur M . Puisque M est compacte, \mathcal{H}_k est de dimension finie.

Les opérateurs de (Berezin-)Toeplitz, introduits par Berezin [4] et dont l'analyse microlocale a été initiée par Boutet de Monvel et Guillemin [12] (voir aussi [10, 19, 76]), agissant sur \mathcal{H}_k sont les opérateurs de la forme

$$T_k = \Pi_k M_{f(\cdot, k)} \Pi_k + O(k^{-\infty}),$$

avec $\Pi_k : L^2(M, L^{\otimes k} \otimes K) \rightarrow H^0(M, L^{\otimes k} \otimes K)$ le projecteur orthogonal de l'espace des sections de carré intégrable sur le sous-espace des sections holomorphes, M_f l'opérateur

de multiplication par f , et où $f(\cdot, k)$ est une suite de fonctions de $C^\infty(M)$ admettant un développement asymptotique de la forme $f(\cdot, k) \sim \sum_{\ell \geq 0} k^{-\ell} f_\ell$ pour la topologie C^∞ . Le premier terme f_0 dans ce développement est le symbole principal de T_k , et reflète certaines propriétés de T_k comme par exemple le fait d'être autoadjoint ou unitaire, etc. Le noyau de Π_k , appelé noyau de Szegő, est un élément très important de la théorie des opérateurs de Toeplitz ; les propriétés de ceux-ci découlent de son comportement asymptotique, notamment étudié par Boutet de Monvel et Sjöstrand [13], ou encore Zelditch [104]. Rappelons que la limite semi-classique est $k \rightarrow +\infty$; moralement, k correspond à l'inverse \hbar^{-1} de la constante de Planck. Quand nous évoquerons des résultats spectraux ou de théorie spectrale inverse, cela sera à comprendre, sauf mention contraire explicite, dans un sens semi-classique, c'est à dire asymptotiquement quand k tend vers l'infini.

Il est également possible de définir les opérateurs de Toeplitz sur le plan complexe (la difficulté résidant dans le défaut de compacité), en s'inspirant du cas des opérateurs \hbar -pseudo-différentiels (le récent livre de Zworski [106] constitue une référence très complète sur la théorie pseudo-différentielle ; on pourra également voir [29, 40] entre autres). Nous y reviendrons plus en détails dans un chapitre ultérieur.

1.3 Problématique

On voudrait établir un résultat de théorie spectrale inverse pour les opérateurs de Toeplitz autoadjoints à un degré de liberté. Une telle théorie a été développée par Vũ Ngọc dans [100] pour les opérateurs (\hbar -)pseudo-différentiels. La démarche repose essentiellement sur la description du spectre donnée par les conditions de Bohr-Sommerfeld. Ces dernières sont bien comprises pour les opérateurs pseudo-différentiels en dimension 2, que ce soient les conditions usuelles, qui caractérisent le spectre près d'une valeur régulière du symbole principal, ou leur pendant singulier, qui permet de trouver le spectre près d'une valeur critique non dégénérée de ce dernier.

Au niveau des opérateurs de Toeplitz, les conditions de Bohr-Sommerfeld usuelles ont été obtenues par Charles [20, 21]. Le comportement du spectre près de valeurs critiques du symbole principal en dimension 2, en revanche, était resté inexploré jusqu'à notre travail. Il est cependant raisonnable de s'attendre à ce que les résultats connus sur les opérateurs pseudo-différentiels se transposent dans le contexte des opérateurs de Toeplitz, étant donné que ces deux classes d'opérateurs ont les mêmes propriétés microlocales. Néanmoins, si on peut espérer que la forme des règles de Bohr-Sommerfeld reste la même, les objets géométriques intervenant dans celles-ci (actions, indice de Maslov), eux, sont assez différents. Ainsi, il s'agit de comprendre comment adapter les raisonnements et techniques du contexte pseudo-différentiel au cadre Toeplitz.

Enfin, une fois la description du spectre obtenue, il reste à voir en quelle mesure les invariants que l'on peut ainsi détecter permettent de retrouver le système classique sous-jacent. Une classification des systèmes intégrables en dimension 2 est donnée par le travail de Dufour, Molino et Toulet [42] et doit normalement permettre de conclure.

1.4 Plan de la thèse

Ce manuscrit s'organise de la manière suivante. Nous commençons par rappeler les définitions et principaux résultats concernant la quantification géométrique des variétés kählériennes compactes et les opérateurs de Toeplitz dans le chapitre 2. Nous en profitons pour évoquer la méthode des orbites et donner des exemples d'opérateurs de Toeplitz sur le tore, la sphère, le plan complexe. Dans le cas de ce dernier, nous adaptons la définition usuelle pour tenir compte du défaut de compacité.

Dans le chapitre 3, nous rappelons les conditions de Bohr-Sommerfeld usuelles, c'est-à-dire décrivant les valeurs propres d'un opérateur de Toeplitz autoadjoint près d'une valeur régulière du symbole principal. Nous donnons une preuve de celles-ci par le biais du langage des faisceaux, ce qui permet de traiter plus facilement les cas singuliers.

Le chapitre 4 présente le premier résultat principal de ce travail, à savoir l'écriture des conditions de Bohr-Sommerfeld près d'une valeur critique elliptique. Celles-ci s'obtiennent à l'aide d'un résultat de forme normale ; l'opérateur modèle est la réalisation de l'oscillateur harmonique dans l'espace de Bargmann, dont la théorie spectrale est très simple.

Nous obtenons une description du spectre près d'une valeur critique hyperbolique dans le chapitre 5. Dans ce cas, l'étude du modèle local ne permet pas d'acquérir toute l'information nécessaire à la sélection des valeurs propres, et nous concluons en utilisant des techniques dues à Colin de Verdière et Parisse.

Dans le chapitre 6, nous proposons un résultat de théorie spectrale inverse pour les opérateurs de Toeplitz autoadjoints à un degré de liberté. Nous montrons que, sous certaines hypothèses sur le symbole principal, la connaissance du comportement asymptotique du spectre par rapport au paramètre semi-classique entraîne celle du symbole principal à symplectomorphisme près (et donc de la dynamique hamiltonienne sous-jacente).

Enfin, dans le chapitre 7, nous quittons les opérateurs de Toeplitz et proposons de retrouver des formules d'Euler-MacLaurin pour des « coins » en dimension quelconque et des polytopes de Delzant en dimension 1, 2 et 3. Signalons que ce chapitre a été écrit en collaboration avec Álvaro Pelayo.

Nous concluons par un bref chapitre évoquant les perspectives de recherche et les questions soulevées par ce travail.

Dans le reste de ce chapitre introductif, nous allons maintenant détailler les principaux résultats de cette thèse.

1.5 Conditions de Bohr-Sommerfeld

Soit A_k un opérateur de Toeplitz autoadjoint sur la variété kählérienne compacte connexe (M, ω) de dimension 2. Étant donnée une valeur $E \in a_0(M)$ du symbole principal a_0 de A_k , les conditions de Bohr-Sommerfeld décrivent l'intersection du spectre de A_k et d'un voisinage de E en termes de quantités géométriques (actions et indices « à la Maslov »). Cependant, leur formulation peut varier considérablement en fonction du type topologique de E . Le cas usuel est celui où E est une valeur régulière de a_0 , et a été traité par Charles dans [20, 21] ; le résultat est qu'il existe $\eta > 0$ tel que $\text{Sp}(A_k) \cap [E - \eta, E + \eta]$

est, modulo $O(k^{-\infty})$, la réunion de N familles σ_j , où N est le nombre de composantes connexes du niveau $a_0^{-1}(E)$, caractérisées par des équations de la forme

$$\lambda \in \sigma_j \iff f^{(j)}(\lambda, k) \in 2\pi k^{-1}\mathbb{Z}, \quad (1.1)$$

où $f(\cdot, k)$ est une suite de fonctions de classe \mathcal{C}^∞ admettant un développement asymptotique en puissances négatives de k dont les coefficients contiennent les invariants géométriques liés au symbole de A_k : par exemple, $f_0^{(j)}$ est l'action principale associée à la composante connexe d'indice j , tandis que $f_1^{(j)}$ contient l'action sous-principale associée à cette composante connexe ainsi qu'un indice provenant des demi-formes. Nous définissons ces termes et rappelons ce résultat dans le chapitre 3 en donnant de celui-ci une démonstration s'appuyant sur la théorie des faisceaux, inspirée du travail de Vũ Ngọc dans le cas pseudo-différentiel [98, 97].

Dans le contexte des opérateurs pseudo-différentiels, les conditions de Bohr-Sommerfeld ont constitué un domaine de recherche actif au cours de ces dernières décennies. Le cas régulier a été examiné par Helffer et Robert dans [56]. Le cas elliptique, quant à lui, a été étudié par Colin de Verdière dans [30]. Finalement, Colin de Verdière et Parisse ont tout d'abord résolu le cas d'un niveau hyperbolique contenant un seul point critique [34], avant de traiter quelques années plus tard le cas d'un nombre arbitraire de points hyperboliques [35], tout ceci en dimension deux. En ce qui concerne les autres types de singularités, il reste encore beaucoup de travail à effectuer ; on peut par exemple mentionner l'étude des singularités de type foyer-foyer en dimension 4 (on s'intéresse alors à deux opérateurs de Toeplitz qui commutent) due à Vũ Ngọc [98].

Dans cette thèse, nous étendons les conditions de Bohr-Sommerfeld afin de décrire le spectre près des singularités non dégénérées du symbole principal d'un opérateur de Toeplitz autoadjoint en dimension deux.

1.5.1 Près d'une valeur critique elliptique

Dans le chapitre 4, nous obtenons les conditions de Bohr-Sommerfeld pour un opérateur de Toeplitz autoadjoint près d'une singularité elliptique en dimension 2, par le biais d'une réduction à un opérateur modèle, qui est la réalisation de l'oscillateur harmonique dans les espaces de Bargmann. Cela nous a amené à introduire des classes générales d'opérateurs de Toeplitz sur le plan complexe et à généraliser les désormais classiques opérateurs intégraux de Fourier, qui avaient été transposés par Boutet de Monvel et Guillemin [12] (pour le cas homogène) puis Zelditch [102] suivi par Charles [20, 21] (pour le cas semi-classique) au cadre Toeplitz, dans le but de nous servir d'une méthode de forme normale. Le résultat est que les conditions de Bohr-Sommerfeld elliptiques peuvent s'interpréter comme une « limite » des conditions usuelles, au sens où les valeurs propres proches de la valeur singulière sont sélectionnées par une équation analogue à (1.1) et dont les deux premiers coefficients (les termes principal et sous-principal dans le développement) sont les mêmes que dans celle-ci. Signalons que dans le contexte des opérateurs (\hbar) -pseudo-différentiels, ce cas a été traité par Colin de Verdière dans [30].

Plus précisément, soit A_k un opérateur de Toeplitz autoadjoint sur M ; son symbole (normalisé) $a_0 + \hbar a_1 + \dots$ est à valeurs réelles. Supposons que le symbole principal a_0

admet un minimum global au point $m_0 \in M$, avec $a_0(m_0) = 0$. Notons $\lambda_k^{(1)} \leq \lambda_k^{(2)} \leq \dots \leq \lambda_k^{(j)} \leq \dots$ les valeurs propres de A_k . Le résultat principal de ce chapitre est le suivant.

Théorème (Théorème 4.6.2). *Il existe $E^0 > 0$, une suite $g(\cdot, k)$ de fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ admettant un développement asymptotique de la forme $g(\cdot, k) \sim \sum_{\ell \geq 0} k^{-\ell} g_\ell$ pour la topologie \mathcal{C}^∞ , et un entier positif k_0 tel que pour tout entier $N \geq 1$ et pour tout $E \leq E^0$, il existe une constante $C_N > 0$ telle que pour $k \geq k_0$:*

$$\left(\lambda_k^{(j)} \leq E \text{ ou } E_k^{(j)} \leq E \right) \Rightarrow \left| \lambda_k^{(j)} - E_k^{(j)} \right| \leq C_N k^{-N}$$

où

$$E_k^{(j)} = g \left(k^{-1} \left(j + \frac{1}{2} \right), k \right), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Dès lors qu'on sait expliciter les g_ℓ , $\ell \geq 0$, cela permet d'obtenir des développements asymptotiques à tout ordre pour les valeurs propres de A_k plus petites que E^0 . Il s'avère que $g(\cdot, k)$ est construite comme l'inverse local d'une suite $f(\cdot, k)$ qui admet également un développement asymptotique $f(\cdot, k) \sim \sum_{\ell \geq 0} k^{-\ell} f_\ell$ pour la topologie \mathcal{C}^∞ , et les premier termes f_0, f_1 sont les mêmes que ceux du développement asymptotique de $f^{(1)}$ (il n'y a qu'une seule composante connexe ici) dans l'équation (1.1). Nous retrouvons ainsi les conditions de Bohr-Sommerfeld usuelles loin de la singularité, jusqu'à l'ordre $O(k^{-2})$.

1.5.2 Près d'une valeur critique hyperbolique

Dans le chapitre 5, nous traitons le cas d'une singularité hyperbolique avec plusieurs points critiques (toujours pour un opérateur de Toeplitz autoadjoint en dimension 2), étendant à cette occasion des techniques dues à Colin de Verdière, Parisse et Vũ Ngọc [34, 35, 37] au cas des opérateurs de Toeplitz. Les formes normales jouent encore un rôle crucial dans ce contexte, mais ne sont plus suffisantes pour écrire les règles de Bohr-Sommerfeld, à cause du fait que les états propres ne sont pas localisés dans un voisinage du point critique où l'on peut écrire la forme normale. Ces conditions impliquent des régularisations des quantités géométriques qui apparaissent dans le cas régulier. Au cours de ce travail, nous avons été amené à étendre l'approche faisceautique proposée par Vũ Ngọc [98] pour les opérateurs pseudo-différentiels au cadre des opérateurs de Toeplitz. Un autre outil important pour obtenir les conditions de Bohr-Sommerfeld singulières a été la transformée de Bargmann, qui fait le lien entre les opérateurs pseudo-différentiels et de Toeplitz sur le plan complexe ; pour cette étude, nous nous sommes donc penché sur quelques-unes de ses propriétés microlocales. Signalons que l'opérateur modèle qui apparaît dans ce travail a fait l'objet d'une étude de la part de Nonnenmacher et Voros [79].

Soit A_k un opérateur de Toeplitz autoadjoint sur M ; son symbole (normalisé) $a_0 + \hbar a_1 + \dots$ est à valeurs réelles. Supposons que 0 est une valeur critique du symbole principal a_0 , que le niveau $\Gamma_0 = a_0^{-1}(0)$ est connexe et que tous les points critiques sur Γ_0 sont non dégénérés et de type hyperbolique. Soit $S = \{s_j\}_{1 \leq j \leq n}$ l'ensemble de ces points critiques. Γ_0 est un graphe compact plongé dans M , et chacun de ses sommets est de degré 4. À

chaque sommet s_j , on note e_m , $m = 1, 2, 3, 4$, les arêtes locales, étiquetées en suivant l'ordre cyclique $(1, 3, 2, 4)$ (par rapport à l'orientation de M près de s_j) et de sorte que e_1, e_2 (respectivement e_3, e_4) correspondent aux variétés instables (respectivement stables) locales. On coupe $n + 1$ arêtes de Γ_0 , chacune correspondant à un cycle γ_i d'une base $(\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1})$ de $H_1(\Gamma_0, \mathbb{Z})$, de sorte que le graphe final soit un arbre maximal T . Notre résultat principal est le suivant :

Théorème (Théorème 5.6.1, théorème 5.6.4). *0 est une valeur propre de A_k à $O(k^{-\infty})$ près si et seulement si le système suivant de $3n + 1$ équations linéaires d'inconnues $(x_\alpha \in \mathbb{C}_k)_{\alpha \in \{\text{arêtes de } T\}}$ possède une solution non triviale :*

1. *si les arêtes $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ se rencontrent au sommet s_j , alors*

$$\begin{pmatrix} x_{\alpha_3} \\ x_{\alpha_4} \end{pmatrix} = T_j \begin{pmatrix} x_{\alpha_1} \\ x_{\alpha_2} \end{pmatrix},$$

2. *si α et β sont les extrémités d'un cycle coupé γ_i , alors*

$$x_\alpha = \exp(ik\theta(\gamma_i, k)) x_\beta,$$

avec l'orientation suivante : γ_i peut être représenté par un chemin fermé commençant sur l'arête α et se terminant sur l'arête β .

En outre, T_j est une matrice dépendant seulement d'un invariant semi-classique $\varepsilon_j(k)$ du système au point singulier s_j , et $\theta(\gamma, k)$ admet un développement asymptotique en puissances négatives de k . Les deux premiers termes de ce développement impliquent des régularisations des invariants géométriques (les actions et les indices) apparaissant dans les conditions de Bohr-Sommerfeld usuelles.

Pour l'analyse spectrale de A_k près de la valeur singulière, on utilise ce théorème en remplaçant A_k par $A_k - E$ pour E variant dans un voisinage de taille fixe de celle-ci. Loin de l'énergie critique, on retrouve les conditions de Bohr-Sommerfeld régulières.

Ce résultat est très similaire à celui obtenu par Colin de Verdière et Parisse [35] dans le cas des opérateurs pseudo-différentiels, mais la nouveauté réside dans le cadre de travail que nous avons mis en place afin d'étendre leurs techniques au cas des Toeplitz, et bien sûr dans les invariants géométriques spécifiques à ce contexte.

1.5.3 Résumé des résultats précédents

Les résultats précédents concernant les cas elliptique et hyperbolique peuvent se résumer de la manière suivante, en incluant les conditions de Bohr-Sommerfeld énoncées dans le cas régulier. Soit $E \in a_0(M)$ tel que le niveau $a_0^{-1}(E)$ ne contienne que des points réguliers, elliptiques ou hyperboliques. Désignons par $\mathcal{C}_j(E)$, $1 \leq j \leq N$, les composantes connexes de $a_0^{-1}(E)$. Alors il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $\text{Sp}(A_k) \cap [E - \varepsilon, E + \varepsilon]$ est proche à $O(k^{-\infty})$ de l'union des N familles σ_j , $1 \leq j \leq N$, décrites ci-après :

1. *si $\mathcal{C}_j(E)$ ne contient que des points réguliers, alors les éléments de σ_j sont donnés par l'équation (1.1),*

2. si $\mathcal{C}_j(E)$ est réduite à un point elliptique, alors les éléments de σ_j sont donnés par le théorème 4.6.2,
3. si $\mathcal{C}_j(E)$ contient des points hyperboliques, les λ appartenant à σ_j sont sélectionnés en appliquant le théorème 5.6.1 à $A_k - \lambda$.

1.6 Problème inverse

Les problèmes inverses constituent un sujet très populaire, et un nombre croissant de mathématiciens se sont penchés sur ces questions depuis le célèbre article de Kac [64] et son titre accrocheur : “*Can one hear the shape of a drum ?*” De nombreux aspects ont été explorés, depuis la question originelle à propos du laplacien sur un domaine du plan ou une variété riemannienne, étudiée notamment par Zelditch et ses collaborateurs [103, 59] jusqu’au cas des opérateurs pseudo-différentiels [83, 82], en passant par la reconstruction du potentiel pour les opérateurs de Schrödinger [32, 51, 50].

Dans le contexte des opérateurs de Toeplitz, seulement quelques résultats ont été obtenus jusqu’à maintenant. Dans [27], les auteurs ont prouvé que le spectre conjoint d’un système intégrable quantique torique d’opérateurs de Toeplitz détermine le système intégrable classique sous-jacent. Le résultat de [82] est que l’enveloppe convexe du spectre conjoint d’un système intégrable quantique (d’opérateurs de Toeplitz ou pseudo-différentiels) converge vers l’enveloppe convexe du spectre du système classique associé, ce qui fournit une nouvelle preuve du théorème d’isospectralité pour les systèmes intégrables toriques.

Dans l’article [100], Vũ Ngọc a récemment démontré que sous des hypothèses génériques, étant donné un opérateur pseudo-différentiel autoadjoint à un degré de liberté, dont le symbole principal est une fonction de Morse simple, on peut retrouver la dynamique classique à partir de la donnée du spectre modulo $O(\hbar^2)$. La preuve repose essentiellement sur les conditions de Bohr-Sommerfeld ; dès lors, une fois celles-ci démontrées, ce résultat peut être étendu sans effort particulier aux opérateurs de Toeplitz. C’est l’objet du chapitre 6, dont nous rappelons le résultat principal.

Soit (M, ω) une variété kählérienne compacte connexe de dimension 2, munie d’un fibré préquantifiant et éventuellement d’un fibré en droites holomorphe et hermitien auxiliaire. Soit A_k un opérateur de Toeplitz autoadjoint sur M , dont le symbole principal a_0 est une fonction de Morse simple, c’est-à-dire que tous les points critiques de a_0 sont non dégénérés et que deux d’entre eux ne peuvent pas avoir la même image par a_0 . On appelle *type symplectique* de (M, a_0) la classe d’équivalence de ce couple pour la relation « (M, a_0) équivaut à (\tilde{M}, \tilde{a}_0) si et seulement s’il existe un symplectomorphisme $\varphi : M \rightarrow \tilde{M}$ tel que $a_0 = \tilde{a}_0 \circ \varphi$ ». Nous démontrons le théorème suivant.

Théorème (Théorème 6.4.3). *Sous certaines hypothèses génériques, la connaissance du spectre de A_k modulo $O(k^{-2})$ détermine le type symplectique de (M, a_0) .*

En particulier, la connaissance du spectre approché entraîne celle de la dynamique classique sous-jacente.

1.7 Formules d'Euler-MacLaurin pour les polytopes

Notre dernier résultat sort du cadre des opérateurs de Toeplitz pour se concentrer sur les formules d'Euler-MacLaurin. Il y a récemment eu un regain d'intérêt pour celles-ci, principalement à cause des applications à la théorie spectrale des opérateurs différentiels et la géométrie kählérienne ; on renvoie par exemple aux articles récents de Zelditch [105], Guillemin-Wang [52], et Burns-Guillemin-Wang [16]. Les formules d'Euler-MacLaurin sont des expressions qui servent à approcher des sommes de Riemann de fonctions de classe C^∞ $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de la forme

$$\frac{1}{N^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \cap N\Delta} f\left(\frac{k}{N}\right) \quad (1.2)$$

où Δ est un polytope, en termes de f et de ses dérivées, et qui remontent à L. Euler et C. MacLaurin dans la première moitié du XIX^e siècle. Ce sujet a attiré beaucoup d'attention ces dernières années ; citons par exemple les travaux de Berline et Vergne [5], Brion et Vergne [14], Cappell et Shaneson [17], Guillemin et Sternberg [49], Guillemin et Stroock [54], Guillemin, Sternberg et Weitsman [53], Karshon, Sternberg et Weitsman [65], Shaneson [88], et Tate [91].

Dans un travail en collaboration avec Álvaro Pelayo [73], nous avons obtenu des formules d'Euler-MacLaurin asymptotiques pour des polytopes de Delzant (*i.e.* simples et réguliers) en dimensions 1, 2 et 3. Plus précisément, en partant des résultats de [49], nous avons montré que si f est lisse et à support compact, la quantité (1.2) admet un développement asymptotique en puissances négatives de N , dont les coefficients sont des sommes d'opérateurs intégral-différentiels appliqués à f , impliquant uniquement les dérivées de f dans des directions normales aux faces de Δ . Nous avons ainsi retrouvé une partie des résultats de Tate [91], qui avait obtenu des formules d'Euler-MacLaurin asymptotiques générales pour une classe de polytopes plus grande (pas forcément de Delzant), la différence étant que notre méthode utilise seulement de l'analyse élémentaire. Le théorème principal du chapitre 7 est le suivant.

Théorème (Théorème 7.2.1). *Soit $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Alors*

(i) *Si W est un coin régulier de dimension n dans \mathbb{R}^n , la somme de Riemann*

$$\frac{1}{N^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \cap NW} f\left(\frac{k}{N}\right)$$

est égale modulo $\mathcal{O}(N^{-\infty})$ à

$$\sum_{q \geq 0} N^{-q} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| = q}} C(W, \alpha) \int_{\bigcap_{\substack{1 \leq i \leq d \\ \alpha_i > 0}} \mathcal{H}_i} D^{q-\nu(\alpha)} f \cdot v_{\alpha-r(\alpha)},$$

où l'intégrale est prise sur W si l'intersection est vide, et l'intégrale sur un point signifie l'évaluation en ce point (nous renvoyons au chapitre 7 pour les définitions des termes de cette formule).

(ii) Si $\Delta \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \{1, 2, 3\}$, est un polytope de Delzant de dimension n à sommets dans \mathbb{Z}^n , alors pour tout $q \geq 1$ et toute face $F \in \mathcal{F}_m$ (ensemble des faces de codimension m de Δ) avec $m \leq q$, il existe un opérateur différentiel linéaire $R_q(F, \cdot)$ de degré $q - m$ dépendant seulement de F et impliquant uniquement des dérivées de f dans des directions normales à F tel que

$$\frac{1}{N^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \cap N\Delta} f\left(\frac{k}{N}\right) = \int_{\Delta} f + \sum_{q \geq 1} N^{-q} \sum_{\substack{1 \leq m \leq q \\ F \in \mathcal{F}_m}} \int_F^* R_q(F, f) + \mathcal{O}(N^{-\infty}).$$

Chapitre 2

Opérateurs de Toeplitz

Le but premier de ce chapitre est de rappeler la définition des opérateurs de Toeplitz sur une variété kählérienne compacte, ainsi que les principaux résultats utiles concernant ceux-ci. La quantification géométrique est maintenant devenue standard et a fait l'objet de nombreuses présentations (citons [68, 90] comme références historiques, [101] pour une synthèse relativement récente), mais sa version semi-classique, plus jeune, l'est sans doute un peu moins ; c'est pourquoi nous commençons par expliquer brièvement cette procédure. Celle-ci peut s'appliquer à l'étude des représentations irréductibles des groupes de Lie compacts ; c'est l'objet de la fameuse « méthode des orbites », que nous évoquons dans un second temps. Enfin, nous illustrons le propos à l'aide de quelques exemples simples d'opérateurs de Toeplitz en dimension deux, qui nous serviront pour tester numériquement nos résultats tout au long de ce travail : il s'agit d'opérateurs sur le tore, la sphère, l'espace de Bargmann. Concernant ce dernier, l'espace des phases est le plan complexe, qui n'est pas compact, ce qui nous a amené, afin de pouvoir y travailler avec des opérateurs de Toeplitz, à introduire des classes de symboles appropriées, très proches de celles utilisées dans le cas pseudo-différentiel.

2.1 Quantification géométrique des variétés kählériennes compactes

Soit M une variété kählérienne compacte connexe, dont la 2-forme fondamentale sera notée ω . Cela signifie que M est une variété munie d'une structure complexe intégrable, c'est-à-dire la donnée d'une section J du fibré $\text{End}(TM)$ vérifiant $J^2 = -\text{Id}$, et d'une forme symplectique ω , ces deux structures étant compatibles au sens où pour tout point m sur M et tous vecteurs $X, Y \in T_m M$, on a $\omega_m(J_m X, J_m Y) = \omega_m(X, Y)$ et $\omega_m(X, jX) > 0$ dès que X est non nul. Nécessairement, la dimension de M est paire, égale à $2n$. On suppose que M est munie d'un fibré préquantifiant, autrement dit d'un fibré en droites complexes $L \rightarrow M$ holomorphe, hermitien et dont la connexion de Chern ∇ a pour courbure $-i\omega$. L'existence d'un tel fibré n'est pas automatique ; elle est assurée si et seulement si la classe de cohomologie de $\omega/(2\pi)$ dans $H^2(M, \mathbb{R})$ est entière.

Dans la formulation hamiltonienne de la mécanique classique, l'objet central est la forme symplectique qui permet d'encoder les équations de la dynamique, et c'est la seule structure pertinente. Cependant, à la différence du cas où l'espace des phases est un fibré cotangent T^*X , il n'existe pas dans le cas compact de variables différentielles (base/fibre), et on perd ainsi un moyen de sélectionner, au niveau quantique, une représentation (position/moment) pour les fonctions d'onde ayant un sens physique. L'ajout de la structure complexe permet de remplacer celui-ci, en se substituant à la polarisation verticale de T^*X ; elle permet de sélectionner des sections holomorphes d'un fibré, comme on l'expliquera plus loin. Il existe des constructions permettant de travailler dans le cas où l'on suppose que la variété est symplectique mais non kählérienne, que ce soit en partant de la quantification du fibré cotangent T^*M de la variété symplectique compacte M [12, 18] ou bien de la donnée d'une structure presque complexe [11], ou en remplaçant le sous-espace des sections holomorphes par le noyau d'un opérateur de Dirac spin^c [76, 75]. Cependant, nous nous restreindrons dans ce travail au cadre kählérien, une des raisons étant que dans le cas des surfaces, qui nous intéressera dans les chapitres suivants de ce manuscrit, cela n'entraîne aucune restriction, puisqu'une structure complexe est automatiquement intégrable.

Dans les prescriptions usuelles de la quantification géométrique, on se contente des données de la structure kählérienne et du fibré préquantifiant. Cependant, il s'est avéré (voir par exemple [101, chapitre 10]) que cette procédure est plus naturelle si on la corrige par un fibré de demi-formes (c'est ce qu'on appelle la *correction méta-plectique* de la quantification géométrique). Un *fibré de demi-formes* est la donnée d'un couple (δ, φ) où $\delta \rightarrow M$ est un fibré en droites et $\varphi : \delta^2 \rightarrow \Lambda^{n,0} T^*M$ est un isomorphisme de fibrés en droites. Un tel fibré existe si et seulement si la première classe de Chern de M est paire ; lorsque M est une surface compacte connexe, cette condition est automatiquement vérifiée grâce à la formule de Riemann-Hurwitz [39, corollaire 10.10]. En général, on introduit un fibré en droites complexes holomorphe hermitien auxiliaire K , qui servira notamment à contenir la donnée d'un fibré de demi-formes (on écrira $K = \delta$ ou $K = L_1 \otimes \delta$ avec L_1 un fibré en droites complexes holomorphe et hermitien).

Soit k un entier supérieur à 1, qui jouera le rôle de paramètre semi-classique (la limite

semi-classique étant $k \rightarrow +\infty$); moralement, k correspond à l'inverse de la constante de Planck \hbar . On considère l'espace $\mathcal{H}_k = H^0(M, L^k \otimes K)$ des sections holomorphes du fibré $L^k \otimes K \rightarrow M$, et on définit le produit scalaire hermitien

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_M h_k(\phi, \psi) \mu_M$$

où h_k désigne la forme hermitienne sur $L^k \otimes K$ induite par celles de L et K et $\mu_M = |\omega^{\wedge n}|/n!$ est la mesure de Liouville associée à ω sur M . Puisque M est compacte, \mathcal{H}_k est de dimension finie et est donc muni d'une structure hilbertienne par la donnée de ce produit scalaire. Notons qu'un des premiers résultats semi-classiques est l'estimation de la dimension de cet espace

$$\dim(\mathcal{H}_k) \sim \left(\frac{k}{2\pi}\right)^n \text{vol}(M)$$

quand k tend vers $+\infty$. Celle-ci est à rapprocher de la formule de Weyl pour les opérateurs pseudo-différentiels (voir [40, théorème 10.1] par exemple). Revenant au cadre de la quantification géométrique, on peut donner, à l'aide des théorèmes de Riemann-Roch-Hirzebruch et d'annulation de Kodaira (voir [63] pour les énoncés de ces résultats et les définitions des classes caractéristiques) une formule exacte pour cette dimension quand k est suffisamment grand, à savoir

$$\dim(\mathcal{H}_k) = \int_M \left[\text{ch}(L^k \otimes K) \wedge \text{td}(M) \right]_{2n}$$

avec $\text{ch}(L^k \otimes K)$ le caractère de Chern du fibré $L^k \otimes K \rightarrow M$ et $\text{td}(M)$ la classe de Todd de M . Si on introduit la forme ω_K de sorte que $-i\omega_K$ soit la courbure de la connexion de Chern du fibré auxiliaire K , la formule précédente se réécrit :

$$\dim(\mathcal{H}_k) = \sum_{j=0}^n \left(\frac{k}{2\pi}\right)^j \int_M \frac{(\omega + k^{-1}\omega_K)^{\wedge j}}{j!} \wedge \text{td}_{n-j}(M)$$

avec $\text{td}_j(M)$ la classe de Todd d'ordre j de M . Puisque $\text{td}_0(M) = 1$, on a bien l'équivalent annoncé. Dans le cas où M est une surface, il n'est pas difficile de développer cette dernière formule. Introduisant la forme ω_c telle que la courbure de la connexion de Chern du fibré canonique $\Lambda^{1,0}T^*M$ est égale à $-i\omega_c$, on a $\text{td}_1(M) = -\omega_c/(4\pi)$ et donc

$$\dim(\mathcal{H}_k) = \frac{k}{2\pi} \text{vol}(M) + \frac{1}{2\pi} \int_M \left(\omega_K - \frac{\omega_c}{2} \right).$$

Ainsi, si $K = \delta$ est un fibré de demi-formes, le second terme du membre de droite s'annule et il vient

$$\dim(\mathcal{H}_k) = \frac{k}{2\pi} \text{vol}(M), \tag{2.1}$$

qui est bien un entier grâce à la condition assurant l'existence du fibré préquantifiant.

En termes physiques, M est l'espace des phases de la mécanique classique, tandis que \mathcal{H}_k est l'espace d'états de la mécanique quantique. La seconde étape est la quantification des observables : à une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on veut associer un opérateur $\text{Op}_k(f) : \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{H}_k$, de sorte que $\text{Op}_k(f)$ est symétrique si f est à valeurs réelles, et si possible en vérifiant les conditions de Dirac :

1. l'application Op_k est linéaire,
2. si f est constante, $\text{Op}_k(f)$ est la multiplication par cette constante,
3. pour $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $[\text{Op}_k(f), \text{Op}_k(g)] = (ik)^{-1}\text{Op}_k(\{f, g\})$.

Il est communément admis qu'une quantification raisonnable ne saurait vérifier ces trois conditions à la fois (voir par exemple les résultats du type des théorèmes de Groenewold-Van Hove [46, 95, 94], en particulier [45] pour le cas de la quantification géométrique). Une façon de résoudre ce problème est de ne plus demander à ce que la troisième condition soit vraie de manière exacte, mais plutôt au sens semi-classique : $[\text{Op}_k(f), \text{Op}_k(g)] = (ik)^{-1}\text{Op}_k(\{f, g\}) + R_k$ où R_k est un opérateur dont la norme subordonnée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un $O(k^{-2})$.

Supposons que $K = L_1 \otimes \delta$, avec (δ, φ) un fibré de demi-formes et L_1 un fibré en droites complexes holomorphe et hermitien. Si le flot hamiltonien de $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ préserve la structure complexe de M , alors la formule

$$\text{Op}_k(f) = f + \frac{1}{ik} \left(\nabla_{X_f}^{L^k \otimes L_1} \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes \mathcal{L}_{X_f} \right),$$

où $\nabla^{L^k \otimes L_1}$ est la connexion induite par les connexions de Chern de L et L_1 et \mathcal{L}_X agit sur les demi-formes de sorte que $2\varphi((\mathcal{L}_X s) \otimes s) = \mathcal{L}_X \varphi(s^{\otimes 2})$, avec \mathcal{L}_X la dérivée de Lie usuelle sur les formes, définit un opérateur de \mathcal{H}_k dans \mathcal{H}_k . Cette formule est à rapprocher de la prescription originelle de Kostant et Souriau. Maintenant, si on considère $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ quelconque, \mathcal{L}_{X_f} n'a aucune raison de préserver le fibré canonique, et il convient d'introduire

$$D_X : \Omega^{n,0}(M) \rightarrow \Omega^{n,0}(M), \quad \alpha \mapsto p(\mathcal{L}_X \alpha),$$

avec p la projection de $\Lambda^n T^*M$ sur $\Lambda^{n,0} T^*M$ de noyau $\bigoplus_{\ell=1}^n \Lambda^{n-\ell, \ell} T^*M$. Comme précédemment, on définit alors un opérateur D_X agissant sur les demi-formes tel que $2\varphi((D_X s) \otimes s) = D_X \varphi(s^{\otimes 2})$. On pose

$$\text{Op}_k(f) = \Pi_k \left(f + \frac{1}{ik} \left(\nabla_{X_f}^{L^k \otimes L_1} \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes D_{X_f} \right) \right), \quad (2.2)$$

où Π_k désigne le projecteur orthogonal de $L^2(M, L^k \otimes K)$ sur \mathcal{H}_k . On peut donner une écriture de $\text{Op}_k(f)$ ne dépendant que de K [21, section 1.4] :

$$\text{Op}_k : f \mapsto \Pi_k \left(f - \frac{i}{k} \nabla_{X_f}^{L^k \otimes K} + \frac{1}{2k} \Delta f \right) \Pi_k, \quad (2.3)$$

avec Δ le laplacien holomorphe agissant sur $\mathcal{C}^\infty(M)$. En adaptant un argument dû à Tuynman [93] (voir aussi [21]), on obtient

$$\text{Op}_k(f) = \Pi_k \left(f - \frac{1}{2k} \Delta f \right). \quad (2.4)$$

Ainsi, $\text{Op}_k(f)$ agit comme la projection de la multiplication par une fonction de $\mathcal{C}^\infty(M)$ dépendant de k .

2.2 Opérateurs de Toeplitz, calcul symbolique

Bien évidemment, on voudrait pouvoir composer deux tels opérateurs; la question qui se pose alors est la suivante : si f et g sont deux fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur M , a-t-on en général $\text{Op}_k(f) \circ \text{Op}_k(g) = \text{Op}_k(h)$ pour une certaine fonction $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$? Sur la formule (2.4), on voit d'une part qu'il est plus raisonnable d'espérer que $\text{Op}_k(f) \circ \text{Op}_k(g) = \text{Op}_k(h(\cdot, k))$, avec $h(\cdot, k)$ dépendant de k d'une manière restant à préciser, et d'autre part que le projecteur Π_k pose problème; c'est justement l'étude du comportement asymptotique du noyau de ce projecteur, menée dans [47] dans le cas homogène (voir aussi [104]), qui se révèle cruciale. On peut montrer, *via* des arguments de type phase stationnaire tirant parti de cette asymptotique, que le composé $\text{Op}_k(f) \circ \text{Op}_k(g)$ est de la forme

$$T_k = \Pi_k f(\cdot, k) \Pi_k + R_k \quad (2.5)$$

où $f(\cdot, k)$ est une suite de $\mathcal{C}^\infty(M)$ admettant un développement asymptotique de la forme $\sum_{\ell \geq 0} k^{-\ell} f_\ell$ pour la topologie \mathcal{C}^∞ et la norme de R_k est un $O(k^{-\infty})$. On appelle *opérateur de Toeplitz* tout opérateur du type (2.5); le résultat essentiel suivant est une conséquence des travaux de Boutet de Monvel et Guillemin [12] (voir aussi [9, 19, 47]).

Théorème 2.2.1. *L'ensemble \mathcal{T} des opérateurs de Toeplitz est une $*$ -algèbre admettant Π_k comme unité. L'application symbole*

$$\sigma_{\text{cont}} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)[[\hbar]],$$

qui envoie T_k sur la série formelle $\sum_{\ell \geq 0} \hbar^\ell f_\ell$ est bien définie, surjective, et de noyau l'idéal des opérateurs de Toeplitz qui sont un $O(k^{-\infty})$. Plus précisément, pour tout entier $\ell \geq 0$,

$$\|T_k\| = O(k^{-\ell}) \text{ si et seulement si } \sigma_{\text{cont}}(T_k) = O(\hbar^\ell).$$

Le symbole σ_{cont} est appelé *symbole contravariant*. On peut définir d'autres symboles, dont le *symbole normalisé*

$$\sigma_{\text{norm}}(T_k) = \left(\text{Id} + \frac{\hbar}{2} \Delta \right) \sigma_{\text{cont}}(T_k).$$

C'est le symbole que nous utiliserons systématiquement : quand nous parlerons de « symbole sous-principal », nous sous-entendrons le terme sous-principal du symbole normalisé. Ce symbole possède notamment la bonne propriété suivante : si S_k, T_k sont deux opérateurs de Toeplitz de symboles normalisés respectifs $f(\cdot, k)$ et $g(\cdot, k)$, alors $S_k T_k$ est un opérateur de Toeplitz de symbole principal $f_0 g_0$ et de symbole sous-principal

$$f_0 g_1 + f_1 g_0 + \frac{1}{2i} \{f_0, g_0\}.$$

De plus, le quantifié $\text{Op}_k(f)$ d'une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ défini par la formule (2.3) est un opérateur de Toeplitz de symbole principal f et de symbole sous-principal nul, comme on peut le vérifier facilement grâce à l'équation (2.4). En outre, le symbole σ_{norm} possède

les bonnes propriétés usuelles : un opérateur de Toeplitz est autoadjoint (respectivement unitaire) si et seulement si son symbole est à valeurs réelles (respectivement à valeurs dans S^1). Pour plus de détails sur le calcul symbolique, on renvoie aux articles [19, 21]. Citons néanmoins un dernier résultat très utile concernant le calcul fonctionnel des opérateurs de Toeplitz.

Proposition 2.2.2 ([19]). *Soit T_k un opérateur de Toeplitz autoadjoint de symbole $\sum_{\ell \geq 0} \hbar^\ell t_\ell$ et g une fonction de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors $g(T_k)$ est un opérateur de Toeplitz de symbole principal $g(t_0)$.*

L'algèbre d'opérateurs ainsi construite dépend du choix des données de la préquantification. Une question naturelle est de savoir jusqu'à quel point, et des éléments de réponse sont donnés par Charles dans [23]; un fibré préquantifiant étant fixé, au niveau principal, la classe d'isomorphisme de l'algèbre des opérateurs de Toeplitz ne dépend que de la classe d'isomorphisme du fibré auxiliaire K . C'est-à-dire que si j_a, j_b sont deux structures complexes compatibles avec ω , si $K_a \rightarrow (M, \omega, j_a), K_b \rightarrow (M, \omega, j_b)$ sont deux fibrés en droites complexes holomorphes et hermitiens et si on note $\mathcal{H}_k(a) = H_{j_a}^0(M, L^k \otimes K_a)$ et $\mathcal{H}_k(b) = H_{j_b}^0(M, L^k \otimes K_b)$ les espaces de Hilbert correspondants, alors il existe un opérateur intégral de Fourier $U_k : \mathcal{H}_k(a) \rightarrow \mathcal{H}_k(b)$ vérifiant $U_k^* U_k = \text{Id}_{\mathcal{H}_k(a)}$ et $U_k U_k^* = \text{Id}_{\mathcal{H}_k(b)}$ pour k suffisamment grand si et seulement si les fibrés K_a et K_b sont isomorphes en tant que fibrés hermitiens. Pour un tel opérateur U_k , si T_k^a est un opérateur de Toeplitz agissant sur $\mathcal{H}_k(a)$, alors $U_k T_k^a U_k^*$ est un opérateur de Toeplitz agissant sur $\mathcal{H}_k(b)$ de même symbole principal. Le fait remarquable est que le choix de la structure complexe n'intervient pas. Si on veut comprendre ce qu'il se passe au niveau sous-principal, il convient de s'intéresser aux fibrés de demi-formes. Supposons que M admet au moins un fibré de demi-formes et que $H^1(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \{0\}$ (ce qui assure que tous les fibrés de demi-formes au-dessus de M sont équivalents); si $\delta_a \rightarrow M, \delta_b \rightarrow M$ sont deux fibrés de demi-formes, et si $\mathcal{H}_k(a) = H_{j_a}^0(M, L^k \otimes \delta_a)$ et $\mathcal{H}_k(b) = H_{j_b}^0(M, L^k \otimes \delta_b)$, alors il existe un opérateur intégral de Fourier $U_k : \mathcal{H}_k(a) \rightarrow \mathcal{H}_k(b)$ vérifiant les mêmes propriétés que précédemment. En outre, les symboles principaux et sous-principaux de T_k^a et T_k^b coïncident.

Enfin, notons que, comme l'avaient déjà exploité Boutet de Monvel et Guillemin [12] dans le cadre de la théorie homogène (sans petit paramètre), les opérateurs de Toeplitz ont les mêmes propriétés microlocales que les opérateurs pseudo-différentiels, au sens où il existe localement des opérateurs intégraux de Fourier « presque unitaires » (nous donnerons une véritable définition plus loin) dont l'action par conjugaison envoie les opérateurs de Toeplitz sur les opérateurs pseudo-différentiels. Dans un cadre semi-classique, on peut trouver une discussion de cette équivalence dans [24]. En outre, nous étudions celle-ci dans le cas particulier des opérateurs de Toeplitz définis sur les espaces de Bargmann (qui apparaissent dans la quantification géométrique du plan complexe) dans la section 5.3, en tirant profit des propriétés de la transformée de Bargmann, qui définit un opérateur de Fourier unitaire global. Dans le cas général, on peut construire localement des opérateurs intégraux de Fourier pour se ramener aux espaces de Bargmann (c'est d'ailleurs la démarche de départ des chapitres 4 et 5).

Grâce à cette équivalence microlocale, on s'attend à ce que les résultats obtenus pour

les opérateurs pseudo-différentiels s'étendent aux opérateurs de Toeplitz. Néanmoins, les invariants géométriques qui entrent en jeu (actions, indices de Maslov) ne sont pas de même nature et les techniques employées, si elles peuvent s'adapter au cadre de la quantification géométrique, ne se transposent pas telles quelles. Ainsi, l'analyse semi-classique des opérateurs de Toeplitz n'est pas une conséquence triviale de celle des opérateurs pseudo-différentiels.

2.3 La méthode des orbites coadjointes

Il est particulièrement intéressant d'étudier les orbites sous l'action coadjointe d'un groupe de Lie sur le dual de son algèbre de Lie. D'une part, celles-ci fournissent une vaste classe d'exemples de variétés symplectiques (et même kähleriennes dans le cas compact). D'autre part, il existe une philosophie générale, qui se traduit par des résultats concrets dans un certain nombre de cas, appelée « méthode des orbites », qui prédit qu'on peut comprendre les représentations irréductibles des groupes de Lie à travers la quantification de leurs orbites coadjointes. Pour une introduction à cette méthode et une synthèse des divers résultats qu'elle a permis d'obtenir mais aussi de ses écueils, nous renvoyons à l'article [67]. Enfin, les calculs dans le cas de $G = SU(2)$ donnent un éclairage sur la quantification géométrique de la sphère.

2.3.1 Représentation coadjointe

Soit G un groupe de Lie compact d'élément neutre e et $\mathfrak{g} = T_e G$ son algèbre de Lie. Le groupe G agit sur lui-même par conjugaison :

$$G \times G \rightarrow G, \quad (g, x) \mapsto A_g(x) = gxg^{-1};$$

e est un point fixe pour cette action. On obtient donc une action de \mathfrak{g} sur \mathfrak{g} , appelée action adjointe, donnée par

$$\text{Ad}_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, \quad \xi \mapsto dA_g(e)\xi = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g \exp(t\xi) g^{-1},$$

où $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ désigne l'application exponentielle. On peut alors en déduire une action de G sur le dual \mathfrak{g}^* de \mathfrak{g} en posant pour $g \in G$, $\text{Ad}_g^* = (\text{Ad}_{g^{-1}})^*$ (avec g^{-1} pour avoir une action à gauche), c'est-à-dire

$$\forall (\ell, \xi) \in \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \quad \langle \text{Ad}_g^*(\ell), \xi \rangle = \langle \ell, \text{Ad}_{g^{-1}}(\xi) \rangle$$

avec $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$ l'appariement naturel donné par $\langle \ell, \xi \rangle = \ell(\xi)$. Il peut être utile de considérer les versions infinitésimales de ces actions, autrement dit les actions ad_η et ad_η^* , $\eta \in \mathfrak{g}$ définies par

$$\forall \xi \in \mathfrak{g} \quad \text{ad}_\eta(\xi) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(t\eta)}(\xi)$$

et

$$\forall \ell \in \mathfrak{g}^* \quad \text{ad}_\eta^*(\ell) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(t\eta)}^*(\ell).$$

On peut fournir une expression simplifiée de celles-ci. Introduisons le crochet de Lie $[\cdot, \cdot]$ sur \mathfrak{g} provenant des champs de vecteurs invariants à gauche. Plus précisément, si $\xi \in \mathfrak{g}$, le champ de vecteurs invariant à gauche associé à ξ est $X_\xi^L(g) = dL_g(e)\xi$ où L_g est la multiplication à gauche par g dans G : $L_g(h) = gh$; le crochet de Lie est alors donné par

$$[\xi, \eta] = \mathcal{L}_{X_\xi^L} X_\eta^L.$$

Lemme 2.3.1. *Soit $\eta \in \mathfrak{g}$. Alors :*

1. $\forall \xi \in \mathfrak{g}, \quad \text{ad}_\eta(\xi) = [\eta, \xi],$
2. $\forall \ell \in \mathfrak{g}^*, \forall \xi \in \mathfrak{g}, \quad \langle \text{ad}_\eta^*(\ell), \xi \rangle = \langle \ell, [\xi, \eta] \rangle.$

Démonstration. Rappelons tout d'abord qu'on peut également définir le champ de vecteurs invariant à droite engendré par $\xi \in \mathfrak{g}$ en remplaçant la multiplication à gauche L_g par la multiplication à droite R_g . En outre, le flot de X_ξ^L est donné par $\phi_t^\xi(g) = g \exp(t\xi)$ et satisfait $(\phi_t^\xi)^{-1}(h) = h \exp(-t\xi) = R_{\exp(-t\xi)}(h)$.

Par définition, $\text{ad}_\eta(\xi) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} dA_{\exp(t\xi)}(e)\xi$. Mais pour $g \in G$, on a $A_g = R_{g^{-1}} \circ L_g$ et donc $dA_g(e) = dR_{g^{-1}}(g) \circ dL_g(e)$. On en déduit

$$\begin{aligned} \text{ad}_\eta(\xi) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} dR_{\exp(-t\eta)}(\exp(t\eta)) \left(dL_{\exp(t\eta)}(e)\xi \right) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d(\phi_t^\eta)^{-1}(\phi_t(e)) X_\xi^L(\phi_t(e)) \\ &= (\mathcal{L}_{X_\eta^L} X_\xi^L)(e) \end{aligned}$$

et on obtient la formule annoncée dans le premier point. Le second est une conséquence directe de celle-ci. \square

2.3.2 Structure symplectique des orbites

Il s'avère que les orbites pour l'action coadjointe sont des variétés symplectiques ; attachons-nous à démontrer ce fait. Soit $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$ une orbite pour l'action coadjointe, c'est-à-dire qu'il existe $\ell \in \mathfrak{g}^*$ tel que Ω est l'ensemble des $\text{Ad}_g^*(\ell)$ pour g parcourant G . On note $\text{Stab}(\ell) = \{g \in G, \text{Ad}_g^*(\ell) = \ell\} \subset G$ le stabilisateur de $\ell \in \mathfrak{g}^*$. Si $\ell \in \Omega$, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Stab}(\ell) \rightarrow G \rightarrow \Omega \rightarrow 0$$

dont découle la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{stab}(\ell) = T_e \text{Stab}(\ell) \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow T_\ell \Omega \rightarrow 0.$$

Le quotient $\mathfrak{g}/\text{stab}(\ell)$ s'identifie à l'espace tangent $T_\ell \Omega$ via l'application $\xi \mapsto \text{ad}_\xi^*(\ell)$. Pour construire une forme bilinéaire sur $T_\ell \Omega$, il suffit donc de trouver une forme bilinéaire sur \mathfrak{g} dont le noyau contient $\text{stab}(\ell)$.

Lemme 2.3.2. *L'application $B_\ell : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$, $(\xi, \eta) \mapsto \langle \ell, [\eta, \xi] \rangle$ est une forme bilinéaire antisymétrique sur \mathfrak{g} dont le noyau est $\text{stab}(\ell)$. De plus, elle vérifie*

$$\forall g \in \text{Stab}(\ell), \forall \xi, \eta \in \mathfrak{g}, \quad B_\ell(\text{Ad}_g(\xi), \text{Ad}_g(\eta)) = B_\ell(\xi, \eta). \quad (2.6)$$

Démonstration. B_ℓ est clairement bilinéaire antisymétrique. En outre, son noyau est l'ensemble des $\xi \in \mathfrak{g}$ tels que pour tout $\eta \in \mathfrak{g}$, $\langle \text{ad}_\xi^*(\ell), \eta \rangle = 0$; c'est la caractérisation de l'espace tangent $\text{stab}(\ell)$. Maintenant, soit $g \in \text{Stab}(\ell)$; on a

$$B_\ell(\text{Ad}_g(\xi), \text{Ad}_g(\eta)) = \langle \ell, [\text{Ad}_g(\eta), \text{Ad}_g(\xi)] \rangle.$$

Or on vérifie que $[\text{Ad}_g(\eta), \text{Ad}_g(\xi)] = \text{Ad}_g([\eta, \xi])$; cela implique que

$$B_\ell(\text{Ad}_g(\xi), \text{Ad}_g(\eta)) = \langle \text{Ad}_{g^{-1}}^*(\ell), [\eta, \xi] \rangle,$$

ce qui permet de conclure que $B_\ell(\text{Ad}_g(\xi), \text{Ad}_g(\eta)) = B_\ell(\xi, \eta)$ car $g \in \text{Stab}(\ell)$. \square

On obtient donc une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée sur chaque espace tangent $T_\ell\Omega$ qui s'exprime ainsi :

$$\omega_\ell(\text{ad}_\xi^*(\ell), \text{ad}_\eta^*(\ell)) = B_\ell(\xi, \eta).$$

Lemme 2.3.3. *La 2-forme ω est fermée.*

Démonstration. Si on pose $X = \text{ad}_\xi^*(\ell)$, $Y = \text{ad}_\eta^*(\ell)$ et $Z = \text{ad}_\zeta^*(\ell)$, on a :

$$\begin{aligned} (d\omega)_\ell(X, Y, Z) &= \mathcal{L}_X\omega_\ell(Y, Z) - \mathcal{L}_Y\omega_\ell(X, Z) + \mathcal{L}_Z\omega_\ell(X, Y) \\ &\quad - \omega_\ell([X, Y], Z) + \omega_\ell([X, Z], Y) - \omega_\ell([Y, Z], X). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Or $\omega_\ell(\text{ad}_\eta^*(\ell), \text{ad}_\zeta^*(\ell)) = \langle \ell, [\zeta, \eta] \rangle$ donc

$$\mathcal{L}_{\text{ad}_\xi^*(\ell)}\omega_\ell(\text{ad}_\eta^*(\ell), \text{ad}_\zeta^*(\ell)) = \langle \text{ad}_\xi^*(\ell), [\zeta, \eta] \rangle = \langle \ell, [[\zeta, \eta], \xi] \rangle;$$

on en déduit que la somme des trois premiers termes du membre de droite dans (2.7) est égale à

$$\langle \ell, [\xi, [\eta, \zeta]] + [\zeta, [\xi, \eta]] + [\eta, [\zeta, \xi]] \rangle$$

qui est nul grâce à l'identité de Jacobi. En outre, on a

$$\omega_\ell\left(\left[\text{ad}_\xi^*(\ell), \text{ad}_\eta^*(\ell)\right], \text{ad}_\zeta^*(\ell)\right) = \omega_\ell\left(\text{ad}_{[\xi, \eta]}^*(\ell), \text{ad}_\zeta^*(\ell)\right) = \langle \ell, [\zeta, [\xi, \eta]] \rangle$$

ce qui permet de montrer que la somme des trois derniers termes s'annule. \square

Ainsi, l'orbite coadjointe Ω est munie de la forme symplectique ω , dite forme de Kirillov-Kostant-Souriau.

2.3.3 Application moment

On a même encore mieux : les orbites sont des variétés symplectiques munies de la G -action donnée par l'action coadjointe, et cette action est en fait hamiltonienne. Soit Ω une orbite coadjointe munie de la forme ω de Kirillov-Kostant-Souriau.

Lemme 2.3.4. *L'action coadjointe de G sur Ω s'effectue par symplectomorphismes.*

Démonstration. Soient $\ell \in \Omega$ et $g \in \text{Stab}(\ell)$. Alors le pullback de ω par Ad_g^* est donné par

$$((\text{Ad}_g^*)^*\omega)_\ell(\text{ad}_\xi^*(\ell), \text{ad}_\eta^*(\ell)) = \omega_\ell(\text{Ad}_g^*(\text{ad}_\xi^*(\ell)), \text{Ad}_g^*(\text{ad}_\eta^*(\ell)))$$

car $g \in \text{Stab}(\ell)$ et Ad_g^* est linéaire. Mais

$$\begin{aligned} \langle \text{Ad}_g^*(\text{ad}_\xi^*(\ell)), \zeta \rangle &= \langle \text{ad}_\xi^*(\ell), \text{Ad}_{g^{-1}}(\zeta) \rangle \\ &= \langle \ell, [\text{Ad}_{g^{-1}}(\zeta), \xi] \rangle \\ &= \langle \ell, \text{Ad}_{g^{-1}}([\zeta, \text{Ad}_g(\xi)]) \rangle \\ &= \langle \text{Ad}_g^*(\ell), [\zeta, \text{Ad}_g(\xi)] \rangle \\ &= \langle \ell, [\zeta, \text{Ad}_g(\xi)] \rangle, \end{aligned}$$

donc $\text{Ad}_g^*(\text{ad}_\xi^*(\ell)) = \text{ad}_{\text{Ad}_g(\xi)}^*(\ell)$; par conséquent, il vient que

$((\text{Ad}_g^*)^*\omega)_\ell(\text{ad}_\xi^*(\ell), \text{ad}_\eta^*(\ell)) = B_\ell(\text{Ad}_g(\xi), \text{Ad}_g(\eta))$, et on conclut par la propriété (2.6). \square

Définition 2.3.5. Soit (M, ω) une variété symplectique sur laquelle agit un groupe de Lie G par symplectomorphismes (on dit que l'action est symplectique). L'action est dite *hamiltonienne* s'il existe une application $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ qui vérifie

1. $\forall \xi \in \mathfrak{g}, \quad d\mu^\xi + i_{\xi^\#}\omega = 0$ où $\mu^\xi = \langle \mu, \xi \rangle$ et $\xi^\#$ est le champ de vecteurs sur M donné par $\xi^\#(m) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(t\xi).m$,
2. μ est équivariante par rapport à l'action de G sur M et l'action coadjointe de G sur \mathfrak{g}^* , en d'autres termes

$$\forall (g, m) \in G \times M \quad \mu(g.m) = \text{Ad}_g^*(\mu(m)).$$

Une telle application μ est appelée *application moment* pour l'action de G sur M .

Proposition 2.3.6. *L'action coadjointe de G sur Ω est hamiltonienne, et l'inclusion $\mu : \Omega \rightarrow \mathfrak{g}^*$ est une application moment pour celle-ci.*

Démonstration. Dans ce cas, le champ de vecteur engendré par ξ sur M est $\xi^\# = \text{ad}_\xi^*$, ce qui implique que $(i_{\xi^\#}\omega)_\ell(\text{ad}_\eta^*(\ell)) = \omega_\ell(\text{ad}_\xi^*(\ell), \text{ad}_\eta^*(\ell)) = \langle \ell, [\eta, \xi] \rangle$. D'autre part, on a $\mu^\xi(\ell) = \langle \ell, \xi \rangle$ donc $d\mu^\xi(\ell) \text{ad}_\eta^*(\ell) = \langle \ell, [\xi, \eta] \rangle$. \square

2.3.4 Le cas de $SU(2)$

Les exemples typiques de groupes de Lie sont les groupes matriciels ; on traite ici le cas du groupe spécial unitaire $SU(2)$, qui permet d'illustrer ce qui précède et intervient dans la quantification de la sphère. Dans ce paragraphe, on va identifier les orbites coadjointes et expliciter la forme de Kirillov-Kostant-Souriau.

Le groupe de Lie $SU(2)$ est formé des matrices carrées de taille 2 qui sont unitaires et de déterminant 1 ; c'est l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ est formée des matrices du type

$$\begin{pmatrix} i\alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & -i\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \beta \in \mathbb{C};$$

elle s'identifie avec \mathbb{R}^3 à travers l'isomorphisme

$$\varphi : \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} i\alpha & \beta_1 + i\beta_2 \\ -\beta_1 + i\beta_2 & -i\alpha \end{pmatrix} \mapsto (\beta_2, -\beta_1, \alpha),$$

de sorte que $\varphi(J_\ell) = e_\ell, \ell = 1, 2, 3$, où

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

et (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de \mathbb{R}^3 . Le crochet de Lie dans $\mathfrak{su}(2)$ est le commutateur $[A, B] = AB - BA$; un calcul direct (en raisonnant sur les éléments de base J_1, J_2, J_3) démontre le lemme suivant :

Lemme 2.3.7. *Soient $A, B \in \mathfrak{su}(2)$; alors $\varphi([A, B]) = 2\varphi(A) \wedge \varphi(B)$, le symbole \wedge désignant le produit vectoriel.*

En outre, $\mathfrak{su}(2)$ est munie du produit hermitien

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (A, B) \mapsto \frac{1}{2} \text{Tr}(A^* B)$$

qui est invariant par l'action adjointe de $SU(2)$. Il permet donc d'identifier $\mathfrak{su}(2)^*$ à $\mathfrak{su}(2)$ et les actions adjointe et coadjointe. De plus, la base (J_1, J_2, J_3) est orthonormale pour ce produit scalaire. Encore une fois, un calcul direct donne :

Lemme 2.3.8. *Soient $A, B \in \mathfrak{su}(2)$; alors $\langle A | B \rangle = (\varphi(A) | \varphi(B))$ avec $(\cdot | \cdot)$ le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^3 .*

On est alors en mesure de comprendre à quoi ressemblent les orbites coadjointes. En effet, le produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ étant invariant par l'action coadjointe, deux matrices A et B appartenant à la même orbite vérifient $\|\varphi(A)\|^2 = \|\varphi(B)\|^2$. On en déduit que l'image de l'orbite de $A \in \mathfrak{su}(2)$ par φ est contenue dans la sphère de \mathbb{R}^3 centrée à l'origine et de rayon $\|\varphi(A)\|$. Reste à montrer que l'action est transitive sur les sphères. Il suffit de se rappeler qu'une matrice de $\mathfrak{su}(2)$ est conjuguée par une matrice de $SU(2)$ à une matrice diagonale dont les entrées sont $i\lambda$ et $-i\lambda$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$, et qu'alors $\langle A | A \rangle = \lambda^2$.

Intéressons-nous dorénavant au cas $R = 1$. Remarquons que $SU(2)$ agit de manière naturelle sur \mathbb{C}^2 ; on en déduit une action sur la droite projective complexe $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Or $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ s'identifie à la sphère $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ via la projection stéréographique $\pi_N : S^2 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ (de pôle nord sur le plan équatorial).

Lemme 2.3.9. *L'action naturelle de $SU(2)$ sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ correspond à l'action coadjointe de $SU(2)$ sur $\Omega = \varphi^{-1}(S^2)$:*

$$\forall A \in SU(2), \forall u \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1, \quad (\varphi^{-1} \circ \pi_N^{-1})(A.u) = A(\varphi^{-1} \circ \pi_N^{-1})(u)A^{-1}.$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ et posons $Z = (\varphi^{-1} \circ \pi_N^{-1})([1 : z])$. Puisque $\pi_N^{-1}([1 : z]) = \frac{1}{1+|z|^2}(2\Re(z), 2\Im(z), |z|^2 - 1)$, on a

$$Z = \frac{i}{1+|z|^2} \begin{pmatrix} 1 - |z|^2 & 2\bar{z} \\ 2z & |z|^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Soit donc $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, un élément de $SU(2)$. Après calcul, on obtient que $AZA^{-1} = i(1+|z|^2)^{-1}B$ avec

$$B = \begin{pmatrix} (|\alpha|^2 - |\beta|^2)(1 - |z|^2) - 4\Re(\alpha\beta\bar{z}) & 2(\alpha\bar{\beta}(1 - |z|^2) + \alpha^2\bar{z} - \bar{\beta}^2z) \\ 2(\bar{\alpha}\beta(1 - |z|^2) + \bar{\alpha}^2z - \beta^2\bar{z}) & 4\Re(\alpha\beta\bar{z}) - (|\alpha|^2 - |\beta|^2)(1 - |z|^2) \end{pmatrix}.$$

D'autre part, $A.[1 : z] = [1 : w]$ avec $w = (\beta + \bar{\alpha}z)/(\alpha - \bar{\beta}z)$. Il vient alors $(\varphi^{-1} \circ \pi_N^{-1})(A.[1 : z]) = i(|\alpha - \bar{\beta}z|^2 + |\beta + \bar{\alpha}z|^2)^{-1}C$ où

$$C = \begin{pmatrix} |\alpha - \bar{\beta}z|^2 - |\beta + \bar{\alpha}z|^2 & 2(\alpha - \bar{\beta}z)(\bar{\beta} + \alpha\bar{z}) \\ 2(\bar{\alpha} - \beta\bar{z})(\beta + \bar{\alpha}z) & |\beta + \bar{\alpha}z|^2 - |\alpha - \bar{\beta}z|^2 \end{pmatrix}.$$

On conclut en remarquant que

$$|\alpha - \bar{\beta}z|^2 + |\beta + \bar{\alpha}z|^2 = (|\alpha|^2 + |\beta|^2)(1 + |z|^2) = 1 + |z|^2$$

et

$$|\alpha - \bar{\beta}z|^2 - |\beta + \bar{\alpha}z|^2 = (|\alpha|^2 - |\beta|^2)(1 - |z|^2) - 4\Re(\alpha\beta\bar{z}).$$

□

On peut se servir de cette propriété pour montrer que l'action naturelle de $SU(2)$ sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ est hamiltonienne et calculer son application moment. La droite projective complexe est munie de la forme symplectique ω_{FS} associée à la structure kählérienne de Fubini-Study, qui vérifie $\pi_N^* \omega_{FS} = -\frac{1}{2} \omega_{S^2}$, où ω_{S^2} est la forme symplectique standard sur S^2 :

$$\forall u \in S^2, \forall v, w \in T_u S^2 \quad (\omega_{S^2})_u(v, w) = (u|v \wedge w).$$

D'autre part, $\Omega = \varphi^{-1}(S^2)$ est munie de la forme symplectique de Kirillov-Kostant-Souriau qui s'écrit ici

$$\forall X \in \Omega, \forall A, B \in T_X \Omega \quad (\omega_{KKS})_X([A, X], [B, X]) = \langle X | [B, A] \rangle.$$

Lemme 2.3.10. *Le pullback par φ de ω_{S^2} est égal à $-2\omega_{KKS}$.*

Démonstration. φ étant linéaire, on a $(\varphi^* \omega_{S^2})_X([A, X], [B, X]) = \omega_{S^2}(\varphi([A, X]), \varphi([B, X]))$. En utilisant le lemme 2.3.7, cela donne

$$(\varphi^* \omega_{S^2})_X([A, X], [B, X]) = 4(\varphi(X)|(\varphi(A) \wedge \varphi(X)) \wedge (\varphi(B) \wedge \varphi(X)));$$

or on a en toute généralité l'égalité $(u \wedge w) \wedge (v \wedge w) = (u \wedge w|v) w$ qui fait intervenir le produit mixte des trois vecteurs u, v, w . Comme $\varphi(X)$ appartient à S^2 , on en déduit

$$(\varphi^* \omega_{S^2})_X([A, X], [B, X]) = 4(\varphi(X)|\varphi(A) \wedge \varphi(B))$$

et finalement, grâce aux lemmes 2.3.7 et 2.3.8

$$(\varphi^* \omega_{S^2})_X([A, X], [B, X]) = 2\langle X | [A, B] \rangle.$$

□

Corollaire 2.3.11. *L'action naturelle de $SU(2)$ sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ est hamiltonienne par rapport à ω_{FS} , d'application moment $\mu = \varphi^{-1} \circ \pi_N^{-1}$.*

Démonstration. On sait que l'action coadjointe de $SU(2)$ sur $\Omega = \mu(\mathbb{C}\mathbb{P}^1)$ munie de la forme de Kirillov-Kostant-Souriau est hamiltonienne d'application moment l'inclusion $I : \Omega \rightarrow \mathfrak{su}(2)$. Or $\mu^* \omega_{KKS} = \omega_{FS}$ et l'action naturelle de $SU(2)$ sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ est transformée par μ en l'action coadjointe. □

2.3.5 La méthode des orbites dans le cas compact

Terminons en évoquant un des premiers résultats positifs de la méthode des orbites, le cas d'un groupe de Lie compact. Dans ce cas, on peut obtenir toutes les représentations irréductibles unitaires de G comme espaces de sections holomorphes de fibrés préquantifiants au-dessus de certaines orbites coadjointes.

Par la suite, on supposera plus précisément que G est compact et de centre fini; il est alors relativement simple de montrer que les orbites coadjointes sont munies d'une structure kählérienne dont la 2-forme fondamentale est la forme symplectique de Kirillov-Kostant-Souriau. La quantification géométrique d'une orbite préquantifiable fournit alors une représentation irréductible unitaire de G .

2.3.5.1 La forme de Killing

On définit la forme de Killing comme l'application bilinéaire

$$\text{Kil} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\xi, \eta) \mapsto -\text{Tr}(\text{ad}_\xi \circ \text{ad}_\eta)$$

Notons que cette définition de la forme de Killing diffère d'un signe de la définition classique; notre choix se justifie par le fait qu'alors cette forme sera positive et non négative comme c'est le cas avec la définition usuelle.

Lemme 2.3.12. *Kil est une forme bilinéaire symétrique invariante par l'action adjointe.*

Démonstration. Kil est clairement linéaire à gauche et symétrique. Soient $g \in G$ et $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$; on a $\text{Kil}(\text{Ad}_g(\xi), \text{Ad}_g(\eta)) = -\text{Tr}(\text{ad}_{\text{Ad}_g(\xi)} \circ \text{ad}_{\text{Ad}_g(\eta)})$. Or, pour $\zeta \in \mathfrak{g}$, on a

$$\begin{aligned} (\text{ad}_{\text{Ad}_g(\xi)} \circ \text{ad}_{\text{Ad}_g(\eta)})(\zeta) &= [\text{Ad}_g(\xi), [\text{Ad}_g(\eta), \zeta]] \\ &= \text{Ad}_g \left([\xi, \text{Ad}_{g^{-1}}([\text{Ad}_g(\eta), \zeta])] \right) \\ &= \text{Ad}_g \left([\xi, [\eta, \text{Ad}_{g^{-1}}(\zeta)]] \right) \\ &= (\text{Ad}_g \circ \text{ad}_\xi \circ \text{ad}_\eta \circ \text{Ad}_g^{-1})(\zeta). \end{aligned}$$

Les traces de $\text{ad}_{\text{Ad}_g(\xi)} \circ \text{ad}_{\text{Ad}_g(\eta)}$ et $\text{ad}_\xi \circ \text{ad}_\eta$ sont donc égales, ce qui prouve que $\text{Kil}(\text{Ad}_g(\xi), \text{Ad}_g(\eta)) = \text{Kil}(\xi, \eta)$. \square

On suppose maintenant que G est compact, connexe et que son centre est fini (ce qui implique que le centre de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} est trivial).

Proposition 2.3.13. *La forme de Killing de \mathfrak{g} est définie positive.*

Démonstration. Soit $(\cdot | \cdot)$ n'importe quel produit scalaire sur \mathfrak{g} , et soit μ une mesure de Haar à droite sur G . On pose, pour ξ, η dans \mathfrak{g} ,

$$B(\xi, \eta) = \int_G (\text{Ad}_g(\xi) | \text{Ad}_g(\eta)) d\mu(g).$$

Par construction, B est une forme bilinéaire symétrique définie positive invariante pour l'action adjointe, ce qui signifie que l'image de l'application $\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ est contenue dans le groupe orthogonal $O(\mathfrak{g}, B)$. Par suite, l'image de l'application $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ est contenue dans l'algèbre de Lie $\text{Lie}(O(\mathfrak{g}, B))$, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes anti-adjoints pour B . Si on étend B en un produit scalaire hermitien sur $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$, et si ξ appartient à \mathfrak{g} , d'après le théorème spectral, on peut trouver une base orthonormale de $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ dans laquelle l'action de ad_ξ est diagonale à coefficients imaginaires purs. Par conséquent, la trace de ad_ξ^2 est négative, et donc $\text{Kil}(\xi, \xi) \geq 0$.

Si $\text{Kil}(\xi, \xi) = 0$, alors toutes les valeurs propres de ad_ξ sont nulles, d'où $\text{ad}_\xi = 0$. ξ est donc un élément du noyau de ad , qui est réduit à $\{0\}$ puisque le centre de \mathfrak{g} est trivial. \square

2.3.5.2 Structure complexe des orbites coadjointes

Soient Ω une orbite coadjointe, $\ell \in \Omega$ et ω la forme de Kirillov-Kostant-Souriau sur Ω . Rappelons que l'application $G/S \rightarrow \Omega, [g] \mapsto \text{Ad}_g^*(\ell)$, où $S = \text{Stab}(\ell)$, est un difféomorphisme équivariant, qui induit un difféomorphisme $\mathfrak{g}/\mathfrak{s} \rightarrow T_\ell\Omega, [\xi] \mapsto \text{ad}_\xi^*(\ell)$, où $\mathfrak{s} = \text{Lie}(S)$. Si on désire obtenir une structure complexe linéaire sur $T_\ell\Omega$, il suffit donc de la construire sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{s} \simeq \mathfrak{m} = \mathfrak{s}^\perp$.

D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique endomorphisme Γ_ℓ de \mathfrak{m} tel que

$$\forall \xi, \eta \in \mathfrak{m} \quad \omega_\ell(\xi, \eta) = \text{Kil}(\Gamma_\ell \xi, \eta).$$

Γ_ℓ est anti-adjoint par antisymétrie de ω_ℓ , et inversible puisque cette dernière est non-dégénérée. Soit $\Gamma_\ell = |\Gamma_\ell|J_\ell$ la décomposition polaire de Γ_ℓ , avec $|\Gamma_\ell|$ autoadjoint défini positif, et J_ℓ dans $\text{O}(\mathfrak{m}, \text{Kil})$. Comme Γ_ℓ est anti-adjoint, $|\Gamma_\ell|$ est inversible et J_ℓ et $|\Gamma_\ell|$ commutent, J_ℓ est également anti-adjoint. Finalement, on a $J_\ell^2 = -\text{Id}$, ce qui signifie que J_ℓ est une structure complexe sur \mathfrak{m} .

2.3.5.3 Structure kählérienne des orbites

Il s'avère que la structure complexe définie précédemment est compatible avec la structure symplectique.

Lemme 2.3.14. *Pour $\xi, \eta \in \mathfrak{m}$, on a $\omega_\ell(J_\ell \xi, J_\ell \eta) = \omega_\ell(\xi, \eta)$. De plus, la forme bilinéaire symétrique $\omega_\ell(\cdot, J_\ell \cdot)$ est définie positive.*

Démonstration. Pour le premier point, on a

$$\begin{aligned} \omega_\ell(J_\ell \xi, J_\ell \eta) &= \text{Kil}(\Gamma_\ell J_\ell \xi, J_\ell \eta) \\ &= \text{Kil}(J_\ell \Gamma_\ell \xi, J_\ell \eta) \\ &= \text{Kil}(\Gamma_\ell \xi, \eta) \quad \text{car } J_\ell \in \text{O}(\mathfrak{m}, \text{Kil}) \\ &= \omega_\ell(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Pour montrer la deuxième propriété, on calcule

$$\begin{aligned} \omega_\ell(\xi, J_\ell \xi) &= \text{Kil}(\Gamma_\ell \xi, J_\ell \xi) \\ &= \text{Kil}(J_\ell^* \Gamma_\ell \xi, \xi) \\ &= \text{Kil}(|\Gamma_\ell| \xi, \xi) \end{aligned}$$

et on conclut en se rappelant des propriétés de Kil et $|\Gamma_\ell|$. □

Pour montrer que Ω est kählérienne, il reste à vérifier que la structure complexe J ainsi obtenue est intégrable. Ce résultat est vrai, mais nous n'en ferons pas la démonstration ici; pour une preuve (utilisant le théorème de Newlander-Nirenberg), on peut se référer à [6, proposition 8.39].

2.3.5.4 Quantification et représentations irréductibles

Pour clore cette partie, nous allons brièvement expliciter la relation entre les représentations irréductibles unitaires du groupe G (qui est, rappelons-le, supposé compact, connexe et de centre fini) et la quantification de ses orbites coadjointes. Nous ne voulons pas rentrer dans les détails de la théorie des représentations, et supposons donc connus les définitions et résultats classiques de celle-ci. En outre, nous ne donnerons aucune preuve dans cette section. Pour plus de détails, nous renvoyons à [66, 67, 68].

Soit T un tore maximal de G et \mathfrak{t} son algèbre de Lie. Soit

$$X(T) = \{\ell \in \mathfrak{t}^*, \quad \forall \xi \in L \quad \langle \ell, \xi \rangle \in 2i\pi\mathbb{Z}\}$$

le réseau des caractères de T , où $L \subset \mathfrak{t}$ est le noyau de l'application exponentielle de \mathfrak{t} dans T . On peut montrer que $X(T)$ est isomorphe au groupe \hat{T} des caractères de T , plus précisément, que tout caractère est de la forme

$$\forall t \in \mathfrak{t}, \quad \chi(\exp(t)) = \exp(\langle \ell, t \rangle) \quad (2.8)$$

pour un certain ℓ dans $X(T)$.

De plus, soit $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ la complexification de \mathfrak{g} , et $R \subset i\mathfrak{t}^*$ le système de racines de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Si α appartient à R , on note α^{\vee} la coracine associée. On fixe une base de racines simples $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in R$; un poids $\ell \in X(T)$ est dit dominant si pour toute racine simple α_i , la quantité $\langle \ell, \alpha_i^{\vee} \rangle$ appartient à \mathbb{N} . On note $X_+(T)$ l'ensemble des poids dominants.

D'une part, il est standard qu'il existe une bijection entre les représentations irréductibles unitaires de G et l'ensemble $X_+(T)$. D'autre part, il s'avère qu'on peut construire toutes ces représentations comme espaces de sections holomorphes de fibrés en droites complexes au-dessus d'orbites coadjointes. Expliquons rapidement pourquoi.

Soit M un G -espace homogène, c'est-à-dire une variété munie d'une action lisse et transitive $\sigma : G \times M \rightarrow M$. Un fibré en droites complexes $L \rightarrow M$ est dit homogène s'il existe une action lisse transitive $\sigma_L : G \times L \rightarrow L$ telle que pour tout $g \in G$ et $m \in M$

1. $\sigma_L(g)L_m = L_{\sigma(g)m}$,
2. $\sigma_L(g)|_{L_m} : L_m \rightarrow L_{\sigma(g)m}$ est un isomorphisme \mathbb{C} -linéaire.

Si de plus L est hermitien, on demandera également que pour tout $g \in G$, $\sigma_L(g)$ soit une isométrie.

Pour commencer, toutes les orbites coadjointes peuvent s'écrire sous la forme Ω_{ℓ} avec $\ell \in \mathfrak{t}^*$. Maintenant, pour un tel $\ell \in \mathfrak{t}^*$, $(\Omega_{\ell}, \omega_{\text{KKS}})$ admet un fibré préquantifiant homogène si et seulement si l'élément $i\ell$ de $i\mathfrak{t}^*$ appartient à $X(T)$ (voir par exemple [68, section 5.7]). Plus précisément, si $i\ell \in X(T)$, on note τ_{ℓ} le caractère donné par la formule (2.8). Il est possible de montrer qu'on peut étendre τ_{ℓ} en un caractère χ_{ℓ} de $\text{Stab}(\ell)$. Le groupe $\text{Stab}(\ell)$ agit alors sur $G \times \mathbb{C}$ à droite par

$$\forall (g, z) \in G \times \mathbb{C}, \forall h \in G, \quad (g, z).h = (gh, \chi_{\ell}(h^{-1})z).$$

On note $G \times_{\chi_{\ell}} \mathbb{C}$ l'espace des orbites pour cette action. On définit la projection

$$\pi : G \times_{\chi_{\ell}} \mathbb{C} \rightarrow G/\text{Stab}(\ell), \quad [g, z] \mapsto g\text{Stab}(\ell).$$

Alors $(L_\ell = G \times_{\chi_\ell} \mathbb{C}, \pi)$ est un fibré homogène préquantifiant au-dessus de $(G/\text{Stab}(\ell) = \Omega_\ell, \omega_{\text{KKS}})$. Le groupe G agit alors sur l'espace $H^0(\Omega_\ell, L_\ell)$ des sections holomorphes de ce fibré par

$$\forall s \in H^0(\Omega_\ell, L_\ell), \forall m \in M, \quad (\tilde{\sigma}(g)s)(m) = \sigma_{L_\ell}(g) \left(s(\sigma(g^{-1})m) \right)$$

où $\sigma : G \times \Omega_\ell \rightarrow \Omega_\ell$ est donnée par $\sigma(g)[h, z] = [gh, z]$.

Théorème 2.3.15 (Borel-Weil). *L'espace $H^0(\Omega_\ell, L_\ell)$ est non réduit à zéro si et seulement si $i\ell \in X_+(T)$, et dans ce cas le procédé décrit ci-dessus fournit une représentation irréductible unitaire de G de plus haut poids ℓ . En outre, toutes les représentations irréductibles unitaires de G peuvent être obtenues de cette manière.*

2.4 Exemples d'opérateurs de Toeplitz en dimension 2

Nous allons maintenant donner des exemples concrets d'opérateurs de Toeplitz, en dimension 2. L'intérêt de se restreindre à cette dimension est double. D'une part, c'est la plus simple à traiter, et on peut construire explicitement un certain nombre d'exemples. D'autre part, les résultats principaux de cette thèse concernent les opérateurs de Toeplitz sur les surfaces.

La plupart de ces exemples ont été utilisés pour vérifier numériquement nos résultats théoriques, aussi bien les conditions de Bohr-Sommerfeld elliptiques (chapitre 4 ; hamiltonien de Harper) que la version hyperbolique de ces conditions (chapitre 5 ; hamiltonien de Harper et fonction hauteur sur le tore, xy sur la sphère).

2.4.1 Le plan complexe et l'espace de Bargmann

L'exemple le plus simple est sans doute celui du plan complexe, puisque sa géométrie est élémentaire. Néanmoins, il n'entre pas strictement dans le cadre de cette étude puisqu'il n'est pas compact.

On considère $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ avec les coordonnées (x, ξ) , $z = (x - i\xi)/\sqrt{2}$, la structure complexe standard et la forme symplectique $\omega_0 = d\xi \wedge dx = idz \wedge d\bar{z}$. Soit $L_0 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ le fibré trivial équipé de sa métrique hermitienne standard h_0 et de la connexion ∇^0 de 1-forme $-i\alpha$, où α est la primitive de ω_0 donnée par la formule $\alpha_u(v) = \frac{1}{2}\omega_0(u, v)$; on munit L_0 de l'unique structure holomorphe compatible avec h_0 et ∇^0 . Soit k un entier strictement positif; pour tenir compte de la non-compacité, on choisit comme espace d'états

$$\mathcal{H}_k = H^0(\mathbb{R}^2, L_0^k) \cap L^2(\mathbb{R}^2, L_0^k).$$

Introduisons les champs de vecteurs $\partial_z = (\partial_x + i\partial_\xi)/\sqrt{2}$ et $\partial_{\bar{z}} = (\partial_x - i\partial_\xi)/\sqrt{2}$ de sorte que la base $(dz, d\bar{z})$ de $\Omega_1(\mathbb{R}^2) \otimes \mathbb{C}$ soit duale à $(\partial_z, \partial_{\bar{z}})$. Les sections holomorphes de $L_0 \rightarrow M$ satisfont

$$0 = \nabla_{\partial_{\bar{z}}}^0 \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}} - i\alpha(\partial_{\bar{z}}) = \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}} + \frac{z}{2} \Psi;$$

une solution ne s'annulant pas est $\Psi(z) = \exp(-|z|^2/2)$. Il s'ensuit que les sections holomorphes du fibré $L_0^k \rightarrow M$ sont les éléments de la forme $f\Psi^k$, avec $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. On en déduit que

$$\mathcal{H}_k = \left\{ f\Psi^k; f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C} \text{ holomorphe, } \int_{\mathbb{R}^2} |f(z)|^2 \exp(-k|z|^2) d\lambda(z) < +\infty \right\}$$

coïncide avec \mathcal{B}_k , l'espace de Bargmann [2, 3] d'ordre k . Il est bien connu que \mathcal{B}_k est un espace de Hilbert, dont une base orthonormale est donnée par les éléments

$$\varphi_{k,n}(z) = \sqrt{\frac{k^{n+1}}{2\pi n!}} z^n \Psi^k, \quad n \geq 0.$$

On reviendra plus en détail sur les opérateurs de Toeplitz dans ce contexte dans la section 2.5.

2.4.2 Sur le tore

2.4.2.1 Données de la quantification

Comme précédemment, on munit \mathbb{R}^2 de la forme symplectique linéaire ω_0 et du fibré trivial $L_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de connexion ∇^0 et de forme hermitienne h_0 . Soit

$$K = \left\{ \alpha \in (\mathbb{R}^2)^* \otimes \mathbb{C}; \alpha(J.) = i\alpha \right\}$$

la droite canonique de \mathbb{R}^2 équipé de sa structure complexe standard J . On choisit une droite de demi-formes, autrement dit une droite complexe δ telle qu'on ait un isomorphisme $\varphi : \delta^{\otimes 2} \rightarrow K$. K possède un produit scalaire naturel tel que le carré de la norme de α est $i(\alpha \wedge \bar{\alpha})/\omega_0$; δ hérite alors du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\delta$ tel que φ est une isométrie. Dans la suite, on travaillera avec le fibré de demi-formes, toujours noté δ , qui est le fibré trivial de fibre δ .

On se donne un réseau Λ de volume symplectique 4π . Le groupe d'Heisenberg $H = \mathbb{R}^2 \times U(1)$ de loi

$$(x, u).(y, v) = \left(x + y, uv \exp\left(\frac{i}{2}\omega_0(x, y)\right) \right)$$

agit sur le fibré $L_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$, et l'action est exprimée par la même formule. Cette action préserve les données de la préquantification, et le réseau Λ s'injecte dans H ; par conséquent, le fibré L_0 descend en un fibré préquantifiant $L \rightarrow \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\Lambda$. En outre, l'action s'étend au fibré L_0^k par la formule

$$(x, u).(y, v) = \left(x + y, u^k v \exp\left(\frac{ik}{2}\omega_0(x, y)\right) \right).$$

On fait agir le groupe d'Heisenberg trivialement sur δ . On obtient finalement une action

$$T^* : \Lambda \rightarrow \text{End}\left(\mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^2, L_0^k \otimes \delta\right)\right), \quad u \mapsto T_u^*.$$

L'espace de Hilbert $\mathcal{H}_k = H^0(M, L^k \otimes \delta)$ s'identifie alors naturellement à l'espace $\mathcal{H}_{\Lambda, k}$ des sections holomorphes de $L_0^k \otimes \delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ invariantes sous l'action de Λ , muni du produit scalaire

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_D \langle \varphi, \psi \rangle_\delta |\omega_0|$$

où D est le domaine fondamental du réseau. De plus, on montre que $\Lambda/2k$ agit sur $\mathcal{H}_{\Lambda, k}$. Soient alors (e, f) une base de Λ vérifiant $\omega_0(e, f) = 4\pi$; on peut montrer qu'il existe une base orthonormale $(\psi_\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}/2k\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{H}_{\Lambda, k}$ telle que

$$\forall \ell \in \mathbb{Z}/2k\mathbb{Z}, \quad \begin{cases} T_{e/2k}^* \psi_\ell = w^\ell \psi_\ell \\ T_{f/2k}^* \psi_\ell = \psi_{\ell+1} \end{cases}$$

avec $w = \exp(i\pi/k)$. Les sections ψ_ℓ s'expriment à l'aide de fonctions Θ (voir [25] pour plus de détails). Comme prévu à l'aide de la formule (2.1), la dimension de l'espace d'états vaut $2k$.

2.4.2.2 Opérateurs de Toeplitz

Soient $M_k = T_{e/2k}^*$ et $L_k = T_{f/2k}^*$. Soient (q, p) des coordonnées sur \mathbb{R}^2 associées à la base (e, f) et $[q, p]$ la classe d'équivalence de (q, p) dans \mathbb{R}^2/Λ . Alors M_k et L_k sont des opérateurs de Toeplitz, de symboles principaux respectifs $[q, p] \mapsto \exp(2i\pi p)$ et $[q, p] \mapsto \exp(2i\pi q)$, et dont les symboles sous-principaux sont identiquement nuls. À partir de ces opérateurs, on peut déjà construire un certain nombre d'exemples intéressants d'opérateurs de Toeplitz.

2.4.2.3 Fonction hauteur

Le premier est celui de la fonction hauteur sur le tore; il s'agit d'un des tous premiers exemples en théorie de Morse, sans doute parce qu'il constitue l'exemple le plus simple et le plus visuel d'une fonction de Morse présentant des singularités de chaque type en dimension deux.

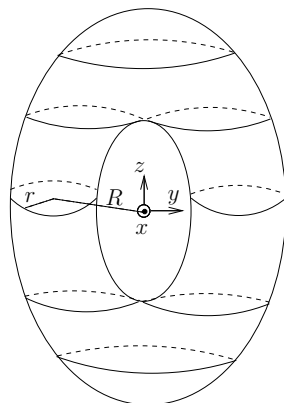


FIGURE 2.1 – Fonction hauteur sur le tore

Le tore \mathbb{T}^2 est difféomorphe à la surface représentée dans la figure 2.1 ci-dessus, obtenue par la rotation d'un cercle de rayon r autour d'un cercle de rayon $R > r$ contenu dans le plan yz ; le difféomorphisme est donné par les formules explicites

$$x = r \sin(2\pi q), \quad y = (R + r \cos(2\pi q)) \cos(2\pi p), \quad z = (R + r \cos(2\pi q)) \sin(2\pi p).$$

On souhaite donc quantifier le hamiltonien

$$a_0(q, p) = (R + r \cos(2\pi q)) \sin(2\pi p),$$

plus précisément construire un opérateur de Toeplitz A_k autoadjoint, de symbole principal a_0 et de symbole sous-principal identiquement nul. Dans cette optique, remarquons que les opérateurs de Toeplitz

$$B_k = \frac{1}{2i}(M_k - M_k^*), \quad C_k = R\Pi_k + \frac{r}{2}(L_k + L_k^*)$$

sont autoadjoints et ont pour symboles respectifs

$$\sigma_{\text{norm}}(B_k) = \sin(2\pi p) + O(\hbar^2), \quad \sigma_{\text{norm}}(C_k) = R + r \cos(2\pi q) + O(\hbar^2).$$

Il s'ensuit que $A_k = \frac{1}{2}(B_k C_k + C_k B_k)$ est un opérateur de Toeplitz autoadjoint de symbole normalisé $a_0 + O(\hbar^2)$. Sa matrice dans la base $(\psi_\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}/2k\mathbb{Z}}$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} R\alpha_0 & \frac{r}{4}(\alpha_0 + \alpha_1) & 0 & \dots & 0 & \frac{r}{4}(\alpha_{2k-1} + \alpha_0) \\ \frac{r}{4}(\alpha_0 + \alpha_1) & R\alpha_1 & \frac{r}{4}(\alpha_1 + \alpha_2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{r}{4}(\alpha_1 + \alpha_2) & R\alpha_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & R\alpha_{2k-2} & \frac{r}{4}(\alpha_{2k-2} + \alpha_{2k-1}) \\ \frac{r}{4}(\alpha_0 + \alpha_{2k-1}) & 0 & \dots & 0 & \frac{r}{4}(\alpha_{2k-2} + \alpha_{2k-1}) & R\alpha_{2k-1} \end{pmatrix}$$

avec $\alpha_\ell = \sin(\ell\pi/k)$. On étudie les valeurs propres proches de 0 de cette matrice dans la limite $k \rightarrow +\infty$ dans la section 5.7.1.

2.4.2.4 Hamiltonien de Harper

On s'intéresse maintenant au hamiltonien

$$a_0(q, p) = 2(\cos(2\pi p) + \cos(2\pi q)),$$

quelquefois appelé hamiltonien de Harper puisqu'il fût introduit par Helffer et Sjöstrand dans [57] afin d'étudier l'équation de Harper. Avec les notations précédentes, l'opérateur $A_k = M_k + M_k^* + L_k + L_k^*$ est un opérateur de Toeplitz de symbole a_0 et de symbole

sous-principal nul. Sa matrice dans la base $(\psi_\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}/2k\mathbb{Z}}$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 2\alpha_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2\alpha_{2k-1} \end{pmatrix}$$

où

$$\alpha_\ell = \cos\left(\frac{\ell\pi}{k}\right), \quad 0 \leq \ell \leq 2k-1.$$

Une étude plus détaillée est disponible dans la section 4.7, dans laquelle on s'intéresse aux premières valeurs propres de A_k . Dans la section 5.7.3, on étudie les valeurs propres de A_k proches du niveau hyperbolique 0.

2.4.3 Sur la sphère

2.4.3.1 Quantification de la droite projective complexe

Commençons par appliquer la procédure de quantification géométrique à la droite projective complexe \mathbb{CP}^1 . On note $L = \mathcal{O}(1)$ le fibré dual du fibré tautologique

$$\mathcal{O}(-1) = \left\{ (u, v) \in \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{C}^2; \quad v \in u \right\}$$

muni de la projection naturelle. L est un fibré en droites complexes holomorphe et hermitien; soit ∇ sa connexion de Chern. Celle-ci est représentée dans les trivialisations $U_1 = \mathbb{CP}^1 \setminus \{0\}$, $U_2 = \mathbb{CP}^1 \setminus \{\infty\}$, munies respectivement des coordonnées homogènes $[1 : z]$ et $[z : 1]$, par les 1-formes

$$\beta_j = \frac{-\bar{z}dz}{1 + |z|^2}, \quad j = 1, 2.$$

La 2-forme $\omega = i \operatorname{curv}(\nabla)$ est une forme symplectique sur \mathbb{CP}^1 ; on le vérifie directement sur la formule :

$$\omega = \frac{i dz \wedge d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2}.$$

ω est la 2-forme fondamentale de la structure kählérienne de Fubini-Study sur \mathbb{CP}^1 ; de plus, $L \rightarrow \mathbb{CP}^1$ est un fibré préquantifiant. De surcroît, le fibré canonique s'identifie naturellement au fibré $\mathcal{O}(-2)$, et on peut donc choisir le fibré $\delta = \mathcal{O}(-1)$ comme fibré de demi-formes.

Lemme 2.4.1. *Pour $m \geq 0$, on a un isomorphisme canonique Φ entre $H^0(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}(m))$ et l'ensemble $\mathbb{C}_m[z_1, z_2]$ des polynômes homogènes de degré m de deux variables complexes.*

Démonstration. Une preuve est donné dans [39], mais nous la rappelons brièvement pour fixer les idées. On commence par considérer l'application

$$\Phi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m)) \rightarrow \mathcal{C}_m^\infty(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{C})$$

donnée par la formule

$$\Phi(s)(v) = \langle s([v]), v^{\otimes m} \rangle_{\mathcal{O}(m)_{[v]}, \mathcal{O}(-m)_{[v]}}$$

où $\mathcal{C}_m^\infty(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{C})$ désigne l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ homogènes de degré m . Φ est clairement linéaire et injective. En outre, si f appartient à $\mathcal{C}_m^\infty(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{C})$, on définit une section s de $\mathcal{O}(m)$ par la formule $s(u) = (u, f(v)(v^*)^{\otimes m})$ où $v \in \mathbb{C}^2$ est n'importe quel représentant de u ($s(u)$ ne dépend pas de ce choix par homogénéité de f). On obtient $\Phi(f) = s$.

Φ est donc un isomorphisme, qui se restreint en un isomorphisme entre $H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m))$ et $\mathbb{C}_m[z_1, z_2]$. En effet, si s est une section holomorphe de $\mathcal{O}(m)$, $\Phi(s)$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, et s'étend donc en une fonction holomorphe sur \mathbb{C} . Or une fonction entière homogène de degré m est un polynôme homogène de degré m . \square

L'espace d'états $\mathcal{H}_k = H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^1, L^k \otimes \delta)$ s'identifie donc à l'espace $\mathbb{C}_{p_k}[z_1, z_2]$ des polynômes homogènes de degré $p_k = k - 1$ de deux variables ; le produit scalaire est donné par

$$\langle P, Q \rangle = 2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{P(1, z) \overline{Q(1, z)}}{(1 + |z|^2)^{k+1}} d\lambda(z) = 2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{P(z, 1) \overline{Q(z, 1)}}{(1 + |z|^2)^{k+1}} d\lambda(z).$$

Les polynômes

$$P_\ell(z_1, z_2) = \sqrt{\frac{(p_k + 1) \binom{p_k}{\ell}}{2\pi}} z_1^\ell z_2^{p_k - \ell}, \quad 0 \leq \ell \leq p_k,$$

forment une base orthonormale de $\mathbb{C}_{p_k}[z_1, z_2]$. La dimension de cet espace est égale à k , ce qui correspond bien au résultat (2.1), étant donné que le volume symplectique de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ vaut 2π .

2.4.3.2 Coordonnées sur la sphère

Les données de la quantification se transportent sur la sphère par la projection stéréographique π_N . Reprenons les notations de la partie 2.3.4 et notons (x, y, z) les coordonnées usuelles sur \mathbb{R}^3 . On fait agir $SU(2)$ sur

- \mathbb{C}^2 par son action naturelle, et $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ par l'action induite,
- le dual $(\mathbb{C}^2)^*$ par $\langle G.\ell, v \rangle = \langle \ell, G^{-1}v \rangle$,
- $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m))$ par $(G.s)(u) = G.s(G^{-1}u)$,
- et sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{C})$ par $(G.f)(v) = f(G^{-1}v)$.

Lemme 2.4.2. *L'isomorphisme Φ introduit dans le lemme 2.4.1 commute avec les actions de $SU(2)$.*

Démonstration. Soient $s \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m))$ et $f = \Phi(s)$. Pour $G \in \text{SU}(2)$ et $v \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, on a

$$\begin{aligned} (G.f)(v) &= \langle s([G^{-1}v]), (G^{-1}v)^{\otimes m} \rangle \\ &= \langle G.s([G^{-1}v]), v^{\otimes m} \rangle \\ &= \langle (G.s)([v]), v^{\otimes m} \rangle, \end{aligned}$$

ce qui montre que $G.f = \Phi(G.s)$. □

Maintenant, on considère l'action dérivée ρ_k de $\mathfrak{su}(2)$ sur $\mathbb{C}_{p_k}[z_1, z_2]$, et on pose

$$X_k = \frac{i}{k}\rho(J_1), Y_k = \frac{i}{k}\rho(J_2), Z_k = \frac{i}{k}\rho(J_3).$$

Ainsi, l'action de ces opérateurs sur la base $(P_\ell)_{0 \leq \ell \leq p_k}$ est donnée par

$$X_k P_\ell = \frac{1}{k} \sqrt{\ell(k-\ell+1)} P_{\ell-1} + \frac{1}{k} \sqrt{(k-\ell)(\ell+1)} P_{\ell+1}$$

ainsi que

$$Y_k P_\ell = \frac{i}{k} \sqrt{\ell(k-\ell+1)} P_{\ell-1} - \frac{i}{k} \sqrt{(k-\ell)(\ell+1)} P_{\ell+1}$$

et enfin

$$Z_k P_\ell = \left(\frac{2\ell}{k} - 1 \right) P_\ell,$$

avec la convention $P_{-1} = 0 = P_{p_k+1}$ pour alléger l'écriture.

Puisque $[J_1, J_2] = 2J_3$, on a $[X_k, Y_k] = 2ik^{-1}Z_k$. Or, sur S^2 munie de la forme symplectique $\omega = -\omega_{S^2}/2$, le crochet de Poisson de x et y est donné par $\{x, y\} = -2z$. On peut donc s'attendre à avoir $X_k = \text{Op}_k(x) + O(k^{-2})$, et ainsi de suite. Effectivement, on vérifie par le calcul (voir par exemple [7, lemme 3.4]) que X_k (respectivement Y_k, Z_k) est un opérateur de Toeplitz sur S^2 de symbole principal x (respectivement y, z) et de symbole sous-principal nul. On voit alors immédiatement qu'on peut trouver un opérateur de Toeplitz de symbole principal $P(x, y, z)$ pour tout polynôme P en les coordonnées. On peut en fait obtenir un peu mieux [7, section 3], mais nous n'en dirons pas plus ici.

Dans la section 5.7.2, on étudie plus particulièrement le quantifié du hamiltonien xy sur la sphère.

2.5 Opérateurs de Toeplitz sur le plan complexe

Comme on l'a vu plus haut, on peut construire des espaces d'états pour le plan complexe en ajoutant une condition d'intégrabilité de type L^2 à la construction usuelle ; on n'a toutefois pas encore évoqué la quantification des observables. On pourrait se contenter de travailler avec des opérateurs à symbole borné indépendant de \hbar [106, section 13.4] ou à noyau compactement supporté ; cependant, on raterait alors le cas simple de l'oscillateur

harmonique. On commence donc par introduire des classes de symboles plus générales, très proches de celles utilisées dans le cadre pseudo-différentiel (voir par exemple [40]).

Cette partie est tirée de l'article [72], plus particulièrement de la section 4.3.3 ainsi que de l'annexe de celui-ci. Cet article est retranscrit presque intégralement dans le chapitre 4 de ce manuscrit (l'annexe qui détaillait les preuves des résultats de la section 4.3.3 a été enlevée, et les preuves en question ont été déplacées dans la présente section).

2.5.1 Classes de symboles

Soit d un entier positif. On définit la fonction poids m par $m(u) = (1 + \|u\|^2)^{\frac{1}{2}}$ pour u dans $\mathbb{C}^d \simeq \mathbb{R}^{2d}$. Pour tout entier j , on introduit la classe de symboles \mathcal{S}_j^d comme l'ensemble des suites de fonctions appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^d)$ qui admettent un développement asymptotique de la forme $a(\cdot, k) = \sum_{\ell \geq 0} k^{-\ell} a_\ell$ au sens suivant :

$$- \forall \ell \in \mathbb{N} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^{2d} \quad \exists C_{\ell, \alpha, \beta} > 0 \quad |\partial_z^\alpha \partial_{\bar{z}}^\beta a_\ell| \leq C_{\ell, \alpha, \beta} m^j,$$

$$- \forall L \in \mathbb{N}^* \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^{2d} \quad \exists C_{L, \alpha, \beta} > 0 \quad \left| \partial_z^\alpha \partial_{\bar{z}}^\beta \left(a - \sum_{\ell=0}^{L-1} k^{-\ell} a_\ell \right) \right| \leq C_{L, \alpha, \beta} k^{-L} m^j.$$

On pose alors $\mathcal{S}^d = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{S}_j^d$. Si, dans cette définition, on ne considère que des symboles ne dépendant pas de z , on obtient la classe \mathbb{C}_k des symboles constants ; on parlera également des « constantes admissibles ». Enfin, signalons qu'il est possible de travailler avec d'autres fonctions poids comme dans le contexte des opérateurs pseudo-différentiels, mais on se contentera de celle-ci.

2.5.2 Opérateurs de Toeplitz

Soit maintenant $a(\cdot, k)$ un symbole de la classe \mathcal{S}_j^1 , et considérons l'opérateur

$$A_k = \text{Op}(a(\cdot, k)) = \Pi_k^0 M_{a(\cdot, k)} \Pi_k^0 \quad (2.9)$$

agissant sur le sous-espace

$$\mathfrak{S}_k = \left\{ \varphi \in \mathcal{B}_k; \forall j \in \mathbb{N} \quad \sup_{z \in \mathbb{C}} (|\varphi(z)|(1 + |z|^2)^{j/2}) < +\infty \right\}$$

de l'espace de Bargmann \mathcal{B}_k . Comme remarqué dans [3], \mathfrak{S}_k est l'image de l'espace de Schwartz par la transformée de Bargmann, un opérateur unitaire de $L^2(\mathbb{R})$ dans \mathcal{B}_k que nous étudierons plus en détails ultérieurement. Le résultat suivant est donc à rapprocher des propriétés des opérateurs pseudo-différentiels agissant sur l'espace de Schwartz.

Lemme 2.5.1. *L'opérateur A_k est continu $\mathfrak{S}_k \rightarrow \mathfrak{S}_k$. En outre, si $j = 0$, alors A_k est continu $\mathcal{B}_k \rightarrow \mathcal{B}_k$ et sa norme est majorée par $\sup |a(\cdot, k)|$.*

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathfrak{S}_k$. Pour tout entier positif p , il existe une constante $C_p > 0$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |\varphi(z)| \leq C_p (1 + |z|^2)^{-p/2}. \quad (2.10)$$

En outre, il existe une constante $K_j > 0$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |a(z, k)| \leq K_j(1 + |z|^2)^{j/2},$$

et donc pour $q \geq -j$

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |a(z, k)\varphi(z)| \leq K_j C_{q+j}(1 + |z|^2)^{-q/2}.$$

Maintenant, soit $\psi \in L^2(\mathbb{C}, L_0^k)$ vérifiant des conditions de décroissance du type (2.10). On utilise la forme du noyau du projecteur Π_k^0 donnée par la proposition 2.5.2, et on écrit

$$\forall z_1 \in \mathbb{C}, \quad (\Pi_k^0 \psi)(z_1) = \frac{k}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} F_0^k(z_1, z_2) \cdot \psi(z_2) d\lambda(z_2).$$

Soit donc $j \in \mathbb{N}$; on a pour $z_1 \in \mathbb{C}$

$$|(\Pi_k^0 \psi)(z_1)| \leq \frac{C_j k}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \exp\left(-\frac{k}{2}|z_1 - z_2|^2\right) (1 + |z_2|^2)^{-j/2} d\lambda(z_2).$$

En effectuant le changement de variable $w = z_2 - z_1$, on obtient

$$|(\Pi_k^0 \psi)(z_1)| \leq \frac{C_j k}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \exp\left(-\frac{k}{2}|w|^2\right) (1 + |z_1 + w|^2)^{-j/2} d\lambda(w).$$

Or $1 + |w + z_1|^2 \geq 1 + (|w| - |z_1|)^2$, ce qui livre

$$1 + |w + z_1|^2 \geq (1 + |z_1|^2) \left(1 + |w| \left(\frac{|w| - 2|z_1|}{1 + |z_1|^2}\right)\right).$$

En étudiant la fonction d'une variable réelle f donnée par $f(t) = \frac{|w| - 2t}{1 + t^2}$, on trouve que

$$\frac{|w| - 2|z_1|}{1 + |z_1|^2} \geq \frac{|w| - \sqrt{4 + |w|^2}}{2},$$

ce qui entraîne

$$1 + |w + z_1|^2 \geq (1 + |z_1|^2) \left(1 + \frac{1}{2} \left(|w|^2 - |w|\sqrt{4 + |w|^2}\right)\right).$$

On en déduit que

$$|(\Pi_k^0 \psi)(z_1)| \leq \frac{K_j C_j k}{2\pi} (1 + |z_1|^2)^{-j/2},$$

avec

$$K_j = \int_{\mathbb{C}} \exp\left(-\frac{k}{2}|w|^2\right) \left(1 + \frac{1}{2} \left(|w|^2 - |w|\sqrt{4 + |w|^2}\right)\right)^{-j/2} d\lambda(w),$$

ce qui démontre la première assertion.

Si $j = 0$, alors $a(\cdot, k)$ est bornée et la multiplication par $a(\cdot, k)$ est continue $L^2(\mathbb{C}, \exp(-k|z|^2)d\lambda(z)) \rightarrow L^2(\mathbb{C}, \exp(-k|z|^2)d\lambda(z))$ de norme inférieure à $\sup |a(\cdot, k)|$; or Π_k^0 est borné $\mathcal{B}_k \rightarrow \mathcal{B}_k$ de norme inférieure à 1. \square

Soit t la section de $L_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de valeur constante égale à 1. Soit F_0 la section de $L_0 \boxtimes L_0^{-1}$ donnée par

$$F_0(z_1, z_2) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2z_1\bar{z}_2\right)\right) t(z_1) \otimes t^{-1}(z_2),$$

ou de manière équivalente, si $u = (x, \xi)$ quand $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - i\xi)$,

$$F_0(u, v) = \exp\left(-\frac{1}{4}\|u - v\|^2 - \frac{i}{2}\omega_0(u, v)\right) t(u) \otimes t^{-1}(v).$$

En adaptant le résultat de la section 1.c de [2], en utilisant la bonne normalisation pour le poids définissant nos espaces de Bargmann, on a la propriété suivante :

Proposition 2.5.2. Π_k^0 admet un noyau de Schwartz, qui est $\frac{k}{2\pi}F_0^k$.

Cette proposition nous permet de donner une expression pour le noyau de Schwartz de n'importe quel opérateur de Toeplitz. Notons que dorénavant, on utilisera la même lettre pour désigner un opérateur et son noyau de Schwartz.

Lemme 2.5.3. Soit $a(\cdot, k)$ un symbole de \mathcal{S}_j^1 ; alors $A_k = \text{Op}(a(\cdot, k))$ admet un noyau de Schwartz donné par

$$A_k(z_1, z_2) = \frac{k}{2\pi}F_0^k(z_1, z_2)\tilde{a}(z_1, z_2, k) + R_k \exp\left(-Ck|z_1 - z_2|^2\right), \quad (2.11)$$

où $\tilde{a}(\cdot, \cdot, k)$ est un élément de \mathcal{S}_j^2 , R_k est négligeable (au sens où R_k et ses dérivées successives sont des $O(k^{-\infty})$ sur tout compact) et C est une constante strictement positive. De plus, on a

$$\tilde{a}(z, z, k) = \left(\exp\left(k^{-1}\Delta\right)a\right)(z, k) \quad (2.12)$$

avec $\Delta = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ le laplacien holomorphe agissant sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^2)$, au sens où le développement asymptotique de $\tilde{a}(\cdot, \cdot, k)$ est obtenu en appliquant le développement asymptotique formel de l'opérateur $\exp(k^{-1}\Delta)$ au développement asymptotique de $a(\cdot, k)$.

Démonstration. Le noyau de Schwartz de A_k s'écrit explicitement

$$A_k(z_1, z_2) = \int_{\mathbb{C}} \Pi_k(z_1, z_3)a(z_3, k)\Pi_k(z_3, z_2) d\lambda(z_3),$$

expression égale à

$$\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \int_{\mathbb{C}} \exp\left(-\frac{k}{2}\left(|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_3|^2 - 2z_1\bar{z}_3 - 2z_3\bar{z}_2\right)\right) a(z_3, k) d\lambda(z_3). \quad (2.13)$$

Cela peut se réécrire sous la forme

$$A_k(z_1, z_2) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \int_{\mathbb{C}} \exp(ik\phi(z_1, z_2, z_3))a(z_3, k) d\lambda(z_3),$$

la phase ϕ étant donnée par la formule

$$\phi(z_1, z_2, z_3) = \frac{i}{2} \left(|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_3|^2 - 2z_1\bar{z}_3 - 2z_3\bar{z}_2 \right).$$

Il est plus commode d'utiliser des variables réelles : on note $u_j = (x_j, \xi_j)$ le point de \mathbb{R}^2 d'affixe $z_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_j - i\xi_j)$. Avec ces nouvelles notations, la phase ϕ devient

$$\phi(u_1, u_2, u_3) = \frac{i}{4} \left(\|u_1 - u_3\|^2 + \|u_3 - u_2\|^2 + 2i\omega_0(u_1 - u_2, u_3) \right).$$

En se servant de l'identité

$$\|u_1 - u_3\|^2 + \|u_3 - u_2\|^2 = \frac{1}{2} \left(\|u_1 - u_2\|^2 + \|2u_3 - u_1 - u_2\|^2 \right),$$

on peut mettre ϕ sous la forme

$$\phi(u_1, u_2, u_3) = \frac{i}{8} \|u_1 - u_2\|^2 + \varphi(u_1, u_2, u_3)$$

avec

$$\varphi(u_1, u_2, u_3) = \frac{i}{4} \left(\frac{1}{2} \|2u_3 - u_1 - u_2\|^2 + 2i\omega_0(u_1 - u_2, u_3) \right).$$

On a donc $A_k(u_1, u_2) = \exp\left(-\frac{k}{8}\|u_1 - u_2\|^2\right) I_k(u_1, u_2)$ avec

$$I_k(u_1, u_2) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^2} \exp(ik\varphi(u_1, u_2, u_3)) a(u_3, k) d\lambda(u_3);$$

un changement de variable livre finalement

$$I_k(u_1, u_2) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^2} \exp(ik\psi(u_1, u_2, u_3)) a\left(u_3 + \left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right), k\right) d\lambda(u_3),$$

où

$$\psi(u_1, u_2, u_3) = \frac{i}{2} \left(\|u_3\|^2 + i\omega_0(u_1 - u_2, u_3) + i\omega_0(u_1, u_2) \right).$$

Pour évaluer cette intégrale, on ne peut pas appliquer tel quel le lemme de la phase stationnaire car $a(\cdot, k)$ n'est pas nécessairement à support compact. Néanmoins, nous allons pouvoir adapter ce lemme à notre situation. Pour ce faire, commençons par expliciter le lieu critique

$$C_\psi = \left\{ (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{C}^3; d_{u_3}\psi(u_1, u_2, u_3) = 0 \text{ et } \Im(\psi)(u_1, u_2, u_3) = 0 \right\}$$

de ψ . Il est clair que $\Im(\psi)(u_1, u_2, u_3) = 0$ si et seulement si $u_3 = 0$; de plus, la différentielle partielle de ψ par rapport à u_3 est

$$d_{u_3}\psi(u_1, u_2, u_3) = i\langle u_3, \cdot \rangle - \frac{1}{2}\omega_0(u_1 - u_2, \cdot),$$

et donc C_ψ est l'ensemble des points de la forme $(u, u, 0)$, $u \in \mathbb{R}^2$. Choisissons une fonction $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^+)$ à support compact et valant 1 sur l'ensemble $\{\|x_3\| \leq \delta\}$ pour un certain $\delta > 0$ donné, et décomposons l'intégrale I_k comme $I_k = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 (J_k + K_k)$, avec

$$J_k(u_1, u_2) = \int_{\mathbb{R}^2} \exp(ik\psi(u_1, u_2, u_3)) a\left(u_3 + \left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right), k\right) \chi(u_3) d\lambda(u_3)$$

et $K_k(u_1, u_2)$ s'écrivant sous la même forme en remplaçant χ par $1 - \chi$. En premier lieu, on montre que K_k est négligeable. Soit $R > 0$ et considérons les points (u_1, u_2) appartenant à la boule de \mathbb{R}^4 de rayon R et centrée en l'origine. En passant en coordonnées polaires, on a

$$K_k(u_1, u_2) = \int_0^{2\pi} \int_\delta^{+\infty} \exp(ik\Psi(\rho, \theta)) A(\rho, \theta, k) d\rho d\theta$$

où $\Psi(\rho, \theta) = \psi(u_1, u_2, (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta))$ et

$$A(\rho, \theta, k) = \rho a\left((\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) + \left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right), k\right) (1 - \chi(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)).$$

Par intégrations par partie successives, il est facile de prouver que pour tout entier strictement positif N

$$K_k(u_1, u_2) = k^{-N} \int_0^{2\pi} \int_\delta^{+\infty} \exp(ik\Psi(\rho, \theta)) D^N A(\rho, \theta, k) d\rho d\theta$$

où D est l'opérateur différentiel agissant sur $\mathcal{C}^\infty([\delta, +\infty[\times [0, 2\pi])$ par

$$Df = i \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right)^{-1} f \right).$$

Par ailleurs, en remarquant que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \rho}(\rho, \theta) = i\rho + \frac{1}{2}(x_1 - x_2) \sin \theta - \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2) \cos \theta,$$

est de module plus grand que ρ , que $D^N A$ est une combinaison linéaire de termes de la forme $\frac{\partial^p \Psi}{\partial \rho^p} \frac{\partial^q A}{\partial \rho^q}$ divisée par une puissance de $\frac{\partial \Psi}{\partial \rho}$ et que $a(\cdot, k)$ appartient à \mathcal{S}_j^1 , on obtient l'estimation

$$\left| \int_\delta^{+\infty} \exp(ik\Psi(\rho, \theta)) D^N A(\rho, \theta, k) d\rho \right| \leq C_N \int_\delta^{+\infty} \exp\left(-\frac{k}{2}\rho^2\right) w(\rho, \theta) d\rho$$

avec

$$w(\rho, \theta) = \rho^{j_1} \left(1 + \left\| \rho(\cos \theta, \sin \theta) + \frac{u_1 + u_2}{2} \right\|^2 \right)^{j_2}$$

pour certains $C_N > 0$ et $j_1, j_2 \in \mathbb{Z}$ (qui dépendent aussi de N). Si $j_2 < 0$, cette intégrale peut être majorée par

$$\int_\delta^{+\infty} \rho^{j_1} \exp\left(-\frac{k}{2}\rho^2\right) d\rho = O(k^{-1/2});$$

si $j_2 > 0$, on a

$$\left\| \rho(\cos \theta, \sin \theta) + \frac{u_1 + u_2}{2} \right\|^2 \leq 2 \left(\rho^2 + \frac{1}{4} \|u_1 + u_2\|^2 \right) \leq 2\rho^2 + \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2,$$

ce qui mène à

$$\left(1 + \left\| \rho(\cos \theta, \sin \theta) + \frac{u_1 + u_2}{2} \right\|^2 \right)^{j_2} \leq (1 + 2\rho^2 + R^2)^{j_2}$$

Ainsi

$$\int_{\delta}^{+\infty} \exp\left(-\frac{k}{2}\rho^2\right) w(\rho, \theta) d\rho \leq \tilde{C}_N \int_{\delta}^{+\infty} \exp\left(-\frac{k}{2}\rho^2\right) \rho^{j_3} d\rho = O(k^{-1/2}).$$

Cela montre que $|K_k| \leq c_N k^{-N}$ dans la boule de rayon R pour une certaine constante $c_N > 0$. On traite le cas des dérivées successives de K_k de la même manière.

Reste à estimer J_k . Puisque la différentielle seconde de ψ par rapport à u_3 vaut $i \text{Id}$, et comme

$$\begin{aligned} \psi(u_1, u_2, u_3) &= \frac{i}{8} \|u_1 - u_2\|^2 - \frac{1}{2} \omega_0(u_1, u_2) \\ &\quad + \frac{1}{4} (i(\xi_1 - \xi_2) + 2x_3) \partial_{x_4} \psi(u_1, u_2, u_3) \\ &\quad + \frac{1}{4} (i(x_2 - x_1) + 2\xi_3) \partial_{\xi_4} \psi(u_1, u_2, u_3), \end{aligned}$$

le lemme de la phase stationnaire [62, section 7.7] donne

$$J_k(u_1, u_2) = \frac{2\pi}{k} \exp\left(\frac{i}{8} \|u_1 - u_2\|^2 - \frac{1}{2} \omega_0(u_1, u_2)\right) \tilde{a}(u_1, u_2, k) + S_k(u_1, u_2),$$

où $\tilde{a}(\cdot, \cdot, k)$ appartient à \mathcal{S}_j^2 et S_k est négligeable; les coefficients $\tilde{a}_\ell(u_1, u_2, k)$ de son développement asymptotique, que l'on n'écrira pas ici, sont des combinaisons linéaires des dérivées successives de a_m , $m \geq 0$, évaluées en $(u_1 + u_2)/2$. Par ailleurs, les valeurs de $a(\cdot, \cdot, k)$ le long de la diagonale de \mathbb{C}^2 peuvent être facilement calculées, parce qu'un certain nombre de termes s'annule : pour z dans \mathbb{C} , on a

$$\tilde{a}(z, z, k) = \left(\sum_{\ell \geq 0} \frac{k^{-\ell}}{\ell!} \Delta^\ell a \right) (z, k) = \left(\exp(k^{-1} \Delta) a \right) (z, k).$$

En ajoutant ce résultat au fait que K_k est négligeable, on obtient le résultat attendu. \square

Ce résultat nous suggère la définition suivante.

Définition 2.5.4. Un *opérateur de Toeplitz* est un opérateur de \mathfrak{S}_k dans \mathfrak{S}_k de la forme

$$\Pi_k^0 M_{a(\cdot, k)} \Pi_k^0 + S_k, \quad (2.14)$$

où $a(\cdot, k)$ est un symbole de \mathcal{S}^1 et le noyau de S_k satisfait

$$S_k(z_1, z_2) = R_k(z_1, z_2) \exp\left(-Ck|z_1 - z_2|^2\right) \quad (2.15)$$

avec R_k négligeable et C une constante strictement positive. À l'instar du cas compact, $\sigma_{\text{cont}}(A_k) = \sum_{\ell \geq 0} \hbar^\ell a_\ell$ est appelé *symbole contravariant* de A_k . On désigne par \mathcal{T}_j l'ensemble des opérateurs de Toeplitz dont le symbole contravariant appartient à \mathcal{S}_j^1 .

Il s'avère que le lemme 2.5.3 définit le *symbole covariant* de l'opérateur de Toeplitz A_k :

$$\sigma_{\text{cov}}(A_k)(z) = \sum_{\ell \geq 0} \hbar^\ell \tilde{a}_\ell(z, z).$$

Le lemme suivant livre une propriété importante de ce dernier.

Lemme 2.5.5. *Si le symbole covariant de A_k s'annule, alors le noyau de Schwartz de A_k est de la forme (2.15).*

Démonstration. La formule (2.13) montre que le noyau de A_k est une section holomorphe de $L_0^k \boxtimes L_0^{-k}$; en dérivant l'équation (2.11), cela implique que les suites de fonctions

$$z \in \mathbb{C} \mapsto \frac{\partial \tilde{a}}{\partial \bar{z}_1}(z, z, k) \text{ et } z \in \mathbb{C} \mapsto \frac{\partial \tilde{a}}{\partial z_2}(z, z, k)$$

sont négligeables. Dès lors, on a pour $\ell \geq 0$ et $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{\partial \tilde{a}_\ell}{\partial \bar{z}_1}(z, z) = 0 = \frac{\partial \tilde{a}_\ell}{\partial z_2}(z, z).$$

Grâce à ces conditions d'holomorphicité, le fait que \tilde{a}_ℓ s'annule sur la diagonale implique que cette fonction s'annule à tout ordre le long de la diagonale (voir par exemple le lemme 4 de [19]). On peut aisément adapter le lemme 1 de l'article [19] pour montrer que cela force la négligeabilité de $\exp\left(-\frac{k}{4}|z_1 - z_2|^2\right) \tilde{a}(z_1, z_2, k)$. Au regard de la formule (2.11), cela permet de conclure. \square

Comme corollaire des lemmes 2.5.3 et 2.5.5, on obtient la stabilité de l'ensemble des opérateurs de Toeplitz par composition.

Corollaire 2.5.6. *Soient $A_k \in \mathcal{T}_j$ et $B_k \in \mathcal{T}_{j'}$ deux opérateurs de Toeplitz. Alors le composé $C_k = A_k B_k$ appartient à $\mathcal{T}_{j+j'}$; plus précisément, son symbole contravariant est donné par*

$$\sigma_{\text{cont}}(C_k)(z) = \left(\exp\left(-\hbar \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2}\right) \sigma_{\text{cont}}(A_k)(z_1) \sigma_{\text{cont}}(B_k)(z_2) \right)_{|z_1=z_2=z}, \quad (2.16)$$

au sens précisé dans le lemme 2.5.3.

Démonstration. Le noyau de C_k s'écrit

$$C_k(z_1, z_2) = \int_{\mathbb{C}} A_k(z_1, z_3) B_k(z_3, z_2) d\lambda(z_3).$$

En utilisant les représentations de A_k et B_k données par le lemme 2.5.3, ceci livre

$$C_k(z_1, z_2) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \int_{\mathbb{C}} \exp(ik\phi(z_1, z_2, z_3)) \tilde{a}(z_1, z_3, k) \tilde{b}(z_3, z_2, k) d\lambda(z_3) \\ + R_k \exp(-Ck|z_1 - z_2|^2),$$

avec $C > 0$, R_k négligeable et

$$\phi(z_1, z_2, z_3) = \frac{i}{2} (|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_3|^2 - 2z_1\bar{z}_3 - 2z_3\bar{z}_2).$$

En utilisant la même technique que dans la démonstration du lemme 2.5.3, on montre que

$$C_k(z_1, z_2) = \frac{k}{2\pi} \exp\left(-\frac{k}{2} (|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2z_1\bar{z}_2)\right) \tilde{c}(z_1, z_2, k) + R'_k \exp(-C'k|z_1 - z_2|^2)$$

avec $C' > 0$, R'_k négligeable, et $\tilde{c}(\cdot, \cdot, k) \in \mathcal{S}_{j+j'}^2$. Maintenant, considérons la fonction $\check{c}(\cdot, k)$ définie par $\check{c}(z, k) = \tilde{c}(z, z, k)$ pour z dans \mathbb{C} , et posons $c(\cdot, k) = (\exp(-k^{-1}\Delta)\check{c})(\cdot, k)$. Alors $c(\cdot, k)$ appartient à $\mathcal{S}_{j+j'}^1$ et, d'après le lemme 2.5.3, l'opérateur de Toeplitz $D_k = \text{Op}(c(\cdot, k))$ admet un noyau de Schwartz de la forme

$$D_k(z_1, z_2) = \frac{k}{2\pi} \exp\left(-\frac{k}{2} (|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2z_1\bar{z}_2)\right) \tilde{d}(z_1, z_2, k) \\ + R''_k \exp(-C''k|z_1 - z_2|^2),$$

où $\tilde{d}(\cdot, \cdot, k)$ appartient à \mathcal{S}_j^2 , R''_k est négligeable, C'' est une constante strictement positive et pour tout nombre complexe z , $\tilde{d}(z, z, k) = \tilde{c}(z, z, k)$. Le lemme 2.5.5 livre alors que $C_k = D_k + R'''_k \exp(-C'''k|z_1 - z_2|^2)$ pour un certain $C''' > 0$ et R'''_k négligeable.

Il reste à calculer le symbole contravariant de C_k . Pour z et w dans \mathbb{C} , on pose $\check{a}(z, w, k) = \tilde{a}(z, z+w, k)$ et $\check{b}(z, w, k) = \tilde{b}(z+w, z, k)$. On a

$$\check{c} = \left(\exp(k^{-1}\Delta_w)\check{a}\check{b}\right)|_{w=0}$$

avec Δ_w le laplacien holomorphe par rapport à la variable w ; en se servant du lemme 2.5.5, on trouve

$$\check{c}(z, k) = \left(\exp\left(k^{-1}\frac{\partial}{\partial\bar{u}}\frac{\partial}{\partial v}\right)\check{a}(u, k)\check{b}(v, k)\right)|_{u=v=z}$$

à un terme négligeable près. Puisque $c(\cdot, k) = (\exp(-k^{-1}\Delta)\check{c})(\cdot, k)$, il en découle que

$$c(z, k) = \left(\exp\left(-k^{-1}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial\bar{v}}\right)a(u, k)b(v, k)\right)|_{u=v=z}$$

à un terme négligeable près. □

On définit finalement le *symbole normalisé* comme dans le cas compact :

$$\sigma_{\text{norm}} = \left(\text{Id} + \frac{\hbar}{2} \Delta \right) \sigma_{\text{cont}}.$$

Grâce à la formule (2.16), on trouve que

$$\sigma_{\text{norm}}(A_k B_k) = a_0 b_0 + \hbar \left(a_0 b_1 + a_1 b_0 + \frac{1}{2i} \{a_0, b_0\} \right) + O(\hbar^2)$$

si $\sigma_{\text{norm}}(A_k) = a_0 + \hbar a_1 + O(\hbar^2)$ et $\sigma_{\text{norm}}(B_k) = b_0 + \hbar b_1 + O(\hbar^2)$.

Définition 2.5.7. Un opérateur de Toeplitz $A_k \in \mathcal{T}_j$ de symbole principal a_0 est dit *elliptique à l'infini* s'il existe un $c > 0$ tel que pour tout z dans \mathbb{C} , $|a_0(z)| \geq c(1 + |z|^2)^{\frac{j}{2}}$.

En s'inspirant par exemple de la proposition 12 de [19] et du théorème 39 de [29], on peut montrer le fait suivant :

Proposition 2.5.8 (Calcul fonctionnel). *Si A_k appartient à \mathcal{T}_j pour un certain $j \geq 1$, est autoadjoint et elliptique à l'infini et si $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^∞ à support compact, alors $\eta(A_k)$ est un opérateur de Toeplitz qui appartient à $\mathcal{T}_{j'}$ pour tout $j' < 0$.*

Démonstration. Comme indiqué précédemment, on se réfère à la proposition 12 de [19] ; comme dans celle-ci, on étend η en une fonction G de $C^\infty(\mathbb{C})$ à support compact telle que $\partial_{\bar{z}} G$ s'annule à tout ordre le long de la droite réelle. D'après la formule d'Helffer-Sjöstrand [58, proposition 7.2], on a

$$\eta(A_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \partial_{\bar{z}} G(z) (z - A_k)^{-1} d\lambda(z).$$

Lorsque $\Im(z) \neq 0$, on introduit la série formelle $\sum_{\ell \geq 0} \hbar^\ell b_\ell(z, \cdot)$ inverse de la série formelle $z - \sum_{\ell \geq 0} \hbar^\ell a_\ell$ dans $C^\infty(\mathbb{C})[[\hbar]]$ munie du produit $*_{\text{cov}}$ associé au symbole σ_{cov} . On peut montrer que pour tout $\ell \geq 0$, il existe une fonction $P_\ell(z, w)$ polynomiale en z à coefficients dans $C^\infty(\mathbb{C})$ telle que

$$b_\ell(z, w) = P_\ell(z, w) (z - a_0(w))^{-(\ell+1)}$$

et donc $|b_\ell(z, w)| = O(|\Im(z)|^{-(\ell+1)})$ quand z tend vers zéro, ce qui implique que les fonctions $f_\ell : (z, w) \mapsto \Im(z)^{-1} b_\ell(z, w) \partial_{\bar{z}} G(z)$ sont de classe C^∞ puisque $|\partial_{\bar{z}} G(z)| = O(|\Im(z)|^N)$ quand z tend vers zéro, pour tout $N \geq 0$. En outre, les coefficients de $P_\ell(\cdot, w)$ sont des combinaisons linéaires des $a_m, m \leq \ell$. Comme il existe $C > 0$ telle que

$$\forall z, w \in \mathbb{C}, \quad \frac{1}{|z - a_0(w)|} \leq \frac{1}{||z| - C(1 + |w|^2)^{j/2}|},$$

on en déduit que pour w assez grand $|f_\ell(z, w)| \leq C'$ et de même pour ses dérivées par rapport à w . Par un procédé de Borel, on peut donc construire un symbole $\tilde{f}(z, w_1, w_2, k)$ dans \mathcal{S}_0^2 admettant le développement asymptotique $\sum_{\ell \geq 0} k^{-\ell} \tilde{f}_\ell(z, w_1, w_2)$ de sorte que $\tilde{f}_\ell(z, w, w) = f_\ell(z, w)$, $\partial_{\bar{w}_1} \tilde{f}_\ell = O(|w_1 - w_2|^\infty)$ et $\partial_{w_2} \tilde{f}_\ell = O(|w_1 - w_2|^\infty)$ uniformément

par rapport à z . On considère alors l'opérateur $S_k(z)$ de noyau $\frac{k}{2\pi} F_0^k \tilde{f}$. Par construction, on a

$$S_k(z)(z - A_k) = \mathfrak{S}(z)^{-1} \partial_{\bar{z}} G(z) \Pi_k^0 + R_k(z)$$

avec $R_k(z)$ de la forme (2.15), d'où

$$\partial_{\bar{z}} G(z)(z - A_k)^{-1} = \mathfrak{S}(z) S_k(z) - \mathfrak{S}(z) R_k(z)(z - A_k)^{-1}.$$

Ainsi, $\eta(A_k)$ est un opérateur de Toeplitz de \mathcal{T}_0 de symbole

$$\sum_{\ell \geq 0} \frac{\hbar^\ell}{2\pi} \int_C \partial_{\bar{z}} G(z) b_\ell(z, \cdot) d\lambda(z).$$

Pour se convaincre que cet opérateur est dans $\mathcal{T}_{j'}$ pour tout $j' < 0$, on peut montrer, en écrivant le développement de Taylor de G en $a_0(z)$, que les fonctions dans le développement de son symbole s'expriment comme combinaisons linéaires de termes de la forme $\eta^{(p)}(a_0) \partial_z^\alpha \partial_{\bar{z}}^\beta a_\ell$.

□

Chapitre 3

Conditions de Bohr-Sommerfeld usuelles

Dans ce chapitre, qui est une version légèrement développée de la section 5.4, nous rappelons les conditions de Bohr-Sommerfeld au voisinage d'un point régulier du symbole principal d'un opérateur de Toeplitz autoadjoint sur une surface. Plus précisément, soit T_k un opérateur de Toeplitz autoadjoint sur une variété kählérienne compacte connexe M de dimension deux, de symbole normalisé $f(\cdot, \hbar) = \sum_{\ell \geq 0} \hbar^\ell f^\ell$. En nous inspirant de Vũ Ngọc [97, 98], nous introduisons le faisceau des solutions microlocales de l'équation $T_k \psi_k = E \psi_k$ quand E est une valeur régulière du symbole principal f_0 . Nous retrouvons les conditions de Bohr-Sommerfeld en calculant l'holonomie de ce faisceau, obtenue en étudiant une famille de solutions microlocales particulièrement commodes : les sections lagrangiennes. Enfin, nous rappelons le comportement de ces conditions par rapport au paramètre spectral. Cette formulation dans le cadre de la théorie des faisceaux permet de travailler plus facilement dans le cas où E n'est plus forcément une valeur régulière, particulièrement dans le cas hyperbolique (voir le chapitre 5).

3.1 Solutions microlocales

Soit U un ouvert de M ; une suite de sections $\psi_k \in \mathcal{C}^\infty(U, L^k \otimes K)$ sera appelée état local au-dessus de U .

Définition 3.1.1. On dit d'un état local ψ_k qu'il est une *solution microlocale* de

$$T_k \psi_k = 0 \tag{3.1}$$

sur U s'il est admissible et que pour tout $x \in U$, il existe une fonction $\chi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ à support contenu dans U , valant 1 sur un voisinage de x et telle que

$$\Pi_k(\chi \psi_k) = \psi_k + O(k^{-\infty}), \quad T_k(\Pi_k(\chi \psi_k)) = O(k^{-\infty})$$

près de x .

On peut montrer que si $\psi_k \in \mathcal{H}_k$ est admissible et vérifie $T_k \psi_k = 0$, alors la restriction de ψ_k à U est une solution microlocale de (3.1) sur U (en utilisant la description du noyau du projecteur Π_k). De plus, l'ensemble $S(U)$ des solutions microlocales de cette équation sur U est un \mathbb{C}_k -module dont l'ensemble des états locaux négligeables forme un sous-module. On désigne par $\text{Sol}(U)$ le module obtenu comme quotient de $S(U)$ par les états locaux négligeables ; la notation $[\psi_k]$ représente la classe d'équivalence de $\psi_k \in S(U)$ dans ce quotient.

Lemme 3.1.2. *La collection des modules $\text{Sol}(U)$, U ouvert de M , conjointement avec les applications de restriction naturelles $r_{U,V} : \text{Sol}(V) \rightarrow \text{Sol}(U)$ pour U, V ouverts de M tels que $U \subset V$, définissent un préfaisceau complet.*

On obtient de la sorte un faisceau Sol au-dessus de M , appelé faisceau des solutions microlocales sur M .

3.2 Le faisceau des solutions microlocales

On peut prouver que si le symbole principal f_0 de T_k ne s'annule pas sur U , alors $\text{Sol}(U)$ est réduit à $\{0\}$ [19, proposition 9]. De manière équivalente, si $\psi_k \in \mathcal{H}_k$ satisfait $T_k \psi_k = 0$, alors son microsupport est contenu dans le niveau $\Gamma_0 = f_0^{-1}(0)$. Ce fait implique le lemme suivant.

Lemme 3.2.1. *Soit Ω un ouvert de Γ_0 ; on écrit $\Omega = U \cap \Gamma_0$ où U est un ouvert de M . Alors la restriction*

$$r_U : \text{Sol}(U) \rightarrow \mathfrak{F}_U(\Omega) = r_U(\text{Sol}(U))$$

est un isomorphisme de \mathbb{C}_k -modules.

On désire définir un nouveau faisceau $\mathfrak{F} \rightarrow \Gamma_0$ qui décrit toujours les solutions microlocales de (3.1). Pour ce faire, on va vérifier que le module $\mathfrak{F}_U(\Omega)$ ne dépend pas de l'ouvert U tel que $\Omega = \Gamma_0 \cap U$. On montre premièrement :

Lemme 3.2.2. *Soient U, \tilde{U} deux ouverts de M tels que $\Omega = U \cap \Gamma_0 = \tilde{U} \cap \Gamma_0$. Alors il existe un isomorphisme entre $\text{Sol}(U)$ et $\text{Sol}(\tilde{U})$ qui commute avec les applications de restriction.*

Démonstration. Supposons U et \tilde{U} distincts et posons $V = U \cap \tilde{U}$; on a bien sûr $\Omega \subset V$. Écrivons $\tilde{U} = V \cup W$, où l'ouvert W est tel qu'il existe un ouvert $X \subset V$ contenant Ω tel que $W \cap X = \emptyset$. Soit χ_V, χ_W une partition de l'unité subordonnée à la décomposition $\tilde{U} = V \cup W$; en particulier, $\chi_V(x) = 1$ dès que $x \in X$. On montre que la classe $F_{\chi_V}(\psi_k) = [\chi_V \psi_k]$ appartient à $\text{Sol}(\tilde{U})$ pour ψ_k dans $S(U)$. En effet, puisque le support de χ_V est contenu dans Ω , $\phi_k = \chi_V \psi_k$ est un élément de $\mathcal{C}^\infty(\tilde{U}, L^k \otimes K)$. De plus, étant donné $x \in \tilde{U}$, alors soit x n'appartient pas à U et alors ϕ_k est identiquement nulle sur un voisinage de x par définition de χ_V , soit x appartient à U et alors deux cas se présentent : si $x \in \Gamma_0$, $\phi_k = \psi_k$ sur un voisinage de x , sinon ψ_k est négligeable sur un voisinage de x et ϕ_k l'est également. Dans ces trois situations, il est alors aisé de trouver une fonction de troncature qui vérifie les propriétés de la définition 3.1.1.

Il est clair que l'application F_{χ_V} commute avec les applications de restriction, puisque χ_V vaut 1 près de Ω . En outre, l'injectivité de celle-ci est immédiate. Montrons la surjectivité; on se donne un élément $[\phi_k]$ de $\text{Sol}(\tilde{U})$. On écrit $U = V \cap \tilde{W}$ comme précédemment et on construit une partition de l'unité $\eta_V, \eta_{\tilde{W}}$ subordonnée à cette décomposition. Alors on vérifie que $[\eta_{\tilde{W}} \phi_k]$ appartient à $\text{Sol}(U)$ et que $F_{\chi_V}([\eta_{\tilde{W}} \phi_k]) = \phi_k$. \square

De ces deux lemmes, on déduit la :

Proposition 3.2.3. *Soient U, \tilde{U} deux ouverts de M tels que $\Omega = U \cap \Gamma_0 = \tilde{U} \cap \Gamma_0$. Alors $\mathfrak{F}_U(\Omega) = \mathfrak{F}_{\tilde{U}}(\Omega)$.*

Cela permet de définir un faisceau $\mathfrak{F} \rightarrow \Gamma_0$, que nous appellerons faisceau des solutions microlocales au-dessus de Γ_0 . Signalons que jusqu'à présent, nous n'avons fait aucune hypothèse sur la structure du niveau Γ_0 (on n'a pas supposé qu'il s'agit un niveau régulier).

3.3 Le cas régulier

Considérons un point $m \in \Gamma_0$ régulier pour le symbole principal f_0 . Alors il existe un symplectomorphisme χ d'un voisinage de m dans M vers un voisinage de l'origine dans \mathbb{R}^2 tel que $(f_0 \circ \chi^{-1})(x, \xi) = \xi$. On peut quantifier ce symplectomorphisme par le biais d'un opérateur intégral de Fourier : il existe une suite admissible d'opérateurs $U_k^{(m)} : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, L_0^k) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M, L^k \otimes K)$ tels que

$$U_k^{(m)} \left(U_k^{(m)} \right)^* \sim \Pi_k \quad \text{près de } m;$$

$$\left(U_k^{(m)} \right)^* U_k^{(m)} \sim \Pi_k^0, \quad \left(U_k^{(m)} \right)^* T_k U_k^{(m)} \sim S_k \quad \text{près de } 0,$$

où S_k est l'opérateur de Toeplitz :

$$S_k = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(z - \frac{1}{k} \frac{d}{dz} \right).$$

Considérons l'élément Φ_k de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, L_0^k)$ donné par

$$\Phi_k(z) = \exp\left(kz^2/2\right) \psi^k(z), \quad \psi(z) = \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right);$$

celui-ci vérifie $S_k \Phi_k = 0$. En choisissant une fonction de troncature adéquate η et en posant $\Phi_k^{(m)} = \Pi_k^0(\eta \Phi_k)$, on obtient une suite admissible $\Phi_k^{(m)}$ d'éléments de \mathcal{B}_k microlocalement égale à Φ_k près de l'origine et engendrant le \mathbb{C}_k -module des solutions microlocales de $S_k u_k = 0$ près de l'origine. On en déduit le résultat suivant.

Proposition 3.3.1. *Le \mathbb{C}_k -module des solutions microlocales de l'équation (3.1) près de m est libre de rang 1, engendré par $U_k^{(m)} \Phi_k^{(m)}$.*

Il s'agit d'une version légèrement modifiée de la proposition 3.6 de [20], dans laquelle la forme normale est réalisée sur le tore au lieu du plan complexe.

Ainsi, si Γ_0 ne contient que des points réguliers du symbole principal f_0 , alors $\mathfrak{F} \rightarrow \Gamma_0$ est un faisceau en \mathbb{C}_k -modules libres de rang 1; en particulier, cela implique que $\mathfrak{F} \rightarrow \Gamma_0$ est un faisceau plat, donc caractérisé par son holonomie de Čech $\text{hol}_{\mathfrak{F}}$.

3.4 Sections lagrangiennes

Afin de calculer l'holonomie $\text{hol}_{\mathfrak{F}}$, il est nécessaire de comprendre la structure des solutions microlocales. Dans cette optique, une famille de solutions particulièrement intéressante est celle des sections lagrangiennes; rappelons la définition de celles-ci. Considérons une courbe $\Gamma \subset \Gamma_0$ ne contenant que des points réguliers, et notons $j : \Gamma \rightarrow M$ le plongement de Γ dans M . Soit U un ouvert de M tel que $U_\Gamma = j^{-1}(U)$ est contractile; il existe une section plate unitaire t_Γ de $j^*L \rightarrow U_\Gamma$. Maintenant, considérons une série formelle

$$\sum_{\ell \geq 0} \hbar^\ell g_\ell \in \mathcal{C}^\infty(U_\Gamma, j^*K)[[\hbar]].$$

Soit V un ouvert de M tel que $\bar{V} \subset U$. Alors une suite $\Psi_k \in \mathcal{H}_k$ est une *section lagrangienne* associée à (Γ, t_Γ) de symbole $\sum_{\ell \geq 0} \hbar^\ell g_\ell$ si

$$\Psi_k(m) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{1/4} F^k(m) \tilde{g}(m, k) \quad \text{sur } V,$$

où

- F est une section de $L \rightarrow U$ telle que

$$j^*F = t_\Gamma \quad \text{et} \quad \bar{\partial}F = 0$$

modulo une section s'annulant à tout ordre le long de $j(\Gamma)$, et vérifiant $|F(m)| < 1$ si $m \notin j(\Gamma)$,

- $\tilde{g}(\cdot, k)$ est une suite de $\mathcal{C}^\infty(U, K)$ admettant un développement asymptotique de la forme $\tilde{g}(\cdot, k) \sim \sum_{\ell \geq 0} k^{-\ell} \tilde{g}_\ell$ pour la topologie \mathcal{C}^∞ qui vérifie

$$j^* \tilde{g}_\ell = g_\ell \quad \text{et} \quad \bar{\partial} \tilde{g}_\ell = 0$$

modulo une section s'annulant à tout ordre le long de $j(\Gamma)$.

Supposons de plus Ψ_k admissible au sens où $\Psi_k(m)$ est uniformément $O(k^N)$ pour un certain N et la même propriété est vérifiée par ses dérivées covariantes successives. Il est toujours possible de construire une section lagrangienne de symbole donné $\sum_{\ell \geq 0} \hbar^\ell g_\ell$ (voir [21, partie 3]). En outre, si Ψ_k est une section lagrangienne non nulle, alors les constantes $c_k \in \mathbb{C}_k$ telles que $c_k \Psi_k$ est encore une section lagrangienne sont les éléments de la forme

$$c_k = \rho(k) \exp(ik\phi(k)) + O(k^{-\infty}) \quad (3.2)$$

où $\rho(k), \phi(k) \in \mathbb{R}$ et ρ, ϕ sont des suites admettant des développements asymptotiques de la forme $\rho(k) = \sum_{\ell \geq 0} k^{-\ell} \rho_\ell$, $\phi(k) = \sum_{\ell \geq 0} k^{-\ell} \phi_\ell$.

Les sections lagrangiennes sont importantes du fait qu'elles fournissent un procédé pour construire des solutions microlocales. En effet, si Ψ_k est une section lagrangienne au-dessus de V associée à (Γ, t_Γ) de symbole $\sum_{\ell \geq 0} \hbar^\ell g_\ell$, alors $T_k \Psi_k$ est également une section lagrangienne au-dessus de V associée à (Γ, t_Γ) , et on peut en principe obtenir les termes \hat{g}_ℓ , $\ell \geq 0$ du développement asymptotique de son symbole en fonction des g_ℓ , $\ell \geq 0$ (grâce à un développement du type phase stationnaire). Cela permet de résoudre l'équation (3.1) en prescrivant le symbole de Ψ_k de sorte que pour tout $\ell \geq 0$, \hat{g}_ℓ s'annule. Donnons les détails de cette procédure pour les deux premiers termes.

Introduisons un *fibré de demi-formes* (δ, φ) , c'est-à-dire la donnée d'un fibré en droites $\delta \rightarrow M$ et d'un isomorphisme de fibré en droites $\varphi : \delta^2 \rightarrow \Lambda^{2,0} T^*M$. Puisque la première classe de Chern de M est paire, un tel couple existe. On introduit également l'unique fibré en droites holomorphe hermitien L_1 tel que $K = L_1 \otimes \delta$. On définit la *forme sous-principale* κ comme la 1-forme sur Γ vérifiant

$$\kappa(X_{f_0}) = -f_1$$

où X_{f_0} désigne le champ de vecteurs hamiltonien associé à f_0 . On définit une connexion ∇^1 sur $j^* L_1 \rightarrow \Gamma$ par

$$\nabla^1 = \nabla^{j^* L_1} + \frac{1}{i} \kappa,$$

avec $\nabla^{j^* L_1}$ la connexion induite sur $j^* L_1$ par la connexion de Chern de L_1 . Soit δ_Γ la restriction de δ à Γ ; l'application

$$\varphi_\Gamma : \delta_\Gamma^2 \rightarrow T^* \Gamma \otimes \mathbb{C}, \quad u \mapsto j^* \varphi(u)$$

est un isomorphisme de fibrés en droites. On définit une connexion ∇^{δ_Γ} sur δ_Γ par la formule

$$\nabla_X^{\delta_\Gamma} \sigma = \mathcal{L}_X^{\delta_\Gamma} \sigma,$$

dans laquelle $\mathcal{L}_X^{\delta_\Gamma}$ est l'opérateur différentiel du premier ordre agissant sur les sections de δ_Γ de sorte que

$$\varphi_\Gamma \left(\mathcal{L}_X^{\delta_\Gamma} g \otimes g \right) = \frac{1}{2} \mathcal{L}_X \varphi_\Gamma \left(g^{\otimes 2} \right)$$

pour toute section g ; ici, \mathcal{L} désigne la dérivée de Lie standard des formes différentielles.

Alors $T_k \Psi_k$ est une section lagrangienne au-dessus de V associée à t_Γ de symbole $(j^* f_0) g_0 + O(\hbar) = O(\hbar)$, et donc Ψ_k satisfait (3.1) à un reste $O(k^{-1})$ près. De plus, le symbole sous-principal de $T_k \Psi_k$ est

$$(j^* f_1) g_0 + \frac{1}{i} \left(\nabla_{X_{f_0}}^{j^* L_1} \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes \mathcal{L}_{X_{f_0}}^{\delta_\Gamma} \right) g_0.$$

Par conséquent, l'équation (3.1) est satisfaite par Ψ_k à $O(k^{-2})$ près si et seulement si

$$\left(f_1 + \frac{1}{i} \left(\nabla_{X_{f_0}}^{j^* L_1} \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes \mathcal{L}_{X_{f_0}}^{\delta_\Gamma} \right) \right) g_0 = 0 \quad \text{au-dessus de } V \cap \Gamma. \quad (3.3)$$

Cette formule peut être interprétée comme une équation de transport parallèle : si on munit $j^* L_1 \otimes \delta_\Gamma$ de la connexion induite par ∇^1 et ∇^{δ_Γ} , l'équation (3.3) signifie que g_0 est plate.

3.5 Holonomie

On suppose maintenant que Γ_0 est connexe (sinon, on peut faire la même discussion en considérant les composantes connexes de Γ_0) et contient uniquement des points réguliers de f_0 ; c'est alors une courbe lisse fermée plongée dans M . On voudrait calculer l'holonomie du faisceau $\mathfrak{F} \rightarrow \Gamma_0$.

Proposition 3.5.1. *L'holonomie $\text{hol}_{\mathfrak{F}}(\Gamma_0)$ est de la forme*

$$\text{hol}_{\mathfrak{F}}(\Gamma_0) = \exp(ik\Theta(k)) + O(k^{-\infty}) \quad (3.4)$$

où $\Theta(k)$ est réel et admet un développement asymptotique de la forme $\Theta(k) = \sum_{\ell \geq 0} k^{-\ell} \Theta_\ell$.

En particulier, cela signifie que si l'on considère un jeu de solutions pour calculer l'holonomie, on a seulement besoin de tenir compte des phases des constantes de transition.

Démonstration. Recouvrons Γ_0 par un nombre fini d'ouverts Ω_α dans lesquels la forme normale introduite avant la proposition 3.3.1 s'applique, et soient U_k^α et Φ_k^α comme dans cette proposition. On obtient une famille u_k^α de solutions microlocales; observons que pour chaque α , u_k^α est une section lagrangienne associée à Γ . Donc, si $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$ est non vide, l'unique (modulo $O(k^{-\infty})$) constante $c_k^{\alpha\beta} \in \mathbb{C}_k$ telle que $u_k^\alpha = c_k^{\alpha\beta} u_k^\beta$ sur $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$ est de la forme donnée dans l'équation (3.2) :

$$c_k^{\alpha\beta} = \rho^{\alpha\beta}(k) \exp(ik\phi^{\alpha\beta}(k)) + O(k^{-\infty}).$$

Or, si m appartient à $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$, alors près de m on a $u_k^\alpha \sim U_k^\alpha \Phi_k^{(m)}$ et $u_k^\beta \sim U_k^\beta \Phi_k^{(m)}$ où $\Phi_k^{(m)}$ est une suite admissible d'éléments de \mathcal{B}_k microlocalement égale à Φ_k près de l'origine. Par conséquent, on a

$$c_k^{\alpha\beta} \Phi_k^{(m)} = (U_k^\beta)^{-1} U_k^\alpha \Phi_k^{(m)} + O(k^{-\infty}),$$

et le fait que les opérateurs U_k^α, U_k^β sont microlocalement unitaires livre $|c_k^{\alpha\beta}|^2 = 1 + O(k^{-\infty})$. Ceci implique que pour $\ell \geq 1, \rho_\ell = 0$, ce qui fournit le résultat. \square

Essayons d'être plus précis et de calculer les premiers termes de ce développement asymptotique. Considérons un recouvrement fini $(\Omega_\alpha)_\alpha$ de Γ_0 par des ouverts contractiles et munissons chaque Ω_α d'une solution microlocale non-triviale Ψ_k^α qui est une section lagrangienne. Choisissons une section plate unitaire t_α du fibré en droites $j^*L \rightarrow j^{-1}(\Omega_\alpha)$ et écrivons, pour $m \in \Omega_\alpha$:

$$\Psi_k^\alpha(m) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{1/4} g_\alpha(m, k) t_\alpha^k(m)$$

où la section $g_\alpha(\cdot, k)$ de $j^*K \rightarrow \Omega_\alpha$ est le symbole de Ψ_k^α , dont le symbole principal sera noté $g_\alpha^{(0)}$. Maintenant, supposons que $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta \neq \emptyset$; il existe un unique (à un reste $O(k^{-\infty})$ près) $c_k^{\alpha\beta} \in \mathbb{C}_k$ tel que $\Psi_k^\alpha \sim c_k^{\alpha\beta} \Psi_k^\beta$ sur $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$.

Définition 3.5.2. Soient $A, B \in M$ et γ une courbe lisse par morceaux reliant A et B ; notons $P_{A,B,\gamma} : L_A \rightarrow L_B$ l'isomorphisme linéaire donné par le transport parallèle de A à B le long de γ . Étant données deux sections s, t de $L \rightarrow M$, on définit le *déphasage* entre $s(A)$ et $t(B)$ le long de γ comme le nombre

$$(\Phi_s(A) - \Phi_t(B))_\gamma = \arg(\lambda_{A,B,\gamma}) - c_0([A, B]) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},$$

où $\lambda_{A,B,\gamma}$ est l'unique nombre complexe tel que $P_{A,B,\gamma}(s(A)) = \lambda_{A,B,\gamma} t(B)$ et $c_0([A, B])$ est (la phase de) l'holonomie de γ dans (L, ∇) . On définit de la même façon le déphasage entre deux sections de $K \rightarrow M$, en se servant de la connexion de Chern de K .

Maintenant, considérons trois points $A, B, C \in M$ et soit γ_1 (resp. γ_2) une courbe lisse par morceaux reliant A et B (resp. B et C). Soit γ la concaténation de γ_1 et γ_2 . On vérifie facilement que

$$(\Phi_s(A) - \Phi_t(B))_{\gamma_1} + (\Phi_t(B) - \Phi_u(C))_{\gamma_2} = (\Phi_s(A) - \Phi_u(C))_\gamma$$

pour trois sections s, t, u de L . En outre, si γ est une courbe fermée et A est un point de γ , alors le déphasage entre $s(A)$ et $s(A)$ le long de γ est

$$(\Phi_s(A) - \Phi_s(A))_\gamma = 0$$

par définition de l'holonomie c_0 . C'est pourquoi on se permet d'écrire ce nombre sous la forme d'une différence.

Revenant à notre problème, on note $\Phi_\alpha^{(-1)}(A) - \Phi_\beta^{(-1)}(B)$ le déphasage entre $t_\alpha(A)$ et $t_\beta(B)$ le long de Γ_0 dans L , et $\Phi_\alpha^{(0)}(A) - \Phi_\beta^{(0)}(B)$ le déphasage entre $g_\alpha^{(0)}(A)$ et $g_\beta^{(0)}(B)$ le long de Γ_0 dans K . Soit ζ le chemin dans Γ_0 commençant en un point $A \in \Omega_\alpha$ et se terminant en $B \in \Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$. Puisque t_α est plate et le symbole principal g_0 de Ψ_k^α satisfait l'équation (3.3), on a

$$\begin{aligned} \arg\left(c_k^{\alpha\beta}\right) &= k\left(c_0(\zeta) + \Phi_\alpha^{(-1)}(A) - \Phi_\beta^{(-1)}(B)\right) \\ &+ c_1(\zeta) + \text{hol}_{\delta_{\Gamma_0}}(\zeta) + \Phi_\alpha^{(0)}(A) - \Phi_\beta^{(0)}(B) + O(k^{-1}). \end{aligned}$$

Cependant, grâce à la discussion précédente, on sait que le terme $k\left(\Phi_\alpha^{(-1)}(A) - \Phi_\beta^{(-1)}(B)\right) + \Phi_\alpha^{(0)}(A) - \Phi_\beta^{(0)}(B)$ est un cobord de Čech. Appelons $c_1(\Gamma_0)$ l'holonomie de Γ_0 dans (L_1, ∇^1) . On peut vérifier que l'holonomie de $\nabla^{\delta_{\Gamma_0}}$ est un élément de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, représenté par $\epsilon(\Gamma_0) \in \{0, 1\}$. On obtient :

Proposition 3.5.3. *Les deux premiers termes du développement asymptotique de la quantité $\Theta(k)$ définie dans la proposition 3.5.1 sont donnés par les formules*

$$\Theta_0 = c_0(\Gamma_0)$$

et

$$\Theta_1 = c_1(\Gamma_0) + \epsilon(\Gamma_0)\pi.$$

Puisqu'on peut construire une solution microlocale non triviale au-dessus de Γ_0 si et seulement si $\Theta(k) \in 2\pi\mathbb{Z}$, on retrouve les conditions de Bohr-Sommerfeld usuelles.

On peut donner une autre interprétation de l'indice ϵ . Considérons une courbe fermée lisse γ immergée dans M . Notons $\iota : \gamma \rightarrow M$ l'immersion en question, et $\delta_\gamma = \iota^*\delta$ le fibré image réciproque de δ au-dessus de γ . Soit $\tilde{\iota} : \delta_\gamma \rightarrow \delta$ le relevé naturel de ι , et définissons $\tilde{\iota}^2 : \delta_\gamma^2 \rightarrow \delta^2$ par la formule $\tilde{\iota}^2(u \otimes v) = \tilde{\iota}(u) \otimes \tilde{\iota}(v)$. L'application

$$\varphi_\gamma : \delta_\gamma^2 \rightarrow T^*\gamma \otimes \mathbb{C}, \quad u \mapsto \iota^*\varphi(\tilde{\iota}^2(u))$$

est un isomorphisme de fibrés en droites. L'ensemble

$$\left\{u \in \delta_\gamma; \varphi_\gamma(u^{\otimes 2}) > 0\right\}$$

possède une ou deux composantes connexes. Dans le premier cas, on pose $\epsilon(\gamma) = 1$, et dans le second cas, $\epsilon(\gamma) = 0$. On peut vérifier que cette définition coïncide avec la précédente quand γ est une courbe lisse fermée plongée. Notons que la valeur de $\epsilon(\gamma)$ ne dépend que de la classe d'isotopie de la courbe γ dans M .

3.6 Dépendance par rapport au paramètre spectral

Quand on veut étudier la théorie spectrale, on a besoin d'effectuer le même travail que ci-dessus en remplaçant l'opérateur T_k par $T_k - E$; il est alors naturel de se demander

si on peut utiliser les mêmes outils en tenant compte de la dépendance en le paramètre spectral E .

Supposons qu'il existe un voisinage tubulaire Ω de Γ tel que pour E suffisamment proche de 0, l'intersection $\Gamma_E \cap \Omega$ est régulière. Alors on peut construire des solutions microlocales de $(T_k - E)u_k = 0$ comme sections lagrangiennes dépendant de manière \mathcal{C}^∞ du paramètre E (voir [20, section 2.6]); on obtient des solutions microlocales uniformément par rapport à E . On peut alors définir tous les objets précédents en y ajoutant cette dépendance \mathcal{C}^∞ en E . En procédant de cette manière, on obtient les conditions de Bohr-Sommerfeld dépendant d'un paramètre, que l'on décrit ci-dessous.

Soit I un intervalle de valeurs régulières du symbole principal f_0 . Pour $E \in I$, on note $\mathcal{C}_j(E)$, $1 \leq j \leq N$, les composantes connexes de $f_0^{-1}(E)$ de sorte que $E \mapsto \mathcal{C}_j(E)$ soit lisse. Observons que $\mathcal{C}_j(E)$ est une courbe lisse fermée plongée, équipée de l'orientation dépendant continûment de E donnée par le flot hamiltonien de f_0 . On définit l'action principale $c_0^{(j)} \in \mathcal{C}^\infty(I)$ de sorte que le transport parallèle dans L le long de $\mathcal{C}_j(E)$ est la multiplication par $\exp(ic_0^{(j)}(E))$. On définit l'action sous-principale $c_1^{(j)}$ de manière analogue, en remplaçant L par L_1 et en utilisant la connexion ∇^1 (dépendant de E) décrite plus haut. Finalement, on pose $\epsilon_E^{(j)} = \epsilon(\mathcal{C}_j(E))$; en fait, $\epsilon_E^{(j)}$ est une constante $\epsilon_E^{(j)} = \epsilon^{(j)}$ pour E dans I . Les conditions de Bohr-Sommerfeld (voir [21] pour davantage de détails) spécifient qu'il existe $\eta > 0$ tel que l'intersection du spectre de T_k avec $[E - \eta, E + \eta]$ modulo $O(k^{-\infty})$ est la réunion de familles σ_j , $1 \leq j \leq N$, où les éléments de σ_j sont les solutions de

$$g^{(j)}(\lambda, k) \in 2\pi k^{-1}\mathbb{Z}$$

avec $g^{(j)}(\cdot, k)$ une suite de fonctions de $\mathcal{C}^\infty(I)$ admettant un développement asymptotique de la forme

$$g^{(j)}(\cdot, k) \sim \sum_{\ell \geq 0} k^{-\ell} g_\ell^{(j)}$$

à coefficients $g_\ell^{(j)} \in \mathcal{C}^\infty(I)$. De plus, on a

$$g_0^{(j)}(\lambda) = c_0^{(j)}(\lambda) \text{ et } g_1^{(j)}(\lambda) = c_1^{(j)}(\lambda) + \epsilon^{(j)}\pi.$$

Remarque. En principe, on peut aussi donner une formule permettant de calculer les quantités $g_\ell^{(j)}$, $\ell \geq 2$ qui interviennent dans l'expression des conditions de Bohr-Sommerfeld, comme le signale Charles dans l'article [21]. Dans le contexte des opérateurs pseudo-différentiels, un tel résultat à été obtenu par Colin de Verdière [31]. Sa méthode s'appuie sur trois ingrédients : l'expression de la trace d'un opérateur comme intégrale du noyau évalué sur la diagonale, le calcul symbolique (connaissance du star-produit), et le fait de disposer d'un opérateur modèle qu'on comprend suffisamment bien (c'est-à-dire dont on connaît le spectre ainsi que le symbole total de la résolvante) pour pouvoir calculer explicitement certaines constantes qui apparaissent dans la preuve (dans le cas pseudo-différentiel sur \mathbb{R}^2 , c'est l'oscillateur harmonique qui joue ce rôle). En pratique, on a bien l'expression voulue de la trace d'un opérateur de Toeplitz et il est sans doute possible d'explicitier le star-produit sur des exemples simples comme celui de la sphère ou

du tore ; une question qui reste pour l'instant en suspens est de savoir si on dispose dans ces cas d'opérateurs pour lesquels on sait calculer explicitement les quantités citées plus haut. Dans le cas de la sphère, nous pensons que l'opérateur Z_k (défini dans la section [2.4.3.2](#)) est un bon candidat ; il serait intéressant d'écrire les calculs en question.

Chapitre 4

Conditions de Bohr-Sommerfeld dans le cas elliptique

Ce chapitre reprend intégralement l'article [72], hormis l'annexe contenant les preuves des résultats de la section 4.3.3 qui a été déplacée dans la section 2.5. Nous y obtenons les conditions de Bohr-Sommerfeld près d'un minimum global du symbole principal d'un opérateur de Toeplitz autadjoint, en dimension deux. Pour ce faire, nous introduisons des opérateurs intégraux de Fourier, qui nous permettent de quantifier une forme normale symplectique près du point réalisant le minimum, c'est-à-dire d'en déduire une forme normale microlocale au niveau des opérateurs. L'étude du modèle local (l'oscillateur harmonique dans la représentation de Bargmann) fournit un développement asymptotique des valeurs propres de l'opérateur dans un intervalle de taille fixe (ne dépendant pas de k) contenant la valeur singulière. En outre, la technique employée nous permet de retrouver les conditions de Bohr-Sommerfeld usuelles loin du point critique. Finalement, nous mettons en évidence ces résultats sur un exemple (celui du hamiltonien de Harper sur le tore) *via* des simulations numériques.

Nous nous restreignons au cas d'un minimum global afin d'éviter d'avoir à discuter l'apport des différentes composantes connexes du niveau critique. Dans le cas général, il faut rajouter à la description du spectre la contribution de celles-ci.

4.1 Introduction

Let M be a compact, connected Kähler manifold of complex dimension 1, with fundamental 2-form ω . Assume M is endowed with a prequantum line bundle L . Let K be another holomorphic line bundle and define the quantum Hilbert space \mathcal{H}_k as the space of holomorphic sections of $L^k \otimes K$, for every positive integer k . The operators acting on \mathcal{H}_k that we consider are Berezin-Toeplitz operators ([12, 10, 19, 76], and many others). The semiclassical parameter is k , and the semiclassical limit is $k \rightarrow +\infty$. Formally, k is the inverse of Planck's constant \hbar .

Our aim is to understand the spectrum of a given self-adjoint Toeplitz operator, in the semiclassical limit. In the setting of (\hbar -)pseudodifferential operators, the similar study was done by Colin de Verdière in [30]. In his article [21], Charles obtained the description of the intersection of the spectrum of a self-adjoint Toeplitz operator with an interval of regular values of its principal symbol, in the semiclassical limit: the eigenvalues are selected by an integrality condition for some geometric quantities (actions) associated to the symbol of the operator (these are the Bohr-Sommerfeld conditions).

In this article, we extend these conditions around a global minimum of the principal symbol; since we work with only one degree of liberty, we expect to have a very precise description of the eigenvalues near the critical point.

4.1.1 Main theorem

Let A_k be a self-adjoint Toeplitz operator on M ; its normalized symbol $a_0 + \hbar a_1 + \dots$ is real-valued. Assume that its principal symbol a_0 admits a global minimum at $m_0 \in M$, with $a_0(m_0) = 0$. Denote by $\lambda_k^{(1)} \leq \lambda_k^{(2)} \leq \dots \leq \lambda_k^{(j)} \leq \dots$ the eigenvalues of A_k . Our main result is the following theorem.

Theorem (Theorem 4.6.2). *There exist $E^0 > 0$, a sequence $g(\cdot, k)$ of functions of $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ which admits an asymptotic expansion of the form $g(\cdot, k) = \sum_{\ell \geq 0} k^{-\ell} g_\ell$ in the \mathcal{C}^∞ topology, and a positive integer k_0 such that for every integer $N \geq 1$ and for every $E \leq E^0$, there exists a constant $C_N > 0$ such that for $k \geq k_0$:*

$$\left(\lambda_k^{(j)} \leq E \text{ or } E_k^{(j)} \leq E \right) \Rightarrow \left| \lambda_k^{(j)} - E_k^{(j)} \right| \leq C_N k^{-N}$$

where

$$E_k^{(j)} = g \left(k^{-1} \left(j + \frac{1}{2} \right), k \right), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Once we are able to compute the g_ℓ , $\ell \geq 0$, explicitly, this allows to compute asymptotic expansions to all order for eigenvalues of A_k lower than E^0 . In fact, $g(\cdot, k)$ is constructed as the local inverse of a sequence $f(\cdot, k)$ which also admits an asymptotic expansion $f(\cdot, k) = \sum_{\ell \geq 0} k^{-\ell} f_\ell$ in the \mathcal{C}^∞ topology, and the first terms f_0, f_1 are related to geometric quantities (actions) associated to A_k .

4.1.2 Link with the usual Bohr-Sommerfeld conditions

Let I be a set of regular values of the principal symbol a_0 . For the sake of simplicity, assume that for every E in I , the level set $\Gamma_E := a_0^{-1}(E)$ is connected; then it is diffeomorphic to S^1 . Fix an orientation on Γ_E depending continuously on E . Define the *principal action* $c_0 \in \mathcal{C}^\infty(I)$ in such a way that the parallel transport in L along Γ_E is the multiplication by $\exp(ic_0(E))$. Of course, $c_0(E)$ is defined up to an integer multiple of 2π , but we can always choose a determination of c_0 that is smooth on I .

Let (δ, φ) be a *half-form bundle*, that is a line bundle $\delta \rightarrow M$ together with an isomorphism of line bundles $\varphi : \delta^2 \rightarrow \Lambda^{2,0}T^*M$. It is known that for any connected compact Kähler manifold of complex dimension 1, such a couple exists. Introduce the hermitian holomorphic line bundle L_1 such that $K = L_1 \otimes \delta$. For E in I , define the *subprincipal form* κ_E as the 1-form on Γ_E such that

$$\kappa_E(X_{a_0}) = -a_1$$

where X_{a_0} stands for the Hamiltonian vector field associated to a_0 . Denote by j_E the embedding $\Gamma_E \rightarrow M$, and introduce the connection ∇^E on $j_E^*L_1 \rightarrow \Gamma_E$ defined by

$$\nabla^E = \nabla^{j_E^*L_1} + \frac{1}{i}\kappa_E,$$

with $\nabla^{j_E^*L_1}$ the connection induced by the Chern connection of L_1 on $j_E^*L_1$. Define the *subprincipal action* $c_1 \in \mathcal{C}^\infty(I)$ like the principal action, replacing L by L_1 endowed with this connection.

Finally, define an index ϵ from the half-form bundle δ as follows: the map

$$\varphi_E : \delta_E^2 \rightarrow T^*\Gamma_E \otimes \mathbb{C}, \quad u \mapsto j_E^*\varphi(u)$$

is an isomorphism of line bundles. The set

$$\left\{ u \in \delta_E; \varphi_E(u^{\otimes 2}) > 0 \right\}$$

has one or two connected components. In the first case, we set $\epsilon_E = 1$, and in the second case $\epsilon_E = 0$. In fact, ϵ_E is a constant $\epsilon_E = \epsilon$ for E in I .

The (regular) Bohr-Sommerfeld conditions [21] state that there exists $\eta > 0$ such that the eigenvalues of A_k contained in $[E - \eta, E + \eta]$ are equal to the solutions of

$$S(\lambda, k) \in 2\pi k^{-1}\mathbb{Z} \tag{4.1}$$

modulo $O(k^{-\infty})$, where $S(\cdot, k)$ is a sequence of elements of $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ admitting an asymptotic expansion $S(\cdot, k) = \sum_{\ell \geq 0} k^{-\ell} S_\ell$, with $S_0 = c_0$ and $S_1 = c_1 + \epsilon\pi$, with c_0, c_1 and ϵ defined as above.

With f_0, f_1, c_0 and c_1 defined as above, the following result holds.

Proposition (Proposition 4.6.4). *Set $I =]0, E^0[$. Then*

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}c_0, \quad f_1 = \frac{1}{2\pi}c_1 \tag{4.2}$$

on I .

Furthermore, it is known that when Γ_E is the boundary of a disk embedded in M , one has $\epsilon = 1$. Since this is the case when E belongs to I , we recover the regular Bohr-Sommerfeld conditions away from the minimum.

4.1.3 Structure of the article

The paper is organized as follows: we start by recalling some properties of Toeplitz operators on a compact manifold. Then, we briefly explain how to adapt the theory in the case where the phase space is the whole complex plane. The fourth section is devoted to the construction of Fourier integral operators that we use to construct our microlocal normal form in the following part. In section 6, we state the Bohr-Sommerfeld conditions and some consequences. In the last section, we investigate an example to give some numerical evidence of our results.

4.2 Preliminaries and notations

First, we introduce the notations and conventions that we will adopt through this whole article. They are already written in [21] for instance, but we recall them here for the sake of completeness.

4.2.1 Quantum spaces

Let M be a connected compact Kähler manifold, with fundamental 2-form $\omega \in \Omega^2(M, \mathbb{R})$. Assume M is endowed with a prequantum bundle $L \rightarrow M$, that is a Hermitian holomorphic line bundle whose Chern connection ∇ has curvature $\frac{1}{i}\omega$. Let $K \rightarrow M$ be a Hermitian holomorphic line bundle. For every positive integer k , define the quantum space \mathcal{H}_k as:

$$\mathcal{H}_k = H^0(M, L^k \otimes K) = \left\{ \text{holomorphic sections of } L^k \otimes K \right\}.$$

The space \mathcal{H}_k is a subspace of the space $L^2(M, L^k \otimes K)$ of sections of finite L^2 -norm, where the scalar product is given by

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_M h_k(\varphi, \psi) \mu_M$$

with h_k the hermitian product on $L^k \otimes K$ induced by those of L and K , and μ_M the Liouville measure on M . Since M is compact, \mathcal{H}_k is finite dimensional, and is thus given a Hilbert space structure with this scalar product.

4.2.2 Geometric notations

Unless otherwise mentioned, “smooth” will always mean C^∞ , and a section of a line bundle will always be assumed to be smooth. The space of sections of a bundle $E \rightarrow M$ will be denoted by $\Gamma(M, E)$.

Let $L_P \rightarrow P$ and $L_N \rightarrow N$ be two prequantum bundles over Kähler manifolds, whose fundamental 2-forms are denoted by ω_P and ω_N . Denote by p_1 and p_2 the projections of $P \times N$ on each factor, and $L_P \boxtimes L_N = p_1^* L_P \otimes p_2^* L_N$; then, if $P \times N$ is endowed with the symplectic form $p_1^* \omega_P + p_2^* \omega_N$, $L_P \boxtimes L_N \rightarrow P \times N$ is a prequantum bundle.

Let P^{op} be the manifold P endowed with the symplectic form $-\omega_P$ and the (almost) complex structure opposed to the one of P , and let L_P^{-1} be the inverse (dual) bundle of L_P with induced hermitian and holomorphic structure and connection; then $L_P^{-1} \rightarrow P^{op}$ is a prequantum bundle. If k is a positive integer, we can identify the Schwartz kernel of an operator $T : \Gamma(P, L_P^k) \rightarrow \Gamma(N, L_N^k)$ to a section of $L_N^k \boxtimes L_P^{-k} \rightarrow N \times P^{op}$ via the following formula:

$$Ts(x) = \int_P T(x, y) \cdot s(y) \mu_P(y),$$

where μ_P is the Liouville measure on the manifold P .

4.2.3 Admissible and negligible sequences

Let M be a compact connected Kähler manifold. Let $(s_k)_{k \geq 1}$ be a sequence such that for each k , s_k belongs to $\Gamma(M, L^k \otimes K)$. We say that $(s_k)_{k \geq 1}$ is

- *admissible* if for every positive integer ℓ , for every vector fields X_1, \dots, X_ℓ on M , and for every compact set $C \subset M$, there exist a constant $c > 0$ and an integer N such that

$$\forall m \in C \quad \|\nabla_{X_1} \dots \nabla_{X_\ell} s_k(m)\| \leq ck^N,$$

- *negligible* if for every positive integers ℓ and N , for every vector fields X_1, \dots, X_ℓ on M , and for every compact set $C \subset M$, there exists a constant $c > 0$ such that

$$\forall m \in C \quad \|\nabla_{X_1} \dots \nabla_{X_\ell} s_k(m)\| \leq ck^{-N}.$$

We say that $(s_k)_{k \geq 1}$ is *negligible* over an open set $U \subset M$ if the previous estimates hold for every compact subset of U . We denote by $O(k^{-\infty})$ any negligible sequence or the set of negligible sequences. The *microsupport* $\text{MS}(s_k)$ of an admissible sequence $(s_k)_{k \geq 1}$ is the complement of the set of points of M which admit a neighbourhood where $(s_k)_{k \geq 1}$ is negligible. Finally, we say that two admissible sequences $(t_k)_{k \geq 1}$ and $(s_k)_{k \geq 1}$ are microlocally equal on an open set U if $\text{MS}(t_k - s_k) \cap U = \emptyset$; the symbol \sim will indicate microlocal equivalence. We can then define, *via* the sequences of their Schwartz kernels, *admissible* and *smoothing* operators, and the microsupport and microlocal equality of operators.

4.2.4 Toeplitz operators

Let Π_k be the orthogonal projector of $L^2(M, L^k \otimes K)$ onto \mathcal{H}_k . A *Toeplitz operator* is any sequence $(T_k : \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{H}_k)_{k \geq 1}$ of operators of the form

$$T_k = \Pi_k M_{f(\cdot, k)} + R_k \tag{4.3}$$

where $f(\cdot, k)$ is a sequence of $C^\infty(M)$ with an asymptotic expansion $f(\cdot, k) = \sum_{\ell \geq 0} k^{-\ell} f_\ell$ for the C^∞ topology, $M_{f(\cdot, k)}$ is the operator of multiplication by $f(\cdot, k)$ and R_k is a smoothing operator. They are the semiclassical analogue of the Toeplitz operators studied by Boutet de Monvel and Guillemin in [12].

We recall the following essential theorem about Toeplitz operators, which is a consequence of the works of Boutet de Monvel and Guillemin [12] (see also [9, 19, 47]).

Theorem 4.2.1. *The set \mathcal{T} of Toeplitz operators is a star algebra whose identity is $(\Pi_k)_{k \geq 1}$. The contravariant symbol map*

$$\sigma_{\text{cont}} : \mathcal{T} \rightarrow C^\infty(M)[[\hbar]]$$

sending T_k into the formal series $\sum_{\ell \geq 0} \hbar^\ell f_\ell$ is well defined, onto, and its kernel is the ideal consisting of $O(k^{-\infty})$ Toeplitz operators. More precisely, for any integer ℓ ,

$$\|T_k\| = O(k^{-\ell}) \text{ if and only if } \sigma_{\text{cont}}(T_k) = O(\hbar^\ell).$$

We will mainly work with the *normalized symbol*

$$\sigma_{\text{norm}} = \left(\text{Id} + \frac{\hbar}{2} \Delta \right) \sigma_{\text{cont}}$$

where Δ is the holomorphic Laplacian acting on $C^\infty(M)$; unless otherwise mentioned, when we talk about a subprincipal symbol, this refers to the normalized symbol. This symbol has the good property that, if T_k and S_k are Toeplitz operators with respective principal symbols t_0 and s_0 and subprincipal symbols t_1 and s_1 , then

$$\sigma_{\text{norm}}(T_k S_k) = t_0 s_0 + \hbar \left(t_0 s_1 + t_1 s_0 + \frac{1}{2i} \{t_0, s_0\} \right) + O(\hbar^2).$$

Finally, we will need to apply functional calculus to Toeplitz operators.

Proposition 4.2.2 ([19]). *Let T_k be a self-adjoint Toeplitz operator with symbol $\sum_{\ell \geq 0} \hbar^\ell t_\ell$ and g be a function of $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Then $g(T_k)$ is a Toeplitz operator with principal symbol $g(t_0)$.*

4.3 Toeplitz operators on the complex plane

4.3.1 Bargmann spaces

We consider the Kähler manifold $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ with coordinates (x, ξ) , standard complex structure and symplectic form $\omega_0 = d\xi \wedge dx$. Let $L_0 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ be the trivial fiber bundle with standard hermitian metric h_0 and connection ∇^0 with 1-form $\frac{1}{i}\alpha$, where $\alpha_u(v) = \frac{1}{2}\omega_0(u, v)$; endow L_0 with the unique holomorphic structure compatible with h_0 and ∇^0 . For every positive integer k , the quantum space that we consider is

$$\mathcal{H}_k^0 = H^0(\mathbb{R}^2, L_0^k) \cap L^2(\mathbb{R}^2, L_0^k);$$

this means that in this case, we make the arbitrary choice that the auxiliary line bundle K is the trivial bundle with flat connection. These spaces coincide with Bargmann spaces [2, 3], which are spaces of square integrable functions with respect to a Gaussian weight. More precisely, we choose the holomorphic coordinate $z = \frac{x-iy}{\sqrt{2}}$ and note

$$\mathcal{B}_k = \left\{ f\psi^k; f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C} \text{ holomorphic, } \int_{\mathbb{R}^2} |f(z)|^2 \exp(-k|z|^2) d\lambda(z) < +\infty \right\}$$

with $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right)$, ψ^k its k -th tensor power, and λ the Lebesgue measure on \mathbb{R}^2 . It is easily shown that for $k \geq 1$, \mathcal{H}_k^0 is precisely \mathcal{B}_k . Sometimes, we will use the identification of the section $f\psi$ to the function f in abusive notations, such as talking about the operator $\frac{\partial}{\partial z}$ action on \mathcal{B}_k , etc. It is standard that \mathcal{B}_k is closed in $L^2(\mathbb{R}^2, \exp(-k|z|^2)d\lambda(z))$, and is thus a Hilbert space; moreover, we know an orthonormal basis of \mathcal{B}_k .

Proposition 4.3.1. *The family $(\varphi_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$, where $\varphi_{n,k}(z) = \sqrt{\frac{k^{n+1}}{2\pi n!}} z^n \psi^k$, is an orthonormal basis of \mathcal{B}_k .*

We denote by Π_k^0 the orthogonal projector from $L^2(\mathbb{R}^2, L_0^k)$ onto \mathcal{B}_k .

4.3.2 Admissible and negligible sequences

Since we will only deal with \mathcal{C}^∞ sections, we can adopt the same definitions for admissible and negligible sequences as in the previous section.

4.3.3 Toeplitz operators

To consider Toeplitz operators acting on Bargmann spaces without raising technical issues, we could only work with operators with compactly supported kernels. However, we would miss the simple case of the harmonic oscillator. So we need to introduce symbol classes, very similar to the ones used when dealing with \hbar -pseudodifferential operators (see for instance [40]). The proofs of the results of this part are collected in the appendix.

Let d be a positive integer. For u in \mathbb{C}^d , set $m(u) = (1 + \|u\|^2)^{\frac{1}{2}}$. For every integer j , we define the symbol class \mathcal{S}_j^d as the set of sequences of functions of $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^d)$ which admit an asymptotic expansion of the form $a(\cdot, k) = \sum_{\ell \geq 0} k^{-\ell} a_\ell$ in the sense that

$$\begin{aligned} - \forall \ell \in \mathbb{N} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^{2d} \quad \exists C_{\ell, \alpha, \beta} > 0 \quad |\partial_z^\alpha \partial_{\bar{z}}^\beta a_\ell| &\leq C_{\ell, \alpha, \beta} m^j, \\ - \forall L \in \mathbb{N}^* \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^{2d} \quad \exists C_{L, \alpha} > 0 \quad \left| \partial_z^\alpha \partial_{\bar{z}}^\beta \left(a - \sum_{\ell=0}^{L-1} k^{-\ell} a_\ell \right) \right| &\leq C_{L, \alpha, \beta} k^{-L} m^j. \end{aligned}$$

Set $\mathcal{S}^d = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{S}_j^d$. Now, let $a(\cdot, k)$ be a symbol in \mathcal{S}_j^1 , and consider the operator

$$A_k = \text{Op}(a(\cdot, k)) = \Pi_k^0 M_{a(\cdot, k)} \Pi_k^0 \tag{4.4}$$

acting on the subspace

$$\mathfrak{S}_k = \left\{ \varphi \in \mathcal{B}_k; \forall j \in \mathbb{N} \quad \sup_{z \in \mathbb{C}} \left(|\varphi(z)| (1 + |z|^2)^{j/2} \right) < +\infty \right\}$$

of \mathcal{B}_k . As shown in [3], \mathfrak{S}_k corresponds to the Schwartz space *via* a particular unitary mapping between $L^2(\mathbb{R})$ and \mathcal{B}_k , the Bargmann transform. It is easily seen that A_k sends \mathfrak{S}_k into \mathfrak{S}_k ; it is even continuous $\mathfrak{S}_k \rightarrow \mathfrak{S}_k$. Note that if $j = 0$, then A_k is bounded $\mathcal{B}_k \rightarrow \mathcal{B}_k$, and its norm is lower than $\sup |a(\cdot, k)|$.

Let t be the section of $L_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ with constant value 1. Let F_0 be the section of $L_0 \boxtimes L_0^{-1}$ given by

$$F_0(z_1, z_2) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2z_1\bar{z}_2\right)\right) t(z_1) \otimes t^{-1}(z_2),$$

or equivalently, if $u = (x, \xi)$ where $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - i\xi)$,

$$F_0(u, v) = \exp\left(-\frac{1}{4}\|u - v\|^2 - \frac{i}{2}\omega_0(u, v)\right) t(u) \otimes t^{-1}(v).$$

Adapting the result of section 1.c of [2], with the good normalization for the weight defining our Bargmann spaces, we have the following:

Proposition 4.3.2. Π_k^0 admits a Schwartz kernel given by $\frac{k}{2\pi}F_0^k$.

In the rest of the paper, we will use the same letter to designate an operator and its Schwartz kernel. This proposition allows us to compute the Schwartz kernel of any Toeplitz operator.

Lemma 4.3.3. Let $a(\cdot, k)$ be a symbol in \mathcal{S}_j^1 ; then $A_k = Op(a(\cdot, k))$ admits a Schwartz kernel given by

$$\begin{aligned} A_k(z_1, z_2) &= \frac{k}{2\pi} \exp\left(-\frac{k}{2}\left(|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2z_1\bar{z}_2\right)\right) \tilde{a}(z_1, z_2, k) \\ &\quad + R_k \exp\left(-Ck|z_1 - z_2|^2\right), \end{aligned} \quad (4.5)$$

where $\tilde{a}(\cdot, \cdot, k)$ belongs to \mathcal{S}_j^2 , R_k is negligible and C is some positive constant. Moreover, one has

$$\tilde{a}(z, z, k) = \left(\exp\left(k^{-1}\Delta\right)a\right)(z, k) \quad (4.6)$$

where $\Delta = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ is the holomorphic Laplacian acting on $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^2)$, in the sense that the asymptotic expansion of $\tilde{a}(\cdot, \cdot, k)$ is obtained by applying the formal asymptotic expansion of the operator $\exp(k^{-1}\Delta)$ to the asymptotic expansion of $a(\cdot, k)$.

This leads us to the following definition.

Definition 4.3.4. A Toeplitz operator is an operator from \mathfrak{S}_k to \mathfrak{S}_k of the form

$$\Pi_k^0 M_{a(\cdot, k)} \Pi_k^0 + S_k, \quad (4.7)$$

where $a(\cdot, k)$ is a symbol in \mathcal{S}^1 and the kernel of S_k satisfies

$$S_k(z_1, z_2) = R_k(z_1, z_2) \exp\left(-Ck|z_1 - z_2|^2\right) \quad (4.8)$$

with R_k negligible and C some positive constant. As in the compact case, $\sigma_{\text{cont}}(A_k) = \sum_{\ell \geq 0} \hbar^\ell a_\ell$ is called the *contravariant symbol* of A_k . We denote by \mathcal{T}_j the set of Toeplitz operators with contravariant symbol belonging to \mathcal{S}_j^1 .

In fact, lemma 4.3.3 defines the *covariant symbol* of A_k :

$$\sigma_{\text{cov}}(A_k)(z) = \sum_{\ell \geq 0} \hbar^\ell \tilde{a}_\ell(z, z).$$

The following lemma gives an important property of the latter.

Lemma 4.3.5. *If the covariant symbol of A_k vanishes, then the Schwartz kernel of A_k is of the form (4.8).*

As a corollary of lemmas 4.3.3 and 4.3.5, we obtain the stability under composition of the set of Toeplitz operators.

Corollary 4.3.6. *Let $A_k \in \mathcal{T}_j$ and $B_k \in \mathcal{T}_{j'}$ be two Toeplitz operators. Then $C_k = A_k B_k$ belongs to $\mathcal{T}_{j+j'}$; more precisely, its contravariant symbol is given by*

$$\sigma_{\text{cont}}(C_k)(z) = \left(\exp \left(-\hbar \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} \right) \sigma_{\text{cont}}(A_k)(z_1) \sigma_{\text{cont}}(B_k)(z_2) \right)_{|z_1=z_2=z}, \quad (4.9)$$

in the same sense as in lemma 4.3.3.

Define the *normalized symbol* as in the compact case:

$$\sigma_{\text{norm}} = \left(\text{Id} + \frac{\hbar}{2} \Delta \right) \sigma_{\text{cont}}.$$

From formula (4.9), we find that

$$\sigma_{\text{norm}}(A_k B_k) = a_0 b_0 + \hbar \left(a_0 b_1 + a_1 b_0 + \frac{1}{2i} \{a_0, b_0\} \right) + O(\hbar^2)$$

if $\sigma_{\text{norm}}(A_k) = a_0 + \hbar a_1 + O(\hbar^2)$ and $\sigma_{\text{norm}}(B_k) = b_0 + \hbar b_1 + O(\hbar^2)$, as expected.

Definition 4.3.7. A Toeplitz operator $A_k \in \mathcal{T}_j$ with principal symbol a_0 is said to be *elliptic at infinity* if there exists some $c > 0$ such that for z in \mathbb{C} , $|a_0(z)| \geq c(1 + |z|^2)^{\frac{j}{2}}$.

Adapting proposition 12 of [19] and theorem 39 of [29], one can show the following:

Proposition 4.3.8 (Functional calculus). *If A_k belongs to \mathcal{T}_j for some $j \geq 1$, is essentially self-adjoint and elliptic at infinity and if $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is a compactly supported \mathcal{C}^∞ function, then $\eta(A_k)$ belongs to $\mathcal{T}_{j'}$ for every $j' < 0$.*

4.4 Fourier integral operators

The aim of this section is to construct microlocally unitary operators between \mathcal{H}_k and \mathcal{B}_k , given a local symplectomorphism χ from M to \mathbb{R}^2 . In [12], Boutet de Monvel and Guillemin introduced Fourier integral operators in the homogeneous Toeplitz setting. In the semiclassical Toeplitz theory, such operators between compact manifolds have been introduced by Zelditch [102] and later used by Charles [20, 23], but some difficulties arise

when dealing with a non compact manifold. Although some of the following material, such as propositions 4.4.5 (see [102, Unitarization Lemma 1]) and 4.4.6 (which appears in [102] as a direct consequence of the results in [12]), was already present in the work of Zelditch in the compact case, the following constructions are rather adapted from those of Charles. Let us mention that Toeplitz Fourier integral operators have also been studied by authors such as Debernardi and Paoletti [38, 81] and have been applied for instance to the analysis of the homogeneous complex Monge-Ampère equation in the article [87], where the latter arises from a Kähler geometry problem.

Let $\chi : \Omega_1 \subset M \rightarrow \Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$ be a symplectomorphism between the open sets Ω_1 and Ω_2 . Then the graph

$$\Lambda_\chi = \{(u, \chi(u)); u \in \Omega_1\} \subset \Omega_1 \times \Omega_2$$

of χ is a Lagrangian submanifold of the product $M \times \mathbb{C}^{op}$. As in the previous section, let t be the section of $L_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ with constant value 1. By definition of the connection on L_0 , we have $\nabla^0 t = \frac{1}{i}\alpha \otimes t$, where α is the primitive of ω_0 given by $\alpha_u(v) = \frac{1}{2}\omega_0(u, v)$. The following lemma is elementary.

Lemma 4.4.1. *Taking Ω_1 smaller if necessary, we can find a local gauge s of $L \rightarrow \Omega_1$ such that $\nabla s = \frac{1}{i}\chi^*\alpha \otimes s$.*

We consider the section t_{Λ_χ} of $L \boxtimes L_0^{-1}$ over Λ_χ given by

$$t_{\Lambda_\chi}(u, \chi(u)) = s(u) \otimes t^{-1}(\chi(u)).$$

Thanks to proposition 2.1 of [20], we can build a local section E of $L \boxtimes L_0^{-1} \rightarrow \Omega_1 \times \Omega_2^{op}$ such that

- E is equal to t_{Λ_χ} on Λ_χ ,
- for every holomorphic vector field Z on $\Omega_1 \times \Omega_2^{op}$, the covariant derivative of E with respect to \bar{Z} is zero modulo a section vanishing to infinite order along Λ_χ ,

and this section is unique modulo a section vanishing to infinite order along Λ_χ . Furthermore, we can always assume that $\|E\| < 1$ outside Λ_χ , and we will make this assumption until the end of this article.

We consider a sequence of functions of $\mathcal{C}^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2^{op})$, which admits an asymptotic expansion $\sum_{\ell \geq 0} k^{-\ell} a_\ell$ for the \mathcal{C}^∞ topology whose coefficients are all supported in a fixed (independent of k) compact set $C \subset \Omega_1 \times \Omega_2$. Let S_k be the local section of $(L^k \otimes K) \boxtimes L_0^{-k}$ given by

$$S_k(u, v) = \frac{k}{2\pi} E^k(u, v) a(u, v, k),$$

and consider the operator S_k defined on $\Gamma(\mathbb{C}, L_0^k)$ by

$$(S_k \phi)(u) = \int_{\mathbb{R}^2} S_k(u, v) \cdot \phi(v) d\lambda(v),$$

which makes sense since $S_k(\cdot, \cdot)$ vanishes outside $\Omega_1 \times \Omega_2$.

Proposition 4.4.2. *The operator $R_k = S_k \Pi_k^0$ maps \mathcal{B}_k into $\Gamma(M, L^k \otimes K)$.*

Proof. We must show that if φ_k is a smooth square integrable section of $L_0^k \rightarrow \mathbb{C}$, then $S_k \Pi_k^0 \varphi_k$ is a smooth section of $L^k \otimes K \rightarrow M$. It is enough to show that the Schwartz kernel of $S_k \Pi_k^0$ and its derivatives with respect to the first variable are rapidly decreasing in the second variable. Let R_k be this kernel; one has

$$R_k(u, v) = \int_{p_2(C)} S_k(u, w) \cdot \Pi_k^0(w, v) dw,$$

with p_2 the projection from $M \times \mathbb{C}$ to \mathbb{C} . So

$$R_k(u, v) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \int_{p_2(C)} f(u, v, w, k) E^k(u, w) \cdot t^k(w) \otimes t^{-k}(v) dw$$

with $f(u, v, w, k) = a(u, w, k) \exp\left(-\frac{k}{4}\|w - v\|^2 - \frac{ik}{2}\omega_0(w, v)\right)$. This implies the estimate

$$\|R_k(u, v)\| \leq \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \int_{p_2(C)} |a(u, w, k)| \exp\left(-\frac{k}{4}\|w - v\|^2\right) \|E^k(u, w)\| dw.$$

Since $\|E\| \leq 1$ and $a(., ., k)$ is bounded by some constant $c_k > 0$, this yields

$$\|R_k(u, v)\| \leq \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 c_k \int_{p_2(C)} \exp\left(-\frac{k}{4}\|w - v\|^2\right) dw.$$

Using $\|w - v\|^2 \geq \|v\|^2 - 2\|w\|\|v\|$, we obtain

$$\|R_k(u, v)\| \leq \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 c_k \exp\left(-\frac{k}{4}\|v\|^2\right) \int_{p_2(C)} \exp\left(\frac{k}{2}\|w\|\|v\|\right) dw.$$

Finally, an upper bound for the integral that appears in this inequality is $\pi r^2 \exp\left(\frac{k}{2}r\|v\|\right)$ where $p_2(C)$ is included in the closed ball of radius r and centered at the origin. This allows us to conclude that

$$\|R_k(u, v)\| \leq \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 c_k \pi r^2 \exp\left(-\frac{k}{4}\|v\|^2 + \frac{kr}{2}\|v\|\right).$$

The same kind of estimates hold for the successive derivatives of R_k with respect to u ; we prove them by differentiating under the integral sign. \square

Unfortunately, R_k has no reason to map holomorphic sections to holomorphic sections; to fix this problem, we set $T_k = \Pi_k R_k$; defined in this way, T_k is an operator from \mathcal{B}_k to \mathcal{H}_k .

Proposition 4.4.3. *The Schwartz kernel of T_k reads*

$$T_k(u, v) = \frac{k}{2\pi} E^k(u, v) b(u, v, k) + O(k^{-\infty}) \quad (4.10)$$

with $b(., ., k)$ a sequence of smooth functions which admits an asymptotic expansion $b(., ., k) = \sum_{\ell \geq 0} k^{-\ell} b_\ell$ for the C^∞ topology satisfying

$$b_0(u, \chi(u), k) = \mu(u) a_0(u, \chi(u), k)$$

where μ is a smooth, nowhere vanishing function which depends only on the section E .

The proof is the same as the proof of proposition 4.2 of [20]; it is based on an application of the stationary phase lemma.

An operator $V_k : \mathcal{B}_k \rightarrow \mathcal{H}_k$ admitting a Schwartz kernel of the form of equation (4.10) and satisfying $\Pi_k V_k \Pi_k^0 = V_k$ will be called a *Fourier integral operator* associated to the sequence $b(\cdot, \cdot, k)$; let us denote by $\mathcal{FI}(\chi)$ the set of such operators. We define the *full symbol* map

$$\sigma : \mathcal{FI}(\chi) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)[[\hbar]], \quad V_k \mapsto \sum_{\ell \geq 0} \hbar^\ell b_\ell(u, \chi(u)).$$

One can show that its kernel consists of smoothing operators. In the same way, we define $\mathcal{FI}(\chi^{-1}) : \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{B}_k$. The following property is another application of the stationary phase lemma.

Proposition 4.4.4. *Let $R_k \in \mathcal{FI}(\chi)$ and $S_k \in \mathcal{FI}(\chi^{-1})$ with respective principal symbols $r_0(u, \chi(u))$ and $s_0(v, \chi^{-1}(v))$. Then there exists a smooth nowhere vanishing function $\nu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ such that for every Toeplitz operator T_k on M with principal symbol t_0 , $S_k T_k R_k$ is a Toeplitz operator on \mathbb{R}^2 with principal symbol equal to*

$$\nu(v) s_0(v, \chi^{-1}(v)) t_0(\chi^{-1}(v)) r_0(\chi^{-1}(v), v)$$

on Ω_2 .

To conclude this section, we prove that we can find *microlocally unitary* operators mapping \mathcal{B}_k to \mathcal{H}_k in the following sense.

Proposition 4.4.5. *There exists a Fourier integral operator $U_k : \mathcal{B}_k \rightarrow \mathcal{H}_k$ such that*

- $U_k^* U_k \sim \Pi_k^0$ on Ω_2 ,
- $U_k U_k^* \sim \Pi_k$ on Ω_1 ,

reducing Ω_1 and Ω_2 if necessary, where we recall that the symbol \sim stands for microlocal equality.

Proof. Start from a Fourier integral operator S_k associated to $s(\cdot, \cdot, k)$ with principal symbol $s_0(v, \chi^{-1}(v))$ never vanishing on $\Omega_1 \times \Omega_2$. The first step is to construct an operator with the first property; we do it by induction, correcting S_k by Toeplitz operators. More precisely, let P_k be a Toeplitz operator on \mathbb{R}^2 , and denote by p_0 its principal symbol. Set $U_k^{(0)} = S_k P_k$; then $U_k^{(0)*} U_k^{(0)}$ is a Toeplitz operator on \mathbb{R}^2 , with principal symbol $\nu(v) |p_0(v)|^2 |s_0(\chi^{-1}(v), v)|^2$. Since $\nu(v)$ and $s_0(s, \chi^{-1}(v))$ vanish in no point v , one can choose p_0 such that this principal symbol is equal to 1. Doing so, $U_k^{(0)*} U_k^{(0)}$ has the same principal symbol as Π_k^0 , so there exists a Toeplitz operator $R_k^{(0)}$ such that

$$U_k^{(0)*} U_k^{(0)} \sim \Pi_k^0 + k^{-1} R_k^{(0)}$$

on Ω_2 . From now on, when there is no ambiguity, the equality between operators will mean microlocal equality on Ω_2 . Let $n \in \mathbb{N}$ and assume that there exists an operator $U_k^{(n)} : \mathcal{B}_k \rightarrow \mathcal{H}_k$ and a Toeplitz operator $R_k^{(n)}$ (with principal symbol r_n) such that

$$U_k^{(n)*} U_k^{(n)} = \Pi_k^0 + k^{-(n+1)} R_k^{(n)}.$$

Let T_k be a Toeplitz operator on \mathbb{R}^2 with principal symbol t_0 , and set $U_k^{(n+1)} = U_k^{(n)} \left(\Pi_k^0 + k^{-(n+1)} T_k \right)$. One has

$$U_k^{(n+1)*} U_k^{(n+1)} = \Pi_k^0 + k^{-(n+1)} \left(T_k^* + R_k^{(n)} + T_k \right) + k^{-(n+2)} R_k^{(n+1)}$$

with $R_k^{(n+1)}$ a Toeplitz operator. This implies that if we choose t_0 such that $2\Re(t_0) = -r_n$, then

$$U_k^{(n+1)*} U_k^{(n+1)} = \Pi_k^0 + k^{-(n+2)} R_k^{(n+1)}.$$

So we can construct the operators $U_k^{(n)}$ by induction; it remains to apply Borel's summation lemma to find the desired operator U_k .

Composing such a U_k by U_k on the left and U_k^* on the right gives:

$$(U_k U_k^*)^2 \sim U_k U_k^* \quad \text{on } \Omega_1.$$

Since $U_k U_k^*$ is an elliptic Toeplitz operator on Ω_1 (its principal symbol vanishes nowhere), it has a microlocal inverse at each point of Ω_1 ; so the preceding equation yields $U_k U_k^* \sim \Pi_k$ on Ω_1 . \square

Of course, such operators satisfy the analogue of Egorov's theorem:

Proposition 4.4.6. *If U_k is as above, then, for every Toeplitz operator T_k on M with principal symbol t_0 , $S_k = U_k^* T_k U_k$ is a Toeplitz operator on \mathbb{R}^2 with principal symbol equal to $t_0 \circ \chi^{-1}$ on Ω_2 .*

For a proof, see [29, theorem 47]. The action of a Fourier integral operator at the subprincipal level is much more complicated to compute. Denote by $\sigma_0(U_k)$ the principal symbol of U_k , and by γ the 1-form on Λ_χ such that

$$\nabla^{\text{Hom}(\mathbb{C}, K)} \sigma_0(U_k) = -\frac{1}{i} \gamma \otimes \sigma_0(U_k)$$

endowing \mathbb{C} with the trivial connection and K with the one inherited from L_1 and δ . Now, notice that the symplectomorphism χ brings the complex structure of \mathbb{C}^{op} to a positive complex structure j on M . Introduce the section Ψ of $\text{Hom}(\Omega^{1,0}(\mathbb{C}), \Omega_j^{1,0}(M))|_{\Lambda_\chi} \rightarrow \Lambda_\chi$ such that for all $\alpha \in \Lambda^{1,0}(T\Omega_2^{op})^*$ and $\beta \in \Lambda^{1,0}(T\Omega_1)^*$,

$$\Psi(\alpha) \wedge \bar{\beta} = (\chi^* \alpha) \wedge \bar{\beta}.$$

This map is well-defined because the sesquilinear pairing $\Lambda_j^{1,0}(T_m \Omega_1)^* \times \Lambda^{1,0}(T_m \Omega_1)^* \rightarrow \mathbb{C}$, $(\alpha, \beta) \mapsto (\alpha \wedge \bar{\beta})/\omega_m$ is non-degenerate. Let δ be the 1-form on Λ_χ such that

$$\nabla \Psi = \delta \otimes \Psi$$

where ∇ is the connection induced by the Chern connections of $\Omega^{2,0}(\mathbb{C})$ and $\Omega^{2,0}(M)$. In [23, Theorem 3.3], Charles derived the following formula.

Theorem 4.4.7. *With the same notations as in the previous proposition and denoting by t_1 the subprincipal symbol of T_k , the subprincipal symbol s_1 of S_k is given by:*

$$s_1(u) = t_1(m) + \left\langle \gamma_{(m,u)} - \frac{1}{2}\delta_{(m,u)}, \left(X_{t_0}(m), ((\chi^{-1})^* X_{t_0})(u) \right) \right\rangle$$

for $u \in \mathbb{R}^2$ and $m = \chi^{-1}(u)$.

4.5 Microlocal normal form

4.5.1 The local model

Our local model will be the realization of the quantum harmonic oscillator in the Bargmann representation: $Q_k = \frac{1}{k} \left(z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2} \right)$, with domain $\mathbb{C}[z]$ which is dense in \mathcal{B}_k . The following lemma is easily shown.

Lemma 4.5.1. *Q_k is an essentially self-adjoint Toeplitz operator with normalized symbol q_0 defined below. Moreover, the spectrum of Q_k is*

$$\text{Sp}(Q_k) = \left\{ k^{-1} \left(n + \frac{1}{2} \right), n \in \mathbb{N} \right\}.$$

4.5.2 A symplectic Morse lemma

Let (N, ω) be a two-dimensional symplectic manifold and f a function of $\mathcal{C}^\infty(N, \mathbb{R})$. Assume f admits an elliptic critical point at $n_0 \in N$, with $f(n_0) = 0$. Replacing f by $-f$ if necessary, we can assume that this critical point is a local minimum for f . Define

$$q_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, \xi) \mapsto \frac{1}{2}(x^2 + \xi^2).$$

The following theorem is well-known.

Theorem 4.5.2. *There exist a local symplectomorphism $\chi : (N, n_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ and a function g in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfying $g(0) = 0$ and $g'(0) > 0$, such that*

$$f \circ \chi^{-1} = g \circ q_0$$

where χ^{-1} is defined.

It can be viewed as a consequence of the isochore Morse lemma [36] or of Eliasson's symplectic normal form theorem [44], but this case is in fact easier than these two results.

4.5.3 Semiclassical normal form

We consider a self-adjoint Toeplitz operator A_k on M ; its normalized symbol

$$a(\cdot, \hbar) = a_0 + \hbar a_1 + \dots$$

is real-valued. Assume that the principal symbol a_0 admits a non-degenerate local minimum at $m_0 \in M$. Assume also that $a_0(m_0) = 0$, so that a_0 takes positive values on a neighbourhood of m_0 . Hence, thanks to theorem 4.5.2, we get a neighbourhood Ω_1 of m_0 in M , a neighbourhood Ω_2 of 0 in \mathbb{R}^2 , a local symplectomorphism $\chi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ and a function g_0 of $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ with $g_0(0) = 0$ and $g'_0(0) > 0$, such that:

$$a_0 \circ \chi^{-1} = g_0 \circ q_0$$

on Ω_2 . We denote by f_0 the local inverse of g_0 . Our goal is to show:

Theorem 4.5.3. *There exist a Fourier integral operator $U_k : \mathcal{B}_k \rightarrow \mathcal{H}_k$ and a sequence $f(\cdot, k)$ of functions of $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ which admits an asymptotic expansion in the \mathcal{C}^∞ topology of the form $f(\cdot, k) = \sum_{\ell \geq 0} k^{-\ell} f_\ell$, such that:*

- $U_k^* U_k \sim \Pi_k^0$ on Ω_2 ,
- $U_k U_k^* \sim \Pi_k$ on Ω_1 ,
- $U_k^* f(A_k, k) U_k \sim Q_k$ on Ω_2 .

Proof. We consider an operator $U_k^{(0)}$ satisfying the two first points (see the previous section). We will construct the operator that we seek by successive perturbations by unitary Toeplitz operators on \mathcal{B}_k . More precisely, we show by induction that for every positive integer n , there exist an operator $U_k^{(n)} : \mathcal{B}_k \rightarrow \mathcal{H}_k$ satisfying the two first points, a sequence $f^{(n)}(\cdot, k)$ of functions of $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ of the form $f^{(n)}(\cdot, k) = \sum_{\ell=0}^n k^{-\ell} f_\ell$, with f_ℓ smooth, and a Toeplitz operator $R_k^{(n)}$ acting on \mathcal{B}_k such that

$$U_k^{(n)*} f^{(n)}(A_k, k) U_k^{(n)} = Q_k + k^{-(n+1)} R_k^{(n)} \quad \text{on } \Omega_2.$$

The first step is as follows: by the results of the previous section, the operator $U_k^{(0)*} f_0(A_k) U_k^{(0)}$ is a Toeplitz operator on \mathcal{B}_k , whose principal symbol is equal to $f_0 \circ a_0 \circ \chi^{-1} = q_0$ on Ω_2 . Hence, there exists a Toeplitz operator $R_k^{(0)}$ on \mathcal{B}_k such that

$$U_k^{(0)*} f_0(A_k) U_k^{(0)} = Q_k + k^{-1} R_k^{(0)}.$$

We look for $U_k^{(1)}$ of the form $U_k^{(0)} P_k$ with P_k a unitary Toeplitz operator on \mathcal{B}_k . Moreover, we choose $f^{(1)}(\cdot, k) = f_0 + k^{-1} \theta_1 \circ f_0$ with θ_1 a smooth function that remains to determine. Expanding, we get

$$U_k^{(1)*} f^{(1)}(A_k, k) U_k^{(1)} = P_k^* U_k^{(0)*} f_0(A_k) U_k^{(0)} P_k + k^{-1} P_k^* U_k^{(0)*} (\theta_1 \circ f_0)(A_k) U_k^{(0)} P_k$$

which yields

$$U_k^{(1)*} f^{(1)}(A_k, k) U_k^{(1)} = P_k^* \left(Q_k + k^{-1} R_k^{(0)} \right) P_k + k^{-1} P_k^* U_k^{(0)*} (\theta_1 \circ f_0)(A_k) U_k^{(0)} P_k.$$

Consequently, we wish to have

$$P_k^* \left(Q_k + k^{-1} R_k^{(0)} \right) P_k + k^{-1} P_k^* U_k^{(0)*} (\theta_1 \circ f_0)(A_k) U_k^{(0)} P_k = Q_k + k^{-2} R_k^{(1)}$$

where $R_k^{(1)}$ is a Toeplitz operator; this amounts, remembering that P_k is unitary, to

$$Q_k P_k + k^{-1} \left(R_k^{(0)} P_k + U_k^{(0)*} (\theta_1 \circ f_0) (A_k) U_k^{(0)} P_k \right) = P_k Q_k + k^{-2} P_k R_k^{(1)}$$

which we can rewrite

$$[Q_k, P_k] + k^{-1} \left(R_k^{(0)} P_k + U_k^{(0)*} (\theta_1 \circ f_0) (A_k) U_k^{(0)} P_k \right) = k^{-2} P_k R_k^{(1)}.$$

This will be true if and only if the subprincipal symbol of the operator on the left of the equality vanishes, that is to say

$$\frac{1}{i} \{q_0, p_0\} + p_0(r_0 + \theta_1 \circ q_0) = 0$$

where p_0 and r_0 stand for the respective principal symbols of P_k and $R_k^{(0)}$. Set $p_0 = \exp(i\varphi_0)$ with φ_0 a smooth, real-valued function (since P_k is unitary). The previous equation then becomes

$$\{\varphi_0, q_0\} = r_0 + \theta_1 \circ q_0.$$

This equation is standard and it is well-known that it can be solved. We recall a method from [44] to find θ_1 and φ_0 smooth such that it is satisfied, since we will need to know how to construct these in part 4.6.2. Consider the functions:

$$F(x, \xi) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r_0(\phi_{q_0}^t(x, \xi)) dt$$

and

$$\varphi_0(x, \xi) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t r_0(\phi_{q_0}^t(x, \xi)) dt,$$

where $\phi_{q_0}^t$ stands for the Hamiltonian flow of q_0 taken at time t :

$$\phi_{q_0}^t(x, \xi) = (x \cos t + \xi \sin t, -x \sin t + \xi \cos t).$$

Since we integrate on a compact set and the flow ϕ^t is smooth with respect to (x, ξ) , both F and φ_0 are smooth. By construction, we have $\{F, q_0\} = 0$. But we have the easy lemma

Lemma 4.5.4. *Let f be a function of $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ such that $\{f, q_0\} = 0$. Then the function g such that*

$$f = g \circ q_0$$

belongs to $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

So there exists a function θ_1 of $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ such that $F = \theta_1 \circ q_0$. Integrating by parts, it is easy to show that

$$\{\varphi_0, q_0\} = \theta_1 \circ q_0 + r_0$$

The next steps are practically the same; indeed, let $n \geq 1$ and assume that we have found $U_k^{(n)}$ and $f^{(n)}(\cdot, k)$ satisfying the desired properties. We now look for $U_k^{(n+1)}$ of the

form $U_k^{(n)}(\Pi_k^0 + k^{-n}V_k)$ with V_k a Toeplitz operator on \mathcal{B}_k such that $\Pi_k^0 + k^{-n}V_k$ is unitary. Furthermore, we write $f^{(n+1)}(\cdot, k) = f^{(n)}(\cdot, k) + k^{-(n+1)}\theta_{n+1} \circ f_0$ with θ_{n+1} an unknown smooth function. We want the existence of a Toeplitz operator $R_k^{(n+1)}$ such that

$$U_k^{(n)*} f^{(n+1)}(A_k, k) U_k^{(n)} \left(\Pi_k^0 + k^{-n}V_k \right) = \left(\Pi_k^0 + k^{-n}V_k \right) \left(Q_k + k^{-(n+2)}R_k^{(n+1)} \right)$$

which gives, expanding,

$$\begin{aligned} Q_k + k^{-n}Q_k V_k + k^{-(n+1)} \left(R_k^{(n)} + U_k^{(n)*}(\theta_{n+1} \circ f_0)(A_k) U_k^{(n)} \right) &= Q_k \\ + k^{-n}V_k Q_k + k^{-(n+2)}R_k^{(n+1)} + k^{-(2n+1)}V_k R_k^{(n+1)}. \end{aligned}$$

Thus, we wish that

$$[Q_k, V_k] + k^{-1} \left(R_k^{(n)} + U_k^{(n)*}(\theta_{n+1} \circ f_0)(A_k) U_k^{(n)} \right) = 0;$$

this will be verified if and only if

$$\frac{1}{i} \{q_0, v_0\} + r_n + \theta_{n+1} \circ q_0 = 0$$

which is treated as before.

We conclude thanks to Borel's summation lemma (applied to both $f(\cdot, k)$ and U_k). \square

4.6 Bohr-Sommerfeld conditions

Let A_k be a self-adjoint Toeplitz operator on M as in the previous section. Moreover, assume that $a_0(m_0)$ is a global minimum of the principal symbol a_0 , and that m_0 is the unique point of M with this property. This implies that there exists $E^0 > 0$ such that for every $E \leq E^0$, the level set $a_0^{-1}(E)$ is connected and contained in Ω_1 .

The maximum norm $\|A_k\|_\infty$ of A_k tends to the L^∞ -norm $\|a_0\|_\infty$ of a_0 as k goes to infinity [9]; hence, for k large enough, the spectrum of A_k is included in the set $[-E^1, E^1]$, where $E^1 = \|a_0\|_\infty + 1$.

4.6.1 Statement of the result

Before stating the Bohr-Sommerfeld conditions, it is convenient to show that the sequence $f(\cdot, k)$ can be inverted, and that its inverse still has a good asymptotic expansion.

Lemma 4.6.1. *For k large enough, the function $f(\cdot, k)$ that appears in theorem 4.6.2 is a bijection from $[-E^1, E^0]$ to its image; more precisely, it is strictly increasing. Moreover, the inverse sequence $g(\cdot, k)$ admits an asymptotic expansion in the C^∞ topology of the form $g(\cdot, k) = \sum_{\ell \geq 0} k^{-\ell} g_\ell + O(k^{-\infty})$, uniformly on $[-E^1, E^0]$.*

Proof. The first assertion follows from the mean value inequality

$$\forall k \geq 1 \quad \forall E, \tilde{E} \in [-E^1, E^0] \quad |f(E, k) - f(\tilde{E}, k)| \geq \inf_{[-E^1, E^0]} |f'(\cdot, k)| |E - \tilde{E}|$$

and the fact that $f'(\cdot, k)$ is bounded below by some positive constant. This implies that for k sufficiently large, $f(\cdot, k)$ is strictly monotone on $[-E^1, E^0]$; since $f'_0(0) > 0$, $f(\cdot, k)$ is in fact strictly increasing. For the second part, the proof is once again based on Borel's summation lemma; it is done by induction thanks to Taylor's formula with integral remainder. \square

We can therefore introduce the sequences

$$E_k^{(j)} = g \left(k^{-1} \left(j + \frac{1}{2} \right), k \right), \quad j \in \mathbb{N} \quad (4.11)$$

for k large enough and for j such that $k^{-1} \left(j + \frac{1}{2} \right)$ belongs to the set $[f(-E^1, k), f(E^0, k)]$. Since $g(\cdot, k)$ is also strictly increasing, the $E_k^{(j)}$ are ordered:

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad E_k^{(j)} < E_k^{(j+1)}.$$

We can be more precise; fix $j \in \mathbb{N}$ and write

$$E_k^{(j)} = g_0 \left(k^{-1} \left(j + \frac{1}{2} \right) \right) + k^{-1} g_1 \left(k^{-1} \left(j + \frac{1}{2} \right) \right) + O(k^{-2}).$$

Then, applying Taylor's formula with integral remainder, we get

$$E_k^{(j)} = \underbrace{g_0(0)}_{=0} + k^{-1} \left(g_1(0) + \left(j + \frac{1}{2} \right) g'_0(0) \right) + O(k^{-2}). \quad (4.12)$$

One must be careful with this estimate: the $O(k^{-2})$ remainder is no longer uniform with respect to j . Denote by $\lambda_k^{(1)} \leq \lambda_k^{(2)} \leq \dots \leq \lambda_k^{(j)} \leq \dots$ the eigenvalues of A_k . The main result of this section is the following theorem.

Theorem 4.6.2. *There exists a positive integer $k_0 \geq 1$ such that for every integer $N \geq 1$ and for every $E \leq E^0$, there exist a constant $C_N > 0$ such that for $k \geq k_0$:*

$$\left(\lambda_k^{(j)} \leq E \text{ or } E_k^{(j)} \leq E \right) \Rightarrow \left| \lambda_k^{(j)} - E_k^{(j)} \right| \leq C_N k^{-N}. \quad (4.13)$$

Moreover, for k large enough, all the eigenvalues of A_k smaller than E^0 are simple. In particular, we obtain an asymptotic expansion to every order for the eigenvalues of A_k smaller than E^0 .

We will need the following lemma, based on the min-max principle.

Lemma 4.6.3 ([28, lemma 3.3]). *Let A and B be two self-adjoint operators acting, respectively, on the Hilbert spaces \mathcal{H}' and \mathcal{H} , both bounded from below. Denote by Π_I^A the spectral projection of A on I and by $\lambda_1^A \leq \lambda_2^A \leq \dots \leq \lambda_j^A \leq \dots$ the increasing sequence of eigenvalues below the essential spectrum of A ; if there is a finite number j_{\max} of such eigenvalues, extend the sequence for $j > j_{\max}$ by setting $\lambda_j^A = \lambda_{\text{ess}}^A$, where λ_{ess}^A is the infimum of the essential spectrum of A . Introduce the same notations for B . Suppose that there exist a bounded operator $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$, an interval $I = (-\infty, E]$, and constants $C > 0$, $c \in (0, 1)$ such that $U\Pi_I^B(\mathcal{H}) \subset \text{Dom}(A)$ and*

$$\|(U^*AU - B)\Pi_I^B\| \leq C$$

and

$$\|U^*U\Pi_I^B - \Pi_I^B\| \leq c.$$

Then, for all j such that $\lambda_j^B \leq E$, one has

$$\lambda_j^A \leq (\lambda_j^B + C) \left(1 + \frac{c}{1-c}\right).$$

Proof of theorem 4.6.2. Fix E in $[-E^1, E^0]$. Let \mathcal{J} be an open neighbourhood of $[-E^1, E]$ such that the open set $a_0^{-1}(\mathcal{J})$ is contained in Ω_1 , and let $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a smooth function equal to 1 on $[-E^1, E]$ and 0 outside \mathcal{J} . Consider the Toeplitz operator $R_k = \eta(A_k)$ and set $B_k = (f(A_k, k) - U_k Q_k U_k^*) R_k$. By the choice of R_k , the microsupport of B_k is a subset of Ω_1 . Moreover, $f(A_k, k)$ is microlocally equal to $U_k Q_k U_k^*$ on Ω_1 . These two facts imply that B_k is negligible; since M is compact, this yields that for every $N \geq 1$, there exists a positive constant C_N such that

$$\|B_k\| \leq C_N k^{-N}.$$

Now, let $\Pi_{\leq f(E, k)}^{f(A_k, k)}$ be the spectral projection associated to $f(A_k, k)$ and corresponding to the eigenvalues smaller than $f(E, k)$. If (λ, φ) is an eigencouple for A_k with $\lambda \leq E$, then $R_k \varphi = \eta(\lambda) \varphi = \varphi$. This implies that for every ϕ in $\Pi_{\leq f(E, k)}^{f(A_k, k)}(\mathcal{H}_k)$, $R_k \phi = \phi$, and consequently

$$\|(f(A_k, k) - U_k Q_k U_k^*) \Pi_{\leq f(E, k)}^{f(A_k, k)}\| \leq C_N k^{-N}.$$

Similarly, there exists $c_N > 0$ such that

$$\|(\Pi_k - U_k U_k^*) \Pi_{\leq f(E, k)}^{f(A_k, k)}\| \leq c_N k^{-N}.$$

So lemma 4.6.3 shows that if $f(\lambda_k^{(j)}, k) \leq f(E, k)$, the inequality

$$k^{-1} \left(j + \frac{1}{2}\right) \leq \left(1 + \frac{c_N k^{-N}}{1 - c_N k^{-N}}\right) \left(f(\lambda_k^{(j)}, k) + C_N k^{-N}\right)$$

holds. So for k large enough (independently of E), we have $k^{-1} \left(j + \frac{1}{2} \right) \leq f(E, k)$.

Now, let ρ be a smooth function equal to 1 on $[f_0(-E^1), f_0(E)]$ and vanishing outside an open neighbourhood \mathcal{K} of $[f_0(-E^1), f_0(E)]$ such that $q_0^{-1}(\mathcal{K}) \subset \Omega_2$. Thanks to proposition 4.3.8, we can consider the Toeplitz operator $S_k = \rho(Q_k)$, and set $C_k = (U_k^* f(A_k, k) U_k - Q_k) S_k$. Since S_k belongs to every \mathcal{T}_j , $j < 0$, C_k belongs to \mathcal{T}_0 and is thus a bounded operator $\mathcal{B}_k \rightarrow \mathcal{B}_k$. Moreover, by construction, it is negligible. Hence there exists a positive constant \tilde{C}_N such that

$$\|C_k\| \leq \tilde{C}_N k^{-N};$$

modifying C_N if necessary, we can assume that \tilde{C}_N is equal to C_N . So, introducing the spectral projection $\Pi_{\leq f(E, k)}^{Q_k}$ corresponding to the eigenvalues of Q_k smaller than $f(E, k)$, the inequality

$$\left\| (U_k^* f(A_k, k) U_k - Q_k) \Pi_{\leq f(E, k)}^{Q_k} \right\| \leq C_N k^{-N}$$

holds. Similarly, we have

$$\left\| (U_k^* U_k - \Pi_k^0) \Pi_{\leq f(E, k)}^{Q_k} \right\| \leq c_N k^{-N}.$$

Hence, applying again lemma 4.6.3, we obtain that

$$f(\lambda_k^{(j)}, k) \leq \left(1 + \frac{c_N k^{-N}}{1 - c_N k^{-N}} \right) \left(k^{-1} \left(j + \frac{1}{2} \right) + C_N k^{-N} \right)$$

as soon as $k^{-1} \left(j + \frac{1}{2} \right) \leq f(E, k)$. This shows that if $f(\lambda_k^{(j)}, k) \leq f(E, k)$, then

$$\left| f(\lambda_k^{(j)}, k) - k^{-1} \left(j + \frac{1}{2} \right) \right| \leq C'_N k^{-N}$$

for some positive constant C'_N . Exchanging the roles of Q_k and A_k , and using lemma 4.6.1, this gives formula (4.13).

Using this result and the fact that there exists $c > 0$ such that for $j \in \mathbb{N}$, $E_k^{(j+1)} - E_k^{(j)}$ is equivalent to ck^{-1} , we obtain that the $\lambda_k^{(j)}$ are simple for k large enough. \square

4.6.2 Computation of the principal and subprincipal terms

In order to exploit these results, it remains to compute a few first terms in the asymptotic expansion of the sequence $f(\cdot, k)$. What we can do is relate the principal and subprincipal terms to the actions introduced in section 4.1.2.

Proposition 4.6.4. *Set $I =]0, E^0[$. Then*

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} c_0, \quad f_1 = \frac{1}{2\pi} c_1 \tag{4.14}$$

on I .

Proof. Let us first compute f_0 . Fix a level E in I . Let $\frac{1}{i}\beta$ be the 1-form describing locally the Chern connection on L ; then $c_0(E)$ is given by

$$c_0(E) = \int_{\Gamma_E} \beta.$$

Using the relation $a_0 \circ \chi^{-1} = g_0 \circ q_0$, we can then write

$$c_0(E) = \int_{\mathcal{C}_E} (\chi^{-1})^* \beta$$

where \mathcal{C}_E is the circle centered at the origin and with radius $\sqrt{2f_0(E)}$. Using Stokes' formula and the fact that χ is a symplectomorphism, this yields that $c_0(E)$ is the area of the disk bounded by \mathcal{C}_E , that is, if the orientation that we chose is the one giving the positive area (and this is what we will assume in the rest of this section)

$$c_0(E) = 2\pi f_0(E). \quad (4.15)$$

Now, turn back to the proof of our normal form theorem 4.5.3, where f_1 is constructed from the subprincipal symbol r_0 of $U_k^{(0)*} f(A_k, k) U_k^{(0)}$. By uniqueness of f_1 , instead of starting from any operator $U_k^{(0)}$, we can choose one with symbol $u \otimes v$, where u is constant and v is a square root of Ψ . Doing so, we can compute r_0 thanks to theorem 4.4.7:

$$r_0 = (a_1 \circ \chi^{-1})(f'_0 \circ a_0 \circ \chi^{-1}) - \nu_{\chi^{-1}(\cdot)} \left(X_{f_0 \circ a_0} \circ \chi^{-1} \right)$$

where ν is the local connection 1-form associated to ∇^{L_1} . We have $f_1 = \theta_1 \circ f_0$ with θ_1 such that for all (x, ξ) in \mathbb{R}^2

$$(\theta_1 \circ q_0)(x, \xi) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r_0 \left(\phi_{q_0}^t(x, \xi) \right) dt$$

where $\phi_{q_0}^t$ stands for the Hamiltonian flow of q_0 . Since $q_0 = f_0 \circ a_0 \circ \chi^{-1}$, this implies that for (x, ξ) in \mathbb{R}^2

$$\begin{aligned} (f_1 \circ a_0 \circ \chi^{-1})(x, \xi) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (a_1 f'_0 \circ a_0) \left(\chi^{-1} \left(\phi_{q_0}^t(x, \xi) \right) \right) dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nu_{\chi^{-1}(\phi_{q_0}^t(x, \xi))} \left(X_{f_0 \circ a_0} \left(\chi^{-1}(\phi_{q_0}^t(x, \xi)) \right) \right) dt. \end{aligned}$$

So, for $m \neq m_0$ in Ω_1 , we have

$$\begin{aligned} (f_1 \circ a_0)(m) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (a_1 f'_0 \circ a_0) \left(\chi^{-1} \left(\phi_{q_0}^t(\chi(m)) \right) \right) dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nu_{\chi^{-1}(\phi_{q_0}^t(\chi(m)))} \left(X_{f_0 \circ a_0} \left(\chi^{-1} \left(\phi_{q_0}^t(\chi(m)) \right) \right) \right) dt; \end{aligned}$$

thus, if $E = a_0(m)$,

$$f_1(E) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nu_{\chi^{-1}(\phi_{q_0}^t(\chi(m)))} \left(X_{f_0 \circ a_0} \left(\chi^{-1} \left(\phi_{q_0}^t(\chi(m)) \right) \right) \right) dt \\ - \frac{f'_0(E)}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_1 \left(\chi^{-1} \left(\phi_{q_0}^t(\chi(m)) \right) \right) dt.$$

But $\chi^{-1} \circ \phi_{q_0}^t \circ \chi$ is the Hamiltonian flow of $q_0 \circ \chi = f_0 \circ a_0$, so

$$f_1(E) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nu_{\phi_{f_0 \circ a_0}^t(m)} \left(X_{f_0 \circ a_0} \left(\phi_{f_0 \circ a_0}^t(m) \right) \right) dt \\ - \frac{f'_0(E)}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_1 \left(\phi_{f_0 \circ a_0}^t(m) \right) dt.$$

Therefore, if T_E is the period of the flow $\phi_{a_0}^t$ along Γ_E , we have $T_E = 2\pi f'_0(E)$ for E close to 0, and a change of variable gives

$$f_1(E) = \frac{1}{2\pi f'_0(E)} \int_0^{2\pi} \nu_{\phi_{f_0 \circ a_0}^{t f'_0(E)}(m)} \left(X_{f_0 \circ a_0} \left(\phi_{f_0 \circ a_0}^{t f'_0(E)}(m) \right) \right) dt \\ - \frac{1}{2\pi} \int_0^{T_E} a_1 \left(\phi_{f_0 \circ a_0}^{t f'_0(E)}(m) \right) dt$$

which yields, since the Hamiltonian vector field associated to $f_0 \circ a_0$ is $X_{f_0 \circ a_0} = (f'_0 \circ a_0) X_{a_0}$, and hence $\phi_{f_0 \circ a_0}^{t f'_0(E)}(m) = \phi_{a_0}^t(m)$:

$$f_1(E) = \frac{1}{2\pi f'_0(E)} \int_0^{2\pi} \nu_{\phi_{a_0}^t(m)} \left(f'_0(E) X_{a_0} \left(\phi_{a_0}^t(m) \right) \right) dt \\ - \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_0^{T_E} a_1 \left(\phi_{a_0}^t(m) \right) dt}_{= - \int_{\Gamma_E} \kappa_E}$$

and by linearity of ν

$$f_1(E) = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} \nu_{\phi_{a_0}^t(m)} \left(X_{a_0} \left(\phi_{a_0}^t(m) \right) \right) dt}_{= \int_{\Gamma_E} \nu} + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_E} \kappa_E.$$

The right term of this equality is precisely equal to $\frac{1}{2\pi} c_1(E)$; so we have on the interval I

$$c_1 = 2\pi f_1. \quad (4.16)$$

□

To conclude, we can show that $\epsilon = 1$ on I , so the result of theorem 4.6.2 matches the usual Bohr-Sommerfeld conditions on the set I of regular values.

4.6.3 First terms of the asymptotic expansion of the eigenvalues

Theorem 4.6.2 and formula (4.12) give an asymptotic expansion for the eigenvalues of A_k smaller than E^0 . Fix $j \in \mathbb{N}$; for k large enough, one has

$$\lambda_k^{(j)} = k^{-1} \left(g_1(0) + \left(j + \frac{1}{2} \right) g'_0(0) \right) + O(k^{-2}).$$

We can be more precise, since we know the value of $g_1(0)$: by definition of $g(\cdot, k)$, we have $g_1 = -(f_1 \circ g_0)g'_0$, and the computation made in the previous part leads to $f_1(0) = -a_1(0)f'_0(0)$; consequently, $g_1(0) = a_1(0)$ and

$$\lambda_k^{(j)} = k^{-1} \left(a_1(0) + \left(j + \frac{1}{2} \right) g'_0(0) \right) + O(k^{-2}). \quad (4.17)$$

But $g'_0(0) = \frac{1}{f'_0(0)}$; moreover, it is standard that the principal action c_0 is smooth even at the critical value $E = 0$. Hence, thanks to formula (4.15), one has

$$\lambda_k^{(j)} = k^{-1} \left(a_1(0) + \frac{2\pi \left(j + \frac{1}{2} \right)}{c'_0(0)} \right) + O(k^{-2}). \quad (4.18)$$

In particular, the gap between two consecutive eigenvalues is given by

$$\lambda_k^{(j+1)} - \lambda_k^{(j)} = \frac{2\pi k^{-1}}{c'_0(0)} + O(k^{-2}). \quad (4.19)$$

4.7 An example on the torus

The aim of this section is to give numerical evidence for our results by investigating the case of a particular Toeplitz operator on the torus \mathbb{T} of real dimension 2. One can find the details of the quantization of \mathbb{T} in [25], where the authors investigate some conjectures on knot states; let us briefly recall its main ingredients.

4.7.1 The setting

Endow \mathbb{R}^2 with the linear symplectic form ω_0 and choose a half-form bundle $\delta \rightarrow \mathbb{R}^2$, that is a complex line bundle δ together with an isomorphism $\varphi : \delta^{\otimes 2} \rightarrow K$, where K is the canonical line bundle

$$K = \Lambda^{1,0} T^* \mathbb{R}^2.$$

K has a natural scalar product such that the square of the norm of α is $i\alpha \wedge \bar{\alpha}/\omega$; endow δ with the scalar product $\langle \cdot, \cdot \rangle_\delta$ such that φ is an isometry. Consider a lattice Λ with symplectic volume 4π . The Heisenberg group $H = \mathbb{R}^2 \times U(1)$ with product

$$(x, u) \cdot (y, v) = \left(x + y, uv \exp \left(\frac{i}{2} \omega_0(x, y) \right) \right)$$

acts on the trivial bundle $L_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$, with action given by the same formula. This action preserves the prequantum data, and the lattice Λ injects into H ; therefore, the fiber bundle L_0 reduces to a prequantum bundle L over $\mathbb{T} = \mathbb{R}^2/\Lambda$. The action extends to the fiber bundle L_0^k by

$$(x, u) \cdot (y, v) = \left(x + y, u^k v \exp\left(\frac{ik}{2}\omega_0(x, y)\right) \right).$$

We let the Heisenberg group act trivially on δ . We obtain an action

$$T^* : \Lambda \rightarrow \text{End}\left(\Gamma\left(\mathbb{R}^2, L_0^k \otimes \delta\right)\right), \quad u \mapsto T_u^*.$$

The Hilbert space $\mathcal{H}_k = H^0(M, L^k)$ can naturally be identified to the space $\mathcal{H}_{\Lambda, k}$ of holomorphic sections of $L_0^k \rightarrow \mathbb{R}^2$ which are invariant under the action of Λ , endowed with the hermitian product

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_D \langle \varphi, \psi \rangle_\delta |\omega_0|$$

where D is the fundamental domain of the lattice. Furthermore, $\Lambda/2k$ acts on $\mathcal{H}_{\Lambda, k}$. Let e and f be generators of Λ satisfying $\omega_0(e, f) = 4\pi$; one can show that there exists an orthonormal basis $(\psi_\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}/2k\mathbb{Z}}$ of $\mathcal{H}_{\Lambda, k}$ such that

$$\forall \ell \in \mathbb{Z}/2k\mathbb{Z} \quad \begin{cases} T_{e/2k}^* \psi_\ell = w^\ell \psi_\ell \\ T_{f/2k}^* \psi_\ell = \psi_{\ell+1} \end{cases} \quad (4.20)$$

with $w = \exp\left(\frac{i\pi}{k}\right)$. The sections ψ_ℓ can be expressed in terms of Θ functions.

Set $M_k = T_{e/2k}^*$ and $L_k = T_{f/2k}^*$. Let (q, p) be coordinates on \mathbb{R}^2 associated to the basis (e, f) and $[q, p]$ be the equivalence class of (q, p) . Both M_k and L_k are Toeplitz operators, with respective principal symbols $[q, p] \mapsto \exp(2i\pi p)$ and $[q, p] \mapsto \exp(2i\pi q)$, and vanishing subprincipal symbols. Consequently

$$A_k = M_k + M_k^{-1} + L_k + L_k^{-1}$$

is a Toeplitz operator on \mathbb{T} with principal symbol

$$a_0(q, p) = 2(\cos(2\pi p) + \cos(2\pi q)) \quad (4.21)$$

and vanishing subprincipal symbol. Its matrix in the basis $(\psi_\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}/2k\mathbb{Z}}$ is

$$\begin{pmatrix} 2\alpha_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2\alpha_{2k-1} \end{pmatrix}$$

where

$$\alpha_\ell = \cos\left(\frac{\ell\pi}{k}\right).$$

The principal symbol a_0 is known as Harper's Hamiltonian. It admits a global minimum at $m_0 = [1/2, 1/2]$, with $a_0(m_0) = -4$. Figure 4.1 is a contour plot of this function on the fundamental domain. In figure 4.2, we derived numerically the spectrum of A_k . Figure 4.3 shows the modulus of the eigenfunction associated to the eigenvalue closest to a prescribed level E .

In this situation, we can express $c'_0(0)$, and so, by equation (4.18), the first eigenvalues of A_k . Indeed, the symplectic form on \mathbb{T} is $\omega = 4\pi dp \wedge dq$ and the hessian of a_0 at $m_0 = [1/2, 1/2]$ is given by:

$$d^2a_0(m_0) = 8\pi^2 I_2$$

so it is easy to obtain

$$c'_0(0) = 1.$$

Consequently, the first eigenvalues are given by:

$$\lambda_k^{(j)} = -4 + 2\pi k^{-1} \left(j + \frac{1}{2}\right) + O(k^{-2}). \quad (4.22)$$

This is exactly what our simulations show; we plotted the eigenvalues located in a window of length $20\pi k^{-1}$ around the minimum (so we expect to see about ten eigenvalues) and the result can be seen in figure 4.4.

4.7.2 Figures

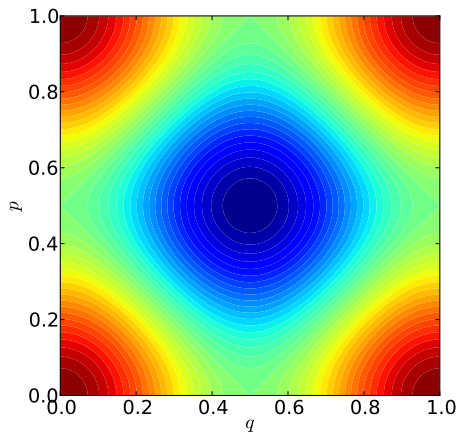
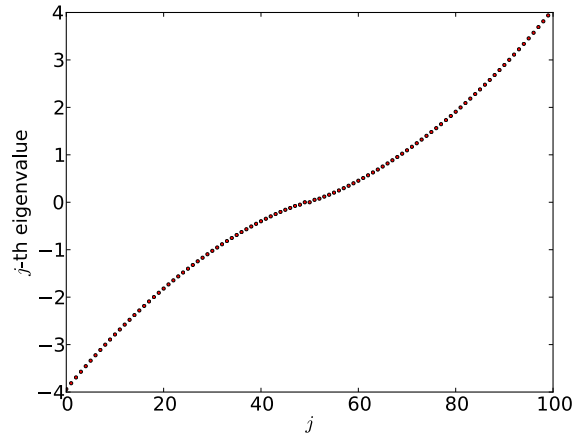
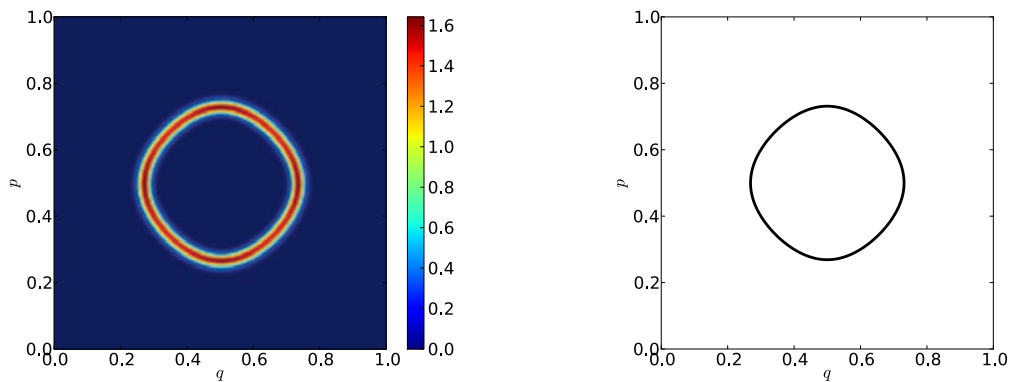


Figure 4.1: A few level sets of a_0 .

Figure 4.2: Ordered eigenvalues of A_k , $k = 50$.(a) Modulus of the eigenfunction associated to the eigenvalue closest to E .(b) Level set $a_0^{-1}(E)$.Figure 4.3: $E = a_0(0.7, 0.6)$, $k = 500$

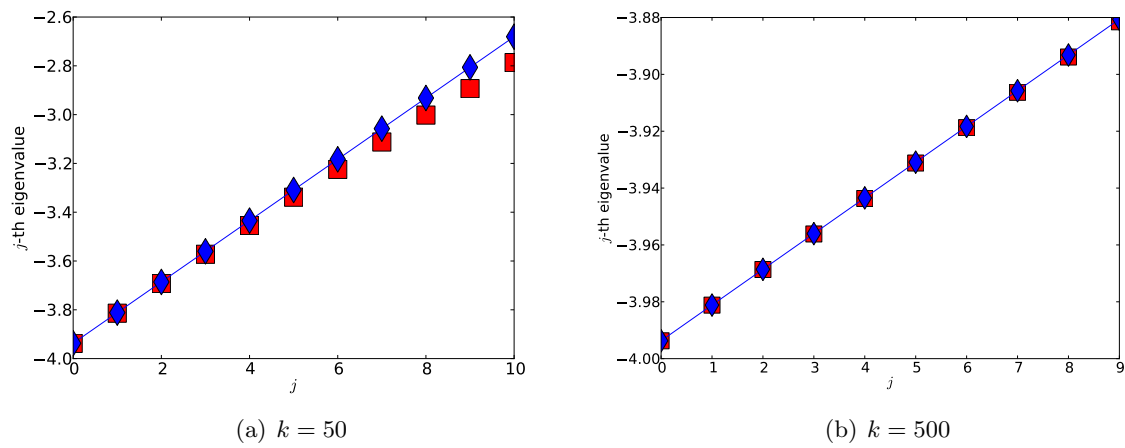


Figure 4.4: Eigenvalues in $[-4, -4+20\pi k^{-1}]$; in red squares, the eigenvalues of A_k obtained numerically; in blue diamonds, the theoretical eigenvalues up to order k^{-2} (*i.e.* forgetting the $O(k^{-2})$ in formula (4.22)).

4.8 Remarque finale

Les résultats de ce chapitre, associés à l'énoncé des conditions de Bohr-Sommerfeld usuelles, permettent de retrouver la dimension de l'espace de Hilbert \mathcal{H}_k dans le cas où les points critiques du symbole principal sont tous de type elliptique. Plus précisément, soient (M, ω) une surface kählérienne compacte connexe, $L \rightarrow M$ un fibré préquantifiant et $\delta \rightarrow M$ un fibré de demi-formes. On construit l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_k = H^0(M, L^k \otimes \delta)$ et on considère un opérateur de Toeplitz autoadjoint A_k agissant sur \mathcal{H}_k , dont le symbole principal a_0 ne possède que des singularités elliptiques, et de symbole sous-principal identiquement nul. Nécessairement, M est difféomorphe à la sphère S^2 et a_0 possède exactement un minimum global et un maximum global (car la caractéristique d'Euler de M est la différence entre le nombre de points critiques de type elliptique et le nombre de points critiques de type hyperbolique). Nous allons calculer la dimension de \mathcal{H}_k (avec k assez grand) en dénombrant les valeurs propres de A_k .

Étant donné un intervalle J de \mathbb{R} , nous noterons $\mathcal{N}(J, k)$ le nombre de valeurs propres de A_k contenues dans J . Notons $I = [E^-, E^+] = a_0(M)$ l'image du symbole principal ; en outre, soit E_1 (respectivement $E_2 > E_1$) dans I tel que l'intersection du spectre de A_k avec $[E^-, E_1]$ (respectivement $[E_2, E^+]$) soit décrite par les conditions de Bohr-Sommerfeld elliptiques (théorème 4.6.2). Enfin, soient E'_1, E'_2 avec $E^- < E'_1 < E_1$ et $E_2 < E'_2 < E^+$. Introduisons une suite $(\mu_k^-)_{k \geq 0}$ (respectivement $(\mu_k^+)_{k \geq 0}$) d'éléments de $[E'_1, E_1]$ (respectivement $[E_2, E'_2]$) telle que

$$c_0(\mu_k^\pm) \in 2\pi k^{-1}\mathbb{Z}$$

avec c_0 l'action principale (définie au chapitre 3).

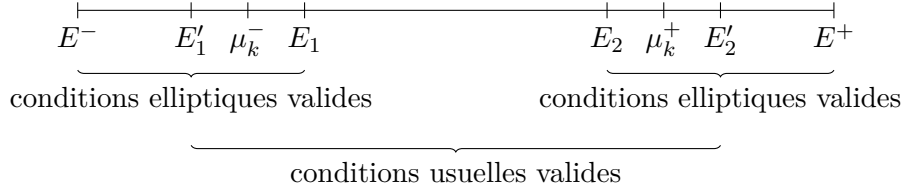


FIGURE 4.5 – Découpage de l'intervalle I .

Lemme 4.8.1. *Il existe $k_0 \geq 0$ tel que pour tout $k \geq k_0$:*

$$\mathcal{N}([\mu_k^-, \mu_k^+], k) = \frac{k}{2\pi} \text{vol} \left(a_0^{-1}([\mu_k^-, \mu_k^+]) \right).$$

Démonstration. On peut sans perte de généralité supposer que c_0 est strictement croissante sur I . Rappelons que les valeurs propres de A_k dans $[E'_1, E'_2]$ sont à $O(k^{-2})$ près les solutions de l'équation

$$c_0(\lambda) + k^{-1}\pi \in 2\pi k^{-1}\mathbb{Z}.$$

Ainsi, puisque $c_0(\mu_k^\pm) \in 2\pi k^{-1}\mathbb{Z}$, on a pour k suffisamment grand l'égalité

$$\mathcal{N}([\mu_k^-, \mu_k^+], k) = \frac{k}{2\pi} \left(c_0(\mu_k^+) - c_0(\mu_k^-) \right).$$

De plus, comme la courbure de la connexion ∇ sur L est $-i\omega$, la mesure image de ω par a_0 est $c'_0(\lambda)d\lambda$. Ainsi, on a

$$c_0(\mu_k^+) - c_0(\mu_k^-) = \int_{a_0^{-1}([\mu_k^-, \mu_k^+])} \omega = \text{vol} \left(a_0^{-1}([\mu_k^-, \mu_k^+]) \right),$$

ce qui livre le résultat annoncé. \square

Nous pouvons obtenir une égalité similaire près du minimum et du maximum du symbole principal.

Lemme 4.8.2. *Il existe $k_1 \geq 0$ tel que pour tout $k \geq k_1$:*

$$\mathcal{N}([E^-, \mu_k^-], k) = \frac{k}{2\pi} \text{vol} \left(a_0^{-1}([E^-, \mu_k^-]) \right)$$

et

$$\mathcal{N}([\mu_k^+, E^+], k) = \frac{k}{2\pi} \text{vol} \left(a_0^{-1}([\mu_k^+, E^+]) \right)$$

Démonstration. L'intersection du spectre de A_k avec $[E^-, E_1]$ est décrite à $O(k^{-2})$ près par les solutions de

$$c_0(\lambda) \in 2\pi k^{-1} \left(\mathbb{N} + \frac{1}{2} \right).$$

Or $c_0(E^-) = 0 \in 2\pi k^{-1}\mathbb{N}$. On peut donc raisonner comme dans la preuve du lemme précédent pour calculer $\mathcal{N}([E^-, \mu_k^-], k)$. On procède de même sur l'intervalle $[\mu_k^+, E^+]$. \square

Finalement, en sommant les trois égalités ainsi obtenues, il vient pour $k \geq \max(k_0, k_1)$:

$$\dim(\mathcal{H}_k) = \frac{k}{2\pi} \text{vol}(M),$$

ce qui correspond bien à l'équation (2.1).

Bien évidemment, ce cadre est très restrictif. Si on veut appréhender ce qu'il se passe quand la topologie de M est plus complexe, il faut inclure une étude près des niveaux hyperboliques. Dans cette situation, les conditions de Bohr-Sommerfeld (obtenues au chapitre suivant) sont plus délicates à manipuler, et il conviendrait de comprendre comment adapter la démarche de cette section.

Chapitre 5

Conditions de Bohr-Sommerfeld dans le cas hyperbolique

Ce chapitre est la retranscription de la prépublication [71]¹. Nous y énonçons les conditions de Bohr-Sommerfeld au voisinage d'une valeur singulière de type hyperbolique du symbole principal d'un opérateur de Toeplitz autoadjoint en dimension deux, et ce quel que soit le nombre de points hyperboliques sur le niveau critique. Nous obtenons ainsi la description du spectre de l'opérateur dans un voisinage de taille fixe (indépendant de k) de la singularité. Nous fournissons des simulations numériques pour corroborer nos résultats, sur trois exemples, chacun étant associé à une topologie différente : la fonction hauteur sur le tore (un seul point hyperbolique sur le niveau critique), xy sur la sphère (deux points hyperboliques sur le niveau critique, qui divise la sphère en quatre composantes connexes) et le hamiltonien de Harper sur le tore (deux points hyperboliques sur le niveau critique, qui divise le tore en deux composantes connexes).

1. Pour des raisons de cohérence du texte, nous avons laissé telle quelle la section 5.4, qui est pratiquement identique au chapitre 3 de ce manuscrit.

5.1 Introduction

Let M be a compact, connected Kähler manifold of complex dimension 1, with fundamental 2-form ω . Assume that M is endowed with a prequantum bundle L , that is a Hermitian, holomorphic line bundle whose Chern connection has curvature $-i\omega$. Let K be another Hermitian holomorphic line bundle and define the quantum Hilbert space \mathcal{H}_k as the space of holomorphic sections of $L^{\otimes k} \otimes K$, for every positive integer k . We consider (Berezin-)Toeplitz operators (see for instance [12, 10, 19, 76]) acting on \mathcal{H}_k . The semiclassical limit corresponds to $k \rightarrow +\infty$.

The usual Bohr-Sommerfeld conditions [21], recalled in section 5.4.6, describe the intersection of the spectrum of a selfadjoint Toeplitz operator to a neighbourhood of any regular value of its principal symbol, in terms of geometric quantities (actions). A natural question is whether one can write Bohr-Sommerfeld conditions near a singular value of the principal symbol. In the case of a nondegenerate singularity of elliptic type, it was answered positively in [72], and the result is quite simple: roughly speaking, the singular Bohr-Sommerfeld conditions are nothing but the limit of the regular Bohr-Sommerfeld conditions when the energy goes from regular to singular. The hyperbolic case is much more complicated, because the topology of a neighbourhood of the singular level is. For instance, in the case of one hyperbolic point, the critical level looks like a figure eight, and crossing it has the effect of adding (or removing) one connected component from the regular level.

Let us mention that the case of Toeplitz operators is very close to the case of pseudodifferential operators. In this setting, the problem of describing the spectrum of a selfadjoint operator near a singular level of hyperbolic type was handled by Colin de Verdière and Parisse in a series of articles [33, 34, 35]. In this article, we use analogous techniques to write hyperbolic Bohr-Sommerfeld conditions in the context of Toeplitz operators. The novelty is that they can be applied in this context.

5.1.1 Main result

Let A_k be a self-adjoint Toeplitz operator on M ; its normalized symbol $a_0 + \hbar a_1 + \dots$ is real-valued. Assume that 0 is a critical value of the principal symbol a_0 , that the level set $\Gamma_0 = a_0^{-1}(0)$ is connected and that every critical point contained in Γ_0 is nondegenerate and of hyperbolic type. Let $S = \{s_j\}_{1 \leq j \leq n}$ be the set of these critical points. Γ_0 is a compact graph embedded in M , and each of its vertices has local degree 4. At each vertex s_j , we denote by e_m , $m = 1, 2, 3, 4$, the local edges, labeled with cyclic order $(1, 3, 2, 4)$ (with respect to the orientation of M near s_j) and such that e_1, e_2 (resp. e_3, e_4) correspond to the local unstable (resp. stable) manifolds. Cut $n + 1$ edges of Γ_0 , each one corresponding to a cycle γ_i in a basis $(\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1})$ of $H_1(\Gamma_0, \mathbb{Z})$, in such a way that the remaining graph is a tree T . Our main result is the following:

Theorem (theorem 5.6.1, theorem 5.6.4). *0 is an eigenvalue of A_k up to $O(k^{-\infty})$ if and only if the following system of $3n+1$ linear equations with unknowns $(x_\alpha \in \mathbb{C}_k)_{\alpha \in \{\text{edges of } T\}}$ has a non-trivial solution:*

1. if the edges $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ connect at s_j , then

$$\begin{pmatrix} x_{\alpha_3} \\ x_{\alpha_4} \end{pmatrix} = T_j \begin{pmatrix} x_{\alpha_1} \\ x_{\alpha_2} \end{pmatrix}$$

2. if α and β are the extremities of a cut cycle γ_i , then

$$x_\alpha = \exp(ik\theta(\gamma_i, k)) x_\beta,$$

where the following orientation is assumed: γ_i can be represented as a closed path starting on the edge α and ending on the edge β .

Moreover, T_j is a matrix depending only on a semiclassical invariant $\varepsilon_j(k)$ of the system at the singular point s_j , and $\theta(\gamma, k)$ admits an asymptotic expansion in non-positive powers of k . The first two terms of this expansion involve regularizations of the geometric invariants (actions and index) appearing in the usual Bohr-Sommerfeld conditions.

For spectral purposes, we use this theorem by replacing A_k by $A_k - E$ for E varying in fixed size neighbourhood of the singular level. Away from the critical energy, we recover the regular Bohr-Sommerfeld conditions.

This is very similar to the results of Colin de Verdière and Parisse [35], but the novelty lies in the framework that had to be set in order to extend their techniques to the Toeplitz setting, and also in the geometric invariants that are specific to this context.

5.1.2 Structure of the article

As said earlier, the case of Toeplitz operators is very close to the case of pseudodifferential operators; in mathematical terms, there is a microlocal equivalence between Toeplitz operators and pseudodifferential operators. When the phase space is the whole complex plane, this equivalence is realized by the Bargmann transform, and allows to use some of the results obtained in the pseudodifferential setting. This is why the article is organized as follows: first, we discuss microlocal properties of the Bargmann transform. Then, we introduce the sheaf of microlocal solutions of the equation $(A_k - E)u_k = 0$, explain its structure and recall the usual Bohr-Sommerfeld conditions. In section 5.5, we construct a microlocal normal form for A_k near each critical point s_j , $1 \leq j \leq n$, on Bargmann spaces, and we use the properties of the Bargmann transform and the study of Colin de Verdière and Parisse [29] to describe the space of microlocal solutions of A_k near s_j . Finally, we adapt the reasoning of Colin de Verdière and Parisse [35] and Colin de Verdière and Vũ Ngọc [37] to obtain the singular Bohr-Sommerfeld conditions (in section 5.6). We give numerical evidence in the last section.

5.2 Preliminaries and notations

5.2.1 Symbol classes

We introduce rather standard symbol classes. Let d be a positive integer. For u in $\mathbb{C}^d \simeq \mathbb{R}^{2d}$, let $m(u) = (1 + \|u\|^2)^{\frac{1}{2}}$. For every integer j , we define the symbol class \mathcal{S}_j^d as

the set of sequences of functions of $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^d)$ which admit an asymptotic expansion of the form $a(\cdot, k) = \sum_{\ell \geq 0} k^{-\ell} a_\ell$ in the sense that

$$\begin{aligned} - \forall \ell \in \mathbb{N} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^{2d} \quad \exists C_{\ell, \alpha, \beta} > 0 \quad |\partial_z^\alpha \partial_{\bar{z}}^\beta a_\ell| \leq C_{\ell, \alpha, \beta} m^j, \\ - \forall L \in \mathbb{N}^* \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^{2d} \quad \exists C_{L, \alpha} > 0 \\ \left| \partial_z^\alpha \partial_{\bar{z}}^\beta \left(a - \sum_{\ell=0}^{L-1} k^{-\ell} a_\ell \right) \right| \leq C_{L, \alpha, \beta} k^{-L} m^j. \end{aligned}$$

We set $\mathcal{S}^d = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{S}_j^d$. If, in this definition, we only consider symbols independent of z , we obtain the class \mathbb{C}_k of constant symbols; we will also sometimes speak of ‘‘admissible constants’’.

5.2.2 Function spaces

Using standard notations, we denote by $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ the Schwartz space of functions $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ such that for all $j, p \in \mathbb{N}$, $\sup_{t \in \mathbb{R}} |t^j f^{(p)}(t)| < +\infty$, by $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ the space of distributions on \mathbb{R} , and by $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ the space of tempered distributions on \mathbb{R} (the dual space of $\mathcal{S}(\mathbb{R})$). We recall that

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_j(\mathbb{R}),$$

where $\mathcal{S}_j(\mathbb{R})$ is the space of functions f of $\mathcal{C}^j(\mathbb{R})$ with $\|f\|_{\mathcal{S}_j}$ finite, with

$$\|f\|_{\mathcal{S}_j} = \max_{0 \leq p \leq j} \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} |(1+t^2)^{(j-p)/2} f^{(p)}(t)| \right).$$

The topology of $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ is defined by the countable family of semi-norms $\|\cdot\|_{\mathcal{S}_j}, j \in \mathbb{N}$.

We recall the definition of Bargmann spaces [2, 3], which are spaces of square integrable functions with respect to a Gaussian weight:

$$\mathcal{B}_k = \left\{ f \psi^k; f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C} \text{ holomorphic, } \int_{\mathbb{R}^2} |f(z)|^2 \exp(-k|z|^2) d\lambda(z) < +\infty \right\}$$

with $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right)$, $\psi^k : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{\otimes k}$ its k -th tensor power, and λ the Lebesgue measure on \mathbb{R}^2 . Furthermore, we introduce the subspace

$$\mathfrak{S}_k = \left\{ \varphi \in \mathcal{B}_k; \forall j \in \mathbb{N} \quad \sup_{z \in \mathbb{C}} (|\varphi(z)|(1+|z|^2)^{j/2}) < +\infty \right\} \quad (5.1)$$

of \mathcal{B}_k , with topology induced by the obvious associated family of semi-norms.

5.2.3 Weyl quantization and pseudodifferential operators

We briefly recall some standard notations and properties of the theory of pseudodifferential operators (for details, see *e.g.* [29, 40, 106]), replacing the usual small parameter \hbar by k^{-1} .

5.2.3.1 Pseudodifferential operators

A pseudodifferential operator in one degree of freedom is an operator (possibly unbounded) acting on $L^2(\mathbb{R})$ which is the Weyl quantization of a symbol $a(\cdot, k) \in \mathcal{S}^1$:

$$A_k = \left(\text{Op}_k^W(a)u \right) (x) = \frac{k}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \exp(ik(x-y)\xi) a\left(\frac{x+y}{2}, \xi, k\right) u(y) dy d\xi$$

The sequence $a(\cdot, k)$ is a sequence of functions defined on the cotangent space $T^*\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^2$; the leading term a_0 in its asymptotic expansion is the principal symbol of A_k . A_k is said to be *elliptic* at $(x_0, \xi_0) \in T^*\mathbb{R}$ if $a_0(x_0, \xi_0) \neq 0$.

5.2.3.2 Wavefront set

Definition 5.2.1. A sequence u_k of elements of $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ is said to be *admissible* if for any pseudodifferential operator P_k whose symbol is compactly supported, there exists an integer $N \in \mathbb{Z}$ such that $\|P_k u_k\|_{L^2} = O(k^N)$.

We recall the standard definition of the wavefront set $\text{WF}(u_k)$ of an admissible sequence of distributions.

Definition 5.2.2. Let u_k be an admissible sequence of $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. A point (x_0, ξ_0) does not belong to $\text{WF}(u_k)$ if and only if there exists a pseudodifferential operator P_k , elliptic at (x_0, ξ_0) , such that $\|P_k u_k\|_{L^2} = O(k^{-\infty})$.

One can refine these definitions in the case where u_k belong to $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Definition 5.2.3. A sequence $(u_k)_{k \geq 1}$ of elements of $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ is said to be

- *\mathcal{S} -admissible* if there exists N in \mathbb{Z} such that every Schwartz semi-norm of u_k is $O(k^N)$,
- *\mathcal{S} -negligible* if it is admissible and every Schwartz semi-norm of u_k is $O(k^{-\infty})$. We write $u_k = O_{\mathcal{S}}(k^{-\infty})$.

Now, instead of using the L^2 -norm in definition 5.2.2, one can actually consider the semi-norms $\|\cdot\|_{\mathcal{S}_j}$.

Lemma 5.2.4. *A point (x_0, ξ_0) does not belong to $\text{WF}(u_k)$ if and only if there exists a pseudodifferential operator P_k , elliptic at (x_0, ξ_0) , such that $P_k u_k = O_{\mathcal{S}}(k^{-\infty})$.*

Proof. The sufficient condition comes from the previous definition, so we only prove the necessary condition. We only adapt a standard argument used when one wants to deal with \mathcal{C}^j -norms (see [86, proposition IV–8]). Assume that (x_0, ξ_0) does not belong to $\text{WF}(u_k)$; there exists a pseudodifferential operator P_k , elliptic at (x_0, ξ_0) , such that $\|P_k u_k\|_{L^2} = O(k^{-\infty})$. Consider a compactly supported smooth function χ equal to one in a neighbourhood of (x_0, ξ_0) and set $Q_k = \text{Op}^W(\chi)P_k$. For every $R \in \mathbb{R}[X]$ and every integer $j > 0$, $k^{-j} \frac{d^j}{dx^j} R \text{Op}^W(\chi)$ is a pseudodifferential operator of order 0, hence bounded $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ by a constant $C > 0$ (by Calderon-Vaillancourt theorem). Thus, one has $\|k^{-j} \frac{d^j}{dx^j} R Q_k u_k\|_{L^2} \leq C \|P_k u_k\|_{L^2} = O(k^{-\infty})$. Hence, $\|R Q_k u_k\|_{H^s} = O(k^{-\infty})$ for every integer $s > 0$; Sobolev injections then yield that every \mathcal{C}^j -norm of $R Q_k u_k$ is $O(k^{-\infty})$. Since this holds for every polynomial R , we obtain the result. \square

5.2.4 Geometric quantization and Toeplitz operators

We also recall the standard definitions and notations in the Toeplitz setting. Unless otherwise mentioned, “smooth” will always mean \mathcal{C}^∞ , and a section of a line bundle will always be assumed to be smooth. The space of sections of a bundle $E \rightarrow M$ will be denoted by $\mathcal{C}^\infty(M, E)$. Let M be a connected compact Kähler manifold, with fundamental 2-form $\omega \in \Omega^2(M, \mathbb{R})$. Assume M is endowed with a prequantum bundle $L \rightarrow M$, that is a Hermitian holomorphic line bundle whose Chern connection ∇ has curvature $-i\omega$. Let $K \rightarrow M$ be a Hermitian holomorphic line bundle. For every positive integer k , define the quantum space \mathcal{H}_k as:

$$\mathcal{H}_k = H^0(M, L^k \otimes K) = \left\{ \text{holomorphic sections of } L^k \otimes K \right\}.$$

The space \mathcal{H}_k is a subspace of the space $L^2(M, L^k \otimes K)$ of sections of finite L^2 -norm, where the scalar product is given by

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_M h_k(\varphi, \psi) \mu_M$$

with h_k the Hermitian product on $L^k \otimes K$ induced by those of L and K , and μ_M the Liouville measure on M . Since M is compact, \mathcal{H}_k is finite dimensional, and is thus given a Hilbert space structure with this scalar product.

5.2.4.1 Admissible and negligible sequences

Let $(s_k)_{k \geq 1}$ be a sequence such that for each k , s_k belongs to $\mathcal{C}^\infty(M, L^k \otimes K)$. We say that $(s_k)_{k \geq 1}$ is

- *admissible* if for every positive integer ℓ , for every vector fields X_1, \dots, X_ℓ on M , and for every compact set $C \subset M$, there exist a constant $c > 0$ and an integer N such that

$$\forall m \in C \quad \|\nabla_{X_1} \dots \nabla_{X_\ell} s_k(m)\| \leq ck^N,$$

- *negligible* if for every positive integers ℓ and N , for every vector fields X_1, \dots, X_ℓ on M , and for every compact set $C \subset M$, there exists a constant $c > 0$ such that

$$\forall m \in C \quad \|\nabla_{X_1} \dots \nabla_{X_\ell} s_k(m)\| \leq ck^{-N}.$$

In a standard way, one can then define the microsupport $\text{MS}(u_k)$ of an admissible sequence u_k and the notion of microlocal equality.

5.2.4.2 Toeplitz operators

Let Π_k be the orthogonal projector of $L^2(M, L^k \otimes K)$ onto \mathcal{H}_k . A *Toeplitz operator* is any sequence $(T_k : \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{H}_k)_{k \geq 1}$ of operators of the form

$$T_k = \Pi_k M_{f(\cdot, k)} + R_k$$

where $f(\cdot, k)$ is a sequence of $\mathcal{C}^\infty(M)$ with an asymptotic expansion $f(\cdot, k) = \sum_{\ell \geq 0} k^{-\ell} f_\ell$ for the \mathcal{C}^∞ topology, $M_{f(\cdot, k)}$ is the operator of multiplication by $f(\cdot, k)$ and $\|R_k\| = O(k^{-\infty})$. Define the contravariant symbol map

$$\sigma_{\text{cont}} : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)[[\hbar]]$$

sending T_k into the formal series $\sum_{\ell \geq 0} \hbar^\ell f_\ell$. We will mainly work with the *normalized symbol*

$$\sigma_{\text{norm}} = \left(\text{Id} + \frac{\hbar}{2} \Delta \right) \sigma_{\text{cont}}$$

where Δ is the holomorphic Laplacian acting on $\mathcal{C}^\infty(M)$; unless otherwise mentioned, when we talk about a subprincipal symbol, this refers to the normalized symbol.

5.2.4.3 The case of the complex plane

Let us briefly recall how to adapt the previous constructions to the case of the whole complex plane. We consider the Kähler manifold $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ with coordinates (x, ξ) , standard complex structure and symplectic form $\omega_0 = d\xi \wedge dx$. Let $L_0 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ be the trivial fiber bundle with standard Hermitian metric h_0 and connection ∇^0 with 1-form $\frac{1}{i}\alpha$, where $\alpha_u(v) = \frac{1}{2}\omega_0(u, v)$; endow L_0 with the unique holomorphic structure compatible with h_0 and ∇^0 . For every positive integer k , the quantum space at order k is

$$\mathcal{H}_k^0 = H^0(\mathbb{R}^2, L_0^k) \cap L^2(\mathbb{R}^2, L_0^k),$$

and it turns out that $\mathcal{H}_k^0 = \mathcal{B}_k$ (if we choose the holomorphic coordinate $z = \frac{x-i\xi}{\sqrt{2}}$). One can define the algebra of Toeplitz operators and the various symbols in a similar way than in the compact case; see [72] for details. We will call \mathcal{T}_j the class of Toeplitz operators with symbol in \mathcal{S}_j^1 .

Let us give more details about the microsupport in this setting. We start by recalling the following inequality in Bargmann spaces [2, equation (1.7)].

Lemma 5.2.5. *Let $\phi_k \in \mathcal{B}_k$. Then for every complex variable z*

$$|\phi_k(z)| \leq \left(\frac{k}{2\pi} \right)^{1/2} \|\phi_k\|_{\mathcal{B}_k}.$$

Similarly, for every vector fields X_1, \dots, X_p on \mathbb{C} , there exists a polynomial $P \in \mathbb{R}[x_1, x_2]$ with positive values such that for every $z \in \mathbb{C}$

$$|(\nabla_{X_1} \dots \nabla_{X_p} \phi_k)(z)| \leq P(|z|, k)^{1/2} \|\phi_k\|_{\mathcal{B}_k}.$$

Proof. The first claim is proved in [2] in the case $k = 1$; the general case then comes from a change of variables. The second claim can be proved in the same way. \square

Lemma 5.2.6. *Let u_k be a sequence of elements of \mathcal{B}_k and Ω a bounded open subset of \mathbb{C} . Assume that $\|u_k\|_{L^2(\Omega)} = O(k^{-\infty})$; then for any compact subset K of Ω , u_k and all its covariant derivatives are uniformly $O(k^{-\infty})$ on K .*

Proof. Choose a compactly supported smooth function η which is positive, vanishing outside Ω and with constant value 1 on K and set $v_k = \text{Op}(\eta)u_k$. One has

$$\|v_k\|_{\mathcal{B}_k} = \|\Pi_k^0 \eta u_k\|_{\mathcal{B}_k} \leq \|\eta u_k\|_{L^2} \leq \|u_k\|_{L^2(\Omega)}$$

since Π_k^0 is continuous $L^2 \rightarrow L^2$ with norm smaller than 1. Hence, $\|v_k\|_{\mathcal{B}_k} = O(k^{-\infty})$. By lemma 5.2.5, this implies that v_k and its covariant derivatives are uniformly $O(k^{-\infty})$ on K ; since $u_k = v_k + O(k^{-\infty})$ on K , the same holds for u_k . \square

Lemma 5.2.7. *Let $(u_k)_{k \geq 1}$ be an admissible sequence of elements of \mathcal{B}_k and $z_0 \in \mathbb{C}$. Then $z_0 \notin \text{MS}(u_k)$ if and only if there exists a Toeplitz operator $T_k \in \mathcal{T}_0$, elliptic at z_0 , such that $\|T_k u_k\|_{\mathcal{B}_k} = O(k^{-\infty})$.*

Proof. Assume that $z_0 \notin \text{MS}(u_k)$. There exists a neighbourhood \mathcal{U} of z_0 such that u_k is negligible on \mathcal{U} . Choose a compactly supported function $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ with support K contained in \mathcal{U} and such that $\chi(z_0) = 1$; and set $T_k = \text{Op}(\chi)$. One has for $z_1 \in \mathbb{C}$

$$(T_k u_k)(z_1) = \frac{k}{2\pi} \int_K \exp\left(-\frac{k}{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2z_1 \bar{z}_2)\right) \chi(z_2) u_k(z_2) d\mu(z_2),$$

which gives

$$|(T_k u_k)(z_1)| \leq \frac{k}{2\pi} \sup_K |u_k| \int_K \exp\left(-\frac{k}{2}|z_1 - z_2|^2\right) d\mu(z_2).$$

This allows to estimate the norm of $T_k u_k$:

$$\|T_k u_k\|_{\mathcal{B}_k}^2 \leq \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \left(\sup_K |u_k|\right)^2 \int_{\mathbb{C}} \int_K \exp(-k|z_1 - z_2|^2) d\mu(z_1) d\mu(z_2).$$

Hence

$$\|T_k u_k\|_{\mathcal{B}_k}^2 \leq \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \left(\sup_K |u_k|\right)^2 \mu(K) \int_{\mathbb{C}} \exp(-k|z_1|^2) d\mu(z_1)$$

and the necessary condition is proved since the integral is $O(k^{-1/2})$.

Conversely, assume that there exists a Toeplitz operator $T_k \in \mathcal{T}_0$ elliptic at z_0 such that $\|T_k u_k\|_{\mathcal{B}_k} = O(k^{-\infty})$. There exists a neighbourhood of z_0 where T_k is elliptic. Hence, by symbolic calculus, we can find a Toeplitz operator $S_k \in \mathcal{T}_0$ such that $S_k T_k \sim \Pi_k^0$ near (z_0, z_0) . Thus, there exists a neighbourhood Ω of z_0 such that $S_k T_k u_k \sim u_k$ on Ω ; this implies that $\|S_k T_k u_k\|_{L^2(\Omega)} = \|u_k\|_{L^2(\Omega)} + O(k^{-\infty})$. But, since S_k is bounded $\mathcal{B}_k \rightarrow \mathcal{B}_k$ by a constant $C > 0$ which does not depend on k , one has $\|S_k T_k u_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|T_k u_k\|_{\mathcal{B}_k}$; this yields that $\|u_k\|_{L^2(\Omega)}$ is $O(k^{-\infty})$. Lemma 5.2.6 then gives the negligibility of u_k on Ω . \square

Definition 5.2.8. A sequence $(u_k)_{k \geq 1}$ of elements of \mathfrak{S}_k is said to be

- \mathfrak{S}_k -admissible if there exists N in \mathbb{Z} such that every \mathfrak{S}_k semi-norm of u_k is $O(k^N)$,

- \mathfrak{S}_k -negligible if it is \mathfrak{S}_k -admissible and every \mathfrak{S}_k semi-norm of u_k is $O(k^{-\infty})$. We write $u_k = O_{\mathfrak{S}_k}(k^{-\infty})$.

Lemma 5.2.9. *Let $(u_k)_{k \geq 1}$ be an admissible sequence of elements of \mathcal{B}_k and $z_0 \in \mathbb{C}$. Then $z_0 \notin \text{MS}(u_k)$ if and only if there exists a Toeplitz operator $T_k \in \mathcal{T}_0$, elliptic at z_0 , such that $T_k u_k = O_{\mathfrak{S}_k}(k^{-\infty})$.*

Proof. The proof is nearly the same as the one of lemma 5.2.4. One can show that if $z_0 \notin \text{MS}(u_k)$, there exists a Toeplitz operator $T_k \in \mathcal{T}_0$, elliptic at z_0 , such that for every polynomial function $P(z)$ of z only, $\sup_{z \in \mathbb{C}} |P(z)(T_k u_k)(z)| = O(k^{-\infty})$, using the fact that the multiplication by $P(z)$ is a Toeplitz operator. \square

5.3 The Bargmann transform

5.3.1 Definition and first properties

The Bargmann transform is the unitary operator $B_k : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{B}_k$ defined by

$$(B_k f)(z) = \left(\left(\frac{k}{\pi} \right)^{1/4} \int_{\mathbb{R}} \exp \left(k \left(-\frac{1}{2}(z^2 + t^2) + \sqrt{2}zt \right) \right) f(t) dt \right) \psi^k(z).$$

The subspace \mathfrak{S}_k of \mathcal{B}_k defined in (5.1) is the analog of the Schwartz space on the Bargmann side. The case $k = 1$ is treated by the following theorem, due to Bargmann.

Theorem 5.3.1 ([3, theorem 1.7]). *The Bargmann transform B_1 is a bijective, bicontinuous mapping between $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ and \mathfrak{S}_1 .*

This allows us to handle the general case.

Proposition 5.3.2. *The Bargmann transform B_k is a bijection between $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ and \mathfrak{S}_k .*

Proof. If f belongs to $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, one has for z in \mathbb{C}

$$(B_k f)(z) = \left(\frac{k}{\pi} \right)^{1/4} \int_{\mathbb{R}} \exp \left(k \left(-\frac{1}{2}(z^2 + t^2) + \sqrt{2}zt \right) \right) f(t) dt;$$

introducing the variables u and w such that $z = k^{-1/2}w$ and $t = k^{-1/2}u$, this reads

$$(B_k f)(z) = (k\pi)^{-1/4} \int_{\mathbb{R}} \exp \left(-\frac{1}{2}(w^2 + u^2) + \sqrt{2}wu \right) f(k^{-1/2}u) du.$$

Hence, we have $(B_k f)(z) = (k\pi)^{-1/4} (B_1 g)(k^{1/2}z)$, where $g(t) = f(k^{-1/2}t)$. Obviously, the function g belongs to $\mathcal{S}(\mathbb{R})$; thus, by the previous theorem, $B_1 g$ belongs to \mathfrak{S}_1 . Hence, for $j \in \mathbb{N}$, there exists a constant $C_j > 0$ such that for every complex variable w

$$\left| (B_1 g)(w) \exp \left(-\frac{1}{2}|w|^2 \right) \right| \leq C_j (1 + |w|^2)^{-j/2}.$$

This implies that for every z in \mathbb{C} ,

$$\left| (B_k f)(z) \exp\left(-\frac{k}{2}|z|^2\right) \right| \leq C_j k^{-j/2} (1 + k|z|^2)^{-j/2}$$

and since $k \geq 1$, this yields

$$\left| (B_k f)(z) \exp\left(-\frac{k}{2}|z|^2\right) \right| \leq C_j (1 + |z|^2)^{-j},$$

which means that $B_k f$ belongs to \mathfrak{S}_k . The converse is proved in the same way, using the explicit form of the inverse mapping:

$$(B_k^* g)(t) = \left(\frac{k}{\pi}\right)^{1/4} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(k\left(-\frac{1}{2}(\bar{z}^2 + t^2) + \sqrt{2}\bar{z}t - |z|^2\right)\right) g(z) d\mu(z)$$

for g in \mathfrak{S}_k and $t \in \mathbb{R}$. □

5.3.2 Action on Toeplitz operators

The Bargmann transform has the good property to conjugate a Toeplitz operator to a pseudodifferential operator, and conversely.

Lemma 5.3.3. *Let T_k be a Toeplitz operator in the class \mathcal{T}_j , with contravariant symbol $\sigma_{cont}(T_k) = f(\cdot, \hbar)$; then $B_k^* T_k B_k$ is a pseudodifferential operator with Weyl symbol*

$$\sigma^W(B_k^* T_k B_k)(x, \xi) = I(f(\cdot, \hbar))(x, \xi)$$

with

$$I(f(\cdot, \hbar))(x, \xi) = \frac{1}{\pi\hbar} \int_{\mathbb{C}} \exp(-2\hbar^{-1}|w|^2) f(w + z, \hbar) d\lambda(w),$$

where $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - i\xi)$. The map I is continuous $\mathcal{S}_j \rightarrow \mathcal{S}_j$. Moreover, for any $f(\cdot, \hbar) \in \mathcal{S}_j$ and all $p \geq 1$,

$$I(f(\cdot, \hbar)) = \sum_{j=0}^{p-1} \left(\frac{\hbar}{2}\right)^j \frac{\Delta^j f(\cdot, \hbar)}{j!} + h^p R_p(f(\cdot, \hbar)). \quad (5.2)$$

where R_p is a continuous map from \mathcal{S}_j to \mathcal{S}_j .

Proof. Thanks to [28, theorem 5.2], we know that the result holds when $T_k = \Pi_k^0 f \Pi_k^0$, f being a bounded function on \mathbb{C} not depending on k . Now, using the stationary phase method, one can prove that the map I is continuous $\mathcal{S}_j \rightarrow \mathcal{S}_j$ with the asymptotic expansion (5.2), and conclude by a density argument. □

5.3.3 Microlocalization and Bargmann transform

Lemma 5.3.4. 1. B_k maps \mathcal{S} -admissible functions to \mathfrak{S}_k -admissible sections, and B_k^* maps \mathfrak{S}_k -admissible sections to \mathcal{S} -admissible functions.

2. B_k maps $O_{\mathcal{S}}(k^{-\infty})$ into $O_{\mathfrak{S}_k}(k^{-\infty})$, and B_k^* maps $O_{\mathfrak{S}_k}(k^{-\infty})$ into $O_{\mathcal{S}}(k^{-\infty})$.

Proof. These results are proved by performing a change of variables, as in proposition 5.3.2. \square

We are now able to prove the link between the wavefront set and the microsupport *via* the Bargmann transform.

Proposition 5.3.5. *Let u_k be an admissible sequence of elements of $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Then $(x_0, \xi_0) \notin \text{WF}(u_k)$ if and only if $z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_0 - i\xi_0) \notin \text{MS}(B_k u_k)$.*

Proof. Assume that $z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_0 - i\xi_0)$ does not belong to $\text{MS}(B_k u_k)$; by lemma 5.2.9, there exists a Toeplitz operator T_k , elliptic at z_0 , such that $T_k B_k u_k \psi^k = O_{\mathfrak{S}_k}(k^{-\infty})$. Thanks to lemma 5.3.3, $P_k = B_k^* T_k B_k$ is a pseudodifferential operator elliptic at (x_0, ξ_0) . Furthermore, thanks to lemma 5.3.4, $P_k u_k = B_k^* T_k B_k u_k \psi_k = O_{\mathcal{S}}(k^{-\infty})$; we conclude by lemma 5.2.4. The proof of the converse follows the same steps. \square

5.4 The sheaf of microlocal solutions

In this section, T_k is a self-adjoint Toeplitz operator on M , with normalized symbol $f(\cdot, \hbar) = \sum_{\ell \geq 0} \hbar^\ell f^\ell$. Following Vũ Ngọc [97, 98], we introduce the sheaf of microlocal solutions of the equation $T_k \psi_k = 0$.

5.4.1 Microlocal solutions

Let U be an open subset of M ; we call a sequence of sections $\psi_k \in \mathcal{C}^\infty(U, L^k \otimes K)$ a local state over U .

Definition 5.4.1. We say that a local state ψ_k is a microlocal solution of

$$T_k \psi_k = 0 \tag{5.3}$$

on U if it is admissible and for every $x \in U$, there exists a function $\chi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ with support contained in U , equal to 1 in a neighbourhood of x and such that

$$\Pi_k(\chi \psi_k) = \psi_k + O(k^{-\infty}), \quad T_k(\Pi_k(\chi \psi_k)) = O(k^{-\infty})$$

on a neighbourhood of x .

One can show that if $\psi_k \in \mathcal{H}_k$ is admissible and satisfies $T_k \psi_k = 0$, then the restriction of ψ_k to U is a microlocal solution of (5.3) on U . Moreover, the set $S(U)$ of microlocal solutions of this equation on U is a \mathbb{C}_k -module containing the set of negligible local states as a submodule. We denote by $\text{Sol}(U)$ the module obtained by taking the quotient of $S(U)$ by the negligible local states; the notation $[\psi_k]$ will stand for the equivalence class of $\psi_k \in S(U)$.

Lemma 5.4.2. *The collection of $Sol(U)$, U open subset of M , together with the natural restrictions maps $r_{U,V} : Sol(V) \rightarrow Sol(U)$ for U, V open subsets of M such that $U \subset V$, define a complete presheaf.*

Thus, we obtain a sheaf Sol over M , called the sheaf of microlocal solutions on M .

5.4.2 The sheaf of microlocal solutions

One can show that if the principal symbol f_0 of T_k does not vanish on U , then $Sol(U) = \{0\}$. Equivalently, if $\psi_k \in \mathcal{H}_k$ satisfies $T_k \psi_k = 0$, then its microsupport is contained in the level $\Gamma_0 = f_0^{-1}(0)$. This implies the following lemma.

Lemma 5.4.3. *Let Ω be an open subset of Γ_0 ; write $\Omega = U \cap \Gamma_0$ where U is an open subset of M . Then the restriction map*

$$r_U : Sol(U) \rightarrow \mathfrak{F}_U(\Omega) = r_U(Sol(U))$$

is an isomorphism of \mathbb{C}_k -modules.

We want to define a new sheaf $\mathfrak{F} \rightarrow \Gamma_0$ that still describes the microlocal solutions of (5.3). In order to do so, we will check that the module $\mathfrak{F}_U(\Omega)$ does not depend on the open set U such that $\Omega = \Gamma_0 \cap U$. We first prove:

Lemma 5.4.4. *Let U, \tilde{U} be two open subsets of M such that $\Omega = U \cap \Gamma_0 = \tilde{U} \cap \Gamma_0$. Then there exists an isomorphism between $Sol(U)$ and $Sol(\tilde{U})$ commuting with the restriction maps.*

Proof. Assume that U and \tilde{U} are distinct and set $V = U \cup \tilde{U}$; of course $\Omega \subset V$. Write $\tilde{U} = V \cup W$ where the open set W is such that there exists an open set $X \subset V$ containing Ω such that $W \cap X = \emptyset$. Let χ_V, χ_W be a partition of unity subordinate to $\tilde{U} = V \cup W$; in particular, $\chi_V(x) = 1$ whenever $x \in X$. One can show that the class $F_{\chi_V}(\psi_k) = [\chi_V \psi_k]$ belongs to $Sol(\tilde{U})$. We claim that the map F_{χ_V} is an isomorphism with the required property. \square

From these two lemmas, we deduce the:

Proposition 5.4.5. *Let U, \tilde{U} be two open subsets of M such that $\Omega = U \cap \Gamma_0 = \tilde{U} \cap \Gamma_0$. Then $\mathfrak{F}_U(\Omega) = \mathfrak{F}_{\tilde{U}}(\Omega)$.*

This allows to define a sheaf $\mathfrak{F} \rightarrow \Gamma_0$, which will be called the sheaf of microlocal solutions over Γ_0 . Let us point out that so far, we have made no assumption on the structure (regularity) of the level Γ_0 .

5.4.3 Regular case

Consider a point $m \in \Gamma_0$ which is regular for the principal symbol f_0 . Then there exists a symplectomorphism χ between a neighbourhood of m in M and a neighbourhood of the origin in \mathbb{R}^2 such that $(f_0 \circ \chi^{-1})(x, \xi) = \xi$. We can quantize this symplectomorphism by means of a Fourier integral operator: there exists an admissible sequence of operators $U_k^{(m)} : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, L_0^k) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M, L^k \otimes K)$ such that

$$\begin{aligned} U_k^{(m)} \left(U_k^{(m)} \right)^* &\sim \Pi_k \quad \text{near } m; \\ \left(U_k^{(m)} \right)^* U_k^{(m)} &\sim \Pi_k^0, \quad \left(U_k^{(m)} \right)^* T_k U_k^{(m)} \sim S_k \quad \text{near } 0, \end{aligned}$$

where S_k is the Toeplitz operator

$$S_k = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(z - \frac{1}{k} \frac{d}{dz} \right).$$

Consider the element Φ_k of $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, L_0^k)$ given by

$$\Phi_k(z) = \exp(kz^2/2) \psi^k(z), \quad \psi(z) = \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right);$$

it satisfies $S_k \Phi_k = 0$. Choosing a suitable cutoff function η and setting $\Phi_k^{(m)} = \Pi_k^0(\eta \Phi_k)$, we obtain an admissible sequence $\Phi_k^{(m)}$ of elements of \mathcal{B}_k microlocally equal to Φ_k near the origin and generating the \mathbb{C}_k -module of microlocal solutions of $S_k u_k = 0$ near the origin.

Proposition 5.4.6. *The \mathbb{C}_k -module of microlocal solutions of equation (5.3) near m is free of rank 1, generated by $U_k^{(m)} \Phi_k^{(m)}$.*

This is a slightly modified version of proposition 3.6 of [20], in which the normal form is achieved on the torus instead of the complex plane.

Thus, if Γ_0 contains only regular points of the principal symbol f_0 , then $\mathfrak{F} \rightarrow \Gamma_0$ is a sheaf of free \mathbb{C}_k -modules of rank 1; in particular, this implies that $\mathfrak{F} \rightarrow \Gamma_0$ is a flat sheaf, thus characterised by its Čech holonomy $\text{hol}_{\mathfrak{F}}$.

5.4.4 Lagrangian sections

In order to compute the holonomy $\text{hol}_{\mathfrak{F}}$, we have to understand the structure of the microlocal solutions. For this purpose, a family of solutions of particular interest is given by Lagrangian sections; let us define these. Consider a curve $\Gamma \subset \Gamma_0$ containing only regular points, and let $j : \Gamma \rightarrow M$ be the embedding of Γ into M . Let U be an open set of M such that $U_\Gamma = j^{-1}(U)$ is contractible; there exists a flat unitary section t_Γ of $j^*L \rightarrow U_\Gamma$. Now, consider a formal series

$$\sum_{\ell \geq 0} \hbar^\ell g_\ell \in \mathcal{C}^\infty(U_\Gamma, j^*K)[[\hbar]].$$

Let V be an open set of M such that $\bar{V} \subset U$. Then a sequence $\Psi_k \in \mathcal{H}_k$ is a *Lagrangian section* associated to (Γ, t_Γ) with symbol $\sum_{\ell \geq 0} \hbar^\ell g_\ell$ if

$$\Psi_k(m) = \left(\frac{k}{2\pi} \right)^{1/4} F^k(m) \tilde{g}(m, k) \text{ over } V,$$

where

- F is a section of $L \rightarrow U$ such that

$$j^* F = t_\Gamma \quad \text{and} \quad \bar{\partial} F = 0$$

- modulo a section vanishing to every order along $j(\Gamma)$, and $|F(m)| < 1$ if $m \notin j(\Gamma)$,
- $\tilde{g}(\cdot, k)$ is a sequence of $\mathcal{C}^\infty(U, K)$ admitting an asymptotic expansion $\sum_{\ell \geq 0} k^{-\ell} \tilde{g}_\ell$ in the \mathcal{C}^∞ topology such that

$$j^* \tilde{g}_\ell = g_\ell \quad \text{and} \quad \bar{\partial} \tilde{g}_\ell = 0$$

modulo a section vanishing at every order along $j(\Gamma)$.

Assume furthermore that Ψ_k is admissible in the sense that $\Psi_k(m)$ is uniformly $O(k^N)$ for some N and the same holds for its successive covariant derivatives. It is possible to construct such a section with given symbol $\sum_{\ell \geq 0} \hbar^\ell g_\ell$ (see [21, part 3]). Furthermore, if Ψ_k is a non-zero Lagrangian section, then the constants $c_k \in \mathbb{C}_k$ such that $c_k \Psi_k$ is still a Lagrangian section are the elements of the form

$$c_k = \rho(k) \exp(ik\phi(k)) + O(k^{-\infty}) \quad (5.4)$$

where $\rho(k), \phi(k) \in \mathbb{R}$ admit asymptotic expansions of the form $\rho(k) = \sum_{\ell \geq 0} k^{-\ell} \rho_\ell$, $\phi(k) = \sum_{\ell \geq 0} k^{-\ell} \phi_\ell$.

Lagrangian sections are important because they provide a way to construct microlocal solutions. Indeed, if Ψ_k is a Lagrangian section over V associated to (Γ, t_Γ) with symbol $\sum_{\ell \geq 0} \hbar^\ell g_\ell$, then $T_k \Psi_k$ is also a Lagrangian section over V associated to (Γ, t_Γ) , and one can in principle compute the elements \hat{g}_ℓ , $\ell \geq 0$ of the formal expansion of its symbol as a function of the g_ℓ , $\ell \geq 0$ (by means of a stationary phase expansion). This allows to solve equation (5.3) by prescribing the symbol of Ψ_k so that for every $\ell \geq 0$, \hat{g}_ℓ vanishes. Let us detail this for the two first terms.

Introduce a *half-form bundle* (δ, φ) , that is a line bundle $\delta \rightarrow M$ together with an isomorphism of line bundles $\varphi : \delta^2 \rightarrow \Lambda^{2,0} T^* M$. Since the first Chern class of M is even, such a couple exists. Introduce the Hermitian holomorphic line bundle L_1 such that $K = L_1 \otimes \delta$. Define the *subprincipal form* κ as the 1-form on Γ such that

$$\kappa(X_{f_0}) = -f_1$$

where X_{f_0} stands for the Hamiltonian vector field associated to f_0 . Introduce the connection ∇^1 on $j^* L_1 \rightarrow \Gamma$ defined by

$$\nabla^1 = \nabla^{j^* L_1} + \frac{1}{i} \kappa,$$

with $\nabla^{j^*L_1}$ the connection induced by the Chern connection of L_1 on j^*L_1 . Let δ_Γ be the restriction of δ to Γ ; the map

$$\varphi_\Gamma : \delta_\Gamma^2 \rightarrow T^*\Gamma \otimes \mathbb{C}, \quad u \mapsto j^*\varphi(u)$$

is an isomorphism of line bundles. Define a connection ∇^{δ_Γ} on δ_Γ by

$$\nabla_X^{\delta_\Gamma} \sigma = \mathcal{L}_X^{\delta_\Gamma} \sigma,$$

where $\mathcal{L}_X^{\delta_\Gamma}$ is the first-order differential operator acting on sections of δ_Γ such that

$$\varphi_\Gamma \left(\mathcal{L}_X^{\delta_\Gamma} g \otimes g \right) = \frac{1}{2} \mathcal{L}_X \varphi_\Gamma \left(g^{\otimes 2} \right)$$

for every section g ; here, \mathcal{L} stands for the standard Lie derivative of forms.

Then $T_k \Psi_k$ is a Lagrangian section over V associated to t_Γ with symbol $(j^*f_0)g_0 + O(\hbar) = O(\hbar)$, so Ψ_k satisfies equation (5.3) up to order $O(k^{-1})$. Moreover, the subprincipal symbol of $T_k \Psi_k$ is

$$(j^*f_1)g_0 + \frac{1}{i} \left(\nabla_{X_{f_0}}^{j^*L_1} \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes \mathcal{L}_{X_{f_0}}^{\delta_\Gamma} \right) g_0.$$

Consequently, equation (5.3) is satisfied by Ψ_k up to order $O(k^{-2})$ if and only if

$$\left(f_1 + \frac{1}{i} \left(\nabla_{X_{f_0}}^{j^*L_1} \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes \mathcal{L}_{X_{f_0}}^{\delta_\Gamma} \right) \right) g_0 = 0 \quad \text{over } V \cap \Gamma. \quad (5.5)$$

This can be interpreted as a parallel transport equation: if we endow the bundle $j^*L_1 \otimes \delta_\Gamma$ with the connection induced from ∇^1 and ∇^{δ_Γ} , equation (5.5) means that g_0 is flat.

5.4.5 Holonomy

We now assume that Γ_0 is connected (otherwise, one can consider connected components of Γ_0) and contains only regular points; it is then a smooth closed curve embedded in M . We would like to compute the holonomy of the sheaf $\mathfrak{F} \rightarrow \Gamma_0$.

Proposition 5.4.7. *The holonomy $\text{hol}_{\mathfrak{F}}(\Gamma_0)$ is of the form*

$$\text{hol}_{\mathfrak{F}}(\Gamma_0) = \exp(ik\Theta(k)) + O(k^{-\infty}) \quad (5.6)$$

where $\Theta(k)$ is real-valued and admits an asymptotic expansion of the form $\Theta(k) \sim \sum_{\ell \geq 0} k^{-\ell} \Theta_\ell$.

In particular, this means that if we consider another set of solutions to compute the holonomy, we only have to keep track of the phases of the transition constants.

Proof. Cover Γ_0 by a finite number of open subsets Ω_α in which the normal form introduced before proposition 5.4.6 applies, and let U_k^α and Φ_k^α be as in this proposition. We obtain a family u_k^α of microlocal solutions; observe that for each α , u_k^α is a Lagrangian section

associated to Γ . Hence, if $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$ is non-empty, the unique (modulo $O(k^{-\infty})$) constant $c_k^{\alpha\beta} \in \mathbb{C}_k$ such that $u_k^\alpha = c_k^{\alpha\beta} u_k^\beta$ on $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$ is of the form given in equation (5.4):

$$c_k^{\alpha\beta} = \rho^{\alpha\beta}(k) \exp(ik\phi^{\alpha\beta}(k)) + O(k^{-\infty}).$$

But if m belongs to $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$, then near m we have $u_k^\alpha \sim U_k^\alpha \Phi_k^{(m)}$ and $u_k^\beta \sim U_k^\beta \Phi_k^{(m)}$ where $\Phi_k^{(m)}$ is an admissible sequence of elements of \mathcal{B}_k microlocally equal to Φ_k near the origin. Therefore, we have

$$c_k^{\alpha\beta} \Phi_k^{(m)} = (U_k^\beta)^{-1} U_k^\alpha \Phi_k^{(m)} + O(k^{-\infty}),$$

and the fact that the operators U_k^α, U_k^β are microlocally unitary yields $|c_k^{\alpha\beta}|^2 = 1 + O(k^{-\infty})$. This implies that for $\ell \geq 1$, $\rho_\ell = 0$, which gives the result. \square

Let us be more specific and compute the first terms of this asymptotic expansion. Consider a finite cover $(\Omega_\alpha)_\alpha$ of Γ_0 by contractible open subsets and endow each Ω_α with a non-trivial microlocal solution Ψ_k^α which is a Lagrangian section. Choose a flat unitary section t_α of the line bundle $j^*L \rightarrow j^{-1}(\Omega_\alpha)$ and write, for $m \in \Omega_\alpha$:

$$\Psi_k^\alpha(m) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{1/4} g_\alpha(m, k) t_\alpha^k(m)$$

where the section $g_\alpha(\cdot, k)$ of $j^*K \rightarrow \Omega_\alpha$ is the symbol of Ψ_k^α , whose principal symbol will be denoted by $g_\alpha^{(0)}$. Now, assume that $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta \neq \emptyset$; there exists a unique (up to $O(k^{-\infty})$) $c_k^{\alpha\beta} \in \mathbb{C}_k$ such that $\Psi_k^\alpha \sim c_k^{\alpha\beta} \Psi_k^\beta$ on $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$.

Definition 5.4.8. Let $A, B \in M$ and γ be a piecewise smooth curve joining A and B ; denote by $P_{A,B,\gamma} : L_A \rightarrow L_B$ the linear isomorphism given by parallel transport from A to B along γ . Given two sections s, t of $L \rightarrow M$, define the *phase difference* between $s(A)$ and $t(B)$ along γ as the number

$$(\Phi_s(A) - \Phi_t(B))_\gamma = \arg(\lambda_{A,B,\gamma}) - c_0([A, B]) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},$$

where $\lambda_{A,B,\gamma}$ is the unique complex number such that the equality $P_{A,B,\gamma}(s(A)) = \lambda_{A,B,\gamma} t(B)$ holds and $c_0([A, B])$ is the (phase of the) holonomy of γ in (L, ∇) . Define in the same way the phase difference for two sections of $K \rightarrow M$, using the Chern connection of K .

Now, consider three points $A, B, C \in M$ and let γ_1 (resp. γ_2) be a piecewise smooth curve joining A and B (resp. B and C). Let γ be the concatenation of γ_1 and γ_2 . It is easily checked that

$$(\Phi_s(A) - \Phi_t(B))_{\gamma_1} + (\Phi_t(B) - \Phi_u(C))_{\gamma_2} = (\Phi_s(A) - \Phi_u(C))_\gamma$$

for three sections s, t, u of L . Furthermore, if γ is a closed curve and A is a point on γ , then the phase difference between $s(A)$ and $s(A)$ along γ is

$$(\Phi_s(A) - \Phi_s(A))_\gamma = 0$$

by definition of the holonomy c_0 . This is why we write this number as a difference.

Coming back to our problem, denote by $\Phi_\alpha^{(-1)}(A) - \Phi_\beta^{(-1)}(B)$ the phase difference between $t_\alpha(A)$ and $t_\beta(B)$ along Γ_0 in L , and by $\Phi_\alpha^{(0)}(A) - \Phi_\beta^{(0)}(B)$ the phase difference between $g_\alpha^{(0)}(A)$ and $g_\beta^{(0)}(B)$ along Γ_0 in K . Let ζ be the path in Γ_0 starting at a point $A \in \Omega_\alpha$ and ending at $B \in \Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$. Since t_α is flat and the principal symbol g_0 of Ψ_k^α satisfies equation (5.5), we have

$$\begin{aligned} \arg\left(c_k^{\alpha\beta}\right) &= k\left(c_0(\zeta) + \Phi_\alpha^{(-1)}(A) - \Phi_\beta^{(-1)}(B)\right) \\ &+ c_1(\zeta) + \text{hol}_{\delta_{\Gamma_0}}(\zeta) + \Phi_\alpha^{(0)}(A) - \Phi_\beta^{(0)}(B) + O(k^{-1}). \end{aligned}$$

Thanks to the discussion above, we know that the term

$$k\left(\Phi_\alpha^{(-1)}(A) - \Phi_\beta^{(-1)}(B)\right) + \Phi_\alpha^{(0)}(A) - \Phi_\beta^{(0)}(B)$$

is a Čech coboundary. Let us call $c_1(\Gamma_0)$ the holonomy of Γ_0 in (L_1, ∇^1) . One can check that $\nabla^{\delta_{\Gamma_0}}$ has holonomy in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, represented by $\epsilon(\Gamma_0) \in \{0, 1\}$. We obtain:

Proposition 5.4.9. *The first two terms of the asymptotic expansion of the quantity $\Theta(k)$ defined in proposition 5.4.7 are given by*

$$\Theta_0 = c_0(\Gamma_0)$$

and

$$\Theta_1 = c_1(\Gamma_0) + \epsilon(\Gamma_0)\pi.$$

Since one can construct a non-trivial microlocal solution over Γ_0 if and only if $\Theta(k) \in 2\pi\mathbb{Z}$, we recover the usual Bohr-Sommerfeld conditions.

Let us give another interpretation of the index ϵ . Consider a smooth closed curve γ immersed in M . Denote by $\iota : \gamma \rightarrow M$ this immersion, and by $\delta_\gamma = \iota^*\delta$ the pullback bundle over γ . Let $\tilde{\iota} : \delta_\gamma \rightarrow \delta$ be the natural lift of ι , and define $\tilde{\iota}^2 : \delta_\gamma^2 \rightarrow \delta^2$ by the formula $\tilde{\iota}^2(u \otimes v) = \tilde{\iota}(u) \otimes \tilde{\iota}(v)$. The map

$$\varphi_\gamma : \delta_\gamma^2 \rightarrow T^*\gamma \otimes \mathbb{C}, \quad u \mapsto \iota^*\varphi(\tilde{\iota}^2(u))$$

is an isomorphism of line bundles. The set

$$\left\{u \in \delta_\gamma; \varphi_\gamma(u^{\otimes 2}) > 0\right\}$$

has one or two connected components. In the first case, we set $\epsilon(\gamma) = 1$, and in the second case $\epsilon(\gamma) = 0$. One can check that this definition coincides with the one above when γ is a smooth embedded closed curve. Notice that the value of $\epsilon(\gamma)$ only depends on the isotopy class of γ in M .

5.4.6 Spectral parameter dependence

For spectral analysis, one has to do the same study as above replacing the operator T_k with $T_k - E$; then it is natural to ask if the previous study can be done taking into account the dependence on the spectral parameter E .

Assume that there exists a tubular neighbourhood Ω of Γ such that for E close enough to 0, the intersection $\Gamma_E \cap \Omega$ is regular. Then we can construct microlocal solutions of $(T_k - E)u_k = 0$ as Lagrangian sections depending smoothly on a parameter (see [20, section 2.6]); these solutions are uniform in E . We can then define all the previous objects with smooth dependence in E . Proceeding this way, we obtain the parameter dependent Bohr-Sommerfeld conditions, that we describe below.

Let I be an interval of regular values of the principal symbol f_0 of the operator. For $E \in I$, denote by $\mathcal{C}_j(E)$, $1 \leq j \leq N$, the connected components of $f_0^{-1}(E)$ in such a way that $E \mapsto \mathcal{C}_j(E)$ is smooth. Observe that $\mathcal{C}_j(E)$ is a smooth embedded closed curve, endowed with the orientation depending continuously on E given by the Hamiltonian flow of f_0 . Define the *principal action* $c_0^{(j)} \in \mathcal{C}^\infty(I)$ in such a way that the parallel transport in L along $\mathcal{C}_j(E)$ is the multiplication by $\exp(ic_0^{(j)}(E))$. Define the *subprincipal action* $c_1^{(j)}$ in the same way, replacing L by L_1 and using the connection ∇^1 (depending on E) described above. Finally, set $\epsilon_E^{(j)} = \epsilon(\mathcal{C}_j(E))$; in fact, $\epsilon_E^{(j)}$ is a constant $\epsilon_E^{(j)} = \epsilon^{(j)}$ for E in I . The Bohr-Sommerfeld conditions (see [21] for more details) state that there exists $\eta > 0$ such that the intersection of the spectrum of T_k with $[E - \eta, E + \eta]$ modulo $O(k^{-\infty})$ is the union of the spectra σ_j , $1 \leq j \leq N$, where the elements of σ_j are the solutions of

$$g^{(j)}(\lambda, k) \in 2\pi k^{-1}\mathbb{Z}$$

where $g^{(j)}(\cdot, k)$ is a sequence of functions of $\mathcal{C}^\infty(I)$ admitting an asymptotic expansion

$$g^{(j)}(\cdot, k) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} k^{-\ell} g_\ell^{(j)}$$

with coefficients $g_\ell^{(j)} \in \mathcal{C}^\infty(I)$. Furthermore, one has

$$g_0^{(j)}(\lambda) = c_0^{(j)}(\lambda) \text{ and } g_1^{(j)}(\lambda) = c_1^{(j)}(\lambda) + \epsilon^{(j)}\pi.$$

5.5 Microlocal normal form

5.5.1 Normal form on the Bargmann side

Let P_k be the operator defined by $P_k = \frac{i}{2} \left(z^2 - \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$ with domain $\mathbb{C}[z] \subset \mathcal{B}_k$; it is a Toeplitz operator with normalized symbol $p_0(x, \xi) = x\xi$. We will use this operator to understand the behaviour of A_k near each s_j , $1 \leq j \leq n$. More precisely, we study the operator $A_k - E$, where $E \in \mathbb{R}$ is allowed to vary in a neighbourhood of zero.

Let $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. The isochore Morse lemma [36] yields a symplectomorphism χ_E from a neighbourhood of s_j in M to a neighbourhood of the origin in \mathbb{R}^2 , depending smoothly

on E , and a smooth function g_j^E , again depending smoothly on E , such that

$$((a_0 - E) \circ \chi_E^{-1})(x, \xi) = g_j^E(x\xi)$$

and $(g_j^E)'(0) \neq 0$. Using a Taylor formula, one can write

$$g_j^E(t) = w_j^E(t) (t - f_j(E))$$

with w_j^E smooth, depending smoothly on E , and such that $w_j^E(0) \neq 0$, and f_j a smooth function of E . This symplectic normal form can be quantized to the following semiclassical normal form.

Proposition 5.5.1. *Fix $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. There exist a smooth function f_j , a Fourier integral operator $U_k^E : \mathcal{B}_k \rightarrow \mathcal{H}_k$, a Toeplitz operator W_k^E elliptic at 0 and a sequence of smooth functions $\varepsilon_j(\cdot, k)$ admitting an asymptotic expansion $\varepsilon_j(E, k) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} k^{-\ell} \varepsilon_j^{(\ell)}(E)$ such that*

$$(U_k^E)^*(A_k - E)U_k^E \sim W_k^E \left(P_k - f_j(E) - k^{-1} \varepsilon_j(E, k) \right)$$

microlocally near s_j . Furthermore,

- U_k and W_k depend smoothly on E ,
- $f_j(E)$ is the value of $x\xi$ whenever $(x, \xi) = \chi_E(m)$ for $m \in \Gamma_E$,
- and the first term of the asymptotic expansion of $\varepsilon_j(0, k)$ is given by

$$\varepsilon_j^{(0)}(0) = \frac{-a_1(s_j)}{|\det(\text{Hess}(a_0)(s_j))|^{1/2}},$$

where $\text{Hess}(a_0)(s_j)$ is the Hessian of a_0 at s_j .

The proof is an adaptation of the one in [33, section 3] to the Toeplitz setting; see also [72] for a similar result in the elliptic case.

5.5.2 Link with the pseudodifferential setting

Now, we use the Bargmann transform to understand the structure of the space of microlocal solutions of $P_k - E = 0$.

Lemma 5.5.2. *For $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, one has*

$$B_k^* P_k B_k u = \frac{1}{ik} (x\partial_x + 1) u.$$

From now on, we will denote by S_k the pseudodifferential operator $\frac{1}{ik} (x\partial_x + 1)$. This correspondence will allow us to understand the space of microlocal solutions of $P_k - E$ on a neighbourhood of the origin. Let us recall the results of [33, 34] that will be useful to our study.

Proposition 5.5.3 ([33, proposition 3]). *Let E be such that $|E| < 1$. The space of microlocal solutions of $(S_k - E)u_k = 0$ on $Q = [-1, 1]^2$ is a free \mathbb{C}_k -module of rank 2.*

Moreover, we know two bases of this module. Indeed, the tempered distributions $v_{k,E}^{(j)}$, $j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ defined as:

$$\begin{aligned} v_{k,E}^{(1),(2)}(x) &= \mathbf{1}_{\mathbb{R}^{\pm*}}(x) \exp\left(\left(-\frac{1}{2} + ikE\right) \ln(|x|)\right), \\ \hat{v}_{k,E}^{(3),(4)}(\xi) &= \mathbf{1}_{\mathbb{R}^{\pm*}}(\xi) \exp\left(\left(-\frac{1}{2} + ikE\right) \ln(|\xi|)\right). \end{aligned}$$

are exact solutions of the equation $(S_k - E)v_{k,E}^{(j)} = 0$; better than that, the couple $(v_{k,E}^{(1)}, v_{k,E}^{(2)})$ (resp. $(v_{k,E}^{(3)}, v_{k,E}^{(4)})$) forms a basis of the space of solutions of this equation. Now, choose a compactly supported function $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ with constant value 1 on I and vanishing outside $2I$. Define the pseudodifferential operator Π_Q by

$$\Pi_Q u(x) = \frac{k}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \exp(ik(x-y)\xi) \chi(\xi) \chi(y) u(y) dy d\xi.$$

Then Π_Q maps $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ into $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, and $\Pi_Q \sim \text{Id}$ on Q . Set

$$w_{k,E}^{(j)} = \Pi_Q v_{k,E}^{(j)};$$

then the $w_{k,E}^{(j)}$, $j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, belong to $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, and are microlocal solutions of $(S_k - E)w_{k,E}^{(j)} = 0$ on Q . The matrix of the change of basis from $(w_{k,E}^{(3)}, w_{k,E}^{(4)})$ to $(w_{k,E}^{(1)}, w_{k,E}^{(2)})$ is given by

$$M_k = \mu_k(E) \begin{pmatrix} 1 & -i \exp(-i\pi kE) \\ -i \exp(-i\pi kE) & 1 \end{pmatrix} + O(k^{-\infty}) \quad (5.7)$$

with

$$\mu_k(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - ikE\right) \exp\left(\frac{\pi}{4} (2kE + i) - ikE \ln(k)\right).$$

5.5.3 Microlocal solutions of $(P_k - E)u_k = 0$

Now, consider the Bargmann transforms of the sequences $w_{k,E}^{(j)}$: $u_{k,E}^{(j)} = B_k w_{k,E}^{(j)}$. Propositions 5.5.3 and 5.3.5 yield the:

Proposition 5.5.4. *For E such that $|E| < 1$, the space of microlocal solutions of $(P_k - E)u_k = 0$ on $Q = [-1, 1]^2 \subset \mathbb{C}$ is a free \mathbb{C}_k -module of rank 2. Moreover, the couples $(u_{k,E}^{(1)}, u_{k,E}^{(2)})$ and $(u_{k,E}^{(3)}, u_{k,E}^{(4)})$ are two bases of this module; the transfer matrix is given by equation (5.7).*

Remark. The sections $u_{k,E}^{(j)}$, $j = 1, \dots, 4$, can be written in terms of parabolic cylinder functions. In the article [79], Nonnenmacher and Voros studied these functions in order to understand the behaviour of the generalized eigenfunctions of P_k ; the result of this subtle analysis, based on Stokes lines techniques, was not exactly what we needed here, and this is partly why we chose to use the microlocal properties of the Bargmann transform instead.

5.6 Bohr-Sommerfeld conditions

To obtain the Bohr-Sommerfeld conditions, we will recall the reasoning of Colin de Verdière and Parisse [35], and will also refer to the work of Colin de Verdière and Vũ Ngọc [37]. Since the general approach is the same, we only recall the main ideas and focus on what differs in the Toeplitz setting.

5.6.1 The sheaf of standard basis

As in section 5.4, introduce the sheaf (\mathfrak{F}, Γ_0) of microlocal solutions of $A_k \psi_k = 0$ over Γ_0 ; we recall that a global non-trivial microlocal solution corresponds to a global non-trivial section of this sheaf. However, since the topology of Γ_0 is much more complicated than in the regular case, the condition for the existence of such a section is not as simple as saying that a holonomy must be trivial. In particular, we have to handle what happens at critical points. To overcome this difficulty, the idea is to introduce a new sheaf over Γ_0 that will contain all the information we need to construct a global non-trivial microlocal solution; roughly speaking, this new sheaf can be thought of as the limit of the sheaf $\mathfrak{F} \rightarrow \Gamma_E$ of microlocal solutions over regular levels as E goes to 0.

Following Colin de Verdière and Parisse [35], we introduce a sheaf (\mathfrak{L}, Γ_0) of free \mathbb{C}_k -modules of rank one over Γ_0 as follows: to each point $m \in \Gamma_0$, associate the free module $\mathfrak{L}(m)$ generated by *standard basis* at m . If m is a regular point, a standard basis is any basis of the space of microlocal solutions near m . At a critical point s_j , we define a standard basis in the following way. The \mathbb{C}_k -module of microlocal solutions near s_j is free of rank 2; moreover, it is the graph of a linear application. Indeed, number the four local edges near s_j with cyclic order 1, 3, 2, 4, so that the edges e_1, e_2 are the ones that leave s_j . Let us denote by $\text{Sol}(e_1 e_2)$ (resp. $\text{Sol}(e_3 e_4)$) the module of microlocal solutions over the disjoint union of the local unstable (resp. stable) edges e_1, e_2 (resp. e_3, e_4). $\text{Sol}(e_1 e_2)$ and $\text{Sol}(e_3 e_4)$ are free modules of rank 2, and there exists a linear map $T_j : \text{Sol}(e_3 e_4) \rightarrow \text{Sol}(e_1 e_2)$ such that u is a solution near s_j if and only if its restrictions satisfy $u|_{\text{Sol}(e_1 e_2)} = T_j u|_{\text{Sol}(e_3 e_4)}$. Equivalently, given two solutions on the entering edges, there is a unique way to obtain two solutions on the leaving edges by passing the singularity. One can choose a basis element for each $\mathfrak{F}(e_i)$, $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, and express T_j as a 2×2 matrix (defined modulo $O(k^{-\infty})$); one can show that the entries of this matrix are all non-vanishing. An argument of elementary linear algebra shows that once the matrix T_j is chosen, the basis elements of the modules $\mathfrak{F}(e_i)$ are fixed up to multiplication by the same factor. Moreover, we saw that there exists a choice of basis elements such that T_j has the following expression:

$$T_j = \exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right) \mathcal{E}_k(\varepsilon_j(0, k)) \begin{pmatrix} 1 & i \exp(-\pi \varepsilon_j(0, k)) \\ i \exp(-\pi \varepsilon_j(0, k)) & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

where

$$\mathcal{E}_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2} + it\right) \exp\left(t\left(\frac{\pi}{2} - i \ln k\right)\right). \quad (5.9)$$

This allows us to call the choice of the basis elements of $\mathfrak{F}(e_i)$ a standard basis whenever T_j is given by equation (5.8).

(\mathcal{L}, Γ_0) is a locally free sheaf of rank one \mathbb{C}_k -modules, and its transition functions are constants. Hence, it is flat, thus characterised by its holonomy

$$\text{hol}_{\mathcal{L}} : H_1(\Gamma_0) \rightarrow \mathbb{C}_k.$$

In terms of Čech cohomology, if γ is a cycle in Γ_0 , and $\Omega_1, \dots, \Omega_\ell$ is an ordered sequence of open sets covering the image of γ , each Ω_i being equipped with a standard basis u_i , then

$$\text{hol}_{\mathcal{L}}(\gamma) = x_{1,2} \dots x_{\ell-1,\ell} x_{\ell,1}, \quad (5.10)$$

where $x_{i,j} \in \mathbb{C}_h$ is such that $u_i = x_{i,j} u_j$ on $\Omega_i \cap \Omega_j$.

Now, cut $n+1$ edges of Γ_0 , each one corresponding to a cycle γ_i in a basis $(\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1})$ of $H_1(\Gamma_0, \mathbb{Z})$, in such a way that the remaining graph is a tree T . Then the sheaf (\mathcal{L}, T) has a non-trivial global section. The conditions to obtain a non-trivial global section of the sheaf (\mathfrak{F}, Γ_0) of microlocal solutions on Γ_0 are given in the following theorem. They were already present in the work of Colin de Verdière and Parisse in the case of pseudodifferential operators, but the fact that they extend to our setting is a consequence of the results obtained in the previous sections.

Theorem 5.6.1. *The sheaf (\mathfrak{F}, Γ_0) has a non-trivial global section if and only if the following linear system of $3n+1$ equations with $3n+1$ unknowns $(x_\alpha \in \mathbb{C}_k)_{\alpha \in \{\text{edges of } T\}}$ has a non-trivial solution:*

1. *if the edges $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ connect at s_j (with the same convention as before for the labeling of the edges), then*

$$\begin{pmatrix} x_{\alpha_3} \\ x_{\alpha_4} \end{pmatrix} = T_j \begin{pmatrix} x_{\alpha_1} \\ x_{\alpha_2} \end{pmatrix}$$

2. *if α and β are the extremities of a cut cycle γ_i , then*

$$x_\alpha = \text{hol}_{\mathcal{L}}(\gamma_i) x_\beta,$$

where the following orientation is assumed: γ_i can be represented as a closed path starting on the edge α and ending on the edge β .

Proof. It follows from propositions 5.4.6 and 5.5.4 that the proof can be directly adapted from the one of [37, theorem 2.7]. \square

5.6.2 Singular invariants

Of course, in order to use this result, it remains to compute the holonomy $\text{hol}_{\mathcal{L}}$. For this purpose, let us introduce some geometric quantities close from the ones used to express the regular Bohr-Sommerfeld conditions. Let γ be a cycle in Γ_0 , and denote by s_{j_m} , $m = 1, \dots, p$ the critical points contained in γ .

Definition 5.6.2 (singular subprincipal action). Decompose γ as a concatenation of smooth paths and paths containing exactly one critical point; if A and B are the ordered endpoints of a path, we will call it $[A, B]$. Define the subprincipal action $\tilde{c}_1(\gamma)$ as the sum of the contributions of these paths, given by the following rules:

- if $[A, B]$ contains only regular points, its contribution to the singular subprincipal action is

$$\tilde{c}_1([A, B]) = c_1([A, B])$$

as in the regular case,

- if $[A, B]$ contains the singular point s and is smooth at s , then

$$\tilde{c}_1([A, B]) = \lim_{a, b \rightarrow s} (c_1([A, a]) + c_1([b, B]))$$

where a (resp. b) lies on the same branch as A (resp. B),

- if $[A, B]$ contains the singular point s and is not smooth at s , we set

$$\tilde{c}_1([A, B]) = \lim_{a, b \rightarrow s} \left(c_1([A, a]) + c_1([b, B]) \pm \varepsilon_s^{(0)} \ln \left| \int_{P_{a,b}} \omega \right| \right) \quad (5.11)$$

where $P_{a,b}$ is the parallelogram (defined in any coordinate system) built on the vectors \vec{sa} and \vec{sb} , $\pm = +$ if $[A, B]$ is oriented according to the flow of X_{a_0} , $\pm = -$ otherwise and

$$\varepsilon_s^{(0)} = \frac{-a_1(s)}{|\det(\text{Hess}(a_0)(s))|^{1/2}}$$

as before.

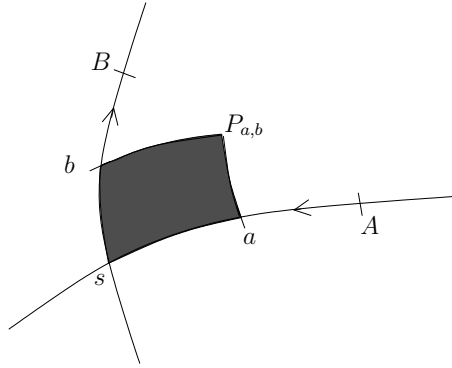


Figure 5.1: Computation of $\tilde{c}_1([A, B])$.

Definition 5.6.3 (singular index). Let $(\gamma_t)_t$ be a continuous family of immersed closed curves such that $\gamma_0 = \gamma$ and γ_t is smooth for $t > 0$. Then the function $t \mapsto \epsilon(\gamma_t)$, $t > 0$, is constant; we denote by ϵ its value. We define the singular index $\tilde{\epsilon}(\gamma)$ by setting

$$\tilde{\epsilon}(\gamma) = \epsilon + \sum_{m=1}^p \frac{\rho_m}{4} \quad (5.12)$$

where $\rho_m = 0$ if γ is smooth at s_{j_m} , $\rho_m = +1$ if at s_{j_m} , γ turns in the direct sense with respect to the cyclic order $(1, 3, 2, 4)$ of the local edges, and $\rho_m = -1$ otherwise.

Observe that both \tilde{c}_1 and $\tilde{\epsilon}$ define \mathbb{Z} -linear maps on $H_1(\Gamma_0, \mathbb{Z})$.

Theorem 5.6.4. *Let γ be a cycle in Γ_0 . Then the holonomy $\text{hol}_{\mathfrak{L}}(\gamma)$ of γ in \mathfrak{L} has the form*

$$\text{hol}_{\mathfrak{L}}(\gamma) = \exp(ik\theta(\gamma, k)) \quad (5.13)$$

where $\theta(\gamma, k)$ admits an asymptotic expansion in non-positive powers of k . Moreover, if we denote by $\theta(\gamma, k) = \sum_{\ell \geq 0} k^{-\ell} \theta_{\ell}(\gamma)$ this expansion, the first two terms are given by the formulas:

$$\theta_0(\gamma) = c_0(\gamma), \quad \theta_1(\gamma) = \tilde{c}_1(\gamma) + \tilde{\epsilon}(\gamma)\pi. \quad (5.14)$$

Proof. We just prove here that the holonomy has the claimed behaviour. It is enough to show that one can choose a finite open cover $(\Omega_{\alpha})_{\alpha}$ of γ and a section u_k^{α} of $\mathfrak{L} \rightarrow \Omega_{\alpha}$ for which the transition constants $c_k^{\alpha\beta}$ have the required form. On the edges of γ , this follows from the analysis of section 5.4. At a vertex, we choose the standard basis $U_k^0 u_{k, \varepsilon_j(0, k)}^{(j)}$, where $u_{k, E}^{(j)}$ is defined in section 5.5.3 and U_k^E is the operator of proposition 5.5.1; to conclude, we observe that the restrictions of these sections to the corresponding edge are Lagrangian sections. \square

5.6.3 Computation of the singular holonomy

This section is devoted to the proof of the second part of theorem 5.6.4. We use the method of [37], but of course, our case is simpler, because in the latter, the authors investigated the case of singularities in (real) dimension 4 (for pseudodifferential operators). Let us work on microlocal solutions of the equation

$$(A_k - E)u_k = 0 \quad (5.15)$$

where E varies in a small connected interval I containing the critical value 0. The critical value separates I into two open sets I^+ and I^- , with the convention $I^{\pm} = I \cap \{\pm a_0 > 0\}$. Let $D^{\pm} = I^{\pm} \cup \{0\}$, and let \mathfrak{C}^{\pm} be the set of connected components of the open set $a_0^{-1}(I^{\pm})$. The smooth family of circles in the component p^{\pm} is denoted by $\mathcal{C}_{p^{\pm}}(E)$, $E \in I^{\pm}$.

As in section 5.4, for $E \neq 0$, we denote by (\mathfrak{F}, Γ_E) the sheaf of microlocal solutions of (5.15) on Γ_E ; remember that it is a flat sheaf of rank 1 \mathbb{C}_k -modules, characterised by its Čech holonomy $\text{hol}_{\mathfrak{F}}$. The idea is to let E go to 0 and compare this holonomy to the holonomy of the sheaf $\mathfrak{L} \rightarrow \Gamma_0$.

Definition 5.6.5. Near each critical point s_j , consider two families of points $A_j(E)$ and $B_j(E)$ in $\mathcal{C}^{\infty}(D^{\pm}, \bar{p}^{\pm} \setminus \{s_j\})$ lying on $\mathcal{C}_{p^{\pm}}(E)$ and such that $A_j(0)$ and $B_j(0)$ lie respectively in the stable or unstable manifold. Endow a small neighbourhood of A_j (resp. B_j) with a microlocal solution u_{A_j} (resp. u_{B_j}) of (5.15) which is a Lagrangian section uniform in $E \in D^{\pm}$. Define the quantity $\Theta([A_j(E), B_{j'}(E)], k)$ as the phase of the Čech holonomy of the path $[A_j(E), B_{j'}(E)]$ joining $A_j(E)$ and $B_{j'}(E)$ in the sheaf (\mathfrak{F}, Γ_E) computed with respect to u_{A_j} and $u_{B_{j'}}$.

Note that if we change the sections u_{A_j} and $u_{B_{j'}}$, the phase of the holonomy is modified by an additive term admitting an asymptotic expansion in $k\mathcal{C}^\infty(D^\pm)[[k^{-1}]]$. The singular behaviour of the holonomy is thus preserved; moreover, the added term is a Čech coboundary, and hence does not change the value of the holonomy along a closed path.

Then, we consider continuous families of paths $(\zeta_E)_{E \in D^\pm}$ drawn on a circle $\mathcal{C}_{p^\pm}(E)$ and whose endpoints are some of the $A_j(E)$ and $B_{j'}(E)$ of the previous definition. We say that ζ_E is

- *regular* if ζ_0 does not contain any of the critical points s_j ,
- *local* if ζ_0 contains exactly one critical point,

and we consider only these two types of paths. We write $\zeta_E = [A_j(E), B_{j'}(E)]$. The following proposition implies that a path that is local in the above sense can always be assumed to be local in the sense that it is included in a small neighbourhood of the critical point that it contains.

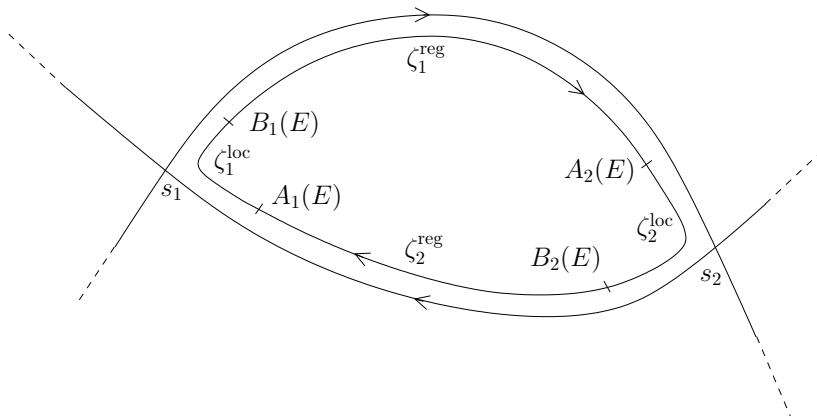


Figure 5.2: Regular and local paths.

Proposition 5.6.6. *If $\zeta_E = [B_j(E), A_{j'}(E)]$ is a regular path, then the map $E \mapsto \Theta(\zeta_E, k)$ belongs to $\mathcal{C}^\infty(D^\pm)$ and admits an asymptotic expansion in $k\mathcal{C}^\infty(D^\pm)[[k^{-1}]]$. This expansion starts as follows:*

$$\begin{aligned} \Theta(\zeta_E, k) &= k \left(c_0(\zeta_E) + \Phi_{B_j(E)}^{(-1)}(B_j(E)) - \Phi_{A_{j'}(E)}^{(-1)}(A_{j'}(E)) \right) \\ &+ c_1(\zeta_E) + \text{hol}_{\delta_{\zeta_E}}(\zeta_E) + \Phi_{B_j(E)}^{(0)}(B_j(E)) - \Phi_{A_{j'}(E)}^{(0)}(A_{j'}(E)) + O(k^{-1}); \end{aligned} \quad (5.16)$$

see section 5.4.5 for the notations.

In order to study the behaviour of the holonomy of a local path with respect to E , we use the parameter dependent normal form given by proposition 5.5.1. Using the notations of this proposition, we will write $\epsilon_j(E, k) = f_j(E) + k^{-1}\epsilon_j(E, k)$. Introduce the Bargmann

transform $w_{k,E}^i$ of $v_{k,E}^i$, where

$$v_{k,E}^{1,2}(x) = 1_{\pm x > 0} |x|^{-1/2} \exp(ik\epsilon_j(E, k) \ln |x|);$$

$$v_{k,E}^{3,4}(\xi) = \mathcal{F}_k^{-1} \left(1_{\pm \xi > 0} |\xi|^{-1/2} \exp(ik\epsilon_j(E, k) \ln |\xi|) \right).$$

Let $\tilde{w}_{k,E}^i$ be a sequence having microsupport in a sufficiently small neighbourhood of the origin and microlocally equal to $w_{k,E}^i$ on it; then $\tilde{w}_{k,E}^i$ is a basis of the module of microlocal solutions of $P_k - \epsilon_j(E, k)$ near the image of the edge with label i by the symplectomorphism χ_E . Consequently, the section $\phi_{k,E}^{(i)} = U_k^E \tilde{w}_{k,E}^i$, where U_k^E is the operator used for the normal form, is a basis of the module of microlocal solutions of equation (5.15) near the edge e_i . Moreover, it displays a good behaviour with respect to the spectral parameter.

Lemma 5.6.7. *The restriction of $\phi_{k,E}^{(i)}$ to a neighbourhood of the edge number i is a Lagrangian section uniformly for $E \in D^\pm$.*

Proof. First, we prove using a parameter dependant stationary phase lemma that $w_{k,E}^i$ is a Lagrangian section associated to the image of the i -th edge, uniformly in $E \in D^\pm$. We conclude by the fact that the image of a Lagrangian section depending smoothly on a parameter by a Fourier integral operator is a Lagrangian section depending smoothly on this parameter. \square

We also recall the following useful lemma.

Lemma 5.6.8 ([37, lemma 2.18]). *Set $\beta_j(E, k) = \frac{1}{2} + ik\epsilon_j(E, k)$ and*

$$\nu_j^+ = \left(\frac{k}{2\pi} \right)^{1/2} \Gamma(\beta_j) \exp(-\beta_j \ln k - i\beta_j \frac{\pi}{2});$$

$$\nu_j^- = \left(\frac{k}{2\pi} \right)^{1/2} \Gamma(\beta_j) \exp(-\beta_j \ln k + i\beta_j \frac{\pi}{2}).$$

Then for any $E \in I^\pm$,

$$-i \ln \nu_j^\pm = k (f_j(E) \ln |f_j(E)| - f_j(E)) + \varepsilon_j^{(0)}(E) \ln |f_j(E)| \mp \frac{\pi}{4} + O_E(k^{-1}).$$

The following proposition shows that the holonomy $\Theta(\zeta_E, k)$, which has a singular behaviour as E tends to 0, can be regularized.

Proposition 5.6.9. *Fix a component $p^\pm \in \mathfrak{C}^\pm$, and let $\zeta_E = [A_j(E), B_j(E)]$ be a local path near the critical point s_j . Assume moreover that ζ_E is oriented according to the flow of a_0 . Then there exists a sequence of $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ -valued functions $g_\zeta(\cdot, k) \in \mathcal{C}^\infty(D^\pm)$, $E \mapsto g_{\zeta_E}(k)$, admitting an asymptotic expansion in $k\mathcal{C}^\infty(D^\pm)[[k^{-1}]]$ of the form*

$$g_\zeta(E, k) = \sum_{\ell=-1}^{+\infty} k^{-\ell} g_\zeta^{(\ell)}(E),$$

such that

$$\forall E \in I^\pm, \quad g_\zeta(E, k) = \Theta(\zeta_E, k) - i \ln(\nu_j^\pm(E)) \pmod{2\pi\mathbb{Z}}.$$

The first terms of the asymptotic expansion of $g_\zeta(\cdot, k)$ are given, for $E \in I^\pm$, by:

$$\begin{aligned} g_\zeta^{(-1)}(E) &= c_0(\zeta_E) + (f_j(E) \ln |f_j(E)| - f_j(E)) \\ &\quad + \Phi_{B_j(E)}^{(-1)}(B_j(E)) - \Phi_{A_{j'}(E)}^{(-1)}(A_{j'}(E)) \end{aligned} \quad (5.17)$$

and

$$\begin{aligned} g_\zeta^{(0)}(E) &= c_1(\zeta_E) + \text{hol}_{\delta_{\zeta_E}}(\zeta_E) \mp \frac{\pi}{4} + \varepsilon_j^0(E) \ln |f_j(E)| \\ &\quad + \Phi_{B_j(E)}^{(0)}(B_j(E)) - \Phi_{A_{j'}(E)}^{(0)}(A_{j'}(E)). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Proof. We can assume that the paths ζ_E , $E \in D^\pm$ all entirely lie in the open set Ω_{s_j} where the normal form of proposition 5.5.1 is valid. Endow each edge e_i with the section $\phi_{k,E}^{(i)}$ defined earlier; by lemma 5.6.7, these sections can be used to compute $\Theta(\zeta_E, k)$. But we know how the different sections $\phi_{k,E}^{(i)}$ are related: equation (5.7) shows that $\Theta(\zeta_E, k) - i \ln \nu_j^\pm$ microlocally vanishes. Now, if we choose another set of microlocal solutions, we only add a term admitting an asymptotic expansion in $k \mathcal{C}^\infty(D^\pm)[[k^{-1}]]$. \square

Since the sections $\phi_{k,E}^{(i)}$, $i = 1 \dots 4$ form a standard basis at s_j , they can also be used to compute the holonomy hol_ζ . Of course, for this choice of sections, one has $\text{hol}_\zeta(\zeta_j^{\text{loc}}(0)) = 1$ and $g_{\zeta_j^{\text{loc}}}(0) = 0$; this allows to obtain the following result.

Proposition 5.6.10. *Let γ be a cycle in Γ_0 , oriented according to the Hamiltonian flow of a_0 , and of the form $\gamma = \zeta_1^{\text{loc}}(0)\zeta_1^{\text{reg}}(0) \dots \zeta_p^{\text{loc}}(0)\zeta_p^{\text{reg}}(0)$, where ζ_j^{loc} and ζ_j^{reg} are respectively local and regular paths in the sense introduced earlier. Define*

$$g(0, k) \sim \sum_{\ell=-1}^{+\infty} g^{(\ell)}(0)k^{-\ell}$$

as the sum

$$g(0, k) = g_{\zeta_1^{\text{loc}}}(0) + g_{\zeta_1^{\text{reg}}}(0) + \dots + g_{\zeta_p^{\text{loc}}}(0) + g_{\zeta_p^{\text{reg}}}(0),$$

where $g_{\zeta_j^{\text{loc}}}$ is given by proposition 5.6.9 and $g_{\zeta_j^{\text{reg}}} = \Theta(\zeta_j^{\text{reg}}(E), k)$. Then

$$\text{hol}_\zeta(\gamma) = \exp(ig(0, k)) + O(k^{-\infty}).$$

This is enough to prove the second part of theorem 5.6.4.

Corollary 5.6.11. *The first two terms in the asymptotic expansion of the phase of $\text{hol}_\zeta(\gamma)$ are given by formula (5.14).*

Proof. We start by the case of a cycle γ oriented according to the Hamiltonian flow of a_0 . Since $\epsilon_j^0(0) = 0$, formula (5.17) gives for $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$

$$g_{\zeta_j^{\text{loc}}}^{(-1)}(0) = c_0 \left(\zeta_j^{\text{loc}}(0) \right) + \Phi_{A_j}^{(-1)}(A_j(0)) - \Phi_{B_j}^{(-1)}(B_j(0))$$

while proposition 5.6.6 shows that (identifying $j = p + 1$ with $j = 1$)

$$g_{\zeta_j^{\text{reg}}}^{(-1)}(0) = c_0 \left(\zeta_j^{\text{reg}}(0) \right) + \Phi_{B_j}^{(-1)}(B_j(0)) - \Phi_{A_{j+1}}^{(-1)}(A_{j+1}(0)).$$

Consequently,

$$g^{(-1)}(0) = c_0(\gamma).$$

Let us now compute the subprincipal term $g_{\zeta_j^{\text{loc}}}^{(0)}(0)$. Recall that it is equal to the limit of

$$\begin{aligned} c_1(\zeta_j^{\text{loc}}(E)) + \text{hol}_{\delta_{\zeta_j^{\text{loc}}(E)}}(\zeta_j^{\text{loc}}(E)) \mp \frac{\pi}{4} + \varepsilon_j^{(0)}(E) \ln |f_j(E)| \\ + \Phi_{A_j(E)}^{(0)}(A_j(E)) - \Phi_{B_j(E)}^{(0)}(B_j(E)) \end{aligned}$$

as E goes to 0, which is equal to

$$\begin{aligned} \Phi_{A_j(0)}^{(0)}(A_j(0)) - \Phi_{B_j(0)}^{(0)}(B_j(0)) \mp \frac{\pi}{4} \\ + \lim_{E \rightarrow 0} \left(c_1(\zeta_j^{\text{loc}}(E)) + \text{hol}_{\delta_{\zeta_j^{\text{loc}}(E)}}(\zeta_j^{\text{loc}}(E)) + \varepsilon_j^{(0)}(E) \ln |f_j(E)| \right). \end{aligned}$$

First, we show that

$$\lim_{E \rightarrow 0} \left(c_1(\zeta_j^{\text{loc}}(E)) + \varepsilon_j^{(0)}(E) \ln |f_j(E)| \right) = \tilde{c}_1(\zeta_j^{\text{loc}}(0)). \quad (5.19)$$

Decompose

$$c_1(\zeta_j^{\text{loc}}(E)) = \int_{\zeta_j^{\text{loc}}(E)} \nu + \int_{\zeta_j^{\text{loc}}(E)} \kappa_E,$$

where we recall that $-i\nu$ stands for the local connection 1-form associated to the Chern connection of L_1 , and κ_E is such that $\kappa_E(X_{a_0}) = -a_1$. Of course, the term $\int_{\zeta_j^{\text{loc}}(E)} \nu$ converges to $\int_{\zeta_j^{\text{loc}}(0)} \nu$ as E tends to 0. Moreover, we have seen that there exists a symplectomorphism χ_E and a smooth function g_j^E such that $(g_j^E)'(0) \neq 0$ and

$$(a_0 \circ \chi_E^{-1})(x, \xi) - E = g_j^E(x\xi). \quad (5.20)$$

Hence, if we denote by \tilde{a}_0 (resp. $\tilde{a}_1, \tilde{\kappa}_E$) the pullback of a_0 (resp. a_1, κ_E) by χ_E^{-1} , we have

$$X_{\tilde{a}_0}(x, \xi) = (g_j^E)'(x\xi)X_{x\xi}(x, \xi),$$

so that $\tilde{\kappa}_E$ is characterized by

$$\tilde{\kappa}_E(X_{x\xi}) = \frac{-\tilde{a}_1(x, \xi)}{(g_j^E)'(x\xi)}.$$

Since $(g_j^E)'(0) \neq 0$, the function $b(x, \xi) = \frac{-\tilde{a}_1(x, \xi)}{(g_j^E)'(x\xi)}$ is smooth (considering a smaller neighbourhood of s_j for the definition of ζ_j^{loc} if necessary). Moreover, from equation (5.20), one finds that $(g_j^E)'(0) = |\det(\text{Hess}(a_0)(s))|^{-1/2}$, which yields the fact that $b(0) = \varepsilon_j^{(0)}(0)$. Using a known result (see [48, theorem 2, p.175] for instance), we can construct smooth functions $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ and $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ such that

$$b(x, \xi) = K(x\xi) - L_{X_{x\xi}}F(x, \xi);$$

since $x\xi = f_j(E)$ whenever $\chi_E^{-1}(x, \xi)$ belongs to Γ_E , this can be written $b(x, \xi) = K(f_j(E)) - L_{X_{x\xi}}F(x, \xi)$. Therefore, the function

$$G = K(f_j(E)) \ln |x| - F \quad (\text{or } -K(f_j(E)) \ln |\xi| - F \text{ where } x = 0)$$

restricted to $\chi(\Gamma_E)$ is a primitive of $\tilde{\kappa}_E$. This yields

$$\int_{\zeta_j^{\text{loc}}(E)} \kappa_E = G(\tilde{B}_j) - G(\tilde{A}_j) = K(f_j(E)) (\ln |x_{B_j}| - \ln |x_{A_j}|) + F(\tilde{A}_j) - F(\tilde{B}_j) \quad (5.21)$$

where $\tilde{m} = \chi_E(m)$ for any point $m \in M$, and (x_m, ξ_m) are the coordinates of \tilde{m} (E being implicit to simplify notations). Writing $\ln |x_{B_j}| - \ln |x_{A_j}| = \ln |x_{B_j} \xi_{A_j}| - \ln |x_{A_j} \xi_{A_j}|$, we obtain

$$\begin{aligned} \int_{\zeta_j^{\text{loc}}(E)} \kappa_E + \varepsilon_j^{(0)}(E) \ln |f_j(E)| &= F(\tilde{A}_j) - F(\tilde{B}_j) + K(f_j(E)) \ln |x_{B_j} \xi_{A_j}| \\ &\quad + (\varepsilon_j^{(0)}(E) - K(f_j(E))) \ln |f_j(E)|. \end{aligned}$$

By definition of K , $b(0) - K(0) = 0$, hence $K(f_j(E)) = b(0) + O(f_j(E)) = \varepsilon_j^{(0)}(0) + O(f_j(E))$. Thus, the term $(\varepsilon_j^{(0)}(E) - K(f_j(E))) \ln |f_j(E)|$ tends to zero as E tends to zero; this induces

$$\lim_{E \rightarrow 0} \int_{\zeta_j^{\text{loc}}(E)} \kappa_E + \varepsilon_j^{(0)}(E) \ln |f_j(E)| = F(\tilde{A}_j) - F(\tilde{B}_j) + K(f_j(E)) \ln |x_{B_j} \xi_{A_j}|$$

(one must keep in mind that in this formula, we should write $\tilde{A}_j = \tilde{A}_j(0)$, etc.). Now, if a, b are points on $\zeta_j^{\text{loc}}(0)$ located respectively in $[A_j, s_{m_j}]$ and $[s_{m_j}, B_j]$, then the term on the right hand side of the previous equation is equal to

$$I = \lim_{a, b \rightarrow s_j} \left(F(\tilde{A}_j) - F(\tilde{a}) + F(\tilde{b}) - F(\tilde{B}_j) + K(f_j(E)) \ln |x_{B_j} \xi_{A_j}| \right).$$

Using equation (5.21), it is easily seen that

$$I = \lim_{a, b \rightarrow s_j} \left(\int_{[A_j, a]} \kappa_E + \int_{[b, B_j]} \kappa_E + \varepsilon_j^{(0)}(0) \ln |x_b \xi_a| \right).$$

Remembering definition 5.6.2, this proves equation (5.19). Since $g_{\zeta_j^{\text{loc}}}^{(0)}$ and the quantities $\Phi_{A_j}^{(-1)}(A_j) - \Phi_{B_j}^{(-1)}(B_j)$ and $\Phi_{A_j}^{(0)}(A_j) - \Phi_{B_j}^{(0)}(B_j)$ are continuous at $E = 0$, the term

$$\text{hol}_{\delta_{\zeta_j^{\text{loc}}(E)}}(\zeta_j^{\text{loc}}(E))$$

is continuous at $E = 0$. Hence, if we sum up all the contributions from regular and local paths, we finally obtain

$$g^{(0)}(\gamma) = \tilde{c}_1(\gamma) + \sum_{m=1}^p \frac{\rho_m \pi}{4} + \ell(\gamma)$$

where ρ_m was introduced in definition 5.6.3 and $\ell(\gamma)$ is the quantity

$$\ell(\gamma) = \sum_{j=1}^p \left(\text{hol}_{\delta_{\zeta_j^{\text{reg}}(0)}}(\zeta_j^{\text{reg}}(0)) + \lim_{E \rightarrow 0} \text{hol}_{\delta_{\zeta_j^{\text{loc}}(E)}}(\zeta_j^{\text{loc}}(E)) \right);$$

it is not hard to show that $\ell(\gamma)$ is independent of the choice of the local and regular paths. Furthermore, let ϵ be the index of any smooth embedded cycle which is a continuous deformation of γ . If the regular and local paths can be chosen so that they all lie in the same connected component of Γ_E , it is clear that $\ell(\gamma) = \epsilon$. If it is not the case, we remove a small path $\eta_j(E)$ of $\zeta_j^{\text{reg}}(E)$ at any point A_j (resp. B_j) where there is a change of connected component, and replace it by a smooth path $\nu_j(E)$ connecting $\zeta_j^{\text{reg}}(E)$ and $\zeta_j^{\text{loc}}(E)$ (see figure 5.3). We obtain a smooth path $\tilde{\gamma}(E)$; on the one hand, one has $\epsilon(\tilde{\gamma}(E)) = \epsilon$. On

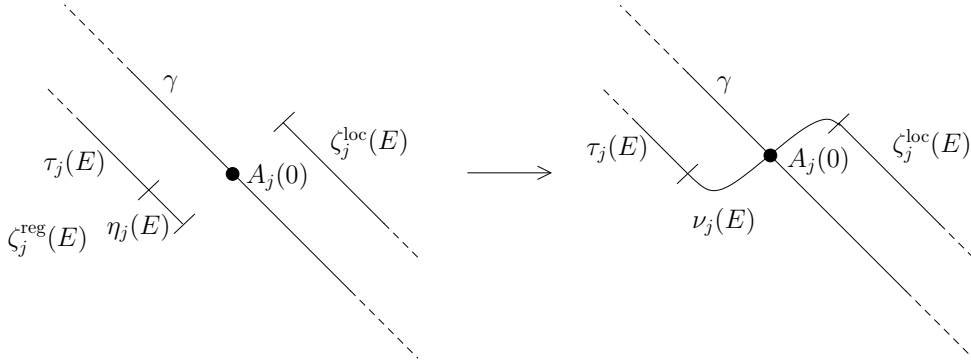


Figure 5.3: Computation of $\ell(\gamma)$.

the other hand, $\epsilon(\tilde{\gamma}(E))$ is the sum of the holonomies of the paths composing $\tilde{\gamma}(E)$. But, if we denote by $\tau_j(E)$ the part of $\zeta_j^{\text{reg}}(E)$ that remains when we remove $\eta_j(E)$, we have

$$\text{hol}_{\delta_{\tau_j(E)}}(\tau_j(E)) = \text{hol}_{\delta_{\zeta_j^{\text{reg}}(E)}}(\zeta_j^{\text{reg}}(E)) - \text{hol}_{\delta_{\eta_j(E)}}(\eta_j(E))$$

which implies

$$\text{hol}_{\delta_{\tau_j(E)}}(\tau_j(E)) + \text{hol}_{\delta_{\nu_j(E)}}(\nu_j(E)) \xrightarrow{E \rightarrow 0} \text{hol}_{\delta_{\zeta_j^{\text{reg}}(0)}}(\zeta_j^{\text{reg}}(0))$$

because

$$\text{hol}_{\delta_{\nu_j(E)}}(\nu_j(E)) - \text{hol}_{\delta_{\eta_j(E)}}(\eta_j(E)) \xrightarrow{E \rightarrow 0} 0.$$

This shows that $\ell(\gamma) = \epsilon$, which concludes the proof for this first case.

If the orientation of the cycle γ is opposite to the flow of X_{a_0} , just change the sign of the holonomy.

It remains to investigate the case where γ can be smooth at some critical point s . We can use the analysis above by introducing two local paths ζ_1^{loc} and ζ_2^{loc} at s as in figure 5.4 (we make a small move forwards and backwards on an edge added to γ); one can obtain the claimed result by looking carefully at the obtained holonomies, remembering that the two paths have opposite orientation on the added edge.

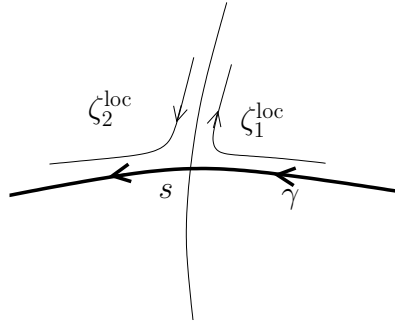


Figure 5.4: Case of a cycle γ smooth at s .

Note that the choice of the added edge does not change the result. \square

5.6.4 Derivation of the Bohr-Sommerfeld conditions

The previous results allow to compute the spectrum of A_k in an interval of size $O(1)$ around the singular energy. Indeed, let γ_E , $E \in I^\pm$ be a connected component of the level $a_0^{-1}(E)$ and γ be the cycle in Γ_0 obtained by letting E go to 0. Then one can choose the local and regular paths used to compute the holonomy $\text{hol}_{\mathcal{L}}(\gamma)$ so that they all lie on γ_E , and define $g(E, k)$ as the sum

$$g(E, k) = g_{\zeta_1^{\text{loc}}}(E) + g_{\zeta_1^{\text{reg}}}(E) + \dots + g_{\zeta_p^{\text{loc}}}(E) + g_{\zeta_p^{\text{reg}}}(E).$$

Furthermore, the matrix of change of basis associated to the sections $\phi_{k,E}^{(i)}$ is given by

$$T_j(E) = \exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right) \mathcal{E}_k(k\mathbf{e}_j(E, k)) \begin{pmatrix} 1 & i \exp(-k\pi\mathbf{e}_j(E, k)) \\ i \exp(-k\pi\mathbf{e}_j(E, k)) & 1 \end{pmatrix},$$

where the function \mathcal{E}_k is defined in equation (5.9). To compute eigenvalues near E , apply theorem 5.6.1 where T_j is replaced by $T_j(E)$ and $\text{hol}_{\mathcal{L}}(\gamma)$ by $\exp(ig(E, k))$. Applying

Stirling's formula, we obtain

$$T_j(E) = \exp(ik\theta(E, k)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + O(k^{-1}), \quad f_j(E) > 0$$

and

$$T_j(E) = \exp(ik\theta(E, k)) \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + O(k^{-1}), \quad f_j(E) < 0.$$

with $\theta(E, k) = f_j(E) \ln |f_j(E)| - f_j(E) + k^{-1} \left(\varepsilon_j^{(0)}(E) \ln |f_j(E)| - \frac{\pi}{4} \right)$. Together with equations (5.17) and (5.18), this ensures that we recover the usual Bohr-Sommerfeld conditions away from the critical energy.

In the rest of the paper, we will look for eigenvalues of the form $k^{-1}e + O(k^{-2})$, where e is allowed to vary in a compact set. Hence, we have to replace A_k by $A_k - k^{-1}e$; this operator still has principal symbol a_0 , but its subprincipal symbol is $a_1 - e$. Thanks to theorem 5.6.4, we are able to compute the singular holonomy and the invariants ε_j up to $O(k^{-2})$; hence, we approximate the spectrum up to an error of order $O(k^{-2})$.

5.6.5 The case of a unique saddle point

In the case of a unique saddle point in Γ_0 , it is not difficult to write the Bohr-Sommerfeld conditions in a more explicit form. The critical level Γ_0 looks like a figure eight. We choose the convention for the cut edges and cycles as in figure 5.5.

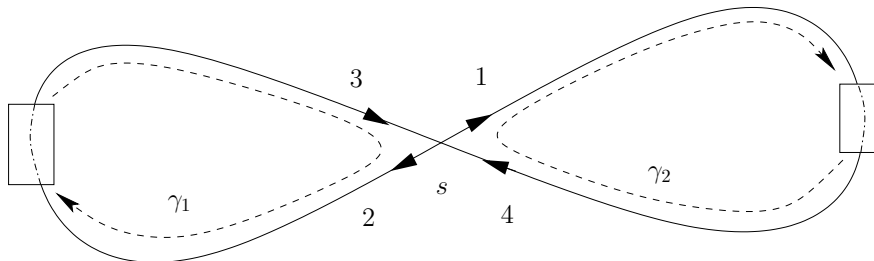


Figure 5.5: The singular level $\Gamma_0 = a_0^{-1}(0)$ and the choice of cut edges and cycles.

Let s be the saddle point, and let $\varepsilon(e, k)$ be the invariant associated to the operator $A_k - k^{-1}e$ at s ; one has $\varepsilon^{(0)}(e) = \varepsilon^{(0)}(0) + e |\det(\text{Hess}(a_0)(s))|^{-1/2}$. Denote by $h_j(e) = \exp(i\theta_j(e))$ the holonomy of the loop γ_j in \mathfrak{L} ; remember that θ_j is given by

$$\theta_j(e) = k c_0(\gamma_j) + \tilde{c}_1(\gamma_j) + \tilde{\varepsilon}(\gamma_j)\pi + O(k^{-1}).$$

The Bohr-Sommerfeld conditions are given by the holonomy equations

$$x_4 = h_2 x_1, \quad x_3 = h_1 x_2$$

and by the transfer relation at the critical point

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

where $T = T(\varepsilon)$ is defined in equation (5.8). Using lemma 2 of [34], the quantization rule can in fact be written as a real scalar equation.

Proposition 5.6.12. *The equation $A_k u_k = k^{-1} e u_k + O(k^{-\infty})$ has a normalized eigenfunction if and only if e satisfies the condition*

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \exp(2\pi\varepsilon)}} \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) = \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \frac{\pi}{4} + \varepsilon \ln(k) - \arg\left(\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\varepsilon\right)\right)\right) \quad (5.22)$$

5.7 Examples

We conclude by investigating two examples on the torus and one on the sphere; these examples present various topologies. More precisely, using the terminology of Bolsinov, Fomenko and Oshemkov [80, 8] for atoms (neighbourhoods of singular levels of Morse functions), we provide an example of a type B atom—the only type in complexity 1 (here, complexity means the number of critical points on the singular level) in the orientable case—and two examples of atoms of complexity 2: one is of type C_2 (xy on the sphere S^2) and the other is of type C_1 (Harper’s Hamiltonian on the torus \mathbb{T}^2). It is a remarkable fact that these two examples are natural not only as the canonical realization of the atom on a surface but also because they come from the simplest possible Toeplitz operators with critical level of given type.

Note that there are two other types of atoms of complexity 2 in the orientable case; it would be interesting to realize each of them as a hyperbolic level of the principal symbol of a selfadjoint Toeplitz operator and to complete this study. Note that in the context of pseudodifferential operators, Colin de Verdière and Parisse [35] treated the case of a type D_1 atom (the triple well potential) among some other examples. More generally, one could use the classification of Bolsinov, Fomenko and Oshemkov to write the Bohr-Sommerfeld conditions for all cases in low complexity (≤ 3 for instance); however, the case of two critical points already gives rise to rather tedious computations.

The details of the quantization of the torus and the sphere are quite standard. Nevertheless, for the sake of completeness, we will recall a few of them at the beginning of each paragraph.

5.7.1 Height function on the torus

Firstly, we consider the quantization of the height function on the torus. This is one of the first examples in Morse theory, perhaps because this is the simplest and most intuitive example with critical points of each type. In particular, the description of the two hyperbolic levels is quite simple.

Endow \mathbb{R}^2 with the linear symplectic form ω_0 and let $L_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ be the complex line bundle with Hermitian form and connection defined in section 5.2.4.3. Let K be the

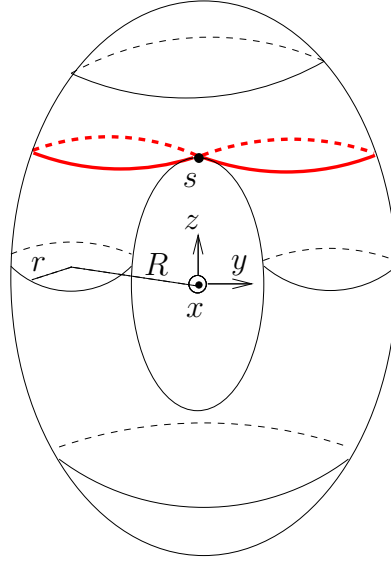


Figure 5.6: Height function on the torus.

canonical line of \mathbb{R}^2 with respect to its standard complex structure. Choose a half-form line, that is a complex line δ with an isomorphism $\varphi : \delta^{\otimes 2} \rightarrow K$. K has a natural scalar product such that the square of the norm of α is $i\alpha \wedge \bar{\alpha}/\omega_0$; endow δ with the scalar product $\langle \cdot, \cdot \rangle_\delta$ such that φ is an isometry. The half-form bundle we work with, that we still denote by δ , is the trivial line bundle with fiber δ over \mathbb{R}^2 .

Consider a lattice Λ with symplectic volume 4π . The Heisenberg group $H = \mathbb{R}^2 \times U(1)$ with product

$$(x, u) \cdot (y, v) = \left(x + y, uv \exp\left(\frac{i}{2}\omega_0(x, y)\right) \right)$$

acts on the bundle $L_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$, with action given by the same formula. This action preserves the prequantum data, and the lattice Λ injects into H ; therefore, the fiber bundle L_0 reduces to a prequantum bundle L over the torus $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\Lambda$. The action extends to the fiber bundle L_0^k by

$$(x, u) \cdot (y, v) = \left(x + y, u^k v \exp\left(\frac{ik}{2}\omega_0(x, y)\right) \right).$$

We let the Heisenberg group act trivially on δ . We obtain an action

$$T^* : \Lambda \rightarrow \text{End}\left(\mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^2, L_0^k \otimes \delta\right)\right), \quad u \mapsto T_u^*.$$

The Hilbert space $\mathcal{H}_k = H^0(M, L^k)$ can naturally be identified to the space $\mathcal{H}_{\Lambda, k}$ of holomorphic sections of $L_0^k \otimes \delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ which are invariant under the action of Λ , endowed with the hermitian product

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_D \langle \varphi, \psi \rangle_\delta |\omega_0|$$

where D is the fundamental domain of the lattice. Furthermore, $\Lambda/2k$ acts on $\mathcal{H}_{\Lambda,k}$. Let e and f be generators of Λ satisfying $\omega_0(e, f) = 4\pi$; one can show that there exists an orthonormal basis $(\psi_\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}/2k\mathbb{Z}}$ of $\mathcal{H}_{\Lambda,k}$ such that

$$\forall \ell \in \mathbb{Z}/2k\mathbb{Z} \quad \begin{cases} T_{e/2k}^* \psi_\ell = w^\ell \psi_\ell \\ T_{f/2k}^* \psi_\ell = \psi_{\ell+1} \end{cases}$$

with $w = \exp\left(\frac{i\pi}{k}\right)$. The sections ψ_ℓ can be expressed in terms of Θ functions.

Set $M_k = T_{e/2k}^*$ and $L_k = T_{f/2k}^*$. Let (q, p) be coordinates on \mathbb{R}^2 associated to the basis (e, f) and $[q, p]$ be the equivalence class of (q, p) . Both M_k and L_k are Toeplitz operators, with respective principal symbols $[q, p] \mapsto \exp(2i\pi p)$ and $[q, p] \mapsto \exp(2i\pi q)$, and vanishing subprincipal symbols.

It is a well-known fact that \mathbb{T}^2 is diffeomorphic to the surface shown in figure 5.6 above, which is obtained by rotating a circle of radius r around a circle of radius $R > r$ contained in the yz plane; the diffeomorphism is given by the explicit formulas

$$x = r \sin(2\pi q), \quad y = (R + r \cos(2\pi q)) \cos(2\pi p), \quad z = (R + r \cos(2\pi q)) \sin(2\pi p).$$

Hence, the Hamiltonian that we consider is

$$a_0(q, p) = (R + r \cos(2\pi q)) \sin(2\pi p)$$

on the fundamental domain D . We try to quantize it, *id est* find a Toeplitz operator A_k with principal symbol a_0 . The Toeplitz operators

$$B_k = \frac{1}{2i}(M_k - M_k^*), \quad C_k = R\Pi_k + \frac{r}{2}(L_k + L_k^*)$$

are selfadjoint and

$$\sigma_{\text{norm}}(B_k) = \sin(2\pi p) + O(\hbar^2), \quad \sigma_{\text{norm}}(C_k) = R + r \cos(2\pi q) + O(\hbar^2).$$

Hence $A_k = \frac{1}{2}(B_k C_k + C_k B_k)$ is a selfadjoint Toeplitz operator with normalized symbol $a_0 + O(\hbar^2)$. Its matrix in the basis $(\psi_\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}/2k\mathbb{Z}}$ writes

$$\begin{pmatrix} R\alpha_0 & \frac{r}{4}(\alpha_0 + \alpha_1) & 0 & \dots & 0 & \frac{r}{4}(\alpha_{2k-1} + \alpha_0) \\ \frac{r}{4}(\alpha_0 + \alpha_1) & R\alpha_1 & \frac{r}{4}(\alpha_1 + \alpha_2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{r}{4}(\alpha_1 + \alpha_2) & R\alpha_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & R\alpha_{2k-2} & \frac{r}{4}(\alpha_{2k-2} + \alpha_{2k-1}) \\ \frac{r}{4}(\alpha_0 + \alpha_{2k-1}) & 0 & \dots & 0 & \frac{r}{4}(\alpha_{2k-2} + \alpha_{2k-1}) & R\alpha_{2k-1} \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

with $\alpha_\ell = \sin(\ell\pi/k)$.

The level $\Gamma_{R-r} = a_0^{-1}(R-r)$ contains one hyperbolic point $s = (1/2, 1/4)$. It is the union of the two branches

$$p = \frac{1}{2\pi} \arcsin\left(\frac{R-r}{R+r \cos(2\pi q)}\right) \quad \text{and} \quad p = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \arcsin\left(\frac{R-r}{R+r \cos(2\pi q)}\right).$$

The Hamiltonian vector field associated to a_0 is given by

$$X_{a_0}(q, p) = \frac{1}{2} (R + r \cos(2\pi q)) \cos(2\pi p) \frac{\partial}{\partial q} + \frac{r}{2} \sin(2\pi q) \sin(2\pi p) \frac{\partial}{\partial p}.$$

Moreover, one has

$$\varepsilon^{(0)} = \frac{e}{\pi \sqrt{r(R-r)}} \quad (5.24)$$

We choose the cycles γ_1 and γ_2 with the convention given in section 5.6.5. We have to compute the principal and subprincipal actions of γ_1, γ_2 and their indices $\tilde{\varepsilon}$. Let us detail the calculations in the case of γ_1 .

We parametrize γ_1 by $q \mapsto \left(q, \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \arcsin \left(\frac{R-r}{R+r \cos(2\pi q)} \right) \right)$. The principal action is given by

$$c_0(\gamma_1) = 2I(R, r) - 2\pi, \quad (5.25)$$

where $I(R, r)$ is the integral

$$I(R, r) = \int_0^1 \arcsin \left(\frac{R-r}{R+r \cos(2\pi q)} \right) dq;$$

unfortunately, we do not know any explicit expression for this integral, so for numerical computations, once fixed the radii R and r , we obtain the value of $I(R, r)$ thanks to numerical integration routines.

On γ_1 , the subprincipal form reads

$$\kappa_0 = \frac{-2e dq}{\sqrt{(R+r \cos(2\pi q))^2 - (R-r)^2}}.$$

One can obtain an explicit primitive thanks to any computer algebra system. Furthermore, some computations show that the symplectic area of the parallelogram $R_{a,b}$ is equal to

$$\int_{R_{a,b}} \omega = 8\pi \sqrt{\frac{r}{R-r}} \left(q_a - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - q_b \right).$$

This yields the following value for the subprincipal action:

$$\tilde{c}_1(\gamma_1) = \varepsilon^{(0)} \ln \left(\frac{32}{\pi} \sqrt{\frac{r}{R} \left(1 - \frac{r}{R} \right)} \right). \quad (5.26)$$

Finally, the index associated to half-forms is $\tilde{\varepsilon}(\gamma_1) = 1/4$. For γ_2 , one can check that

$$c_0(\gamma_2) = 2I(R, r), \quad \tilde{c}_1(\gamma_2) = \varepsilon^{(0)} \ln \left(\frac{32}{\pi} \sqrt{\frac{r}{R} \left(1 - \frac{r}{R} \right)} \right), \quad \tilde{\varepsilon}(\gamma_2) = 1/4. \quad (5.27)$$

With this data, one can test the Bohr-Sommerfeld condition for different couples (R, r) . We illustrate this with $(R, r) = (4, 1)$ (note that we have tested several couples). We compare the eigenvalues obtained numerically from the matrix (5.23) and the ones derived

from the Bohr-Sommerfeld conditions (5.22) in the interval $I = [R - r - 10k^{-1}, R - r + 10k^{-1}]$. In figure 5.7, we plotted the theoretical and numerical eigenvalues; figure 5.8 shows the error between the eigenvalues and the solutions of the Bohr-Sommerfeld conditions for fixed k , while figure 5.9 is a graph of the logarithm of the maximal error in the interval I as a function of $\log(k)$.

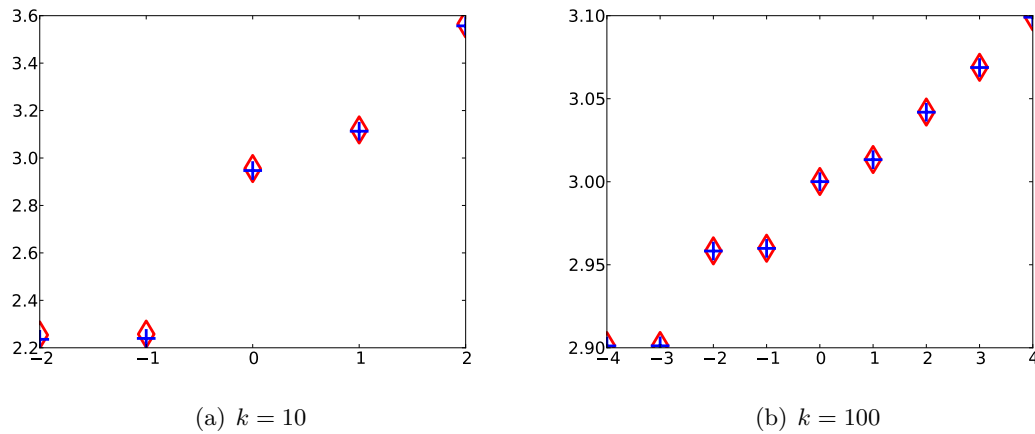


Figure 5.7: Eigenvalues in $[R - r - 10k^{-1}, R - r + 10k^{-1}]$; in red diamonds, the eigenvalues of A_k obtained numerically; in blue crosses, the theoretical eigenvalues derived from the Bohr-Sommerfeld conditions. The results are indexed with respect to the eigenvalue closest to the critical energy, labeled as 0. Observe that even for $k = 10$, the method is very precise.

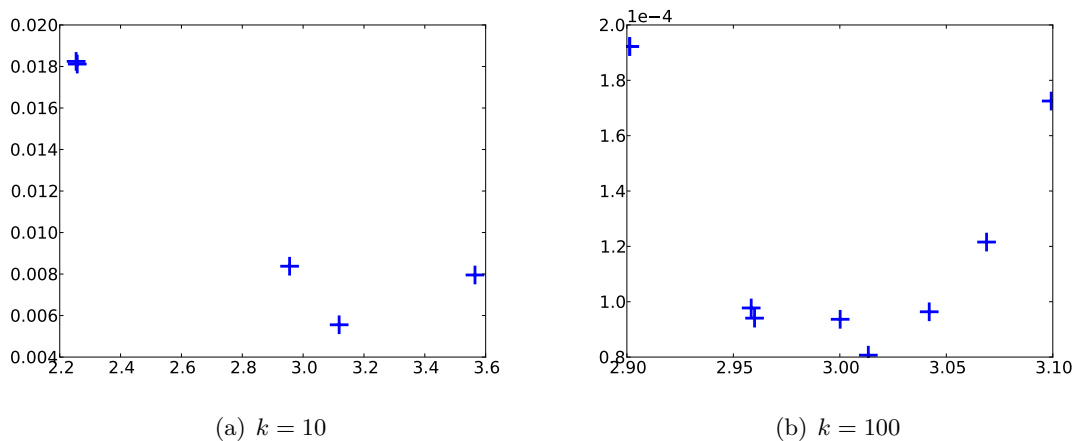


Figure 5.8: Absolute value of the difference between the numerical and theoretical eigenvalues; the error is smaller near the critical energy ($R - r = 3$ in this case).

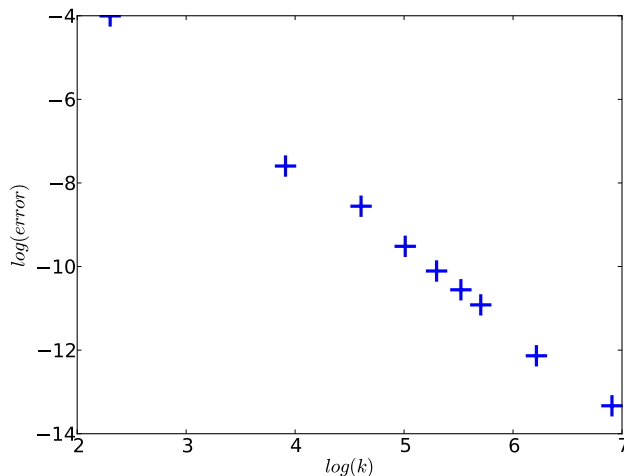


Figure 5.9: Logarithm of the maximal error as a function of the logarithm of k ; the error displays a behaviour in $O(k^{-2})$, as expected.

5.7.2 xy on the 2-sphere

Let us consider another simple example, but this time with two saddle points on the critical level. We will quantize the Hamiltonian $a_0(x, y, z) = xy$ on the sphere S^2 . Let us briefly recall the details of the quantization of this surface.

Start from the complex projective plane \mathbb{CP}^1 and let $L = \mathcal{O}(1)$ be the dual bundle of the tautological bundle

$$\mathcal{O}(-1) = \{(u, v) \in \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{C}^2; \quad v \in u\}$$

with natural projection. L is a Hermitian, holomorphic line bundle; let us denote by ∇ its Chern connection. The 2-form $\omega = i \operatorname{curv}(\nabla)$ is the symplectic form on \mathbb{CP}^1 associated to the Fubini-Study Kähler structure, and $L \rightarrow \mathbb{CP}^1$ is a prequantum bundle. Moreover, the canonical bundle naturally identifies to $\mathcal{O}(-2)$, hence one can choose the line bundle $\delta = \mathcal{O}(-1)$ as a half-forms bundle. The state space $\mathcal{H}_k = H^0(\mathbb{CP}^1, L^k \otimes \delta)$ can be identified with the space $\mathbb{C}_{p_k}[z_1, z_2]$ of homogeneous polynomials of degree $p_k = k - 1$ in two variables. The polynomials

$$P_\ell(z_1, z_2) = \sqrt{\frac{(p_k + 1) \binom{p_k}{\ell}}{2\pi}} z_1^\ell z_2^{p_k - \ell}, \quad 0 \leq \ell \leq p_k,$$

form an orthonormal basis of \mathcal{H}_k . The sphere $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ is diffeomorphic to \mathbb{CP}^1 via the stereographic projection (from the north pole to the plane $z = 0$). The symplectic form ω on \mathbb{CP}^1 is carried to the symplectic form $\omega_{S^2} = -\frac{1}{2}\Omega$, with

Ω the usual area form on S^2 (the one which gives the area 4π). The operator A_k acting on the basis $(P_\ell)_{0 \leq \ell \leq p_k}$ by

$$A_k P_\ell = \frac{i}{p_k^2} (\alpha_{\ell,k} P_{\ell-2} - \beta_{\ell,k} P_{\ell+2}),$$

with

$$\alpha_{\ell,k} = \sqrt{\ell(\ell-1)(p_k - \ell + 1)(p_k - \ell + 2)}$$

and

$$\beta_{\ell,k} = \sqrt{(\ell+1)(\ell+2)(p_k - \ell - 1)(p_k - \ell)},$$

is a Toeplitz operator with principal symbol $a_0(x, y, z) = xy$ and vanishing subprincipal symbol (for more details, one can consult [7, section 3] for instance). Note that $\alpha_{\ell,k} = \beta_{p_k - \ell, k}$, which implies that if λ is an eigenvalue of A_k , then $-\lambda$ also is.

The level $a_0^{-1}(0)$ is critical, and contains two saddle points: the poles N (north) and S (south). It is the union of the two great circles $x = 0$ and $y = 0$. We choose the cut edges and cycles as indicated in figure 5.10. Set $h_j = \text{hol}_{\mathfrak{L}}(\gamma_j) = \exp(i\theta_j)$; remember that

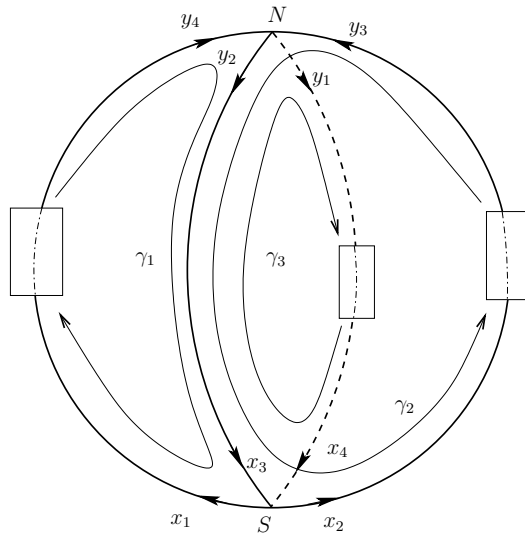


Figure 5.10: Choice of the cycles and cut edges.

$\theta_j = kc_0(\gamma_j) + \tilde{c}_1(\gamma_j) + \tilde{\epsilon}(\gamma_j)\pi + O(k^{-1})$. The holonomy equations read

$$y_2 = x_3, \quad y_4 = h_1 x_1, \quad y_3 = h_2 x_2, \quad x_4 = h_3 y_1 \tag{5.28}$$

while the transfer equations are given by

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = T_S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = T_N \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{5.29}$$

The system (5.28) + (5.29) has a solution if and only if the matrix

$$U = T_S \begin{pmatrix} 0 & \exp(-i\theta_1) \\ \exp(-i\theta_2) & 0 \end{pmatrix} T_N \begin{pmatrix} 0 & \exp(-i\theta_3) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

admits 1 as an eigenvalue. The matrix U is unitary, and if we write $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, a straightforward computation shows that

$$|a|^2 = |d|^2 = \frac{1 - 2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \exp(-\pi(\varepsilon_S + \varepsilon_N)) + \exp(-2\pi(\varepsilon_S + \varepsilon_N))}{(1 + \exp(-2\pi\varepsilon_S))(1 + \exp(-2\pi\varepsilon_N))};$$

hence, by lemma 2 of [34], 1 is an eigenvalue of U if and only if

$$|a| \sin \left(\frac{\arg(ad) - \pi}{2} - \arg(a) \right) = \sin \left(\frac{\arg(ad) - \pi}{2} \right).$$

This amounts to the equation

$$\begin{aligned} & |a| \cos \left(\frac{\arg(z) - \arg(w)}{2} \right) \\ &= \sin \left(\frac{\arg(z) + \arg(w)}{2} + \arg(\Gamma(\tfrac{1}{2} + i\varepsilon_N)) + \arg(\Gamma(\tfrac{1}{2} + i\varepsilon_S)) - (\varepsilon_S + \varepsilon_N) \ln(k) \right) \end{aligned}$$

with

$$z = \exp(-i(\theta_2 + \theta_3)) - \exp(-\pi(\varepsilon_S + \varepsilon_N) - i(\theta_1 + \theta_3))$$

and

$$w = \exp(-i\theta_1) - \exp(-\pi(\varepsilon_N + \varepsilon_S) - i\theta_2).$$

One has

$$\varepsilon_S^{(0)} = \varepsilon_N^{(0)} = \varepsilon^{(0)} = \frac{e}{2}. \quad (5.30)$$

Moreover, the principal actions are

$$c_0(\gamma_1) = -\frac{\pi}{2}, \quad c_0(\gamma_2) = \frac{\pi}{2}, \quad c_0(\gamma_3) = \pi. \quad (5.31)$$

Then, one finds for the subprincipal actions

$$\tilde{c}_1(\gamma_1) = 2\varepsilon^{(0)} \ln 2 = \tilde{c}_1(\gamma_2), \quad \tilde{c}_1(\gamma_3) = 0. \quad (5.32)$$

Finally, the indices $\tilde{\varepsilon}$ are the following:

$$\tilde{\varepsilon}(\gamma_1) = \frac{3}{2}, \quad \tilde{\varepsilon}(\gamma_2) = \frac{1}{2}, \quad \tilde{\varepsilon}(\gamma_3) = 1. \quad (5.33)$$

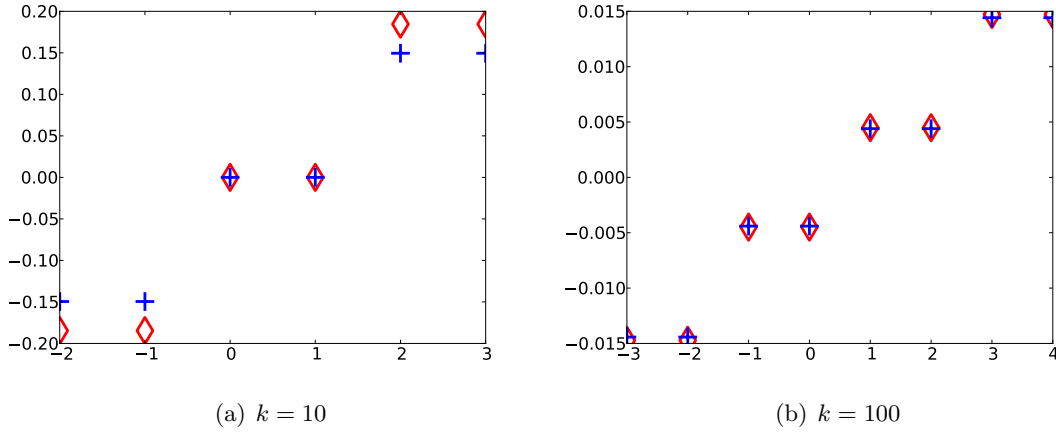


Figure 5.11: Eigenvalues in $[-2k^{-1}, 2k^{-1}]$; in red diamonds, the eigenvalues of A_k obtained numerically; in blue crosses, the theoretical eigenvalues derived from the Bohr-Sommerfeld conditions.

5.7.3 Harper’s Hamiltonian on the torus

Keeping the conventions and notations of the first example, we consider the Hamiltonian (sometimes known as Harper’s Hamiltonian since it is related to Harper’s equation [57])

$$a_0(q, p) = 2(\cos(2\pi p) + \cos(2\pi q))$$

on the torus. The operator $A_k = M_k + M_k^* + L_k + L_k^*$ is a Toeplitz operator with principal symbol a_0 and vanishing subprincipal symbol. Its matrix in the basis $(\psi_\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}/2k\mathbb{Z}}$ is

$$\begin{pmatrix} 2\alpha_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2\alpha_{2k-1} \end{pmatrix}$$

where

$$\alpha_\ell = \cos\left(\frac{\ell\pi}{k}\right), \quad 0 \leq \ell \leq 2k - 1.$$

The critical level $\Gamma_0 = a_0^{-1}(0)$ contains two hyperbolic points: $s_1 = (0, 1/2)$ and $s_2 = (1/2, 0)$. On the fundamental domain, it is the union of the four segments described in figure 5.12; hence, its image on the torus it is the union of two circles that intersect at two points. We choose the cycles and cut edges as in figure 5.13 (for a representation of the

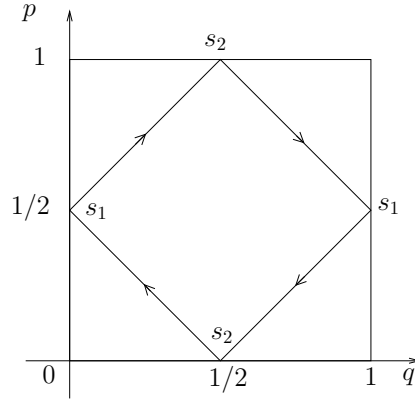


Figure 5.12: Critical level Γ_0 on the fundamental domain; the arrows indicate the direction of the Hamiltonian flow of a_0 .

two circles in a two-dimensional view) and 5.14 (for a representation of the cycles on the fundamental domain). We write the holonomy equations

$$y_1 = x_3, \quad y_3 = h_1 x_2, \quad y_4 = h_2 x_1, \quad x_4 = h_3 y_1 \quad (5.34)$$

and the transfer equations

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = T_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = T_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

where $h_j = \text{hol}_{\mathcal{L}}(\gamma_j) = \exp(i\theta_j)$. Following the same steps as in the previous example, one can show that the system (5.34) + (5.35) has a solution if and only if e is a solution of the scalar equation

$$\begin{aligned} & |a| \cos\left(\frac{\arg(w) - \arg(z)}{2}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\arg(z) + \arg(w)}{2} + \arg\left(\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\varepsilon_1\right)\right) + \arg\left(\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\varepsilon_2\right)\right) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \ln(k)\right) \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} |a|^2 &= \frac{\exp(-2\pi\varepsilon_1) + \exp(-2\pi\varepsilon_2) + 2\cos(\theta_2 - \theta_1)\exp(-\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2))}{(1 + \exp(-2\pi\varepsilon_1))(1 + \exp(-2\pi\varepsilon_2))}, \\ w &= \exp(-\pi\varepsilon_2 - i(\theta_2 + \theta_3)) + \exp(-\pi\varepsilon_1 - i(\theta_1 + \theta_3)) \end{aligned}$$

and

$$z = \exp(-\pi\varepsilon_1 - i\theta_2) + \exp(-\pi\varepsilon_2 - i\theta_1).$$

Moreover, one has

$$\varepsilon_1^{(0)} = \varepsilon_2^{(0)} = \frac{e}{2\pi} := \varepsilon^{(0)}. \quad (5.36)$$

It remains to compute the quantities θ_j (up to $O(k^{-1})$). The principal actions are easily computed:

$$c_0(\gamma_1) = -\pi, \quad c_0(\gamma_2) = 3\pi, \quad c_0(\gamma_3) = -2\pi. \quad (5.37)$$

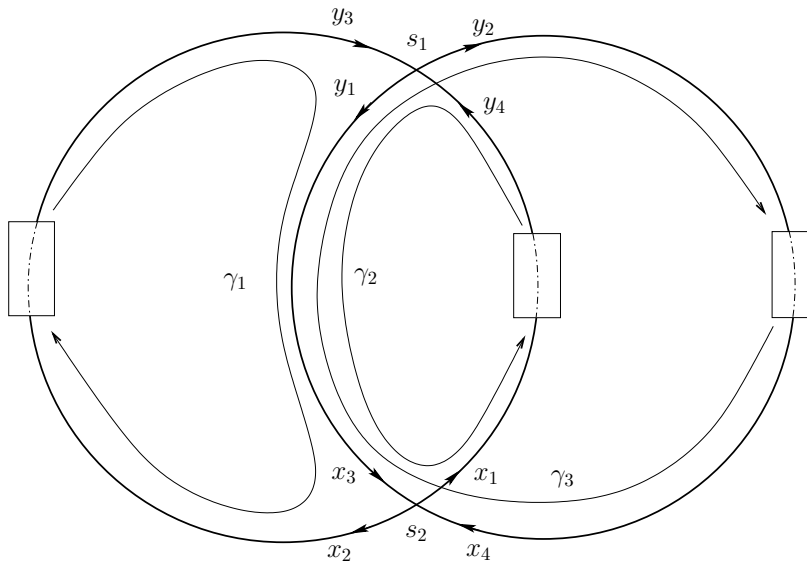


Figure 5.13: Choice of the cycles and cut edges.

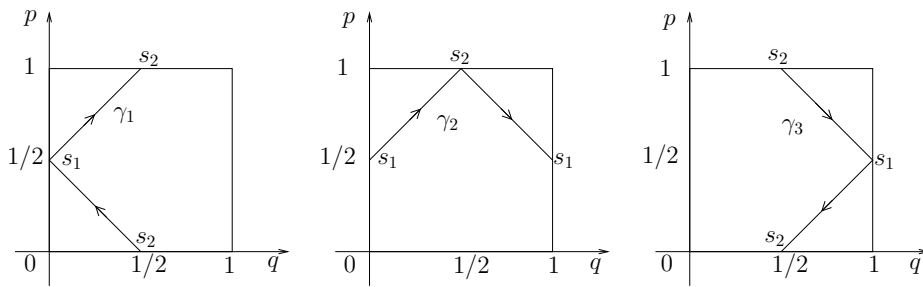


Figure 5.14: Cycles on the fundamental domain.

Furthermore, one can check that the subprincipal actions are given by

$$\tilde{c}_1(\gamma_1) = 2\varepsilon^{(0)} \ln\left(\frac{8}{\pi}\right) = \tilde{c}_1(\gamma_2), \quad \tilde{c}_1(\gamma_3) = 0. \tag{5.38}$$

Finally, one has

$$\tilde{\epsilon}(\gamma_1) = \tilde{\epsilon}(\gamma_2) = \tilde{\epsilon}(\gamma_3) = 0. \tag{5.39}$$

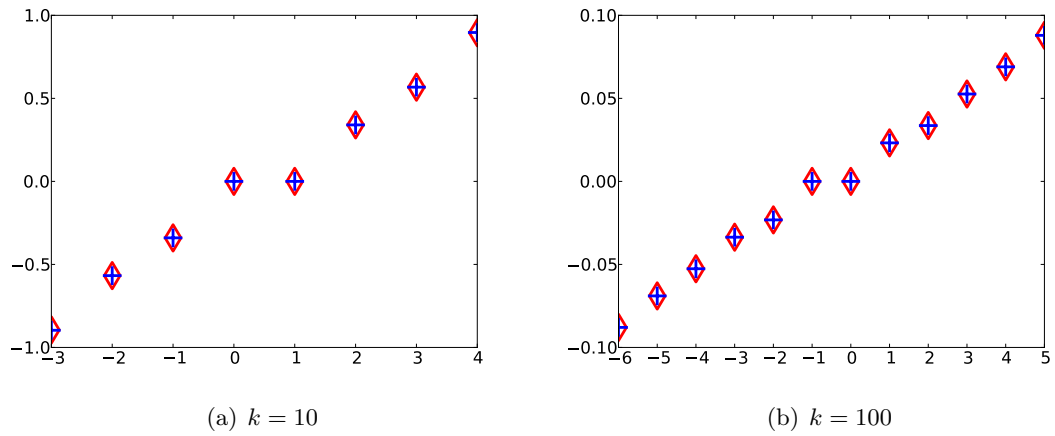


Figure 5.15: Eigenvalues in $[-10k^{-1}, 10k^{-1}]$; in red diamonds, the eigenvalues of A_k obtained numerically; in blue crosses, the theoretical eigenvalues derived from the Bohr-Sommerfeld conditions.

Chapitre 6

Théorie spectrale inverse

Dans ce chapitre, nous proposons une théorie spectrale inverse pour les opérateurs de Toeplitz autoadjoints sur les surfaces, à la manière de l'article [100] qui traite du cas pseudo-différentiel. Nous expliquons dans quelle mesure les conditions de Bohr-Sommerfeld suffisent à obtenir le résultat, qu'on peut résumer ainsi : sous certaines hypothèses génériques, le spectre modulo $O(k^{-2})$ détermine la dynamique classique sous-jacente (autrement dit la dynamique hamiltonienne du symbole principal de l'opérateur). Les techniques employées dans le contexte pseudo-différentiel s'adaptent telles quelles au cadre Toeplitz ; ce chapitre constitue donc un bref résumé de celles-ci, et on peut le voir comme un condensé de l'article [100], mais écrit dans le langage des opérateurs de Toeplitz. Pour cette raison, nous ne détaillerons pas systématiquement les preuves de ce chapitre.

6.1 Introduction

Soit (M, ω) une variété kählérienne compacte connexe de dimension (réelle) 2, munie d'un fibré préquantifiant et éventuellement d'un fibré en droites holomorphe et hermitien auxiliaire. Soit A_k un opérateur de Toeplitz autoadjoint sur M , dont le symbole principal a_0 est une fonction de Morse simple, c'est-à-dire que tous les points critiques de a_0 sont non dégénérés et que deux d'entre eux ne peuvent pas avoir la même image par a_0 . En particulier, si E est une valeur hyperbolique, le niveau $a_0^{-1}(E)$ est la réunion d'un « huit » avec un certain nombre de composantes connexes régulières (des cercles).

On veut établir un résultat de théorie spectrale inverse, c'est-à-dire expliquer dans quelle mesure la connaissance du spectre de l'opérateur A_k nous renseigne sur la dynamique classique du symbole principal a_0 . Idéalement, il s'agit de montrer que, sous certaines conditions, le spectre de l'opérateur (dans un sens asymptotique) permet de retrouver le *type symplectique* de (M, a_0) , c'est-à-dire la classe d'équivalence de ce couple pour la relation « (M, a_0) équivaut à (\tilde{M}, \tilde{a}_0) si et seulement si il existe un symplectomorphisme $\varphi : M \rightarrow \tilde{M}$ tel que $a_0 = \tilde{a}_0 \circ \varphi$ ».

Théorème (Théorème 6.4.3). *Sous les hypothèses génériques (H1) (voir section 6.3.2) et (H2) (voir section 6.4.1), la connaissance du spectre de A_k modulo $O(k^{-2})$ détermine le type symplectique de (M, a_0) .*

Il s'avère que les conditions de Bohr-Sommerfeld sont l'ingrédient principal de la preuve de ce résultat, qui est donc une conséquence des chapitres précédents. En outre, les techniques de l'article [100], consacré au cas des opérateurs pseudo-différentiels, s'adaptent parfaitement au contexte des opérateurs de Toeplitz.

6.2 Graphes de Reeb

La démarche s'appuie sur la classification des systèmes intégrables en dimension 2 proposée par Dufour, Molino et Toulet [42]. Celle-ci s'effectue grâce à un objet combinatoire, le graphe de Reeb. Le graphe de Reeb de (M, a_0) est défini comme le quotient \mathcal{G} de la variété M par le feuilletage singulier défini par le symbole principal a_0 . L'image d'une feuille régulière dans \mathcal{G} est un *point régulier* du graphe, tandis que l'image d'un point critique elliptique est appelée *bout* et l'image d'un « huit » est un *point de bifurcation*.

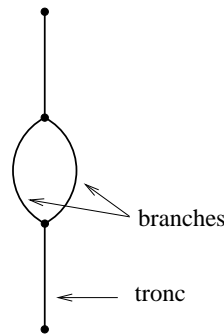


FIGURE 6.1 – Le graphe de Reeb de la fonction hauteur sur le tore.

On dit que le système (M, a_0) est *topologiquement équivalent* au système (\tilde{M}, \tilde{a}_0) s'il existe un homéomorphisme $\varphi : M \rightarrow \tilde{M}$ tel que $a_0 = \tilde{a}_0 \circ \varphi$. Le graphe de Reeb détermine le type topologique de a_0 , c'est-à-dire la classe d'équivalence de (M, a_0) pour cette relation. Une manière simple et visuelle de construire un représentant (\tilde{M}, \tilde{a}_0) de cette classe d'équivalence consiste à « épaisir » les branches du graphe, ce qui donne \tilde{M} , et prendre pour \tilde{a}_0 la fonction hauteur sur \tilde{M} .

Si on souhaite retrouver la dynamique hamiltonienne associée à a_0 , cette notion d'équivalence topologique est insuffisante; on a besoin d'introduire une notion d'équivalence symplectique. On rappelle que (M, a_0) et (\tilde{M}, \tilde{a}_0) sont *symplectiquement équivalents* s'il existe un symplectomorphisme $\varphi : M \rightarrow \tilde{M}$ tel que $a_0 = \tilde{a}_0 \circ \varphi$. Le graphe de Reeb seul ne suffit pas pour déterminer la classe d'équivalence de (M, a_0) ; c'est pourquoi il est nécessaire d'introduire sa version pondérée, c'est-à-dire le graphe de Reeb dont les arêtes sont munies d'une longueur et les points de bifurcation de deux séries de Taylor formelles. La longueur d'une arête est obtenue *via* la mesure μ induite sur \mathcal{G} par la mesure naturelle définie par ω sur M , tandis que les séries de Taylor associées à un point de bifurcation proviennent de l'expression de μ dans un voisinage de celui-ci. Si deux systèmes (M, a_0) et (\tilde{M}, \tilde{a}_0) ont le même graphe de Reeb pondéré, ils ne sont pas forcément symplectiquement équivalents, mais il existe un symplectomorphisme $\varphi : M \rightarrow \tilde{M}$ tel que a_0 et $\tilde{a}_0 \circ \varphi$ définissent le même feuilletage sur M .

La stratégie est donc la suivante : dans un premier temps, on détermine la topologie globale du système grâce au graphe de Reeb « nu », c'est-à-dire en obtenant la position relative des sommets de \mathcal{G} (donc des points critiques sur M) et le nombre d'arêtes (donc le nombre de composantes connexes) entre deux sommets consécutifs. Ensuite, on retrouve le symbole principal à symplectomorphisme près, ce qui nécessite de connaître, en plus de ces informations, les longueurs des arêtes ainsi que les séries de Taylor aux points de bifurcation.

6.3 Topologie globale

6.3.1 Singularités

Soit $I = a_0(M)$ l'image de M par le symbole principal. On souhaite déterminer le type de chaque élément $E \in I$; en d'autres termes, on veut pouvoir décider si E est une valeur régulière ou singulière pour a_0 et, dans ce dernier cas, savoir s'il s'agit d'une valeur elliptique ou hyperbolique.

Proposition 6.3.1. *Soit $\gamma \in]1/2, 1[$, $c > 0$ et posons, pour $E \in I$:*

$$\rho_{\gamma,c}(E, k) = \frac{k^{\gamma-1}}{c} \# (\text{Sp}(A_k) \cap]E - ck^{-\gamma}, E + ck^{-\gamma}[).$$

Alors, pour tout $E \in I$, la limite $\rho_{\gamma,c}(E)$ existe dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ et

1. si E est une valeur régulière, alors $\rho_{\gamma,c}$ est de classe C^∞ en E ,
2. si E est une valeur critique elliptique, alors $\rho_{\gamma,c}$ est discontinue en E ,
3. si E est une valeur critique hyperbolique, alors $\rho_{\gamma,c}(E) = +\infty$.

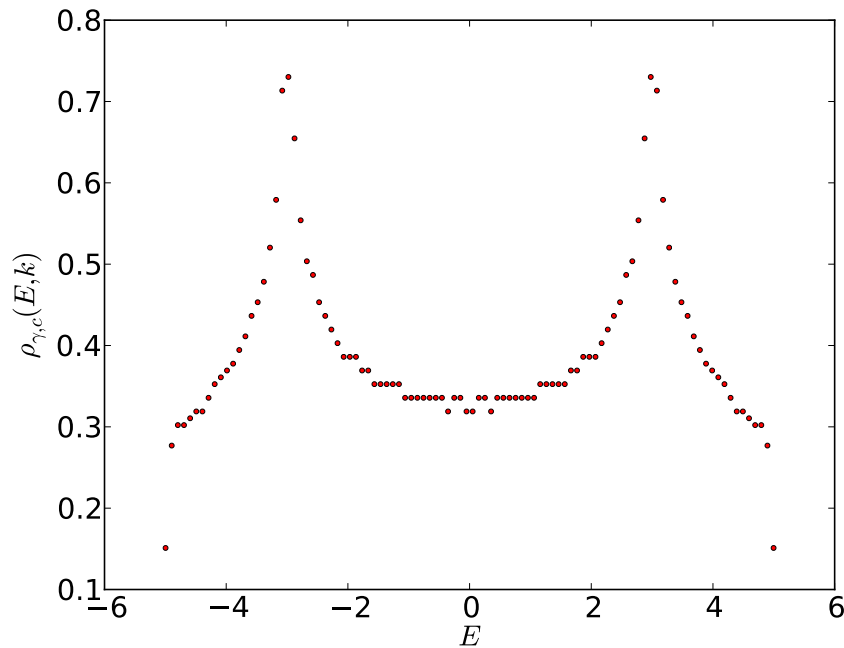


FIGURE 6.2 – Tracé de $\rho_{\gamma,c}(\cdot, k)$ pour la fonction hauteur sur le tore de rayons $(R, r) = (4, 1)$, avec $\gamma = 0.7$, $c = 15$ et $k = 1000$.

Démonstration. Commençons par traiter le cas où E est une valeur régulière de a_0 . Dans ce cas, les conditions de Bohr-Sommerfeld affirment qu'il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle que l'intersection du spectre de A_k et de l'intervalle $[E - \varepsilon, E + \varepsilon]$ est à $O(k^{-\infty})$ près de la réunion de N familles σ_j , $1 \leq j \leq N$, avec N le nombre de composantes connexes du niveau $a_0^{-1}(E)$, dont les éléments sont les solutions de

$$g^{(j)}(\lambda, k) \in 2\pi k^{-1}\mathbb{Z} \quad (6.1)$$

où $g^{(j)}(\cdot, k)$ est une suite de fonctions de classe \mathcal{C}^∞ admettant un développement asymptotique de la forme $g^{(j)}(\lambda, k) \sim \sum_{\ell \geq 0} k^{-\ell} g_\ell(\lambda)$. De plus, le premier terme est $g_0^{(j)}(\lambda) = c_0(\mathcal{C}_j(\lambda))$ où c_0 est l'action principale et $\mathcal{C}_j(\lambda)$ est la j -ème composante connexe de $a_0^{-1}(\lambda)$, choisie de sorte que $\lambda \mapsto \mathcal{C}_j(\lambda)$ est \mathcal{C}^∞ . Étant donné $\eta > 0$, pour k assez grand, l'équation (6.1) donne

$$\#(\sigma_j \cap]E - \eta, E + \eta[) = \frac{k}{2\pi} \left| g^{(j)}(E + \eta, k) - g^{(j)}(E - \eta, k) \right| + \nu(\eta, k)$$

où $\nu(\eta, k) \in [-1, 1]$ est introduite pour tenir compte de la partie entière qui intervient dans le calcul. En utilisant le développement de Taylor de $g_0^{(j)}$ au voisinage de E et le développement asymptotique de $g^{(j)}(\cdot, k)$, et en posant $\eta = ck^{-\gamma}$, on obtient

$$\frac{k^{\gamma-1}}{c} \#(\sigma_j \cap]E - ck^{-\gamma}, E + ck^{-\gamma}[) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{\pi} \left| \frac{\partial g_0^{(j)}}{\partial \lambda}(E) \right|.$$

Ainsi, $\rho_{\gamma,c}(E, k)$ tend vers $\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N \left| \frac{\partial g_0^{(j)}}{\partial \lambda}(E) \right|$; cette quantité dépend de manière \mathcal{C}^∞ de E variant dans un intervalle de points réguliers car $\frac{\partial g_0^{(j)}}{\partial \lambda}(E)$ ne s'y annule pas.

Lorsque E est une valeur critique elliptique, on sait par hypothèse qu'il existe un seul point critique s sur $a_0^{-1}(E)$; notons j_0 l'indice de la composante connexe qui contient celui-ci. Encore une fois, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\text{Sp}(A_k) \cap]E - \varepsilon, E + \varepsilon[$ est, modulo $O(k^{-\infty})$, une réunion de familles σ_j , $1 \leq j \leq N$, et, pour $j \neq j_0$, σ_j est donnée par une équation identique à (6.1). Sans perte de généralité, on peut supposer que s est un minimum local de a_0 . Alors, pour λ proche de E , $\mathcal{C}_{j_0}(\lambda)$ est vide si $\lambda < E$, un cercle si $\lambda > E$ et égale à $\{s\}$ si $\lambda = E$. Dès lors, les éléments de σ_{j_0} sont les solutions de

$$f^{(j_0)}(\lambda, k) \in 2\pi k^{-1}\mathbb{N}$$

où $f^{(j_0)}(\cdot, k)$ est une suite de fonctions lisses admettant un développement asymptotique de la forme $f^{(j_0)}(\cdot, k) \sim \sum_{\ell \geq 0} k^{-\ell} f_\ell$ (voir chapitre 4). En outre, pour λ dans $[E, E + \varepsilon[$, on a $f_0^{(j_0)}(\lambda) = c_0(\mathcal{C}_{j_0}(\lambda)) = g_0^{(j_0)}(\lambda)$. On en déduit comme précédemment que $\rho_{\gamma,c}(\lambda, k)$ tend vers 0 si λ appartient à $]E - \varepsilon, E[$, $\frac{1}{\pi} \left| \frac{\partial g_0^{(j_0)}}{\partial \lambda}(\lambda) \right|$ si λ appartient à $]E, E + \varepsilon[$, et $\frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial g_0^{(j_0)}}{\partial \lambda}(E) \right|$ si $\lambda = E$.

Enfin, près d'une valeur critique hyperbolique, on peut utiliser les conditions de Bohr-Sommerfeld (voir chapitre 5) pour montrer comme dans [69] que le nombre de valeurs propres dans un voisinage de taille $k^{-\gamma}$ est d'ordre $k^{1-\gamma} \ln(k)$. \square

6.3.2 Composantes connexes

Soit J un segment de valeurs régulières de a_0 . On souhaite déterminer le nombre N de composantes connexes de $a_0^{-1}(\lambda)$ pour λ dans J . On note $\tau_j(\lambda)$ la période primitive du flot de X_{a_0} sur $\mathcal{C}_j(\lambda)$. Signalons que $\tau_j(\lambda) = \frac{\partial g_0^{(j)}}{\partial \lambda}(\lambda)$ avec $g_0^{(j)}(\lambda) = c_0(\mathcal{C}_j(\lambda))$.

Définition 6.3.2. Un point $(\lambda, t) \in J \times \mathbb{R}^*$ est dit *résonant* s'il existe deux couples (j, p) et (j', p') dans $\llbracket 1, N \rrbracket \times \mathbb{Z}^*$ avec $j \neq j'$ tels que $p\tau_j(\lambda) = p'\tau_{j'}(\lambda) = -t$.

On fait l'hypothèse suivante sur les points résonants.

(H1) L'ensemble des points résonants de $J \times \mathbb{R}$ est discret.

Proposition 6.3.3. *Sous l'hypothèse (H1), le nombre N de composantes connexes de $a_0^{-1}(\lambda)$, $\lambda \in J$, est déterminé par $\text{Sp}(A_k) \cap J$ modulo $O(k^{-2})$.*

On introduit le réseau de périodes

$$\mathcal{L}_j(J) = \{(\lambda, p\tau_j(\lambda)), \quad \lambda \in J, p \in \mathbb{Z}\},$$

puis $\mathcal{L}(J) = \bigcup_{j=1}^N \mathcal{L}_j(J)$. $\mathcal{L}(J)$ est la réunion de graphes de fonctions \mathcal{C}^∞ qui peuvent s'intersecter; les points d'intersection pour $p \neq 0$ sont les points résonants. La preuve de la proposition précédente s'effectue alors en deux étapes : premièrement, on montre que $\text{Sp}(A_k) \cap J$ modulo $O(k^{-2})$ détermine $\mathcal{L}(J)$. Enfin, on prouve que grâce à l'hypothèse (H1), la donnée de $\mathcal{L}(J)$ permet de retrouver N .

Le premier résultat provient de l'étude de la mesure spectrale

$$D_0(\lambda, k) = \sum_{E \in \text{Sp}(A_k) \cap J} \chi(E) \delta_E(\lambda)$$

où $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ est compactement supportée dans l'intérieur de J et vaut 1 sur un segment J' contenu dans l'intérieur de J . On peut montrer grâce aux conditions de Bohr-Sommerfeld que le front d'onde de la transformée de Fourier semi-classique

$$Z(t, k) = \sum_{E \in \text{Sp}(A_k) \cap J} \chi(E) \exp(-itkE)$$

de cette mesure vérifie

$$\text{WF}_k(Z(\cdot, k)) = \mathcal{L}(J').$$

Une fois obtenu $\mathcal{L}(J)$, un simple raisonnement inductif (en se servant de l'hypothèse (H1)) permet de retrouver le nombre N de composantes connexes. En effet, on peut se ramener à un sous-intervalle $\tilde{J} \subset J$ et trouver $R > 0$ tels que l'ensemble $\tilde{J} \times]0, R]$ ne contient aucun point résonant, puis compter les graphes des périodes dans ce dernier. Notons, et c'est important pour la suite, qu'on retrouve par ce procédé les périodes τ_1, \dots, τ_N dans l'intervalle \tilde{J} .

6.3.3 Équivalence topologique

On dispose alors d'un moyen de connaître les sommets du graphe de Reeb, de préciser s'ils correspondent à des valeurs elliptiques ou hyperboliques, et d'obtenir le nombre d'arêtes entre deux quelconques d'entre eux. On en déduit le théorème suivant.

Théorème 6.3.4. *En supposant qu'entre deux valeurs critiques, il existe toujours un intervalle non vide J vérifiant l'hypothèse (H1), le spectre de A_k modulo $O(k^{-2})$ détermine le type topologique de a_0 .*

6.4 Géométrie symplectique

6.4.1 Longueurs des arêtes

Soient $c_1 < \dots < c_n$ les valeurs critiques de a_0 , et, pour $1 \leq i \leq n$, $J_i =]c_i, c_{i+1}[$.

Définition 6.4.1. Soit $(\lambda, t) \in J_i \times \mathbb{R}$ un point résonant pour a_0 , c'est-à-dire qu'il existe des entiers p, p', j et $j' \neq j$ tels que $p\tau_j(\lambda) = p'\tau_{j'}(\lambda) = -t$. On dit que la résonance est *faiblement transverse* s'il existe un entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$j\tau_p^{(m)}(\lambda) \neq j'\tau_{p'}^{(m)}(\lambda).$$

(H2) Tous les points résonants dans $J_i \times \mathbb{R}$ sont faiblement transverses.

Proposition 6.4.2. *Sous l'hypothèse (H2), la connaissance de $\text{Sp}(A_k) \cap J_i$ modulo $O(k^{-2})$ permet d'obtenir les longueurs des arêtes de \mathcal{G} correspondant aux composantes connexes de $a_0^{-1}(J_i)$.*

Démonstration. Notons $\mathcal{C}_r(J_i)$, $1 \leq r \leq N$ les composantes connexes de $a_0^{-1}(J_i)$. Étant donnée une variable d'action $K_{r,i} \in \mathcal{C}^\infty(J_i)$ (unique à un signe et une constante près), la longueur de l'arête correspondante est donnée par

$$\ell_{r,i} = \left| \lim_{\lambda \rightarrow c_i} K_{r,i}(\lambda) - \lim_{\lambda \rightarrow c_{i+1}} K_{r,i}(\lambda) \right|$$

Il résulte de l'étude des modèles locaux près des points critiques que cette longueur est finie. C'est simple près d'un point elliptique. Près d'un point hyperbolique s , il existe des coordonnées locales symplectiques (x, ξ) telles que le feuilletage est défini par $q = x\xi$, $q > 0$ sur les *branches* (les deux arêtes correspondant aux faces internes du « huit ») et $q < 0$ sur le *tronc* (la troisième arête partant du sommet correspondant à s). Dans ces coordonnées locales, la mesure μ s'exprime par les formules

$$\begin{cases} d\mu_\alpha(q) = (\ln(q) + g_\alpha(q))dq & \text{sur chaque branche } \alpha = 1, 2, \\ d\mu(q) = (2 \ln |q| + g(q))dq & \text{sur le tronc} \end{cases} \quad (6.2)$$

pour certaines fonctions lisses g, g_1, g_2 vérifiant

$$\forall m \geq 0 \quad g^{(m)}(0) = g_1^{(m)}(0) + g_2^{(m)}(0).$$

Près du point critique, sur chaque arête, l'action est donc en $q \ln(q) + h(q)$ avec h une fonction de classe \mathcal{C}^∞ .

On a vu qu'on pouvait retrouver les périodes $\tau_r(\lambda)$, $1 \leq r \leq N$, pour λ dans un sous-intervalle de J_i pour lequel les graphes des périodes ne se croisent pas. Pour retrouver les périodes sur tout J_i , la difficulté est de placer correctement les indices r à un croisement ; cette difficulté est levée par l'hypothèse (H2). Maintenant, si on fixe une valeur $\lambda_i \in J_i$, une action $K_{r,i}$ est donnée par

$$\forall \lambda \in J_i \quad K_{r,i}(\lambda) = \int_{\lambda_i}^{\lambda} \tau_r(\lambda) d\lambda.$$

On obtient alors la longueur $\ell_{r,i}$. □

6.4.2 Séries de Taylor aux points de bifurcation

Les séries de Taylor associées aux points de bifurcation sont celles des fonctions g_1, g_2 définies dans l'équation (6.2) en 0. Expliquons rapidement comment retrouver celles-ci ; on montre en fait comment retrouver la série de Taylor de g en 0, mais la démarche est identique. D'après le lemme de Morse isochore [36], il existe des coordonnées symplectiques localement près du point hyperbolique s et une fonction lisse $f : (\mathbb{R}, E_c = a_0(s)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ avec $f'(E_c) \neq 0$ telles que $f \circ a_0 = x\xi = q$. En supposant que $f'(E_c) > 0$, la formule (6.2) livre alors, pour $\lambda < E_c$ (c'est-à-dire sur le tronç) suffisamment proche de E_c :

$$d\mu(\lambda) = \left(2 \ln |f(\lambda)| + g(f(\lambda))\right) f'(\lambda) d\lambda.$$

D'autre part, si $\mathcal{C}_r(J_i)$ est la composante connexe correspondant au tronç, on a $d\mu(\lambda) = \tau_r(\lambda) d\lambda$ là où ceci a un sens. En utilisant des formules de Taylor pour développer le membre de droite de l'égalité

$$\tau_r(\lambda) = \left(2 \ln |f(\lambda)| + g(f(\lambda))\right) f'(\lambda),$$

on déduit la série de Taylor de f en E_c , puis celle de g en 0, de la connaissance de la période τ_r .

6.4.3 Équivalence symplectique

Théorème 6.4.3. *En supposant que pour $1 \leq i \leq n$, J_i vérifie les hypothèses (H1) et (H2), le spectre de A_k modulo $O(k^{-2})$ détermine le type symplectique de a_0 .*

Démonstration. D'après ce qui précède, le spectre de A_k modulo $O(k^{-2})$ détermine le graphe de Reeb pondéré de (M, a_0) . Ainsi, si deux opérateurs A_k, \tilde{A}_k définis sur M, \tilde{M} et de symboles principaux a_0, \tilde{a}_0 ont le même spectre à $O(k^{-2})$ près, il existe un symplectomorphisme $\varphi : M \rightarrow \tilde{M}$ tel que a_0 et $\tilde{a}_0 \circ \varphi$ définissent le même feuilletage sur M . Donc pour chaque composante connexe $\mathcal{C}_r(J_i)$, il existe une fonction lisse inversible $f : J_i \rightarrow J_i$ telle que $a_0 = f \circ \tilde{a}_0 \circ \varphi$ sur $\mathcal{C}_r(J_i)$. Puisque φ fixe les niveaux $p^{-1}(c_i)$, φ s'étend en un homéomorphisme de $\overline{J_i}$.

D'après les preuves précédentes, on sait que pour λ dans J_i , on a l'égalité des périodes $\tau_r(\lambda) = \tilde{\tau}_r(\lambda)$. En passant aux actions, cela permet d'obtenir que $K_{r,i}(\lambda) = K_{r,i}(f(\lambda))$ pour λ dans J_i ; puisque $K_{r,i}$ est strictement monotone sur J_i , cela implique que f est l'identité sur J_i , puis que $a_0 = \tilde{a}_0 \circ \varphi$ sur M par continuité. \square

Chapitre 7

Formules d'Euler-MacLaurin pour des polytopes

Ce chapitre, qui ne traite pas des opérateurs de Toeplitz, est la retranscription de la prépublication [73], écrite en collaboration avec Álvaro Pelayo. Nous y retrouvons des formules d'Euler-MacLaurin pour les fonctions f de classe \mathcal{C}^∞ à support compact sur des intervalles, des polygones, et des polytopes en dimension trois, dans lesquelles les coefficients du développement asymptotique sont des sommes d'opérateurs intégral-différentiels appliqués à f , qui ne font intervenir que les dérivées de f dans des directions normales aux faces du polytope. Nous donnons également des formules pour les coins (*wedge*) en dimension quelconque. De telles formules ont été écrites en toute dimension par Tate [91], mais nous les obtenons ici d'une manière plus élémentaire. Ce travail s'appuie sur, et est motivé par, les travaux de Guillemin, Sternberg, et d'autres auteurs, durant les dix dernières années.

7.1 Introduction

Let Δ be a polytope in \mathbb{R}^n . Euler-MacLaurin formulas are expressions which may be used to approximate Riemann sums of smooth functions $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ such as

$$\frac{1}{N^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \cap N\Delta} f\left(\frac{k}{N}\right),$$

in terms of integrals involving f . Such formulas may be traced back to the work of L. Euler and C. MacLaurin in the first half of the XIX century.

Partly due to its connections to other areas of mathematics, this topic has attracted great interest recently, see for instance Berline-Vergne [5], Brion-Vergne [14], Cappell-Shaneson [17], Guillemin-Sternberg [49], Guillemin-Sternberg-Weitsman [53], Guillemin-Stroock [54], Guillemin-Wang [52], Karshon-Sternberg-Weitsman [65], Shaneson [88], Tate [91], and Vergne [96].

In this paper our goal is to obtain explicit Euler-MacLaurin formulas for compactly supported functions f on wedges in \mathbb{R}^n , intervals, polygons, and polytopes Δ in \mathbb{R}^3 (Figure 7.1), where the coefficients in the asymptotic expansion are sums of differential operators involving only derivatives of f in directions normal to the faces of Δ . The only reason to restrict ourselves to intervals, polygons and 3-polytopes, is because of technical difficulties due to our method of proof. We plan to extend our techniques to higher dimensions in future works. Our formulas apply to wedges (Figure 7.2) of any dimension. We will recover several of the formulas which Tate [91] obtained for wedges and polytopes in any dimension; however, our proof is different from Tate's. Indeed, in [91], the author begins applying general results of Berline-Vergne [5] and obtains his formulas through the study of Szasz functions, whereas in our work, we start from a result of Guillemin-Sternberg [49] and use only elementary freshman calculus to obtain our formulas. Since Guillemin and Sternberg obtained their formulas (also) using only freshman calculus, the proofs (and the general approach) we present in this paper may be considered elementary. In the case of polygons Δ , our approach leads to formulas in which the coefficients in the asymptotic expansion can be explicitly calculated, and we do so in Section 7.7.

In [28, Section 5, Theorem 5.9] Charles and Vũ Ngọc obtained asymptotic expansions for a sum over integral points of a convex polytope, and computed explicitly the first term of this expansion.

Our interest in Euler-MacLaurin formulas originates mainly in the applications they have in spectral theory of differential operators, see for instance the recent articles of Burns-Guillemin-Wang [16] and Zelditch [105]. Euler-MacLaurin formulas are also connected to major problems in number theory, see eg. Lagarias [70].

The structure of the paper is as follows: in Section 7.2 we will state our main result, and the remaining sections of the paper are devoted to its proof and further refinements.

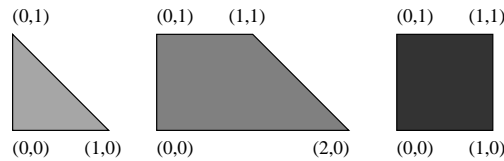


Figure 7.1: Delzant polygons.

7.2 Main Result

Let $n \geq 1$ and let \mathbb{Z}^n be the integer lattice in \mathbb{R}^n . Let $(\mathbb{Z}^n)^*$ and $(\mathbb{R}^n)^*$ be the corresponding dual spaces. Let $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denote the pairing of $(\mathbb{R}^n)^*$ with \mathbb{R}^n . The subset $W \subset \mathbb{R}^n$ given by the inequalities

$$\langle u_i, x \rangle \leq c_i, \quad i \in \{1, \dots, m\} \tag{7.1}$$

is called an *integer m -wedge* if for every $i \in \{1, \dots, m\}$ the constant c_i is an integer and the vector u_i is a primitive lattice vector in $(\mathbb{R}^n)^*$. Let U be the subspace of $(\mathbb{R}^n)^*$ spanned by the u_i 's. We say that W is *regular* if $\{u_1, \dots, u_m\}$ is a lattice basis of the lattice $U \cap (\mathbb{Z}^n)^*$.

When $m = n$, define the diffeomorphism $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, such that $\varphi(x) = y$ has coordinates $y_i := \langle u_i, x \rangle - c_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$, in the standard orthonormal basis of \mathbb{R}^n . Let \mathcal{H}_i be the facet of W defined by

$$\mathcal{H}_i := \{x \in W \mid \langle u_i, x \rangle = c_i\}.$$

For $\alpha = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{N}^n$, set $F = \bigcap_{i, \alpha_i > 0} \mathcal{H}_i$ and let $K_\alpha(W)$ be the Jacobian of the diffeomorphism $\varphi|_F$, and

$$\int_F^* := K_\alpha(W) \int_F.$$

Let $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ be the dual basis of $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$. The constant $K_\alpha(W)$ is the volume of the parallelotope formed by the vectors v_i for i such that $\alpha_i = 0$, that is, the primitive outwards vectors defining the face F . We introduce the following notations:

- $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$;
- $r(\alpha) \in \mathbb{N}^n$ is given by $r(\alpha)_i = 1$ if $\alpha_i > 0$, $r(\alpha)_i = 0$ if $\alpha_i = 0$;
- if $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$, u_α is the $|\alpha|$ -tuple of vectors

$$u_\alpha = \underbrace{(u_1, \dots, u_1)}_{\alpha_1 \text{ times}}, \dots, \underbrace{(u_n, \dots, u_n)}_{\alpha_n \text{ times}};$$

- $\nu(\alpha)$ stands for the number of indices i such that $\alpha_i > 0$.

We define b_n , $n \geq 0$ as follows: $b_0 = 1$, $b_1 = 1/2$, $b_{2p+1} = 0$ if $p \geq 1$ and $b_{2p} = (-1)^{p-1} B_p$, with B_p the p -th Bernoulli number. Let

$$C(W, \alpha) := \left(\frac{1}{\alpha!} \prod_{i=1}^n b_{\alpha_i} \right) K_\alpha(W).$$

A regular n -wedge is an example of an n -dimensional Delzant polytope. Let $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ be an n -dimensional polytope. We say that Δ is *Delzant* if it is a simple and regular polytope¹. Suppose that Δ has d facets. Then Δ is defined by d equations: $\langle u_i, x \rangle \leq c_i$, where $i \in \{1, \dots, d\}$. For $q \in \llbracket 1, n \rrbracket$, we denote by \mathcal{F}_q the set of faces of codimension q of Δ .

The following theorem gives asymptotic Euler-MacLaurin formulas for Riemann sums. It holds in any dimension for wedges, and in dimensions 1, 2, and 3 for polytopes. The case of 4-dimensional polytopes is more complicated to handle with our techniques, and we leave it to future works (see the remark after theorem 7.5.4). The first assertion of the theorem is similar to [91, Proposition 3.1], and the second one is similar to [91, Theorem 5.3].

Theorem 7.2.1. *Let $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Then the following hold.*

(i) *If W is a regular n -dimensional wedge in \mathbb{R}^n ,*

$$\frac{1}{N^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \cap NW} f\left(\frac{k}{N}\right)$$

is asymptotically

$$\sum_{q \geq 0} N^{-q} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| = q}} C(W, \alpha) \int_{\bigcap_{\substack{1 \leq i \leq d \\ \alpha_i > 0}} \mathcal{H}_i} D^{q-\nu(\alpha)} f \cdot v_{\alpha-r(\alpha)},$$

where the integral is taken over W if the intersection is empty, and the integral over a single point means evaluation at this point.

(ii) *If $\Delta \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \{1, 2, 3\}$, is an n -dimensional Delzant polytope with vertices in \mathbb{Z}^n , for every $q \geq 1$ and every face $F \in \mathcal{F}_m$ with $m \leq q$, there exists a linear differential operator $R_q(F, \cdot)$ of degree $q - m$ depending only on F and involving only derivatives of f in directions normal to F such that*

$$\frac{1}{N^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \cap N\Delta} f\left(\frac{k}{N}\right) = \int_{\Delta} f + \sum_{q \geq 1} N^{-q} \sum_{\substack{1 \leq m \leq q \\ F \in \mathcal{F}_m}} \int_F^* R_q(F, f) + \mathcal{O}(N^{-\infty}).$$

Theorem 7.2.1 will follow from combining several upcoming results:

- Proposition 7.4.1;
- Theorem 7.6.1;
- Theorem 7.5.4.

Some of the results of the paper are more general than Theorem 7.2.1, but we leave them to later sections for simplicity. Our proof of Theorem 7.2.1 is different than the one given in Tate's general result [91, Theorem 5.2], self-contained, and elementary (in the sense that it relies only on freshman calculus). We expect to extend part (ii) of Theorem 7.2.1 to higher dimensions in future works.

In the case where Δ is a polygon, we give concrete expressions for the coefficients in the formula in Theorem 7.2.1, see Theorem 7.7.2.

1. Δ is *simple* if there are exactly n edges meeting at each vertex of Δ ; it is *regular* if the primitive vectors in the direction of the edges span a basis of \mathbb{Z}^n , i.e. for each vertex v of Δ , the edges of Δ which intersect at v lie on rays $v + t\alpha_i$, $0 \leq t < \infty$, where α is a lattice basis of \mathbb{Z}^n .

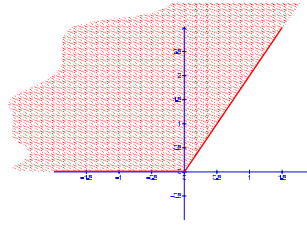


Figure 7.2: A 2-dimensional wedge.

7.3 Guillemin-Sternberg formulas for regular wedges and Delzant polytopes

7.3.1 Formula for regular wedges

The following approximation result was recently proven by Guillemin-Sternberg [49].

Lemma 7.3.1. *Let W be a regular integer m -wedge defined by (7.1). Let W_h be the perturbed set defined by $\langle u_i, x \rangle \leq c_i + h_i$, $i \in \{1, \dots, m\}$, where $h = (h_1, \dots, h_m)$. Then, if $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, we have that*

$$\frac{1}{N^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \cap NW} f\left(\frac{k}{N}\right) \sim \left(\tau\left(\frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial h}\right) \int_{W_h} f(x) dx \right) (h=0),$$

where

$$\tau(s_1, \dots, s_m) = \tau(s_1) \dots \tau(s_m)$$

and $\tau(s_i)$ is the Todd function, on the variable s_i , for every $i \in \{1, \dots, m\}$. The sign \sim indicates equality modulo $\mathcal{O}(N^{-\infty})$.

7.3.2 Formula for Delzant (i.e. regular and simple) polytopes

Now let $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ be an n -dimensional Delzant polytope with vertices in \mathbb{Z}^n and exactly d facets. Then Δ is defined by the inequalities $\langle u^i, x \rangle \leq c_i$, $i \in \{1, \dots, d\}$ where c_i is an integer and $u^i \in (\mathbb{Z}^n)^*$ is a primitive vector perpendicular to the i^{th} -facet of Δ , and pointing outwards from Δ .

Because Δ is simple by assumption, every codimension k face of Δ is defined by a collection of equalities $\langle u^i, x \rangle = c_i$, $i \in F$, where F is a subset of k elements of the set $\{1, \dots, d\}$. Let W_F denote the k -wedge $\langle u^i, x \rangle \leq c_i$, $i \in F$. Because Δ is regular, each k -wedge W_F is regular.

Guillemin and Sternberg have recently shown [49] the following Euler-MacLaurin formula.

Theorem 7.3.2. *Let Δ be a Delzant polytope with vertices in \mathbb{Z}^n . Let Δ_h be the perturbed polytope defined by the equations $\langle u^i, x \rangle \leq c_i + h_i$, $i \in \{1, \dots, d\}$. Then, if $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,*

we have

$$\frac{1}{N^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \cap N\Delta} f\left(\frac{k}{N}\right) \sim \left(\tau\left(\frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial h}\right) \int_{\Delta_h} f(x) dx\right)(h=0),$$

where

$$\tau(s_1, \dots, s_d) = \tau(s_1) \dots \tau(s_d)$$

and $\tau(s_i)$ is the Todd function on the variable s_i , for every $i \in \{1, \dots, d\}$.

Remark. A general asymptotic Euler-MacLaurin formula for Riemann sums over lattice polytopes (simple or not) was given by Tate [91]. As far as we know, Theorem 7.3.2 does not follow from Tate's formula. Other Euler-MacLaurin formulas have been obtained by Berline-Vergne [5], Brion-Vergne [14], Cappell-Shaneson [17], Karshon-Sternberg-Weitsman [65], and Zelditch [105] among other authors.

7.4 Asymptotic expansion for regular wedges

Let W be a regular integer n -wedge defined by (7.1). Recall that $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ is the dual basis of $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ and \mathcal{H}_i is the facet of W defined by

$$\mathcal{H}_i = \{x \in W \mid \langle u_i, x \rangle = c_i\}.$$

Then v_i generates the edge $\bigcap_{j \neq i} \mathcal{H}_j$. For any integer q , we introduce the operator $T_q(W, \cdot)$ defined by

$$T_q(W, f) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| = q}} \left(\frac{1}{\alpha!} \prod_{i=1}^n b_{\alpha_i} \right) K_\alpha(W) \int_{\bigcap_{i, \alpha_i > 0} \mathcal{H}_i} D^{q-\nu(\alpha)} f \cdot v_{\alpha-\tau(\alpha)}$$

with the convention that the integral is taken over W if the intersection is empty, and that integrating a function over the vertex means evaluating it at the vertex. $K_\alpha(W)$ is a constant depending only on the face $\bigcap_{i, \alpha_i > 0} \mathcal{H}_i$, of which we gave an interpretation earlier.

Proposition 7.4.1. *If $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, we have that*

$$\frac{1}{N^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \cap NW} f\left(\frac{k}{N}\right) \sim \sum_{q \geq 0} N^{-q} T_q(f). \quad (7.2)$$

Proof. The idea of the proof is the following: first, we compute the full asymptotic expansion given by Lemma 7.3.1 in the case of the standard n -wedge $\{x \in \mathbb{R}^n; x_1 \leq 0, \dots, x_n \leq 0\}$. Then, we perform a change of variables to deal with the case of a general regular n -wedge.

We start by writing the expansion of $\tau(s_1, \dots, s_n) = \tau(s_1) \dots \tau(s_n)$; we recall that

$$\tau(s) = \frac{s}{1 - \exp(-s)} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \frac{s^n}{n!}.$$

Write

$$\tau(s_1, \dots, s_n) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha s^\alpha,$$

where $s^\alpha = s_1^{\alpha_1} \dots s_n^{\alpha_n}$. The coefficient S_q of N^{-q} in $\tau\left(\frac{\partial}{\partial h}\right)$ is equal to

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha|=q} a_\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial h^\alpha}$$

with

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial h^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial h_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial h_n^{\alpha_n}}.$$

Hence

$$S_q(f) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha|=q} \left(\frac{1}{\alpha!} \prod_{i=1}^n b_{\alpha_i} \right) \frac{\partial^\alpha}{\partial h^\alpha}.$$

From this result, we deduce a formula for the case of the standard wedge. Remember that

$$\int_{W_h} f(x) dx = \int_{-\infty}^{h_1} \dots \int_{-\infty}^{h_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n;$$

thus

$$\left(\frac{\partial}{\partial h_i} \int_{W_h} f(x) dx \right)_{|h=0} = \int_{-\infty}^0 \dots \int_{-\infty}^0 f(\widehat{x}_i) \widehat{dx}_i = \int_{\{x_i=0\}} f$$

where $\widehat{x}_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$ and $\widehat{dx}_i = dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n$. From this we obtain a general formula when $\alpha_i \geq 1$:

$$\left(\frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial h_i^{\alpha_i}} \int_{W_h} f(x) dx \right)_{|h=0} = \int_{\{x_i=0\}} \frac{\partial^{\alpha_i-1} f}{\partial x_i^{\alpha_i-1}}.$$

This finally yields

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial h^\alpha} \int_{W_h} f(x) dx = \int_{\bigcap_{i, \alpha_i > 0} \{x_i=0\}} \frac{\partial^{\alpha-r(\alpha)} f}{\partial x^{\alpha-r(\alpha)}}. \tag{7.3}$$

This gives the desired formula in the case of the standard wedge.

Let us now turn to the general case. Let W be the regular n -wedge defined by (7.1). Define the diffeomorphism $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, such that $\varphi(x) = y$ has the following coordinates in the standard orthonormal basis of \mathbb{R}^n :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad y_i = \langle u_i, x \rangle - c_i.$$

Then $\varphi(W)$ is the standard wedge; moreover, φ is a diffeomorphism from $\bigcap_{i \in I} \mathcal{H}_i$ to $\bigcap_{i \in I} \{x_i = 0\}$ for each subset I of $\llbracket 1, n \rrbracket$. We have that

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n \cap NW} f\left(\frac{k}{N}\right) = \sum_{\ell \in \varphi(\mathbb{Z}^n) \cap N\varphi(W)} g\left(\frac{\ell}{N}\right)^{c_i \text{ integers}} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n \cap N\varphi(W)} g\left(\frac{\ell}{N}\right)$$

with $g = f \circ \varphi^{-1}$. But we know from the previous case that

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n \cap N\varphi(W)} g\left(\frac{\ell}{N}\right) \sim \sum_{q \geq 0} N^{-q} T_q(\varphi(W), g);$$

therefore, it only remains to prove that for every $q \geq 0$,

$$T_q(\varphi(W), g) = T_q(W, f).$$

First, we have to express the quantity $\frac{\partial^m g}{\partial y_i^m}$ in terms of f . Since $g = f \circ \varphi^{-1}$, we have

$$\frac{\partial g}{\partial y_i}(y) = Df(\varphi^{-1}(y)) \cdot D_{y_i}(\varphi^{-1})(y);$$

but

$$\varphi^{-1}(y) = \sum_{j=1}^n (y_j + c_j) v_j,$$

so $D_{y_i}(\varphi^{-1})(y) = v_i$. It follows that

$$\frac{\partial g}{\partial y_i}(y) = Df(\varphi^{-1}(y)) \cdot v_i.$$

By induction, we find

$$\frac{\partial^m g}{\partial y_i^m}(y) = D^m f(\varphi^{-1}(y)) \cdot (v_i, \dots, v_i).$$

Now, we have to understand integrals of the form

$$I = \int_{\bigcap_{i, \alpha_i > 0} \{y_i = 0\}} \frac{\partial^{\alpha-r(\alpha)} g}{\partial y^{\alpha-r(\alpha)}}.$$

From the previous discussion

$$I = \int_{\varphi\left(\bigcap_{i, \alpha_i > 0} \mathcal{H}_i\right)} D^{|\alpha-r(\alpha)|} f(\varphi^{-1}(y)) \cdot v_{\alpha-r(\alpha)}.$$

Hence

$$I = K_\alpha(W) \int_{\bigcap_{i, \alpha_i > 0} \mathcal{H}_i} D^{q-\nu(\alpha)} f \cdot v_{\alpha-r(\alpha)}$$

where $K_\alpha(W)$ is the Jacobian of the diffeomorphism $\varphi|_{\bigcap_{i, \alpha_i > 0} \mathcal{H}_i}$, which was to be proved. \square

Another way to write this result is the following: we can eliminate the constants $K_\alpha(W)$ by normalizing the measure on the face $F = \bigcap_{i, \alpha_i > 0} \mathcal{H}_i$; we set $\int_F^* = K_\alpha(W) \int_F$.

7.5 Explicit asymptotic expansion for regular wedges

In order to deduce a formula for polygons and 3-dimensional polytopes, we need to rewrite the asymptotic expansion in Proposition 7.4.1 in a suitable form. Some of the results of this section apply for general $n \geq 1$, and when this is the case we present the most general version of the result. The final results require that we restrict to $n = 1, 2$, or 3.

7.5.1 General results

Recall that for $d \in \llbracket 1, n \rrbracket$, \mathcal{F}_d denotes the set of faces of codimension d of W . In order to simplify the notations, we set

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{\alpha!} \prod_{i=1}^n b_{\alpha_i}$$

for $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Our objective is to write a formula of the following kind:

$$T_q(W, f) = \sum_{d=0}^{n-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_d} S_q(F, f)$$

where $S_q(F, f)$ is a differential operator associated to the face F , with good properties in a sense that we will precise later. Let $F \in \mathcal{F}_d$. There exists a subset $I = \{i_1, \dots, i_d\}$ of $\llbracket 1, n \rrbracket$ such that $F = \bigcap_{j \in I} \mathcal{H}_j$; the family $(v_i)_{i \notin I}$ is a basis of the linear subspace spanned by F . A first expression for $S_q(F, f)$ is

$$S_q(F, f) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha|=q \\ \{i, \alpha_i > 0\} = I}} \lambda_\alpha \int_F^* D^{q-d} f \cdot v_{\alpha-r(\alpha)}.$$

Observe that if $d > q$, then $S_q(F, f) = 0$. If $d = q$, then $S_q(F, f)$ involves the integral

$$\int_F^* f.$$

When $d < q$, the situation is a little bit more complicated, because we integrate directional derivatives of f involving the vectors $v_i, i \in I$. But we would like to keep only quantities that depend on the face F and nothing else; this is why we decompose the vectors $v_i, i \in I$ as follows:

$$v_i = \sum_{j \notin I} \mu_{ij}^F v_j + \sum_{j \in I} \zeta_{ij}^F n_j \quad (7.4)$$

where n_j is the outward primitive normal to the facet \mathcal{H}_j . Next, we expand the quantity $D^{q-d} f \cdot v_{\alpha-r(\alpha)}$ as a linear combination of n^{q-d} terms involving the vectors $v_j, j \notin I$ and $n_j, j \in I$.

More precisely, write equation (7.4) as

$$v_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}^F w_j$$

where $\lambda_{ij}^F = \mu_{ij}^F$, $w_j = v_j$ if $j \notin I$ and $\lambda_{ij}^F = \zeta_{ij}^F$, $w_j = n_j$ if $j \in I$. Moreover, set $\beta = \alpha - r(\alpha)$ and define integers $k_\ell, 1 \leq \ell \leq q-d$ as follows: $k_\ell = i_1$ if $1 \leq \ell \leq \beta_{i_1}, \dots, k_\ell = i_d$ if $q-d - \beta_{i_d} \leq \ell \leq q-d$. Then

$$D^{q-d} f \cdot v_{\alpha-r(\alpha)} = D^{q-d} f \cdot \left(\sum_{j_1=1}^n \lambda_{k_1 j_1}^F w_{j_1}, \dots, \sum_{j_{q-d}=1}^n \lambda_{k_{q-d} j_{q-d}}^F w_{j_{q-d}} \right)$$

which can be written by multilinearity as

$$D^{q-d}f \cdot v_{\alpha-r(\alpha)} = \sum_{j_1, \dots, j_{q-d}=1}^n \left(\prod_{\ell=1}^{q-d} \lambda_{k_\ell j_\ell}^F \right) D^{q-d}f \cdot (w_{j_1}, \dots, w_{j_{q-d}}).$$

We now want to get rid of the vectors v_j , $j \notin I$ when they appear in the quantity

$$D^{q-d}f \cdot (w_{j_1}, \dots, w_{j_{q-d}}).$$

If j_1, \dots, j_{q-d} all belong to I , then only the normal vectors n_j appear, and we have nothing to do; this constitutes d^{q-d} favorable cases. In unfavorable cases, we use the following lemma.

Lemma 7.5.1. *For any function $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ and for every $j \notin I$, we have*

$$\int_F^* Dg \cdot v_j = \int_{F_j}^* g$$

where F_j is the face of codimension $d+1$ defined by $F_j = F \cap \mathcal{H}_j$.

Proof. Let the elements of $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus I$ be denoted by $x_j, x_{i_{d+2}}, \dots, x_{i_n}$. One has

$$\begin{aligned} \int_F^* Dg \cdot v_j &= \int_{\{x_{i_1}=\dots=x_{i_d}=0\}} Dg(\varphi^{-1}(x)) \cdot v_j \, dx_j dx_{i_{d+2}} \dots dx_{i_n} \\ &= \int_{\{x_{i_1}=\dots=x_{i_d}=0\}} Dg(\varphi^{-1}(x)) \cdot D_{x_j}(\varphi^{-1})(x) \, dx_j dx_{i_{d+2}} \dots dx_{i_n} \\ &= \int_{\{x_{i_1}=\dots=x_{i_d}=0\}} \frac{\partial}{\partial x_j} (g \circ \varphi^{-1})(x) \, dx_j dx_{i_{d+2}} \dots dx_{i_n} \\ &= \int_{\{x_{i_1}=\dots=x_{i_d}=x_j=0\}} (g \circ \varphi^{-1})(x) \, dx_{i_{d+2}} \dots dx_{i_n} = \int_{F_j}^* g. \end{aligned}$$

□

7.5.2 Results for regular 2 and 3-dimensional wedges

When $n = 1, 2, 3$, applying Lemma 7.5.1 to functions of the form

$$g = D^{q-d-1}f,$$

and repeating this as many times as necessary, we can get rid of all the vectors v_j , $j \notin I$ in the expression of

$$\int_F^* D^{q-d}f \cdot v_{\alpha-r(\alpha)},$$

and keep only integrals over faces of codimension greater than d of derivatives of f applied to vectors that are normal to the hyperplanes defining the faces.

Before we state and prove our result, let us introduce a few useful notations. Let $C(W, F)$ be the cone generated by the set

$$\{x - y, y \in W, x \in F\}.$$

If X is a non-empty subset of \mathbb{R}^n , let $L(X)$ be the vector subspace generated by the elements of the form $y - x$, $x, y \in X$.

The following two lemmas hold in any dimension (not just 2 and 3).

Lemma 7.5.2. *Decompose the vectors v_i , $i \in I$, as in equation (7.4). Choose another set of vectors $(w_i)_{i \in I}$ such that*

– $\forall i \in I$, w_i belongs to

$$L\left(\bigcap_{j \in [1, n] \setminus \{i\}} \mathcal{H}_j\right) \cap C(W, F),$$

– the family $((v_j)_{j \notin I}, (w_j)_{j \in I})$ is a primitive lattice basis, and write, for $i \in I$,

$$w_i = \sum_{j \notin I} \tilde{\mu}_{ij}^F v_j + \sum_{j \in I} \tilde{\zeta}_{ij}^F n_j.$$

Then for $j \in I$, we have $\tilde{\zeta}_{ij}^F = \zeta_{ij}^F$.

In other words, this means that the scalars ζ_{ij}^F only depend on the face F ; when F will be considered as a face of a polytope instead of a wedge, then the contribution coming from each wedge will display the same coefficient.

Proof. By definition of the vectors v_j , n_j , $1 \leq j \leq n$, one has

$$\forall \ell \in I \quad \langle v_i, n_\ell \rangle = \sum_{j \notin I} \zeta_{ij}^F \langle n_j, n_\ell \rangle. \quad (7.5)$$

Hence, the d coefficients ζ_{ij}^F , $j \in I$, are obtained by solving the linear system (7.5) of d equations. Now, we express the vector w_i in the basis $\mathcal{B} = (v_j)_{1 \leq j \leq n}$:

$$w_i = \sum_{j \notin I} \alpha_{ij} v_j + \sum_{j \in I} \beta_{ij} v_j.$$

Since the vector w_i belongs to $L(\bigcap_{j \in [1, n] \setminus \{i\}} \mathcal{H}_j)$, all the scalar products $\langle w_i, n_j \rangle$, $j \in I \setminus \{i\}$, vanish. This implies that for every $j \in I \setminus \{i\}$, $\beta_{ij} = 0$. Thus, the matrix M of change of basis from \mathcal{B} to

$$\mathcal{B}' = ((v_j)_{j \notin I}, (w_j)_{j \in I})$$

is of the form

$$M = \begin{pmatrix} I_{n-d} & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

where

$$B = \text{diag}(\beta_{11}, \dots, \beta_{dd}).$$

Since \mathcal{B} and \mathcal{B}' are primitive lattice bases, we have $\det(M) = \pm 1$, and hence for every $i \in I$, $\beta_{ii} = \pm 1$. But v_i and w_i belong to $C(W, F)$, so $\beta_{ii} = 1$. This yields that for $\ell \in I$, we have $\langle w_i, n_\ell \rangle = \langle v_i, n_\ell \rangle$. \square

Lemma 7.5.3. *Decompose the vectors v_i , $i \in I$, as in equation (7.4), and fix $j \notin I$. Set $J = I \cup \{j\}$, and choose another set of vectors $(w_i)_{i \in J}$ such that*

– $\forall i \in J$, w_i belongs to

$$L \left(\bigcap_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} \mathcal{H}_k \right) \cap C(W, F),$$

– the family $((v_i)_{i \notin J}, (w_i)_{i \in J})$ is a primitive lattice basis.

and write, for $i \in I$,

$$w_i = \tilde{\mu}_{ij}^F w_j + \sum_{k \notin J} \tilde{\mu}_{ik}^F v_k + \sum_{k \in I} \tilde{\zeta}_{ik}^F n_k.$$

Then we have $\tilde{\mu}_{ij}^F = \mu_{ij}^F$.

In other words, this means that the scalar μ_{ij}^F only depends on the face $F \cap \mathcal{H}_j$.

Proof. By definition of the vectors v_k , n_k , $1 \leq k \leq n$, one has

$$\forall k \notin I \quad \langle v_i, v_k \rangle = \sum_{\ell \notin I} \mu_{i\ell}^F \langle v_\ell, v_k \rangle,$$

which can be written in matrix form

$$A\nu = V \tag{7.6}$$

where V, ν are the column vectors given by

$$\forall \ell \notin I \quad V_\ell = \langle v_i, v_\ell \rangle, \quad \nu_\ell = \mu_{i\ell}^F$$

and A is the symmetric matrix whose generic coefficient is $A_{k,\ell} = \langle v_k, v_\ell \rangle$, $k, \ell \notin I$. Similarly, the constants $\tilde{\mu}_{i\ell}^F$ satisfy the system of equations

$$\forall k \notin J \quad \langle w_i, v_k \rangle = \tilde{\mu}_{ij}^F \langle w_j, v_k \rangle + \sum_{\ell \notin J} \tilde{\mu}_{i\ell}^F \langle v_\ell, v_k \rangle \tag{E_k}$$

and

$$\langle w_i, w_j \rangle = \tilde{\mu}_{ij}^F \|w_j\|^2 + \sum_{\ell \notin J} \tilde{\mu}_{i\ell}^F \langle v_\ell, w_j \rangle. \tag{E_i}$$

Thanks to the proof of the previous lemma, we know that there exists scalars $\alpha_{k\ell}$, $k \in J$, $\ell \notin J$ such that

$$\forall k \in J \quad w_k = v_k + \sum_{\ell \notin J} \alpha_{k\ell} v_\ell.$$

Hence we have

$$\langle w_i, w_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle + \sum_{\ell \notin J} \alpha_{j\ell} \langle v_i, v_\ell \rangle + \sum_{k \notin J} \alpha_{ik} \langle v_j, v_k \rangle + \sum_{k, \ell \notin J} \alpha_{ik} \alpha_{j\ell} \langle v_\ell, v_k \rangle$$

as well as

$$\begin{aligned} \forall k \notin J \quad \langle w_i, v_k \rangle &= \langle v_i, v_k \rangle + \sum_{\ell \notin J} \alpha_{i\ell} \langle v_k, v_\ell \rangle \\ \langle w_j, v_k \rangle &= \langle v_j, v_k \rangle + \sum_{\ell \notin J} \alpha_{j\ell} \langle v_k, v_\ell \rangle \end{aligned}$$

and

$$\|w_j\|^2 = \|v_j\|^2 + 2 \sum_{\ell \notin J} \alpha_{j\ell} + \sum_{k, \ell \notin J} \alpha_{j\ell} \alpha_{jk} \langle v_\ell, v_k \rangle.$$

Using these relations, equations (E_k) become

$$\langle v_i, v_k \rangle + \sum_{\ell \notin J} \alpha_{i\ell} \langle v_\ell, v_k \rangle = \tilde{\mu}_{ij}^F \langle v_j, v_k \rangle + \sum_{\ell \notin J} \left(\tilde{\mu}_{i\ell}^F + \tilde{\mu}_{ij}^F \alpha_{j\ell} \right) \langle v_\ell, v_k \rangle \quad (E'_k)$$

while equation (E_i) becomes

$$\begin{aligned} \langle v_i, v_j \rangle + \sum_{\ell \notin J} \alpha_{j\ell} \langle v_i, v_\ell \rangle + \sum_{k \notin J} \alpha_{ik} \langle v_j, v_k \rangle + \sum_{k, \ell \notin J} \alpha_{ik} \alpha_{j\ell} \langle v_k, v_\ell \rangle \\ = \tilde{\mu}_{ij}^F \|v_j\|^2 + 2 \sum_{\ell \notin J} \tilde{\mu}_{ij}^F \alpha_{j\ell} \langle v_j, v_\ell \rangle + \sum_{k, \ell \notin J} \tilde{\mu}_{ij}^F \alpha_{j\ell} \alpha_{jk} \langle v_k, v_\ell \rangle \\ + \sum_{\ell \notin J} \tilde{\mu}_{i\ell}^F \langle v_\ell, v_j \rangle + \sum_{k, \ell \notin J} \tilde{\mu}_{i\ell}^F \alpha_{jk} \langle v_k, v_\ell \rangle. \end{aligned} \quad (E'_i)$$

Considering the linear combination $(E'_i) - \sum_{k \notin J} \alpha_{jk} (E'_k)$, we replace equation (E'_i) by the new equation (we do not write the details of the computations)

$$\langle v_i, v_j \rangle + \sum_{k \notin J} \alpha_{ik} \langle v_j, v_k \rangle = \tilde{\mu}_{ij}^F \|v_j\|^2 + \sum_{\ell \notin J} \left(\tilde{\mu}_{i\ell}^F + \tilde{\mu}_{ij}^F \alpha_{j\ell} \right) \langle v_j, v_\ell \rangle.$$

Together with equations (E'_k) , this means that the coefficients $\tilde{\mu}_{i\ell}^F$ are solutions of the system

$$AU + V = A\tilde{\nu}$$

where A and V are as before, $\tilde{\nu}$ is defined as ν but with the coefficients $\tilde{\mu}_{i\ell}^F$ instead of $\mu_{i\ell}^F$, and U is the column vector whose entries are $U_j = 0$,

$$U_\ell = \alpha_{i\ell} - \tilde{\mu}_{ij}^F \alpha_{j\ell}.$$

Comparing this to (7.6) yields $\nu = \tilde{\nu} - U$, and in particular $\mu_{ij}^F = \tilde{\mu}_{ij}^F$. \square

Theorem 7.5.4. *Assume that $n \in \{1, 2, 3\}$. For every $q \geq 1$ and every face $F \in \mathcal{F}_d$ with $d \leq q$, there exists a linear differential operator $R_q(F, \cdot)$ of degree $q - d$ depending only on F (in the sense introduced in the previous lemmas) and involving only derivatives of f in directions normal to the face F such that*

$$T_q(W, f) = \sum_{d=0}^{n-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_d} \int_F^* R_q(F, f). \quad (7.7)$$

Proof. To compute $R_q(F, \cdot)$, we apply the previous technique to faces of codimension smaller than d and gather their contribution as integrals over F . It follows from Lemma 7.5.2 and Lemma 7.5.3 that $R_q(F, \cdot)$ depends only on the face F ; let us briefly explain how.

If $n = 2$, we have to handle two types of faces: the two edges ($d = 1$) and the vertex ($d = 2$) of the wedge. There is not much to say about the case of the vertex. When we integrate over an edge, and we apply our technique, we will find

- constants μ in front of derivatives of f evaluated at the vertex, and there is nothing to prove,
- constants ζ in front of integrals of derivatives of f on F , and Lemma 7.5.2 ensures that it only depends on the face F .

If $n = 3$, we have three types of faces, namely planes ($d = 1$), edges ($d = 2$) and the vertex ($d = 3$). The difference with the previous case is that when we consider integrals over a plane, we obtain integrals over edges belonging to this plane, each one displaying a factor μ ; Lemma 7.5.3 ensures that it only depends on the given edge. \square

Remark.

1. In dimension 4 and higher, the situation is more complicated, and Lemma 7.5.2 and Lemma 7.5.3 are not enough to obtain a similar theorem. Indeed, think of the following situation: we take $n = 4$ and want to evaluate

$$I = \int_{\mathcal{H}_1}^* D^2 f \cdot (v_1, v_1).$$

We start by expanding

$$v_1 = \mu_{12}^{\mathcal{H}_1} v_2 + \mu_{13}^{\mathcal{H}_1} v_3 + \mu_{14}^{\mathcal{H}_1} v_4 + \zeta_{11}^{\mathcal{H}_1} n_1,$$

and we apply Lemma 7.5.1 to obtain

$$\begin{aligned} I &= \mu_{12}^{\mathcal{H}_1} \int_{\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2}^* Df \cdot v_1 + \mu_{13}^{\mathcal{H}_1} \int_{\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_3}^* Df \cdot v_1 \\ &+ \mu_{14}^{\mathcal{H}_1} \int_{\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_4}^* Df \cdot v_1 + \zeta_{11}^{\mathcal{H}_1} \int_{\mathcal{H}_1}^* D^2 f \cdot (v_1, n_1). \end{aligned}$$

We have to apply the method one more time for each of these integrals. For instance, we put

$$K = \int_{\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2}^* Df \cdot v_1$$

and to compute this integral, we write

$$v_1 = \mu_{13}^{\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2} v_3 + \mu_{14}^{\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2} v_4 + \zeta_{11}^{\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2} n_1 + \zeta_{12}^{\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2} n_2$$

which yields, again thanks to Lemma 7.5.1

$$\begin{aligned} K &= \mu_{13}^{\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2} \int_{\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 \cap \mathcal{H}_3}^* f + \mu_{14}^{\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2} \int_{\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 \cap \mathcal{H}_4}^* f + \\ &\zeta_{11}^{\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2} \int_{\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2}^* Df \cdot n_1 + \zeta_{12}^{\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2} \int_{\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2}^* Df \cdot n_2 \end{aligned}$$

Hence, in the expression of I , we obtain the term

$$\mu_{12}^{\mathcal{H}_1} \mu_{13}^{\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2} \int_{\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 \cap \mathcal{H}_3}^* f;$$

does the factor only depend on the face $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 \cap \mathcal{H}_3$? We think that our previous lemmas are not enough to give an answer to this question.

2. In principle, one should be able to obtain expressions for the operators $R_q(F, f)$, but this leads to computations involving a very large number of constants, so it is not reasonable to try to write such an expression. However, if we restrict ourselves to dimension 2, we can be fully explicit, as we will see later.

7.6 Asymptotic expansion for polygons and 3-dimensional polytopes

As in Section 7.1, let $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ be a Delzant polytope with vertices in \mathbb{Z}^n in dimension $n \in \{1, 2, 3\}$ with equations $\langle u^i, x \rangle \leq c_i$, $i \in \{1, \dots, d\}$. Recall that for $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$, \mathcal{F}_m denotes the set of faces of codimension m of Δ .

We introduce as in Theorem 7.5.4 the operators $R_q(F, \cdot)$ associated to a face F of the polytope (remembering that it only depends on the face as part of the polytope). For any integer q , we define the operator $T_q(\Delta, \cdot)$ by

$$T_q(\Delta, f) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_m} \int_F^* R_q(F, f). \quad (7.8)$$

Theorem 7.6.1. *If $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, we have that*

$$\frac{1}{N^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \cap N\Delta} f\left(\frac{k}{N}\right) = \sum_{q \geq 0} N^{-q} T_q(\Delta, f).$$

Proof. Notice first that $\Delta = \bigcap_{i=1}^p W_i$ where p is the number of vertices of Δ and W_i is the regular wedge which is the intersection of the n facets \mathcal{H}_j^i , $1 \leq j \leq n$, intersecting at the vertex v_i . Cover Δ by open sets Ω_i , $1 \leq i \leq p$, such that Ω_i contains the vertex v_i and does not intersect any other facet than the \mathcal{H}_j^i , $1 \leq j \leq n$. Choose a partition of unity associated to this open covering and write $f = \sum_{i=1}^p f_i$ where $f_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ has support included in Ω_i . Then

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n \cap N\Delta} f\left(\frac{k}{N}\right) = \sum_{i=1}^p \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \cap NW_i} f_i\left(\frac{k}{N}\right).$$

Now, from formula (7.2), we know that for $1 \leq i \leq d$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n \cap NW_i} f_i\left(\frac{k}{N}\right) \sim \sum_{\alpha \geq 0} N^{-\alpha} T_\alpha(W_i, f_i);$$

hence it is enough to check that for all q

$$\sum_{i=1}^p T_q(W_i, f_i) = T_q(\Delta, f).$$

This amounts to show that for each face F of the polytope

$$\sum_{i=1}^p R_q(F, f_i) = R_q(F, f).$$

But this is clear because $R_q(F, \cdot)$ is linear and because $\sum_{i=1}^p f_i = f$. \square

7.7 Explicit formula in dimension $n = 2$

We would like to compute explicitly the operators $R_q(\Delta, \cdot)$; unfortunately, as already said, this seems to be quite complicated in all generality. However, we can give nice formulas in dimension 2.

Let Δ be a regular integer polygon defined by (7.1). In this case, we only have two types of faces: vertices (codimension 2) and edges (codimension 1). Let E (resp. V) be the set of edges (resp. vertices) of Δ . If e belongs to E , let n_e be the associated outward primitive normal vector; if v belongs to V , let $(w_1(v), w_2(v))$ be the integral basis of \mathbb{Z}^2 such that the two edges meeting at v are contained in the half-lines $v + \lambda w_i(v)$, $\lambda \geq 0$; we denote by e_i the edge generated by $w_i(v)$. Define the quantities

$$\eta_1(v) = \frac{\langle w_1(v), w_2(v) \rangle}{\|w_1(v)\|^2}, \quad \eta_2(v) = \frac{\langle w_1(v), w_2(v) \rangle}{\|w_2(v)\|^2}.$$

and $\mu(v) = \eta_1(v) + \eta_2(v)$.

Now, let e be an edge, and let $C(\Delta, e)$ be the cone generated by the set $\{x - y, y \in \Delta, x \in e\}$. Given a generator v_1 of $e \cap \mathbb{Z}^2$, there exists a vector $v_2 \in C(\Delta, e) \cap \mathbb{Z}^2$ such that (v_1, v_2) is a primitive lattice basis of \mathbb{Z}^2 .

Lemma 7.7.1 (Easy version of Lemma 7.5.2). *The quantity*

$$\zeta(e) = \frac{\langle v_2, n_e \rangle}{\|n_e\|^2}$$

does not depend on the choice of $v_2 \in C(\Delta, e) \cap \mathbb{Z}^2$.

Proof. The lemma follows from Lemma 7.5.2, but its proof is very simple, so we present it next. Choose another vector $w_2 \in C(\Delta, e) \cap \mathbb{Z}^2$ such that (v_1, w_2) is a primitive lattice basis of \mathbb{Z}^2 . Write $w_2 = \alpha v_1 + \beta v_2$; then, one has $\langle w_2, n_e \rangle = \beta \langle v_2, n_e \rangle$. The matrix of the change of the basis is of the form

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix};$$

because its determinant must be ± 1 , we have $\beta = \pm 1$. Since both v_2 and w_2 belong to $C(\Delta, e)$, the only possibility is $\beta = 1$. \square

Theorem 7.7.2. In Theorem 7.6.1 the operators $T_q(\Delta, \cdot)$ are given by:

- $T_0(\Delta, f) = \int_{\Delta} f(x) dx;$
- $T_1(\Delta, f) = \frac{1}{2} \sum_{e \in E} \int_e^* f;$
- $T_2(\Delta, f) = \sum_{v \in V} \left(\frac{1}{4} + \frac{\mu(v)}{12} \right) f(v) - \frac{1}{12} \sum_{e \in E} \zeta(e) \int_e^* Df \cdot n_e;$
- if $p > 1$, then

$$T_{2p}(\Delta, f) = \sum_{e \in E} R_{2p}(e, f) + \sum_{v \in V} R_{2p}(v, f)$$

where

$$R_{2p}(e, f) = (-1)^{p-1} \frac{B_p}{(2p)!} \zeta(e)^{2p-1} \int_e^* D^{2p-1} f \cdot (n_e, \dots, n_e)$$

and $R_{2p}(v, f)$ is equal to

$$\begin{aligned} & (-1)^{p-2} \sum_{\substack{m+\ell=p \\ m, \ell \geq 1}} \frac{B_m B_\ell}{(2m)!(2\ell)!} D^{2p-2} f(v) \cdot \underbrace{(w_1(v), \dots, w_1(v))}_{2m-1 \text{ times}} \underbrace{(w_2(v), \dots, w_2(v))}_{2\ell-1 \text{ times}} \\ & + (-1)^{p-2} \frac{B_p}{(2p)!} \eta_1(v) \sum_{k=0}^{2p-2} \zeta(e_1)^k D^{2p-2} f \cdot \underbrace{(n_{e_1}, \dots, n_{e_1})}_{k \text{ times}} \underbrace{(w_2(v), \dots, w_2(v))}_{2p-2-k \text{ times}} \\ & + (-1)^{p-2} \frac{B_p}{(2p)!} \eta_2(v) \sum_{k=0}^{2p-2} \zeta(e_2)^k D^{2p-2} f \cdot \underbrace{(n_{e_2}, \dots, n_{e_2})}_{k \text{ times}} \underbrace{(w_1(v), \dots, w_1(v))}_{2p-2-k \text{ times}}; \end{aligned}$$

- if $p > 1$, $T_{2p+1}(\Delta, f)$ is equal to

$$C_p \sum_{v \in V} (D^{2p-1} f(v) \cdot (w_1(v), \dots, w_1(v)) + D^{2p-1} f(v) \cdot (w_2(v), \dots, w_2(v)))$$

$$\text{with } C_p = \frac{(-1)^{p-1} B_p}{2(2p)!}.$$

Remark. Theorem 7.7.2 recovers the formula in [91, Corollary 5.4]. To compare the two formulas, one may notice that Tate does not separate the even and odd cases, and that in the odd case nearly every coefficient in Tate's formula vanishes because of the properties of the Bernoulli numbers.

Proof. We have to compute the operators $R_q(F, \cdot)$ as in Section 7.5. We start by the case $q = 2$. Let v be a vertex and let W be the wedge formed by this vertex and the two incident edges. Define the vectors $w_1(v), w_2(v)$ as before, and let e_1 (resp. e_2) be the edge generated by $w_1(v)$ (resp. $w_2(v)$).

We have

$$T_2(W, f) = \frac{1}{4} f(v) - \frac{1}{12} \left(\int_{e_1}^* Df \cdot w_2(v) + \int_{e_2}^* Df \cdot w_1(v) \right)$$

If n_i is the outward primitive vector normal to the edge e_i , we write

$$w_i(v) = \alpha_i w_j(v) + \beta_i n_j$$

where $j = 2$ (resp. 1) if $i = 1$ (resp. 2). Taking the scalar product with n_j and $w_j(v)$, we find

$$\alpha_i = \frac{\langle w_i(v), w_j(v) \rangle}{\|w_j(v)\|^2} = \eta_j(v), \quad \beta_i = \frac{\langle w_i(v), n_j \rangle}{\|n_j\|^2} = \zeta(e_j).$$

Now, thanks to lemma 7.5.1, we have (being careful that the vector $w_i(v)$ is the opposite of the vector v_j in this lemma)

$$\int_{e_j}^* \mathbf{D}f \cdot w_i(v) = -\alpha_i f(v) + \zeta(e_j) \int_{e_j}^* \mathbf{D}f \cdot n_j.$$

Adding the contributions from each vertex, we obtain the desired formula.

Now, let $p > 1$; then

$$\begin{aligned} T_{2p}(W, f) &= (-1)^{p-1} \frac{B_p}{(2p)!} \int_{e_1}^* \mathbf{D}^{2p-1} f \cdot (w_2(v), \dots, w_2(v)) \\ &\quad + (-1)^{p-1} \frac{B_p}{(2p)!} \int_{e_2}^* \mathbf{D}^{2p-1} f \cdot (w_1(v), \dots, w_1(v)) \\ &\quad + (-1)^{p-2} \sum_{\substack{m+\ell=p, \\ m, \ell \geq 1}} \frac{B_m B_\ell}{(2m)!(2\ell)!} \mathbf{D}^{2p-2} f(v) \cdot \underbrace{(w_1(v), \dots, w_1(v))}_{2m-1 \text{ times}} \underbrace{(w_2(v), \dots, w_2(v))}_{2\ell-1 \text{ times}}. \end{aligned}$$

We write

$$\begin{aligned} \int_{e_j}^* \mathbf{D}^{2p-1} f \cdot (w_i(v), \dots, w_i(v)) &= \eta_j(v) \int_{e_j}^* \mathbf{D}^{2p-1} f \cdot (w_j(v), w_i(v), \dots, w_i(v)) \\ &\quad + \zeta(e_j) \int_{e_j}^* \mathbf{D}^{2p-1} f \cdot (n_j, w_i(v), \dots, w_i(v)). \end{aligned}$$

By Lemma 7.5.1, we have

$$\int_{e_j}^* \mathbf{D}^{2p-1} f \cdot (w_j(v), w_i(v), \dots, w_i(v)) = -\mathbf{D}^{2p-2} f \cdot (w_i(v), \dots, w_i(v))$$

and hence we obtain

$$\begin{aligned} \int_{e_j}^* \mathbf{D}^{2p-1} f \cdot (w_i(v), \dots, w_i(v)) &= -\eta_j(v) \mathbf{D}^{2p-2} f \cdot (w_i(v), \dots, w_i(v)) \\ &\quad + \zeta(e_j) \int_{e_j}^* \mathbf{D}^{2p-1} f \cdot (n_j, w_i(v), \dots, w_i(v)). \end{aligned}$$

By a straightforward induction, this yields

$$\begin{aligned} &\int_{e_j}^* \mathbf{D}^{2p-1} f \cdot (w_i(v), \dots, w_i(v)) \\ &= -\eta_j(v) \sum_{k=0}^{2p-2} \zeta(e_j)^k \mathbf{D}^{2p-2} f \cdot \underbrace{(n_j, \dots, n_j)}_{k \text{ times}} \underbrace{(w_i(v), \dots, w_i(v))}_{2p-2-k \text{ times}} \\ &\quad + \zeta(e_j)^{2p-1} \int_{e_j}^* \mathbf{D}^{2p-1} f \cdot (n_j, \dots, n_j). \end{aligned}$$

The case $q = 2p + 1$ works in a similar way. □

7.8 Example

Let us describe an example in the 2-dimensional case.

Let Δ be the triangle with vertices $(0, 0)$, $(0, 1)$ and $(1, 0)$ and let

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

be the function defined by

$$f(x_1, x_2) = x_1$$

(multiplied by a cutoff function so that it is compactly supported). Then

$$\mathbb{Z}^2 \cap N\Delta = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2, \quad 0 \leq k_1 \leq N, \quad 0 \leq k_2 \leq N - k_1\}.$$

Therefore, we have

$$\frac{1}{N^2} \sum_{k \in N\Delta \cap \mathbb{Z}^2} f\left(\frac{k}{N}\right) = \frac{1}{N^2} \sum_{k_1=0}^N \sum_{k_2=0}^{N-k_1} \frac{k_1}{N} = \frac{1}{N^3} \left((N+1) \sum_{k_1=1}^N k_1 - \sum_{k_1=1}^N k_1^2 \right).$$

Using standard formulas for sums of integers and squares of integers, one can check that

$$\frac{1}{N^2} \sum_{k \in N\Delta \cap \mathbb{Z}^2} f\left(\frac{k}{N}\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2N} + \frac{1}{3N^2}.$$

Let us compare this with Theorem 7.7.2. With the notations of this lemma, we have

$$T_0(\Delta, f) = \int_{\Delta} f = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x_1} dx_2 \right) x_1 dx_1 = \frac{1}{6}$$

so the zeroth order terms agree. Let us give names to the vertices and edges as follows: we put $v_{13} = (0, 0)$, $v_{12} = (0, 1)$ and $v_{23} = (1, 0)$, and we let e_i denote the edge joining the vertices v_{ij} (or v_{ji}) and v_{ik} (or v_{ki}). Then we have

$$\int_{e_1}^* f = 0, \quad \int_{e_2}^* f = \frac{1}{2}, \quad \int_{e_3}^* f = \frac{1}{2}.$$

and hence

$$T_1(\Delta, f) = 1/2.$$

Furthermore, we have

$$T_2(\Delta, f) = S - T$$

with

$$S = \sum_{v \in V} \left(\frac{1}{4} + \frac{\mu(v)}{12} \right) f(v),$$

and

$$T = \frac{1}{12} \sum_{e \in E} \zeta(e) \int_e^* Df \cdot n_e.$$

We have $f(v_{13}) = 0$, $f(v_{12}) = 0$, $f(v_{23}) = 1$. Moreover

$$w_1(v_{23}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2(v_{23}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

and thus $\mu(v_{23}) = 3/2$. This yields

$$S = 3/8.$$

Now, one can check that

$$\int_{e_1}^* Df \cdot n_{e_1} = -1, \quad \int_{e_2}^* Df \cdot n_{e_2} = 1, \quad \int_{e_3}^* Df \cdot n_{e_3} = 0$$

and $\zeta(e_1) = -1$, $\zeta(e_2) = -\frac{1}{2}$. We obtain $T = 1/24$ and therefore

$$T_2(\Delta, f) = 1/3.$$

Finally, we have

$$T_q(\Delta, f) = 0, \quad q \geq 2$$

because the derivatives of f of order greater than 2 vanish.

7.9 Final remarks

We believe that one should be able to prove item (ii) in Theorem 7.2.1 in dimensions $n \geq 4$ with the same elementary method we use in this paper (since a similar result was already stated in Tate's article in any dimension). However, in dimensions $n \geq 4$ the computations appear to be complicated (but still elementary) and will be the object of future works (see also Remark 7.5.2).

Chapitre 8

Perspectives

Nous concluons ce manuscrit par l'évocation de quelques questions soulevées au cours de cette thèse, qui pourraient constituer autant de futures pistes de recherche.

8.1 Conditions de Bohr-Sommerfeld

Comme nous l'avons déjà signalé, la plupart des résultats déjà obtenus dans le cadre pseudo-différentiel ont de très grandes chances de pouvoir être démontrés (ou adaptés) pour les opérateurs de Toeplitz. Par exemple, il doit être possible d'écrire les conditions de Bohr-Sommerfeld près d'une singularité de type foyer-foyer en dimension 4, en s'inspirant de [98].

En outre, il serait intéressant de comprendre la théorie spectrale des opérateurs de Toeplitz près d'autres types de singularités, par exemple des singularités dégénérées en dimension 2, ou d'autres singularités non dégénérées en dimension supérieure.

Enfin, il pourrait également être intéressant de préciser les conditions de quantification ; on peut vouloir remplacer les restes de la forme $O(k^{-\infty})$ par des restes exponentiellement petits quand cela est possible.

8.2 Théorie spectrale inverse

Une question naturelle concernant la théorie spectrale inverse est de savoir jusqu'à quel point on peut affaiblir certaines des hypothèses faites dans le chapitre 6. On peut par exemple se demander ce qu'il peut se passer dans le cas où on autorise deux périodes à être complètement résonantes sur tout un intervalle de valeurs régulières du symbole principal a_0 (par exemple en ayant en tête le problème du double puits symétrique pour l'opérateur de Schrödinger). Dans ce cas, la bonne notion à considérer est sans doute celle de « spectre avec multiplicités ». D'autre part, on peut supposer que le symbole principal a_0 est une fonction de Morse non nécessairement simple, c'est-à-dire que les niveaux critiques peuvent contenir plusieurs points critiques. Dans sa thèse [92], Toulet a donné un résultat de classification dans ce contexte à l'aide du graphe de Reeb décoré. La détection des valeurs régulières, elliptiques et hyperboliques paraît accessible, par exemple à l'aide de formules de Weyl généralisées comme celles de [15]. Par contre, la classification nécessite bien évidemment plus d'invariants que dans le cas d'une fonction de Morse simple. Par exemple, un point de bifurcation doit être muni de la donnée du plongement du niveau critique correspondant dans une surface orientable (un atome, dans le langage de [8]), entre autres. Il n'est pas du tout clair *a priori* que le spectre d'un opérateur de Toeplitz autoadjoint de symbole principal a_0 permet de retrouver cet objet. Néanmoins, on dispose d'une classification des atomes à petit nombre de points hyperboliques [8, tableau 2.1], ce qui permet déjà d'établir des conjectures intéressantes.

On peut également s'intéresser à des résultats spectraux inverses en dimension supérieure pour des systèmes complètement intégrables, comme dans les travaux [27, 83]. Bien évidemment, ces résultats dépendent fortement de l'état des connaissances sur la théorie spectrale elle-même, et ce point est donc très corrélé à la section précédente.

Enfin, un autre aspect qu'il conviendrait d'étudier est celui du calcul numérique. On peut par exemple vouloir écrire un algorithme se basant sur la procédure du chapitre 6 qui, étant donné le spectre d'un opérateur de Toeplitz pour une grande valeur de k fixée (ou un certains nombres de valeurs de k), renverrait le graphe de Reeb de la variété sous-jacente.

On peut facilement obtenir numériquement la densité spectrale $\rho_{\gamma,c}(\cdot, k)$ et, théoriquement, on devrait également pouvoir calculer de manière approchée le front d'onde de la suite de fonctions $Z(t, k)$. Reste à voir dans quelle mesure on peut extraire des résultats numériques les informations qui nous intéressent (valeurs critiques, nombre de composantes connexes).

8.3 Applications des opérateurs de Toeplitz

Les opérateurs de Toeplitz apparaissent naturellement dans un certain nombre de problèmes concrets issus de la physique et de la chimie. Quand on procède à une réduction symplectique, l'espace des phases réduit n'est plus un fibré cotangent en général, et l'outil pertinent est donc la quantification géométrique et, par suite, les opérateurs de Toeplitz [22]. On peut aussi penser au spin, pour lequel l'espace des phases est une sphère. En outre, les opérateurs de Toeplitz ont récemment fait leur apparition en théorie quantique des champs topologique ([1, 25, 26, 77], etc.).

D'autres applications sont pour l'heure apparemment inexplorées ; par exemple, nous avons récemment rencontré la série d'articles [85, 84] concernant le spectre rotationnel de certaines molécules possédant des symétries. D'après ce que nous en comprenons, ce problème semble naturellement lié à la quantification du corps solide, et nous pensons que la quantification géométrique et les opérateurs de Toeplitz constituent le cadre de travail adéquat pour celle-ci. De plus, le hamiltonien en question, appelé hamiltonien de Hecht, possède pas moins de 12 points critiques sur son niveau hyperbolique ! Essayer d'écrire explicitement les conditions de Bohr-Sommerfeld dans cette situation mènerait donc à un nombre déraisonnable d'équations. Néanmoins, le système possède des symétries, et on peut essayer de le quotienter par rapport à celles-ci. Cependant, l'espace réduit n'est alors plus une variété lisse, mais possède des singularités. C'est pourquoi le bon point de vue semble être celui des orbifolds, et cet exemple nous donne une motivation pour écrire les règles de Bohr-Sommerfeld dans ce contexte.

8.4 Formules d'Euler-MacLaurin

Il existe plusieurs suites naturelles au travail effectué dans le chapitre 7, la première étant naturellement d'étendre nos résultats en dimension supérieure. De plus, on peut essayer d'obtenir des formules d'Euler-MacLaurin pour des familles plus générales de polytopes (pas nécessairement de Delzant) avec notre approche. Enfin, il conviendrait d'étudier les applications potentielles en théorie spectrale et géométrie kählérienne [16, 105].

Table des figures

2.1	Fonction hauteur sur le tore	31
4.1	Lignes de niveau pour le hamiltonien de Harper	81
4.2	Spectre de l'opérateur de Toeplitz associé au hamiltonien de Harper	82
4.3	Localisation sur un niveau régulier	82
4.4	Bas du spectre de l'opérateur de Toeplitz associé au hamiltonien de Harper	83
4.5	Découpage de l'intervalle I	84
5.1	Régularisation de l'action sous-principale	109
5.2	Chemins locaux et réguliers	111
5.3	Calcul de $\ell(\gamma)$	116
5.4	Cas d'un cycle lisse au point critique	117
5.5	Cas d'un seul point hyperbolique	118
5.6	Hauteur sur le tore	120
5.7	Valeurs propres proches du niveau hyperbolique, hauteur sur le tore	123
5.8	Erreur, hauteur sur le tore	123
5.9	Erreur en fonction de k , hauteur sur le tore	124
5.10	Cycles et arêtes coupées, xy sur la sphère	125
5.11	Valeurs propres proche du niveau hyperbolique, xy sur la sphère	127
5.12	Niveau critique, hamiltonien de Harper	128
5.13	Cycles et arêtes coupées, hamiltonien de Harper	129
5.14	Cycles sur le domaine fondamental	129
5.15	Valeurs propres proches du niveau hyperbolique, hamiltonien de Harper	130
6.1	Le graphe de Reeb de la fonction hauteur sur le tore.	133
6.2	Tracé de $\rho_{\gamma,c}(\cdot, k)$ pour la fonction hauteur sur le tore de rayons $(R, r) = (4, 1)$, avec $\gamma = 0.7$, $c = 15$ et $k = 1000$	134
7.1	Quelques polygones de Delzant	143
7.2	Un coin en dimension 2	145

Bibliographie

- [1] J. E. Andersen and J. L. Blaavand. Asymptotics of Toeplitz operators and applications in TQFT. In *Geometry and quantization*, volume 19 of *Trav. Math.*, pages 167–201. Univ. Luxemb., Luxembourg, 2011.
- [2] V. Bargmann. On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform. *Comm. Pure Appl. Math.*, 14 :187–214, 1961.
- [3] V. Bargmann. On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform. Part II. A family of related function spaces. Application to distribution theory. *Comm. Pure Appl. Math.*, 20 :1–101, 1967.
- [4] F. A. Berezin. General concept of quantization. *Comm. Math. Phys.*, 40 :153–174, 1975.
- [5] N. Berline and M. Vergne. Local Euler-Maclaurin formula for polytopes. *Mosc. Math. J.*, 7(3) :355–386, 573, 2007.
- [6] A. L. Besse. *Einstein manifolds*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2008. Reprint of the 1987 edition.
- [7] A. Bloch, F. Golse, T. Paul, and A. Uribe. Dispersionless Toda and Toeplitz operators. *Duke Math. J.*, 117(1) :157–196, 2003.
- [8] A. V. Bolsinov and A. T. Fomenko. *Integrable Hamiltonian systems*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004. Geometry, topology, classification, Translated from the 1999 Russian original.
- [9] M. Bordemann, E. Meinrenken, and M. Schlichenmaier. Toeplitz quantization of Kähler manifolds and $\mathfrak{gl}(N)$, $N \rightarrow \infty$ limits. *Comm. Math. Phys.*, 165(2) :281–296, 1994.
- [10] D. Borthwick, T. Paul, and A. Uribe. Semiclassical spectral estimates for Toeplitz operators. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 48(4) :1189–1229, 1998.
- [11] D. Borthwick and A. Uribe. Almost complex structures and geometric quantization. *Math. Res. Lett.*, 3(6) :845–861, 1996.
- [12] L. Boutet de Monvel and V. Guillemin. *The spectral theory of Toeplitz operators*, volume 99 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1981.
- [13] L. Boutet de Monvel and J. Sjöstrand. Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegő. In *Journées : Équations aux Dérivées Partielles de Rennes (1975)*, pages 123–164. Astérisque, No. 34–35. Soc. Math. France, Paris, 1976.

- [14] M. Brion and M. Vergne. Lattice points in simple polytopes. *J. Amer. Math. Soc.*, 10(2) :371–392, 1997.
- [15] R. Brummelhuis, T. Paul, and A. Uribe. Spectral estimates around a critical level. *Duke Math. J.*, 78(3) :477–530, 1995.
- [16] D. Burns, V. Guillemin, and Z. Wang. Stability functions. *Geom. Funct. Anal.*, 19(5) :1258–1295, 2010.
- [17] S. E. Cappell and J. L. Shaneson. Euler-Maclaurin expansions for lattices above dimension one. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 321(7) :885–890, 1995.
- [18] L. Charles. *Aspects semi-classiques de la quantification géométrique*. PhD thesis, Université Paris Dauphine, 2000.
- [19] L. Charles. Berezin-Toeplitz operators, a semi-classical approach. *Comm. Math. Phys.*, 239(1-2) :1–28, 2003.
- [20] L. Charles. Quasimodes and Bohr-Sommerfeld conditions for the Toeplitz operators. *Comm. Partial Differential Equations*, 28(9-10) :1527–1566, 2003.
- [21] L. Charles. Symbolic calculus for Toeplitz operators with half-form. *J. Symplectic Geom.*, 4(2) :171–198, 2006.
- [22] L. Charles. Toeplitz operators and Hamiltonian torus actions. *J. Funct. Anal.*, 236(1) :299–350, 2006.
- [23] L. Charles. Semi-classical properties of geometric quantization with metaplectic correction. *Comm. Math. Phys.*, 270(2) :445–480, 2007.
- [24] L. Charles. *Quantification des variétés kählériennes, limite semi-classique et théorie quantique des champs topologique*. Habilitation à diriger des recherches, Université Pierre et Marie Curie, 2014.
- [25] L. Charles and J. Marché. Knot state asymptotics I, AJ conjecture and abelian representations. Preprint, <http://www.math.jussieu.fr/~marche/knot1.pdf>, 2011.
- [26] L. Charles and J. Marché. Knot state asymptotics II, Witten conjecture and irreducible representations. Preprint, <http://www.math.jussieu.fr/~marche/knot2.pdf>, 2011.
- [27] L. Charles, A. Pelayo, and S. Vũ Ngọc. Isospectrality for quantum toric integrable systems. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 46(5) :815–849, 2013.
- [28] L. Charles and S. Vũ Ngọc. Spectral asymptotics via the semiclassical Birkhoff normal form. *Duke Math. J.*, 143(3) :463–511, 2008.
- [29] Y. Colin de Verdière. Méthodes semi-classiques et théorie spectrale. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~ycolver/All-Articles/93b.pdf>.
- [30] Y. Colin de Verdière. Spectre conjoint d’opérateurs pseudo-différentiels qui commutent. II. Le cas intégrable. *Math. Z.*, 171(1) :51–73, 1980.
- [31] Y. Colin de Verdière. Bohr-Sommerfeld rules to all orders. *Ann. Henri Poincaré*, 6(5) :925–936, 2005.

- [32] Y. Colin de Verdière and V. Guillemin. A semi-classical inverse problem I : Taylor expansions. In *Geometric aspects of analysis and mechanics*, volume 292 of *Progr. Math.*, pages 81–95. Birkhäuser/Springer, New York, 2011.
- [33] Y. Colin de Verdière and B. Parisse. Équilibre instable en régime semi-classique. I. Concentration microlocale. *Comm. Partial Differential Equations*, 19(9-10) :1535–1563, 1994.
- [34] Y. Colin de Verdière and B. Parisse. Équilibre instable en régime semi-classique. II. Conditions de Bohr-Sommerfeld. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 61(3) :347–367, 1994.
- [35] Y. Colin de Verdière and B. Parisse. Singular Bohr-Sommerfeld rules. *Comm. Math. Phys.*, 205(2) :459–500, 1999.
- [36] Y. Colin de Verdière and J. Vey. Le lemme de Morse isochore. *Topology*, 18(4) :283–293, 1979.
- [37] Y. Colin de Verdière and S. Vũ Ngọc. Singular Bohr-Sommerfeld rules for 2D integrable systems. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 36(1) :1–55, 2003.
- [38] M. Debernardi and R. Paoletti. Equivariant asymptotics for Bohr-Sommerfeld Lagrangian submanifolds. *Comm. Math. Phys.*, 267(1) :227–263, 2006.
- [39] J.-P. Demailly. Complex analytic and differential geometry. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf>.
- [40] M. Dimassi and J. Sjöstrand. *Spectral asymptotics in the semi-classical limit*, volume 268 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [41] S. K. Donaldson. Scalar curvature and projective embeddings. I. *J. Differential Geom.*, 59(3) :479–522, 2001.
- [42] J.-P. Dufour, P. Molino, and A. Toulet. Classification des systèmes intégrables en dimension 2 et invariants des modèles de Fomenko. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 318(10) :949–952, 1994.
- [43] J. J. Duistermaat and L. Hörmander. Fourier integral operators. II. *Acta Math.*, 128(3-4) :183–269, 1972.
- [44] L. H. Eliasson. Normal forms for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals—elliptic case. *Comment. Math. Helv.*, 65(1) :4–35, 1990.
- [45] V. L. Ginzburg and R. Montgomery. Geometric quantization and no-go theorems. In *Poisson geometry (Warsaw, 1998)*, volume 51 of *Banach Center Publ.*, pages 69–77. Polish Acad. Sci., Warsaw, 2000.
- [46] H. J. Groenewold. On the principles of elementary quantum mechanics. *Physica*, 12 :405–460, 1946.
- [47] V. Guillemin. Star products on compact pre-quantizable symplectic manifolds. *Lett. Math. Phys.*, 35(1) :85–89, 1995.
- [48] V. Guillemin and D. Schaeffer. On a certain class of Fuchsian partial differential equations. *Duke Math. J.*, 44(1) :157–199, 1977.

- [49] V. Guillemin and S. Sternberg. Riemann sums over polytopes. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 57(7) :2183–2195, 2007. Festival Yves Colin de Verdière.
- [50] V. Guillemin and A. Uribe. Some inverse spectral results for semi-classical Schrödinger operators. *Math. Res. Lett.*, 14(4) :623–632, 2007.
- [51] V. Guillemin and A. Uribe. Some inverse spectral results for the two-dimensional Schrödinger operator. In *Geometry and analysis. No. 1*, volume 17 of *Adv. Lect. Math. (ALM)*, pages 319–328. Int. Press, Somerville, MA, 2011.
- [52] V. Guillemin and Z. Wang. The Mellin transform and spectral properties of toric varieties. *Transform. Groups*, 13(3-4) :575–584, 2008.
- [53] V. W. Guillemin, S. Sternberg, and J. Weitsman. The Ehrhart function for symbols. In *Surveys in differential geometry. Vol. X*, volume 10 of *Surv. Differ. Geom.*, pages 31–41. Int. Press, Somerville, MA, 2006.
- [54] V. W. Guillemin and D. W. Stroock. Some Riemann sums are better than others. In *Representations, wavelets, and frames*, Appl. Numer. Harmon. Anal., pages 3–12. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2008.
- [55] B. Helffer and D. Robert. Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques elliptiques. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 31(3) :xi, 169–223, 1981.
- [56] B. Helffer and D. Robert. Puits de potentiel généralisés et asymptotique semi-classique. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 41(3) :291–331, 1984.
- [57] B. Helffer and J. Sjöstrand. Analyse semi-classique pour l'équation de Harper (avec application à l'équation de Schrödinger avec champ magnétique). *Mém. Soc. Math. France (N.S.)*, (34) :113 pp. (1989), 1988.
- [58] B. Helffer and J. Sjöstrand. Équation de Schrödinger avec champ magnétique et équation de Harper. In *Schrödinger operators (Sønderborg, 1988)*, volume 345 of *Lecture Notes in Phys.*, pages 118–197. Springer, Berlin, 1989.
- [59] H. Hezari and S. Zelditch. Inverse spectral problem for analytic $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ -symmetric domains in \mathbb{R}^n . *Geom. Funct. Anal.*, 20(1) :160–191, 2010.
- [60] M. Hitrik and J. Sjöstrand. Rational invariant tori, phase space tunneling, and spectra for non-selfadjoint operators in dimension 2. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 41(4) :511–571, 2008.
- [61] L. Hörmander. Pseudo-differential operators. *Comm. Pure Appl. Math.*, 18 :501–517, 1965.
- [62] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. I*. Springer Study Edition. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1990. Distribution theory and Fourier analysis.
- [63] D. Huybrechts. *Complex geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2005. An introduction.
- [64] M. Kac. Can one hear the shape of a drum? *Amer. Math. Monthly*, 73(4, part II) :1–23, 1966.

- [65] Y. Karshon, S. Sternberg, and J. Weitsman. Euler-Maclaurin with remainder for a simple integral polytope. *Duke Math. J.*, 130(3) :401–434, 2005.
- [66] A. Kirillov and A. J. Kirillov. Compact groups and their representations. In *Encyclopedia of mathematical physics*, pages 576–586. Academic Press/Elsevier Science, Oxford, 2006.
- [67] A. A. Kirillov. Merits and demerits of the orbit method. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 36(4) :433–488, 1999.
- [68] B. Kostant. Quantization and unitary representations. *Uspehi Mat. Nauk*, 28(1(169)) :163–225, 1973. Translated from the English (Lectures in Modern Analysis and Applications, III, pp. 87–208, Lecture Notes in Math., Vol. 170, Springer, Berlin, 1970) by A. A. Kirillov.
- [69] O. Lablée. Sur le spectre semi-classique d’un système intégrable de dimension 1 autour d’une singularité hyperbolique. In *Actes du Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie. Vol. 26. Année 2007–2008*, volume 26 of *Sémin. Théor. Spectr. Géom.*, pages 29–76. Univ. Grenoble I, Saint, 2009.
- [70] J. C. Lagarias. Euler’s constant : Euler’s work and modern developments. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 50(4) :527–628, 2013.
- [71] Y. Le Floch. Singular Bohr-Sommerfeld conditions for 1D Toeplitz operators : hyperbolic case. Preprint, <http://arxiv.org/abs/1309.5322>.
- [72] Y. Le Floch. Singular Bohr-Sommerfeld conditions for 1D Toeplitz operators : elliptic case. *Comm. Partial Differential Equations*, 39(2) :213–243, 2014.
- [73] Y. Le Floch and A. Pelayo. Euler-MacLaurin formulas via differential operators. Preprint, <http://arxiv.org/abs/1312.5711>.
- [74] J. Leray. Analyse lagrangienne et mécanique quantique. In *Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles (1976–1977), I*, pages Exp. No. 1, 303. Collège de France, Paris, 1977.
- [75] X. Ma and G. Marinescu. *Holomorphic Morse inequalities and Bergman kernels*, volume 254 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.
- [76] X. Ma and G. Marinescu. Toeplitz operators on symplectic manifolds. *J. Geom. Anal.*, 18(2) :565–611, 2008.
- [77] J. Marché and T. Paul. Toeplitz operators in TQFT via skein theory. *Transactions of the AMS* (to appear), 2013.
- [78] V. P. Maslov. *Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques*. Dunod, Paris, 1972.
- [79] S. Nonnenmacher and A. Voros. Eigenstate structures around a hyperbolic point. *J. Phys. A*, 30(1) :295–315, 1997.
- [80] A. A. Oshemkov. Morse functions on two-dimensional surfaces. Coding of singularities. *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 205(Novye Rezult. v Teor. Topol. Klassif. Integr. Sistem) :131–140, 1994.

- [81] R. Paoletti. A note on scaling asymptotics for Bohr-Sommerfeld Lagrangian submanifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 136(11) :4011–4017, 2008.
- [82] A. Pelayo, L. Polterovich, and S. Vũ Ngọc. Semiclassical quantization and spectral limits of h-pseudodifferential and Berezin-Toeplitz operators. *Proceedings of the London Mathematical Society (to appear)*, 2013.
- [83] A. Pelayo and S. Vũ Ngọc. Semiclassical inverse spectral theory for singularities of focus-focus type. To appear in *Comm. Math. Phys.*, preprint available at <http://www.math.wustl.edu/~apelayo/Docs/focus2013.pdf>, 2013.
- [84] J. M. Robbins, S. C. Creagh, and R. G. Littlejohn. Complex periodic orbits in the rotational spectrum of molecules : the example of SF₆. *Phys. Rev. A*, 39(6) :2838–2854, 1989.
- [85] J. M. Robbins, S. C. Creagh, and R. G. Littlejohn. Uniform quantization conditions in the presence of symmetry : the rotational spectrum of SF₆. *Phys. Rev. A*, 41(11) :6052–6062, 1990.
- [86] D. Robert. *Autour de l'approximation semi-classique*, volume 68 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1987.
- [87] Y. A. Rubinstein and S. Zelditch. The Cauchy problem for the homogeneous Monge-Ampère equation, I. Toeplitz quantization. *J. Differential Geom.*, 90(2) :303–327, 2012.
- [88] J. L. Shaneson. Characteristic classes, lattice points, and Euler-MacLaurin formulae. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, pages 612–624, Basel, 1995. Birkhäuser.
- [89] J. Sjöstrand. Density of resonances for strictly convex analytic obstacles. *Canad. J. Math.*, 48(2) :397–447, 1996. With an appendix by M. Zworski.
- [90] J.-M. Souriau. Quantification géométrique. In *Physique quantique et géométrie (Paris, 1986)*, volume 32 of *Travaux en Cours*, pages 141–193. Hermann, Paris, 1988.
- [91] T. Tate. Asymptotic Euler-Maclaurin formula over lattice polytopes. *J. Funct. Anal.*, 260(2) :501–540, 2011.
- [92] A. Toulet. *Classification des systèmes intégrables en dimension 2*. PhD thesis, Université Montpellier II, 1996.
- [93] G. M. Tuynman. Quantization : towards a comparison between methods. *J. Math. Phys.*, 28(12) :2829–2840, 1987.
- [94] L. Van Hove. Sur certaines représentations unitaires d'un groupe infini de transformations. *Acad. Roy. Belgique. Cl. Sci. Mém. Coll. in 8°*, 26(6) :102, 1951.
- [95] L. Van Hove. Sur le problème des relations entre les transformations unitaires de la mécanique quantique et les transformations canoniques de la mécanique classique. *Acad. Roy. Belgique. Bull. Cl. Sci. (5)*, 37 :610–620, 1951.
- [96] M. Vergne. Euler-MacLaurin formula for the multiplicities of the index of transversally elliptic operators. Preprint, <http://arxiv.org/abs/1211.5547>, 2012.

- [97] S. Vũ Ngọc. *Sur le spectre des systèmes complètement intégrables semi-classiques avec singularités*. PhD thesis, Université Grenoble 1, 1998.
- [98] S. Vũ Ngọc. Bohr-Sommerfeld conditions for integrable systems with critical manifolds of focus-focus type. *Comm. Pure Appl. Math.*, 53(2) :143–217, 2000.
- [99] S. Vũ Ngọc. *Systèmes intégrables semi-classiques : du local au global*, volume 22 of *Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses]*. Société Mathématique de France, Paris, 2006.
- [100] S. Vũ Ngọc. Symplectic inverse spectral theory for pseudodifferential operators. In *Geometric aspects of analysis and mechanics*, volume 292 of *Progr. Math.*, pages 353–372. Birkhäuser/Springer, New York, 2011.
- [101] N. M. J. Woodhouse. *Geometric quantization*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, second edition, 1992. Oxford Science Publications.
- [102] S. Zelditch. Index and dynamics of quantized contact transformations. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 47(1) :305–363, 1997.
- [103] S. Zelditch. The inverse spectral problem for surfaces of revolution. *J. Differential Geom.*, 49(2) :207–264, 1998.
- [104] S. Zelditch. Szegő kernels and a theorem of Tian. *Internat. Math. Res. Notices*, (6) :317–331, 1998.
- [105] S. Zelditch. Bernstein polynomials, Bergman kernels and toric Kähler varieties. *J. Symplectic Geom.*, 7(2) :51–76, 2009.
- [106] M. Zworski. *Semiclassical analysis*, volume 138 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.