



# Diffusion électromagnétique par un sol : Prise en compte d'un fil enfoui par l'introduction d'une impédance effective dans un code FDTD

Clément Chanel

► **To cite this version:**

Clément Chanel. Diffusion électromagnétique par un sol : Prise en compte d'un fil enfoui par l'introduction d'une impédance effective dans un code FDTD . Electromagnétisme. UNIVERSITE DE NANTES, 2015. Français. <tel-01277827>

**HAL Id: tel-01277827**

**<https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01277827>**

Submitted on 23 Feb 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse de Doctorat

## Clément CHANEL

Mémoire présenté en vue de l'obtention  
du grade de Docteur de l'Université de Nantes  
Sous le label de l'Université Nantes Angers Le Mans

École doctorale Sciences et Technologies de l'Information et Mathématiques (STIM)

Discipline : *Electronique*  
Laboratoire : *IETR UMR 6164*

Soutenance le 18 décembre 2015

## Diffusion électromagnétique par un sol : Prise en compte d'un fil enfoui par l'introduction d'une impédance effective dans un code FDTD

### JURY

Président et Rapporteur	<b>M. Lionel PICHON</b> , Directeur de Recherche CNRS, GeePs, Gif-sur-Yvette
Rapporteur	<b>Mme Elodie RICHALOT</b> , Professeur, Université Paris-Est, Marne-la-Vallée
Examineur	<b>M. Philippe POULIGUEN</b> , HDR, Responsable Scientifique, DGA/DS, Paris
Directeur de Thèse	<b>M. Christophe BOURLIER</b> , Directeur de Recherche CNRS, IETR, Nantes
Co-encadrant	<b>M. Christian CAREL</b> , Docteur, Ingénieur R&D, THALES Communications & Security, Gennevilliers
Co-encadrant	<b>M. Nicolas PINEL</b> , Docteur, Ingénieur, Alyotech France, Saint-Herblain
Invité	<b>M. Christophe GIRARD</b> , Docteur, Ingénieur, Axessim, Illkirch



# Remerciements

Je tiens à remercier Monsieur Jean-François Diouris de m'avoir accueilli au sein du laboratoire IETR et l'Association Nationale de la Recherche et de la Technologie pour le soutien financier pour ces trois années de travaux de recherche.

J'aimerais remercier mon directeur de thèse, Monsieur Christophe Bourlier, pour son soutien au cours de ces trois années, son aide scientifique précieuse et sa disponibilité ainsi que mon encadrant Monsieur Nicolas Pinel pour son oeil aiguisé et ses précieux conseils. Merci également aux enseignants-chercheurs du laboratoire IETR pour m'avoir guidé lors de ces trois années et à Sandrine pour le travail administratif accompli.

Je tiens à remercier Monsieur Christian Carel pour la confiance qu'il m'a témoignée en me proposant de travailler sur ce sujet de thèse. Christian, j'ai beaucoup apprécié de travailler dans ton équipe et beaucoup appris à ton contact, tant professionnellement, qu'humainement.

Mes remerciements vont également à Monsieur Lionel Pichon qui a accepté de présider mon jury de thèse. Merci à lui à nouveau, ainsi qu'à Madame Elodie Richalot, pour avoir été les rapporteurs de ma thèse. Merci également à Monsieur Philippe Pouliguen de m'avoir fait l'honneur d'être présent à ce jury.

Un grand merci à mes collègues du service DIS de Thales Communications & Security, à commencer par les secrétaires Gisèle et Patricia qui m'ont toujours réservé un accueil chaleureux à leur bureau et qui m'ont aidé à arpenter le dédale des applications de l'intranet. Merci à Anne-Sophie pour sa disponibilité, à Charlotte pour sa maîtrise de Prométhée et de Kawa et à Robin pour son enthousiasme communicant. Merci aux stagiaires et aux apprentis pour la bonne atmosphère de notre open-space. Un grand merci à tous les collègues qui ont contribué de près ou de loin à l'avancement de mes travaux. Je pense également à mes collègues doctorants de Thales Communications & Security, Henri et Pierre-Luc, bien qu'ayant des sujets de doctorat très différents, nous nous sommes trouvés une passion commune pour la gastronomie alsacienne. Et également à mes collègues de l'IETR, Moussa pour la relation de voisinage fort sympathique au bureau, Mohammed chef des BBQ, Nabil pour les bons plans, Christophe pour ses boucles for, Loïc pour le café, Nina pour les gâteaux, Dusan pour les duels de basket, Ons pour sa carte d'étudiante, Chagun pour ses mouvements de tête et tous les autres doctorants présents au laboratoire durant ces trois années.

Mes remerciements vont également à l'équipe d'AxesSim : Christophe, Didier, Nathanaël et Cyril pour leur précieuse aide, pour la formation qu'ils m'ont dispensé sur la plateforme Cutoo et pour le temps qu'ils ont pu m'accorder pour répondre à des questions durant le sprint final.





# Table des matières

<b>1</b>	<b>Contexte et problématique de la thèse</b>	<b>17</b>
1.1	Contexte	18
1.2	Description de la scène	20
1.2.1	Introduction	20
1.2.2	Chaîne de mesure	20
1.2.3	Bande de fréquences	21
1.3	Obstacles à la détection	22
1.4	Objectifs de la thèse	23
1.4.1	Introduction	23
1.4.2	Plateforme FDTD de Thales Communications & Security SAS	24
1.4.3	Déroulement de la thèse	26
1.5	Diffraction par un fil en espace libre	26
1.5.1	Méthode des Moments	27
1.5.2	Résultats numériques	28
1.6	Plan de la thèse	31
<b>2</b>	<b>Notions d'électromagnétismes et modèles de diffusion</b>	<b>33</b>
2.1	Polarisations TE et TM	34
2.2	Conditions aux limites	35
2.3	Équations intégrales	38
2.4	Coefficients de Fresnel	39
2.5	Champs proche et lointain	41
2.6	Surface Équivalente Radar normalisée	44
2.6.1	Vecteur de Poynting du champ incident	45
2.6.2	Vecteur de Poynting du champ diffracté	46
2.6.3	Puissance incidente	46
2.6.4	Puissance diffusée	47
2.6.5	Champs cohérent et incohérent	49
2.7	Modèles de diffusion EM	49
2.7.1	Modèle rigoureux : la Méthode des Moments	50
2.7.2	Modèles asymptotiques	53
2.7.3	Conclusion	56
<b>3</b>	<b>Mesures de rugosités de sols</b>	<b>57</b>
3.1	Introduction	58
3.2	Description du dispositif de mesure et des traitements associés	61
3.2.1	Description du dispositif de mesure	61
3.2.2	Lieux de mesures	61
3.2.3	Paramétrage de la mesure	63
3.2.4	Correction des mesures	64

3.2.5	Protocole de mesure . . . . .	64
3.3	Caractérisation de profils mesurés . . . . .	67
3.3.1	Modélisation bi-échelle de la surface . . . . .	67
3.3.2	Caractérisation de la composante pseudo-déterministe . . . . .	68
3.3.3	Caractérisation de la composante aléatoire . . . . .	71
3.3.4	Caractérisation des autres profils mesurés . . . . .	76
3.3.5	Génération de profils de surfaces rugueuses . . . . .	77
3.4	Diffusion électromagnétique par la surface mesurée . . . . .	81
3.4.1	Diffusion électromagnétique par le profil mesuré et ses deux composantes . . . . .	82
3.4.2	Etude sur des surfaces générées . . . . .	83
3.4.3	Conclusion . . . . .	87
<b>4</b>	<b>Méthode des Petites Perturbations (MPP)</b>	<b>89</b>
4.1	Introduction . . . . .	90
4.2	Notations et calculs préalables . . . . .	91
4.2.1	Calculs préalables pour l'onde incidente . . . . .	91
4.3	Courants à l'ordre $n$ pour une onde incidente quelconque . . . . .	94
4.3.1	Surface parfaitement conductrice . . . . .	95
4.3.2	Surfaces diélectriques . . . . .	98
4.4	Courants à l'ordre 2 pour une onde incidente plane . . . . .	102
4.4.1	Cas d'une surface parfaitement conductrice . . . . .	102
4.4.2	Surface diélectrique . . . . .	103
4.5	Diffusion par une surface rugueuse à l'aide de la <b>MPP</b> . . . . .	104
4.5.1	Champ diffracté . . . . .	104
4.5.2	Champ diffusé cohérent . . . . .	105
4.5.3	Coefficient de diffusion . . . . .	107
4.6	Comparaison avec la <b>Méthode des Moments</b> . . . . .	108
4.6.1	Introduction . . . . .	108
4.6.2	Approximations du modèle . . . . .	108
4.6.3	Validation du modèle . . . . .	109
4.6.4	Cas d'une surface déterministe . . . . .	109
4.6.5	Champ diffracté . . . . .	115
4.6.6	Coefficient de diffusion incohérent . . . . .	115
4.7	Domaine de validité de la <b>MPP</b> . . . . .	116
4.7.1	Paramètres influençant le domaine de validité de <b>MPP</b> . . . . .	118
4.8	Comment implanter la <b>MPP</b> dans la plateforme Prométhée ? . . . . .	119
4.8.1	Problématique . . . . .	119
4.8.2	État de l'art sur les grandeurs effectives . . . . .	120
4.8.3	Coefficient de diffusion cohérent . . . . .	122
4.8.4	Formulations proposées . . . . .	123
4.8.5	Scénario d'utilisation des grandeurs effectives dans la plateforme . . . . .	125
<b>5</b>	<b>Conclusion &amp; Perspectives</b>	<b>129</b>
5.1	Conclusion . . . . .	130
5.2	Perspectives . . . . .	131
<b>A</b>	<b>Calculs préalables sur le champ incident</b>	<b>133</b>
A.1	Développement perturbatif d'une onde incidente plane . . . . .	133
<b>B</b>	<b>Calculs préalables sur le champ diffracté</b>	<b>137</b>

<b>C</b>	<b>Annexe C : Problème de Dirichlet - surface PC</b>	<b>141</b>
C.1	Cas d'une onde incidente quelconque . . . . .	141
C.2	Cas d'une onde incidente plane . . . . .	143
<b>D</b>	<b>Annexe D : Problème de Neumann - surface PC</b>	<b>145</b>
D.1	Cas d'une onde incidente quelconque . . . . .	145
D.2	Cas d'une onde incidente plane . . . . .	146
<b>E</b>	<b>Annexe E : Surfaces diélectriques</b>	<b>149</b>
E.1	Cas d'une onde quelconque . . . . .	149
E.2	Cas particulier d'une onde plane . . . . .	155
<b>F</b>	<b>MPP récursif</b>	<b>159</b>
F.1	Problème de Dirichlet . . . . .	159
F.2	Problème de Neumann . . . . .	160
F.3	Surfaces diélectriques . . . . .	161



# Liste des tableaux

1.1	Description des blocs de la chaîne d'émission . . . . .	21
1.2	Description des blocs de la chaîne de réception . . . . .	22
1.3	Paramètres de simulation pour trois fils de même rayon, illuminés selon le même angle d'incidence mais ayant des longueurs différentes (exprimées par rapport à la longueur d'onde)	29
2.1	Tableau récapitulatif de la classification de modèles de diffusion électromagnétique . . . . .	51
3.1	Caractéristiques des profils mesurés sur les sites de Cormeilles-en-Vexin et de La Ferté-Saint-Aubin . . . . .	62
3.2	Caractéristiques statistiques des composantes aléatoires des profils mesurés sur les sites de Cormeilles-en-Vexin et de La Ferté-Saint-Aubin. . . . .	77
3.3	Conditions d'application de l'onde de Thorsos sur la surface rugueuse du profil mesuré . . . . .	82
3.4	Fréquences limites en fonction de l'angle d'incidence pour respecter le critère de Thorsos . . . . .	84



# Table des figures

1.1	EEI sur le bord d'une route à l'approche d'un convoi militaire	18
1.2	Convoi victime de l'explosion d'un EEI	18
1.3	Exemple d'EEI fabriqué à partir d'obus	18
1.4	Exemple d'EEI déclenché par un signal de téléphonie mobile	18
1.5	Incidents liés aux EEI en Irak sur la période 2003-2008	19
1.6	Incidents liés aux EEI en Afghanistan sur la période 2005-2008	19
1.7	Architecture générale d'un EEI	20
1.8	Paramétrage de la scène en émission	21
1.9	Les deux principales configurations de fils à étudier	21
1.10	Architecture de la chaîne de mesure	21
1.11	Mesure du spectre électromagnétique représentant l'occupation spectrale en région Ile-de-France	23
1.12	Modélisation de scène à l'aide de la plateforme Prométhée	25
1.13	Influence de la taille des mailles sur le maillage d'une surface rugueuse	25
1.14	Principe de l'implantation d'une grandeur effective dans la plateforme de calcul 3D FDTD	26
1.15	Représentation du fil électrique avant application de la <b>MdM</b>	27
1.16	Schéma du champ diffracté par le dipôle en champ lointain	29
1.17	Parties réelle et imaginaire des courants surfaciques sur le fil mince de longueur égale à une demi-longueur d'onde illuminé par une onde incidente plane de direction normale à l'axe central du fil ( $\theta_i = 0^\circ$ )	30
1.18	Comparaison des solutions aux équations de Hallen et de Pocklington dans le cas d'un fil mince d'une demi-longueur d'onde illuminé par une onde incidente plane de direction normale à l'axe central du fil ( $\theta_i = 0^\circ$ )	30
1.19	Courants sur un fil mince vertical, illuminé par une onde incidente plane ayant un angle d'incidence de $0^\circ$ avec l'horizontale, de longueur égale à : une longueur d'onde (cas (b)), à dix longueurs d'onde (cas(c))	31
1.20	Diagrammes de rayonnement pour un fil de longueurs une demi-longueur d'onde (à gauche), une longueur d'onde (au centre) et dix longueurs d'onde (à droite)	31
2.1	Diffraction d'une onde électromagnétique par une surface rugueuse	34
2.2	Equivalence entre le modèle 2D et une scène 3D. La surface 2D est équivalente dans le cas 3D à une surface invariante et infinie dans les directions de l'axe $\hat{y}$ .	35
2.3	Polarisations Transverse Électrique (TE) et Transverse Magnétique (TM) pour une onde incidente plane se propageant dans la direction $\mathbf{k}$	35
2.4	Coefficients de Fresnel (a) en polarisation TE et (b) en polarisation TM pour une surface lisse d'aire infinie séparant deux milieux diélectriques	40
2.5	Approximation du champ lointain pour un problème 2D	42
2.6	Hypothèse de Rayleigh	44
2.7	Méthodes de calcul pour déterminer les puissances incidente et diffusée	47
2.8	Influence du paramètre $N$ sur l'atténuation de l'onde de Thorsos	52



2.9	Longueur minimale de surface requise pour l'utilisation de l'onde de Thorsos en fonction de l'angle incident, lorsque $g = L/5$ et pour 4 fréquences distinctes . . . . .	52
2.10	Longueur minimale de surface requise pour l'utilisation de l'onde de Thorsos en fonction de l'angle incident, lorsque $f = 200$ MHz et pour 4 valeurs de N . . . . .	52
2.11	Déphasage entre un point $P_1$ sur la surface et le point $P_2$ sur le plan moyen de la surface dans le prolongement de $P_1$ . . . . .	54
2.12	Surface peu rugueuse d'un point de vue électromagnétique : l'écart type des hauteurs est faible devant la longueur d'onde. Des modèles de diffusion basses fréquences sont préférentiellement utilisés sur ce type de surface . . . . .	56
2.13	Surface très rugueuse d'un point de vue électromagnétique : le rayon de courbure est grand devant la longueur d'onde. Des modèles de diffusion basses fréquences sont préférentiellement utilisés sur ce type de surface . . . . .	56
3.1	Classification générale de surfaces rugueuses solides . . . . .	58
3.2	Photographie d'un profilomètre à aiguille du Département de l'Agriculture des Etats-Unis . . . . .	60
3.3	Photo du rugosimètre . . . . .	61
3.4	Schéma du rugosimètre . . . . .	61
3.5	Localisation des profils des hauteurs mesurés sur le site de Corneilles-en-Vexin . . . . .	62
3.6	Localisation des profils des hauteurs mesurés sur le site de La Ferté-Saint-Aubin . . . . .	62
3.7	Paramétrage des mesures au rugosimètre et recalage avec les points $M_1$ et $M_2$ . . . . .	63
3.8	Mesure et modélisation de la déformation du rail du rugosimètre . . . . .	65
3.9	Traitements et corrections apportés aux données mesurées pour obtenir le profil final des hauteurs $h(x_n)$ . . . . .	67
3.10	Représentation spectrale d'une surface rugueuse multi-échelle . . . . .	68
3.11	Représentation spectrale d'une surface rugueuse bi-échelle, issue d'une mesure . . . . .	68
3.12	Représentation (a) du profil des hauteurs total et de la composante déterministe ainsi que de (b) la composante aléatoire . . . . .	69
3.13	Transformée de Fourier des hauteurs du profil complet, de la composante pseudo-déterministe et de la composante aléatoire . . . . .	70
3.14	Composante aléatoire (a) et densité de probabilité des hauteurs (b) . . . . .	72
3.15	Test de Kolmogorov-Smirnov pour le profil complet (a) et pour la composante aléatoire uniquement (b) . . . . .	73
3.16	Fonction d'autocorrélation du profil mesuré . . . . .	74
3.17	Fonction d'autocorrélation du profil mesuré. . . . .	75
3.18	Convergence de $L_{c,i}$ et de $\sigma_{h,i}$ en fonction de l'étendue du profil . . . . .	76
3.19	Représentation des 3 profils mesurés sur le site de Corneilles-en-Vexin, ainsi que leurs composantes aléatoire et déterministe. Pour chacun des profils, nous représentons leur DDP normalisée ainsi que leur FA normalisée complète puis localisée au voisinage de l'origine. . . . .	78
3.20	Représentation des 2 profils mesurés sur le site de La-Ferté-Saint-Aubin, ainsi que leurs composantes aléatoire et déterministe. Pour chacun des profils, nous représentons leur DDP normalisée ainsi que leur FA normalisée complète puis localisée au voisinage de l'origine. . . . .	79
3.21	Schéma du générateur de profils de surface rugueuse aléatoire . . . . .	80
3.22	Génération de surfaces rugueuses aléatoires de FA exponentielle, de même écart-type des hauteurs mais de longueurs de corrélation différentes . . . . .	80
3.23	Génération de surfaces rugueuses aléatoires de FA exponentielle, de même longueur de corrélation mais d'écart-types des hauteurs différents . . . . .	81
3.24	Génération de surfaces rugueuses de même longueur de corrélation et même écart-type des hauteurs, mais de FA différentes : (a) exponentielle et (b) gaussienne . . . . .	81
3.25	Diffraction du profil de surface rugueuse mesuré par une onde électromagnétique . . . . .	82

3.26	SERn du profil 1 mesuré à Cormeilles-en-Vexin, de sa composante aléatoire et de sa composante déterministe, pour $\theta_i = 0^\circ$ et $f = 274$ MHz . . . . .	83
3.27	SERn du profil 1 mesuré à Cormeilles-en-Vexin, de sa composante aléatoire et de sa composante déterministe, pour $\theta_i = 45^\circ$ et $f = 387$ MHz . . . . .	83
3.28	SERn du profil 1 mesuré à Cormeilles-en-Vexin, de sa composante aléatoire et de sa composante déterministe pour $\theta_i = 60^\circ$ et $f = 548$ MHz . . . . .	84
3.29	Génération de profils de surfaces rugueuses de FA exponentielles et gaussiennes et comparaison au profil mesuré à Cormeilles-en-Vexin. . . . .	85
3.30	SERn en polarisation TE, $\theta_i = 0^\circ$ , $f = 274$ MHz avec une onde incidente de Thorsos de paramètre $g = L/6$ pour des surfaces aléatoires de longueur $L = 28.26$ m, d'écart-type des hauteurs $\sigma_h = 1.47$ cm et de longueur de corrélation $L_c = 44$ cm. Deux natures de FA sont utilisées pour la génération : (a) exponentielle et (b) gaussienne. . . . .	85
3.31	SERn en polarisation TE, $\theta_i = 45^\circ$ , $f = 387$ MHz avec une onde incidente de Thorsos de paramètre $g = L/6$ pour des surfaces aléatoires de longueur $L = 28.26$ m, d'écart-type des hauteurs $\sigma_h = 1.47$ cm et de longueur de corrélation $L_c = 44$ cm. Deux natures de FA sont utilisées pour la génération : (a) exponentielle et (b) gaussienne. . . . .	85
3.32	SERn en polarisation TE, $\theta_i = 60^\circ$ , $f = 548$ MHz avec une onde incidente de Thorsos de paramètre $g = L/6$ , pour des surfaces aléatoires de longueur $L = 28.26$ m, d'écart-type des hauteurs $\sigma_h = 1.47$ cm et de longueur de corrélation $L_c = 44$ cm. Deux natures de FA sont utilisées pour la génération de surfaces rugueuses : (a) exponentielle et (b) gaussienne. . . . .	86
3.33	SERn en polarisation TM, $\theta_i = 0^\circ$ , $f = 274$ MHz avec une onde incidente de Thorsos de paramètre $g = L/6$ , pour des surfaces aléatoires de longueur $L = 28.26$ m, d'écart-type des hauteurs $\sigma_h = 1.47$ cm et de longueur de corrélation $L_c = 44$ cm. Deux natures de FA sont utilisées pour la génération de surfaces rugueuses : (a) exponentielle et (b) gaussienne. . . . .	86
3.34	SERn en polarisation TM, $\theta_i = 45^\circ$ , $f = 387$ MHz avec une onde incidente de Thorsos de paramètre $g = L/6$ , pour des surfaces aléatoires de longueur $L = 28.26$ m, d'écart-type des hauteurs $\sigma_h = 1.47$ cm et de longueur de corrélation $L_c = 44$ cm. Deux natures de FA sont utilisées pour la génération de surfaces rugueuses : (a) exponentielle et (b) gaussienne. . . . .	86
3.35	SERn en polarisation TM, $\theta_i = 60^\circ$ , $f = 548$ MHz avec une onde incidente de Thorsos de paramètre $g = L/6$ , pour des surfaces aléatoires de longueur $L = 28.26$ m, d'écart-type des hauteurs $\sigma_h = 1.47$ cm et de longueur de corrélation $L_c = 44$ cm. Deux natures de FA sont utilisées pour la génération de surfaces rugueuses : (a) exponentielle et (b) gaussienne. . . . .	87
4.1	Diffraction d'une onde incidente plane par une surface rugueuse aléatoire et PC donnant naissance à une onde diffractée . . . . .	94
4.2	Diffraction d'une onde incidente plane par une surface rugueuse aléatoire et diélectrique, donnant naissance à une onde diffractée et une onde transmise . . . . .	94
4.3	Diffraction d'une onde incidente par une surface rugueuse aléatoire donnant naissance à une onde diffractée et une onde transmise . . . . .	99
4.4	Surface rugueuse aléatoire, PC, de FA de nature expoentielle, de longueur $L = 60$ m, d'écart-type des hauteurs $\sigma_h = 1.47$ cm et de longueur de corrélation $L_c = 0.56$ m . . . . .	109
4.5	Représentation du champ incident de l'onde de Thorsos illuminant la surface rugueuse, en linéaire sur le dessus, en logarithmique en-dessous ( $20 \log( \Psi_i )$ ). . . . .	110
4.6	Comparaison des courants surfaciques obtenus avec la <b>MdM</b> et la <b>MPP</b> pour l'ordre 0 . . . . .	111
4.7	Comparaison des courants surfaciques obtenus avec la <b>MdM</b> et la <b>MPP</b> pour l'ordre 1 . . . . .	111
4.8	Comparaison des courants surfaciques obtenus avec la <b>MdM</b> et la <b>MPP</b> pour l'ordre 2 . . . . .	112
4.9	Comparaison des courants obtenus avec la <b>MdM</b> et la <b>MPP</b> pour les ordres 0, 1, 2 sur la partie centrale de la surface . . . . .	112
4.10	Surface rugueuse aléatoire, diélectrique, de FA de nature exponentielle, de longueur $L = 60$ m, d'écart-type des hauteurs $\sigma_h = 1.47$ cm et de longueur de corrélation $L_c = 0.56$ m . . . . .	112

4.11	Courants surfaciques générés par une onde incidente de Thorsos, de longueur d'onde $\lambda = 1$ m, d'angle d'incidence $30^\circ$ , sur une surface rugueuse de FA exponentielle, d'écart-type des hauteurs $\sigma_h = 1.47$ cm et de longueur de corrélation $L_c = 0.56$ m. Les résultats illustrent la comparaison de la <b>MdM</b> � la <b>MPP</b> � l'ordre 0 . . . . .	113
4.12	Courants surfaciques générés par une onde incidente de Thorsos, de longueur d'onde $\lambda = 1$ m, d'angle d'incidence $30^\circ$ , sur une surface rugueuse de FA exponentielle, d'écart-type des hauteurs $\sigma_h = 1.47$ cm et de longueur de corrélation $L_c = 0.56$ m. Les résultats illustrent la comparaison de la <b>MdM</b> � la <b>MPP</b> � l'ordre 1 . . . . .	113
4.13	Courants surfaciques générés par une onde incidente de Thorsos, de longueur d'onde $\lambda = 1$ m, d'angle d'incidence $30^\circ$ , sur une surface rugueuse de FA exponentielle, d'écart-type des hauteurs $\sigma_h = 1.47$ cm et de longueur de corrélation $L_c = 0.56$ m. Les résultats illustrent la comparaison de la <b>MdM</b> � la <b>MPP</b> � l'ordre 2 . . . . .	114
4.14	Comparaison des courants obtenus avec la <b>MdM</b> et la <b>MPP</b> pour les ordres 0, 1, 2 sur la partie centrale de la surface . . . . .	114
4.15	Module du champ incident issu de l'onde de Thorsos qui vient éclairer la surface rugueuse	115
4.16	Module du champ diffracté au-dessus de la surface rugueuse, à partir des courants calculés à l'aide de la <b>MdM</b> . . . . .	116
4.17	Module du champ diffracté au-dessus de la surface, à partir des courants calculés à l'aide de la <b>MPP</b> � l'ordre 2 . . . . .	116
4.18	Module du champ diffracté au-dessus de la surface, à partir des courants calculés à l'aide de la <b>MPP</b> � l'ordre 0 . . . . .	117
4.19	Module du champ diffracté au-dessus de la surface, à partir des courants calculés à l'aide de la <b>MPP</b> � l'ordre 1 . . . . .	117
4.20	SERN de la surface rugueuse, parfaitement conductrice, de longueur $L = 60$ m, de FA exponentielle, d'écart-type des hauteurs $\sigma_h = 1.47$ cm et de longueur de corrélation $L_c = 0.56$ m, éclairée par une onde de Thorsos de paramètre $g = L/6$ de longueur d'onde $\lambda = 1$ m et d'angle d'incidence 30 degrés . . . . .	117
4.21	SERN de la surface rugueuse, diélectrique, de longueur $L = 60$ m, de FA exponentielle, d'écart-type des hauteurs $\sigma_h = 1.47$ cm et de longueur de corrélation $L_c = 0.56$ m, éclairée par une onde de Thorsos de paramètre $g = L/6$ de longueur d'onde $\lambda = 1$ m et d'angle d'incidence 30 degrés . . . . .	118
4.22	Illustration du problème étudié par Barrera et al. : l'onde incidente illumine un sol diélectrique dans lequel sont répartis aléatoirement des diffuseurs circulaires . . . . .	119
4.23	Grandeur effective pour le cas d'une surface PC . . . . .	120
4.24	Grandeur effective pour le cas d'une surface diélectrique . . . . .	120
4.25	Scénario d'utilisation de l'impédance de surface dans la plateforme de calcul 3D FDTD . . . . .	126
4.26	Scénario d'utilisation de la permittivité diélectrique effective dans la plateforme de calcul 3D FDTD . . . . .	126

# Liste des symboles

$\langle \rangle$	moyenne ou espérance mathématique
$\sigma_h$	écart type des hauteurs
$\mathcal{F}$	opérateur de transformée de Fourier
$\mathcal{F}^{-1}$	opérateur de transformée de Fourier inverse
$\nabla$	opérateur de gradient
*	complexe conjugué
$f_{k_{ix}}$	$f(k_x - k_{ix})$
2D	deux dimensions
3D	trois dimensions
<b>SPM</b>	<b>S</b> mall <b>P</b> erturbation <b>M</b> ethod
<b>AFM</b>	<b>A</b> tomic <b>F</b> orce <b>M</b> icroscopy
<b>AK</b>	<b>A</b> pproximation de <b>K</b> irchhoff
<b>DDP</b>	<b>D</b> ensité <b>D</b> e <b>P</b> robabilité
<b>EI</b>	<b>E</b> ngins <b>E</b> xplosifs <b>I</b> mprovisés
<b>EPTD</b>	<b>E</b> xtended <b>P</b> TD
<b>FA</b>	<b>F</b> onction d' <b>A</b> utocorrélation
<b>FDFD</b>	<b>F</b> inite <b>D</b> ifference <b>F</b> requency <b>D</b> omain
<b>FDTD</b>	<b>F</b> inite <b>D</b> ifference <b>T</b> ime <b>D</b> omain
<b>FEM</b>	<b>F</b> inite <b>E</b> lement <b>M</b> ethod
<b>FMM</b>	<b>F</b> ast <b>M</b> ultipole <b>M</b> ethod
<b>HF</b>	<b>H</b> aute <b>F</b> réquence
<b>IED</b>	<b>I</b> mprovised <b>E</b> xplosive <b>D</b> evice
<b>IEM</b>	<b>I</b> ntegral <b>E</b> quation <b>M</b> ethod
<b>MdM</b>	<b>M</b> éthode <b>d</b> es <b>M</b> oments
<b>OG</b>	<b>O</b> ptique <b>G</b> éométrique

OP	<b>O</b> ptique <b>P</b> hysique
PC	<b>P</b> arfaitement <b>C</b> onducteur
PML	<b>P</b> erfect <b>M</b> atch <b>L</b> ayer
PTD	<b>P</b> hysical <b>T</b> heory of <b>D</b> iffraction
SER	<b>S</b> urface <b>É</b> quivalente <b>R</b> adar
SERn	<b>S</b> urface <b>É</b> quivalente <b>R</b> adar normalisée
SIBC	<b>S</b> urface <b>I</b> mpedance <b>B</b> oundary <b>C</b> onditions
SSA	<b>S</b> mall <b>S</b> lope <b>A</b> pproximation
STM	<b>S</b> canning <b>T</b> unneling <b>M</b> icroscopy
TGD	<b>T</b> héorie <b>G</b> éométrique de la <b>D</b> iffraction
TLM	<b>T</b> ransmission <b>L</b> ine <b>M</b> atrix
TUD	<b>T</b> héorie <b>U</b> niforme de la <b>D</b> iffraction
UHF	<b>U</b> ltra <b>H</b> aute <b>F</b> réquence

---

# Contexte et problématique de la thèse

## Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Contexte</b>	<b>18</b>
<b>1.2</b>	<b>Description de la scène</b>	<b>20</b>
<b>1.3</b>	<b>Obstacles à la détection</b>	<b>22</b>
<b>1.4</b>	<b>Objectifs de la thèse</b>	<b>23</b>
<b>1.5</b>	<b>Diffraction par un fil en espace libre</b>	<b>26</b>
<b>1.6</b>	<b>Plan de la thèse</b>	<b>31</b>

---

## 1.1 Contexte

Avec les guerres d'Irak et d'Afghanistan de ce début de XXI<sup>e</sup> siècle, les armées ont dû faire face à une menace de plus en plus présente le long du bord des routes : les Engins Explosifs Improvisés (EEI - IED en anglais ou "roadside bombs"). Ils sont placés le long des chemins d'accès ou des routes, comme illustré sur la figure 1.1, et sont camouflés ou enterrés de manière à être invisibles depuis un véhicule empruntant la route piégée. La figure 1.2 illustre la conséquence d'une explosion. Ce sont des dispositifs de fabrication artisanale, même si leur degré de sophistication peut varier d'un engin à un autre, comme le montrent les figures 1.3 et 1.4. Ils sont souvent assemblés à partir d'éléments du commerce, mais peuvent incorporer des pièces issues d'arsenaux militaires (grenades, obus).



FIGURE 1.1 – EEI sur le bord d'une route à l'approche d'un convoi militaire



FIGURE 1.2 – Convoi victime de l'explosion d'un EEI



FIGURE 1.3 – Exemple d'EEI fabriqué à partir d'obus



FIGURE 1.4 – Exemple d'EEI déclenché par un signal de téléphonie mobile

La lutte anti-EEI représente un enjeu majeur pour les armées des différents pays. Entre 2006 et 2011, les Etats-Unis ont investi 18 milliards de dollars dans la lutte anti-EEI [1]. Les figures 1.5 et 1.6 illustrent le nombre d'incidents, répertoriés par le DoD<sup>1</sup>, liés aux EEI en Irak et en Afghanistan. Chaque année, le nombre d'incidents s'élève de plusieurs centaines à plusieurs milliers, et le nombre de victimes du côté de la coalition alliée atteint plusieurs dizaines voire plusieurs centaines. Les civils ne sont pas épargnés non plus : en Afghanistan en 2009, 1054 personnes en ont été victimes<sup>2</sup>. Ce type d'engin est à l'origine de 60%

<sup>1</sup>Département de la Défense des Etats-Unis

<sup>2</sup>source wikipedia



des pertes américaines en Afghanistan et justifie le budget en forte augmentation alloué à la recherche de solutions face à ce danger depuis les années 2000. Des programmes ont régulièrement été mis en place afin de trouver des solutions efficaces pour lutter contre ce type d'attaques. Les solutions proposées répondent à 4 volets thématiques :

- prévention et surveillance : empêcher en amont le placement des EEI le long des convois ;
- protection : protéger les troupes des convois en cas d'explosion ;
- détection : détecter les EEI sur le bord des routes ;
- neutralisation : désamorcer l'EEI ou le faire exploser.

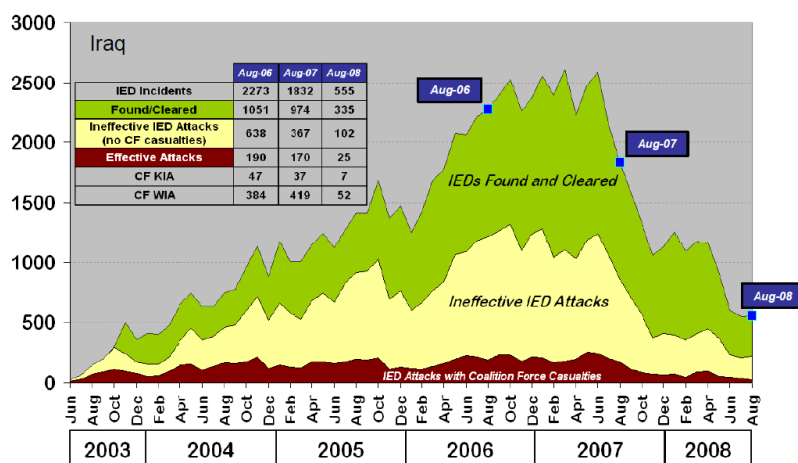


FIGURE 1.5 – Incidents liés aux EEI en Irak sur la période 2003-2008

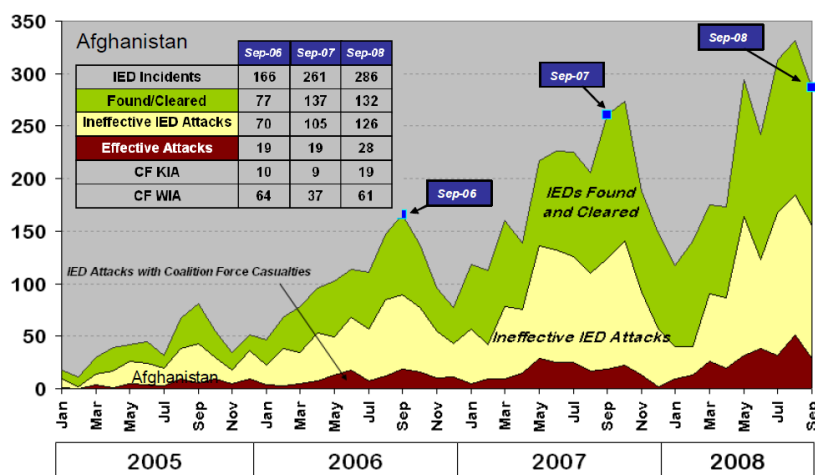


FIGURE 1.6 – Incidents liés aux EEI en Afghanistan sur la période 2005-2008

La détection consiste à repérer un EEI avant son explosion. La stratégie la plus simple mise en place est le déploiement sur zone suspecte de militaires équipés de détecteurs de métaux. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle est fastidieuse, que le rapport surface sécurisée sur temps de recherche est très faible. Son utilisation n'est donc pas adaptée quand il s'agit de sécuriser plusieurs kilomètres de routes. Les stratégies de détection d'EEI sont variables selon la zone de recherche et la technologie d'EEI recherchée. La figure 1.7 présente l'architecture générale d'un EEI, composée d'une charge explosive, d'une charge d'amorçage, d'un détonateur, d'un canal de transmission et d'un système de mise à feu. Le fonctionnement est le suivant : un système de mise à feu (automatique ou commandé manuellement) envoie un signal



au détonateur à travers un canal. Le détonateur active la charge d’amorçage qui va déclencher la charge explosive.

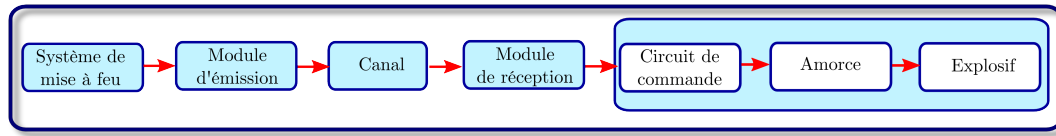


FIGURE 1.7 – Architecture générale d’un EEI

Nous distinguons deux grandes catégories de canaux reliant le système de mise à feu au circuit de commande : les canaux aériens (l’air) et les canaux filaires (fils électriques, câbles, ...). Lorsque le signal est envoyé à travers le canal aérien par voie hertzienne (commande radio), l’utilisation d’un brouilleur permet d’« aveugler » le récepteur et empêche le déclenchement de la charge explosive. Pour les canaux filaires, le signal de déclenchement est transmis par un câble entre le système de mise à feu et le dispositif explosif. Pour ce type de système, le brouilleur est inefficace et une stratégie de détection est nécessaire afin de repérer l’EEI avant que le convoi n’arrive à son niveau.

Pour détecter un EEI, les militaires cherchent à identifier de manière active ou passive un signal représentatif de la signature de l’EEI ou de celle de ses sous-systèmes ou composants. Le sujet de cette thèse s’articule autour de la détection d’EEI le long des routes. Nous nous intéressons plus spécifiquement à la détection d’EEI, pour lesquelles la charge est reliée au système de mise à feu à l’aide d’un câble. La longueur du câble peut varier de quelques mètres à plusieurs centaines de mètres. Le principe de détection exploité ici est que la présence du fil va perturber la réponse électromagnétique résultant à la fois du sol et du fil. Ainsi, la mesure de ce signal par un système adéquat permet d’identifier, ou non, la présence du câble et donc de l’EEI.

## 1.2 Description de la scène

### 1.2.1 Introduction

La figure 1.8 présente une scène de détection. Un véhicule expérimental équipé d’une chaîne de mesure circule sur un chemin possédant des irrégularités. En amont du véhicule, un EEI avec un fil est dissimulé sous la surface du sol. L’objectif est de pouvoir détecter le fil à l’aide de la chaîne de mesure embarquée dans la plateforme tactique mobile, de déclencher le freinage jusqu’à l’arrêt complet du véhicule avant d’arriver dans la zone de déflagration de l’EEI. Nous considérons que les antennes d’émission et de réception sont positionnées à une hauteur de quelques mètres au-dessus du plan moyen du sol. Quant au capteur de la chaîne réceptrice, il est fixé sur le véhicule à une hauteur située entre 50 cm et 2 m. L’onde émise par l’antenne doit pouvoir éclairer la surface à une distance comprise entre 3 et 50 mètres. Les configurations d’antennes et de zones éclairées font que les angles d’incidence et de réflexion sont compris entre quelques degrés et quelques dizaines de degrés.

Thales Communications & Security SAS, qui a effectué des mesures de détection de fils, a envisagé deux configurations canoniques à étudier : le fil perpendiculaire ou parallèle à la route, comme illustré sur la figure 1.9.

### 1.2.2 Chaîne de mesure

Le véhicule chargé de la détection des EEI embarque la chaîne de mesure, dont l’architecture est décrite dans la figure 1.10.

La chaîne de mesure est composée d’une chaîne d’émission et d’une chaîne de réception. Les tableaux 1.1 et 1.2 décrivent les différents blocs de ces chaînes, ainsi que leurs fonctions.

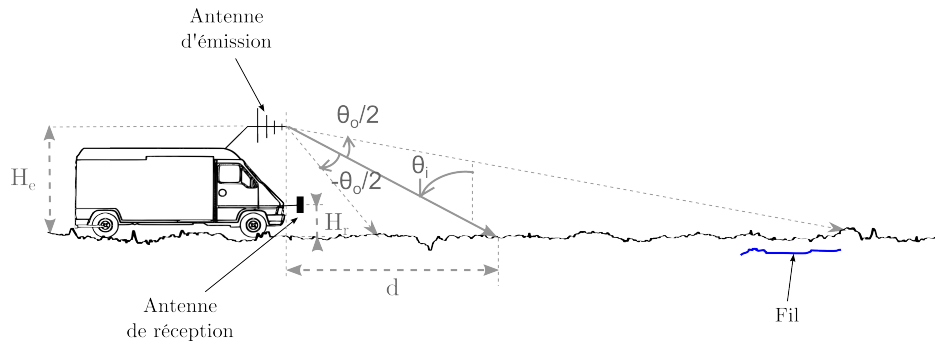


FIGURE 1.8 – Paramétrage de la scène en émission

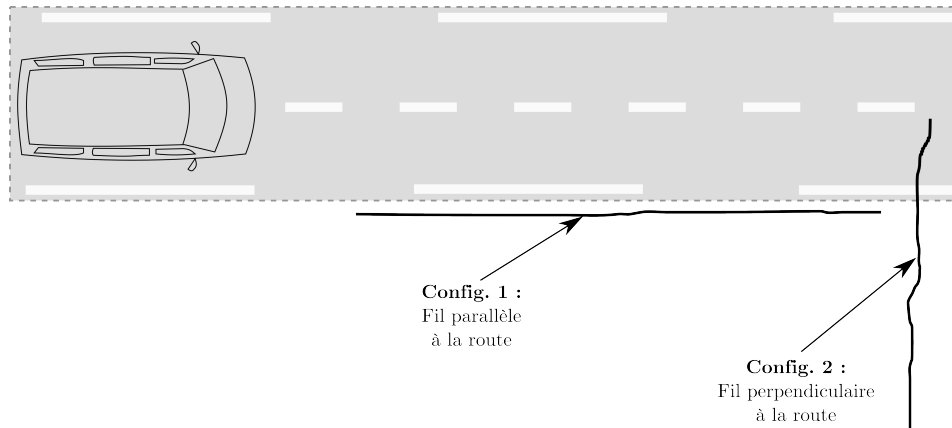


FIGURE 1.9 – Les deux principales configurations de fils à étudier

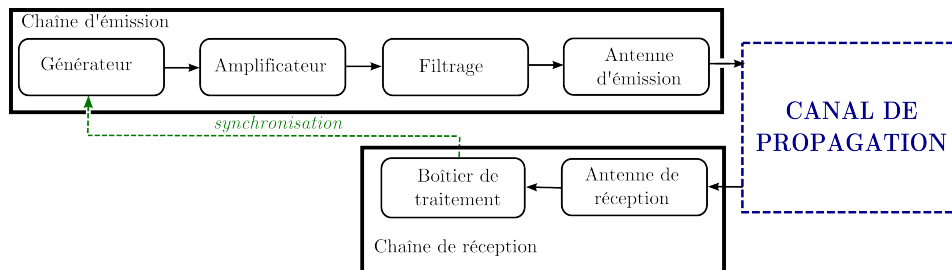


FIGURE 1.10 – Architecture de la chaîne de mesure

Tableau 1.1 – Description des blocs de la chaîne d’émission

Bloc	Fonction
Générateur	Générer la forme d’onde
Amplificateur	Amplifier en puissance le signal émis
Filtrage	Atténuer le signal en dehors de la bande de fréquences d’intérêt (voir la sous-section 1.2.3)
Antenne d’émission	Transformer le signal de la chaîne d’émission en une onde électromagnétique

### 1.2.3 Bande de fréquences

La bande de fréquences utilisée pour les essais de détection couvre le spectre [10, 600] MHz (HF à UHF). La bande a été choisie de manière à répondre à plusieurs contraintes :

- les plages fréquentielles les moins bruitées de l’environnement électromagnétique,

Tableau 1.2 – Description des blocs de la chaîne de réception

Bloc	Fonction
Capteur large bande	Capter le champ électrique et le convertir en un signal électrique
Oscilloscope	Afficher le signal reçu en sortie du capteur
Carte électronique	Traiter le signal reçu par le capteur en réception

- les effets physiques engendrés par le couplage du champ et du câble et leur réémission,
- les systèmes antennaires et la bande d'émission envisageables sur un véhicule opérationnel.

Cette section a permis de décrire à la fois les moyens et les scénarios mis en jeu dans une scène expérimentale de détection. Nous avons également précisé la bande de fréquences employée, ainsi que les paramètres géométriques importants de la scène. La section suivante présente les obstacles qui rendent la détection du fil complexe.

### 1.3 Obstacles à la détection

Pour détecter un EEI, nous cherchons à capter la signature du fil qui relie le déclencheur au système explosif. Comme le montre l'équation 1.1, l'antenne réceptrice capte, en cas de présence du fil, la signature du fil mais aussi plusieurs signaux que l'on peut qualifier de bruits et qui vont perturber la détection :

$$S_{\text{mesure}} = S_{\text{fil}} + S_{\text{environnement}} + S_{\text{clutter}} + S_{\text{véhicule}} + S_{\text{antennes}} + S_{\text{mesure}} + S_{\text{divers}} \quad (1.1)$$

Parmi les signaux non désirés et captés, nous pouvons citer :

- l'**environnement électromagnétique**  $S_{\text{environnement}}$  : les émetteurs locaux environnants délivrant des services, tels que la téléphonie (800 MHz pour la 4G) et la télévision par satellite (474 à 858 MHz), qui émettent des ondes électromagnétiques dont les fréquences peuvent être proches de la fréquence d'émission. Il est nécessaire de trouver une fenêtre de fréquences favorable où le bruit électromagnétique environnant est faible. La figure 1.11 illustre l'occupation du spectre sur un de nos terrains de mesure, dans la bande [0 ; 6] GHz. Nous nous apercevons que sur les deux premières cellules, soit de 0 à 1200 MHz, de nombreux émetteurs sont présents, avec des signaux atteignant les -20 dBm.
- l'**écho électromagnétique du porteur**  $S_{\text{véhicule}}$  : l'antenne émettrice embarquée sur le camion émet une onde qui se propage dans les directions déterminées par son diagramme de rayonnement. Aux fréquences considérées, la plupart des antennes ne sont pas directives. L'antenne éclaire donc le camion, sur lequel l'onde est diffractée et réfléchi vers l'antenne réceptrice sous forme d'écho. Cet écho, qui a la même fréquence que le signal émis, est à ne pas confondre avec une signature de fil.
- les **antennes**  $S_{\text{antennes}}$  : du fait de leur proximité sur le véhicule, l'antenne émettrice éclaire l'antenne de réception. Pour ne pas saturer l'antenne de réception, le niveau de puissance émis doit se situer en dessous d'un certain seuil. Cela va à l'encontre du besoin que l'onde émise possède une puissance élevée afin que la signature du fil ait également un niveau élevé (le clutter sera également plus fort). Par ailleurs, l'antenne de réception impose de même une puissance minimale détectable relative à sa sensibilité.
- le **clutter<sup>3</sup> de sol**  $S_{\text{clutter}}$  : l'antenne émettrice envoie une onde qui éclaire le sol en avant du véhicule. A l'interface air-sol, l'onde se décompose en une composante transmise qui se propage dans le sol et une composante réfléchi qui se propage dans l'air. Or, comme le sol n'est pas lisse, cette onde est diffusée dans de multiples directions. L'antenne réceptrice capte alors une partie de la puissance diffusée par le sol, qui est un signal non utile et gênant pour la détection.

<sup>3</sup>écho électromagnétique non désiré

- le **clutter divers**  $S_{\text{divers}}$  : la scène, dans laquelle le fil est dissimulé à proximité de la route, peut contenir d'autres éléments qui diffusent l'onde incidente et peuvent gêner la détection : fossé, rochers, buissons, grillage en bordure de route. Il est important de pouvoir dissocier leur signature de celle d'un fil.

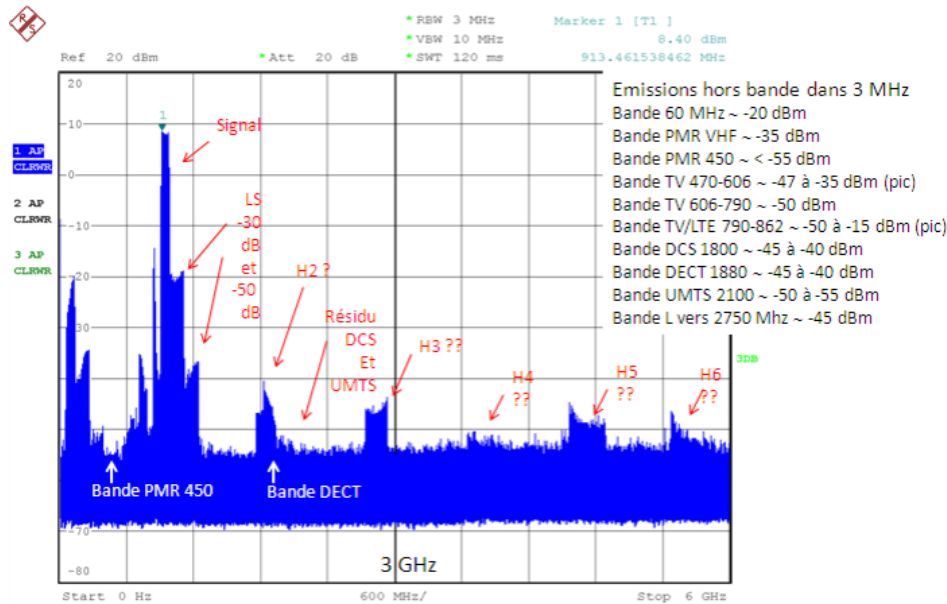


FIGURE 1.11 – Mesure du spectre électromagnétique représentant l'occupation spectrale en région Ile-de-France

Deux contraintes supplémentaires peuvent être citées, qui ont une influence sur les performances de la chaîne de mesure :

- la **contrainte temps réel** : le temps de détection de l'EEI doit être suffisamment rapide pour permettre un arrêt du véhicule avant d'arriver au niveau de la charge explosive. Cela implique, à terme, des traitements en temps réel.
- la **protection des personnes** : l'antenne d'émission se situant sur le véhicule, les personnes à proximité ne doivent pas être soumises à une exposition aux ondes électromagnétiques dépassant un seuil préconisé par l'instruction 302143/DEF/SGA/DFP/PER/5.

L'expérience terrain montre que le clutter de sol est le signal qui limite, de manière prépondérante, la détection du fil à distance.

## 1.4 Objectifs de la thèse

### 1.4.1 Introduction

Le clutter de sol est un des éléments les plus gênants pour la détection d'EEI. L'objectif des travaux de la thèse est de comprendre et de modéliser le champ diffracté par une surface rugueuse aléatoire en présence d'un fil enfoui. Pour atteindre cet objectif, cinq enjeux sont à lever successivement :

- **1<sup>er</sup> enjeu : Identification des paramètres de la scène.** Que ce soit pour la diffraction d'un fil en espace libre ou de la diffraction par une surface rugueuse (avec ou sans fil enfoui), de nombreux modèles électromagnétiques de diffusion existent. Les modèles existants dépendent des paramètres de la scène (géométrie de la surface, géométrie du fil, des paramètres de l'onde incidente, des paramètres diélectriques du sol). Une première étape de la thèse est de les connaître. Ils sont imposés par le cahier des charges fourni par l'industriel.

- 2<sup>ème</sup> enjeu : **Mesurabilité et quantification des paramètres.** Une fois ces paramètres identifiés, à l'aide de mesures et/ou d'une recherche bibliographique, ces grandeurs sont dimensionnées.
- 3<sup>ème</sup> enjeu : **Choix de modèles de diffusion.** La connaissance de ces valeurs permet d'orienter notre choix sur les modèles électromagnétiques valides pour notre application (calcul en temps réel). A noter que la bibliographie est très riche car cette problématique est étudiée depuis plusieurs décennies.
- 4<sup>ème</sup> enjeu : **Variabilité de la diffusion par une surface rugueuse.** Le modèle électromagnétique sélectionné est implanté dans un simulateur. Il permet, à travers des simulations numériques, de calculer des grandeurs d'intérêt. Dans cette étape, elles sont calculées à partir des entrées définies à l'étape 1.
- 5<sup>ème</sup> enjeu : **Limite de validité du modèle.** Étape nécessaire pour déterminer le domaine de validité du modèle électromagnétique retenu en le comparant à un modèle de référence.

Cette thèse a été réalisée à l'aide d'un contrat CIFRE. Ainsi, le laboratoire de recherche IETR a apporté ses compétences sur la modélisation électromagnétique par des surfaces rugueuses, et notamment sur la Méthode des Moments appliquée sur ce type de géométrie et sur les modèles asymptotiques dits "haute fréquence".

Pour l'industriel Thales Communication & Security SAS, au-delà de la compréhension des phénomènes physiques mis en jeu, la maîtrise du modèle électromagnétique doit permettre de :

- déterminer une grandeur effective permettant de prendre en compte les effets de la rugosité de sol dans une plateforme de calcul **FDTD** 3D ;
- modéliser le clutter de sol afin de proposer des traitements du signal permettant de limiter les fausses alarmes.

## 1.4.2 Plateforme FDTD de Thales Communications & Security SAS

Un des besoins de l'industriel est de développer la capacité de ses outils de simulations pour prendre en compte la diffusion électromagnétiques par des surfaces rugueuses. L'outil actuel est une plateforme de calcul 3D qui utilise l'algorithme TEMSI-FD développé par l'Université de Limoges [2] et basé sur la méthode numérique des différences finies (**FDTD**) proposée par Yee *et al.* [3] en 1966. La plateforme offre la possibilité de modéliser des scènes complexes, comme le montre la figure 1.12.

Dans cette scène, un camion est représenté à l'aide d'un parallélépipède rectangle. Il possède un monopole sur son toit servant d'antenne d'émission. Le camion est sur le sol qui est représenté ici par une surface lisse. A 6 m devant le camion se trouve un fil de 25 m positionné à 10 cm au-dessus du sol. La scène est représentée dans un volume fini, dont les dimensions sont déterminées par l'utilisateur.

Le principe de la méthode est de décomposer ce volume en éléments finis (de forme hexaédrique pour la plateforme Prométhée, d'autres formes existant sur des plateformes alternatives). A partir des équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère sous forme de différences finies, l'algorithme de Yee [4] fournit une expression des champs électriques et magnétiques au temps  $t + 1$  à partir des champs calculés au temps  $t$  pour chaque cellule de l'espace. L'espace est maillé avec des parallélépipèdes rectangles de dimensions homogènes dans tout l'espace. Plus le volume est maillé finement pour en représenter les détails, plus les cellules doivent être petites. A volume fixe, cela augmente le nombre de mailles. Or, la complexité de calcul de la **FDTD** est directement liée au nombre de cellules  $N_{FDTD}$  de la scène. D'après [5], la **FDTD** possède une complexité cubique  $O(N_{FDTD}^3)$ . Ainsi, plus le nombre de cellules est important, plus le temps de calcul et la taille mémoire nécessaires sont importants.

Dans une scène complexe comportant un sol rugueux, plusieurs difficultés sont à surmonter :

- le profil de la surface rugueuse impose un maillage fin, augmentant significativement le nombre de cellules et le temps de calcul (voir figure 1.13),

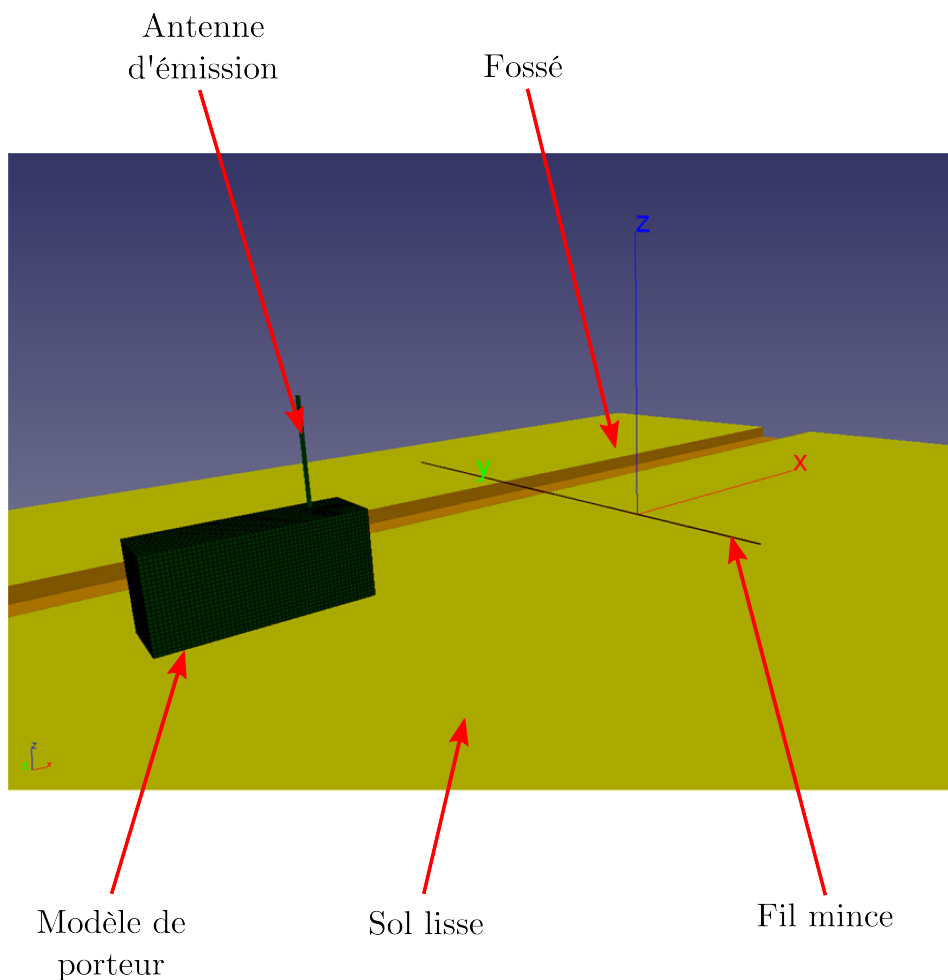


FIGURE 1.12 – Modélisation de scène à l’aide de la plateforme Prométhée

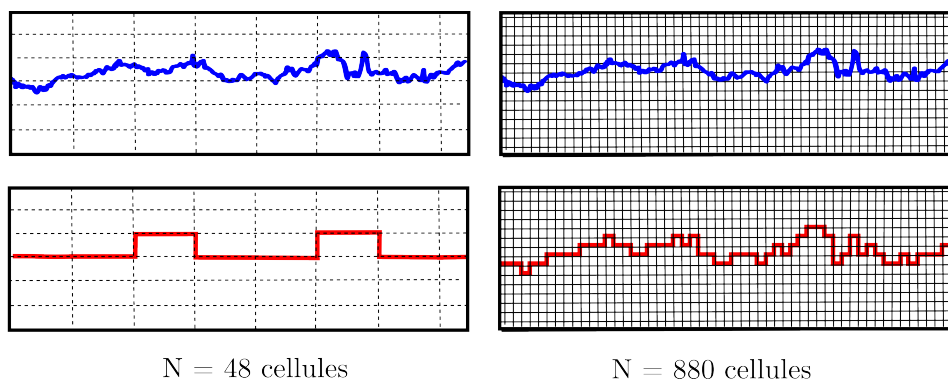


FIGURE 1.13 – Influence de la taille des mailles sur le maillage d’une surface rugueuse

- la représentation du profil par des hexaèdres, en marches d’escalier, qui apporte un biais.

Pour remédier à ces difficultés, la surface rugueuse est remplacée par une surface lisse à laquelle une grandeur électromagnétique effective, modélisant la diffraction électromagnétique par la surface rugueuse, sera associée. La **MPP** (Méthode des Petites Perturbations, SPM en anglais pour Small Perturbation Method) sera appliquée pour la traiter la diffusion par la surface rugueuse et pour ensuite déterminer cette grandeur effective. Cette grandeur effective a pour vocation d’être intégrée dans la plateforme de calcul 3D **FDTD** de Thales Communications & Security SAS. Chaque maille de la surface rugueuse se voit associer ce paramètre effectif qui viendra modifier les conditions aux limites appliquées sur une surface lisse. La figure 1.14 illustre cette méthode et son principe est expliqué plus en détail au chapitre 4, notamment sur la

manière dont nous calculons la grandeur effective à implanter.

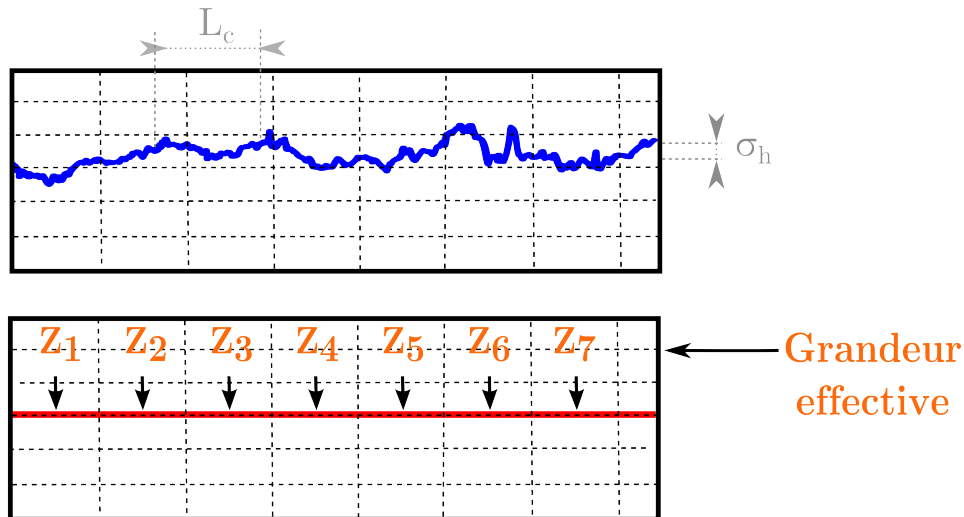


FIGURE 1.14 – Principe de l’implantation d’une grandeur effective dans la plateforme de calcul 3D FDTD

### 1.4.3 Déroulement de la thèse

Durant la première année de la thèse, un code rigoureux basé sur la Méthode des Moments (**MdM**) a été développé pour calculer le champ diffracté par un fil mince placé en espace libre. Ce choix a été guidé par mes encadrants.

L’idée était ensuite de l’intégrer dans un code existant au laboratoire, également basé sur la **MdM**, permettant de calculer le champ diffracté par un objet en dessous d’une surface rugueuse mais valide pour un problème scalaire 2D (surface unidimensionnelle). En effet, ce code, basé sur la méthode PILE (Propagation-Inside-Layer-Expansion) développée par Nicolas Déchamps *et al.* [6, 7], permet d’isoler les contributions provenant de la surface seule, de l’objet seul et du couplage entre l’objet et la surface. Ainsi, la matrice impédance de la scène (surface plus objet) est décomposée en sous-blocs, puis à l’aide d’une inversion matricielle par blocs (basée sur le complément de Schur), la matrice impédance de la scène est inversée de manière efficace. De plus, cette décomposition permet d’isoler la matrice impédance de l’objet seul (en espace libre). L’idée était donc, par la suite, d’incorporer la matrice impédance d’un fil en espace libre dans la matrice globale, en profitant que la surface rugueuse est invariante selon une direction (problème 2D) pour réduire significativement le nombre d’inconnues. Mais malheureusement, S. Bellez (ingénieur de recherche au laboratoire IETR) a montré (dans le cadre du projet ANR MCIED, en relation étroite avec la thèse) que cette hybridation n’apportait pas de gain significatif par rapport à la résolution directe du problème 3D équivalent.

Ainsi, après six mois de thèse, nous avons décidé de résoudre uniquement le problème de la diffraction par une surface rugueuse en omettant le fil. La contribution du fil sera prise en compte dans la plateforme de calcul 3D **FDTD** de Thales Communications & Security SAS via l’introduction de la grandeur effective. Néanmoins, j’ai fait le choix de présenter mon travail sur cette période dans les prochains paragraphes de ce chapitre.

## 1.5 Diffraction par un fil en espace libre

Cette section décrit les principaux résultats obtenus en début de thèse sur la diffraction, en espace libre, par un fil éclairé par une onde incidente plane.



### 1.5.1 Méthode des Moments

La figure 1.15 montre le fil, modélisé par un cylindre de longueur  $L$  et de rayon  $a$ , orienté selon l'axe  $\hat{z}$ . Il est constitué d'un métal parfaitement conducteur (PC). Les points  $z'$  sont sur l'axe du cylindre et les points  $z$  sur sa surface. Le champ incident  $\Psi_i$  induit un courant  $I$  sur le fil. A son tour, ce courant génère son propre champ électrique  $\Psi_d$  qui se propage dans le milieu environnant. Les résultats que nous présentons plus bas ont été obtenus à partir de la **MdM** [8] et sont tirés de la méthode décrite dans le chapitre 21 du livre [9]. Dans ce livre, pour calculer la diffraction par un fil, l'auteur résout l'équation intégrale de Pocklington [10] :

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} I(z') G(z'_z) dz' = -j\omega\mu_0\epsilon_0\Psi_i(z) \quad (1.2)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_0 : \text{perméabilité magnétique du vide} \\ \epsilon_0 : \text{permittivité diélectrique du vide} \\ \omega : \text{pulsation de l'onde incidente} \\ I : \text{courant généré par le champ incident} \\ \Psi_i : \text{champ incident calculé sur la surface du cylindre (fil)} \\ G : \text{fonction de Green} \end{array} \right.$$

Cette intégrale est calculée en respectant la contrainte qui impose que les courants sont nuls aux extrémités du fil :  $I(L/2) = I(-L/2) = 0$ .

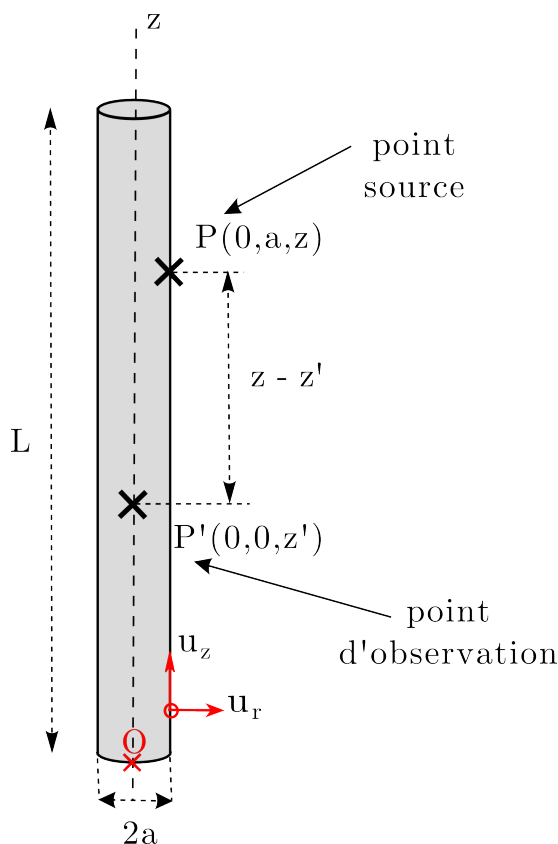


FIGURE 1.15 – Représentation du fil électrique avant application de la **MdM**

Une hypothèse simplificatrice est apportée à nos calculs : nous appliquons l'approximation des dipôles minces [11]. Elle implique que le diamètre  $2a$  du dipôle est considéré très faible devant la longueur d'onde (rayon  $a \ll \lambda$ ) et qu'il est également faible devant la longueur  $L$  du dipôle ( $L/a \gg 40$ ). La distribution des



courants surfaciques est alors invariante par rotation autour du cylindre et est indépendante de la direction azimutale.

Pour appliquer la **MdM**, nous avons utilisé la méthode dite de *point matching* : les fonctions de test  $W$  sont des impulsions de Dirac. Quant aux fonctions de base  $B$ , nous avons choisi des fonctions triangulaires. Le système obtenu par la **MdM** est le suivant :

$$\sum_{m=-M}^M Z_{nm} I_m = v_n, n \in \{-M; -M + 1 : \dots; M - 1; M\} \quad (1.3)$$

où

$$\begin{cases} Z_{nm} = \frac{j\eta_0}{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} W(z - z_n) G(z - z') B(z' - z_m) dz dz' \\ v_n = \int_{-L/2}^{L/2} W(z - z_n) V(z) dz \end{cases}$$

où  $\eta_0$  est l'impédance du vide. Dans l'équation (1.3),  $I_m$  est le terme des courants surfaciques au point d'ordonnée  $z_n$ ,  $v_n$  est le terme de la source, que l'on calcule à partir du champ  $\Psi_i$ , et  $Z_{nm}$  est la matrice impédance du système. Son nom est lié au fait qu'elle est homogène à une impédance. L'équation (1.3) peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\bar{\mathbf{Z}} \mathbf{I} = \mathbf{V} \quad (1.4)$$

Les courants surfaciques  $\mathbf{I}$  sont alors déterminés par inversion matricielle :

$$\mathbf{I} = \bar{\mathbf{Z}}^{-1} \mathbf{V} \quad (1.5)$$

A partir des courants surfaciques, nous faisons rayonner chacune des portions élémentaires du dipôle en tout point de l'espace en appliquant le principe de Huygens en champ proche, comme l'illustre la figure 1.16.

L'équation (1.6) représente le principe de Huygens et permet d'exprimer le champ diffracté à partir de la connaissance des courants sur le fil :

$$\Psi_d(\mathbf{r}) = -\frac{j}{\omega\epsilon_0} (k_0^2 + \nabla \cdot \nabla) \int_{L_d} I_{eq}(r') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (1.6)$$

Le problème est invariant par rotation autour du dipôle. Une fois que le champ diffusé est déterminé dans un plan contenant le dipôle, la solution dans tout l'espace peut être obtenue par rotation de ce plan autour de l'axe du dipôle.

## 1.5.2 Résultats numériques

Nous présentons trois scénarios de diffraction où nous avons fait varier la longueur du fil. Le fil est éclairé par une onde incidente plane d'amplitude unitaire, avec un angle d'incidence  $\theta_i = 0^\circ$  et de longueur d'onde  $\lambda$ . Les longueurs du fil, ainsi que leur rayon, sont exprimés en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$  :  $L_1 = 1\lambda$ ,  $L_2 = 0.5\lambda$ ,  $L_3 = 10\lambda$  et le rayon est le même pour les trois cas :  $r = 0.005\lambda$ . Pour une onde incidente de fréquence 300 MHz, les valeurs associées sont :  $L_1 = 1$  m,  $L_2 = 0.5$  m,  $L_3 = 10$  m et le rayon est :  $r = 0.005$  mm. Les paramètres de simulation sont listés dans le tableau 1.3.

La figure 1.17 représente la répartition linéique des courants sur le modèle de fil de longueur égale à une demi-longueur d'onde. La représentation de la partie imaginaire et de la partie réelle des courants (cas (a)) permet une comparaison avec les résultats obtenus par Orfanidis [9] à la figure 1.18.

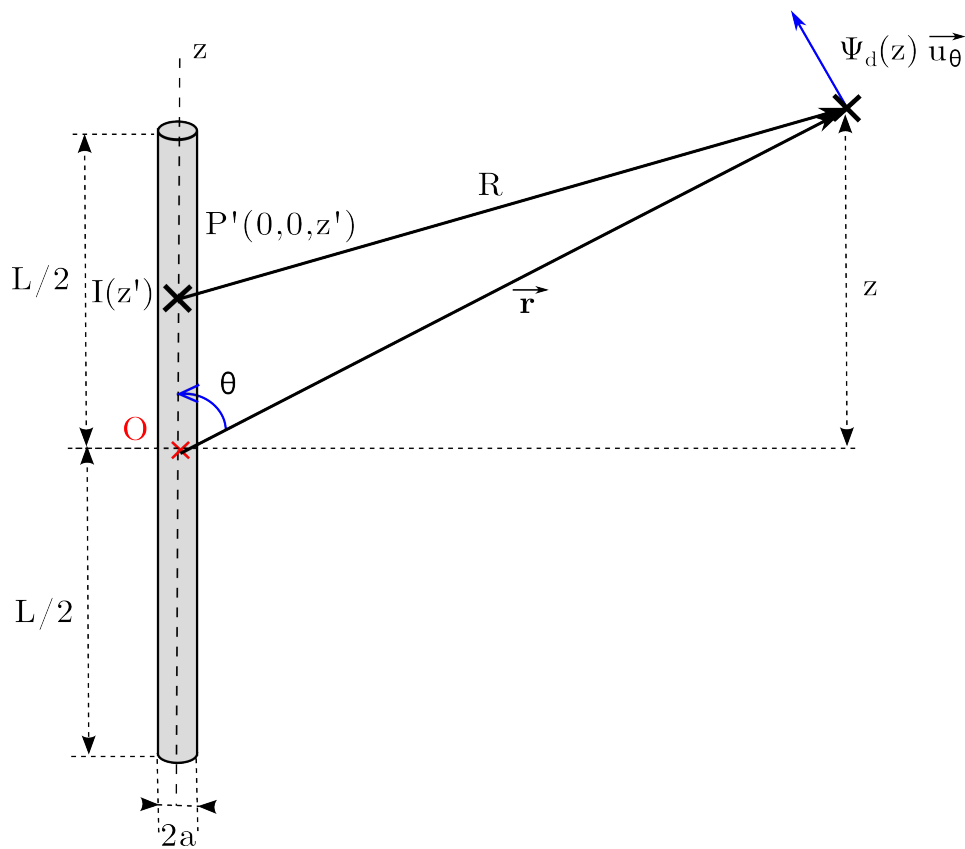


FIGURE 1.16 – Schéma du champ diffracté par le dipôle en champ lointain

Tableau 1.3 – Paramètres de simulation pour trois fils de même rayon, illuminés selon le même angle d’incidence mais ayant des longueurs différentes (exprimées par rapport à la longueur d’onde)

Paramètres	Cas (a)	Cas (b)	Cas (c)
Longueur du dipôle	$0.5\lambda$	$\lambda$	$10\lambda$
Rayon du dipôle	$0.005\lambda$	$0.005\lambda$	$0.005\lambda$
Pas d’échantillonnage	$\lambda/50$	$\lambda/50$	$\lambda/20$
$\theta_i$	$0^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$

A la vue des figures 1.17 et 1.18, nous pouvons valider le modèle de fil mince pour déterminer les courants surfaciques. En effet, ces deux figures montrent que les parties réelles et imaginaires des courants surfaciques que nous avons calculées sur la figure 1.17 ont la même forme et la même amplitude que celles présentées dans le livre d’Orfanidis [9] et qui apparaissent sur la figure 1.18. Nous appliquons ce modèle pour des fils minces correspondant aux cas (b) et (c) du tableau 1.3. Les résultats des courants sont donnés à la figure 1.19. Le cas (b) de la figure 1.19 correspond à un fil dont la longueur est égale à une longueur d’onde. A 300 MHz, la longueur d’onde associée est de 1 m. Sa longueur reste cependant courte pour ressembler au cas réel qui nécessite des longueurs de fils plus importantes. Le cas (c) de la même figure traite donc le cas d’un fil de longueur égale à dix longueurs d’onde soit, à 300 MHz, une longueur de fil de 10 m. Nous nous apercevons que pour le cas (c), le nombre d’oscillations pour les courants est égal au rapport longueur du fil sur longueur d’onde.

La figure 1.20 fournit les diagrammes de rayonnement normalisés en champ pour les trois longueurs de fil. Pour les cas (a) et (b), les diagrammes de rayonnement sont symétriques par rapport à l’axe du fil mince. A noter que c’est le fil de longueur égale à une demi-longueur d’onde qui a un angle d’ouverture le plus grand. Pour le cas du fil de longueur égale à dix longueurs d’onde, le cas (c), le lobe principal est beaucoup plus étroit que pour les deux cas précédents et des lobes secondaires apparaissent. Ce fil peut être considéré

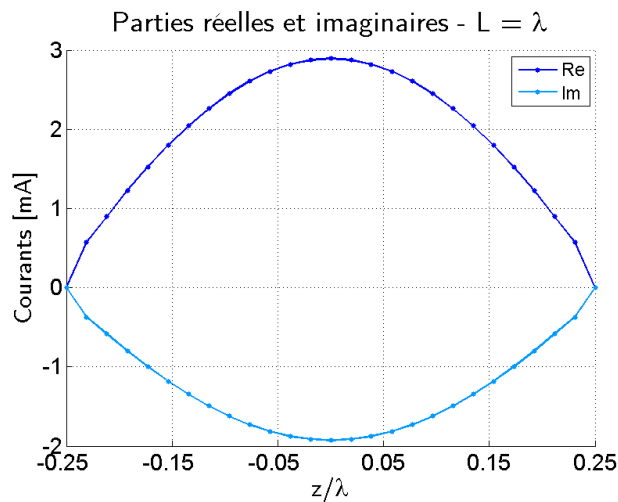


FIGURE 1.17 – Parties réelle et imaginaire des courants surfaciques sur le fil mince de longueur égale à une demi-longueur d’onde illuminé par une onde incidente plane de direction normale à l’axe central du fil ( $\theta_i = 0^\circ$ )

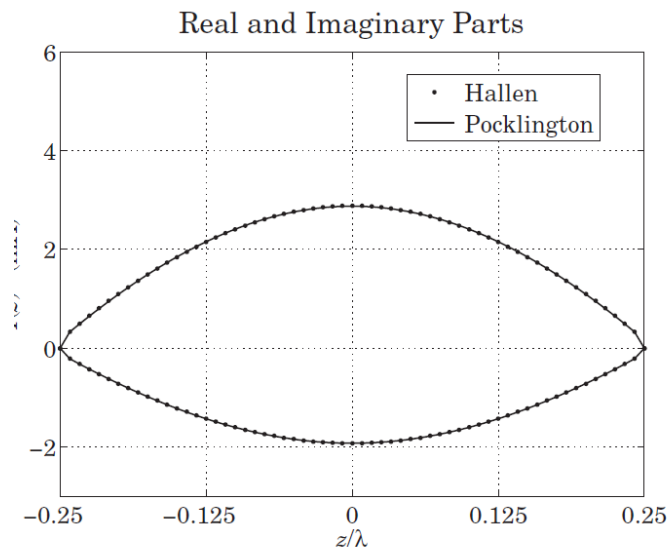


FIGURE 1.18 – Comparaison des solutions aux équations de Hallen et de Pocklington dans le cas d’un fil mince d’une demi-longueur d’onde illuminé par une onde incidente plane de direction normale à l’axe central du fil ( $\theta_i = 0^\circ$ )

comme un réseau de fils élémentaires, conduisant à un gain en directivité et une ouverture angulaire plus étroite du lobe principal.

Pour rappel, ce modèle doit servir à représenter la cible (fil) enterrée dans le sol. Le modèle de fil étudié ici présente un fil électrique parfaitement conducteur possédant une symétrie axiale selon son axe central. Cet axe de symétrie a permis de le modéliser dans un plan 2D, d’effectuer des calculs de manière scalaire et d’obtenir son diagramme de rayonnement en 3D par symétrie axiale.

Pour modéliser un fil présentant des courbures, ce qui est plus représentatif de la situation réelle, il faudrait modéliser le fil en 3D. Le lecteur peut se référer à la méthode d’Harrington & Mautz [12] ou Chao & Strait [13]. Le livre d’Orfanidis [9] détaille la méthode que nous avons employée. Il fournit également le calcul de la diffraction par un fil en utilisant d’autres fonctions de base et de test ainsi que la résolution de ce problème à partir de la formulation intégrale de Hallen [9] en alternative à la formulation intégrale de Pocklington. Les documents de Miller & al. [14] et Butler & al. [15] comparent différentes méthodes

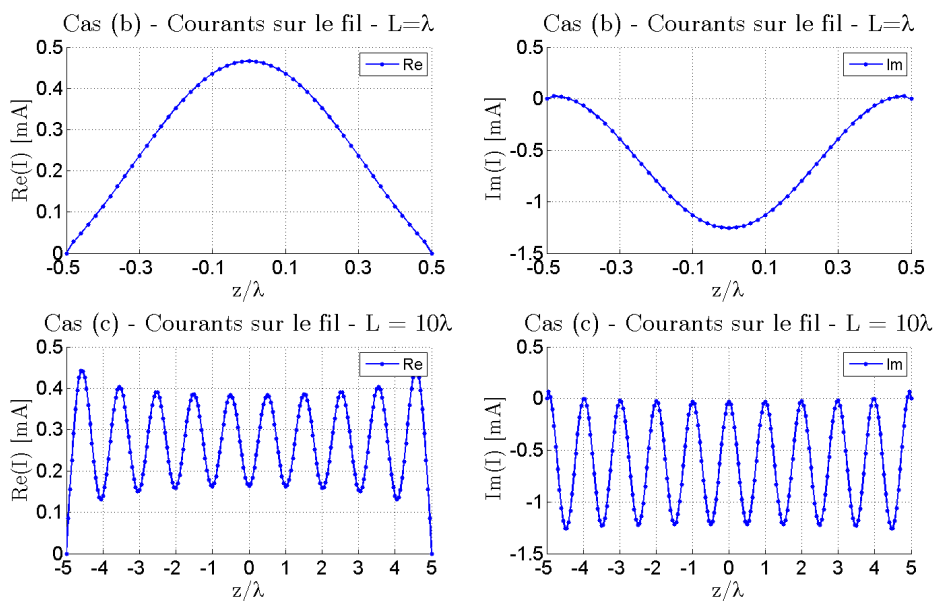


FIGURE 1.19 – Courants sur un fil mince vertical, illuminé par une onde incidente plane ayant un angle d’incidence de  $0^\circ$  avec l’horizontale, de longueur égale à : une longueur d’onde (cas (b)), à dix longueurs d’onde (cas(c))

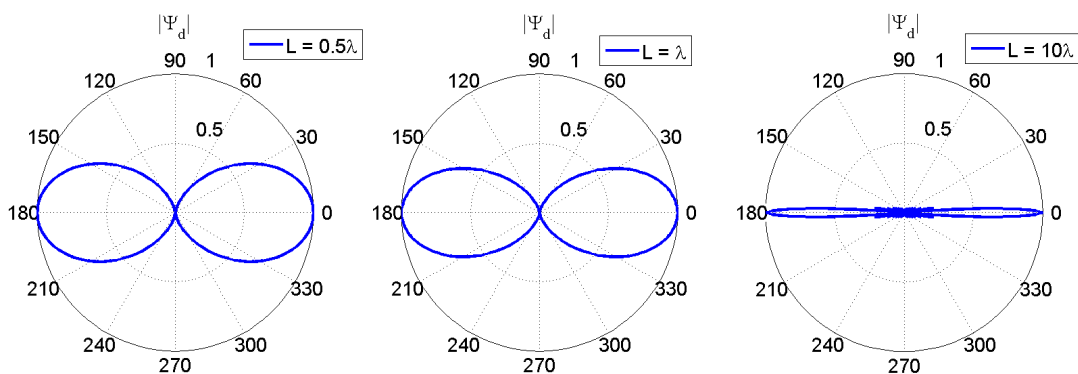


FIGURE 1.20 – Diagrammes de rayonnement pour un fil de longueurs une demi-longueur d’onde (à gauche), une longueur d’onde (au centre) et dix longueurs d’onde (à droite)

de calcul de la diffraction par un fil avec la **MdM** et permettent d’avoir une vue assez large des méthodes existantes.

## 1.6 Plan de la thèse

Dans ce chapitre introductif, nous avons présenté le contexte et le cadre de cette thèse. La problématique que nous cherchons à résoudre a été décrite et nous avons expliqué la démarche que nous avons mise en place à ces fins. Nous avons également présenté les travaux des premiers mois de la thèse sur la diffraction d’une onde électromagnétique par un fil métallique mince en espace libre.

Dans le chapitre II, nous faisons quelques rappels d’électromagnétisme et définissons les grandeurs qui caractérisent la diffusion par une surface rugueuse, telles que la Surface Équivalente Radar ou le coefficient de diffusion. Ces grandeurs permettent de caractériser le pouvoir réflecteur d’une surface dans les différentes directions de l’espace à partir de la connaissance du champ diffracté ou diffusé. Pour obtenir ces champs, diverses méthodes de calcul existent ; méthodes que nous pouvons regrouper en trois grandes ca-

tégories : les méthodes rigoureuses, asymptotiques et unifiées. Parmi les méthodes rigoureuses, l'utilisation de la Méthode des Moments est particulièrement mise en évidence puisqu'elle nous sert de méthode de référence pour nos travaux. L'onde incidente utilisée comme entrée de la Méthode des Moments est une onde d'étendue spatiale limitée que nous présentons également. Nous fournissons un état de l'art des modèles asymptotiques, qui sont basés sur des approximations physiques ou mathématiques, et dont le domaine de validité est restreint. Le critère de Rayleigh est également introduit afin de quantifier la "rugosité électromagnétique" d'une surface rugueuse et pour orienter le choix de modèles asymptotiques en fonction des paramètres de la scène de la diffusion.

Dans le chapitre III, nous présentons les mesures de profils de surfaces rugueuses qui ont été menées sur deux terrains d'essais. L'architecture du rugosimètre qui a servi à réaliser ces mesures est décrite, ainsi que le protocole de mesure mis en place. Nous précisons les traitements post-mesures employés pour permettre d'obtenir la fonction des hauteurs du sol, en prenant en compte la déformation du rugosimètre et l'étendue de mesure. Nous présentons la manière dont nous modélisons les surfaces rugueuses mesurées, typiquement, en deux composantes : l'une pseudo-déterministe et l'autre aléatoire. Nous détaillons la caractérisation de la composante aléatoire à l'aide de sa fonction d'autocorrélation des hauteurs et de sa densité de probabilité des hauteurs. La connaissance de ces deux fonctions pour chacun des profils mesurés permet de générer numériquement des surfaces rugueuses de mêmes paramètres statistiques et de pouvoir appliquer numériquement des modèles de diffusion. Les paramètres caractérisant la rugosité sur nos terrains de mesures, notamment l'écart-type des hauteurs calculées à partir des profils mesurés, ont révélé qu'ils sont faibles devant la longueur d'onde. Nous avons pu orienter le choix du modèle asymptotique sur la Méthode des Petites Perturbations, valide pour des variations des hauteurs de la surface très faibles devant la longueur d'onde du Radar.

Le chapitre IV est consacré à la Méthode des Petites Perturbations. A partir de cette méthode, les courants de surface ont été exprimés analytiquement en fonction de l'ordre du développement perturbatif et de la nature de l'onde incidente. Le cas particulier d'une onde incidente plane a été étudié plus en détail. Puis les résultats numériques ont été comparés à ceux obtenus par une méthode numérique rigoureuse basée sur la Méthode des Moments. Nous utilisons ensuite la Méthode des Petites Perturbations pour déterminer les champs diffusés cohérents et incohérents au-dessus de la surface. A partir de l'expression des champs cohérents, nous avons pu déterminer une grandeur effective qui est calculée dans le but de l'introduire dans la plateforme de calcul 3D **FDTD**. Cette grandeur effective étant de nature distincte selon que la surface est PC ou diélectrique, nous traitons séparément ces deux cas. Nous abordons également les limites de l'implantation de ces grandeurs dans la plateforme de calcul 3D **FDTD**.

Ce document se termine par une conclusion générale qui résume les travaux réalisés durant cette thèse, et dans laquelle des perspectives sont dressées.

# Notions d'électromagnétismes et modèles de diffusion

## Sommaire

---

2.1	Polarisations TE et TM . . . . .	34
2.2	Conditions aux limites . . . . .	35
2.3	Équations intégrales . . . . .	38
2.4	Coefficients de Fresnel . . . . .	39
2.5	Champs proche et lointain . . . . .	41
2.6	Surface Équivalente Radar normalisée . . . . .	44
2.7	Modèles de diffusion EM . . . . .	49

---

Ce chapitre est consacré à la diffusion électromagnétique par une surface rugueuse. Les méthodes de résolution pour un problème de diffusion par une surface rugueuse aléatoire sont variées et dépendent des paramètres du scénario étudié. La plupart de ces méthodes ont une formulation qui a pour point de départ les équations de Maxwell [16]. Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions d'électromagnétisme qui nous serviront pour résoudre notre problème. Nous présentons les équations intégrales servant à calculer le champ diffusé en tout point de l'espace à partir de la connaissance des courants surfaciques sur une surface donnée. Les grandeurs électromagnétiques calculées à partir de la résolution des équations intégrales qui permettent de caractériser et de quantifier la diffusion sont exposées. Enfin, nous ferons une rapide synthèse des méthodes dédiées à la diffusion électromagnétique par des surfaces rugueuses aléatoires.

## 2.1 Polarisation TE et TM

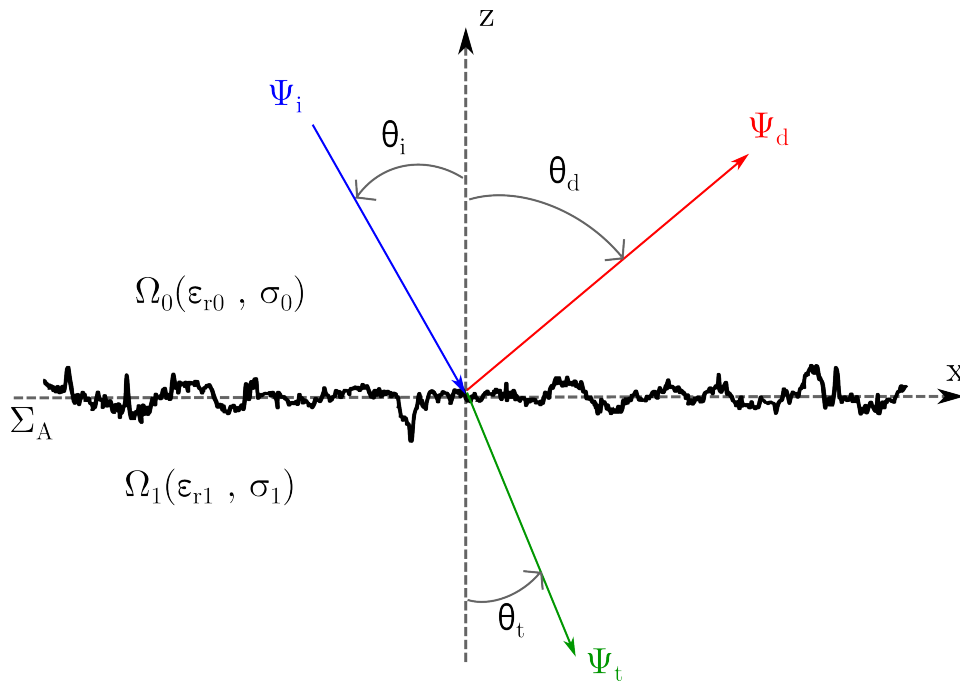


FIGURE 2.1 – Diffraction d’une onde électromagnétique par une surface rugueuse

Nous nous plaçons dans le cas de la scène 2D de la figure 2.1. Nous justifions l’aspect 2D de la scène en supposant que la surface est invariante par translation selon l’axe  $\hat{y}$ . La fonction des hauteurs ne dépend plus que d’une variable d’espace : l’abscisse  $x$ . Pour justifier le fait que la scène, en 3D dans la réalité, est modélisée en 2D pour la résolution du problème, nous considérons que la fonction des hauteurs de la surface est isotrope<sup>1</sup>. Le chapitre III, où nous présentons des mesures de rugosités du sol, permet d’appuyer cette hypothèse. Les avantages de passer de la résolution d’un problème 3D à un problème 2D sont multiples :

- une simplification des équations ;
- un calcul de grandeurs scalaires au lieu de grandeurs vectorielles ;
- un temps de calcul beaucoup plus court lors des simulations numériques ;
- un espace mémoire nécessaire au calcul beaucoup plus restreint.

Nous nous plaçons dans un plan 2D matérialisé par le repère  $(O\hat{x}\hat{z})$ . La polarisation Transverse Électrique (TE) correspond au cas où le champ  $\mathbf{E}$  possède une composante unique selon l’axe  $\hat{y}$  normal au plan :  $\mathbf{E} = E\hat{y}$ . Dans le jargon électromagnétique, elle est appelée polarisation horizontale car le champ

<sup>1</sup>les propriétés statistiques sont les mêmes dans toutes les directions de la surface

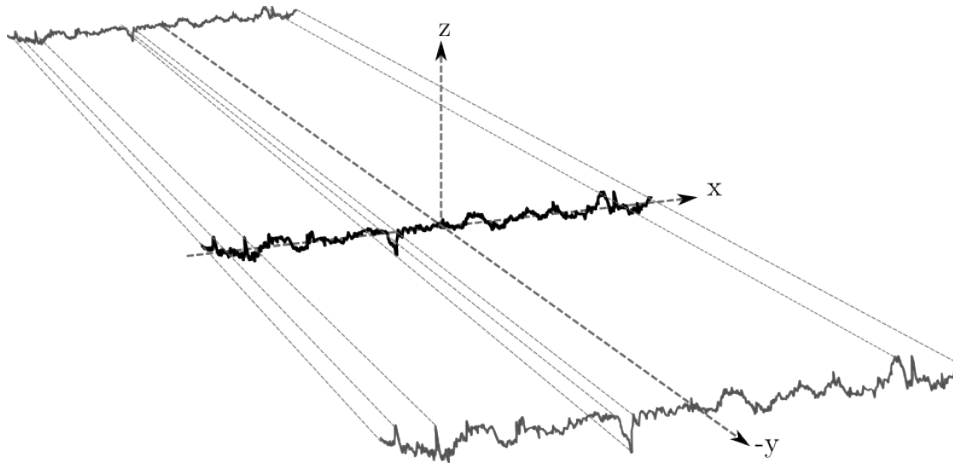


FIGURE 2.2 – Equivalence entre le modèle 2D et une scène 3D. La surface 2D est équivalente dans le cas 3D à une surface invariante et infinie dans les directions de l’axe  $\hat{y}$ .

électrique  $\mathbf{E}$  est contenu dans un plan horizontal. La polarisation Transverse Magnétique (TM) correspond, quant à elle, au cas où le champ  $\mathbf{H}$  possède une composante unique selon l’axe  $\hat{y}$  normal au plan :  $\mathbf{H} = H\hat{y}$ . On l’appelle aussi polarisation verticale car le champ électrique  $\mathbf{E}$  est contenu dans un plan vertical.

Nous pouvons montrer que tout champ électromagnétique peut se décomposer en la somme d’un champ en polarisation TE et d’un champ en polarisation TM [17], [18]. Par linéarité des équations de Maxwell, il est alors pratique de traiter séparément les polarisations TE et TM. Dans la suite, nous donnerons les expressions des grandeurs calculées pour les deux polarisations TE et TM. Dans le cas d’un champ en polarisation quelconque, le résultat pourra être obtenu par combinaison linéaire des expressions obtenues en polarisations TE et TM.

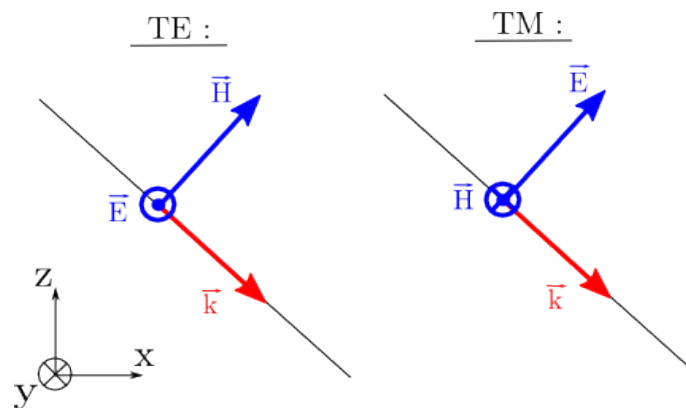


FIGURE 2.3 – Polarisations Transverse Électrique (TE) et Transverse Magnétique (TM) pour une onde incidente plane se propageant dans la direction  $\mathbf{k}$

## 2.2 Conditions aux limites

Dans la suite, les milieux situés au-dessus et en dessous de la surface sont considérés homogènes, linéaires et isotropes. Considérons la scène de la figure 2.1. Elle représente une surface  $\Sigma_A$ , de longueur infinie dans la direction  $x$ , qui sépare deux milieux diélectriques homogènes  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$ . On note  $\hat{n}$  le vecteur unitaire normal à la surface et défini par :

$$\hat{n} = \frac{-\gamma\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{1 + \gamma^2}} \tag{2.1}$$



où  $\gamma$  est la dérivée de la fonction des hauteurs  $\gamma : x \mapsto \zeta(x)$  définie en tout point  $x \in \Sigma_A$  tel que  $\gamma(x) = \frac{\partial \zeta(x)}{\partial x}$ .  $\Omega_0$  est caractérisé par sa conductivité électrique  $\sigma_0$  et sa permittivité diélectrique relative  $\epsilon_{r,0}$ . Quant à  $\Omega_1$ , il est caractérisé par sa conductivité électrique  $\sigma_1$  et sa permittivité diélectrique relative  $\epsilon_{r,1}$ . Les deux milieux  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$  ont, de manière générale, une permittivité complexe donnée par le modèle [19] :

$$\forall i \in \{0, 1\}, \epsilon_i = \epsilon_{r,i} + j \frac{\sigma_i}{\omega \epsilon_0} \quad (2.2)$$

où

$$\begin{cases} \epsilon_{r,i} & : \text{ permittivité diélectrique du milieu d'indice } \Omega_i \\ \omega & : \text{ pulsation de l'onde électromagnétique } \\ \epsilon_0 & : \text{ permittivité diélectrique dans le vide } \end{cases}$$

Les deux milieux sont supposés non magnétiques. Ils ont donc une perméabilité magnétique égale à la perméabilité du vide et nous noterons  $\mu_0$  leur perméabilité magnétique. En polarisation TE, nous notons  $\mathbf{E}_0 = \Psi_0 \hat{\mathbf{y}}$  le champ électrique au-dessus de la surface et  $\mathbf{E}_1 = \Psi_1 \hat{\mathbf{y}}$  le champ électrique en dessous. D'après l'équation de Maxwell-Faraday (convention  $e^{-j\omega t}$ ) :

$$\nabla \wedge \mathbf{E}_0 = j\omega\mu_0 \mathbf{H}_0 \quad (2.3)$$

où  $\omega$  est la pulsation de l'onde électromagnétique et  $j = \sqrt{-1}$ . Nous avons la relation suivante d'après [20]

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0 &= \frac{1}{j\omega\mu_0} \nabla \wedge \mathbf{E}_0 \\ &= -\frac{1}{j\omega\mu_0} \hat{\mathbf{y}} \wedge \nabla \Psi_0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

La composante tangentielle du champ magnétique  $\mathbf{H}_0$  sur la surface selon la normale  $\hat{\mathbf{n}}$  et en utilisant les égalités du double produit vectoriel, nous avons :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}_0 &= -\frac{1}{j\omega\mu_0} \hat{\mathbf{n}} \wedge (\hat{\mathbf{y}} \wedge \nabla \Psi_0) \\ &= -\frac{1}{j\omega\mu_0} [(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Psi_0) \hat{\mathbf{y}} - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{y}}) \nabla \Psi_0] \\ &= -\frac{1}{j\omega\mu_0} [\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Psi_0] \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{n}} \text{ étant orthogonal à } \hat{\mathbf{y}}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

où  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = 0$  puisque le vecteur normal en tout point de la surface est contenu dans le plan ( $O\hat{x}\hat{z}$ ). Pour le milieu  $\Omega_1$  en dessous de la surface, les grandeurs  $\mathbf{E}_1$  et  $\mathbf{H}_1$  vérifient également l'équation (2.5). Nous avons la relation :

$$\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}_1 = -\frac{\mathbf{y}}{j\omega\mu_0} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Psi_1) \quad (2.6)$$

A l'interface entre deux milieux diélectriques, les conditions aux limites [21] pour les champs et les inductions sont les suivantes :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{n}} \wedge (\mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{n}} \wedge (\mathbf{H}_0 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{j}_s \\ \mathbf{D}_i = \epsilon_i \mathbf{E}_i \quad \forall i \in \{0, 1\} \\ \mathbf{B}_i = \mu_0 \mathbf{H}_i \quad \forall i \in \{0, 1\} \end{cases} \quad (2.7)$$

avec

$$\begin{cases} \mathbf{j}_s & : \text{ la densité de courant surfacique électrique } \\ \rho_s & : \text{ la densité de charge surfacique électrique } \\ \mathbf{D} & : \text{ l'induction électrique } \\ \epsilon_1 & : \text{ la permittivité diélectrique du milieu } \Sigma_1 \\ \mathbf{B} & : \text{ l'induction magnétique } \\ \mu_0 & : \text{ la perméabilité magnétique du milieu } \Sigma_1 \end{cases}$$

Nous rappelons que les milieux  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$  sont non magnétiques et leur perméabilité magnétique est égale à celle du vide  $\mu_0$ . Pour une surface dépourvue de courants surfaciques et de charges électriques, les équations (2.7) deviennent :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{n}} \wedge (\mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{n}} \wedge (\mathbf{H}_0 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_i = \epsilon_i \mathbf{E}_i \quad \forall i \in \{0, 1\} \\ \mathbf{B}_i = \mu_0 \mathbf{H}_i \quad \forall i \in \{0, 1\} \end{cases} \quad (2.8)$$

Les deux premières équations du système (2.8) montrent que les composantes tangentielles des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  sont continues. En polarisation TE, comme  $\mathbf{E}_0 = \Psi_0 \hat{\mathbf{y}}$  et  $\mathbf{E}_1 = \Psi_1 \hat{\mathbf{y}}$ , en utilisant les équations (2.5), (2.6) et les relations de continuité (2.8), nous avons les relations :

$$\forall \mathbf{r} \in \Sigma_A, \quad \begin{cases} \Psi_0(\mathbf{r}) = \Psi_1(\mathbf{r}) \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Psi_0(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Psi_1(\mathbf{r}) \end{cases} \quad (2.9)$$

Pour la polarisation TM, comme le montre la figure 2.3, le champ magnétique est orthogonal au plan d'incidence. On définit le champ magnétique dans le milieu  $\Omega_0$  au-dessus de la surface tel que  $\mathbf{H}_0 = \Psi_0 \hat{\mathbf{y}}$ . D'après l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\mathbf{E}_0 = -\frac{1}{j\omega\epsilon_{r,1}} \nabla \wedge \mathbf{H}_0 = \frac{1}{j\omega\epsilon_{r,1}} \hat{\mathbf{y}} \wedge \nabla \Psi_0 \quad (2.10)$$

En projetant le champ  $\mathbf{E}_1$  selon la normale à la surface  $\hat{\mathbf{n}}$ , on a :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}_0 &= \frac{1}{j\omega\epsilon_{r,0}} \mathbf{n} \wedge (\hat{\mathbf{y}} \wedge \nabla \Psi_0) \\ &= -\frac{1}{j\omega\epsilon_{r,0}} [(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Psi_0) \mathbf{y} - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{y}}) \nabla \Psi_0] \\ &= \frac{\hat{\mathbf{y}}}{j\omega\epsilon_{r,0}} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Psi_0) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Pour le milieu  $\Omega_1$  en dessous de la surface, par le même processus, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= \Psi_1 \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}_1 &= \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Psi_1}{j\omega\epsilon_1} \hat{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Les conditions aux limites sur une interface entre deux milieux diélectriques imposent la continuité des composantes tangentielles des champs électriques et magnétiques à l'interface. Nous obtenons les conditions aux limites suivantes pour la polarisation TM :

$$\forall \mathbf{r} \in \Sigma_A, \quad \begin{cases} \Psi_0(\mathbf{r}) = \Psi_1(\mathbf{r}) \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Psi_0(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_{r,0}}{\epsilon_{r,1}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Psi_1(\mathbf{r}) \end{cases} \quad (2.13)$$

Nous notons  $\rho_{01}$  le contraste électromagnétique égal au rapport des permittivités diélectriques des milieux au-dessus et en dessous de la surface :  $\rho_{01} = \frac{\epsilon_{r,0}}{\epsilon_{r,1}}$ . Les conditions aux limites sur la surface  $\Sigma_A$  pour les polarisations TE et TM peuvent alors s'écrire :

$$\forall \mathbf{r} \in \Sigma_A, \quad \begin{cases} \Psi_0(\mathbf{r}) = \Psi_1(\mathbf{r}) \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Psi_0(\mathbf{r}) = \rho_{01} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Psi_1(\mathbf{r}) \end{cases} \quad (2.14)$$

où  $\rho_{01} = 1$  en polarisation TE et  $\rho_{01} = \frac{\epsilon_{r,0}}{\epsilon_{r,1}}$  en polarisation TM. Les conditions aux limites représentent un système de deux équations à quatre inconnues. Ce système est sous-déterminé et ne peut donc être résolu car il y a plus d'inconnues que d'équations. Les équations intégrales présentées plus loin sont un moyen permettant de bien conditionner le système.

Pour une scène où le milieu  $\Omega_0$  est l'air (assimilé au vide) et le milieu  $\Omega_1$  un diélectrique quelconque, la permittivité diélectrique relative dans  $\Omega_0$  vaut  $\epsilon_{r,0} = 1$ . Le contraste devient alors  $\rho_{01} = \frac{1}{\epsilon_{r,1}}$  et nous pouvons le remplacer directement dans l'équation (2.14). Prenons un autre cas particulier où le milieu  $\Omega_0$  est l'air et le milieu  $\Omega_1$  est un métal parfaitement conducteur (PC). Le fait que  $\Omega_1$  soit PC implique que sa conductivité  $\sigma_1$  soit infinie et nécessairement que  $\epsilon_1$  soit de module infini d'après l'équation (2.2). Par ailleurs, dans un milieu PC, le champ électromagnétique est nul. On obtient donc les conditions aux limites suivantes pour les polarisations TE et TM dans le cadre d'une scène où  $\Omega_0$  est l'air et  $\Omega_1$  est un milieu PC :

$$\forall \mathbf{r} \in \Sigma_A, \begin{cases} \text{Polarisation TE} & : \Psi_0(\mathbf{r}) = 0 \\ \text{Polarisation TM} & : \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Psi_0(\mathbf{r}) = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

La condition aux limites pour la polarisation TE est appelée condition aux limites de Dirichlet et celle en TM est appelée condition aux limites de Neumann. Pour chacune des polarisations, la résolution d'un problème électromagnétique par les conditions aux limites est donc simplifiée lorsque l'on traite le cas de milieux PC.

### 2.3 Équations intégrales

Les équations de Maxwell [16] sont les lois fondamentales de l'électromagnétisme. Ce sont des lois locales qui, à partir de la connaissance des courants et des charges répartis dans l'espace, nous permettent de déterminer les champs électriques et magnétiques en tout point de l'espace. A partir de ces équations, nous pouvons déterminer l'équation de propagation de Helmholtz. A l'aide de manipulations mathématiques et en faisant appel à la fonction de Green et au théorème de Green, nous obtenons une formulation intégrale de la solution exacte de l'équation de propagation pour chacun des milieux  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$ . Pour  $\Omega_0$ , nous obtenons :

$$\begin{cases} 0 = \Psi_i(\mathbf{r}') + \int_S \left[ \Psi_0(\mathbf{r}) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_0(\mathbf{r})}{\partial n} \right] dS, \mathbf{r}' \notin \Omega_0 \\ \Psi_0(\mathbf{r}') = \Psi_i(\mathbf{r}') + \int_S \left[ \Psi_0(\mathbf{r}) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_0(\mathbf{r})}{\partial n} \right] dS, \mathbf{r}' \in \Omega_0 \end{cases} \quad (2.16)$$

où

$$\begin{cases} \Psi_i & : \text{champ incident} \\ \Psi_0 & : \text{densité de courant sur la surface} \\ \frac{\partial \Psi_0}{\partial n} & : \text{dérivée normale de la densité de courant sur la surface} \\ g_0 & : \text{fonction de Green 2D} \\ \frac{\partial g_0}{\partial n} & : \text{dérivée normale de la fonction de Green} \end{cases}$$

Quand  $\mathbf{r}' \notin \Omega_0$ , l'équation (2.16) est appelée **théorème d'extinction** de par le fait que l'intégrale sur la surface rugueuse annule le champ incident en dehors de  $\Omega_0$ . Pour les points de coordonnées  $\mathbf{r}' \in \Omega_0$ , l'équation (2.16) est appelée **principe de Huygens**. Dans cette équation,  $\Psi_0(\mathbf{r}')$  représente le champ total calculé dans le milieu  $\Omega_0$ . Or le champ total est égal à la somme du champ incident et du champ diffracté :  $\forall \mathbf{r}' \in \Omega_0, \Psi_0(\mathbf{r}') = \Psi_i(\mathbf{r}') + \Psi_d(\mathbf{r}')$ , le principe de Huygens peut donc s'écrire :

$$\Psi_d(\mathbf{r}') = \int_S \left[ \Psi_0(\mathbf{r}) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_0(\mathbf{r})}{\partial n} \right] dS, \text{ si } \mathbf{r}' \in \Omega_0 \quad (2.17)$$

Selon les conventions de la figure 2.1, nous pouvons interpréter le principe de Huygens en déclarant que le champ diffracté en tout point au-dessus de la surface est déterminé à partir de la connaissance des courants totaux  $\Psi_0$  et  $\frac{\partial \Psi_0(\mathbf{r})}{\partial n}$  sur la surface  $\Sigma_A$ . En utilisant le même principe que dans le milieu  $\Omega_0$ , nous obtenons le système suivant pour le milieu  $\Omega_1$  :

$$\begin{cases} 0 = \Psi_i(\mathbf{r}') + \int_S \left[ \Psi_1(\mathbf{r}) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_1(\mathbf{r})}{\partial n} \right] dS, & \text{si } \mathbf{r}' \notin \Omega_1 \\ \Psi_1(\mathbf{r}') = - \int_S \left[ \Psi_1(\mathbf{r}) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} - g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_1(\mathbf{r})}{\partial n} \right] dS, & \text{si } \mathbf{r}' \in \Omega_1 \end{cases} \quad (2.18)$$

avec

$$\begin{cases} \Psi_1 & : \text{densité de courant sur la surface} \\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial n} & : \text{dérivée normale de la densité de courant sur la surface} \\ g_1 & : \text{fonction de Green 2D dans le milieu } \Omega_1 \\ \frac{\partial g_1}{\partial n} & : \text{dérivée normale de la fonction de Green} \end{cases}$$

Dans les équations (2.16) et (2.18), les inconnues à déterminer sont  $\Psi_0$ ,  $\frac{\partial \Psi_0}{\partial n}$ ,  $\Psi_1$  et  $\frac{\partial \Psi_1}{\partial n}$ . Les grandeurs  $\Psi_i$ ,  $g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  et  $g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  sont connues. Pour chaque milieu  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$ , nous avons deux équations et quatre inconnues. L'utilisation des conditions aux limites (2.14) permet d'ajouter deux équations supplémentaires et de bien conditionner le système d'équations. Dans le cas  $r' \in \Omega_0$ , à partir des équations (2.16) et (2.18), nous obtenons le système suivant de deux équations et deux inconnues :

$$\begin{cases} \Psi_i(r') = \frac{1}{2} \Psi_0(r') - \int_S \Psi_0(\mathbf{r}) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} dS + \int_S g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_0(\mathbf{r})}{\partial n} dS \\ 0 = -\frac{1}{2} \Psi_0(r') - \int_S \Psi_0(\mathbf{r}) \frac{\partial g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} dS + \int_S \frac{1}{\rho_{01}} g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi_0(\mathbf{r})}{\partial n} dS \end{cases} \quad (2.19)$$

Le symbole  $f$  fait référence à la valeur principale de Cauchy obtenue, puisque le calcul de l'intégrale est impropre lorsque  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ . Les équations (2.19) peuvent être résolues numériquement après discrétisation, notamment en utilisant la Méthode des Moments [20].

## 2.4 Coefficients de Fresnel

Soit la scène de la figure 2.4. Nous considérons une onde incidente plane de pulsation  $\omega_i$ , se propageant dans la direction  $\mathbf{k}_i$  dans le milieu  $\Omega_0$  de permittivité relative  $\epsilon_{r,0}$ . L'onde incidente qui arrive au niveau de la surface lisse  $\Sigma_A$  d'aire infinie, donne naissance à une onde réfléchie se propageant dans la direction  $\mathbf{k}_r$  et une onde transmise se propageant dans la direction  $\mathbf{k}_t$ . L'onde transmise se propage ensuite dans le milieu  $\Omega_1$  de permittivité relative  $\epsilon_{r,1}$ . D'après les lois de réflexion et de réfraction de Snell-Descartes [22] :

- l'onde réfléchie et l'onde transmise ont la même pulsation que l'onde incidente ;
- les plans d'incidence  $(\mathbf{k}_i, \hat{\mathbf{n}})$ , de réflexion  $(\mathbf{k}_r, \hat{\mathbf{n}})$  et de transmission  $(\mathbf{k}_t, \hat{\mathbf{n}})$  sont confondus ;
- l'angle de l'onde réfléchie, défini par rapport à la normale à la surface est donné, d'après la figure 2.4, par  $\theta_d = \theta_i$ . Quant à l'onde transmise, l'angle formé par la normale à la surface (orientée vers le milieu  $\Omega_1$ ) et sa direction de propagation  $\mathbf{k}_t$  est donné par la relation  $\sqrt{\epsilon_{r,1}} \sin \theta_t = \sqrt{\epsilon_{r,0}} \sin \theta_i$ ,

où  $\hat{\mathbf{n}}$  est le vecteur normal à la surface lisse pour un problème 2D, de coordonnées  $\hat{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . En partant des conditions aux limites de la surface (2.8) et des relations de Maxwell-Faraday (pour la polarisation TE)

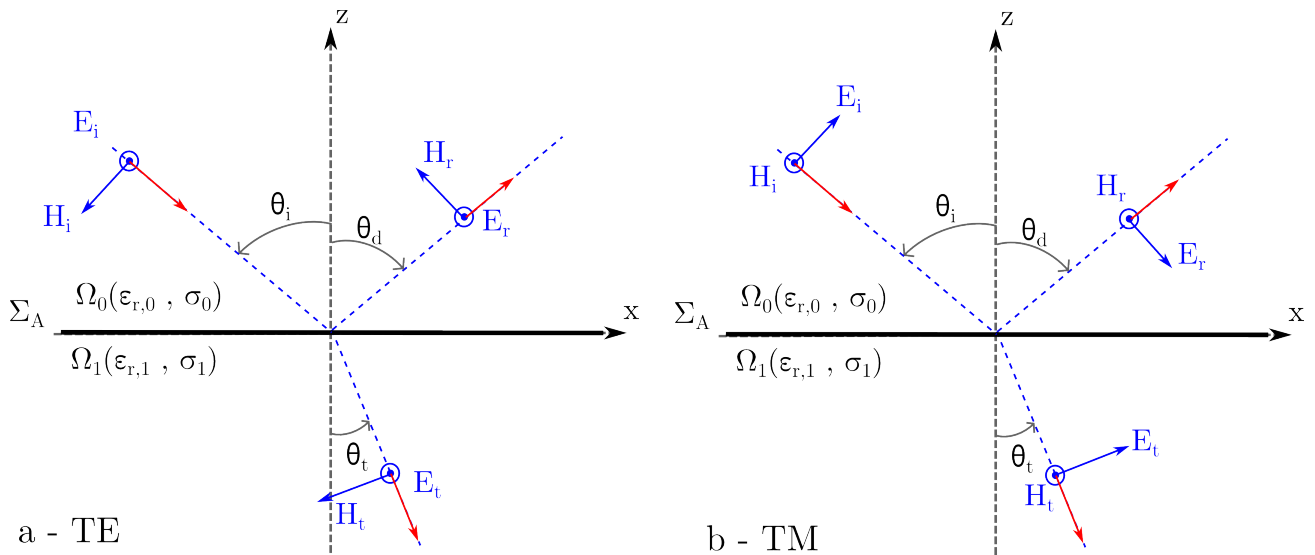


FIGURE 2.4 – Coefficients de Fresnel (a) en polarisation TE et (b) en polarisation TM pour une surface lisse d'aire infinie séparant deux milieux diélectriques

et de Maxwell-Ampère (pour la polarisation TM), nous pouvons retrouver par le calcul les lois de Snell-Descartes. En utilisant les notations  $\mathbf{E} = \Psi \hat{\mathbf{y}}$  en polarisation TE et  $\mathbf{H} = \Psi \hat{\mathbf{y}}$  en polarisation TM, nous avons les relations suivantes quelle que soit la polarisation pour les champs incident, réfléchi et transmis :

$$\begin{cases} \forall \mathbf{r} \in \Omega_0, \Psi_i(\mathbf{r}) = \Psi_{i0} e^{j(\omega_i t + \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})} \\ \forall \mathbf{r} \in \Omega_0, \Psi_r(\mathbf{r}) = \Psi_{r0} e^{j(\omega_r t + \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})} \\ \forall \mathbf{r} \in \Omega_1, \Psi_t(\mathbf{r}) = \Psi_{t0} e^{j(\omega_t t + \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r})} \end{cases} \quad (2.20)$$

Dans notre scène 2D, les vecteurs d'onde sont contenus dans le plan  $(O\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{z}})$  et ont pour expression :

$$\begin{cases} \mathbf{k}_i = k_{ix} \hat{\mathbf{x}} - k_{iz} \hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{k}_r = k_{rx} \hat{\mathbf{x}} + k_{rz} \hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{k}_t = k_{tx} \hat{\mathbf{x}} - k_{tz} \hat{\mathbf{z}} \end{cases} \quad (2.21)$$

Le signe  $-$  pour les composantes selon  $\hat{\mathbf{z}}$  des vecteurs d'ondes des ondes incidente et transmise est lié à leur propagation "vers le bas". Chacun des vecteurs d'onde peut se décomposer en une composante selon  $\hat{\mathbf{x}}$  et  $\hat{\mathbf{z}}$  que l'on obtient à partir du nombre d'onde par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} k_{ix} &= \sqrt{\epsilon_{r,0}} k_0 \sin \theta_i & k_{iz} &= \sqrt{\epsilon_{r,0}} k_0 \cos \theta_i \\ k_{rx} &= \sqrt{\epsilon_{r,0}} k_0 \sin \theta_r & k_{rz} &= \sqrt{\epsilon_{r,0}} k_0 \cos \theta_r \\ k_{tx} &= \sqrt{\epsilon_{r,1}} k_0 \sin \theta_t & k_{tz} &= \sqrt{\epsilon_{r,1}} k_0 \cos \theta_t \end{aligned} \quad (2.22)$$

On peut également écrire  $\|\mathbf{k}_i\| = \sqrt{k_{ix}^2 + k_{iz}^2}$ ,  $\|\mathbf{k}_r\| = \sqrt{k_{rx}^2 + k_{rz}^2}$  et  $\|\mathbf{k}_t\| = \sqrt{k_{tx}^2 + k_{tz}^2}$ .

Les coefficients de Fresnel en réflexion et en transmission sont définis tels que :

$$\mathcal{R} = \frac{\Psi_{r0}}{\Psi_{i0}} \quad (2.23)$$

$$\mathcal{T} = \frac{\Psi_{t0}}{\Psi_{i0}} \quad (2.24)$$

Conformément à la condition aux limites (2.14), nous introduisons le terme  $\rho_{01}$  :

$$\rho_{01} = \begin{cases} 1 & \text{en polarisation TE} \\ \frac{\epsilon_{r0}}{\epsilon_{r1}} & \text{en polarisation TM} \end{cases}$$

En reprenant la définition des coefficients de réflexion (2.23) et de transmission (2.24), avec les notations adoptées précédemment, les coefficients de Fresnel pour les polarisation TE et TM sont :

$$\mathcal{R} = \frac{k_{iz} - \rho_{01}k_{tz}}{k_{iz} + \rho_{01}k_{tz}} \quad (2.25)$$

$$\mathcal{T} = \frac{2k_{iz}}{k_{iz} + \rho_{01}k_{tz}} \quad (2.26)$$

Nous pouvons remarquer que  $\mathcal{T} = 1 + \mathcal{R}$ . Nous avons fourni les expressions des coefficients de réflexion et de transmission pour une onde incidente plane monochromatique illuminant une surface lisse de longueur infinie, d'après les notations de vecteur d'onde et de champ choisies au début de cette partie. En effectuant les changements de notations et les calculs nécessaires, on retrouve les expressions des coefficients de Fresnel fournis dans les livres références [21] et [23] sous d'autres notations.

Considérons le cas particulier où le milieu  $\Omega_0$  est l'air, assimilé au vide, et le milieu  $\Omega_1$  est un métal parfaitement conducteur. La permittivité diélectrique relative du milieu  $\Omega_0$  est alors  $\epsilon_{r0} = 1$ . Pour le milieu  $\Omega_1$ , sa conductivité électrique devient infinie  $\sigma_1 = +\infty$  et sa permittivité diélectrique relative a son module qui tend vers l'infini  $|\epsilon_{r1}| = +\infty$  d'après le modèle de permittivité complexe (2.2). Sous ces approximations, les termes  $\rho_{01}$  et  $k_{tz}$  deviennent :

$$\lim_{\sigma_1 \rightarrow \infty} \rho_{01} = 0 \quad \lim_{\sigma_1 \rightarrow \infty} k_{tz} = +\infty \quad (2.27)$$

Dans le cas d'une surface parfaitement conductrice, on obtient les expressions suivantes à partir des coefficients de Fresnel en polarisations TE (2.25) et TM (2.26) :

- en polarisation TE

$$\begin{cases} \mathcal{R}_{TE} = -1 \\ \mathcal{T}_{TE} = 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

- en polarisation TM

$$\begin{cases} \mathcal{R}_{TM} = 1 \\ \mathcal{T}_{TM} = 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

Pour les deux polarisations TE et TM, le champ électrique est réfléchi totalement dans la direction spéculaire<sup>2</sup> et, dans le milieu  $\Omega_1$ , le champ électromagnétique est nul.

## 2.5 Champs proche et lointain

Nous avons vu, à travers le principe de Huygens (2.17), que le champ diffracté par une surface rugueuse peut être calculé en tout point du milieu  $\Omega_0$  au-dessus de la surface à partir de la connaissance des densités de courant de surface  $\Psi_0$  et  $\frac{\partial \Psi_0}{\partial n}$ . Dans le principe de Huygens apparaissent également la fonction de Green 2D  $g_0$  et sa dérivée normale  $\frac{\partial g_0}{\partial n}$ . Dans le cas d'un problème de diffusion 2D, la fonction de Green est déterminée par l'expression :

$$g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{j}{4} H_0^{(1)}(k_0 \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|) = \frac{j}{4} H_0^{(1)}(k_0 D) \quad (2.30)$$

où  $H_0^{(1)}$  est la fonction de Hankel de première espèce et d'ordre 0 et  $D = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$  la distance entre les points  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}'$ . Les dérivées partielles selon  $x$  et selon  $z$  de la fonction de Green, exprimées en fonction de

<sup>2</sup>dans la direction  $\theta_r = \theta_i$

$D$ , s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial g_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial x} = \frac{\partial g_i(k_i D)}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial x} = -\frac{jk_i}{4} H_1^{(1)}(k_i D) \frac{x-x'}{D} \\ \frac{\partial g_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial z} = \frac{\partial g_i(k_i D)}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial z} = -\frac{jk_i}{4} H_1^{(1)}(k_i D) \frac{z-z'}{D} \end{cases} \quad (2.31)$$

où  $H_1^{(1)}$  est la fonction de Hankel de première espèce et d'ordre 1. Pour plus de détails concernant les fonctions spéciales de Hankel, le lecteur est renvoyé aux références [24] et [25]. La dérivée normale de la fonction de Green 2D s'obtient à partir de ses dérivées partielles selon  $x$  et  $z$  par l'expression suivante :

$$\frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (2.32)$$

Avec la connaissance des courants surfaciques et des fonctions de Green 2D données ci-dessus, on peut calculer le champ en tout point  $\mathbf{r}'$  de l'espace  $\Omega_0$ . La fonction de Hankel de première espèce et d'ordre 0 s'approxime quand  $x \rightarrow +\infty$  par :

$$H_0^{(1)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{x\pi}} e^{j(x-\frac{\pi}{4})} \quad (2.33)$$

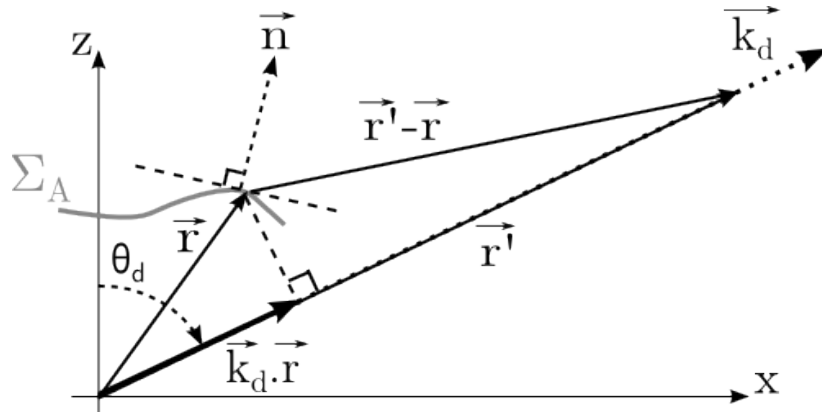


FIGURE 2.5 – Approximation du champ lointain pour un problème 2D

En champ lointain, c'est-à-dire lorsque  $r' \rightarrow +\infty$  et  $r' \gg \lambda_0$ , nous avons l'approximation suivante, illustrée sur la figure 2.5, pour la distance entre les points de positions  $r$  et  $r'$  :

$$\begin{aligned} D &= \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| \\ &\approx r' - \mathbf{k}_d \cdot \mathbf{r} \end{aligned} \quad (2.34)$$

avec  $\mathbf{k}_d$  le vecteur d'onde de l'onde diffusée. La fonction de Green s'écrit alors :

$$g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \approx \frac{j}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r'}} e^{j(k_0 r' - \mathbf{k}_d \cdot \mathbf{r} - \pi/4)} \quad (2.35)$$

et sa dérivée normale :

$$\frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \approx \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \approx -j g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{k}_d \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (2.36)$$

Nous intégrons les équations (2.35) et (2.36) dans le principe de Huygens (2.17). Après simplification, le champ diffracté à l'infini ( $r' \rightarrow \infty$ ) peut s'écrire :

$$\Psi_d^\infty(r') = -\frac{j}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r'}} e^{-j(\pi/4 + k_0 r')} \int_{\Sigma_A} \left[ j \mathbf{k}_d \cdot \hat{\mathbf{n}} \Psi_0(\mathbf{r}) + \frac{\partial \Psi_0(\mathbf{r})}{\partial n} \right] e^{-j \mathbf{k}_d \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (2.37)$$



Nous venons de voir comment calculer le champ diffracté au-dessus d'une surface rugueuse à partir du principe de Huygens. Une autre manière de résoudre les problèmes de diffraction a été formulée par Rayleigh en 1897. Elle se base sur l'hypothèse de Rayleigh [26]. Lorsque l'on considère la diffraction d'une onde plane par une surface lisse comme dans la section 2.4, seules trois ondes planes existent : l'onde incidente, l'onde réfléchie et l'onde transmise. En considérant non plus une surface lisse mais une surface rugueuse, Rayleigh a proposé une solution où le champ diffracté au-dessus de la surface est exprimé comme une somme d'ondes se propageant vers le haut et le champ transmis en dessous de la surface comme une somme d'ondes se propageant vers le bas à partir de la surface  $\Sigma_A$ . Cette formulation de Rayleigh est intuitive pour les points  $M(x, z)$  de l'espace tels que :

$$\begin{cases} \forall M(x, z) \in \Omega_0, z > \max(\zeta(x)) \\ \forall M(x, z) \in \Omega_1, z < \min(\zeta(x)) \end{cases} \quad (2.38)$$

où  $\zeta : x \mapsto \zeta(x)$  est la fonction du profil des hauteurs de la surface. L'hypothèse de Rayleigh stipule que cette modélisation en somme d'ondes s'éloignant de la surface est vraie dans les zones  $R_1$  et  $R_2$  de la figure 2.6. Elle ajoute qu'elle est également acceptée dans la zone  $R_3$  comprise entre le minimum et le maximum de la fonction  $\zeta$  et même sur la surface  $\Sigma_A$ , soit en chaque point  $(x, z = \zeta(x))$ . Mathématiquement, si les ondes diffractées en dessous et au-dessus de la surface rugueuse sont des ondes planes, l'hypothèse de Rayleigh se traduit par :

$$\forall (x, z) \in \Omega_0, \Psi_d(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}_d(k_x) e^{j(k_x x + k_z z)} dk_x \quad (2.39)$$

$$\forall (x, z) \in \Omega_1, \Psi_t(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}_d(k_x) e^{j(k_x x - k_{tz} z)} dk_x \quad (2.40)$$

Le signe des composantes des vecteurs d'onde dans les termes exponentiels détermine les sens de propagation.  $k_x$  peut être négatif ou positif, ce qui traduit une propagation aussi bien vers la gauche ( $k_x < 0$ ) que vers la droite ( $k_x > 0$ ) dans les deux milieux  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$ . Quant à  $k_z = \sqrt{k_0^2 - k_x^2}$  et  $k_{tz} = \sqrt{\epsilon_{r1} k_0^2 - k_x^2}$ , lorsque le terme à l'intérieur de la racine est positif,  $k_z$  et  $k_{tz}$  sont positifs et la propagation a lieu "vers le haut", sinon ils sont imaginaires purs, ce fait apparaitre des ondes évanescentes. Le signe + devant  $k_z$  pour la propagation au-dessus de la surface traduit une propagation des ondes vers le haut. Pour le milieu  $\Omega_1$ , le signe - devant  $k_{tz}$  indique que les ondes planes se propagent vers le bas.

D'après la figure 2.6, l'hypothèse de Rayleigh peut paraître contestable. En effet, d'après le deuxième schéma, pour  $z_S < z < z_{max}$ , le champ  $\Psi_d(x, y)$  devrait être la somme d'ondes planes se propageant vers le bas et vers le haut. Plusieurs travaux théoriques ont été menés pour étudier son domaine de validité [27], [28], [29] et [30]. Petit & Cadilhac [31] ont montré pour le problème de Dirichlet (surface PC et polarisation TE) que l'hypothèse de Rayleigh n'est plus valide pour des surfaces sinusoïdales dès que les pentes atteignent une certaine inclinaison. Millar [27] a confirmé le critère de Petit & Cadilhac et montré analytiquement que l'hypothèse de Rayleigh est applicable sur des surfaces sinusoïdales respectant un critère dépendant de leur période et de leur amplitude. Ce domaine de validité a été confirmé numériquement par Van der Berg & al. [32]. Tishchenko [33] a également mené des simulations numériques de diffraction par une surface périodique dans le domaine optique. Les résultats de ses travaux montrent une validité de l'hypothèse de Rayleigh dans un domaine plus large que celui obtenu par Van der Berg & al. Pour des surfaces rugueuses aléatoires, Nordam & al. [34] ont déterminé numériquement le domaine de validité de l'hypothèse de Rayleigh pour des surfaces parfaitement conductrices et fortement conductrices en fonction de l'écart type des hauteurs, de la longueur de corrélation et de la longueur d'onde. D'après ces simulations, l'hypothèse est valide pour des surfaces de faibles pentes.



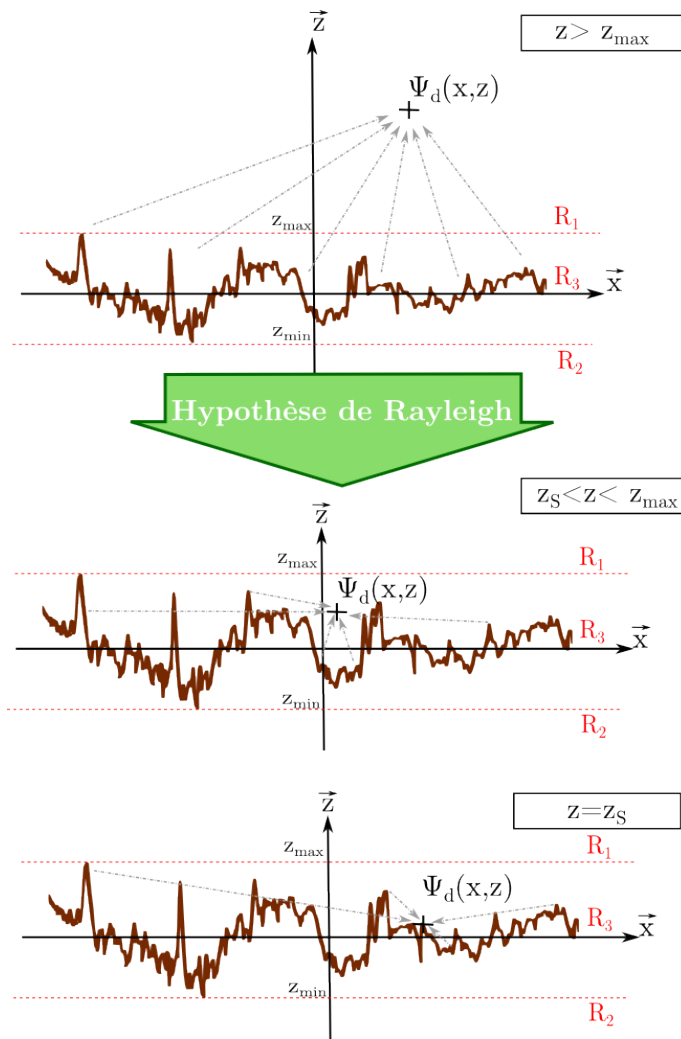


FIGURE 2.6 – Hypothèse de Rayleigh

## 2.6 Surface Équivalente Radar normalisée

Dans la section précédente, nous avons fourni les outils pour déterminer le champ diffracté en zone de champ proche et en champ lointain. Ici, nous présentons les principales équations pour déterminer les puissances reçue et diffusée par la surface éclairée. Pour calculer les puissances incidente et diffusée, nous nous intéressons en premier lieu au calcul des vecteurs de Poynting, définis de façon générale par :

$$\mathbf{S}(x, z) = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}^*) \tag{2.41}$$

où  $*$  représente l'opérateur complexe conjugué. Pour la polarisation TE, on écrit le champ  $\mathbf{E}$  tel que :

$$\mathbf{E} = \Psi \hat{\mathbf{y}} \tag{2.42}$$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{2.43}$$

où  $\mathbf{B}$  est l'induction magnétique qui est liée au champ magnétique par l'expression :  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ . En réintégrant cette expression dans l'équation (2.43), nous avons :

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \frac{\nabla \wedge \mathbf{E}}{j\omega\mu_0} \\ &= \frac{1}{j\omega\mu_0} \left( -\frac{\partial\Psi}{\partial z} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial\Psi}{\partial x} \hat{\mathbf{z}} \right)\end{aligned}\quad (2.44)$$

L'expression du vecteur de Poynting de l'équation (2.41) devient alors dans le cas TE :

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{TE}(x, z) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \Psi \hat{\mathbf{y}} \wedge \frac{1}{j\omega\mu_0} \left( -\frac{\partial\Psi^*}{\partial z} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial\Psi^*}{\partial x} \hat{\mathbf{z}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\omega\mu_0} \operatorname{Im} \left[ \Psi \frac{\partial\Psi^*}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \Psi \frac{\partial\Psi^*}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \right]\end{aligned}\quad (2.45)$$

Le vecteur de Poynting peut s'exprimer en polarisation TE par :

$$\mathbf{S}_{TE}(x, z) = \frac{1}{2\omega\mu_0} \operatorname{Im} [\Psi \nabla \Psi^*] \quad (2.46)$$

En suivant la même démarche, on obtient, pour la polarisation TM, l'expression suivante du vecteur de Poynting :

$$\mathbf{S}_{TM}(x, z) = \frac{1}{2\omega\epsilon_0} \operatorname{Im} [\Psi \nabla \Psi^*] \quad (2.47)$$

Ainsi, l'expression du vecteur de Poynting est indépendante de la polarisation. Pour passer de son expression en polarisation TE à celle en polarisation TM, il suffit de remplacer la perméabilité magnétique  $\mu_0$  par la permittivité diélectrique du vide  $\epsilon_0$ .

### 2.6.1 Vecteur de Poynting du champ incident

On veut déterminer le vecteur de Poynting  $\mathbf{S}_i$  associé au champ incident  $\Psi_i(\mathbf{r}) = \Psi_{i,0} e^{j\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}$  en polarisation TE. On a :

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_i &= \frac{1}{2\omega\mu_0} \operatorname{Im}(\Psi_i \nabla \Psi_i^*) \\ &= \frac{1}{2\omega\mu_0} \operatorname{Im}(j\mathbf{k}_i |\Psi_{i,0}|^2)\end{aligned}\quad (2.48)$$

En posant  $\omega\mu_0 = k_0 Z_0$ , où  $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 \Omega$  est l'impédance du vide, on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_i &= \frac{\mathbf{k}_i |\Psi_{i,0}|^2}{2k_0 Z_0} \\ &= \frac{|\Psi_{i,0}|^2 (\sin \theta_i \hat{\mathbf{x}} - \cos \theta_i \hat{\mathbf{z}})}{2Z_0} \quad \text{car } \mathbf{k}_i = k_0 (\sin \theta_i \hat{\mathbf{x}} - \cos \theta_i \hat{\mathbf{z}})\end{aligned}\quad (2.49)$$

En effectuant des calculs similaires pour le cas TM, on obtient au final pour les deux polarisations :

$$\text{TE : } \mathbf{S}_{i,TE} = \frac{|\Psi_{i,0}|^2 (\sin \theta_i \hat{\mathbf{x}} - \cos \theta_i \hat{\mathbf{z}})}{2Z_0} \quad (2.50)$$

$$\text{TM : } \mathbf{S}_{i,TM} = \frac{Z_0 |\Psi_{i,0}|^2 (\sin \theta_i \hat{\mathbf{x}} - \cos \theta_i \hat{\mathbf{z}})}{2} \quad (2.51)$$

Les expressions du vecteur de Poynting de l'onde incidente en polarisations TE et TM diffèrent de part la position du terme d'impédance du vide, située soit au numérateur, soit au dénominateur.

### 2.6.2 Vecteur de Poynting du champ diffracté

En partant de l'équation (2.46) en polarisation TE, on calcule le vecteur de Poynting de l'onde diffusée :

$$\mathbf{S}_{d,TE} = \frac{1}{2\omega\mu_0} \text{Im}(\Psi_d \nabla \Psi_d^*) \quad (2.52)$$

D'après l'équation (2.37), en champ lointain, le champ diffusé peut s'écrire :

$$\Psi_d^\infty(r') = \frac{j}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r'}} e^{-j\pi/4 + j\mathbf{k}_d \cdot \mathbf{r}'} \Psi_{d,0}^\infty(r') \Psi_{i,0} \quad (2.53)$$

avec

$$\Psi_{d,0}^\infty(r') = \frac{1}{\Psi_{i,0}} \int_S \left[ j\mathbf{k}_d \cdot \hat{\mathbf{n}} \Psi_0(\mathbf{r}) + \frac{\partial \Psi_0(\mathbf{r})}{\partial n} \right] e^{-j\mathbf{k}_d \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (2.54)$$

On obtient alors pour l'expression du vecteur de Poynting en champ lointain :

$$\mathbf{S}_{d,TE} = \frac{\mathbf{k}_d}{16\pi Z_0 k_0^2 r'} |\Psi_{d,0}^\infty|^2 |\Psi_{i,0}|^2 \quad (2.55)$$

avec  $\mathbf{k}_d = k_0(\sin \theta_d \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta_d \hat{\mathbf{z}})$  et l'impédance du vide  $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ . En notant  $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{k}_d}{k_0} = \sin \theta_d \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta_d \hat{\mathbf{z}}$ , on obtient :

$$\mathbf{S}_{d,TE} = \frac{1}{16\pi Z_0 k_0 r'} |\Psi_{d,0}^\infty|^2 |\Psi_{i,0}|^2 \hat{\mathbf{u}} \quad (2.56)$$

En suivant la même démarche, on obtient le vecteur de Poynting suivant pour la polarisation TM :

$$\mathbf{S}_{d,TM} = \frac{Z_0}{16\pi k_0 r'} |\Psi_{d,0}^\infty|^2 |\Psi_{i,0}|^2 \hat{\mathbf{u}} \quad (2.57)$$

### 2.6.3 Puissance incidente

La puissance incidente qui arrive sur la surface est déterminée à partir de la densité de puissance qui passe à travers le plan moyen de la surface. Le plan moyen étant horizontal, on ne s'intéresse qu'à la composante verticale (selon  $\hat{\mathbf{z}}$ ) de la densité de puissance. Ainsi formulée, la puissance  $P_i$  est la puissance portée par le vecteur de Poynting à travers le plan moyen de la surface. Sa définition [35] est :

$$P_i = - \int_{-L/2}^{+L/2} (\mathbf{S}_i \cdot \hat{\mathbf{z}}) \Big|_{z=0} dx \quad (2.58)$$

Le vecteur de Poynting de l'onde incidente est dirigé "vers le bas", dans le sens de propagation de l'onde incidente. Pour obtenir un calcul de puissance qui soit positif, on ajoute le signe  $-$  devant l'intégrale. On effectue le calcul de puissance pour l'onde incidente en polarisation TE :

$$\begin{aligned} P_i &= - \int_{-L/2}^{+L/2} (\mathbf{S}_i \cdot \hat{\mathbf{z}}) \Big|_{z=0} dx \\ &= - \int_{-L/2}^{+L/2} \left( \frac{|\Psi_{i,0}|^2 (\sin \theta_i \hat{\mathbf{x}} - \cos \theta_i \hat{\mathbf{z}})}{2Z_0} \cdot \hat{\mathbf{z}} \right) \Big|_{z=0} dx \\ &= \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{|\Psi_{i,0}|^2 \cos \theta_i}{2Z_0} dx \\ &= \frac{L \cos \theta_i}{2Z_0} |\Psi_{i,0}|^2 \end{aligned} \quad (2.59)$$

L'expression finale de la puissance incidente en polarisation TE est :

$$P_i = \frac{L \cos \theta_i}{2Z_0} |\Psi_{i,0}|^2 \quad (2.60)$$

Pour la polarisation TM, on obtient l'expression suivante de la puissance incidente :

$$P_i = \frac{Z_0 L \cos \theta_i}{2} |\Psi_{i,0}|^2 \quad (2.61)$$

L'expression de la puissance incidente en polarisation TE diffère de celle en polarisation TM, comme pour les vecteurs de Poynting, par la position au numérateur ou au dénominateur de l'impédance du vide.

### 2.6.4 Puissance diffusée

La puissance diffusée totale  $P_d$  dans tout le demi-espace au-dessus de la surface rugueuse est définie de telle manière que :

$$P_d = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{r}' \cdot \mathbf{S}_d d\theta_d \quad (2.62)$$

où  $\mathbf{S}_d$  est le vecteur de Poynting de l'onde diffusée, dont l'expression est donnée par les équations (2.56) et (2.57). On peut remarquer ici que la définition de la puissance diffusée au-dessus de la surface est différente de celle de la puissance incidente sur la surface, comme le montre la figure 2.7. Du fait des rugosités de la surface, l'onde est diffractée dans plusieurs directions du demi-espace supérieur. Cela explique l'intégration dans toutes les directions angulaires du demi-espace au-dessus de la surface. Il est à noter que pour une surface PC, toute la puissance est diffusée dans le demi-espace au dessus de la surface. Par contre, pour une surface diélectrique, une partie de la puissance est transmise dans le demi-espace sous la surface et l'autre partie est diffusée au-dessus.

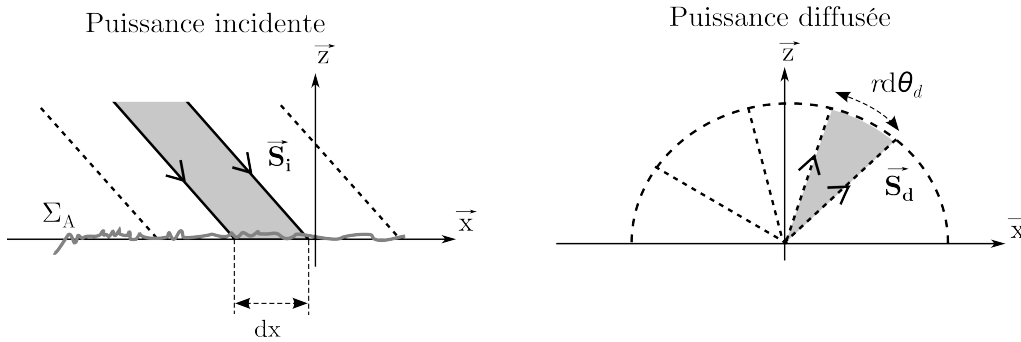


FIGURE 2.7 – Méthodes de calcul pour déterminer les puissances incidente et diffusée

Nous introduisons la définition du coefficient de diffusion bistatique  $\sigma(\theta_i, \theta_d)$  par le rapport de puissance diffusée sur puissance incidente suivant :

$$\frac{P_d}{P_i} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma(\theta_i, \theta_d) d\theta_d \quad (2.63)$$

Ce coefficient permet de déterminer la portion de puissance diffusée par la surface dans une direction d'observation  $\theta_d$ , par rapport à la puissance incidente dans la direction  $\theta_i$ . A partir de ce coefficient, la puissance diffusée se calcule ainsi :

$$P_d = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma(\theta_i, \theta_d) P_i d\theta_d \quad (2.64)$$

Par identification des termes des équations (2.62) et (2.64), on peut écrire :

$$\sigma(\theta_i, \theta_d) = \lim_{r' \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{S}_d(\mathbf{r}')}{P_i} \quad (2.65)$$

$r'$  doit tendre vers l'infini pour que les champs nécessaires au calcul du coefficient de diffusion soient en champ lointain. Ce coefficient permet de quantifier la puissance diffusée par une surface dans chacune des directions angulaires de l'intervalle  $[-\pi/2, \pi/2]$ . En utilisant les expressions (2.56) et (2.60), on a alors pour expression du coefficient de diffusion bistatique pour la polarisation TE :

$$\sigma_{TE}(\theta_i, \theta_d) = \frac{1}{8\pi L \cos \theta_i} |\Psi_{d,0}^\infty(\theta_d)|^2 \quad (2.66)$$

Pour la polarisation TM, nous obtenons la même expression :

$$\sigma_{TM}(\theta_i, \theta_d) = \sigma_{TE}(\theta_i, \theta_d) = \frac{1}{8\pi L \cos \theta_i} |\Psi_{d,0}^\infty(\theta_d)|^2 \quad (2.67)$$

où  $\Psi_{d,0}^\infty$  est donné à l'équation (2.54) et dépend des courants surfaciques. Le coefficient de diffusion est indépendant de la distance d'observation du champ lointain. Il dépend de la longueur de la surface, de l'angle d'incidence et des courants surfaciques.

Le coefficient de diffusion est une quantité d'intérêt particulièrement utilisée en télédétection. Dans le cas particulier où la direction d'observation est la direction d'incidence ( $\theta_d = \theta_i$ ), on parle alors de coefficient de rétro-diffusion. Le coefficient de diffusion est utilisé pour des surfaces de taille finie comme l'indique son expression (2.67), où apparaît la longueur  $L$  de la surface. Nous avons fourni son expression pour un problème 2D. En 3D, au lieu d'avoir le paramètre  $L$  homogène à une longueur, nous aurions un paramètre homogène à une surface. Dans le domaine des radaristes, une autre grandeur d'intérêt est souvent employée (scène 2D) :

$$\text{SER} = 2\pi A \sigma(\theta_i, \theta_d) = \lim_{r' \rightarrow \infty} 2\pi r' \frac{|\Psi_d|^2}{|\Psi_i|^2} \quad (2.68)$$

où  $A$  est homogène à une longueur (scène 2D). Il s'agit de la **Surface Équivalente Radar**, homogène à une surface (dans le cas de scène 3D, homogène à une longueur dans le cas de scène 2D), comme son nom l'indique. Le calcul de SER est privilégié par les radaristes en place du coefficient de diffusion notamment car, souvent, ils ne connaissent pas la taille de l'objet qui diffuse. Comme pour le coefficient de diffusion, il est possible de la calculer en configuration monostatique<sup>3</sup> ou bistatique<sup>4</sup>.

La SER peut également être calculée par unité de surface. Elle devient alors la **Surface Équivalente Radar normalisée (SERn)** et n'a plus d'unités. D'après [36], elle se calcule par l'expression :

$$\text{SERn} = \lim_{r' \rightarrow \infty} \frac{r'}{2Z_0} \frac{|\Psi_d^\infty(\theta_d)|^2}{p_i} = \frac{1}{16\pi Z_0 k_0} \frac{|\Psi_{d,0}^\infty(\theta_d)|}{p_i} \quad (2.69)$$

où  $\Psi_d^\infty(\theta_d)$  et  $\Psi_{d,0}^\infty(\theta_d)$  sont donnés par les équations (2.53) et (2.54), et  $p_i$  est la densité de puissance incidente normalisée, obtenue d'après :

$$p_i = -\frac{1}{|\Psi_{i,0}|^2} \int_{-L/2}^{+L/2} \mathbf{S}_i \cdot \hat{\mathbf{z}}|_{z=0} dx \quad (2.70)$$

<sup>3</sup>le point d'émission et de réception est le même

<sup>4</sup>le récepteur et l'émetteur ont des positions distinctes

### 2.6.5 Champs cohérent et incohérent

Tsang & al [35] définissent le champ cohérent comme l'espérance mathématique du champ diffusé  $\Psi_d$ . Le champ diffusé par une surface rugueuse peut s'écrire comme la somme de deux composantes :

$$\Psi_d = \langle \Psi_d \rangle + \delta \Psi_d \quad (2.71)$$

où

$$\begin{cases} \langle \Psi_d \rangle & : \text{composante cohérente du champ diffusé} \\ \delta \Psi_d & : \text{composante incohérente du champ diffusé} \end{cases}$$

L'opérateur  $\langle \rangle$  correspond à l'espérance mathématique, dont l'expression est :

- pour une variable discrète  $f : \langle f \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(v_i)$  (2.72)

- pour une variable continue  $f : \langle f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) dv$  (2.73)

Ainsi définie, l'espérance du champ diffusé correspond à la composante cohérente, tandis que l'espérance de la composante incohérente est nulle :  $\langle \delta \Psi_d \rangle = 0$ . Les intensités cohérente et incohérente sont alors définies comme :

$$\langle |\Psi_d|^2 \rangle = |\langle \Psi_d \rangle|^2 + \langle |\delta \Psi_d|^2 \rangle \quad (2.74)$$

avec

$$\begin{aligned} |\langle \Psi_d \rangle|^2 & : \text{intensité cohérente} \\ \langle |\delta \Psi_d|^2 \rangle = \langle |\Psi_d|^2 \rangle - |\langle \Psi_d \rangle|^2 & : \text{intensité incohérente} \end{aligned}$$

Dans la partie précédente, nous avons donné l'expression du coefficient de diffusion pour les polarisations TE et TM. Puisque le coefficient de diffusion est proportionnel au champ diffracté d'après les équations (2.66) et (2.67), le coefficient de diffusion peut également se décomposer en une composante cohérente  $\sigma_d^{coh}$  et une composante incohérente  $\sigma_d^{incoh}$  :

$$\sigma_d^{coh} = \frac{1}{8\pi L \cos \theta_i} |\langle \Psi_{d,0}^\infty \rangle|^2 \quad (2.75)$$

$$\sigma_d^{incoh} = \frac{1}{8\pi L \cos \theta_i} \left[ \langle |\Psi_{d,0}^\infty|^2 \rangle - |\langle \Psi_{d,0}^\infty \rangle|^2 \right] \quad (2.76)$$

où l'expression de  $\Psi_{d,0}^\infty$  est donnée dans l'équation (2.54).

## 2.7 Modèles de diffusion EM

La résolution des problèmes de diffusion électromagnétique peut se faire soit à l'aide de modèles rigoureux, dits "exacts", soit à l'aide de modèles asymptotiques, c'est-à-dire utilisant des approximations mathématiques ou physiques. Les modèles rigoureux ont l'avantage de donner une solution numériquement exacte à un problème de diffraction électromagnétique. Ils ont comme inconvénient un temps de calcul long et des exigences importantes en termes de ressource mémoire. Quant aux modèles asymptotiques, de par le fait qu'ils utilisent des approximations mathématiques ou physiques, cela leur permet une économie de temps de calcul et de ressources mémoires. Cependant, leurs approximations peuvent restreindre leur validité à un certain domaine et/ou limiter leur précision, ce qui en fait leur principal inconvénient en comparaison à un modèle rigoureux. Lorsqu'un modèle asymptotique est développé ou implanté, la comparaison à un modèle

rigoureux utilisé comme modèle de référence est fondamentale pour déterminer sa précision et son domaine de validité. Lorsque le domaine de validité du modèle est identifié et que le scénario étudié entre dans ce domaine, on préfère l'usage du modèle asymptotique plus rapide. Ainsi, le choix d'un modèle rigoureux ou asymptotique pour résoudre un problème de diffusion électromagnétique s'effectue selon les contraintes de rapidité de calcul, le matériel à disposition (processeurs et ressources mémoires) et la précision souhaitée dans le domaine de validité ciblé.

Les modèles étant nombreux, il est possible de les classer selon différentes caractéristiques :

- temporel ou fréquentiel. Une méthode temporelle fournit en sortie une grandeur calculée dans le domaine temporel, alors qu'une méthode fréquentielle fournit une grandeur dans le domaine fréquentiel.
  - modèles temporels : FDTD<sup>5</sup>, TLM<sup>6</sup>, ...
  - modèles fréquentiels : FEM<sup>7</sup>, FDFD<sup>8</sup>, FMM<sup>9</sup>, MdM<sup>10</sup>, ...
- analytique ou numérique. Pour un modèle analytique, la grandeur de sortie est calculée à partir d'une équation mathématique en fonction des paramètres connus, alors qu'une solution numérique est une résolution à l'aide de calculs numériques de la solution réelle dont on n'a pas de description sous forme d'équation mathématique.
  - modèles analytiques : diffraction par une sphère (solution de Mie [37]), ...
  - modèles numériques : MdM (rigoureux), FDTD (rigoureux), ...
- intégral ou différentiel. Les méthodes intégrales sont issues d'un formalisme à base d'équations intégrales, comme le principe de Huygens. La Méthode des Moments (**MdM**) est un modèle intégral. Les modèles différentiels partent d'une équation différentielle, comme les équations de Maxwell pour la méthode FDTD formulée par Yee [3]. Pour les méthodes différentielles, le volume de calcul est maillé et les grandeurs recherchées sont calculées pour chaque cellule. Ce type de modèle peut être très coûteux si les mailles sont de petite taille ou si le volume de calcul est grand. L'avantage des modèles intégraux est qu'à partir de la connaissance des courants sur la surface il est possible de déterminer les champs en tout point de l'espace, en faisant appel aux fonctions de propagation.
  - modèles intégraux : MdM, FMM, ...
  - modèles différentiels : FDTD, FDFD, FEM, TLM, ...
- local ou non local. Elfouhaily & al. [38] ont fourni une définition mathématique pour expliquer la notion de modèle local ou non-local. Intuitivement, un modèle local présente une seule interaction entre l'onde et la surface, contrairement aux modèles non locaux qui peuvent prendre en compte de multiples interactions.

### 2.7.1 Modèle rigoureux : la Méthode des Moments

Une méthode rigoureuse fréquemment employée dans la bibliographie scientifique est la Méthode des Moments (**MdM**). Elle a été développée en 1967 par Harrington [8]. Pour illustrer sa méthode, il l'a appliquée à la diffraction d'une plaque conductrice carrée, à la diffraction par un fil mince PC et au rayonnement

<sup>5</sup>Finite Difference Time Domain

<sup>6</sup>Transmission Line Matrix

<sup>7</sup>Finite Element Methods

<sup>8</sup>Finite Difference Frequency Domain

<sup>9</sup>Fast Multipole Method

<sup>10</sup>Méthode Des Moments

Tableau 2.1 – Tableau récapitulatif de la classification de modèles de diffusion électromagnétique

Nom	Modèle	Méthode	Formulation	Domaine
MdM	rigoureux	numérique	intégrale	fréquentiel
FEM	rigoureux	numérique	différentielle	fréquentiel
FDFD	rigoureux	numérique	différentielle	fréquentiel
FDTD	rigoureux	numérique	différentielle	temporel
SPM	asymptotique	numérique ou analytique	intégrale	fréquentiel
OP	asymptotique	numérique ou analytique	intégrale	fréquentiel
OG	asymptotique	analytique <sup>11</sup>	intégrale	fréquentiel

d'une antenne filaire. Les équations intégrales (2.16) sont discrétisées dans le domaine fréquentiel et formulées sous forme matricielle. Pour une description plus précise de cette méthode employée pour étudier la diffraction par des surfaces rugueuses aléatoires, le lecteur peut se référer à la thèse de N. Déchamps [7] ou au livre de C. Bourlier & al. [20].

La **MdM** est une méthode numérique. En numérique, les surfaces sur lesquelles on veut appliquer des modèles de diffusion électromagnétique sont discrétisées et représentées par un nombre entier et fini de points. Le nombre fini de points de la surface implique que l'étendue de la surface est elle-même finie. Pour éviter la diffraction par les extrémités de la surface, il est nécessaire que le faisceau incident éclaire la zone centrale de la surface et soit atténué sur les bords afin que les courants surfaciques tendent à s'annuler sur les bords. Nous avons donc besoin d'une onde incidente qui éclaire la surface d'étendue finie, qui soit solution de l'équation de Helmholtz (avec une erreur acceptable dans un domaine donné) et dont la formule analytique puisse être implantée dans des simulations numériques. L'onde incidente plane monochromatique, de vecteur d'onde  $\mathbf{k}_i = k_{ix}\hat{\mathbf{x}} - k_{iz}\hat{\mathbf{z}}$ , éclairant tout point de l'espace  $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + z\hat{\mathbf{z}}$  a pour expression :

$$\Psi_i(x, z) = \Psi_{i,0} e^{j\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} = \Psi_{i,0} e^{j(k_{ix}x - k_{iz}z)} \quad (2.77)$$

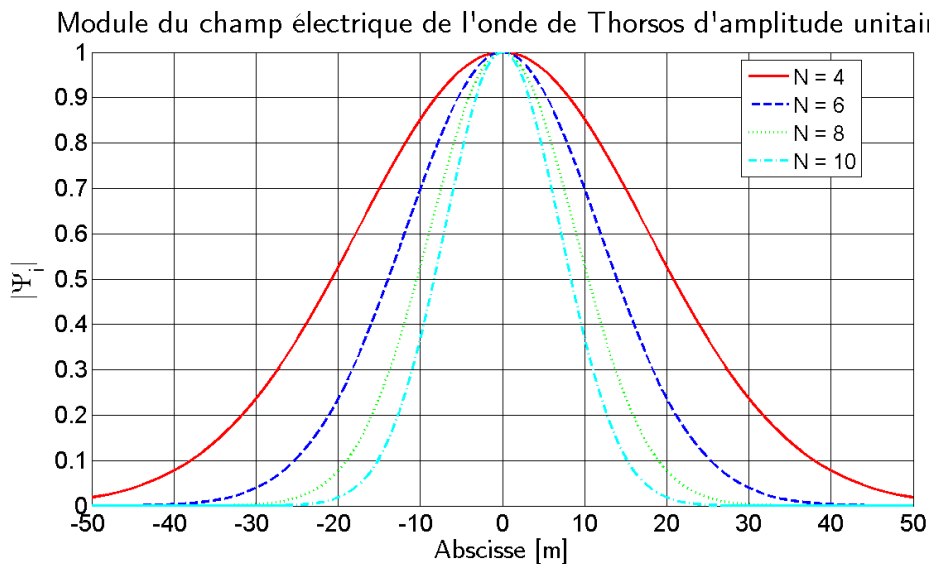
ne remplit pas toutes ces exigences. Thorsos [39] a proposé en 1988 l'expression d'une onde plane atténuée sur les bords, solution (solution pas parfaitement exacte) de l'équation de Helmholtz, qui fut très utilisée par la suite pour traiter les problèmes de diffraction électromagnétique par des surfaces rugueuses à l'aide de la MdM. Elle a pour expression :

$$\Psi_{TH} = \Psi_{i,0} \underbrace{e^{j\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}}_{\text{onde plane}} \underbrace{e^{-\frac{(x+z \tan \theta_i)^2}{g^2}}}_{\text{terme d'atténuation}} \underbrace{e^{jw(\mathbf{r})\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}}_{\text{terme correctif}} \quad (2.78)$$

où  $w(\mathbf{r}) = \frac{\left[ \frac{2(x+z \tan \theta_i)^2}{g^2} - 1 \right]}{(k_0 g \cos \theta_i)^2}$  et  $g$  est un paramètre qui contrôle l'atténuation. Le paramètre  $g$  est généralement exprimé en fonction de la longueur  $L$  de la surface tel que  $g = \frac{L}{N}$  où  $N$  est un entier, généralement pris dans l'intervalle  $[4, 10]$  selon Tsang & al. [36]. La figure 2.8 permet de visualiser que lorsque  $N$  augmente, l'onde de Thorsos est davantage atténuée sur les bords et la zone centrale est de plus en plus étroite. Cette onde, que nous appellerons *onde de Thorsos* dans la suite, satisfait l'équation de Helmholtz avec une erreur variant en  $O\left(\frac{1}{gk_0 \cos \theta_i}\right)$ . L'erreur est acceptable si  $\frac{1}{gk_0 \cos \theta_i} \ll 1$ . Cette condition est valide si :

- l'angle d'incidence ne tend pas vers les angles rasants. En effet, quand  $\theta_i \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , alors  $\frac{1}{gk_0 \cos \theta_i} \rightarrow +\infty$  ;
- $g$  est grand devant la longueur d'onde.

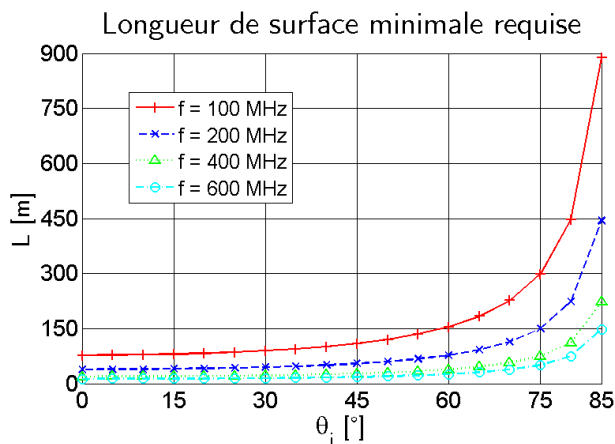
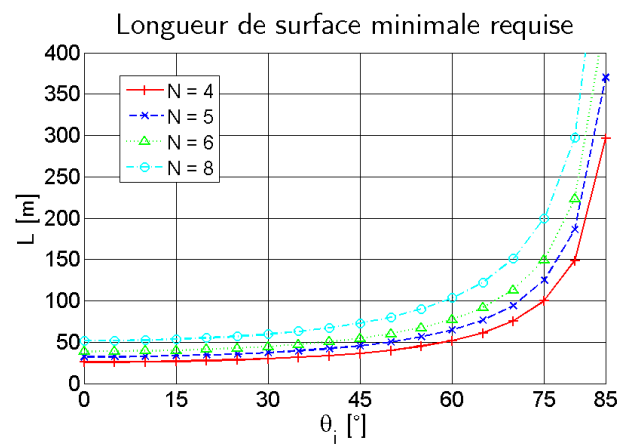


FIGURE 2.8 – Influence du paramètre  $N$  sur l'atténuation de l'onde de Thorsos

Quand la fréquence et l'angle d'incidence sont imposés par le scénario, nous éclairons la surface à l'aide de l'onde de Thorsos en respectant le critère arbitraire suivant [40] :

$$\frac{1}{gk_0 \cos \theta_i} \ll C \quad (2.79)$$

où  $C$  est une constante petite par rapport à 1, généralement  $C = 0.037$ .

FIGURE 2.9 – Longueur minimale de surface requise pour l'utilisation de l'onde de Thorsos en fonction de l'angle incident, lorsque  $g = L/5$  et pour 4 fréquences distinctesFIGURE 2.10 – Longueur minimale de surface requise pour l'utilisation de l'onde de Thorsos en fonction de l'angle incident, lorsque  $f = 200$  MHz et pour 4 valeurs de  $N$ 

Les figures 2.9 et 2.10 illustrent la longueur de surface requise en fonction de la fréquence, du paramètre  $N$  et de l'angle d'incidence. Sur ces figures, le critère d'erreur  $C$  a été fixé à 0.037. Nous avons alors déterminé, en fonction de l'angle d'incidence, pour plusieurs fréquences et plusieurs paramètres  $N$ , la longueur minimale de surface requise pour que ce critère d'erreur soit respecté. Pour les tendances observables, plus l'angle d'incidence est rasant, plus le paramètre  $N$  requis est élevé. Plus la fréquence est basse et plus il faudra une surface de grande étendue pour appliquer l'onde de Thorsos. A pas d'échantillonnage spatial fixe, plus la longueur de la surface est étendue et plus le temps de calcul pour les modèles de diffusion est élevé. L'onde de Thorsos est donc à utiliser avec précaution. Dans notre cas, nous sommes partis du critère

d'erreur  $C = 0.037$ . Il en existe d'autres, Thorsos ayant initialement proposé le critère sur  $g$  :

$$g \gg \frac{1}{k_0 \cos \theta_i} \quad (2.80)$$

qui n'avait pas beaucoup de sens physique lorsque les angles s'approchaient des incidences rasantes. Kapp [41] a alors repris ce critère pour le modifier de la manière suivante afin qu'il soit davantage utilisable aux angles rasants :

$$g > \frac{A}{k_0(\pi/2 - \theta_i) \cos \theta_i} \quad (2.81)$$

Un autre critère spécifique aux incidences rasantes partant d'une erreur acceptable de  $10^{-4}$  est proposé par Ye & al. [42]. Parmi les critères proposés ci-dessus, le plus exigeant est celui de Ye qui requiert des surfaces de grande étendue. Le lecteur peut se référer aux articles de Ye & al. [42] et Toporkov & al. [43] pour les problèmes liés à l'utilisation et à la paramétrisation d'une onde de Thorsos.

Le calcul de la puissance d'une onde incidente de Thorsos suit la même démarche que pour une onde incidente plane. D'après [20], l'expression de la puissance incidente normalisée au niveau du plan moyen de la surface est :

$$p_i = \frac{g \cos \theta_i}{2Z_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[ 1 - \frac{1 + 2 \tan^2 \theta_i}{2k_0^2 g^2 \cos^2(\theta_i)} \right] \quad (2.82)$$

La Surface Équivalente Radar normalisée (SER<sub>n</sub>) est définie selon [36] par :

$$\text{SER}_n = \lim_{r' \rightarrow \infty} \frac{r'}{2Z_0} \frac{|\Psi_{d,0}^\infty|^2}{p_i} = \frac{1}{16\pi Z_0 k_0} \frac{|\Psi_{d,0}^\infty|^2}{p_i} \quad (2.83)$$

où  $\Psi_d^\infty$  et  $\Psi_{d,0}^\infty$  sont données en (2.53) et (2.54).

Dans la réalité, la largeur du faisceau est limitée par la directivité de l'antenne d'émission de l'onde incidente. La surface au sol éclairée est alors également délimitée par la largeur du faisceau. On identifie généralement la surface d'éclairage à l'aide des angles d'atténuation à 3 dB des lobes de l'antenne. On considère qu'au-delà des angles à 3 dB le champ incident est très atténué et sa contribution est négligeable devant le champ incident dans la zone centrale d'éclairage. Cette atténuation du faisceau incident dû au diagramme de rayonnement de l'antenne contribue à l'éclairage d'une surface finie.

## 2.7.2 Modèles asymptotiques

On considère une surface rugueuse aléatoire monodimensionnelle dont la fonction des hauteurs est donnée par :

$$\zeta : x \mapsto \zeta(x) \quad (2.84)$$

Elle est éclairée par une onde incidente plane de longueur d'onde  $\lambda$  se propageant dans la direction  $\mathbf{k}_i = k_0(\sin \theta_i \hat{\mathbf{x}} - \cos \theta_i \hat{\mathbf{z}})$ . Sur la surface, on place de manière aléatoire un point  $P_1(x_1, \zeta_1)$  et on note  $P_2(x_2, 0)$  le point sur le plan moyen de la surface qui est dans le prolongement de  $P_1$  selon la direction  $\mathbf{k}_i$ . Calculons la variation de phase  $\delta\phi$  engendrée par ces deux points et observée par un capteur dans la direction  $\mathbf{k}_d = k_0(\sin \theta_d \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta_d \hat{\mathbf{z}})$  :

D'après la figure 2.11, la variation de phase de l'onde diffractée dans la direction  $\mathbf{k}_d$  par le point  $P_1$  avec le plan moyen peut s'exprimer par :

$$\begin{aligned} \delta\phi &= \frac{2\pi}{\lambda} (d_1 - d_2) \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \cdot (\mathbf{k}_d - \mathbf{k}_i) \\ &= k_0 [(x_1 - x_2)(\sin \theta_d - \sin \theta_i) + \zeta_1(\cos \theta_i + \cos \theta_d)] \end{aligned} \quad (2.85)$$

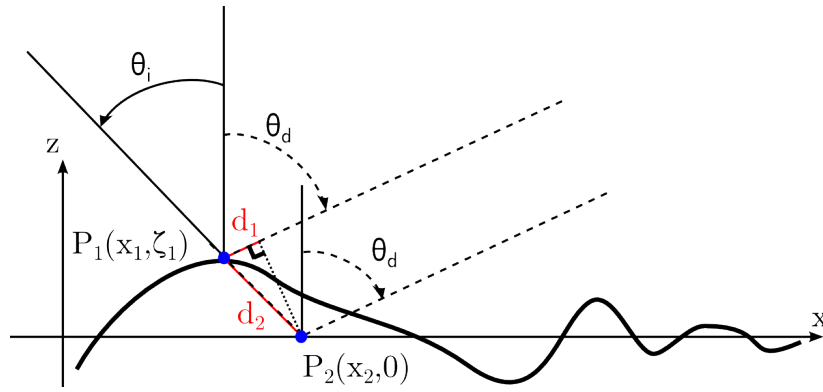


FIGURE 2.11 – Déphasage entre un point  $P_1$  sur la surface et le point  $P_2$  sur le plan moyen de la surface dans le prolongement de  $P_1$

où  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$  est le nombre d'onde. On remarque que lorsque la surface est plane ( $\zeta_1 = 0$ ) et l'onde est diffractée dans la direction spéculaire  $\theta_d = \theta_i$ , alors la différence de phase est nulle :  $\delta\phi = 0$ . On s'intéresse à la composante aléatoire du déphasage qui dépend de l'ordonnée du point  $P_1$  :

$$\delta\phi_z = k_0\zeta_1(\cos\theta_i + \cos\theta_d) \quad (2.86)$$

Le terme  $\zeta_1$  est une grandeur aléatoire car la fonction des hauteurs  $x \mapsto \zeta(x)$  peut être modélisée par un processus aléatoire (voir chapitre III).  $\delta\phi_z$  est donc une grandeur aléatoire. La puissance captée par le récepteur, issue de la diffraction de l'onde incidente par les points de la surface, dépend de la différence de phase entre ces points. Pour deux points, si la différence de phase est faible,  $|\delta\phi| \ll \pi$ , les deux rayons issus des points interfèrent constructivement. Si  $|\delta\phi| \approx \pi$ , les rayons sont proches d'être en opposition de phase et vont interférer destructivement. Il y aura alors moins d'énergie qui sera diffusée de manière cohérente par rapport à une surface de même taille mais lisse.

Nous avons vu ci-dessus comment calculer la différence de phase entre un point de la surface et le plan moyen. On a constaté que cette différence de phase est une grandeur aléatoire. Dans la suite, on veut évaluer la différence de phase sur toute la surface en déterminant ses moments statistiques d'ordres 1 et 2.

$$\begin{aligned} \langle \delta\phi \rangle &= \langle k_0\zeta_1(\cos\theta_i + \cos\theta_d) \rangle \\ &= k_0(\cos\theta_i + \cos\theta_d) \langle \zeta_1 \rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.87)$$

car  $\langle \zeta_1 \rangle = 0$  puisque  $\zeta$  est un processus aléatoire supposé centré. Nous apporterons davantage de précision à ce point au chapitre 3. Le déphasage moyen sur la surface est donc nul. Pour le moment d'ordre 2, on a :

$$\begin{aligned} \sigma_{\delta\phi}^2 &= \langle [\delta\phi - \langle \delta\phi \rangle]^2 \rangle \\ &= k_0^2(\cos\theta_i + \cos\theta_d)^2 \langle \zeta_1^2 \rangle \\ &= k_0^2(\cos\theta_i + \cos\theta_d)^2 \sigma_h^2 \end{aligned} \quad (2.88)$$

où  $\langle \zeta_1^2 \rangle = \sigma_h^2$  est l'écart type des hauteurs de la surface. Nous définissons le paramètre de rugosité de Rayleigh  $R_a$  à partir de l'équation (2.88) en imposant  $\theta_d = +\theta_i$ , pour s'intéresser à la diffusion dans la direction spéculaire et comparer au cas d'une surface lisse d'aire infinie. On a alors :

$$\begin{aligned} R_a &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_{\delta\phi} |_{\theta_d=\theta_i} \\ &= k_0 \sigma_h \cos\theta_i \end{aligned} \quad (2.89)$$

Si la surface est diélectrique, et sous certaines hypothèses<sup>12</sup>, le champ diffracté peut s'écrire sous la forme  $\Psi_d = \Psi_i \mathcal{R}(\theta_i) e^{j\delta\phi}$ .  $\mathcal{R}$  est le coefficient de Fresnel en réflexion calculé en (2.25).  $\Psi_d$  est alors une variable

<sup>12</sup>Notamment que l'approximation de Kirchhoff-plan tangent soit valide et que les pentes de la surface soient faibles [44]

aléatoire. En considérant que  $\zeta$  suit une distribution gaussienne et d'après Pinel et al. [44], le champ diffusé moyen peut s'écrire dans la direction spéculaire :

$$\begin{aligned}
 \langle \Psi_d \rangle &= \Psi_i \mathcal{R}(\theta_i) \langle e^{j\delta\phi} \rangle \\
 &= \Psi_i \mathcal{R}(\theta_i) \langle e^{j(2k_0 \cos \theta_i \zeta)} \rangle \\
 &= \Psi_i \mathcal{R}(\theta_i) e^{-j(2k_0^2 \cos^2 \theta_i \langle \zeta^2 \rangle)} \\
 &= \Psi_i \mathcal{R}(\theta_i) e^{-j(2k_0^2 \cos^2 \theta_i \sigma_h)}
 \end{aligned} \tag{2.90}$$

Le champ diffusé possède une expression qui fait apparaître l'écart type des hauteurs de la surface. Il est donc important de s'intéresser à cette grandeur dans l'étude de la diffusion par des surfaces rugueuses aléatoires.

Le critère de Rayleigh [45], [46] stipule que si  $R_a < \frac{\pi}{4}$ , la surface est dite *peu rugueuse*, sinon elle est dite fortement rugueuse. Ce critère permet d'obtenir une définition de la rugosité d'une surface d'un point de vue électromagnétique. En effet, à même écart type des hauteurs  $\sigma_h$ , une surface pourra être fortement rugueuse pour une fréquence donnée et pourra être considéré comme *lisse* pour une autre fréquence plus faible. A partir de la connaissance de la longueur d'onde, de l'angle d'incidence et de l'écart type des hauteurs, on peut déterminer le paramètre de Rayleigh  $R_a$ . En fonction de la valeur de  $R_a$ , le choix des modèles asymptotiques se fait parmi deux familles principales de modèles : les modèles basse fréquence et les modèles haute fréquence.

On appelle modèle basse fréquence un modèle applicable sur une surface, à l'image de celle présentée sur la figure 2.12, dont un paramètre caractéristique de rugosité (typiquement, l'écart type des hauteurs) de la surface est faible devant la longueur d'onde ( $\sigma_h \ll \lambda$ ). Le paramètre de Rayleigh associé est alors faible. Inversement, un modèle haute fréquence est un modèle applicable dans le cas où un paramètre caractéristique de rugosité de la surface est grand par rapport à la longueur d'onde, comme le montre la figure 2.13. Le paramètre de Rayleigh associé est alors généralement élevé. Il existe une troisième catégorie qui a pour but de fournir des modèles de diffusion applicables à la fois en basse fréquence et en haute fréquence : les modèles unifiés.

Parmi les modèles hautes fréquences, nous pouvons citer l'Approximation de Kirchhoff (**AK**), appelée aussi approximation du plan tangent ou **Optique Physique (OP)** [47]. La méthode de l'**OP** a notamment comme extension la **Théorie Physique de la Diffraction (TPD)** [48] et sa version étendue par Michaeli (**TPDE)** [49]. Dans cette méthode, l'une des plus employées dans le domaine, la surface est considérée localement plane et il est possible de lui appliquer localement les coefficients de Fresnel pour déterminer les courants surfaciques. L'**Optique Géométrique (OG)** [50] fait également partie de cette famille. Cette méthode suppose que l'onde incidente possède une fréquence infinie. Parmi les autres méthodes existantes, citons la **Théorie Géométrique de la Diffraction (TGD)** [51] [52] et la **Théorie Uniforme de la Diffraction (TUD)** [53] [54] qui sont des extensions de l'**OG**.

Quant aux modèles basses fréquences, la principale est la **Méthode des Petites Perturbations (MPP - Small Perturbation Method - SPM** en anglais) initialement formulée par Rayleigh à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle. Cette méthode (ou plutôt, cet ensemble de méthodes), comme son nom l'indique, modélise les variations des hauteurs d'une surface rugueuse comme de petites perturbations, que l'on dit petites devant la longueur d'onde. Elle est alors applicable lorsque les hauteurs de la surface sont faibles devant la longueur d'onde. Son domaine de validité est discuté dans les articles suivants : [55], [56], [57], [58], [59] et [39]. Le chapitre III fournit un état de l'art plus détaillé de cet ensemble des méthodes perturbatives.

Afin d'élargir le domaine de validité des modèles basses fréquences et des modèles hautes fréquences, des méthodes numériques et analytiques ont vu le jour : les modèles unifiés. Ils sont qualifiés "d'unifiés" car ils ont pour vocation d'être appliqués à la fois dans les domaines hautes et basses fréquences. Cet élargissement de leur domaine de validité se fait au détriment de leur simplicité. Dans cette catégorie, on peut nommer la méthode des faibles pentes de Voronovich (**SSA - Small Slope Approximation**) [60] qui

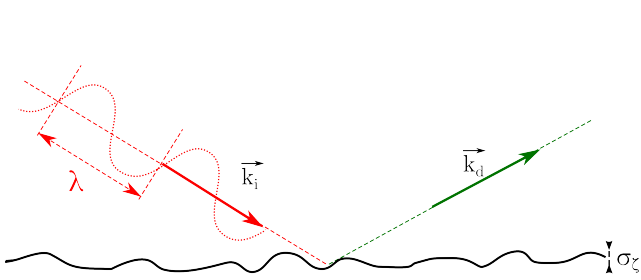


FIGURE 2.12 – Surface peu rugueuse d'un point de vue électromagnétique : l'écart type des hauteurs est faible devant la longueur d'onde. Des modèles de diffusion basses fréquences sont préférentiellement utilisés sur ce type de surface

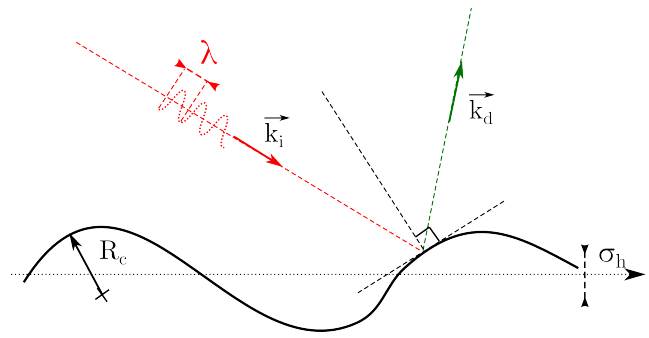


FIGURE 2.13 – Surface très rugueuse d'un point de vue électromagnétique : le rayon de courbure est grand devant la longueur d'onde. Des modèles de diffusion basses fréquences sont préférentiellement utilisés sur ce type de surface

s'applique sans restriction sur les hauteurs de la surface, mais comme son nom l'indique, est restreinte à des surfaces dont les pentes sont faibles. On peut citer également le modèle **Integral Equation Model (IEM)** [61], très utilisé ces dernières décennies, notamment pour l'inversion de données radar [62] afin de déterminer l'écart type des hauteurs et l'humidité d'un sol.

Le lecteur peut se référer à la thèse de N. Pinel [63] pour une brève classification de modèles de diffusion selon les trois catégories de modèles citées plus haut : basse fréquence, haute fréquence et unifiés. Le "topical review" de T. Elfouhaily & C-A. Guérin [38] est également un document de référence pour la classification des modèles de diffusion électromagnétique asymptotiques. Les livres d'Ogilvy [46] et de Vornovich [64] fournissent de bons résumés des principales méthodes asymptotiques.

### 2.7.3 Conclusion

Nous venons de voir que les modèles rigoureux sont des méthodes permettant de donner un résultat numériquement exact à un problème de diffraction électromagnétique par une surface rugueuse. Leur inconvénient est que leur temps de calcul est long et que les ressources mémoires requises sont importantes. Pour des applications de détection en temps réel décrites dans le chapitre 1, la contrainte de temps de calcul est fondamentale et exige l'utilisation d'un modèle asymptotique rapide.

Les modèles asymptotiques ont été classés en 3 catégories en fonction de la fréquence de l'émetteur, des angles d'incidence du scénario de détection et de l'écart type des hauteurs de la surface. La détermination du paramètre de Rayleigh à partir de ces 3 paramètres permet d'orienter le choix du modèle asymptotique. Le scénario de détection décrit dans le chapitre I indique que les angles d'incidence (par rapport à l'horizontale) sont de quelques degrés à quelques dizaines de degrés. La bande de fréquence préalablement choisie est comprise entre 10 et 600 MHz. Il est alors nécessaire de déterminer l'écart type des hauteurs des surfaces rugueuses aléatoires pour obtenir une estimation du paramètre de Rayleigh pour nos scénarios de détection. L'estimation visuelle des paramètres de rugosité d'une surface rugueuse étant imprécise, il a été décidé d'effectuer des mesures pour les déterminer. C'est l'objet du chapitre III, dans lequel nous présentons les campagnes de mesures de profils des hauteurs, la manière dont nous modélisons les surfaces rugueuses et les résultats de la caractérisation des profils relevés.

---

# Mesures de rugosités de sols

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>58</b>
<b>3.2</b>	<b>Description du dispositif de mesure et des traitements associés</b>	<b>61</b>
<b>3.3</b>	<b>Caractérisation de profils mesurés</b>	<b>67</b>
<b>3.4</b>	<b>Diffusion électromagnétique par la surface mesurée</b>	<b>81</b>

---

### 3.1 Introduction

La mesure sur des surfaces rugueuses s'applique dans de nombreux domaines et sur de nombreux types de surfaces [65]. De la cartographie terrestre, sous-marine ou spatiale, à l'agriculture [66], aux contrôles de qualité de planéité de surfaces supposées lisses [67] en passant par la géologie et les études d'érosion [68] ou encore la diffusion des sons sur des parois de différentes natures [69], de nombreux domaines sont concernés par la caractérisation et la modélisation de surfaces rugueuses.

Dans notre étude, nous traitons de la problématique de la diffusion électromagnétique par des surfaces rugueuses aléatoires. En plus de l'onde incidente, ce phénomène dépend de la nature de la surface, de ses caractéristiques électriques et de ses caractéristiques géométriques. Il est donc important de pouvoir caractériser la surface étudiée. La figure 3.1 présente une classification [70] très générale des surfaces rugueuses.

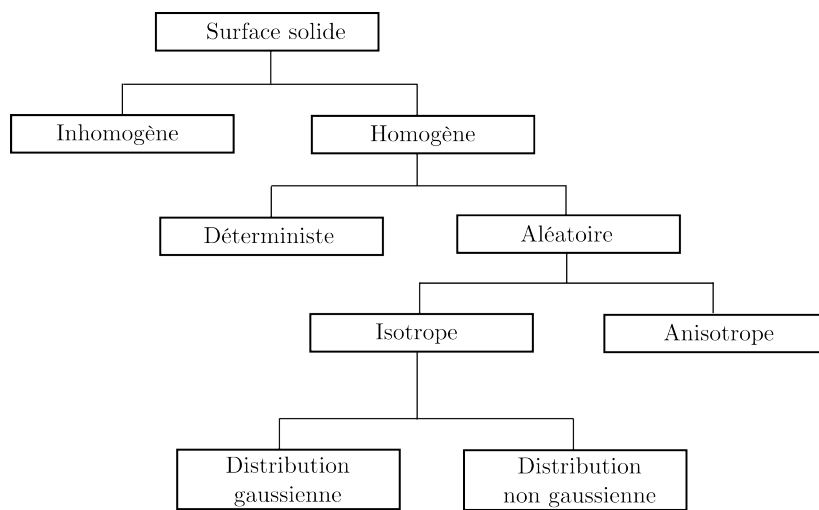


FIGURE 3.1 – Classification générale de surfaces rugueuses solides

Celles liées à notre application peuvent être qualifiées de solides, homogènes, aléatoires et isotropes. Elles sont qualifiées de solides car elles sont constituées de matériaux solides (terres, cailloux,...). Elles sont dites homogènes car le sol est modélisé comme un milieu continu et homogène, avec une permittivité diélectrique et une conductivité électrique spatialement constantes. Dans la réalité, les sols rencontrés pour nos applications sont constitués de cailloux, de failles et de blocs de terre qui agissent comme des diffuseurs locaux. Mais dans la bande de fréquences étudiée, leur effet est négligeable et justifie la notion de milieu homogène. A l'aide de nos mesures, nous montrerons que les variations de leurs hauteurs peuvent être considérées comme aléatoires et de distribution gaussienne. La notion d'isotropie est généralement admise [71], mais nous la vérifierons par nos mesures.

Dans le domaine de la diffusion électromagnétique par des surfaces rugueuses, un autre type de surface, que l'on ne peut pas classer dans ce tableau, est fréquemment étudié : les surfaces de mer [72], [73]. Ce ne sont pas des surfaces solides, mais des surfaces liquides. La figure 3.1 présente donc une classification générale qui peut néanmoins être largement approfondie et complétée.

L'une des caractéristiques géométriques importantes des surfaces rugueuses est le profil des hauteurs, qui représente la variation des hauteurs de la surface par rapport à un plan de référence. A partir de ce profil, il est alors possible de calculer des grandeurs caractéristiques de la rugosité telles que la moyenne et l'écart-type des hauteurs, ou encore la longueur de corrélation. D'autres méthodes estiment directement ces grandeurs statistiques sans passer par la mesure préalable d'un profil de surface rugueuse. Il existe de nombreuses méthodes pour mesurer le profil des hauteurs ou estimer directement des paramètres de rugosité. Ces méthodes peuvent être classées en fonction de l'échelle des paramètres géométriques recherchés et de la longueur mesurée. Pour notre part, nous nous intéressons à des surfaces de plusieurs mètres ou plusieurs



dizaines de mètres de longueur, avec des variations de hauteurs de quelques centimètres. Nous ne nous intéresserons donc pas aux méthodes de mesure de paramètres rugueux aux échelles atomique (STM<sup>1</sup>, AFM<sup>2</sup>), nanométrique (microscope à électrons, stylet) ou micrométrique (méthodes optiques). Le lecteur peut se référer à l'article de Jean M. Bennet [74] pour une classification des méthodes de mesure de surfaces dites "optiques", c'est-à-dire dont les paramètres de rugosité sont de l'ordre de grandeur des longueurs d'onde du domaine optique, soit de l'angström au micromètre. Nous nous concentrons sur les méthodes allant du domaine millimétrique au domaine métrique. Dans cette gamme, nous pouvons faire la distinction entre deux grandes familles de technologies : celles avec contact [75] et celles sans contact.

Dans la suite, nous décrivons différentes méthodes de mesure et d'estimation des paramètres de rugosité d'un sol. Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait qu'il est important de faire la distinction entre ces deux méthodes. Les méthodes de mesure permettent d'acquérir des relevés des variations de hauteurs de surfaces rugueuses puis de calculer leurs paramètres rugueux alors que les méthodes d'estimation donnent accès, sans connaissances de ces relevés, aux paramètres statistiques qui caractérisent la rugosité (écart-type des hauteurs, longueur de corrélation, moyenne des pentes,...). N'ayant pas précisé pour chacune des méthodes s'il s'agissait de mesure ou d'estimation, nous conseillons au lecteur de rester prudent sur ce point.

Parmi les technologies sans contact, nous distinguons les dispositifs de mesure optique (télémètre par mesure de temps de vol [76], par triangulation optique ou interférométrie [74]), les dispositifs de mesure électromagnétique (mesure par effet capacitif) ou de mesure acoustique [77]. Nous pouvons également citer les mesures radar depuis des satellites [78] ou des drones. Leur principe de fonctionnement est basé sur l'inversion de modèles de diffusion électromagnétique pour déterminer les paramètres statistiques de surfaces rugueuses. Bertuzzi & al. [76] présentent un profilomètre laser constitué d'un rail métallique sur lequel se déplace un laser à l'aide d'un moteur électrique. Ce dispositif permet de relever des profils 1D de surface : la fonction des hauteurs dépend d'une seule variable d'espace  $h : x \mapsto h(x)$ . Huang & al. [75] présentent un scanner laser portable constitué d'une source laser qui peut se translater le long d'un rail, rail qui, lui-même, peut se translater dans la direction horizontale orthogonale. Le laser et le rail sont entraînés par des moteurs pas à pas, ce qui a pour avantage des déplacements précis et contrôlés et une rapidité accrue par rapport à des déplacements manuels. Ainsi, ce système peut acquérir des relevés des hauteurs sur une surface 2D (dont la fonction des hauteurs  $h$  dépend de deux variables d'espace  $(x, y)$ ). Jester & al. [79], qui comparent plusieurs méthodes de mesure de rugosités de sol, présentent également un système scanner équivalent.

Bien que ces systèmes lasers motorisés à enregistrement automatique présentent de nombreux avantages, comme leur précision et leur rapidité d'enregistrement, leurs principaux défauts sont leur temps de conception et de fabrication, mais surtout le fait qu'ils ne sont pas efficaces pour effectuer des mesures de rugosités sur un terrain avec de l'herbe. En effet, le rayon laser mesurera la distance entre son point de référence et le premier brin d'herbe qu'il rencontrera, au lieu d'un point sur la surface du sol.

La catégorie des méthodes de mesure de rugosités avec contact permet de résoudre ce problème. Dans cette catégorie, il existe la méthode de la chaînette [80], dont le principe est basé sur le fait que la distance la plus courte entre deux points est une ligne droite de longueur  $L_1$ . Avec un sol rugueux, la distance  $L_2$  entre les deux points en suivant la surface est plus importante que  $L_1$ . La différence entre  $L_1$  et  $L_2$  permet d'estimer le paramètre  $C_r = (1 - \frac{L_2}{L_1}) \times 100$  qui caractérise la rugosité. En dehors de cette méthode, le principe de la plupart des techniques de mesure avec contact est d'appliquer un ou plusieurs stylets contre la surface et d'estimer la distance entre la pointe du stylet et un point de référence. Les dispositifs utilisés par Ghazavi & al. [68] et Jester & al. [79] sont constitués d'un profilé en aluminium percé de trous selon la verticale, avec un écart fixe entre eux. Dans ces trous coulisent des tiges métalliques qui sont appliquées contre la surface, comme le montre la figure 3.2 où est présenté un équipement du Département

<sup>1</sup>Scanning Tunneling Microscopy

<sup>2</sup>Atomic Force Microscopy



de l'Agriculture des Etats-Unis. Ce type d'appareil à aiguilles permet de relever des profils de surface 1D. Pour obtenir un relevé 2D, il faut itérer le processus de mesure par translations manuelles successives de la barre métallique, perpendiculairement à l'axe de la barre, selon un pas constant. Les méthodes avec contact ont tendance à être destructives au sens où elles peuvent détériorer la surface sur laquelle les mesures sont effectuées, si bien que deux mesures effectuées aux mêmes points peuvent donner des valeurs différentes, puisque la première mesure a pu endommager la surface. La méthode à choisir et les précautions à prendre dépendent donc de la dureté de la surface. En plus de leur aspect destructif, ces méthodes manuelles ont pour principal inconvénient leur lenteur d'utilisation et une précision inférieure à celle des lasers. Leurs avantages sont leur fabrication simple, peu coûteuse et leur installation rapide. Pour une comparaison des techniques de mesures de rugosités de l'ordre du centimètre, le lecteur est renvoyé à la lecture de l'article de Jester & al. [79] pour l'applicabilité, les avantages et inconvénients de quatre systèmes (chaînette, scanner, laser, appareil à aiguilles et stéréophotographie).

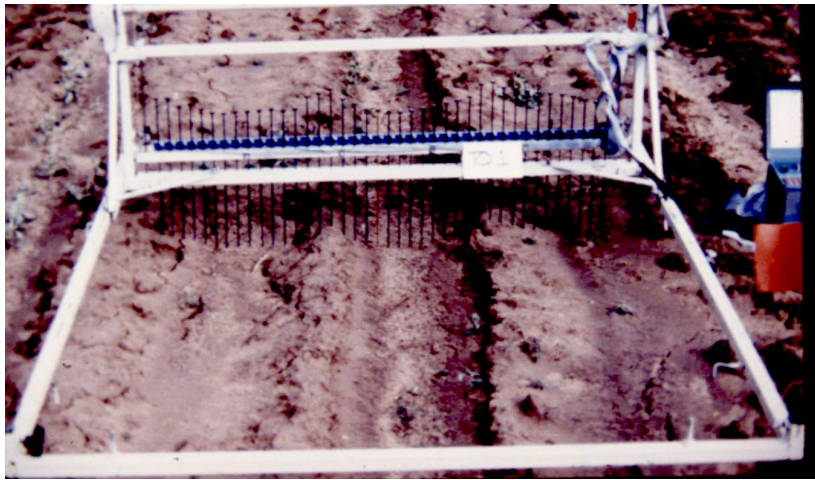


FIGURE 3.2 – Photographie d'un profilomètre à aiguille du Département de l'Agriculture des Etats-Unis

Le choix de la technologie à employer pour déterminer le profil des hauteurs d'une surface dépend de l'application visée et de l'environnement de mesure [81]. Il se fait selon plusieurs critères, parmi lesquels :

- précision souhaitée,
- sensibilité,
- environnement de mesure (ex : les mesures capacitives dans un environnement électromagnétique ne sont pas fiables),
- encombrement,
- coût de l'appareil,
- mode d'acquisition des mesures,
- durée de conception et de fabrication,
- temps d'installation sur site.

Dans ce chapitre, nous présentons le dispositif que nous avons fabriqué ainsi que le protocole de mesure mis en place pour acquérir des profils de surfaces rugueuses sur terrain réel. Nous expliquons comment nous modélisons et caractérisons les surfaces rugueuses et présentons les caractéristiques des profils mesurés. Nous présentons également la méthode spectrale permettant de générer numériquement des profils de surfaces rugueuses à partir de la caractérisation d'un profil mesuré. Enfin, nous appliquons la **MdM** afin d'étudier la diffusion électromagnétique par un des profils mesurés et par des surfaces générées de mêmes paramètres de rugosité.

## 3.2 Description du dispositif de mesure et des traitements associés

### 3.2.1 Description du dispositif de mesure

Pour la fabrication de l'appareil nécessaire à la mesure des paramètres de rugosité des terrains expérimentaux, nous devons répondre aux contraintes suivantes :

- la nécessité d'effectuer des mesures sur plusieurs dizaines de mètres,
- le pas spatial de mesure doit être de l'ordre du cm,
- une précision de  $\pm 3$  mm sur la mesure verticale,
- une facilité et rapidité d'installation sur site ( $< 1$ h),
- un temps de fabrication moindre ( $\sim$ quelques semaines),
- un coût peu élevé ( $\sim 500$  €),
- des possibilités de mesures sur des terrains divers : pré en friche, champs labourés,...

En nous inspirant du scanner optique de Bertuzzi & al. [76] et des appareils à aiguilles (voir figure 3.2), la solution finalement sélectionnée a été un rugosimètre à stylet. Le rugosimètre de 6 mètres de long que nous avons fabriqué et qui est représenté sur la photo 3.3 possède l'architecture de la figure 3.4. Il est constitué d'un stylet qui se translate verticalement le long d'un chariot en contreplaqué. Le chariot peut coulisser horizontalement sur un profilé en aluminium de manière à obtenir plusieurs points de mesures. Nous avons initialement envisagé de remplacer le stylet par un télémètre laser, mais les essais que nous avons menés avec les deux technologies ont montré que la présence d'herbe sur les sites d'expérimentation engendrait des erreurs avec le télémètre laser.



FIGURE 3.3 – Photo du rugosimètre

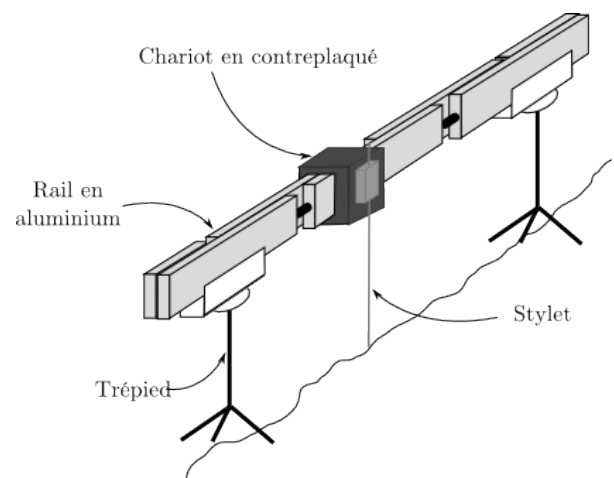


FIGURE 3.4 – Schéma du rugosimètre

Pour assurer une première horizontalité du rail et faciliter le post-traitement, l'utilisation d'un niveau à bulle permet de positionner horizontalement le rail avec une erreur de  $\pm 1^\circ$ . Les mesures sont effectuées manuellement. Le chariot est translaté sur le rail en aluminium et on note en chaque point la distance entre la pointe du stylet, qui touche le sol, et un point de référence sur le chariot. La lecture de cette longueur se fait sur une règle graduée installée sur le stylet.

### 3.2.2 Lieux de mesures

Les mesures ont été effectuées sur deux sites distincts de Thales, l'un à Corneilles-en-Vexin dans le Val d'Oise, l'autre à La Ferté-Saint-Aubin dans le Loiret. Plusieurs profils de hauteurs ont été mesurés en des

positions et des directions différentes, comme indiqué sur les figures 3.5 et 3.6. Les caractéristiques des profils mesurés sont reportés dans le tableau 3.1. Concernant la nature des terrains sur lesquels nous avons relevé les mesures, à Cormeilles-en-Vexin, le sol était non aplani et de la mousse et de l'herbe poussaient (hauteur  $\sim 5$  à  $10$  cm). Par endroits, il y avait des trous dus à des terriers de rongeurs ou à la présence d'anciens piquets. A La Ferté-Saint-Aubin, nous avons effectué un relevé sur un chemin avec des gravillons et un autre dans un pré avec de l'herbe d'une hauteur d'une quinzaine de centimètres environ.



FIGURE 3.5 – Localisation des profils des hauteurs mesurés sur le site de Cormeilles-en-Vexin

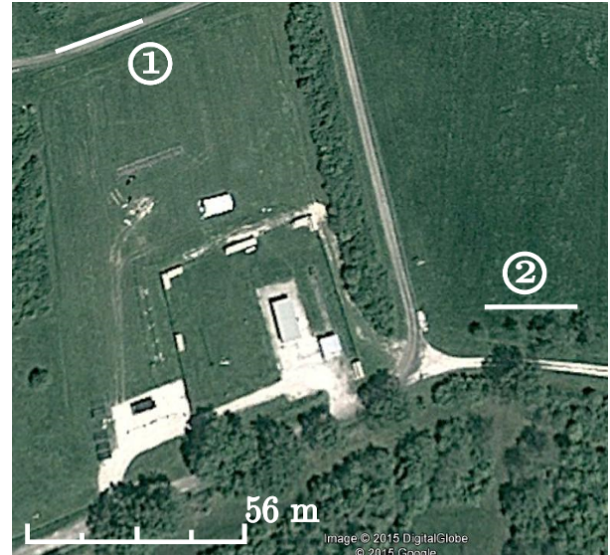


FIGURE 3.6 – Localisation des profils des hauteurs mesurés sur le site de La Ferté-Saint-Aubin

Tableau 3.1 – Caractéristiques des profils mesurés sur les sites de Cormeilles-en-Vexin et de La Ferté-Saint-Aubin

Site	Profil	Longueur	Pas	Nombre de points
Cormeilles-en-Vexin	1	28.26 m	2 cm	1413
Cormeilles-en-Vexin	2	14.64 m	4 cm	366
Cormeilles-en-Vexin	3	19.34 m	2 cm	967
La Ferté-Saint-Aubin	1	20.22 m	2 cm	1011
La Ferté-Saint-Aubin	2	20.28 m	4 cm	507

### 3.2.3 Paramétrage de la mesure

Pour obtenir la fonction des variations de hauteurs du sol à partir des mesures, nous avons utilisé les développements mathématiques présentés à partir de l'équation (3.1) selon le paramétrage de la figure 3.7. Sur cette figure, nous avons :

- |   |                            |   |
|---|----------------------------|---|
| { | $g : x_i \mapsto g(x_i)$   | : fonction des hauteurs entre le point $R_i$ du chariot et le point $P(x_i, z_i)$ |
|   | $A(x_A, z_A)$              | : point sur le rail au niveau du premier trépied                                  |
|   | $B(x_B, z_B)$              | : point sur le rail au niveau du deuxième trépied                                 |
|   | $R_i(x_{R_i}, z_{R_i})$    | : point de référence du chariot sur la droite $(AB)$                              |
|   | $h : x_i \mapsto h(x_i)$   | : fonction des hauteurs de la surface   |
|   | $P_i(x_i, h(x_i))$         | : point sur la surface au contact de la pointe du stylet                          |
|   | $M_1(x_{M_1}, h(x_{M_1}))$ | : point sur la surface à $N_c$ positions de la marque finale                      |
|   | $M_2(x_{M_2}, h(x_{M_2}))$ | : dernier point de surface prélevé pour la position du rail en cours              |

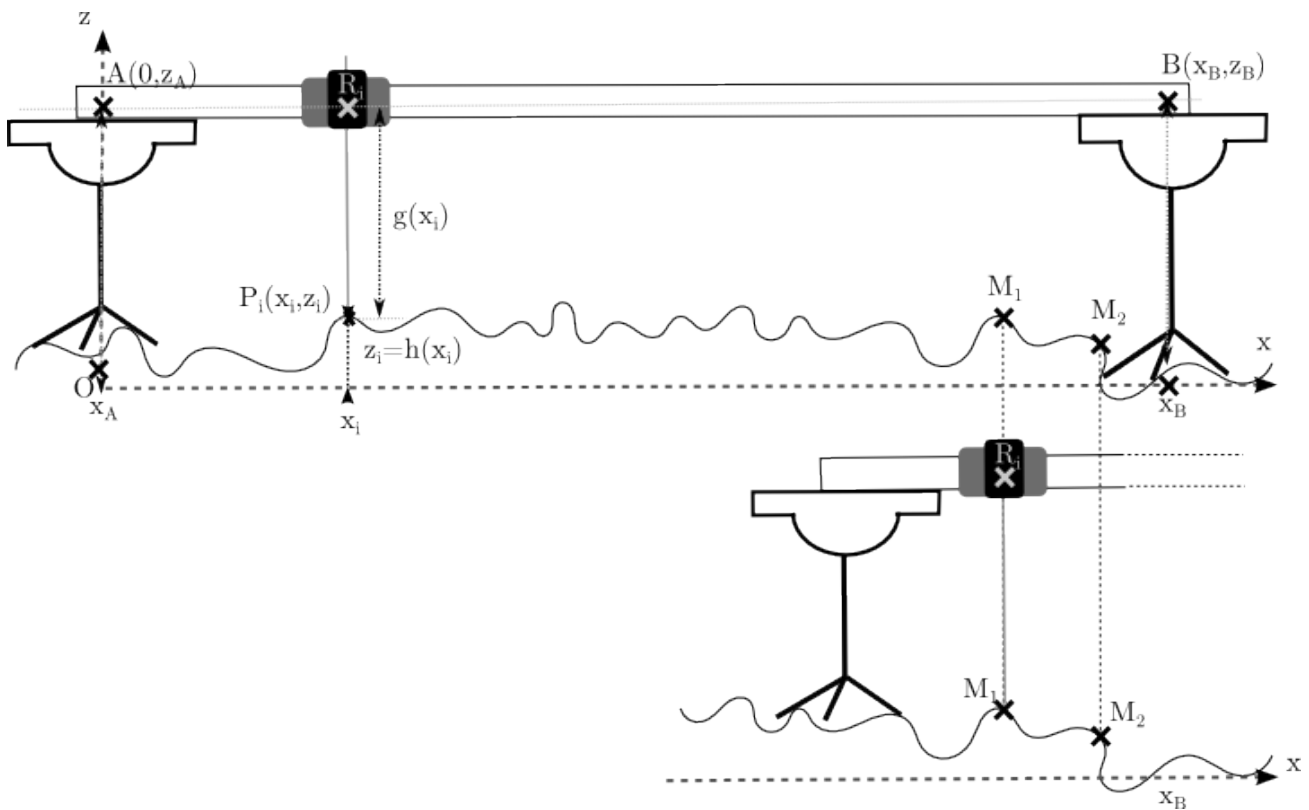


FIGURE 3.7 – Paramétrage des mesures au rugosimètre et recalage avec les points  $M_1$  et  $M_2$

Au point  $P_i$  de coordonnées  $(x_i, h(x_i))$ , le rugosimètre fournit la hauteur  $g(x_i)$  entre le point  $R_i$  de référence et le point  $P_i$  de la surface au contact du stylet. La donnée que nous voulons obtenir est  $h(x_i)$ . La pente du rail (supposée constante dans un premier temps pour un rail indéformable) est  $a = \frac{z_B - z_A}{x_B - x_A}$ . Sachant que l'inclinaison du rail est de  $\pm 1^\circ$ , nous faisons l'hypothèse que la hauteur  $z_{R_i}$  est égale à la mesure à la verticale du point d'abscisse  $x_i$ . La position du point  $R_i$ , point de référence sur le chariot, est déterminée en fonction de l'abscisse  $x_i$  par la relation :

$$z_{R_i} = ax_i + z_A \quad (3.1)$$

où  $y = ax + z_A$  est la droite qui passe par les points  $A$  et  $B$  et sur laquelle se trouve l'ensemble des points



$R_i$  relatifs aux positions successives du chariot. Alors, la fonction des hauteurs  $h$  peut être déterminée par :

$$\begin{aligned} h(x_i) &= z_{R_i} - g(x_i) \\ &= \left( \frac{z_B - z_A}{x_B - x_A} \right) x_i + z_A - g(x_i) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Lors des campagnes de mesures,  $g(x_i)$  se lit sur une règle graduée fixée sur le stylet. Cette mesure est enregistrée et permet de déterminer, d'après l'équation (3.2), la fonction des hauteurs  $h(x_i)$  pour tous les points  $P_i$  de la surface.

### 3.2.4 Correction des mesures

Le rail en aluminium subit une déformation verticale due à sa propre masse et à la masse du chariot. Il est nécessaire de quantifier cette déformation afin de corriger les mesures effectuées. La déformation a été mesurée avec le protocole suivant :

1. le rail est posé sur deux supports de hauteurs connues et égales, eux-mêmes installés sur un sol parfaitement plat ;
2. 30 points de mesure sont effectués en déplaçant le chariot et en appliquant le stylet contre le sol ;
3. le post-traitement des données permet alors de déterminer la déformation.

D'après le protocole de mesure et en reprenant le paramétrage de la figure 3.7, les hauteurs  $z_A$  et  $z_B$  des points  $A$  et  $B$  sont connues et égales :

$$z_A = z_B \equiv Z \quad (3.3)$$

La déformation verticale  $z_D(x_i)$  du rugosimètre est déterminée d'après l'équation :

$$z_D(x_i) = Z - g(x_i); \quad (3.4)$$

où  $g(x_i)$  est la distance entre la pointe du stylet au contact du sol plat et le point  $R_i$  de référence sur le chariot, comme le montre la figure 3.8. La déformation relevée peut être modélisée à l'aide d'un polynôme. Un polynôme de degré 2 offre un coefficient de corrélation  $r$  suffisant ( $r = 0.981$  pour un polynôme de degré 2 et  $r = 0.986$  pour un polynôme de degré 4). Le modèle de déformation verticale adopté est :

$$\forall x_i \in [x_A, x_B], d_p(x_i) = -0.45x_i^2 + 164x_i + 547 \quad (3.5)$$

En prenant en compte la déformation du rail, la fonction des hauteurs de la surface (3.2) devient :

$$h(x_i) = \left( \frac{z_B - z_A}{x_B - x_A} \right) x_i + z_A + d_P(x_i) - g(x_i) \quad (3.6)$$

### 3.2.5 Protocole de mesure

Les paramètres de rugosité d'une surface sont intrinsèques à la surface. Cependant, Bushan [70] explique que les méthodes d'estimation ou de mesure de ces paramètres sont fortement dépendantes du pas d'échantillonnage et de l'étendue de la mesure. Plus la surface sera mesurée sur une grande étendue et avec un pas de plus en plus fin, plus l'évaluation des paramètres de rugosités convergera vers les valeurs réelles. Les exigences de mesures pour obtenir des paramètres de rugosités représentatifs de la réalité peuvent requérir des étendues de mesure supérieures à la longueur du rugosimètre. Nous avons donc mis en œuvre un protocole de mesure où le rugosimètre est translaté et où ses différentes positions sont marquées afin d'atteindre des étendues convenables. Voici la démarche mise en œuvre :

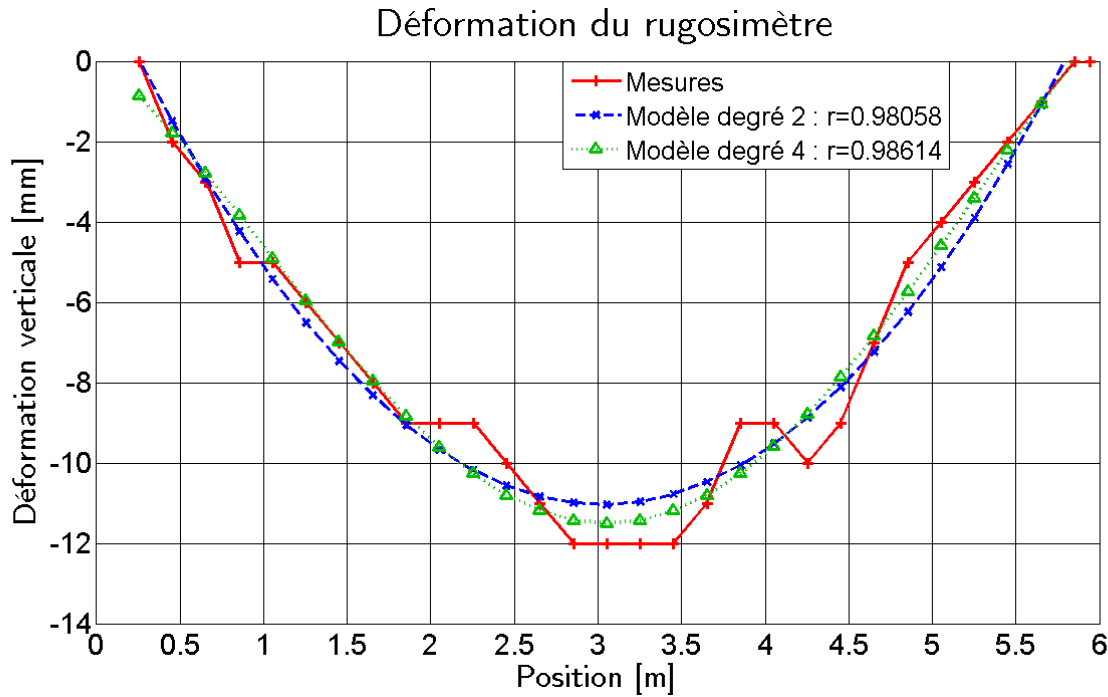


FIGURE 3.8 – Mesure et modélisation de la déformation du rail du rugosimètre

1. une ficelle fixée entre deux poteaux de bois matérialise la ligne droite suivant laquelle les mesures vont être effectuées ;
2. le rail est posé sur 2 trépieds en suivant la ficelle. Son inclinaison est contrôlée avec un niveau à bulle, de manière à ce qu'elle soit comprise entre  $\pm 1^\circ$  ;
3. en déplaçant le chariot avec un pas constant  $\Delta_x$  et en manipulant le stylet, les mesures sont relevées sur la longueur du rail ;
4. le  $N_c$ ème point ( $M_1$ ) avant la marque finale ainsi que le dernier point ( $M_2$ ) sont matérialisés en plantant une tige de métal en leur position. Le rugosimètre est translaté le long de la corde et disposé en suivant les consignes de l'étape 2, de manière à ce que la première position de mesure corresponde à  $P_1$  et le  $N_c$ ème point à  $P_2$  ;
5. on revient à l'étape 3, et ainsi de suite jusqu'à obtenir l'étendue de mesure voulue.

En suivant le protocole ci-dessus, et en adoptant les notations suivantes :

$$\begin{cases}
 J & : \text{ nombre de translations du rail effectuées pour atteindre l'étendue souhaitée} \\
 n \in \{1; J\} & : \text{ indice de position du rail entre les positions 1 et } J \\
 N_n & : \text{ nombre de points mesurés pour un indice } n \text{ donné} \\
 x_{i,n} & : \text{ abscisse du point } P_i \text{ à la } n^{\text{ème}} \text{ translation du rugosimètre} \\
 h_{i,n} = h(x_{i,n}) & : \text{ hauteur du profil de surface correspondant à l'abscisse } x_{i,n}
 \end{cases}$$

Le niveau à bulle permet de régler l'inclinaison avec une précision de  $\pm 1^\circ$ . Mais cela n'est pas suffisant pour avoir un appareil parfaitement horizontal. Pour pouvoir lier les points de la position  $n$  du rail,  $n \in \{1; J - 1\}$  et ceux de la position  $n + 1$ , nous utilisons le fait que les relevés ont  $N_c$  ( $N_c = 25$  pour nos mesures) points en commun (entre les points  $M_{1,n}$  et  $M_{2,n}$ ). En reprenant l'équation (3.2), nous avons pour chaque profil la relation suivante entre la hauteur de surface et la longueur mesurée sur le stylet :

$$\begin{aligned}
 \forall n \in \{1; J\}, \forall i \in \{1; N_j\}, h_n(x_n) &= a_n x_{i,n} + b_n - g_n(x_{i,n}) \\
 &= \left( \frac{h_{B,n} - h_{A,n}}{x_{B,n} - x_{A,n}} \right) x_{i,n} + z_{A,n} - g_n(x_{i,n})
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Cette équation exprime la coordonnée selon  $\hat{z}$  des points communs de la position  $n$  du rail avec ceux de la position  $n + 1$ . Les paramètres associés sont :

$$\begin{cases} a_n & : \text{coefficient directeur de la droite } (A_n B_n) \text{ pour la position } n \text{ du rail} \\ b_n & : \text{ordonnée à l'origine de la droite } (A_n B_n) \text{ pour la position } n \text{ du rail} \\ g_n & : \text{fonction des hauteurs prélevées sur le stylet pour le rail en position } n \\ h_n & : \text{fonction des hauteurs de la surface pour la position } n \text{ du rail} \end{cases}$$

Nous considérons que les points en commun des positions de rail  $n$  et  $n + 1$  ont les mêmes coordonnées :

$$\begin{aligned} \forall n \in \{1; J - 1\}, \forall k \in \{1; N_c\}, h_n(x_{N_n - k, n}) &= h_{n+1}(x_{k, n+1}) \\ \iff a_n x_{i, n} + b_n - g_n(x_{i, n}) &= a_{n+1} x_{i, n+1} + b_{n+1} - g_{n+1}(x_{i, n+1}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Sur le terrain, l'erreur de mesure n'est pas nulle et l'égalité de l'équation (3.8) n'est pas strictement vérifiée. De plus, il est difficile de déterminer  $a_n$  et  $b_n$  pour chaque position du rail, en raison de l'absence d'un repère de référence  $(O, \hat{x}, \hat{z})$ . Etant donné que les mesures des hauteurs  $g(x_{n, i})$  pour une position  $n \in \{1; J\}$  du rugosimètre dépendent de la position et de l'inclinaison du rail en aluminium, il est nécessaire d'effectuer une opération de recalage en post-traitement pour joindre les mesures obtenues sur deux positions successives du rugosimètre et ainsi obtenir le profil complet. Le recalage des données d'une position de rugosimètre à une autre n'est donc pas immédiat. En notant  $e_{k, i}$  l'erreur de mesure sur les points communs, nous avons :

$$\forall n \in \{1; J - 1\}, \forall k \in \{1; N_c\}, e_{n, k} = h_n(x_{N_n - k, n}) - h_{n+1}(x_{k, n+1}) \quad (3.9)$$

Le recalage est optimal si l'erreur est minimale sur les  $N_c$  points en commun. Le recalage se fait en comblant le défaut d'horizontalité du rail en tradant les points du profil  $n + 1$  suivant la droite  $y_r = a_{r, n} x_{n+1, k} + b_{r, n}$  qui permet de minimiser l'erreur  $e_{n, k}$ . Pour minimiser cette erreur, une méthode des moindres carrés est appliquée pour déterminer les couples  $(a_{r, n}, b_{r, n})$ . Par exemple, pour une mesure avec deux positions de rail, le profil final est construit comme suit :

$$\begin{cases} \forall i \leq N_1, & x_i = i\Delta_x \\ \forall N_1 < i \leq N_1 + N_2 - N_c, & x_i = (N_1 - N_c)\Delta_x + i\Delta_x \\ \forall i \in \{1; N_2\}, & h(x_i) = h_2(x_i) \\ \forall i \in \{N_{c, i} + 1; N_2\}, & h(x_i) = \frac{h_2(x_i) + h_1(x_i)}{2} \\ \forall i \in \{1; N_1\}, & h(x_i) = h_1(x_i) - (a_{r, 1} x_i + b_{r, 1}) \end{cases}$$

Ce processus est itéré localement  $J - 1$  fois, en commençant à la position  $J$  du rail. Ces corrections locales successives sont insuffisantes car le profil obtenu présente un biais par rapport à l'horizontale. Une régression linéaire est alors appliquée sur le profil complet. Ainsi, on soustrait à  $h(x_i)$  sa droite de régression :

$$h_s(x_i) = h(x_i) - (a_r x_i - b_r) \quad (3.10)$$

De plus, afin d'avoir une moyenne des hauteurs nulle, l'opération suivante est effectuée :

$$h_f(x_n) = h_s(x_n) - \langle h_s(x_n) \rangle \quad (3.11)$$

où  $\langle \rangle$  est l'opérateur moyenne. Finalement, le profil complet avec  $J$  positions de rail a les caractéristiques suivantes :

$$\begin{cases} \text{Nombre de points} & : N = \sum_{i=1}^J (N_i - N_c) \\ \text{Etendue} & : L = N\Delta_x \\ \text{Abscisses} & : x_n = \{0; \Delta_x; 2\Delta_x; \dots; (N - 1)\Delta_x\} \\ \text{Hauteurs} & : h_n = h(x_n) \\ \text{Moyenne} & : \langle h_n \rangle = 0 \end{cases}$$

La figure 3.9 permet d'illustrer les différentes étapes pour obtenir le profil final des hauteurs à partir des données mesurées.

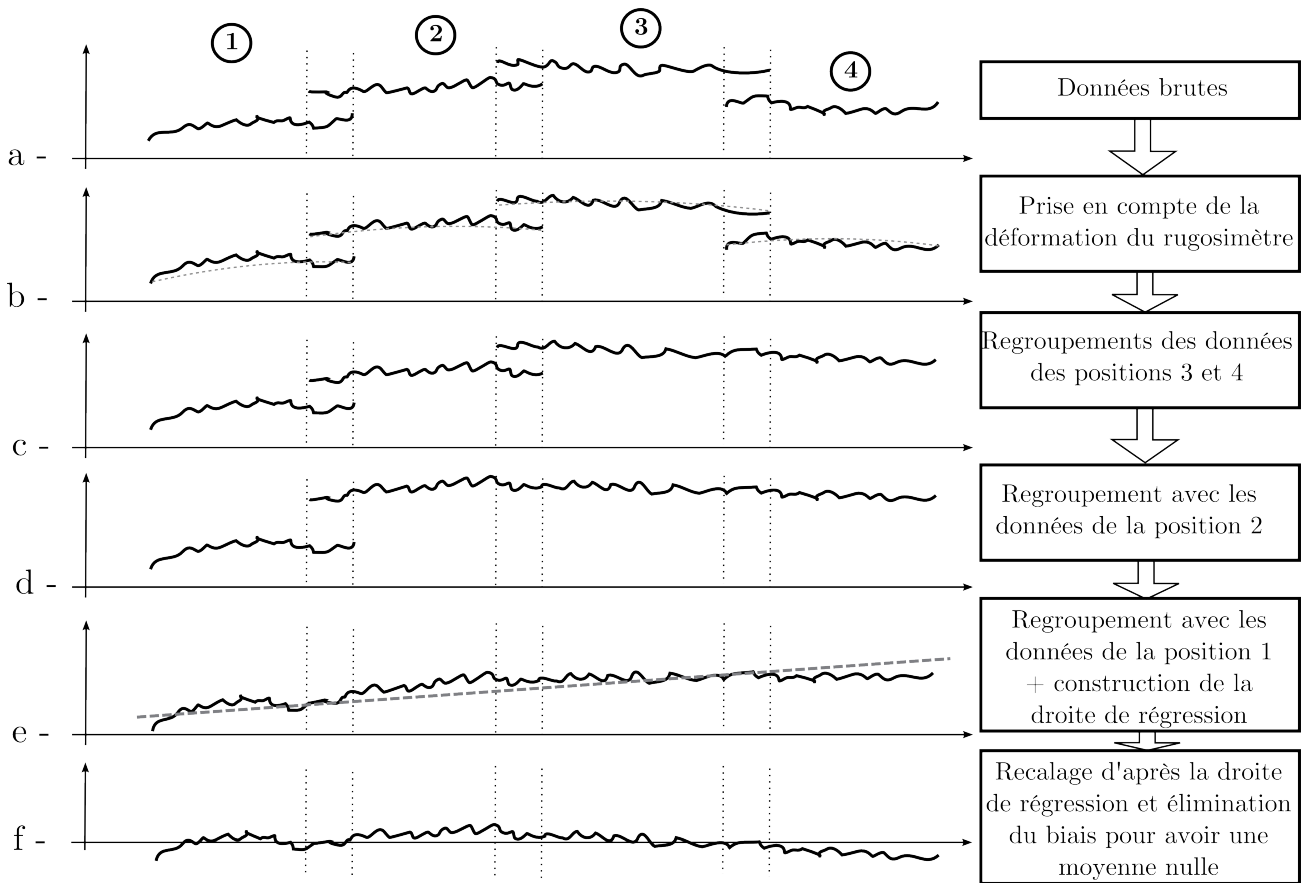


FIGURE 3.9 – Traitements et corrections apportés aux données mesurées pour obtenir le profil final des hauteurs  $h(x_n)$

### 3.3 Caractérisation de profils mesurés

Dans cette section, nous abordons la caractérisation de profils de surfaces rugueuses en prenant pour exemple le profil le plus long mesuré à Cormeilles-en-Vexin.

#### 3.3.1 Modélisation bi-échelle de la surface

Une surface rugueuse continue peut être définie mathématiquement par une fonction caractérisant sa variation des hauteurs en fonction de sa position :

$$h : x \mapsto h(x) \tag{3.12}$$

où

$$\begin{cases} x & : \text{position du point sur l'axe horizontal} \\ h : x \rightarrow h(x) & : \text{fonction des hauteurs} \end{cases}$$

Dans le cas de mesures de rugosités sur terrain réel, un profil de surface rugueuse peut contenir des rugosités de différentes échelles : des oscillations dites basses fréquences et des rugosités locales plutôt hautes fréquences. Pour illustrer ces différentes composantes de rugosités, on peut comparer la composante basse fréquence aux sillons d'un champ labouré et les rugosités hautes fréquences aux cailloux et morceaux de terre à la surface du sol. Le profil des hauteurs peut alors s'écrire comme la somme de deux composantes :

$$h = h_d + \zeta \tag{3.13}$$

où  $\zeta$  est la composante aléatoire et  $h_d$  est la composante pseudo-déterministe. En supposant  $h$  de moyenne nulle, ces composantes sont aussi calculées de manière à ce qu'elles aient une moyenne nulle :



$$\begin{cases} \langle \zeta \rangle = 0 \\ \langle h_d \rangle = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

Pour notre profil, une décomposition en deux composantes semble être suffisante. Nous pouvons imaginer une décomposition en un nombre supérieur de composantes qui serait égal au nombre d'échelles de rugosités présentes sur la surface. La figure 3.10 illustre l'approche des surfaces multi-échelles. Pour une surface rugueuse donnée, lorsque que l'on grossit une portion de la surface à la loupe, nous voyons que cette portion possède des rugosités de plus petites échelles. Si l'on regarde avec un instrument d'observation encore plus fin une portion de ces rugosités, nous pouvons nous apercevoir que des rugosités existent encore à des échelles plus petites. Pour notre application, l'instrument d'observation est le radar. Il est sensible à des rugosités de l'ordre de grandeur des longueurs d'onde des ondes qu'il émet. La gamme de rugosités qu'il peut mesurer dépend donc de la gamme de fréquences à laquelle il fonctionne.

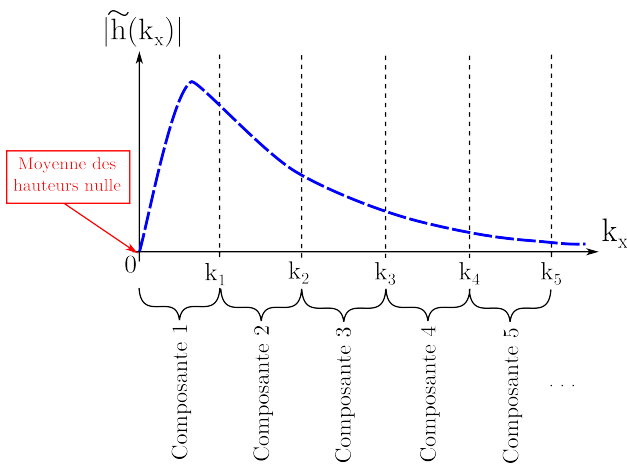


FIGURE 3.10 – Représentation spectrale d'une surface rugueuse multi-échelle

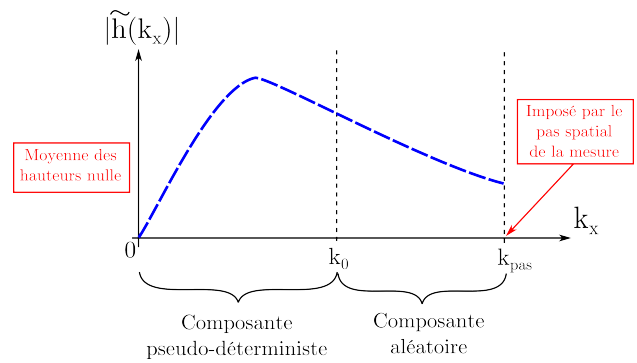


FIGURE 3.11 – Représentation spectrale d'une surface rugueuse bi-échelle, issue d'une mesure

Mathématiquement, nous pouvons considérer qu'une composante de surface d'indice  $i$  est représentée sur une bande du spectre de la transformée de Fourier des hauteurs de la surface comprise entre les nombres d'onde spatiaux  $k_i$  et  $k_i + 1$ . Pour les profils mesurés, nous nous sommes contentés d'une modélisation à l'aide de deux composantes, comme sur la figure 3.11. L'une des raisons est que la bande de la transformée de Fourier est limitée vers les pulsations élevées par le pas de mesure. En effet, le pas de mesure s'exprime par  $k_{pas} = \frac{2\pi}{\Delta_x}$  et agit comme la fréquence de coupure d'un filtre passe-bas. Par ailleurs, à partir d'une mesure, la taille de la surface mesurée,  $L$ , conditionne le nombre d'onde minimal :  $k_{min} = \frac{2\pi}{L}$ .

### 3.3.2 Caractérisation de la composante pseudo-déterministe

Pour modéliser la composante pseudo-déterministe  $h_d$ , on effectue une régression polynomiale sur le profil complet  $h$ . Le degré du polynôme est fixé lorsque la régression a un coefficient de corrélation  $r > cste$ , avec  $0 < cste < 1$ . Tant que ce coefficient n'est pas atteint, le degré du polynôme est incrémenté. Ainsi, la composante déterministe peut s'écrire :

$$h_d(x_i) = \sum_{k=0}^M p_k x_i^k \quad (3.15)$$

où les  $\{p_k, p_{k-1}, \dots, p_1, p_0\}$  sont les coefficients du polynôme de la régression de degré  $M$ . La composante aléatoire  $\zeta$  est déterminée par soustraction de la composante déterministe à partir du profil complet :

$$\begin{aligned} \zeta(x_i) &= h(x_i) - h_d(x_i) \\ &= h(x_i) - \sum_{k=0}^M p_k x_i^k \end{aligned} \tag{3.16}$$

Les mesures de profils de sols rugueux effectuées à Cormeilles-en-Vexin ont permis de relever un profil de 28.26 m avec un pas de mesure de 2 cm, soit 1414 points relevés. A partir de ces relevés, nous avons tracé sur la figure 3.12 le profil complet et ses deux composantes : déterministe et aléatoire. La composante pseudo-déterministe a été modélisée par un polynôme de degré 5, avec lequel nous obtenons une corrélation  $r_{det} = 0.8236$  :

$$\begin{aligned} h_{det}(x_n) &= -3.36 \times 10^{-7} x_n^5 + 2.45 \times 10^{-5} x_n^4 - 6.27 \times 10^{-4} x_n^3 \dots \\ &\quad + 6.95 \times 10^{-3} x_n^2 - 3.45 \times 10^{-2} x_n + 6.25 \times 10^{-2} \end{aligned} \tag{3.17}$$

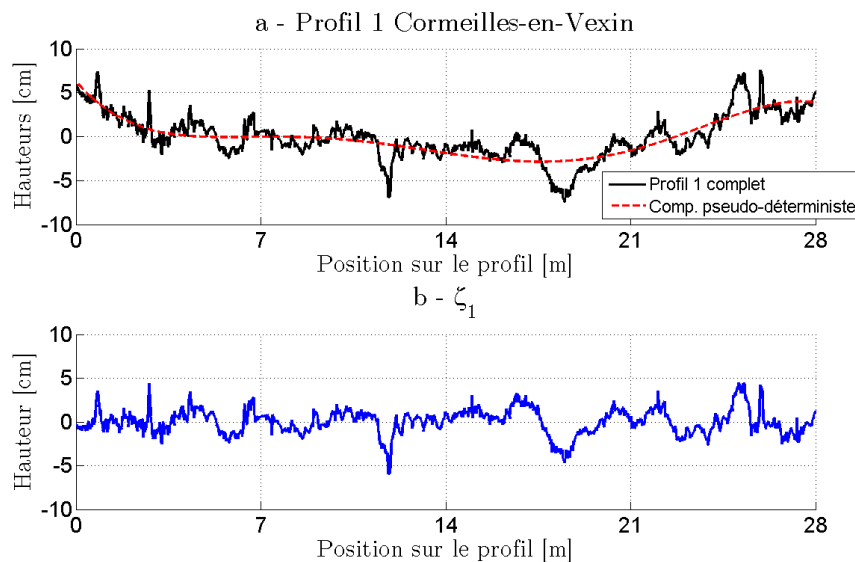


FIGURE 3.12 – Représentation (a) du profil des hauteurs total et de la composante déterministe ainsi que de (b) la composante aléatoire

Sur le profil complet, les variations des hauteurs sont comprises dans l’intervalle  $[7.5, -7.4]$  cm, avec un écart-type  $\sigma_h = 2.6$  cm. En soustrayant la composante déterministe et en ne gardant que la composante aléatoire, les variations des hauteurs sont comprises entre  $[4.5, -6]$  cm et l’écart-type devient  $\sigma_h = 1.5$  cm. La figure 3.13 présente la représentation fréquentielle des variations des hauteurs pour le profil complet et pour ses deux composantes.

Nous visualisons bien que la composante déterministe présente un spectre de type basse fréquence et que la composante aléatoire a, quant à elle, un spectre de plus haute fréquence. Les fréquences les plus hautes de la composante déterministe sont dues à l’effet de fenêtrage. Les plus basses fréquences de la composante déterministe (hors composante continue) correspondent à des longueurs de périodes 40 à 45 mètres de long. Cela correspond à des longueurs supérieures à l’étendue du profil mesuré. Cette forte composante de la transformée de Fourier est liée à l’aspect légèrement convexe du profil.

Comme les rugosités basses fréquences du profil sont contenues dans la composante pseudo-déterministe et les rugosités hautes fréquences dans la composante aléatoire, nous pouvons imaginer une approche spectrale comme perspective envisageable de modélisation de ces composantes. Nous pouvons considérer que la

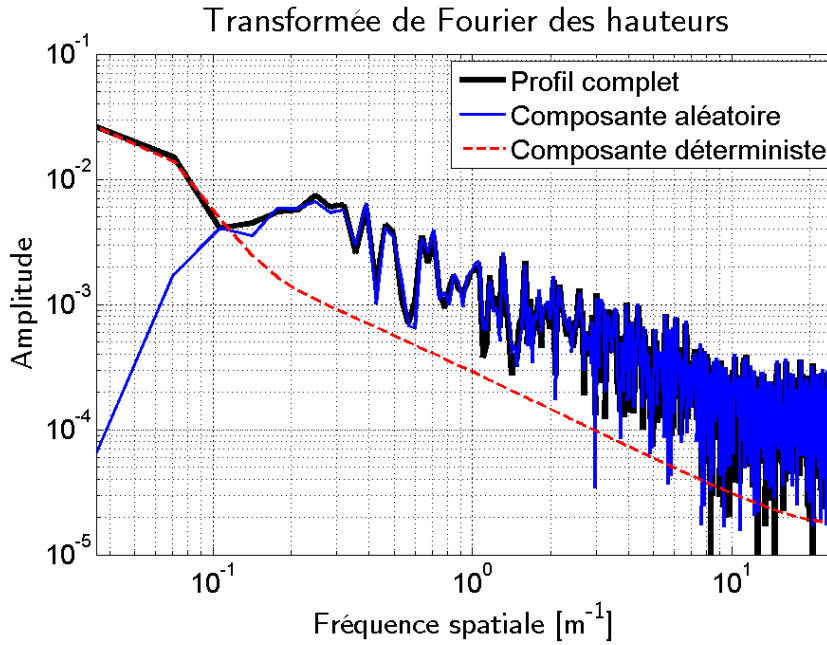


FIGURE 3.13 – Transformée de Fourier des hauteurs du profil complet, de la composante pseudo-déterministe et de la composante aléatoire

fonction des hauteurs peut s'écrire comme une somme de fonctions sinusoïdales de différentes fréquences. Nous effectuons la transformée de Fourier du profil complet :

$$\tilde{h}(k_x) = \mathcal{F}[h(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) e^{-jk_x x} dx \quad (3.18)$$

où  $k_x$  est le nombre d'onde de la surface. Nous avons constaté que la surface expérimentale présentait de variations des hauteurs de différentes échelles. Nous voulions que les variations lentes (nombres d'onde faibles) soient incluses dans la composante pseudo-déterministe et que les variations rapides (nombres d'onde élevés) appartiennent à la composante aléatoire. Mathématiquement, cela signifie que la composante pseudo-déterministe est composée des éléments de la transformée de Fourier des hauteurs du profil complet en dessous d'une fréquence seuil  $k_0$ , choisie arbitrairement :

$$h_d(x) = \int_{-k_0}^{k_0} \tilde{h}(k_x) e^{jk_x x} dk_x \quad (3.19)$$

Le nombre d'onde  $k_0$  peut être choisi tel que  $|\tilde{h}(k_0)|$  corresponde à un minimum local de la fonction  $\tilde{h}$  et que  $k_0$  soit le plus petit point de minimum local de  $\tilde{h}$  différent de 0. Ce dernier point est important, car nous avons imposé une moyenne nulle comme propriété aux profils mesurés. La composante continue de la transformée de Fourier des hauteurs du profil complet correspond donc à un minimum local. Ainsi construite, la composante pseudo-déterministe est également de moyenne nulle.

Cette modélisation de la composante pseudo-déterministe présente plusieurs intérêts : elle permet une modélisation mathématique simple et donne un sens mathématique à la composante pseudo-déterministe. Ainsi, la composante pseudo-déterministe peut être considérée comme la somme de surfaces sinusoïdales d'amplitudes variées et de nombres d'onde compris dans l'intervalle  $[0, k_0]$ .

La composante aléatoire se calcule ensuite par soustraction de la composante pseudo-déterministe du

profil complet :

$$\begin{aligned}\zeta(x) &= h(x) - h_d(x) \\ &= \int_{-\infty}^{-k_0} \tilde{h}(k_x) e^{jk_x x} dk_x + \int_{k_0}^{+\infty} \tilde{h}(k_x) e^{jk_x x} dk_x\end{aligned}\quad (3.20)$$

Elle comporte les composantes hautes fréquences de la transformée de Fourier des hauteurs du profil complet. Dans la section suivante, nous caractérisons la composante aléatoire et identifions ses principaux paramètres. L'approche spectrale de la modélisation des composantes pseudo-déterministe et aléatoire des profils que nous venons de présenter n'a pas été appliquée numériquement durant la thèse et fait partie des perspectives de travail. La composante aléatoire caractérisée dans la section suivante a été calculée à partir de la modélisation polynomiale (3.17) de la composante pseudo-déterministe.

### 3.3.3 Caractérisation de la composante aléatoire

#### Modélisation de la surface rugueuse par un processus stochastique

Une surface rugueuse aléatoire ne peut, comme son nom l'indique, être connue parfaitement. Cependant, il est possible d'en déterminer certains paramètres statistiques tels que les moments statistiques qui sont, eux, déterministes. Nous avons vu en début de ce chapitre qu'il existe de nombreuses surfaces rugueuses. Il en est de même pour les surfaces rugueuses aléatoires, qui peuvent être aléatoires dans le temps, spatialement, ou les deux. Même si le phénomène d'érosion et l'évolution de la flore peuvent faire évoluer dans le temps une surface de sol, nous considérons qu'à l'échelle et sur le laps de temps de nos mesures, l'évolution temporelle de la surface est négligeable. Le profil de surface rugueuse peut alors être modélisé par un processus aléatoire qui dépend du paramètre spatial  $x$ .

Nous retrouvons très souvent l'hypothèse supplémentaire de stationnarité sur ces surfaces, ce qui veut dire que leurs paramètres statistiques (moments statistiques) ne varient pas au cours du temps ni spatialement (i.e., par translation). C'est d'autant plus vrai pour une surface invariante (pas strictement dans notre cas, mais on fait l'hypothèse qu'elle l'est) dans le temps comme dans notre cas. Pour une surface dynamique comme une surface de mer, lorsque la météo varie peu entre deux instants donnés est relativement homogène, bien que la surface varie au cours du temps, ses paramètres statistiques restent sensiblement les mêmes, à la fois spatialement et temporellement.

Les propriétés citées précédemment ainsi que certaines hypothèses supplémentaires<sup>3</sup> rendent possible la description du processus aléatoire grâce à la densité de probabilité des hauteurs et la fonction d'autocorrélation spatiale des hauteurs de la surface.

#### Densité de probabilité des hauteurs de la surface

La densité de probabilité (DDP) des hauteurs de la surface,  $p_h$ , représente la distribution des hauteurs de la surface. La probabilité qu'un point de la surface soit compris entre les hauteurs  $\zeta$  et  $\zeta + \delta\zeta$  peut s'écrire  $p_h(\zeta)d\zeta$ . La DDP considérée dans la suite est de nature gaussienne. Il s'agit de la DDP la plus fréquemment rencontrée dans la communauté d'étude de la diffusion par des surfaces rugueuses. Elle a pour expression :

$$p_h(\zeta) = \frac{1}{\sigma_h \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\zeta - \langle \zeta \rangle}{\sigma_h} \right)^2} \quad (3.21)$$

et pour paramètres :

- la valeur moyenne  $\langle \zeta \rangle$ ,
- l'écart-type des hauteurs de la surface  $\sigma_h$ .

<sup>3</sup>l'hypothèse d'ergodicité notamment [63]

L'écart-type des hauteurs  $\sigma_h$ , qui représente l'écart (quadratique) moyen entre la surface et son plan moyen, fournit une information quantitative des variations verticales de la surface. La DDP vérifie les propriétés suivantes :

- la somme des probabilités des hauteurs est égale à 1 :  $\int_{-\infty}^{+\infty} p_h(\zeta) d\zeta = 1$
- calcul de la moyenne :  $\int_{-\infty}^{+\infty} \zeta p_h(\zeta) d\zeta = \langle \zeta \rangle$
- calcul de l'écart-type des hauteurs :  $\int_{-\infty}^{+\infty} (\zeta - \langle \zeta \rangle)^2 p_h(\zeta) d\zeta = \sigma_h^2$

et plus particulièrement pour une DDP gaussienne, 99.73% des hauteurs de la surface sont comprises entre  $-3\sigma_h$  et  $+3\sigma_h$ . Nous avons imposé, par construction des profils complets et de la composante pseudo-déterministe, que leur moyenne soit nulle. La moyenne des hauteurs de la composante aléatoire est donc également nulle :

$$\langle \zeta \rangle = 0 \tag{3.22}$$

La figure 3.14 représente l'histogramme de la distribution des hauteurs de la composante aléatoire du profil étudié. La DDP a été normalisée avec les transformations suivantes :

$$\begin{cases} u = \frac{\zeta}{\sqrt{2}\sigma_h} \\ p'_h(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \end{cases} \tag{3.23}$$

Sa valeur moyenne est  $\langle \zeta \rangle = 0$  et son écart-type des hauteurs  $\sigma_h = 1.47$  cm. La loi gaussienne, de même moyenne et de même écart-type, a été superposée à l'histogramme.

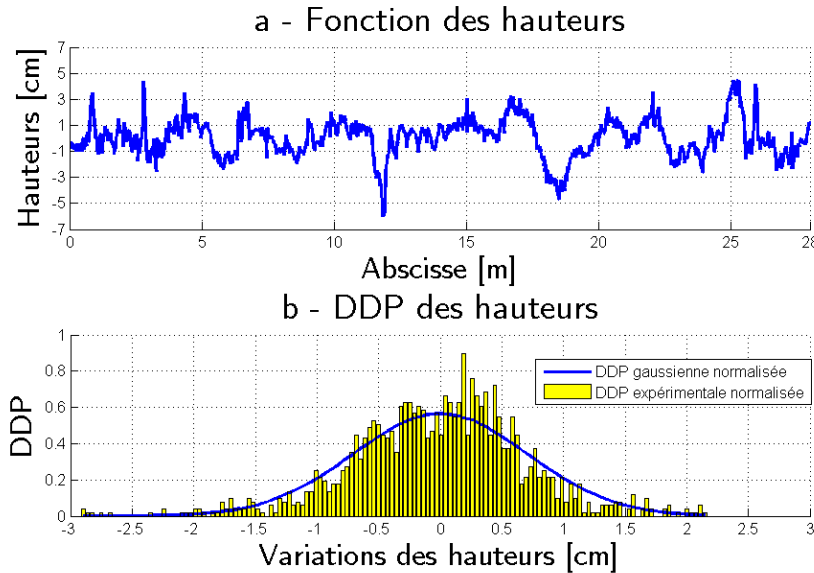


FIGURE 3.14 – Composante aléatoire (a) et densité de probabilité des hauteurs (b)

Visuellement, la DDP des hauteurs ressemble à une DDP gaussienne. Un test d'hypothèse sur la distribution a été mené dans la figure 3.15. Il s'agit du test de Kolmogorov-Smirnov. Sur le graphe 3.15 (a), la fonction de répartition de la distribution des hauteurs du profil complet a été testée, alors que dans le graphe 3.15 (b), il s'agit de la distribution des hauteurs de la composante aléatoire seule. Le premier donne une statistique de Kolmogorov-Smirnov de 7.1% et le second de 3.8%. La décomposition du profil en deux composantes (l'une déterministe et l'autre aléatoire) est donc bénéfique pour modéliser la fonction des hauteurs comme un processus aléatoire.

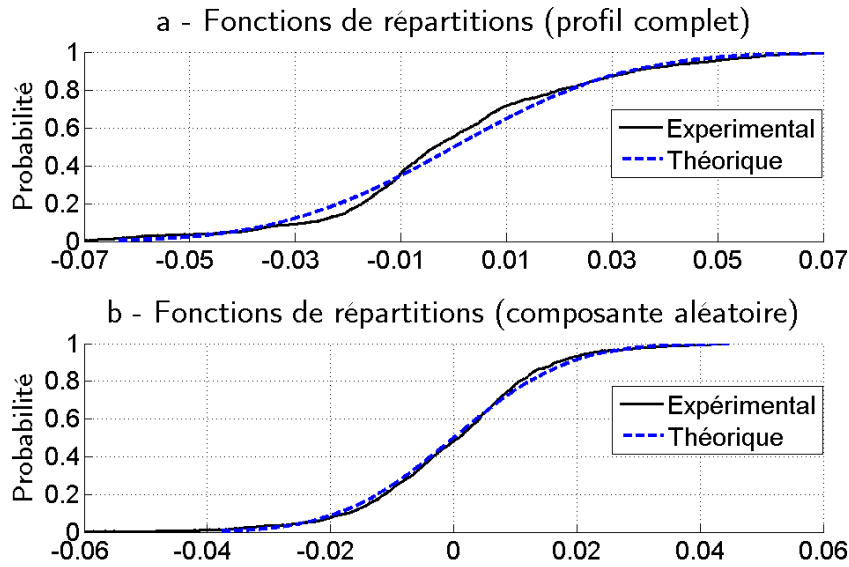


FIGURE 3.15 – Test de Kolmogorov-Smirnov pour le profil complet (a) et pour la composante aléatoire uniquement (b)

**Fonction d'autocorrélation spatiale et densité spectrale de puissance des hauteurs**

En plus de la DDP des hauteurs, pour décrire le processus stochastique qui décrit les hauteurs d'une surface rugueuse, nous utilisons la fonction d'autocorrélation (FA). Elle représente la corrélation entre deux points  $M_1$  et  $M_2$  de la surface en fonction de la distance horizontale  $d_R = |x_{M_2} - x_{M_1}|$  qui les sépare. Physiquement, elle décrit la manière dont les sommets et les creux sont distribués le long de la surface. Cette fonction présente un maximum en 0 et est caractérisée par deux informations principales :

- sa nature : gaussienne, exponentielle, lorentzienne,...
- sa longueur de corrélation  $L_c$ .

La longueur de corrélation traduit la distance, dans la direction horizontale, à partir de laquelle nous pouvons considérer que deux points ne sont plus corrélés. Cela se justifie par sa définition mathématique fournie plus loin (3.25). Quant à la FA, elle est donnée par la définition suivante d'après [70] :

$$W(\tau) = \langle \zeta(x)\zeta(x + \tau) \rangle = \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{-L/2}^{L/2} \zeta(x)\zeta(x + \tau) dx \tag{3.24}$$

où  $L$  est la longueur de la surface rugueuse aléatoire et  $\tau$  représente la distance entre les abscisses de deux points  $M_1$  et  $M_2$  :  $\tau = x_{M_2} - x_{M_1}$ . Nous remarquons que pour  $M_1$  et  $M_2$  confondus,  $W(x_{M_1}, x_{M_2}) = W(0) = \sigma_h$ , ce qui est le maximum de la FA. Nous introduisons alors la FA normalisée  $C : x \mapsto C(x)$  définie telle que  $\langle \zeta(x_1)\zeta(x_1 + x) \rangle = \sigma_h C(x)$  et  $C(0) = 1$ . La longueur de corrélation  $L_c$  est classiquement définie [82] à partir de la FA normalisée  $C$  telle que :

$$C(L_c) = \frac{1}{e} \tag{3.25}$$

La longueur de corrélation est donc définie lorsque l'amplitude de  $C(x)$  est d'environ 37% de son maximum, valeur à partir de laquelle nous pouvons considérer que deux points distants de la longueur  $x$  ne sont "plus" corrélés. A l'inverse de  $\sigma_h$  qui donne une information verticale sur les variations de hauteurs de la surface,  $L_c$  donne une information horizontale. Il est possible de trouver dans des articles du domaine une

autre fonction à la place de la FA : la densité spectrale des hauteurs de la surface, aussi appelé *spectre* des hauteurs. Elle est définie pour une surface monodimensionnelle de longueur infinie comme la transformée de Fourier de la FA :

$$S(k_x) = \mathcal{F}[W(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W(x) e^{-jk_x x} dx \quad (3.26)$$

où  $k_x$  est le nombre d'onde spatial comme défini précédemment, homogène à des rad/m. A partir du spectre des hauteurs, la FA se calcule par transformée de Fourier inverse :

$$W(x) = \mathcal{F}^{-1}[S(k_x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} S(k_x) e^{jk_x x} dk_x \quad (3.27)$$

Les équations qui suivent représentent les FA usuelles et leur spectre des hauteurs associé, obtenu à partir de  $L_c$  et de  $\sigma_h$  et classés en fonction de leur nature :

$$\begin{cases} \text{Gaussienne} & W(x) = \sigma_h^2 e^{-\frac{x^2}{L_c^2}} & S_\zeta(k_x) = \sqrt{\pi} \sigma_h^2 L_c e^{-\frac{L_c^2 k_x^2}{4}} \\ \text{Lorentzienne} & W(x) = \frac{\sigma_h^2}{1+x^2/L_c^2} & S_\zeta(k_x) = \pi \sigma_h^2 L_c e^{-L_c |k_x|} \\ \text{Exponentielle} & W(x) = \sigma_h^2 e^{-\frac{|x|}{L_c}} & S_\zeta(k_x) = \frac{2\sigma_h^2 L_c}{1+L_c^2 k_x^2} \end{cases}$$

Nous avons représenté dans la figure 3.17 (a) la FA de la composante aléatoire du profil mesuré. Sur la figure 3.17 (b), nous avons également superposé les modèles de FA gaussienne et exponentielle. Le modèle gaussien présente une dérivée nulle à l'origine et s'éloigne du comportement expérimental, alors que le modèle exponentiel, lui, correspond davantage, avec une pente non nulle à l'origine. Le modèle de FA exponentielle semble être plus adapté à première vue. Dans de nombreuses références, nous trouvons également une meilleure corrélation de la FA avec le modèle exponentiel [83], [84].

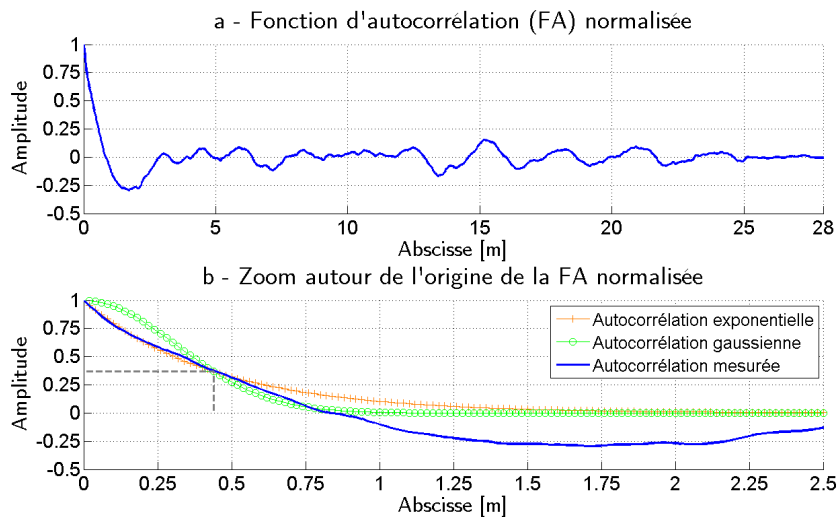


FIGURE 3.16 – Fonction d'autocorrélation du profil mesuré

Sur la FA expérimentale, nous remarquons des oscillations autour de l'axe des abscisses que les modèles gaussien et exponentiel ne reproduisent pas. Dans les travaux de Mattia & al. [85] et de Elson & al. [86], nous trouvons également ce type de décroissance avec des oscillations autour de l'axe des abscisses. Afin d'affiner le modèle exponentiel de FA, la fonction normalisée suivante est introduite pour prendre en compte les oscillations à l'aide d'une fonction cosinus :

$$C_2(\tau) = e^{-\frac{|\tau|}{L_c}} \cos\left(\frac{\pi\tau}{b}\right) \quad (3.28)$$



Le paramètre  $b$  est introduit dans ce nouveau modèle ; il va servir à caractériser la période des oscillations de la FA. Il est déterminé au premier zéro de la FA :

$$b = 2\tau_0, \text{ avec } \tau_0 \text{ tel que } C(\tau_0) = 0 \tag{3.29}$$

Une fois le paramètre  $b$  fixé, la détermination de  $L_c$  influe sur la manière dont le modèle va suivre la décroissance autour de l'origine et "épouse" la première oscillation. Le choix de  $L_c$  et de  $b$  résulte d'un compromis entre une décroissance du modèle proche de la FA normalisée expérimentale et une bonne concordance pour le premier zéro. Le choix de l'un se fait au détriment de l'autre. Pour "fitter" la première décroissance, nous changeons notre définition de  $L_c$ , que nous pouvons exprimer d'après les équations suivantes :

$$\begin{aligned} C(\tau) = e^{-\frac{|\tau|}{L_c}} \cos\left(\frac{\pi\tau}{b}\right) &\iff -\frac{\tau}{L_c} = \ln\left(\frac{C(\tau)}{\cos\left(\frac{\pi\tau}{b}\right)}\right), \forall \tau > 0 \\ &\iff L_c = \frac{-\tau}{\ln(C(\tau)) - \ln\left(\cos\left(\frac{\pi\tau}{b}\right)\right)}, \forall \tau > 0 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Il manque un point remarquable pour déterminer  $L_c$ . Afin de "fitter" la première oscillation,  $L_c$  est déterminée de façon à ce que le modèle de FA ait un minimum local qui corresponde au premier minimum de la courbe expérimentale. En ce minimum local, la dérivée  $C'$  s'annule et nous avons :

$$\begin{aligned} C'(\tau) = 0 &\iff -\frac{1}{L_c} \cos\left(\frac{\pi\tau}{b}\right) - \frac{\pi}{b} \sin\left(\frac{\pi\tau}{b}\right) = 0 \\ &\iff L_c = \frac{-b}{\pi \tan\left(\frac{\pi\tau}{b}\right)} \end{aligned} \tag{3.31}$$

Les modèles de FA ainsi obtenus avec ces deux méthodes sont donnés dans la figure 3.17. Dans le cas

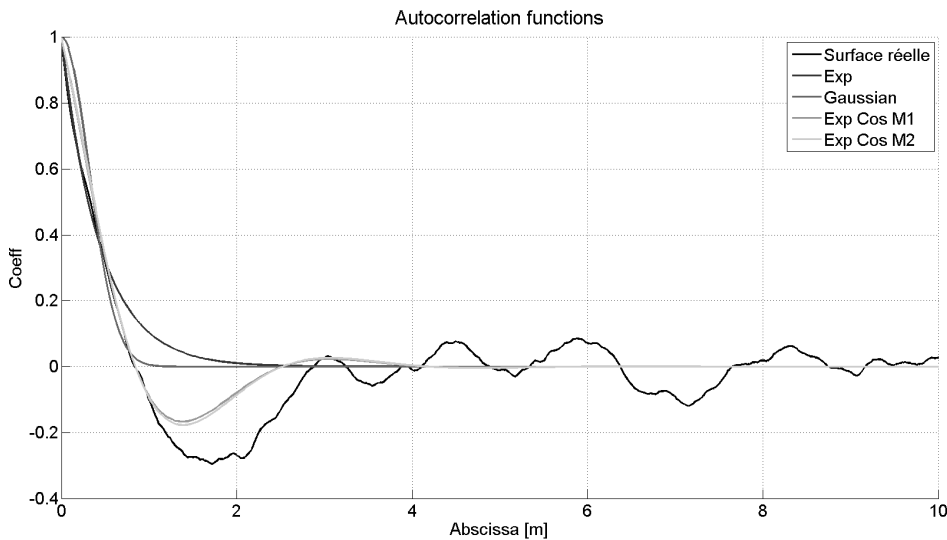


FIGURE 3.17 – Fonction d'autocorrélation du profil mesuré.

de simulations numériques, les surfaces rugueuses sont de longueur finie alors que les définitions, comme celle de la FA, nécessitent une surface infinie. Pour avoir une FA et des paramètres statistiques avec un biais faible, il est préconisé que le nombre de points soit suffisamment important (loi faible des grands nombres), que la surface rugueuse soit suffisamment longue et que le pas spatial entre deux points soit assez précis. Mattia & al. [81] font apparaître dans leur étude l'importance de la longueur du profil mesuré sur l'erreur moyenne obtenue pour l'estimation de la longueur de corrélation :

- pour une surface de longueur  $L = 30L_c$ , l'erreur moyenne normalisée obtenue est de 30%,



- pour une surface de longueur  $L = 300L_c$ , l'erreur moyenne normalisée obtenue est de 10%.

Ce qu'il faut retenir de ces travaux est que pour obtenir une bonne estimation de la longueur de corrélation et de l'écart-type des hauteurs, il vaut mieux effectuer des mesures sur de longs profils :  $L > 10L_c$  est un minimum. Nous nous rendons également compte que, pour une longueur de corrélation d'environ 40 cm, il n'est pas envisageable de faire des relevés sur 120 mètres avec notre appareil car les relevés des variations des hauteurs point par point prendraient beaucoup trop de temps. Il faudrait également avoir à disposition un terrain sur lequel nous pouvons faire une mesure linéaire de 120 mètres, sans rencontrer d'obstacles.

Nous avons voulu étudier, pour la composante aléatoire de notre profil, l'évolution de  $L_c$  et de  $\sigma_h$  en fonction de l'étendue de la surface considérée. A partir du premier point de la surface, nous avons déterminé puis reporté sur la courbe les deux paramètres en fonction de l'étendue de la surface. Puis, en ajoutant un pas en plus, nous les avons recalculés et reportés sur la courbe, et ainsi de suite jusqu'à atteindre l'étendue finale du profil. Les résultats sont affichés sur la figure 3.18. Soient  $L_{c,i}$  et  $\sigma_{h,i}$  la longueur de corrélation et l'écart-type des hauteurs associés au profil défini sur l'intervalle  $[0, x_i]$ ; nous cherchons à vérifier leur convergence :

$$\begin{aligned} \lim_{x_i \rightarrow L} L_{c,i}(x_i) &= L_c \\ \lim_{x_i \rightarrow L} \sigma_{h,i}(x_i) &= \sigma_h \end{aligned} \quad (3.32)$$

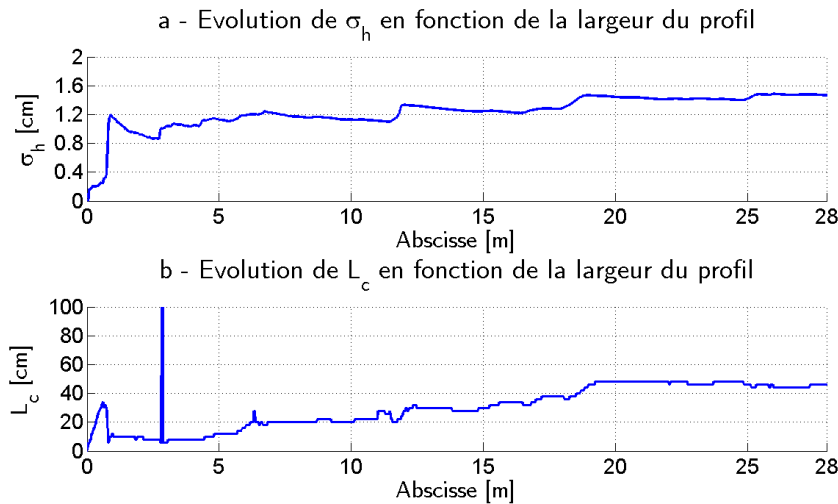


FIGURE 3.18 – Convergence de  $L_{c,i}$  et de  $\sigma_{h,i}$  en fonction de l'étendue du profil

Un point singulier des valeurs de la suite  $L_{c,i}$  peut indiquer que la longueur de corrélation ne peut pas être définie sur le profil, car celui-ci est trop court ou insuffisamment échantillonné. Nous voyons sur la figure 3.18 qu'à partir d'une étendue de 18 mètres, la longueur de corrélation et l'écart-type des hauteurs varient de moins de 10%. Si nous traçons la dérivée de ces courbes, nous nous apercevons de la diminution de leurs variations avec la distance, ce qui laisse penser que ces grandeurs convergent vers une valeur finale.

Le lecteur peut se référer à la thèse de N. Pinel [63] pour lire une présentation d'autres paramètres qui caractérisent la rugosité d'un profil. Parmi ces paramètres, nous pouvons citer le rayon de courbure, l'écart-type des pentes ou la distance moyenne entre deux pics.

### 3.3.4 Caractérisation des autres profils mesurés

Durant les campagnes de mesure, trois profils ont pu être mesurés avec le rugosimètre à Cormeilles-en-Vexin et deux profils à La-Ferté-Saint-Aubin. Ils étaient situés à différents endroits du terrain d'essai,

Tableau 3.2 – Caractéristiques statistiques des composantes aléatoires des profils mesurés sur les sites de Cormeilles-en-Vexin et de La Ferté-Saint-Aubin.

Site	Profil	$\sigma_h$	$L_c$
Cormeilles-en-Vexin	1	1.47 cm	44 cm
Cormeilles-en-Vexin	2	1.96 cm	56 cm
Cormeilles-en-Vexin	3	1.23 cm	46 cm
La Ferté-Saint-Aubin	1	1.51 cm	26 cm
La Ferté-Saint-Aubin	2	0.23 cm	6 cm

comme le montrent les figures 3.5 et 3.6. Dans le tableau 3.2, nous avons regroupé, par site de mesure, les paramètres statistiques importants de chacun des profils mesurés.

Dans les figures 3.19 et 3.20, nous avons représenté les profils mesurés, leur DDP des hauteurs et leur FA. Nous avons superposé aux DDP les lois gaussiennes de même moyenne et de même écart-type ; pour les FA, nous avons superposé les modèles exponentiel et gaussien.

Sur la figure 3.19, nous pouvons voir que, sur le profil 2 de Cormeilles-en-Vexin, le nombre de points semble insuffisant pour espérer obtenir une DDP de forme gaussienne. Le test de Kolmogorov-Smirnov a donné une valeur de 9.4%, ce qui montre qu'il est difficile de conclure sur la nature de la DDP avec le nombre de points de ce profil.

Le profil 2 de la figure 3.20 présente des caractéristiques différentes des autres profils. En effet, ce profil a été mesuré sur un chemin à moitié goudronné, avec des gravillons. Les rugosités mesurées sont principalement dues à la présence de gravillons, ce qui explique le faible écart-type des hauteurs (2.3 mm). La longueur de corrélation est également très faible (6 cm), mais le pas de 2 cm est trop important pour pouvoir l'estimer correctement. Pour chacun des profils relevés, la décroissance à l'origine est de forme exponentielle et nous retrouvons une oscillation dans les négatifs après la première décroissance.

Par ailleurs, les mesures nous ont fourni des profils de surface déterministes. En considérant que le terrain est isotrope et qu'il possède les mêmes paramètres statistiques quelle que soit la position du rugosimètre, en changeant la position du rugosimètre, les paramètres seraient les mêmes mais le profil différent. Le fait que l'on soit capable de caractériser les profils à l'aide d'une DDP gaussienne et d'une FA nous permet de générer numériquement des surfaces de mêmes paramètres statistiques que ceux mesurés, mais dont le "tirage" des hauteurs est différent. C'est l'objet de la partie suivante où est exposée la méthode numérique de génération de surfaces rugueuses.

### 3.3.5 Génération de profils de surfaces rugueuses

Nous voulons générer numériquement une surface rugueuse monodimensionnelle discrète, de longueur  $L$  et possédant  $N$  points. Le pas spatial est donc  $\Delta_x = \frac{L}{N-1}$ . Les  $N$  points sont localisés par les coordonnées  $(x_n, \zeta(x_n))$ , où les  $\zeta(x_n)$  ont une DDP des hauteurs gaussienne et une FA donnée :  $W = \sigma_h^2 C$ . Les abscisses  $x_n$  de ces points ont un pas constant :

$$x_n = -\frac{L}{2} + (n-1)\Delta_x, \quad n = 1..N \quad (3.33)$$

Pour obtenir les hauteurs  $\zeta(x_n)$ , nous utilisons la méthode spectrale décrite dans [36] et [7], basée sur la théorie du filtrage. Nous obtenons les échantillons des hauteurs de surface par l'expression :

$$\zeta(x_n) = \sigma_h \mathcal{F}^{-1} \left[ \mathcal{F}(b(x_n)) \sqrt{\mathcal{F}(C(n))} \right] \quad (3.34)$$

où

$$\begin{cases} b(x_n) & : \text{bruit blanc gaussien centré de variance unité} \\ C_\zeta(n) & : n^{\text{ème}} \text{ élément de la fonction d'autocorrélation normalisée} \end{cases}$$

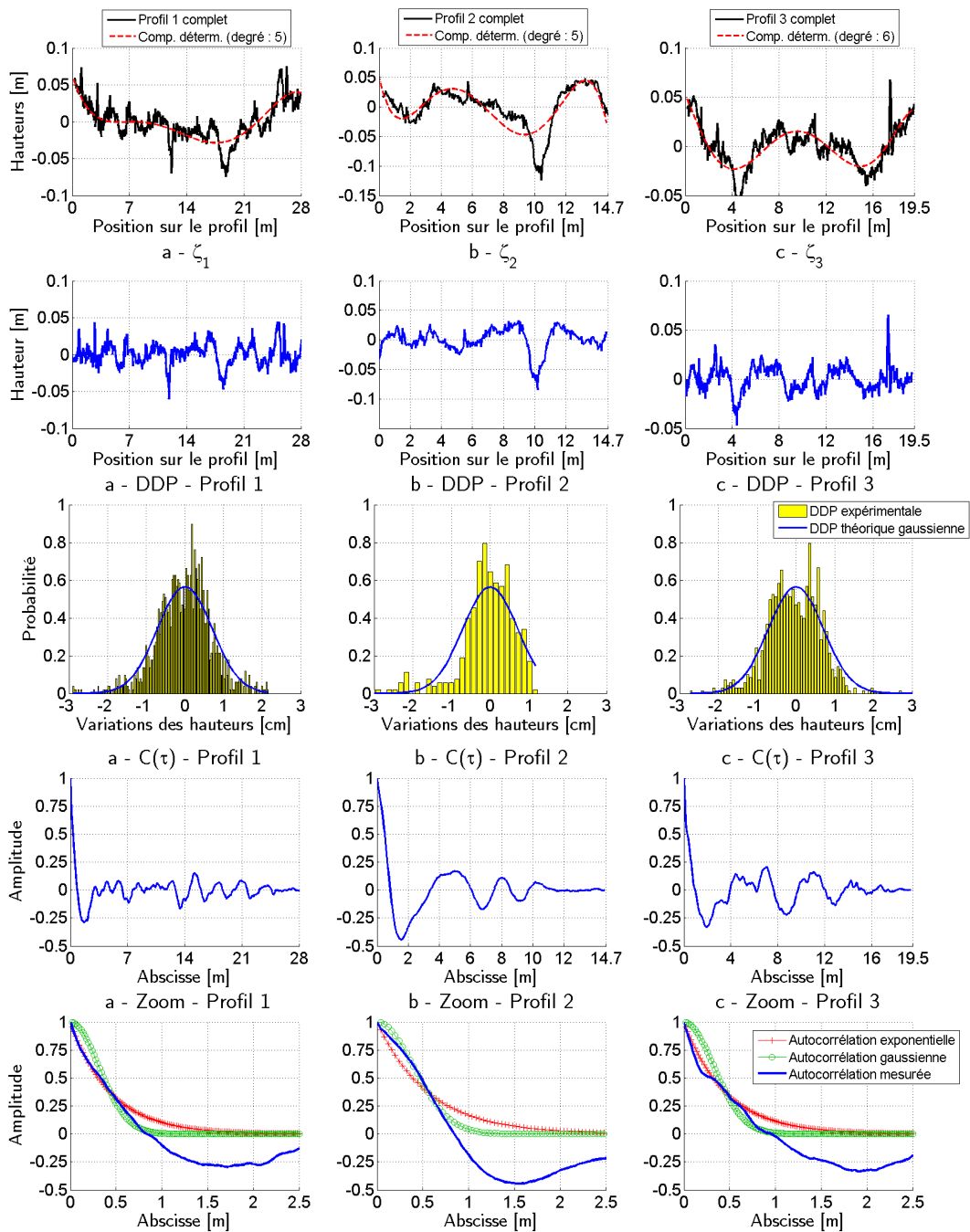


FIGURE 3.19 – Représentation des 3 profils mesurés sur le site de Cormeilles-en-Vexin, ainsi que leurs composantes aléatoire et déterministe. Pour chacun des profils, nous représentons leur DDP normalisée ainsi que leur FA normalisée complète puis localisée au voisinage de l'origine.

A noter que, comme  $\zeta(x_n)$  est réel,  $b(x_n)$  et  $C_\zeta(n)$  doivent être pairs. Le schéma 3.21 illustre cette méthode de génération de surface rugueuse. A l'aide de la méthode précédemment décrite, nous avons pu générer des surfaces rugueuses en fonction de la nature de la FA, de l'écart-type des hauteurs et de sa longueur de corrélation. Pour illustrer l'influence de ces paramètres sur les variations des hauteurs, nous avons généré plusieurs profils de surfaces rugueuses aléatoires. Les figures 3.22 et 3.23 présentent des surfaces rugueuses aléatoires dont la FA est exponentielle et les tirages de nombres aléatoires sont identiques (même  $b$ ), mais en faisant varier la longueur de corrélation (figure 3.22) ou l'écart type des hauteurs (figure 3.23). Nous nous apercevons alors que si  $L_c$  augmente, les surfaces rugueuses semblent plus lisses. De plus, si  $\sigma_h$  augmente, l'amplitude des hauteurs augmente et la surface est plus accidentée.

Sur la figure 3.24, nous avons représenté deux surfaces rugueuses aléatoires dont les FA sont de natures

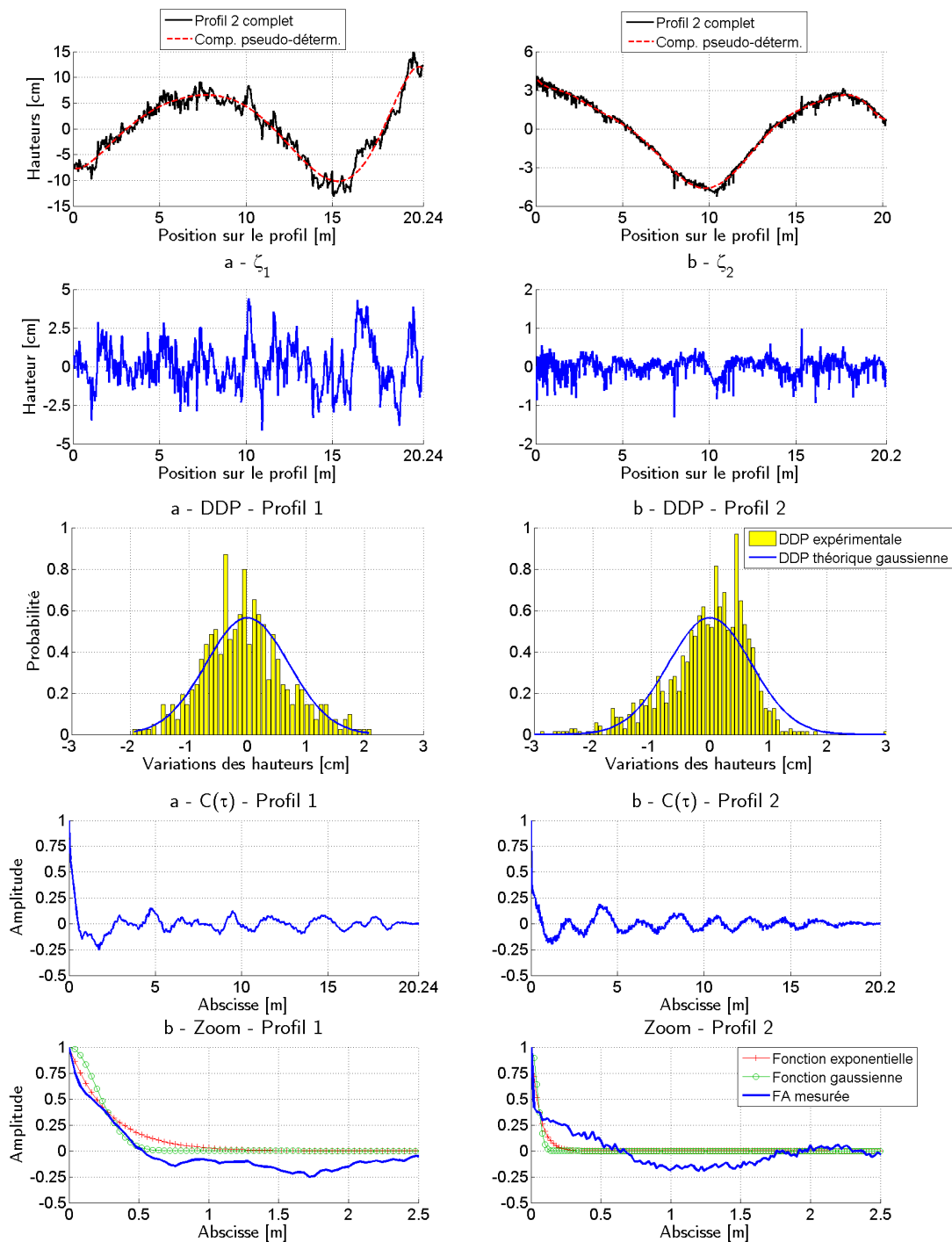


FIGURE 3.20 – Représentation des 2 profils mesurés sur le site de La-Ferté-Saint-Aubin, ainsi que leurs composantes aléatoire et déterministe. Pour chacun des profils, nous représentons leur DDP normalisée ainsi que leur FA normalisée complète puis localisée au voisinage de l’origine.

différentes, mais pour lesquelles les écarts-types des hauteurs, les longueurs de corrélation et le tirage de nombres aléatoires sont les mêmes. Nous pouvons alors voir que les surfaces de FA exponentielle ont plus de petites variations que celles de FA gaussienne. Ceci est dû au fait que le spectre exponentiel possède plus de composantes hautes fréquences que le spectre gaussien.

La méthode de génération de surfaces rugueuses aléatoires que nous avons décrite peut être retrouvée dans les travaux de Patir [87], Bergström & al. [88] et Braham [89] pour générer des surfaces 2D, la différence étant que la FA est définie le long des axes  $\hat{x}$  et  $\hat{y}$  et caractérisée par une longueur de corrélation  $L_x$  et  $L_y$ . Parmi les autres méthodes de génération de surfaces rugueuses aléatoires, nous pouvons citer la mé-

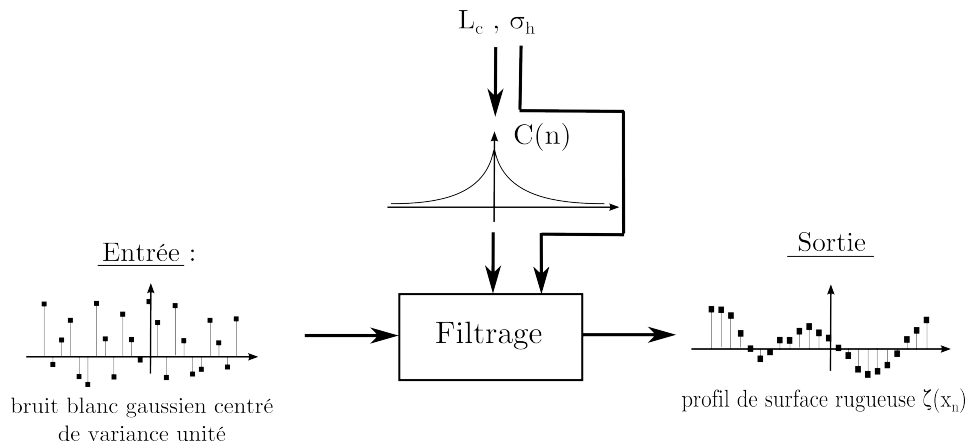


FIGURE 3.21 – Schéma du générateur de profils de surface rugueuse aléatoire

$L = 100 \text{ m}$  ,  $\text{Pas} = 2 \text{ cm}$  ,  $\sigma_h = 1.56 \text{ cm}$  , FA : exponentielle

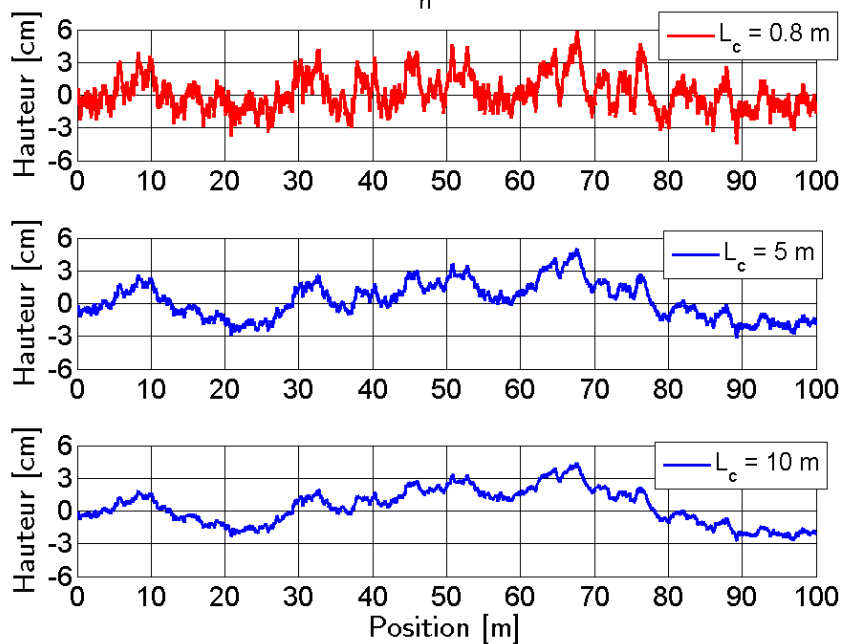


FIGURE 3.22 – Génération de surfaces rugueuses aléatoires de FA exponentielle, de même écart-type des hauteurs mais de longueurs de corrélation différentes

thode fractale [36] que nous retrouvons pour générer des surfaces agricoles, ainsi que celle de Uchida & al. [90] qui propose de générer des surfaces rugueuses dont les paramètres statistiques ne sont pas homogènes, c'est-à-dire qu'ils varient en fonction de la position sur la surface.

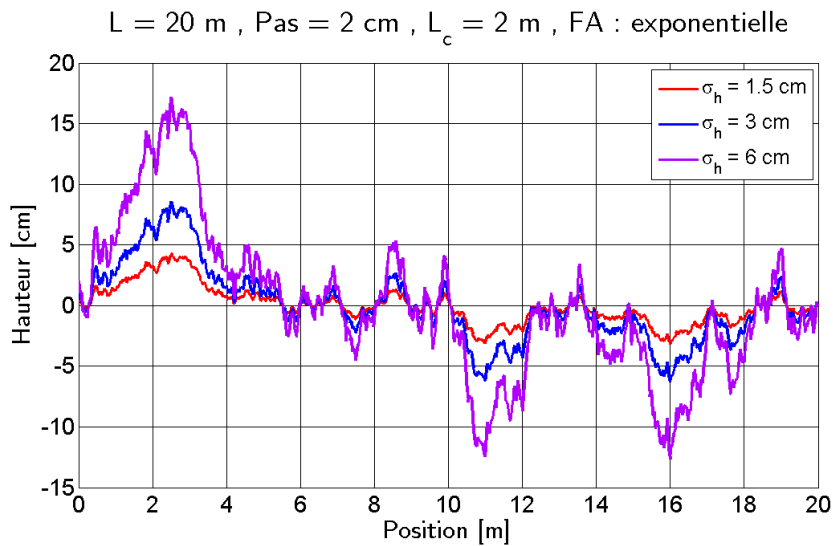


FIGURE 3.23 – Génération de surfaces rugueuses aléatoires de FA exponentielle, de même longueur de corrélation mais d’écarts-types des hauteurs différents

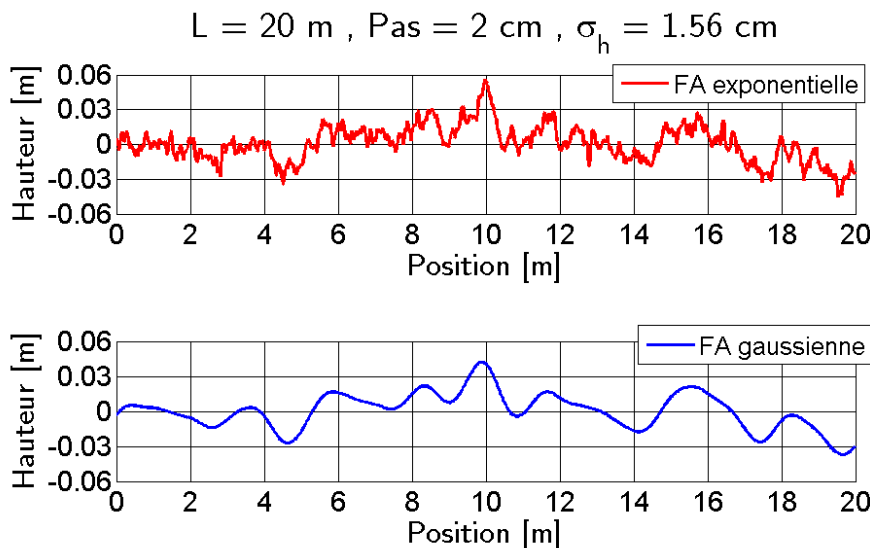


FIGURE 3.24 – Génération de surfaces rugueuses de même longueur de corrélation et même écart-type des hauteurs, mais de FA différentes : (a) exponentielle et (b) gaussienne

### 3.4 Diffusion électromagnétique par la surface mesurée

Dans la section précédente, nous avons présenté un profil de surface rugueuse mesuré. Dans cette partie, le profil est éclairé par une onde incidente de Thorsos, décrite par l’équation (2.78) (afin, pour rappel, de minimiser les effets de bord), avec un angle d’incidence  $\theta_i$  et diffuse le champ électrique dans la direction identifiée par l’angle de diffusion  $\theta_d$ , comme le présente la figure 3.25.

Pour calculer la diffusion électromagnétique par le profil 1 de Cormeilles-en-Vexin, nous utilisons la **MdM**, décrite au chapitre 2, pour déterminer les courants sur la surface. Ensuite, par application du principe de Huygens (2.17), nous pouvons calculer le champ diffusé en champ lointain et le coefficient de diffusion (2.63).

L’utilisation de l’onde de Thorsos nécessite que le critère pour l’onde de Thorsos (2.79) soit respecté. Nous prenons comme terme de Thorsos  $g = \frac{L}{6}$ , avec  $L = 28.26 \text{ m}$  pour le profil étudié. Le tableau 3.3 montre les fréquences maximales que nous pouvons utiliser en respectant ce critère, pour les angles

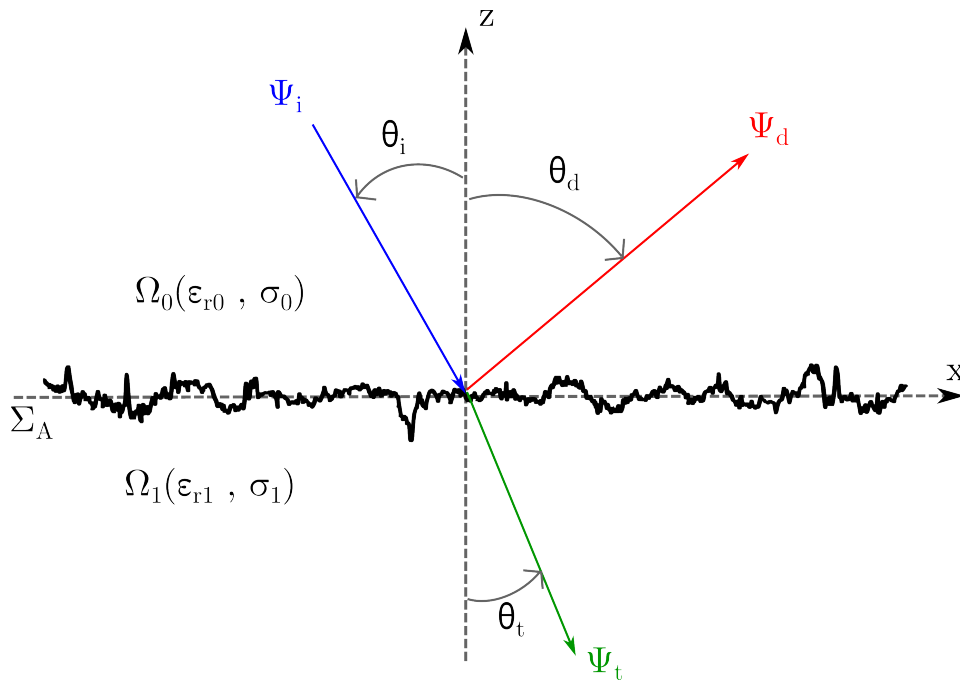


FIGURE 3.25 – Diffraction du profil de surface rugueuse mesuré par une onde électromagnétique

d'incidence 0, 45 et 60 degrés. Il est également d'usage de vérifier que la longueur d'onde soit au moins 10 fois supérieure au pas d'échantillonnage pour une surface PC :  $\Delta_x \leq \frac{\lambda}{10}$  (pour une surface diélectrique  $\Delta_x \leq \frac{\lambda}{10|\sqrt{\epsilon_{r1}}|}$ ). Comme  $\Delta_x = 2$  cm, cela impose une longueur d'onde minimale de 20 cm, soit une fréquence maximale de 1.5 GHz. Le critère pour l'onde de Thorsos est plus contraignant pour les basses fréquences.

Tableau 3.3 – Conditions d'application de l'onde de Thorsos sur la surface rugueuse du profil mesuré

Configuration	Angle d'incidence (°)	Fréquence (MHz)
1	0	274 MHz
2	45	387 MHz
3	60	548 MHz

### 3.4.1 Diffusion électromagnétique par le profil mesuré et ses deux composantes

Nous étudions ici la diffusion électromagnétique par le profil de surface mesuré à Cormeilles-en-Vexin, ainsi que de ses deux composantes : pseudo-déterministe et aléatoire. Conformément au critère (2.79) de l'onde de Thorsos, nous avons déterminé la fréquence maximale en fonction de la longueur du profil et d'un angle d'incidence donné. Les figures 3.26, 3.27 et 3.28 illustrent les résultats des configurations 1, 2 et 3 du tableau 3.3 pour les polarisations TE et TM. Nous y avons représenté la SERn pour le profil et ses deux composantes en fonction de la direction d'observation.

Nous pouvons voir dans chacune des configurations étudiées que la diffusion par la composante aléatoire est proche de celle du profil complet. La composante pseudo-déterministe diffuse l'onde incidente principalement autour de la direction spéculaire et très peu ailleurs ; elle se comporte presque comme une surface lisse. Ces figures montrent donc que les rugosités contenues dans la composante aléatoire sont les principales contributrices à la diffusion électromagnétique du profil mesuré, pour nos fréquences d'études. Ainsi, dans la suite, nous ne générerons que des surfaces rugueuses aléatoires, sans ajouter de composante pseudo-déterministe, dont la contribution à la diffusion est mineure et peut rendre l'applicabilité de certains modèles asymptotiques plus complexe.

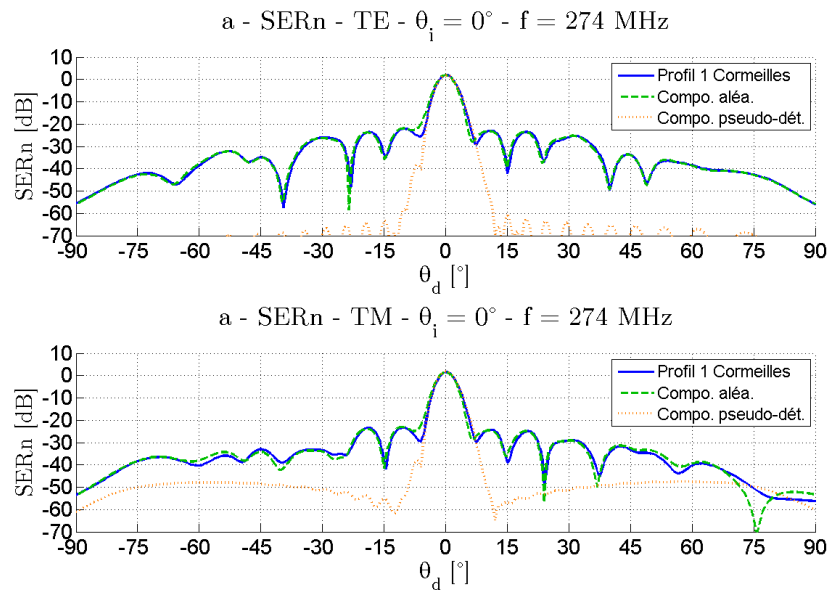


FIGURE 3.26 – SER<sub>n</sub> du profil 1 mesuré à Cormeilles-en-Vexin, de sa composante aléatoire et de sa composante déterministe, pour  $\theta_i = 0^\circ$  et  $f = 274$  MHz

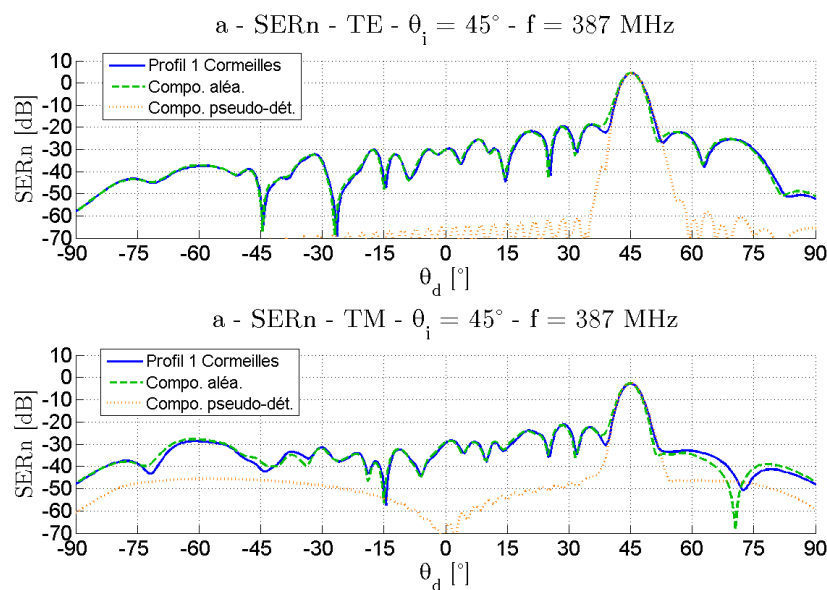


FIGURE 3.27 – SER<sub>n</sub> du profil 1 mesuré à Cormeilles-en-Vexin, de sa composante aléatoire et de sa composante déterministe, pour  $\theta_i = 45^\circ$  et  $f = 387$  MHz

### 3.4.2 Etude sur des surfaces générées

#### SER<sub>n</sub> de surfaces rugueuses aléatoires de FA gaussiennes et exponentielles

Nous voulons vérifier la modélisation de la FA de la composante aléatoire par les fonctions exponentielle et gaussienne (3.3.3) vues précédemment. D'après la figure 3.17, le modèle de FA exponentielle correspond mieux à la FA du profil mesuré autour de l'origine. Nous voulons le vérifier en calculant la diffusion électromagnétique du profil de surface mesurée et en la comparant aux simulations de Monte-Carlo pour des des profils générés de FA exponentielle et gaussienne.

Le scène de diffusion est celle présentée dans la figure 3.25. Les surfaces ont les mêmes paramètres



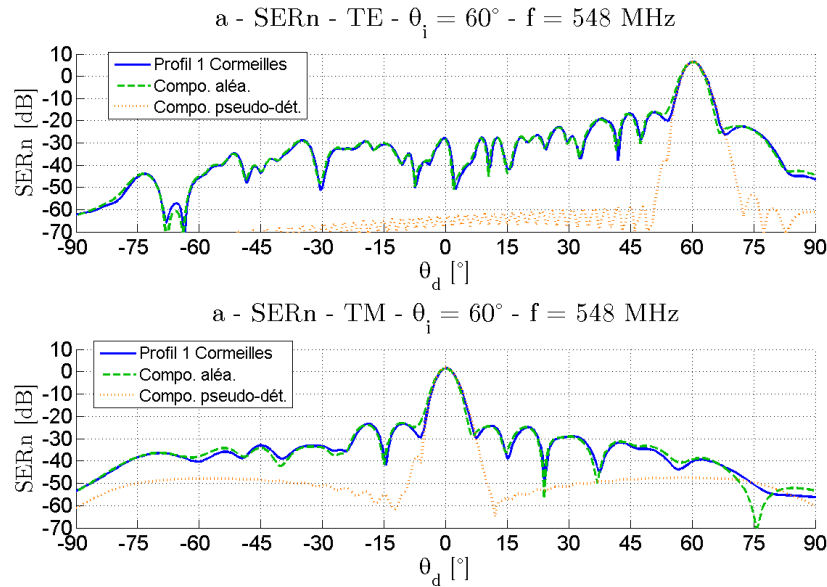


FIGURE 3.28 – SERn du profil 1 mesuré à Cormeilles-en-Vexin, de sa composante aléatoire et de sa composante déterministe pour  $\theta_i = 60^\circ$  et  $f = 548$  MHz

que celles du profil 1 de Cormeilles-en-Vexin :  $L_c = 44$  cm et  $\sigma_h = 1.56$  cm. Le sol est diélectrique, de permittivité diélectrique relative  $\epsilon_{r,1} = 4$  et de conductivité électrique  $\sigma_1 = 10^{-3}$  S/m. L'onde incidente éclaire la surface rugueuse en polarisations TE et TM avec un angle d'incidence  $\theta_i$ . Nous choisissons trois configurations d'angles : l'incidence normale à  $\theta_i = 0^\circ$  et deux incidences modérées à  $\theta_i = 40^\circ$  et  $\theta_i = 60^\circ$ . Les angles et les longueurs des surfaces étant fixés, pour respecter le critère de l'onde de Thorsos (2.79), nous avons pris les fréquences répertoriées dans le tableau 3.4. Sur la figure 3.29, nous avons représenté le

Tableau 3.4 – Fréquences limites en fonction de l'angle d'incidence pour respecter le critère de Thorsos

Angle d'incidence ( $^\circ$ )	Fréquence
$0^\circ$	274 MHz
$45^\circ$	387 MHz
60	548 MHz

profil de surface rugueuse mesuré à Cormeilles-en-Vexin et deux tirages de surfaces rugueuses aléatoires générées avec des FA gaussienne et exponentielle. Pour les deux natures de FA, nous avons généré 50 surfaces rugueuses aléatoires puis calculé la moyenne de leur SERn,  $m_{SERn}$ , et leur écart-type,  $\sigma_{SERn}$ , pour chacune des directions de diffusion. Nous avons représenté sur les mêmes courbes la SERn du profil mesuré, ainsi que la moyenne et l'écart-type des SERn des profils générés. En faisant ainsi, nous considérons que le profil mesuré est un tirage de surface rugueuse aléatoire et comparons sa SERn à  $m_{SERn}$  et à  $m_{SERn} \pm \sigma_{SERn}$  des autres tirages de surface rugueuse.

Nous pouvons remarquer que pour chacune des configurations, le pic de puissance diffusée a lieu autour de la direction spéculaire. Pour les figures 3.30 et 3.33 avec un angle d'incidence de  $\theta_i = 0^\circ$ , pour les polarisations TE et TM, la SERn du profil mesuré a le même comportement que celles des surfaces rugueuses aléatoires générées avec les FA exponentielle aussi bien que gaussienne. Lorsque l'incidence devient modérée avec  $\theta_i = 45^\circ$  pour les figures 3.31 et 3.34, alors que les surfaces rugueuses de FA exponentielle suivent bien le comportement du profil de Cormeilles-en-Vexin, celles de FA gaussienne ne correspondent plus aussi bien en rétrodiffusion pour les angles de rétrodiffusion  $\theta_d < -45^\circ$ . Nous relevons un écart d'environ 20 dB entre la SERn du profil et les moyennes des SERn. Lorsque nous augmentons davantage l'angle d'incidence :  $\theta_i = 60^\circ$ , les surfaces rugueuses de FA exponentielle gardent un comportement similaire à

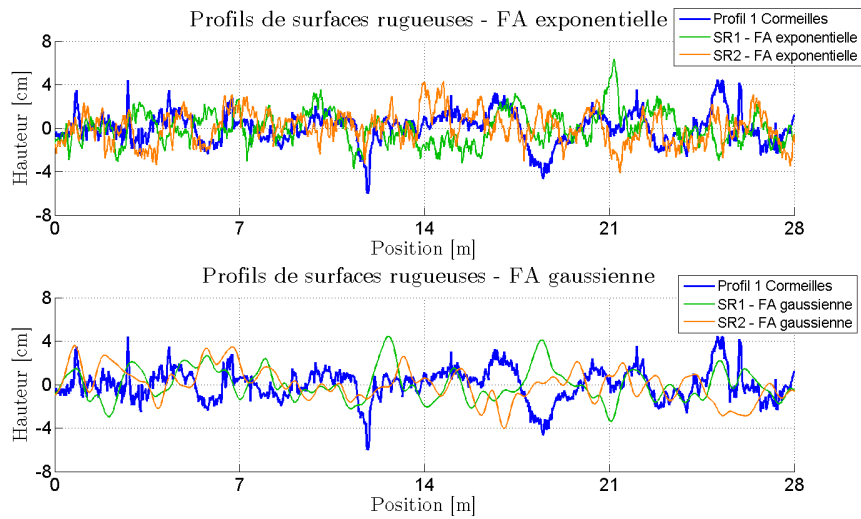


FIGURE 3.29 – Génération de profils de surfaces rugueuses de FA exponentielles et gaussiennes et comparaison au profil mesuré à Cormelles-en-Vexin.

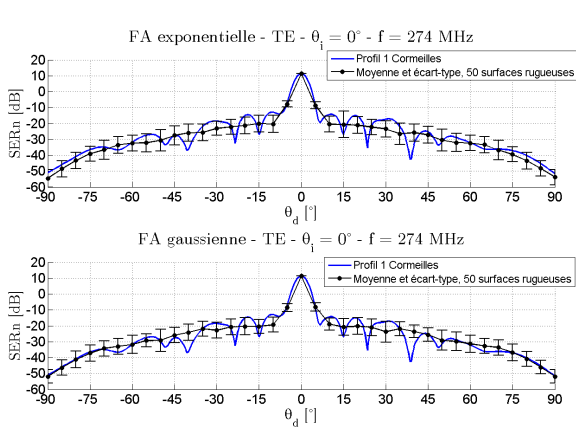


FIGURE 3.30 – SERn en polarisation TE,  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $f = 274$  MHz avec une onde incidente de Thorsos de paramètre  $g = L/6$  pour des surfaces aléatoires de longueur  $L = 28.26$  m, d’écart-type des hauteurs  $\sigma_h = 1.47$  cm et de longueur de corrélation  $L_c = 44$  cm. Deux natures de FA sont utilisées pour la génération : (a) exponentielle et (b) gaussienne.

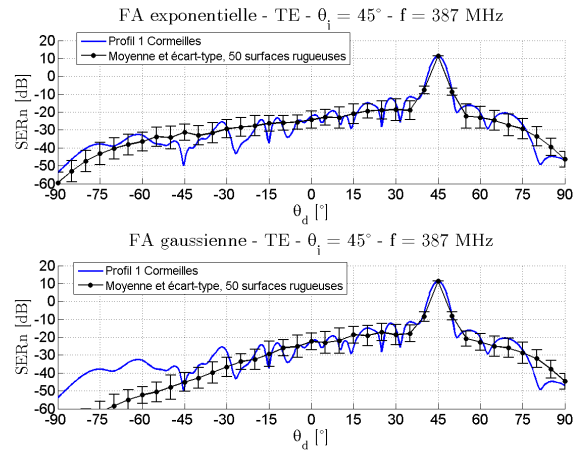


FIGURE 3.31 – SERn en polarisation TE,  $\theta_i = 45^\circ$ ,  $f = 387$  MHz avec une onde incidente de Thorsos de paramètre  $g = L/6$  pour des surfaces aléatoires de longueur  $L = 28.26$  m, d’écart-type des hauteurs  $\sigma_h = 1.47$  cm et de longueur de corrélation  $L_c = 44$  cm. Deux natures de FA sont utilisées pour la génération : (a) exponentielle et (b) gaussienne.

celui du profil de Cormelles-en-Vexin et celles de FA gaussienne voient leur biais augmenter jusqu’à 40 dB dans les directions de rétrodiffusion rasantes. Nous notons un décrochage en rétrodiffusion à partir de  $\theta_d = -15^\circ$ .

Nous pouvons donc en conclure que, contrairement au cas exponentiel, les surfaces rugueuses de FA gaussienne ne permettent pas de reproduire le bon comportement de la SERn en rétrodiffusion sous des incidences modérées. Cela est notamment dû au fait que leur densité spectrale de puissance est plus riche dans les basses fréquences que pour des surfaces rugueuses de FA exponentiel, alors que ce sont ces composantes hautes fréquences qui rétro-diffusent une partie de l’onde incidente. Ces résultats de simulation nous permettent de voir que les FA exponentielles permettent de modéliser plus fidèlement la diffusion électromagnétique par les surfaces relevées sur nos terrains de mesure. Cela confirme l’impression visuelle

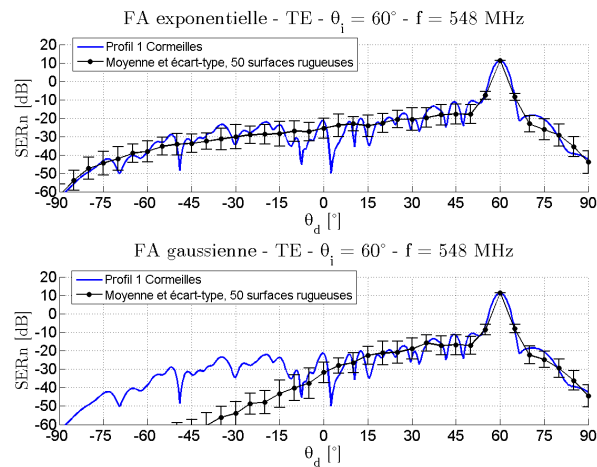


FIGURE 3.32 – SERn en polarisation TE,  $\theta_i = 60^\circ$ ,  $f = 548$  MHz avec une onde incidente de Thorsos de paramètre  $g = L/6$ , pour des surfaces aléatoires de longueur  $L = 28.26$  m, d'écart-type des hauteurs  $\sigma_h = 1.47$  cm et de longueur de corrélation  $L_c = 44$  cm. Deux natures de FA sont utilisées pour la génération de surfaces rugueuses : (a) exponentielle et (b) gaussienne.

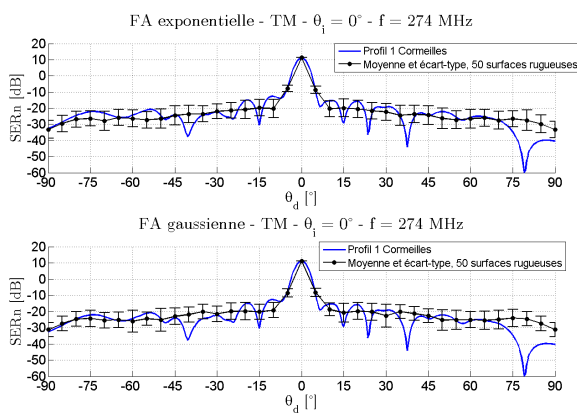


FIGURE 3.33 – SERn en polarisation TM,  $\theta_i = 0^\circ$ ,  $f = 274$  MHz avec une onde incidente de Thorsos de paramètre  $g = L/6$ , pour des surfaces aléatoires de longueur  $L = 28.26$  m, d'écart-type des hauteurs  $\sigma_h = 1.47$  cm et de longueur de corrélation  $L_c = 44$  cm. Deux natures de FA sont utilisées pour la génération de surfaces rugueuses : (a) exponentielle et (b) gaussienne.

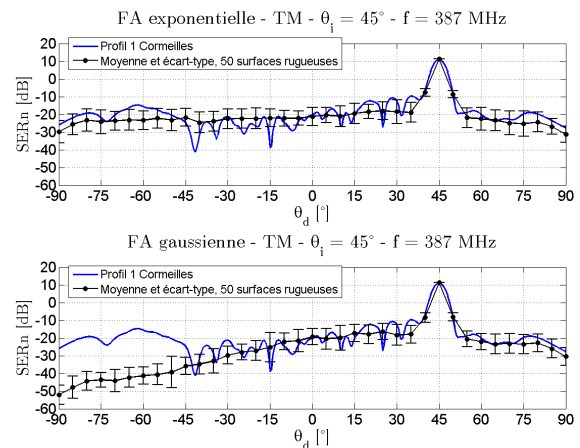


FIGURE 3.34 – SERn en polarisation TM,  $\theta_i = 45^\circ$ ,  $f = 387$  MHz avec une onde incidente de Thorsos de paramètre  $g = L/6$ , pour des surfaces aléatoires de longueur  $L = 28.26$  m, d'écart-type des hauteurs  $\sigma_h = 1.47$  cm et de longueur de corrélation  $L_c = 44$  cm. Deux natures de FA sont utilisées pour la génération de surfaces rugueuses : (a) exponentielle et (b) gaussienne.

que nous avons tirée de la figure 3.24, où le profil mesuré à Cormeilles-en-Vexin présentait de plus grandes similarités avec une surface rugueuse générée à partir d'une FA exponentielle que d'une FA gaussienne. Cela va également dans le sens des travaux de Xu & al. [91] qui conclue que pour l'estimation des taux d'humidité de sols sur des terrains agricoles, le choix de surfaces rugueuses aléatoires de FA exponentielle fournit de meilleurs résultats que pour une FA gaussienne. Nous adoptons donc, pour la suite, le modèle de génération de surfaces rugueuses avec une FA exponentielle.

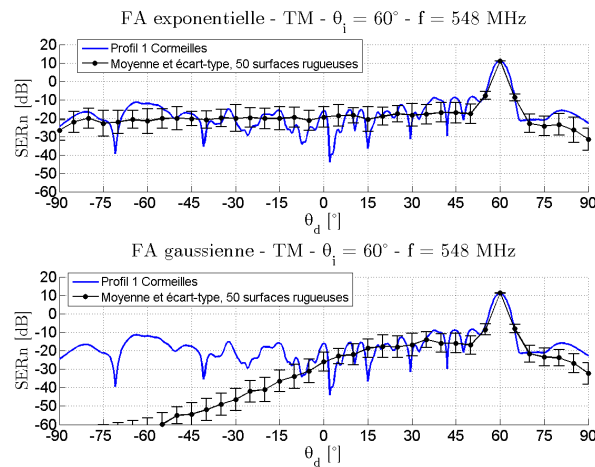


FIGURE 3.35 – SERn en polarisation TM,  $\theta_i = 60^\circ$ ,  $f = 548$  MHz avec une onde incidente de Thorsos de paramètre  $g = L/6$ , pour des surfaces aléatoires de longueur  $L = 28.26$  m, d'écart-type des hauteurs  $\sigma_h = 1.47$  cm et de longueur de corrélation  $L_c = 44$  cm. Deux natures de FA sont utilisées pour la génération de surfaces rugueuses : (a) exponentielle et (b) gaussienne.

### 3.4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un outil et une méthode qui nous ont permis de mesurer des surfaces rugueuses aléatoires sur deux terrains expérimentaux. La modélisation et la caractérisation de telles surfaces ont été abordées en prenant pour exemple l'étude d'un profil mesuré sur terrain réel. Nous avons modélisé ce profil par la somme de deux composantes : l'une basse fréquence, appelée composante pseudo-déterministe et l'autre haute fréquence, appelée composante aléatoire. La composante pseudo-déterministe peut être modélisée par un polynôme qui comporte essentiellement les composantes basses fréquences du profil des hauteurs. Quant à la composante aléatoire, elle a été caractérisée par les paramètres suivants :

- son écart-type des hauteurs :  $\sigma_h$
- sa longueur de corrélation :  $L_c$
- sa densité de probabilité (DDP) :  $p_h$
- sa fonction d'autocorrélation (FA) :  $W$

Il est apparu que la DDP des hauteurs de la composante aléatoire du profil peut être modélisée par une fonction gaussienne. La FA possède une décroissance autour de l'origine qui est mieux représentée par une fonction exponentielle qu'une fonction gaussienne. La décroissance peut encore mieux être modélisée si l'on ajoute un terme en cosinus au modèle exponentiel.

D'après le tableau 3.2, les composantes aléatoires des profils mesurés présentent des écarts-types des hauteurs compris entre 1.23 cm et 1.96 cm et des longueurs de corrélation entre 26 cm et 56 cm. Les mesures ayant été effectuées à des localisations géographiques différentes sur les deux terrains de mesures et dans des directions différentes, ces valeurs montrent une certaine isotropie. Le calcul du paramètre de rugosité de Rayleigh  $R_a$  (2.89) avec l'écart type des hauteurs le plus élevé et une fréquence de 600 MHz (pire cas) et une incidence normale donne une valeur  $R_a = 0.25$ . Cette valeur correspond au pire cas : si la fréquence ou l'écart-type des hauteurs diminuent ou si l'angle d'incidence augmente, le paramètre de Rayleigh sera plus faible. Sa valeur maximale étant faible, nous nous situons dans la gamme des modèles de diffusion basse fréquence, ceux dont les paramètres de rugosité sont faibles par rapport à la longueur d'onde. Comme modèle de diffusion asymptotique, notre choix se porte donc sur la **MPP** (Méthode des petites perturbations) qui est un modèle, dit basse fréquence, assez bien adapté aux configurations de scène que nous étudions. Ainsi, dans le chapitre IV, nous étudions le modèle **MPP** en détail pour notre application.



# Méthode des Petites Perturbations (MPP)

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>90</b>
<b>4.2</b>	<b>Notations et calculs préalables</b>	<b>91</b>
<b>4.3</b>	<b>Courants à l'ordre <math>n</math> pour une onde incidente quelconque</b>	<b>94</b>
<b>4.4</b>	<b>Courants à l'ordre 2 pour une onde incidente plane</b>	<b>102</b>
<b>4.5</b>	<b>Diffusion par une surface rugueuse à l'aide de la MPP</b>	<b>104</b>
<b>4.6</b>	<b>Comparaison avec la Méthode des Moments</b>	<b>108</b>
<b>4.7</b>	<b>Domaine de validité de la MPP</b>	<b>116</b>
<b>4.8</b>	<b>Comment implanter la MPP dans la plateforme Prométhée ?</b>	<b>119</b>

---

## 4.1 Introduction

La **Méthode des Petites Perturbations (MPP - SPM** en anglais) est une méthode asymptotique de calcul de la diffusion d'ondes électromagnétiques par une surface rugueuse. C'est l'une des plus anciennes méthodes de calcul de diffusion d'ondes électromagnétiques par des surfaces rugueuses aléatoires puisqu'elle a été introduite, en premier lieu, en 1907 par Rayleigh [92] pour des ondes acoustiques, sur des surfaces rugueuses sinusoïdales. Il aura fallu attendre un peu plus de quatre décennies pour que Fano [93] l'adapte à la diffusion par des ondes dans le domaine optique. En 1951, Rice [94] présente sa formulation du problème de la diffusion électromagnétique par des surfaces faiblement rugueuses. Il donne l'expression du champ diffusé aux ordres 1 et 2 pour une surface 1D, parfaitement conductrice, en polarisation TE et calcule numériquement l'ordre 1 du champ diffusé pour une surface diélectrique. Peake [95] apporte une nouvelle contribution huit années plus tard en donnant la formulation de la Surface Équivalente Radar (SER) à l'ordre 1 pour les polarisations TE et TM. Valenzuela [96], [97] a complété les calculs au second ordre pour des surfaces 2D. Plus récemment, Johnson [98] a donné une formulation analytique jusqu'à l'ordre 3 pour des surfaces diélectriques 2D (donc des scènes 3D) puis à n'importe quel ordre grâce à une formulation récursive [99]. Parmi les autres auteurs qui ont travaillé sur la **MPP** aux ordres élevés, il est intéressant de citer les travaux d'O'Donnell [100] et de Guo et al. [101], dont nous nous sommes inspirés. Le lecteur peut se référer au *topical review* de Elfouhaily et al. [38] pour une revue exhaustive de l'évolution historique des méthodes basées sur les petites perturbations.

Le modèle **MPP** est valide uniquement pour des surfaces de faibles rugosités, c'est-à-dire lorsque les paramètres de rugosités (écart-type des hauteurs) sont faibles devant la longueur d'onde. La validité du modèle **MPP** a été étudiée notamment par Thorsos et Jackson [39] pour les ondes acoustiques sur une surface 1D parfaitement conductrice. Chen et Fung [57] ont également présenté leur démarche pour valider numériquement, par des simulations de Monte-Carlo, la **MPP** à l'ordre 1 en la comparant à la **MdM**. Soto-Crespo et Nieto Vesperinas [102] ont fait l'étude en optique pour des surfaces parfaitement conductrices et pour les polarisations TE et TM. Puis Sanchez-Gil et Maradudin [55] ont fait l'étude pour des surfaces diélectriques, en comparant trois méthodes perturbatives : **MPP**, la Phase Perturbation Method (**PPM**) et la Self Energy Perturbation Method (**SEPT**). Kim et Stoddart [59] étudièrent également le domaine de validité de **MPP** pour des surfaces PC, 1D, en polarisations TE et TM, jusqu'à l'ordre 2. Ils ont déterminé que la **MPP** a un domaine de validité plus large pour la polarisation TE que pour la polarisation TM : les écart-types acceptés par le modèle peuvent aller jusqu'à  $0.08\lambda$  pour la polarisation TE contre  $0.05\lambda$  pour la polarisation TM. Le domaine de validité du modèle s'étend également lorsque les ordres perturbatifs augmentent. Concernant les angles d'incidence, aucune limite angulaire n'apparaît pour le cas TE alors que le cas TM voit sa validité fortement diminuer à partir d'angles incidents supérieurs à 80 degrés. Plus tard Kim [58] a effectué numériquement l'étude de la validité de **MPP** à l'ordre 1, en polarisations TE et TM, pour des surfaces 1D diélectriques et périodiques (pour simuler des longueurs de surfaces infinies). Selon ses conclusions, pour la polarisation TE, à l'ordre 1, la **MPP** reste valide pour tous les angles d'incidence tant que l'écart-type des hauteurs est faible devant la longueur d'onde. Pour la polarisation TM, à l'ordre 1, la **MPP** est moins précise pour des angles incidents autour de l'angle de Brewster et également pour des angles rasants.

Ces travaux ont permis de remarquer que la méthode ne pouvait pas être utilisée aux incidences rasantes en polarisation TM, alors qu'elle était valide sous toutes les incidences en polarisation TE. Ce problème aux incidences rasantes a été particulièrement étudié par Barrick [103] et Fuks [104]. Barrick [105] a introduit un terme d'impédance de surface complémentaire pour corriger la méthode **MPP** classique aux incidences rasantes. Li et al. [106] ont également repris cette formulation de la **MPP** modifiée pour obtenir des résultats améliorés en incidence rasante pour la polarisation TM.

La plupart des travaux précédents ont donné une formulation de la **MPP** aux différents ordres, pour une surface infinie. Guo et al [101] ont pris en compte dans leurs travaux une surface finie, en utilisant une onde incidente de Thorsos (2.78) qui permet d'atténuer le champ incident sur les extrémités de la surface



et ainsi limiter la diffraction par les bords. Ils ont développé une formulation récursive permettant d'obtenir les inconnues à n'importe quel ordre, pour le cas PC, en polarisation TE.

Pour une bonne description de la méthode **MPP**, le lecteur peut se référer aux livres de Voronovich [64], Tsang et Kong [35] ou encore Bass et Fuks [107]. La méthode présentée par Bass et Fuks est quelque peu différente de la méthode classique **MPP** au sens où elle fait appel au développement perturbatif de la fonction de Green et non plus du champ diffracté, ainsi qu'à la méthode des diagrammes de Feynman.

Les travaux que nous avons menés ont repris les notations de Tsang et Kong [35] introduites pour le cas 1D PC. A partir des mêmes notations, nous avons effectué les calculs pour obtenir des résultats pour des surfaces diélectriques.

## 4.2 Notations et calculs préalables

D'après le chapitre III, le profil des hauteurs de la surface rugueuse 1D est défini par la fonction aléatoire (3.12) :  $h : x \mapsto h(x)$ , où  $h(x)$  représente les variations des hauteurs de la surface au point d'abscisse  $x$  par rapport au plan moyen. Dans un souci de simplification des notations, nous notons  $z = h(x)$ , la hauteur de la surface au point d'abscisse  $x$ . Dans la suite, le lecteur devra être prudent sur l'appartenance ou non de  $z$  à la surface rugueuse ou à un point quelconque de l'espace selon le cas où il est utilisé.

Nous rappelons les notations et propriétés suivantes :

$$\begin{cases} z &= h(x) & : \text{ hauteur de la surface} \\ \langle z \rangle &= 0 & : \text{ moyenne des hauteurs nulle} \\ \gamma &= \frac{\partial z}{\partial x} & : \text{ pente de la surface} \end{cases}$$

La grandeur  $\gamma$  correspond aux pentes de la surface. Les relations suivantes permettent la représentation de  $z$  et de  $\gamma$  dans les domaines spatial et spectral :

$$\tilde{z} = \mathcal{F}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} z e^{-jk_x x} dx \quad z = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{z}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{z} e^{jk_x x} dk_x \quad \gamma = \mathcal{F}^{-1}(jk_x \tilde{z}) = \int_{-\infty}^{+\infty} jk_x \tilde{z} e^{jk_x x} dk_x \quad (4.1)$$

où  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}^{-1}$  sont respectivement les opérateurs de transformée de Fourier et de transformée de Fourier inverse.

### 4.2.1 Calculs préalables pour l'onde incidente

Nous nous plaçons sur la surface rugueuse  $\Sigma_A$  pour observer l'onde incidente. Les points  $(x, z)$  appartiennent donc à la surface rugueuse  $\Sigma_A$ . L'onde incidente qui éclaire la surface est définie telle que :

$$\Psi_i(x, z) = \Psi_0(x, z) f(x, z), \text{ avec } z = h(x) \quad (4.2)$$

où

$$\begin{cases} \Psi_0(x, z) = e^{j(k_{ix}x - k_{iz}z)} & : \text{ terme d'onde plane} \\ f(x, z) & : \text{ fonction qui module l'amplitude} \end{cases} \quad (4.3)$$

Si  $\forall (x, z) \in \Sigma_A, f(x, z) = 1$ ,  $\Psi_i$  représente l'onde plane monochromatique usuelle.

Le signe  $(-)$  devant  $k_{iz}$ , dans le terme d'onde plane, est représentatif du sens de propagation de l'onde incidente vers la surface ("vers le bas"). En effet, nous nous plaçons dans la configuration où le milieu incident est au-dessus de la surface. L'onde ainsi définie est une onde plane dont l'amplitude est modulée



dans le plan  $(O, \hat{x}, \hat{z})$  par la fonction  $f$ . Nous pouvons remarquer que l'onde de Thorsos (2.78) peut s'écrire sous la forme (4.2) en prenant :

$$f(x, z) = e^{-\frac{(x+z \tan \theta_i)^2}{g^2}} e^{jw(r)\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} \quad (4.4)$$

$$\text{avec } w(r) = \frac{\left[ \frac{2(x+z \tan \theta_i)^2}{g^2} - 1 \right]}{(k_0 g \cos \theta_i)^2}.$$

Comme toute onde se propageant dans l'espace peut se décomposer en une somme d'ondes planes monochromatiques, par linéarité des équations de Maxwell, la résolution d'un problème de diffraction, pour une seule onde monochromatique, mène à la résolution pour tout type d'onde incidente. Nous abordons donc le problème de diffraction illustré par la figure 3.25 en utilisant l'onde incidente décrite par l'équation (4.2).

Dans le terme exponentiel (4.3) de l'onde plane et pour les surfaces de même nature que celles que nous avons mesurées,  $|k_{iz}z| \ll 1$ . En effet, nous avons vu au chapitre III que les profils des hauteurs présentent des variations faibles devant les longueurs d'onde étudiées. Nous avons effectué une décomposition en série, selon le paramètre  $k_{iz}z$ , des deux termes de l'onde incidente (4.2) :

$$\Psi_i(x, z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Psi_0^{(k)}(x, z) \sum_{j=0}^{+\infty} f^{(j)}(x, z) \quad (4.5)$$

où

$$\begin{cases} \Psi_0^{(k)} & : \text{développement à l'ordre } k \text{ du terme d'onde plane} \\ f^{(j)} & : \text{développement à l'ordre } j \text{ du terme d'atténuation} \end{cases}$$

En effectuant une décomposition jusqu'à l'ordre 2, et en identifiant les termes aux ordres 0, 1 et 2, nous avons :

$$\begin{aligned} \Psi_i &= \Psi_0^{(0)} f^{(0)} \\ &+ \Psi_0^{(0)} f^{(1)} + \Psi_0^{(1)} f^{(0)} \\ &+ \Psi_0^{(0)} f^{(2)} + \Psi_0^{(1)} f^{(1)} + \Psi_0^{(2)} f^{(0)} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Pour simplifier les calculs, nous souhaitons que les fonctions  $f^{(1)}$  et  $f^{(2)}$ , qui représentent une correction de l'onde plane, puissent être négligées de façon à écrire que :

$$\Psi_i = \underbrace{f^{(0)}}_{\text{terme d'atténuation}} \underbrace{\left( \Psi_0^{(0)} + \Psi_0^{(1)} + \Psi_0^{(2)} \right)}_{\text{terme d'onde plane}} \quad (4.7)$$

ce qui implique les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \left| \frac{\Psi_0^{(1)} f^{(0)}}{\Psi_0^{(0)} f^{(1)}} \right| \ll 1 \\ \left| \frac{\Psi_0^{(0)} f^{(2)} + \Psi_0^{(1)} f^{(1)}}{\Psi_0^{(2)} f^{(0)}} \right| \ll 1 \end{cases} \quad (4.8)$$

où  $\Psi_i$ ,  $\Psi_0^{(1)}$  et  $\Psi_0^{(2)}$  dépendent de  $(x, z)$  et  $f^{(0)}$  et  $\Psi_0^{(0)}$  dépendent uniquement de  $x$ , étant donnée la décomposition en série selon le paramètre  $k_{iz}z$ . L'intérêt de cette formulation est que nous retrouvons dans la parenthèse la décomposition en série de l'onde plane. Comme  $f^{(0)}$  est indépendant de  $z$  et par linéarité des équations de Maxwell, la connaissance des résultats pour le cas d'une onde plane peut être transposé aisément à une onde incidente quelconque, et notamment à celle de la forme (4.2).

Calculons la dérivée normale du champ incident  $\frac{\partial \Psi_i}{\partial \hat{n}}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_i}{\partial \hat{n}} &= \hat{n} \cdot \nabla \Psi_i \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2}} \left( -\gamma \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_i}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

La dérivée partielle  $\frac{\partial \Psi_i}{\partial x}$  du champ incident selon  $x$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} &= f \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} + \Psi_0 \frac{\partial f}{\partial x} \\ &= f \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \left( 1 + \frac{\Psi_0}{\frac{\partial \Psi_0}{\partial x}} \frac{\partial f}{f} \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

D'après l'équation (4.3),  $\frac{\partial \Psi_0(x,z)}{\partial x} = jk_{ix} \Psi_0$ . En l'intégrant dans (4.10), nous obtenons :

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial x} = f \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \left( 1 + \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{jk_{ix} f} \right) \quad (4.11)$$

Tout d'abord, nous imposons l'approximation suivante :

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \approx f \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \Rightarrow \left| \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{jk_{ix} f} \right| \ll 1 \quad (4.12)$$

Nous effectuons un développement en série jusqu'à l'ordre 2 de la dérivée partielle du champ incident par rapport à  $x$  (4.16) selon le terme  $k_{iz}z$  :

$$\begin{aligned} f \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} &= f^{(0)} \frac{\partial \Psi_0^{(0)}}{\partial x} \\ &+ f^{(0)} \frac{\partial \Psi_0^{(1)}}{\partial x} + f^{(1)} \frac{\partial \Psi_0^{(0)}}{\partial x} \\ &+ f^{(0)} \frac{\partial \Psi_0^{(2)}}{\partial x} + f^{(1)} \frac{\partial \Psi_0^{(1)}}{\partial x} + f^{(2)} \frac{\partial \Psi_0^{(0)}}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.13)$$

De la même manière que précédemment, nous souhaitons écrire :

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \approx f^{(0)} \left( \frac{\partial \Psi_0^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_0^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_0^{(2)}}{\partial x} \right) \quad (4.14)$$

qui implique que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{f^{(1)} \frac{\partial \Psi_0^{(0)}}{\partial x}}{f^{(0)} \frac{\partial \Psi_0^{(1)}}{\partial x}} \right| \ll 1 \\ \left| \frac{f^{(1)} \frac{\partial \Psi_0^{(1)}}{\partial x} + f^{(2)} \frac{\partial \Psi_0^{(0)}}{\partial x}}{f^{(0)} \frac{\partial \Psi_0^{(2)}}{\partial x}} \right| \ll 1 \end{array} \right. \quad (4.15)$$

En suivant le même processus pour la dérivée partielle selon  $z$   $\frac{\partial \Psi_i}{\partial z}$ , en voulant écrire :

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial z} \approx f^{(0)} \left( \frac{\partial \Psi_0^{(0)}}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_0^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_0^{(2)}}{\partial z} \right) \quad (4.16)$$

cela implique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial z} \ll 1 \\ jk_{iz} f \\ \left| \frac{f^{(1)} \frac{\partial \Psi_0^{(0)}}{\partial z}}{f^{(0)} \frac{\partial \Psi_0^{(1)}}{\partial z}} \right| \ll 1 \\ \left| \frac{f^{(1)} \frac{\partial \Psi_0^{(1)}}{\partial z} + f^{(2)} \frac{\partial \Psi_0^{(0)}}{\partial z}}{f^{(0)} \frac{\partial \Psi_0^{(2)}}{\partial z}} \right| \ll 1 \end{array} \right. \quad (4.17)$$

La dérivée normale du champ incident peut s'approximer, en respectant les critères (4.15) et (4.17), par l'expression :

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial \hat{n}} = \underbrace{f^{(0)}}_{\text{terme d'atténuation}} \underbrace{\left[ \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \left[ -\gamma \left( \frac{\partial \Psi_0^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_0^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_0^{(2)}}{\partial x} \right) + \frac{\partial \Psi_0^{(0)}}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_0^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_0^{(2)}}{\partial z} \right] \right]}_{\text{terme d'onde plane}} \quad (4.18)$$

A l'aide du logiciel Maple, nous pouvons montrer que les approximations introduites (4.7) et (4.18) sont valables si les conditions (4.8), (4.15) et (4.17) sont respectées.

### 4.3 Courants à l'ordre $n$ pour une onde incidente quelconque

Nous présentons ici le calcul des courants surfaciques pour les problèmes des figures 4.1 et 4.3.

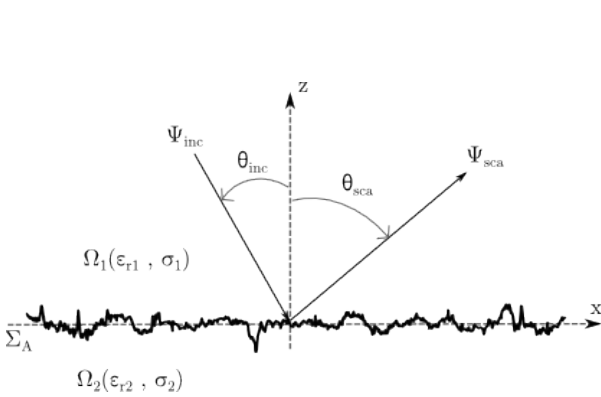


FIGURE 4.1 – Diffraction d'une onde incidente plane par une surface rugueuse aléatoire et PC donnant naissance à une onde diffractée

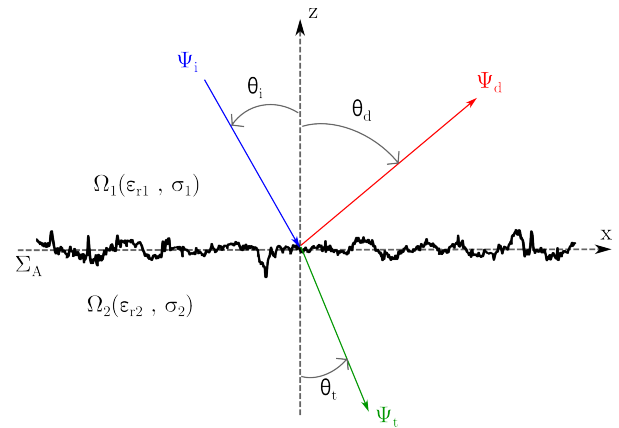


FIGURE 4.2 – Diffraction d'une onde incidente plane par une surface rugueuse aléatoire et diélectrique, donnant naissance à une onde diffractée et une onde transmise

Dans les paragraphes qui suivent, nous traitons successivement le cas de la diffusion d'une onde incidente plane par une surface PC puis celui de la diffusion par une surface diélectrique. Pour chacune de ces surfaces, les cas considérés prennent en compte l'onde incidente en polarisations TE et TM. Pour les deux types de surface, le champ incident est une donnée connue. Pour la surface PC, l'inconnue du problème est le champ diffracté et pour la surface diélectrique, les inconnues sont le champ diffracté et le champ transmis.

### 4.3.1 Surface parfaitement conductrice

#### Problème aux limites de Dirichlet

Nous voulons déterminer les courants surfaciques sur une surface rugueuse de longueur infinie éclairée par une onde plane en polarisation TE. Pour la polarisation TE, d'après l'équation intégrale (2.16), les courants surfaciques sont représentés par :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = \frac{\partial \Psi_i}{\partial n} + \frac{\partial \Psi_d}{\partial n} \quad (4.19)$$

Le terme  $\frac{\partial \Psi_i}{\partial n}$  est connu et nous cherchons à déterminer  $\frac{\partial \Psi_d}{\partial n}$  pour pouvoir calculer  $\frac{\partial \Psi}{\partial n}$ . Pour ce faire, nous utilisons la condition aux limites pour la polarisation TE sur une surface PC : la condition aux limites de Dirichlet (2.15). Cette condition impose que le champ électrique tangentiel  $\Psi$  soit nul sur la surface :

$$\Psi(x, z) = \Psi_i(x, z) + \Psi_d(x, z) = 0 \quad (4.20)$$

Dans cette équation, le champ incident est connu en tout point de l'espace et l'inconnue est le champ diffracté. Or le champ diffracté  $\Psi_d(x, z)$  peut s'exprimer comme une somme d'ondes planes :

$$\Psi_d(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}_d(k_x) e^{j(k_x x + k_z z)} dk_x \quad (4.21)$$

où  $\tilde{\Psi}_d(k_x)$  est l'amplitude de l'onde incidente émise dans la direction  $(k_x \hat{x} + k_z \hat{z})$ . Cette expression du champ diffracté s'applique pour tout point du milieu  $\Omega_0$  et l'hypothèse de Rayleigh, illustrée par la figure 2.6, nous dit qu'elle est également valide sur la surface rugueuse.

Nous écrivons ensuite le terme  $\tilde{\Psi}_d$  de l'équation (4.21) comme une série de petites perturbations :

$$\tilde{\Psi}_d = \sum_{k=0}^N \tilde{\Psi}_d^{(k)} + o\left(\tilde{\Psi}_d^{(N)}\right) \quad (4.22)$$

Le nom de la **Méthode des Petites Perturbations** prend alors tout son sens dans l'approximation qui suit : pour les surfaces rugueuses sur lesquelles nous avons effectué nos mesures, leurs hauteurs étant petites devant la longueur d'onde, nous avons  $|k_z z| \ll 1$ . Nous pouvons effectuer le développement limité de la fonction exponentielle :

$$e^{jk_z z} = \sum_{k=0}^N \frac{(jk_z z)^k}{k!} + o\left((jk_z z)^N\right) \quad (4.23)$$

En utilisant les équations (4.22) et (4.23) et en les insérant dans l'équation (4.21), nous obtenons jusqu'à l'ordre 2 :

$$\Psi_d(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \tilde{\Psi}_d^{(0)} + \tilde{\Psi}_d^{(1)} + \tilde{\Psi}_d^{(2)} \right) \left( 1 + jk_z z - \frac{k_z^2 z^2}{2} \right) e^{jk_x x} dk_x \quad (4.24)$$

De plus, le développement perturbatif de l'onde incidente dans le domaine spatial s'exprime par :

$$\Psi_i = \sum_{k=0}^N \Psi_i^{(k)} + o\left(\Psi_i^{(N)}\right) \quad (4.25)$$

où les  $\Psi_i^{(k)}$  sont données jusqu'à l'ordre 2 pour une onde incidente plane dans l'annexe A par les équations (A.1). Nous intégrons les équations (4.24) et (4.25) à l'ordre 2 dans la condition aux limites de Dirichlet

(4.20). D'après les développements calculatoires de l'annexe F, nous obtenons l'équation suivante dont les inconnues sont les  $\tilde{\Psi}_d^{(k)}$  :

$$\sum_{k=0}^N \Psi_i^{(k)} + \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^N \tilde{\Psi}_d^{(k)} \right) \left( \sum_{k=0}^N \frac{(jk_z z)^k}{k!} \right) e^{jk_x x} dk_x = 0 \quad (4.26)$$

Un des avantages de la **MPP** est que nous pouvons résoudre cette équation ordre par ordre :

$$\Psi_i + \Psi_d = 0 \iff \forall k \in \mathbb{N}, \Psi_d^{(k)} = -\Psi_i^{(k)} \quad (4.27)$$

L'annexe F détaille les calculs permettant de résoudre le système d'équations précédent et de déterminer les inconnues aux ordres  $k \in \{1; \dots; N\}$ ,  $\tilde{\Psi}_d^{(k)}$ . Les expressions obtenues pour les inconnues sont :

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}_d^{(0)} = -\mathcal{F}(\Psi_i^{(0)}), \text{ pour } k = 0 \\ \tilde{\Psi}_d^{(k)} = -\mathcal{F}(\Psi_i^{(k)}) - \sum_{m=0}^{k-1} \left( \prod_{*}^{k-1-m} \tilde{z} \right) \tilde{\Psi}_d^{(m)} \frac{(jk_z)^{k-m}}{(k-m)!} \forall k \geq 1, \end{cases} \quad (4.28)$$

L'opérateur  $\prod_{*}^{k-1-m} \tilde{z}$  représente le produit de convolution à  $k$  termes :  $\prod_{*}^k \tilde{z} = \tilde{z} * \tilde{z} * \dots * \tilde{z}$ .  
 $\tilde{z}$  est convolué  $k$  fois

L'annexe F fournit le détail des calculs permettant l'obtention d'une expression analytique et récursive des inconnues à n'importe quel ordre. Nous donnons ci-dessous les expressions des inconnues et des courants surfaciques jusqu'à l'ordre 2 :

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}_d^{(0)}(k_x) = -\mathcal{F}(\Psi_i^{(0)}) \\ \tilde{\Psi}_d^{(1)}(k_x) = -\mathcal{F}(\Psi_i^{(1)}) - \tilde{z} * [jk_z \tilde{\Psi}_d^{(0)}(k_x)] \\ \tilde{\Psi}_d^{(2)}(k_x) = -\mathcal{F}(\Psi_i^{(2)}) + \tilde{z} * \tilde{z} * \left[ \frac{k_z^2}{2} \tilde{\Psi}_d^{(0)}(k_x) \right] - \tilde{z} * [ik_z \tilde{\Psi}_d^{(1)}(k_x)] \end{cases} \quad (4.29)$$

Grâce à nos calculs, nous avons déterminé les inconnues  $\tilde{\Psi}_d^{(k)}$  du problème. Ce qui nous intéresse, c'est l'expression des courants surfaciques. Pour les obtenir, nous effectuons le développement perturbatif de l'équation (4.19). Pour calculer les courants surfaciques, nous devons remplacer les inconnues par leurs expressions obtenues en (4.28). En reprenant les termes perturbatifs des champs incidents et diffractés des

annexes A et B, les courants surfaciques que nous obtenons jusqu'à l'ordre 2 sont :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}} &= \frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial \mathbf{n}} \\
&= \underbrace{\frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} j k_z \tilde{\Psi}_d^{(0)}(k_x) e^{j k_x x} dk_x}_{\text{Courants (Ordre 0)}} \\
&\quad + \underbrace{\frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ j k_z \tilde{\Psi}_d^{(1)} + (k_x \tilde{z}) * (k_x \tilde{\Psi}_d^{(0)}) - \tilde{z} * (k_z^2 \tilde{\Psi}_d^{(0)}) \right] e^{j k_x x} dk_x}_{\text{Courants (ordre 1)}} \\
&\quad + \frac{\partial \Psi_i^{(2)}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ j k_z \tilde{\Psi}_d^{(2)} + (k_x \tilde{z}) * (k_x \tilde{\Psi}_d^{(1)}) - \tilde{z} * (k_z^2 \tilde{\Psi}_d^{(1)}) \right] e^{j k_x x} dk_x \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ i(k_x \tilde{z}) * \tilde{z} * (k_x k_z \tilde{\Psi}_d^{(0)}) - \tilde{z} * \tilde{z} * \left( \frac{j k_z^3}{2} \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) \right] e^{j k_x x} dk_x}_{\text{Courants (Ordre 2)}}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

### Problème aux limites de Neumann

Pour la polarisation TM, d'après l'équation intégrale (2.16) et la condition aux limites (2.15), les courants surfaciques sont représentés par la grandeur  $\Psi$  calculée sur la surface :

$$\Psi(x, z) = \Psi_i(x, z) + \Psi_d(x, z), \quad \forall (x, z) \in \Sigma_A \tag{4.31}$$

La condition aux limites de Neumann (2.15) impose que  $\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}}$  soit nul sur la surface :

$$\frac{\partial \Psi(x, z)}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \Psi_i(x, z)}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial \Psi_d(x, z)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \tag{4.32}$$

En suivant le même protocole que pour la polarisation TE, nous pouvons déterminer par le calcul les inconnues du problème pour tous les ordres. Les calculs sont disponibles dans l'annexe F. Nous obtenons l'expression récursive des inconnues suivante :

$$\tilde{\Psi}_d^{(k)} = \frac{j(k_x \tilde{z}) * \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(k)}}{\partial x} \right) - \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(k)}}{\partial z} \right) + j(k_x \tilde{z}) * \left( \sum_{m=0}^{k-1} \left( \prod_{*}^{k-1-m} \tilde{z} \right) \frac{(j k_z z)^{k-1-m}}{(k-1-m)!} \tilde{\Psi}_d^{(m)} [j(k_x - k_z)] \right)}{j k_z} \tag{4.33}$$

Les expressions de ces inconnues aux ordres 0, 1 et 2 sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Psi}_d^{(0)} = -\frac{\mathcal{F}\left(\frac{\partial\Psi_i^{(0)}}{\partial z}\right)}{jk_z} \\ \tilde{\Psi}_d^{(1)} = \frac{j(k_x\tilde{z}) * \mathcal{F}\left(\frac{\partial\Psi_i^{(0)}}{\partial x}\right) - \mathcal{F}\left(\frac{\partial\Psi_i^{(1)}}{\partial z}\right) - (k_x\tilde{z}) * (k_x\tilde{\Psi}_d^{(0)}) + \tilde{z} * (k_z^2\tilde{\Psi}_d^{(0)})}{jk_z} \\ \tilde{\Psi}_d^{(2)} = \frac{j(k_x\tilde{z}) * \mathcal{F}\left(\frac{\partial\Psi_i^{(1)}}{\partial x}\right) - \mathcal{F}\left(\frac{\partial\Psi_i^{(2)}}{\partial z}\right) - (k_x\tilde{z}) * (k_x\tilde{\Psi}_d^{(1)}) + \tilde{z} * (k_z^2\tilde{\Psi}_d^{(1)})}{jk_z} \\ -\frac{j(k_x\tilde{z}) * \tilde{z} * (k_xk_z\tilde{\Psi}_d^{(0)}) + \tilde{z} * \tilde{z} * \left(\frac{jk_z^3}{2}\tilde{\Psi}_d^{(0)}\right)}{jk_z} \end{array} \right. \quad (4.34)$$

Pour obtenir l'expression des courants surfaciques en polarisation TM, nous devons utiliser les inconnues (4.33) et les réinjecter dans l'expression perturbative des courants surfaciques que nous obtenons à partir de (4.31) :

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi_i + \Psi_d \\ &= \sum_{k=0}^N \left( \Psi_i^{(k)} + \Psi_d^{(k)} \right) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Nous obtenons pour les deux premiers ordres :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi^{(0)} = \Psi_i^{(0)} + \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}_d^{(0)} e^{jk_x x} dk_x \quad (\text{ordre 0}) \\ \Psi^{(1)} = \Psi_i^{(1)} + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \tilde{z} * (jk_z\tilde{\Psi}_d^{(0)}) + \tilde{\Psi}_d^{(1)} \right] e^{jk_x x} dk_x \quad (\text{ordre 1}) \\ \Psi^{(2)} = \Psi_i^{(2)} + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ -\tilde{z} * \tilde{z} * \left(\frac{k_z^2}{2}\tilde{\Psi}_d^{(0)}\right) + \tilde{z} * (jk_z\tilde{\Psi}_d^{(1)}) + \tilde{\Psi}_d^{(2)} \right] e^{jk_x x} dk_x \quad (\text{ordre 2}) \end{array} \right. \quad (4.36)$$

Il est possible d'insérer les termes perturbatifs de n'importe quelle onde incidente 2D dans l'expression des inconnues (4.34) et des courants surfaciques (4.36). Pour obtenir l'expression des courants en polarisation TM, il faut remplacer les inconnues précédentes (4.34) dans l'expression des courants aux différents ordres (4.36).

### 4.3.2 Surfaces diélectriques

Contrairement au cas de la surface PC, la diffraction par une surface diélectrique fait apparaître une onde transmise dans le milieu  $\Omega_1$  comme le montre la figure 4.3. Nous reprenons les expressions (2.21) et (2.22) du chapitre II pour exprimer les vecteurs d'ondes. De plus, nous simplifions la notation des composantes selon  $\hat{x}$  des vecteurs d'onde diffracté et transmis :  $k_{dx} = k_{tx} = k_x$ . Nous ajoutons également le vecteur d'onde  $\mathbf{k}_{ti}$  qui correspond au vecteur d'onde d'une onde transmise à travers une surface diélectrique lisse illuminée par une onde incidente avec un angle  $\theta_i$ . L'indice  $i$  de  $\mathbf{k}_{ti}$  fait donc référence à l'angle  $\theta_i$ .

$$\begin{cases} \mathbf{k}_i = k_{ix}\hat{\mathbf{x}} - k_{iz}\hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{k}_d = k_x\hat{\mathbf{x}} + k_{dz}\hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{k}_t = k_x\hat{\mathbf{x}} - k_{tz}\hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{k}_{ti} = k_{tix}\hat{\mathbf{x}} - k_{tiz}\hat{\mathbf{z}} \end{cases} \quad (4.37)$$

Le signe  $-$  pour les composantes selon  $\hat{\mathbf{z}}$  des vecteurs d'ondes des ondes incidente et transmise est lié à leur propagation "vers le bas". Chacun des vecteurs d'onde peut se décomposer en une composante selon  $\hat{\mathbf{x}}$  et  $\hat{\mathbf{z}}$  que l'on obtient à partir du nombre d'onde par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} k_{ix} &= \sqrt{\epsilon_{r,0}}k_0 \sin \theta_i & k_{iz} &= \sqrt{\epsilon_{r,0}}k_0 \cos \theta_i \\ k_x &= \sqrt{\epsilon_{r,0}}k_0 \sin \theta_r & k_{dz} &= \sqrt{\epsilon_{r,0}}k_0 \cos \theta_r \\ k_x &= \sqrt{\epsilon_{r,1}}k_0 \sin \theta_t & k_{tz} &= \sqrt{\epsilon_{r,1}}k_0 \cos \theta_t \end{aligned} \quad (4.38)$$

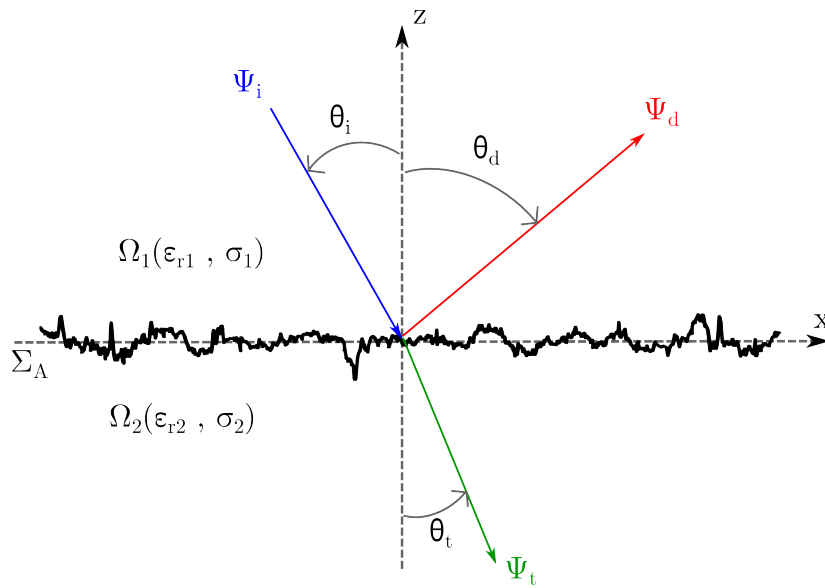


FIGURE 4.3 – Diffraction d'une onde incidente par une surface rugueuse aléatoire donnant naissance à une onde diffractée et une onde transmise

Pour une surface diélectrique, nous reprenons les conditions aux limites (2.14) exprimées au chapitre II :

$$\forall (x, z) \in \Sigma_A, \begin{cases} \Psi_0(x, z) = \Psi_1(x, z) \\ \mathbf{n} \cdot \nabla \Psi_0(x, z) = \rho_{01} \mathbf{n} \cdot \nabla \Psi_1(x, z) \end{cases} \quad (4.39)$$

Pour les champs  $\Psi_0$  et  $\Psi_1$ , et pour  $\rho_{01}$ , les indices 0 et 1 correspondent respectivement au milieu au-dessus de la surface  $\Omega_0$  et à l'espace en dessous de la surface  $\Omega_1$ .  $\rho_{01}$  est le contraste et représente le rapport de la permittivité diélectrique relative du milieu  $\Omega_0$  sur celle du milieu  $\Omega_1$ . Le champ dans le milieu  $\Omega_1$  est la somme du champ incident et du champ diffracté, et le champ du milieu  $\Omega_2$  correspond au champ transmis :

$$\begin{cases} \Psi_0(x, z) = \Psi_i(x, z) + \Psi_d(x, z) \\ \Psi_1(x, z) = \Psi_t(x, z) \end{cases} \quad (4.40)$$

Dans les milieux  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$ , l'onde diffractée, comme l'onde transmise, peuvent s'écrire comme une somme d'ondes planes. Nous avons alors les expressions suivantes :

$$\Psi_d(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}_d(k_x) e^{j(k_x x + k_{dz} z)} dk_x \quad \Psi_t(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}_t(k_x) e^{j(k_x x - k_{tz} z)} dk_x \quad (4.41)$$



Le signe des composantes  $(+k_{dz})$  et  $(-k_{tz})$  s'obtient en fonction du sens du vecteur d'onde : vers le haut pour l'onde diffractée et vers le bas pour l'onde transmise.

Les variations des hauteurs étant faibles devant la longueur d'onde, nous effectuons le développement perturbatif des grandeurs suivantes jusqu'à l'ordre  $N$  :

$$\begin{cases} \Psi_i(x, z) &= \sum_{k=0}^N \Psi_i^{(k)}(x, z) \\ \tilde{\Psi}_d(k_x) &= \sum_{k=0}^N \tilde{\Psi}_d^{(k)}(k_x) \\ \tilde{\Psi}_t(k_x) &= \sum_{k=0}^N \tilde{\Psi}_t^{(k)}(k_x) \\ e^{jk_z z} &= \sum_{k=0}^N (j)^k \frac{k_z^k z^k}{k!} \\ e^{-jk_{tz} z} &= \sum_{k=0}^N (-j)^k \frac{k_{tz}^k z^k}{k!} \end{cases}$$

En partant des équations des conditions aux limites (4.39) et en utilisant l'hypothèse de Rayleigh, illustrée par la figure 2.6, il est possible de déterminer les inconnues du problème  $\tilde{\Psi}_d^{(k)}(k_x)$  et  $\tilde{\Psi}_t^{(k)}(k_x)$ . Les calculs sont disponibles dans l'annexe E et permettent d'obtenir une formulation récursive des inconnues. En dehors des inconnues d'ordre 0 qui sont proportionnelles aux termes d'ordre 0 de l'onde incidente, les termes d'ordres supérieurs dépendent des inconnues d'ordres inférieurs et des termes de l'onde incidente du même ordre.

Les solutions récursives des systèmes pour l'ordre 0 sont :

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}_d^{(0)}(k_x) = \frac{-\mathcal{F}\left(\frac{\partial \Psi_i(x, z)}{\partial z}\right)^{(0)} - j\rho_{01}k_{tz}\mathcal{F}\left(\Psi_i^{(0)}(x, z)\right)}{j(k_z + \rho_{01}k_{tz})} \\ \tilde{\Psi}_t^{(0)}(k_x) = \frac{-\mathcal{F}\left(\frac{\partial \Psi_i(x, z)}{\partial z}\right)^{(0)} + jk_z\mathcal{F}\left(\Psi_i^{(0)}(x, z)\right)}{j(k_z + \rho_{01}k_{tz})} \end{cases} \quad (4.42)$$

et pour l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_d^{(1)}(k_x) &= \frac{(-jk_x \tilde{z}) * \mathcal{F}\left(\frac{\partial \Psi_i(x, z)}{\partial x}\right)^{(0)}}{-j(k_z + \rho_{01}k_{tz})} (-jk_x \tilde{z}) \\ &+ \frac{1}{-j(k_z + \rho_{01}k_{tz})} \mathcal{F}\left(\frac{\partial \Psi_i(x, z)}{\partial z}\right)^{(1)} \\ &+ \frac{\rho_{01}jk_{tz}}{-j(k_z + \rho_{01}k_{tz})} \mathcal{F}\left(\Psi_i^{(1)}(x, z)\right) \\ &+ \frac{(k_x \tilde{z}) * \left(k_x \tilde{\Psi}_d^{(0)}(k_x)\right) - \rho_{01}k_{tz} \left(\tilde{z} * \left(k_z \tilde{\Psi}_d^{(0)}(k_x)\right)\right) - \tilde{z} * \left(k_z^2 \tilde{\Psi}_d^{(0)}(k_x)\right)}{-j(k_z + \rho_{01}k_{tz})} \\ &+ \frac{\rho_{01}(k_x \tilde{z}) * \left(k_x \tilde{\Psi}_t^{(0)}(k_x)\right) - \rho_{01}k_{tz} \left(\tilde{z} * \left(k_{tz} \tilde{\Psi}_t^{(0)}(k_x)\right)\right) + \rho_{01} \tilde{z} * \left(k_{tz}^2 \tilde{\Psi}_t^{(0)}(k_x)\right)}{-j(k_z + \rho_{01}k_{tz})} \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_t^{(1)}(k_x) &= \frac{-j(k_x \tilde{z}) * \mathcal{F}\left(\frac{\partial \Psi_i(x,z)^{(0)}}{\partial x}\right)}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})} \\
&+ \frac{1}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})} \mathcal{F}\left(\frac{\partial \Psi_i(x,z)^{(1)}}{\partial z}\right) \\
&+ \frac{-j k_z}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})} \mathcal{F}\left(\Psi_i^{(1)}(x,z)\right) \\
&+ \frac{(k_x \tilde{z}) * \left(k_x \tilde{\Psi}_d^{(0)}(k_x)\right) - \tilde{z} * \left(k_z^2 \tilde{\Psi}_d^{(0)}(k_x)\right) + k_z \left(\tilde{z} * \left(k_z \tilde{\Psi}_d^{(0)}(k_x)\right)\right)}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})} \\
&+ \frac{-\rho_{01}(k_x \tilde{z}) * \left(k_x \tilde{\Psi}_t^{(0)}(k_x)\right) + \rho_{01} \tilde{z} * \left(k_{tz}^2 \tilde{\Psi}_t^{(0)}(k_x)\right) + k_z \left(\tilde{z} * \left(k_{tz} \tilde{\Psi}_t^{(0)}(k_x)\right)\right)}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})}
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Pour l'ordre 2, l'expression récursive de l'inconnue  $\tilde{\Psi}_d^{(2)}$  est :

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_d^{(2)}(k_x) &= \frac{-j(k_x \tilde{z}) * \mathcal{F}\left(\frac{\partial \Psi_i(x,z)^{(1)}}{\partial x}\right)}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})} \\
&+ \frac{1}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})} \mathcal{F}\left(\frac{\partial \Psi_i(x,z)^{(2)}}{\partial z}\right) \\
&+ \frac{j \rho_{01} k_{tz}}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})} \mathcal{F}\left(\Psi_i^{(2)}(x,z)\right) \\
&+ \frac{j(k_x \tilde{z}) * \tilde{z} * \left(k_x k_z \tilde{\Psi}_d^{(0)}(k_x)\right) - \tilde{z} * \tilde{z} * \left(\frac{j k_z^3}{2} \tilde{\Psi}_d^{(0)}(k_x)\right) - \rho_{01} j k_{tz} \left(\tilde{z} * \tilde{z} * \left(\frac{k_z^2}{2} \tilde{\Psi}_d^{(0)}(k_x)\right)\right)}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})} \\
&+ \frac{-\tilde{z} * \left(k_z^2 \tilde{\Psi}_d^{(1)}(k_x)\right) + (k_x \tilde{z}) * \left(k_x \tilde{\Psi}_d^{(1)}(k_x)\right) - \rho_{01} k_{tz} \left(\tilde{z} * \left(k_z \tilde{\Psi}_d^{(1)}(k_x)\right)\right)}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})} \\
&+ \frac{\rho_{01} j(k_x \tilde{z}) * \tilde{z} * \left(k_x k_{tz} \tilde{\Psi}_t^{(0)}(k_x)\right) - \rho_{01} \tilde{z} * \tilde{z} * \left(\frac{j k_{tz}^3}{2} \tilde{\Psi}_t^{(0)}(k_x)\right) + \rho_{01} j k_{tz} \left(\tilde{z} * \tilde{z} * \frac{k_{tz}^2}{2} \tilde{\Psi}_t^{(0)}(k_x)\right)}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})} \\
&+ \frac{-\rho_{01}(k_x \tilde{z}) * \left(k_x \tilde{\Psi}_t^{(1)}(k_x)\right) + \rho_{01} \tilde{z} * \left(k_{tz}^2 \tilde{\Psi}_t^{(1)}(k_x)\right) - \rho_{01} k_{tz} \left(\tilde{z} * \left(k_{tz} \tilde{\Psi}_t^{(1)}(k_x)\right)\right)}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})}
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Comme nous ne nous intéressons pas aux champs transmis sous la surface, nous ne donnons pas ici l'expression de  $\tilde{\Psi}_t^{(2)}$ .

Pour obtenir les courants surfaciques, les expressions de ces inconnues, obtenues pour les polarisations TE et TM, doivent être intégrées dans les formulations des courants surfaciques  $\Psi$ , via les équations (4.30) et  $\frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{n}}$ , via les équations (4.36).

Il est à noter que d'après les conditions aux limites (2.14), en polarisation TE, les courants sont donnés, à la fois par la somme  $\frac{\partial \Psi_i}{\partial n} + \frac{\partial \Psi_d}{\partial n}$  et par  $\frac{\partial \Psi_t}{\partial n}$ . Les deux expressions obtenues doivent être égales d'après les conditions aux limites. Pour la polarisation TM, ils sont donnés par  $\Psi_i + \Psi_d$  d'une part et par  $\Psi_t$  d'autre part, et doivent également être égales. Une étape menant à la validation de nos résultats a consisté à valider numériquement ces égalités.

## 4.4 Courants à l'ordre 2 pour une onde incidente plane

Dans la section précédente, nous avons fourni les expressions des inconnues et des courants surfaciques du problème de la diffraction d'une onde incidente quelconque par une surface rugueuse (PC ou diélectrique). Ici, nous reprenons ces expressions et les calculons pour le cas d'une onde incidente plane.

### 4.4.1 Cas d'une surface parfaitement conductrice

#### Problème de Dirichlet (TE)

Pour une onde plane en polarisation TE illuminant une surface rugueuse aléatoire, nous avons vu que les courants surfaciques s'expriment en fonction des inconnues du problème par les équations (4.30). Nous avons déterminé les expressions des inconnues des différents ordres dans le domaine spectral en (4.29). En incorporant les termes perturbatifs correspondants (A.1) de l'onde plane de l'annexe A, nous obtenons les inconnues suivantes jusqu'à l'ordre 2 :

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}_d^{(0)}(k_x) = -\Psi_{i0}\delta_{k_{ix}} \\ \tilde{\Psi}_d^{(1)}(k_x) = 2jk_{iz}\Psi_{i0}\tilde{z}_{k_{ix}} \\ \tilde{\Psi}_d^{(2)}(k_x) = 2\Psi_{i0}k_{iz}\tilde{z} * (k_z\tilde{z}_{k_{ix}}) \end{cases} \quad (4.46)$$

où nous avons adopté les notations  $\tilde{z}_{k_{ix}} = \tilde{z}(k_x - k_{ix})$  et  $\delta_{k_{ix}} = \delta(k_x - k_{ix})$ . Ces expressions sont conformes à celles du livre de Tsang et al. [35].

En intégrant les expressions des inconnues (4.46) et des termes perturbatifs de l'onde incidente plane (A.1) de l'annexe A dans l'expression des courants (4.19) en polarisation TE, nous obtenons les courants surfaciques pour une onde incidente plane :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Psi_i^{(0)}(x, z)}{\partial n} + \frac{\Psi_d^{(0)}(x, z)}{\partial n} = -2jk_{iz} \frac{\Psi_{i0}e^{jk_{ix}x}}{\sqrt{1+\gamma^2}} \\ \frac{\Psi_i^{(1)}(x, z)}{\partial n} + \frac{\Psi_d^{(1)}(x, z)}{\partial n} = - (i\gamma k_{ix} + k_{iz}^2) \frac{\Psi_{i0}e^{jk_{ix}x}}{\sqrt{1+\gamma^2}} \\ \quad + \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ jk_z \tilde{\Psi}_d^{(1)} + (k_x \tilde{z}) * (k_x \tilde{\Psi}_d^{(0)}) - \tilde{z} * (k_z^2 \tilde{\Psi}_d^{(0)}) \right] e^{jk_x x} dk_x \\ \frac{\Psi_i^{(2)}(x, z)}{\partial n} + \frac{\Psi_d^{(2)}(x, z)}{\partial n} = \left( \frac{jk_{iz}^3 z^2}{2} - \gamma k_{ix} k_{iz} z \right) \frac{\Psi_{i0}e^{jk_{ix}x}}{\sqrt{1+\gamma^2}} \\ \quad + \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ jk_z \tilde{\Psi}_d^{(2)} + (k_x \tilde{z}) * (k_x \tilde{\Psi}_d^{(1)}) - \tilde{z} * (k_z^2 \tilde{\Psi}_d^{(1)}) \right] e^{jk_x x} dk_x \\ \quad + \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ i(k_x \tilde{z}) * \tilde{z} * (k_x k_z \tilde{\Psi}_d^{(0)}) - \tilde{z} * \tilde{z} * \left( \frac{jk_z^3}{2} \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) \right] e^{jk_x x} dk_x \end{array} \right. \quad (4.47)$$

La solution de l'inconnue d'ordre 0 est la même que pour un problème de diffraction par une surface lisse de taille infinie : elle est indépendante de la rugosité. L'inconnue d'ordre 1 est proportionnelle à la transformée de Fourier des hauteurs translatée de  $k_{ix}$ . Chacune des composantes spectrales de la surface apparaît dans l'expression du champ diffracté. L'inconnue d'ordre 2, résultat de la convolution de la transformée de Fourier des hauteurs et de la transformée de Fourier des hauteurs translatée de  $k_{ix}$ , traduit les interactions d'ordre 2 sur la surface, soit les doubles réflexions de l'onde incidente sur la surface.

### Problème de Neumann (TM)

Pour le cas particulier d'une onde incidente plane en polarisation TM, les expressions des courants surfaciques sur une surface diélectrique aux différents ordres sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi^{(0)} = \Psi_{i0} e^{jk_{ix}x} + \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}_d^{(0)}(k_x) e^{jk_x x} dk_x \quad (\text{ordre 0}) \\ \Psi^{(1)} = -jk_{iz}z \Psi_{i0} e^{jk_{ix}x} + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \tilde{z} * \left( jk_z \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) + \tilde{\Psi}_d^{(1)} \right] e^{jk_x x} dk_x \quad (\text{ordre 1}) \\ \Psi^{(2)} = -\frac{k_{iz}^2 z^2}{2} \Psi_{i0} e^{jk_{ix}x} + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ -\tilde{z} * \tilde{z} * \left( \frac{k_z^2}{2} \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) + \tilde{z} * \left( jk_z \tilde{\Psi}_d^{(1)} \right) + \tilde{\Psi}_d^{(2)} \right] e^{jk_x x} dk_x \quad (\text{ordre 2}) \end{array} \right. \quad (4.48)$$

Les inconnues du système d'équation (4.34) dépendent des inconnues des ordres inférieurs (sauf pour l'ordre 0) et des termes d'ordre équivalent de l'onde incidente. En prenant la décomposition en série de l'onde plane de l'Annexe A et en l'intégrant dans l'expression des inconnues (4.34), nous obtenons après simplification :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Psi}_d^{(0)} = \Psi_{i0} \delta(k_x - k_{ix}) \\ \tilde{\Psi}_d^{(1)} = \frac{2j}{k_z} (k_x k_{ix} - k_0^2) \tilde{z}_{k_{ix}} \\ \tilde{\Psi}_d^{(2)} = \frac{2(k_x k_{ix} - k_0^2) \tilde{z}_{k_{ix}} \left[ k_z * \tilde{z} - \frac{k_x}{k_z} * k_x \tilde{z} \right]}{k_z} \end{array} \right. \quad (4.49)$$

En intégrant les expressions d'ordre 0 de (4.49) dans (4.48), nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi^{(0)} = 2\Psi_{i0} e^{jk_{ix}x} \quad (\text{Ordre 0}) \\ \Psi^{(1)} = -2jk_{iz}z \Psi_{i0} e^{jk_{ix}x} + \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}_d^{(1)} e^{jk_x x} dk_x \quad (\text{Ordre 1}) \\ \Psi^{(2)} = -2\frac{k_{iz}^2 z^2}{2} \Psi_{i0} e^{jk_{ix}x} + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \tilde{z} * \left( jk_z \tilde{\Psi}_d^{(1)} \right) + \tilde{\Psi}_d^{(2)} \right] e^{jk_x x} dk_x \quad (\text{Ordre 2}) \end{array} \right. \quad (4.50)$$

Nous venons de traiter analytiquement le problème de la diffraction électromagnétique par une surface rugueuse parfaitement conductrice de longueur infinie éclairée par une onde plane pour les polarisations TE et TM. Dans le cas d'une surface de longueur finie, nous avons expliqué l'usage de l'onde Thorsos en simulation numérique et comment l'utiliser pour résoudre analytiquement ce problème. La résolution des équations aux conditions limites a permis de déterminer les inconnues du domaine spectral. A partir de ces inconnues, nous avons déterminé les courants surfaciques pour chacune des polarisations.

Dans la partie qui suit, nous allons traiter, non plus le cas de la diffraction par une surface PC mais par une surface diélectrique, ce qui représente un modèle plus réaliste de sol rugueux.

## 4.4.2 Surface diélectrique

Lorsque l'onde incidente est une onde plane, les solutions aux inconnues des équations (4.42), (4.43) et (4.45) peuvent se simplifier comme le montre l'annexe E. Les inconnues d'ordre 0 sont alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Psi}_d^{(0)}(k_x) = \Psi_{i0} \delta(k_x - k_{ix}) \left( \frac{k_{iz} - \rho_{01} k_{tiz}}{\rho_{01} k_{tiz} + k_{iz}} \right) \\ \tilde{\Psi}_t^{(0)}(k_x) = \Psi_{i0} \delta(k_x - k_{ix}) \left( \frac{2k_{iz}}{\rho_{01} k_{tiz} + k_{iz}} \right) \end{array} \right. \quad (4.51)$$

Nous reconnaissons dans  $\tilde{\Psi}_d^{(0)}$  et  $\tilde{\Psi}_t^{(0)}$  les coefficients de Fresnel en réflexion (2.25) et en transmission (2.26) pour une surface lisse.

Pour l'ordre 1, nous avons :

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}_d^{(1)}(k_x) = 2k_{iz}\Psi_{i0}\tilde{z}(k_x - k_{ix}) \frac{(1 - \rho_{01})(k_{ix}k_x - \rho_{01}k_{tiz}k_{tz}) - k_0^2(1 - \rho_{01}\epsilon_{r1})}{-j(k_z + \rho_{01}k_{tz})(\rho_{01}k_{tiz} + k_{iz})} \\ \tilde{\Psi}_t^{(1)}(k_x) = 2k_{iz}\Psi_{i0}\tilde{z}(k_x - k_{ix}) \frac{(1 - \rho_{01})(k_xk_{ix} + k_{tiz}k_z) - k_0^2(1 - \rho_{01}\epsilon_{r1})}{-j(\rho_{01}k_{tiz} + k_{iz})(k_z + \rho_{01}k_{tz})} \end{cases} \quad (4.52)$$

En polarisation TE,  $\rho_{01} = 1$ . Nous remarquons alors que

$$\tilde{\Psi}_d^{(1)}(k_x) = \tilde{\Psi}_t^{(1)}(k_x) = 2k_{iz}\Psi_{i0}\tilde{z}(k_x - k_{ix}) \frac{-k_0^2(1 - \epsilon_{r1})}{-j(k_z + k_{tz})(k_{tiz} + k_{iz})} \quad (4.53)$$

Pour l'ordre 2, nous avons :

$$\tilde{\Psi}_d^{(2)}(k_x) = -\Psi_{i0}k_{iz}\tilde{B} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{z}(k'_x - k_{ix})\tilde{z}(k_x - k'_x) [-k_{tz} - k_{tiz} + 2k'_{tz} - 2k'_z] dk'_x \quad (4.54)$$

avec  $\tilde{B} = \frac{k_0^2(\epsilon_{r1}-1)}{(k_{tz}+k_z)(k_{tiz}+k_{iz})}$ .

Nous venons de traiter le cas de la diffraction d'une onde électromagnétique par une surface diélectrique de longueur infinie, éclairée par une onde incidente plane pour les deux polarisations TE et TM. Nous avons fourni une expression analytique des composantes spectrales aux ordres 0, 1 et 2. L'ordre 0 fait apparaître les coefficients de Fresnel en réflexion et en transmission. Nous avons également déterminé les courants surfaciques pour ce type de surface.

Dans la suite, nous allons nous intéresser aux champs diffractés au-dessus de la surface. Des traitements statistiques seront employés pour déterminer le champ diffusé cohérent.

## 4.5 Diffusion par une surface rugueuse à l'aide de la MPP

### 4.5.1 Champ diffracté

D'après le chapitre II, nous avons deux méthodes pour calculer le champ diffracté. La première est basée sur le principe de Huygens (2.17) : à partir de la connaissance des courants surfaciques et des fonctions de Green, nous sommes capables de calculer le champ diffracté dans tout le milieu  $\Omega_0$ . La seconde méthode est basée sur la décomposition en onde plane (4.61) et l'hypothèse de Rayleigh, illustrée par la figure 2.6. En réinjectant l'expression des inconnues des différents ordres dans l'équation (4.21), nous obtenons l'expression du champ diffracté dans  $\Omega_0$  :

$$\Psi_d(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \tilde{\Psi}_d^{(0)} + \tilde{\Psi}_d^{(1)} + \tilde{\Psi}_d^{(2)} \right) e^{j(k_x x + k_z z)} dk_x \quad (4.55)$$

Dans cette équation,  $(x, z)$  ne sont plus sur la surface mais dans le milieu  $\Omega_0$ . L'exponentielle ne peut plus être décomposée en série de Taylor.

Par analogie avec la **MdM**, nous avons suivi la méthode avec le principe de Huygens pour calculer numériquement le champ diffracté. Il serait intéressant de comparer numériquement ces deux méthodes. Nous ne l'avons pas fait dans ces travaux.

Nous donnons dans la suite les expressions du champ diffracté que nous avons implantées numériquement. Nous avons vu que le champ diffracté peut s'écrire sous la forme (2.16), où  $\Psi_0$  et  $\frac{\Psi_0}{\partial n}$  sont les courants surfaciques. Dans la suite, nous les notons  $\Psi$  et  $\frac{\Psi}{\partial n}$ . La méthode **MPP** nous a permis de calculer les courants surfaciques jusqu'à l'ordre 2 dans le cas d'une onde incidente plane. Ils sont donnés par les expressions (4.61) pour le cas d'une surface PC et la polarisation TE, (4.48) pour une surface PC et la polarisation TM et (4.47), (4.50) pour une surface diélectrique et les deux polarisations TE et TM.

Pour la surface PC et la polarisation TE, comme  $\Psi = 0$  et  $\frac{\partial \Psi}{\partial n} = \frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial n} + \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial n} + \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial n}$ , en prenant en compte les termes de courants jusqu'à l'ordre 2 (4.47), le champ diffracté s'écrit :

$$\Psi_d(\mathbf{r}') = - \int_S g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[ \frac{\partial \Psi_0^{(0)}(\mathbf{r})}{\partial n} + \frac{\partial \Psi_0^{(1)}(\mathbf{r})}{\partial n} + \frac{\partial \Psi_0^{(2)}(\mathbf{r})}{\partial n} \right] dS, \text{ si } \mathbf{r}' \in \Omega_0 \quad (4.56)$$

Pour la surface PC et la polarisation TM, comme  $\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0$  et  $\Psi = \Psi^{(0)} + \Psi^{(1)} + \Psi^{(2)}$ , en prenant en compte les termes de courants jusqu'à l'ordre 2 (4.50), le champ diffracté s'écrit :

$$\Psi_d(\mathbf{r}') = \int_S \left[ \Psi_0^{(0)} + \Psi_0^{(1)} + \Psi_0^{(2)} \right] \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} dS, \text{ si } \mathbf{r}' \in \Omega_0 \quad (4.57)$$

Pour la surface diélectrique, le champ diffracté s'écrit :

$$\begin{aligned} \Psi_d(\mathbf{r}') = & \int_S \left( \Psi_0^{(0)}(\mathbf{r}) + \Psi_0^{(1)}(\mathbf{r}) + \Psi_0^{(2)}(\mathbf{r}) \right) \frac{\partial g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} dS \\ & - \int_S g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left( \frac{\partial \Psi_0^{(0)}(\mathbf{r})}{\partial n} + \frac{\partial \Psi_0^{(1)}(\mathbf{r})}{\partial n} + \frac{\partial \Psi_0^{(2)}(\mathbf{r})}{\partial n} \right) dS, \text{ si } \mathbf{r}' \in \Omega_0 \end{aligned} \quad (4.58)$$

où  $\frac{\partial \Psi}{\partial n}$  et  $\Psi$  sont donnés par (4.30) et (4.36) avec les inconnues (4.51), (4.52) et (E.38). Les résultats de la polarisation TE s'obtiennent en prenant  $\rho_{01} = 1$  et ceux de la polarisation TM en prenant  $\rho_{01} = \frac{\epsilon_{r0}}{\epsilon_{r1}}$ .

## 4.5.2 Champ diffusé cohérent

Les champs diffractés (4.56), (4.57) et (4.58) permettent de calculer la diffraction pour une surface rugueuse déterministe. Pour obtenir l'expression du champ diffusé cohérent, il faut calculer la moyenne statistique des champs diffractés en suivant la définition (2.71). La variable aléatoire dans l'expression des champs diffractés est  $z$ , qui se situe sur la surface rugueuse. Prenons l'exemple du calcul du champ diffusé avec l'expression (4.56). En supposons que  $g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  et  $\frac{\partial \Psi_0^{(0)}(\mathbf{r})}{\partial n}$  sont des processus aléatoires indépendants (ce qui serait à montrer), nous aurions :

$$\langle \Psi_d(\mathbf{r}') \rangle = \int_S - \langle g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle \left[ \left\langle \frac{\partial \Psi_0^{(0)}(\mathbf{r})}{\partial n} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \Psi_0^{(1)}(\mathbf{r})}{\partial n} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \Psi_0^{(2)}(\mathbf{r})}{\partial n} \right\rangle \right] dS, \text{ si } \mathbf{r}' \in \Omega_0 \quad (4.59)$$

Le calcul des termes  $\left\langle \frac{\partial \Psi_0^{(0)}(\mathbf{r})}{\partial n} \right\rangle$ ,  $\left\langle \frac{\partial \Psi_0^{(1)}(\mathbf{r})}{\partial n} \right\rangle$  et  $\left\langle \frac{\partial \Psi_0^{(2)}(\mathbf{r})}{\partial n} \right\rangle$  n'a pas vraiment de sens physique car  $\mathbf{r}$  est une variable d'espace aléatoire et nous cherchons à calculer la moyenne des courants qui ont une valeur aléatoire, sur une position qui est elle-même aléatoire. Au final, nous ne savons pas en quelles positions est calculée l'espérance des courants et à quoi elle correspond physiquement.

Pour palier à ce problème, nous utilisons la décomposition en ondes planes (4.60) et l'hypothèse de Rayleigh (2.6) pour exprimer le champ diffracté, il s'écrit alors :

$$\langle \Psi_d(x, z) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}_d e^{jk_x x + jk_z z} dk_x \quad (4.60)$$

Nous décomposons  $\tilde{\Psi}_d$  en termes perturbatifs jusqu'à l'ordre 2, nous avons pour tout point  $(x, z) \in \Omega_0$  :

$$\Psi_d(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \tilde{\Psi}_d^{(0)} + \tilde{\Psi}_d^{(1)} + \tilde{\Psi}_d^{(2)} \right) e^{j(k_x x + k_z z)} dk_x \quad (4.61)$$

où  $(x, z) \in \Omega_0$  ne sont plus sur la surface rugueuse mais dans l'espace.  $z$  est alors une grandeur déterministe indiquant la position du point auquel nous calculons le champ diffracté. Par contre, les expressions des  $\tilde{\Psi}_d^{(0)}$ ,  $\tilde{\Psi}_d^{(1)}$  et  $\tilde{\Psi}_d^{(2)}$  contiennent les variables  $\tilde{z}$  et  $\gamma$ , qui elles sont liées aux points de la surface rugueuse.

Le calcul de l'espérance du champ diffracté donne le champ diffusé cohérent :

$$\langle \Psi_d(x, z) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \langle \tilde{\Psi}_d^{(0)} \rangle + \langle \tilde{\Psi}_d^{(1)} \rangle + \langle \tilde{\Psi}_d^{(2)} \rangle \right] e^{j(k_x x + k_z z)} dk_x \quad (4.62)$$

Calculons l'espérance des inconnues (4.46) obtenues pour la polarisation TE et la surface PC, nous obtenons :

$$\begin{cases} \langle \tilde{\Psi}_d^{(0)}(k_x) \rangle = -\Psi_{i0} \delta_{k_{ix}} \\ \langle \tilde{\Psi}_d^{(1)}(k_x) \rangle = 0 \\ \langle \tilde{\Psi}_d^{(2)}(k_x) \rangle = 2\Psi_{i0} k_{iz} \delta(k_x - k_{ix}) \int_{-\infty}^{+\infty} k'_z W(k'_x - k_{ix}) dk'_x \end{cases} \quad (4.63)$$

L'espérance de l'ordre  $\tilde{\Psi}_d^{(1)}$  a été obtenue en considérant le fait que  $\langle \tilde{z}_{k_{ix}} \rangle = 0$  car  $\tilde{z}$  est un processus aléatoire de moyenne nulle (cf construction de la surface rugueuse). De plus,  $\langle \tilde{z} * \tilde{z}_{k_{ix}} \rangle = \delta(k_x - k_{ix}) \int_{-\infty}^{+\infty} W(k'_x - k_{ix}) dk'_x$  où  $W$  est la densité spectrale de puissance des hauteurs définie en (3.3.3) selon la nature de la FA. Ainsi, l'expression du champ diffusé cohérent se calcule à partir des termes perturbatifs 0 et 2 :

$$\begin{aligned} \langle \Psi_d(x, z) \rangle_{TE, coh} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \langle \tilde{\Psi}_d^{(0)} \rangle + \langle \tilde{\Psi}_d^{(2)} \rangle \right] e^{j(k_x x + k_z z)} dk_x \\ &= \Psi_{i0} e^{j(k_x x + k_z z)} \int_{-\infty}^{+\infty} [-1 + 2k_{iz} k'_z W(k'_x - k_{ix})] dk'_x \end{aligned} \quad (4.64)$$

Pour la polarisation TM et une surface PC, l'espérance des inconnues (4.49) donne :

$$\begin{cases} \langle \tilde{\Psi}_d^{(0)} \rangle = \Psi_{i0} \delta(k_x - k_{ix}) \\ \langle \tilde{\Psi}_d^{(1)} \rangle = 0 \\ \langle \tilde{\Psi}_d^{(2)} \rangle = -\frac{2}{k_{iz}} \delta(k_x - k_{ix}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(k'_x k_{ix} - k_0^2)^2}{k'_z} W(k'_x - k_{ix}) dk'_x \end{cases} \quad (4.65)$$

En intégrant ces expressions dans (4.62), le champ diffusé cohérent s'écrit :

$$\langle \Psi_d(x, z) \rangle_{TM, coh} = \Psi_{i0} e^{j(k_x x + k_z z)} \left[ 1 - \frac{2}{k_{iz}} \delta(k_x - k_{ix}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(k'_x k_{ix} - k_0^2)^2}{k'_z} W(k'_x - k_{ix}) dk'_x \right] \quad (4.66)$$

Que ce soit pour la polarisation TE comme pour la polarisation TM, nous pouvons remarquer que le champ cohérent, grâce au terme  $e^{j(k_{ix} x + k_{iz} z)}$ , est diffusé uniquement dans la direction spéculaire. L'expression du



champ diffracté par une surface lisse PC, en polarisation TE peut s'écrire :  $\Psi_d(x, z) = -\Psi_{i0}e^{j(k_{ix}x+k_{iz}z)}$  et pour la polarisation TM :  $\Psi_d(x, z) = \Psi_{i0}e^{j(k_{ix}x+k_{iz}z)}$ . Nous remarquons que pour une surface rugueuse, le module de l'amplitude du champ diffusé cohérent est inférieure à l'amplitude du champ diffracté par une surface lisse. Nous pouvons interpréter cela par le fait qu'en présence d'une surface rugueuse, le champ ne se concentre plus uniquement dans la direction spéculaire mais qu'une partie de l'énergie est diffusée dans les autres directions. Ainsi, l'énergie dans la direction spéculaire est plus faible.

Pour la surface diélectrique et la polarisation TE, la moyenne des inconnues données en (4.51), (4.52) et (E.38) permet d'obtenir :

$$\begin{cases} \langle \tilde{\Psi}_d^{(0)} \rangle = \Psi_{i0} \delta(k_x - k_{ix}) \left( \frac{k_{iz} - \rho_{01} k_{tiz}}{\rho_{01} k_{tiz} + k_{iz}} \right) \\ \langle \tilde{\Psi}_d^{(1)} \rangle = 0 \\ \langle \tilde{\Psi}_d^{(2)} \rangle = 2\Psi_{i0} k_{iz} \frac{k_0^2 (\epsilon_{r1} - 1)}{(k_{tiz} + k_{iz})^2} \delta(k_x - k_{ix}) \int_{-\infty}^{+\infty} W(k'_x - k_{ix}) [k'_z - 2k'_{tz} + 2k_{tiz}] dk'_x \end{cases} \quad (4.67)$$

Comme pour la surface PC, l'espérance de l'inconnue d'ordre 1 étant nulle, le champ cohérent diffusé par la surface diélectrique est obtenu à partir des termes perturbatifs d'ordre 0 et 2 :

$$\langle \Psi_d(x, z) \rangle_{TE, coh}^{DI} = \Psi_{i0} e^{j(k_{ix}x + k_{iz}z)} \left[ \mathcal{R}_{\mathcal{F}, TE} + \frac{2k_{iz} k_0^2 (\epsilon_{r1} - 1)}{(k_{tiz} + k_{iz})^2} \right] \int_{-\infty}^{+\infty} W(k'_x - k_{ix}) [k'_z - k'_{tz} + k_{tiz}] dk'_x \quad (4.68)$$

où  $\mathcal{R}_{\mathcal{F}, TE}$  est le coefficient de Fresnel en réflexion (2.25) pour la polarisation TE.

A l'aide de la méthode **MPP**, nous avons pu déterminer l'expression des champs cohérents en tout point de l'espace  $\Omega_0$ . En suivant la même démarche, nous pourrions déterminer les expressions des champs transmis cohérents dans le milieu  $\Omega_1$  à l'aide des termes du champ transmis :  $\Psi_t^{(0)}$ ,  $\Psi_t^{(1)}$  et  $\Psi_t^{(2)}$ . Nous n'avons pas traité le champ transmis cohérent dans nos travaux.

Nous avons vu qu'une grandeur souvent utilisée dans la communauté scientifique est le coefficient de diffusion bistatique incohérent dont la définition est donnée en (2.63). Nous utilisons la **MPP** pour calculer ce coefficient dans la partie qui suit.

### 4.5.3 Coefficient de diffusion

En suivant la démarche de Tsang et Kong [35], nous retrouvons bien les expressions suivantes du coefficient de diffusion bistatique incohérent pour la polarisation TE :

$$\sigma_{incoh}^{PC, TE} = 4k^3 \cos^2 \theta_d \cos \theta_i W(k_0 \sin \theta_d - k_0 \sin \theta_i) \quad (4.69)$$

et pour la polarisation TM :

$$\sigma_{incoh}^{PC, TM} = \frac{4k_0^3 (\sin \theta_d \sin \theta_i - 1)^2}{\cos \theta_i} W(k_0 \sin \theta_d - k_0 \sin \theta_i) \quad (4.70)$$

Dans la suite, nous suivons la même démarche pour déterminer les coefficients de diffusion bistatique incohérent pour des surfaces diélectriques. Nous obtenons au final pour la polarisation TE :

$$\sigma_{incoh}^{DI, TE} = 4k^3 \cos^2 \theta_d \cos \theta_i W(k_0 \sin \theta_d - k_0 \sin \theta_i) \left[ \frac{(\epsilon_{r1} - 1)^2}{\left( \sqrt{\epsilon_{r1} - \sin^2 \theta_i} + \cos \theta_i \right)^2 \left( \sqrt{\epsilon_{r1} - \sin^2 \theta_d} + \cos \theta_d \right)^2} \right] \quad (4.71)$$



Et pour la polarisation TM :

$$\sigma_{incoh}^{DI, TM} = \frac{4k_0^3 (\sin \theta_d \sin \theta_i - 1)^2}{\cos \theta_i} W(k_0 \sin \theta_d - k_0 \sin \theta_i) \times \left[ \frac{(1 - \frac{\epsilon_{r0}}{\epsilon_{r1}})^2 \left( \sin \theta_d \sin \theta_i - \frac{\epsilon_{r0}}{\epsilon_{r1}} \sqrt{\epsilon_{r1} - \sin^2 \theta_d} \sqrt{\epsilon_{r1} - \sin^2 \theta_i} \right)^2}{\left( \sqrt{\epsilon_{r1} - \sin^2 \theta_i} + \cos \theta_i \right)^2 \left( \sqrt{\epsilon_{r1} - \sin^2 \theta_d} + \cos \theta_d \right)^2} \right] \quad (4.72)$$

Au final, l'expression des coefficients de diffusion incohérent pour une surface diélectrique sont conformes à ceux issus de [108].

## 4.6 Comparaison avec la Méthode des Moments

### 4.6.1 Introduction

La **MPP** est un modèle asymptotique, c'est-à-dire qu'elle utilise des approximations mathématiques ou physiques pour déterminer sa formulation analytique. Les approximations sont valides dans un domaine limité. Il est important de le délimiter pour restreindre l'usage du modèle aux configurations valides. L'objet de cette partie est de présenter notre démarche puis de déterminer le domaine de validité de **MPP**.

### 4.6.2 Approximations du modèle

Dans une étape de la **MPP**, nous effectuons un développement en série de Taylor des fonctions exponentielles qui apparaissent dans les expressions des champs incidents, diffractés et transmis. Ce développement en série se fait selon le paramètre  $k_0 \cos(\theta_i)z$  pour le champ incident. Il peut être fait à la condition suivante :

$$|k_0 \cos(\theta_i)z| \ll 1 \quad (4.73)$$

Pour les champs diffracté et transmis, les expressions sont équivalentes mais font apparaître respectivement les angles  $\theta_d$  et  $\theta_t$ .

**Approximation 1 :** *Quel que soit l'angle d'incidence, les hauteurs de la surface doivent être faibles devant la longueur d'onde*

Remarque : Lorsque l'angle d'incidence devient rasant :  $\cos(\theta_i) \rightarrow 0$ , il contribue fortement à l'ob-

tention de la condition (4.73). La contrainte des hauteurs faibles devant la longueur d'onde est alors moins importante. Concrètement, cela signifie que, nous pouvons appliquer le modèle **MPP** aux incidences rasantes à des surfaces avec un écart-type des hauteurs  $\sigma_h$  supérieur à celui de surfaces éclairées en incidence normale.

Lors du développement des équations pour déterminer les inconnues du modèle, nous considérons que la dérivée des hauteurs  $\gamma$  est du même ordre perturbatif que le profil des hauteurs  $z$ , soit l'ordre 1.

**Approximation 2 :** *Les pentes de la surface doivent être faibles :  $|\gamma| \ll 1$ .*

Nous notons  $u = k_0 \cos(\theta_i)z$ , la fonction exponentielle  $e^u$  est remplacée par une série de Taylor selon le paramètre  $u$  :

$$e^u = \sum_{n=0}^N \frac{u^n}{n!} + o(u^N) \quad (4.74)$$

où  $o(u^n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ . Plus l'ordre  $N$  est élevé et plus la décomposition en série est précise. Or, dans l'utilisation de **MPP**, nous nous contentons de calculer les premiers ordres de la série (0, 1 et 2).

**Approximation 3** : Seuls les termes aux premiers ordres de la série de Taylor sont calculés.

Pour déterminer les expressions des inconnues dans la méthode **MPP**, nous avons fait appel à l'hypothèse de Rayleigh. Cette hypothèse, comme nous l'avons abordé au chapitre II, a un domaine de validité limité et constitue donc une approximation du modèle.

**Approximation 4** : L'hypothèse de Rayleigh impose son domaine de validité à la méthode **MPP**.

L'ensemble de ces approximations contribue à limiter le domaine de validité du modèle **MPP**.

### 4.6.3 Validation du modèle

Pour valider le modèle **MPP**, nous avons effectué plusieurs tests numériques, notamment :

- pour l'ordre 0, comparer analytiquement et numériquement les résultats de l'ordre 0 à ceux de la diffraction par une surface lisse ;
- vérifier numériquement les conditions aux limites (2.15) et (2.14) pour chacune des polarisations et pour chaque type de surface ;
- tester analytiquement et numériquement la convergence des inconnues obtenues pour la surface diélectrique (4.51), (4.52) et (E.38) vers les inconnues de la surface PC (4.46) et (4.49) lorsque la conductivité électrique  $\sigma \rightarrow \infty$  ;
- comparer les expressions analytiques obtenues avec la **MPP** avec celles de la littérature ;
- vérifier numériquement les égalités à chaque d'ordre qu'imposent les conditions aux limites.

Ces tests ne sont pas suffisants pour valider le modèle. Nous avons donc décidé de comparer nos résultats avec ceux d'une méthode de référence : la **MdM**. Nous présentons plus bas la comparaison des courants surfaciques obtenus grâce aux deux méthodes.

### 4.6.4 Cas d'une surface déterministe

Nous considérons le scénario des figures 4.1 et 4.3. Une onde incidente de Thorsos, de paramètre  $g = L/6$ , de longueur d'onde  $\lambda = 1$  m, d'amplitude 1 V/m vient illuminer la surface rugueuse de longueur  $L = 60$  m représentée sur la figure 4.4 (pour la surface PC). La FA de la surface rugueuse est de nature exponentielle, son écart-type est de 1.47 cm et sa longueur de corrélation de 0.56 m. La figure 4.5 illustre la forme du

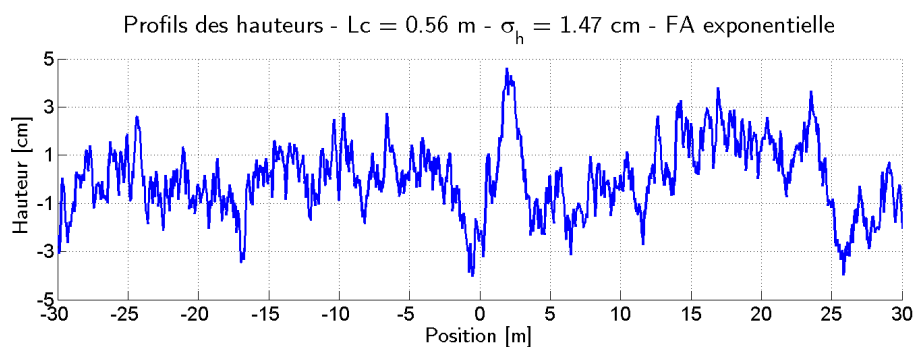


FIGURE 4.4 – Surface rugueuse aléatoire, PC, de FA de nature exponentielle, de longueur  $L = 60$  m, d'écart-type des hauteurs  $\sigma_h = 1.47$  cm et de longueur de corrélation  $L_c = 0.56$  m

module du champ incident qui illumine la surface rugueuse sous une incidence de  $\theta_i = 30$  degrés. Avec les

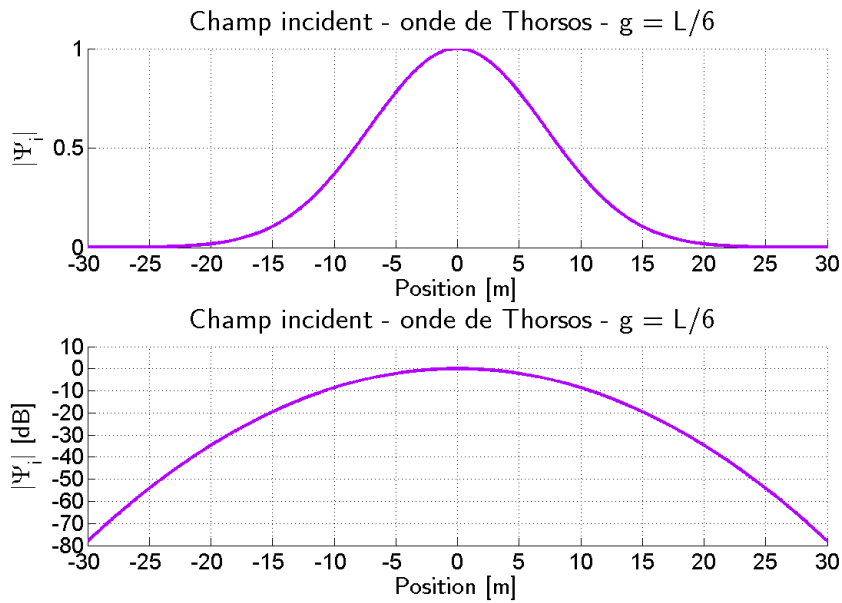


FIGURE 4.5 – Représentation du champ incident de l’onde de Thorsos illuminant la surface rugueuse, en linéaire sur le dessus, en logarithmique en-dessous ( $20 \log(|\Psi_i|)$ ).

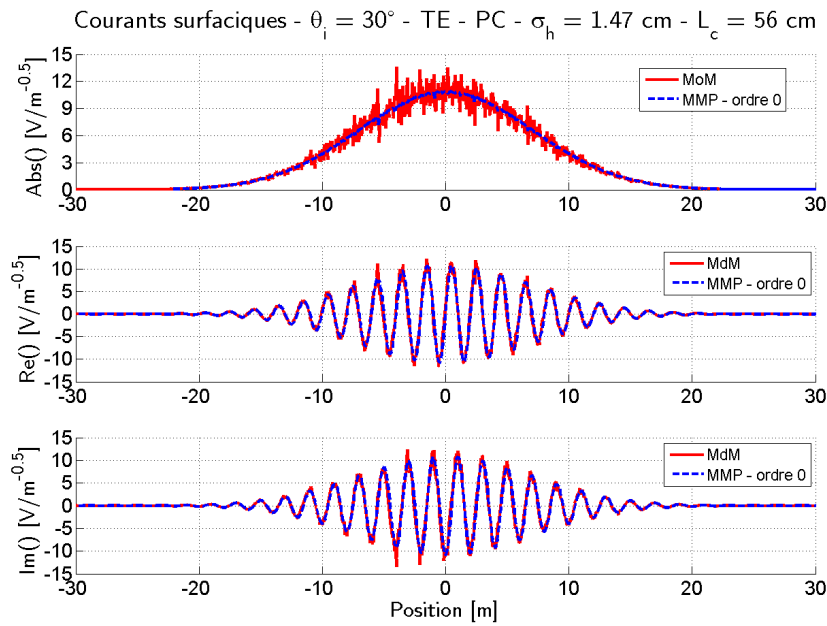
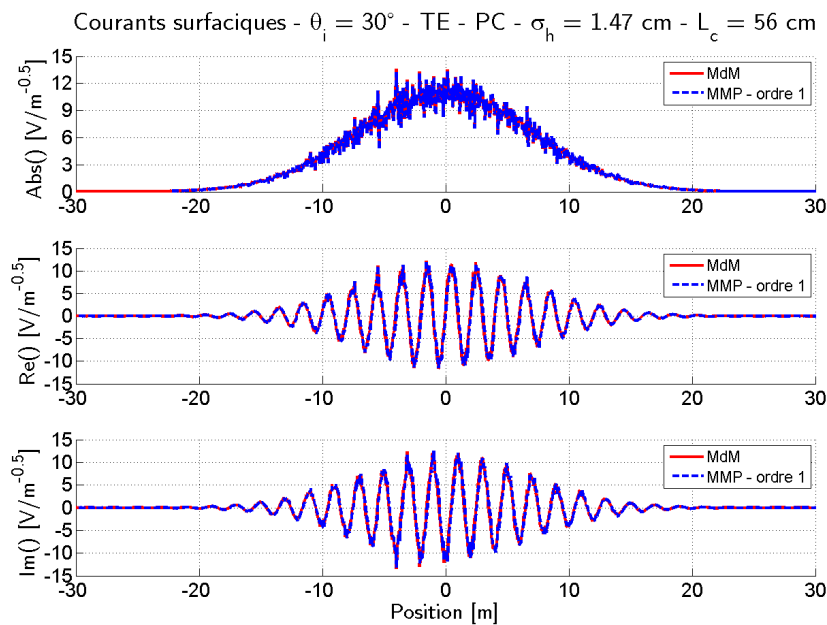
paramètres présentés, nous respectons le critère de Thorsos (2.79). Cette figure met en avant l’atténuation du champ incident sur les bords de la surface (−80 dB), obtenue grâce à l’onde de Thorsos, ce qui permet de limiter les effets de bords.

Dans les paragraphes qui suivent nous présentons la comparaison des résultats des courants surfaciques calculés avec la **MdM** et la **MPP** aux différents ordres (les ordres 0, 1 et 2). Nous montrons aussi une comparaison des champs diffractés et des  $SER_n$  obtenus avec les deux méthodes.

### Cas d’une surface parfaitement conductrice

La figure 4.6 permet de comparer les courants surfaciques d’ordre 0 obtenus avec la **MPP** à ceux de la **MdM**. Nous remarquons que les courants obtenus avec les deux méthodes sont atténués sur les bords, conformément à l’usage de l’onde de Thorsos. Les courants obtenus avec la **MPP** présentent très peu d’oscillations contrairement à ceux de la **MdM** mais épousent leur allure générale. Nous pouvons supposer que ces oscillations, d’amplitude plus restreinte que les variations de l’allure générale, apparaîtront aux ordres supérieurs. Par ailleurs, le résultat des courants surfaciques de l’ordre 0 correspond à la diffraction par une surface lisse. Nous ne l’avons pas mis en évidence à travers une figure mais cela pourrait être montré en calculant la diffraction par une surface lisse avec les deux méthodes.

La figure 4.7 permet de comparer les courants surfaciques d’ordre 1 obtenus avec la **MPP** à ceux de la **MdM**. Cela n’a pas été précisé à travers les équations, mais quand nous parlons de courants d’ordre 1, cela comprend la contribution des courants d’ordre 0, plus les petites perturbations d’ordre 1 :  $\frac{\partial \Psi}{\partial n} = \frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial n} + \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial n} + o(\frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial n})$ . Nous pouvons toujours voir l’atténuation sur les bords obtenue grâce à l’usage de l’onde de Thorsos. Les courants représentés épousent beaucoup mieux les faibles oscillations de la **MdM** qu’à l’ordre 0. Les résultats obtenus avec la **MPP** à l’ordre 1 sont déjà très satisfaisants. Voyons ce que nous obtenons en calculant les courants à l’ordre 2 sur la figure 4.8. Les courants représentés sont ceux de l’ordre 1 plus l’ajout des petites perturbations d’ordre 2 :  $\frac{\partial \Psi}{\partial n} = \frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial n} + \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial n} + \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial n} + o(\frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial n})$ . Nous ne voyons presque pas de différence avec les résultats présentés de l’ordre 1, ceux-ci étant déjà très précis. Nous avons représenté sur la figure 4.9, les courants surfaciques obtenus avec la **MdM** et les trois ordres de la **MPP** puis nous avons effectué un zoom. La figure fait clairement apparaître l’amélioration obtenue avec l’ordre 1 par rapport à l’ordre 0. Comme les résultats de l’ordre 1 sont très proches de ceux de la **MdM**, les corrections

FIGURE 4.6 – Comparaison des courants surfaciques obtenus avec la **MdM** et la **MPP** pour l'ordre 0FIGURE 4.7 – Comparaison des courants surfaciques obtenus avec la **MdM** et la **MPP** pour l'ordre 1

apportées par l'ordre 2 sont très faibles. Nous pouvons cependant les distinguer en certains points de la figure.

### Cas d'une surface diélectrique

Sur la figure 4.10, nous pouvons voir le profil de la surface rugueuse aléatoire générée. Elle est diélectrique, sa FA est de nature exponentielle et elle a une longueur  $L = 60$  m. Ses paramètres rugueux sont  $\sigma_h = 1.47$  cm et  $L_c = 0.56$  m. Nous avons représenté sur les figures 4.11, 4.12 et 4.13 les courants surfaciques obtenus lorsque l'onde incidente est une onde de Thorsos illuminant la surface avec un angle de 30 degrés. Contrairement à ce que spécifie l'abscisse de ces figures, la surface n'a pas une étendue de 120 m. Nous avons représenté en abscisse, sur l'intervalle  $[-60, 0]$ , les composantes  $\Psi^{(i)}$  ( $i = 0, 1$  ou  $2$ ) et sur l'intervalle

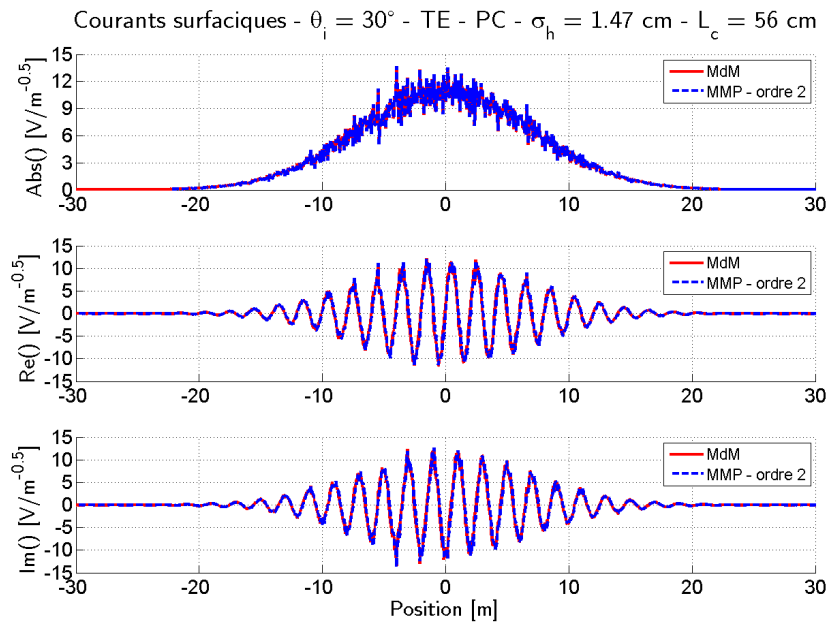


FIGURE 4.8 – Comparaison des courants surfaciques obtenus avec la **MdM** et la **MPP** pour l'ordre 2

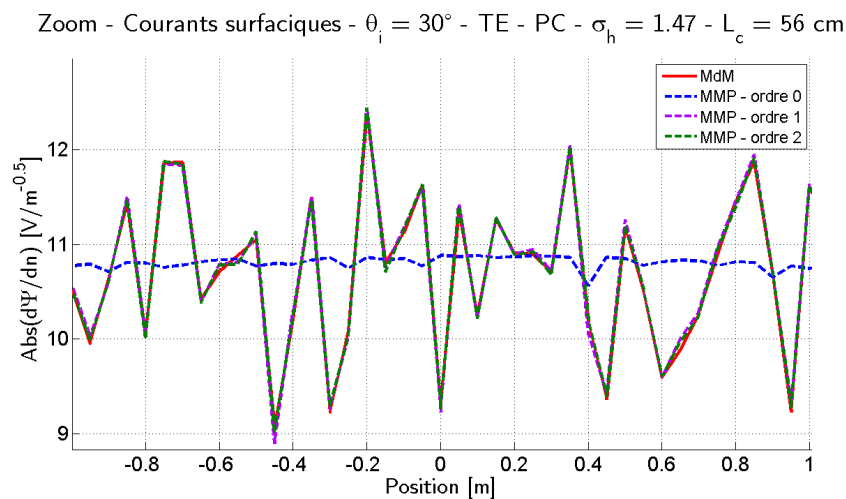


FIGURE 4.9 – Comparaison des courants obtenus avec la **MdM** et la **MPP** pour les ordres 0, 1, 2 sur la partie centrale de la surface

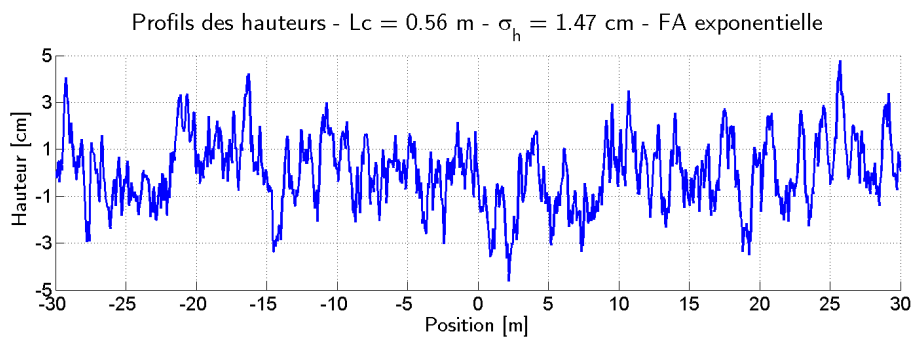


FIGURE 4.10 – Surface rugueuse aléatoire, diélectrique, de FA de nature exponentielle, de longueur  $L = 60$  m, d'écart-type des hauteurs  $\sigma_h = 1.47$  cm et de longueur de corrélation  $L_c = 0.56$  m

$[0, 60]$  les termes  $\frac{\partial P_{si}^{(i)}}{\partial n}$  qui sont nécessaires au calcul des courants dans l'équation intégrale (2.16). Pour

l'ordre 0, les courants obtenus avec la **MdM** et la **MPP** sont représentés dans la figure 4.11. Comme pour

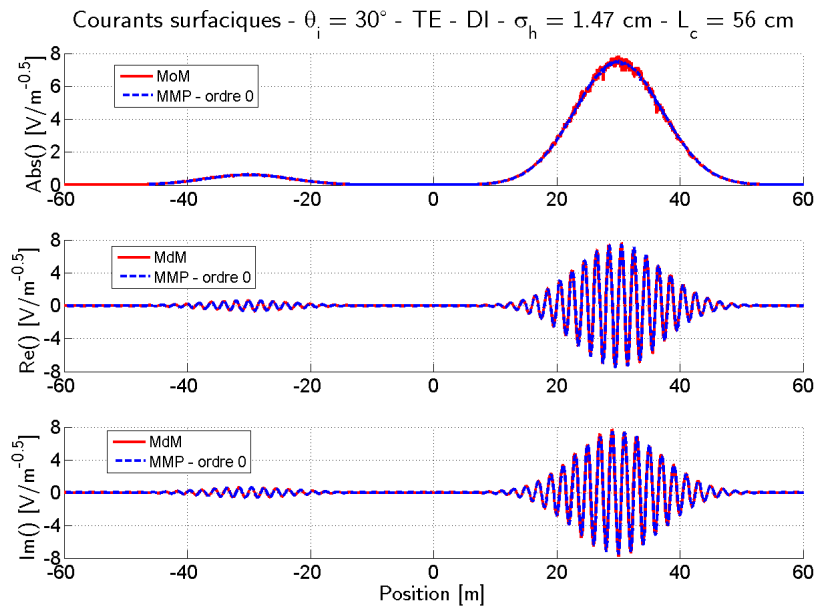


FIGURE 4.11 – Courants surfaciques générés par une onde incidente de Thorsos, de longueur d'onde  $\lambda = 1$  m, d'angle d'incidence  $30^\circ$ , sur une surface rugueuse de FA exponentielle, d'écart-type des hauteurs  $\sigma_h = 1.47$  cm et de longueur de corrélation  $L_c = 0.56$  m. Les résultats illustrent la comparaison de la **MdM** à la **MPP** à l'ordre 0

le cas PC, l'ordre 0 de la **MPP** pour une surface diélectrique représente l'allure générale des courants et les petites variations obtenues avec la **MdM** n'apparaissent pas. Sur la figure 4.12, où les courants calculés à l'ordre 1 de la **MPP** sont représentés, les petites variations des courants sont beaucoup mieux prises en compte. L'ordre 2 des courants est représenté sur la figure 4.13. Pour voir apparaître le bénéfice de l'ordre 2

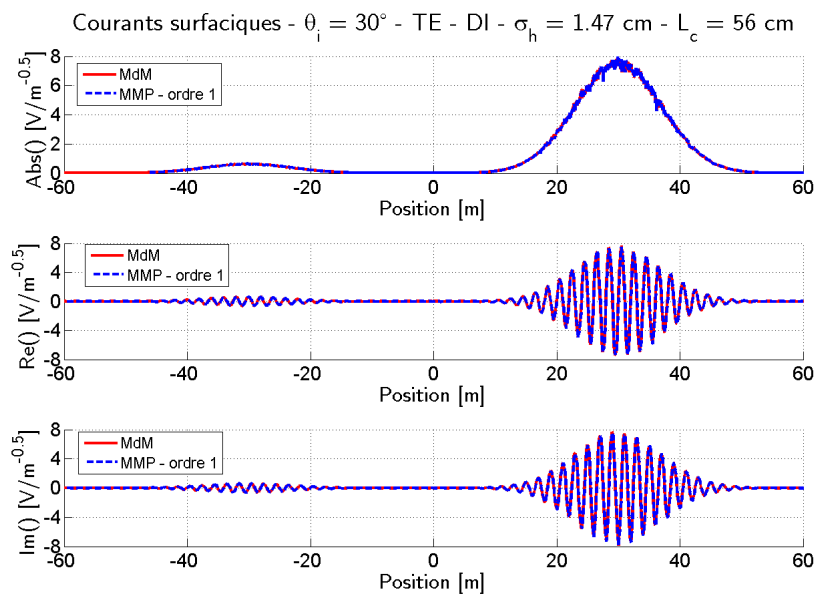


FIGURE 4.12 – Courants surfaciques générés par une onde incidente de Thorsos, de longueur d'onde  $\lambda = 1$  m, d'angle d'incidence  $30^\circ$ , sur une surface rugueuse de FA exponentielle, d'écart-type des hauteurs  $\sigma_h = 1.47$  cm et de longueur de corrélation  $L_c = 0.56$  m. Les résultats illustrent la comparaison de la **MdM** à la **MPP** à l'ordre 1

par rapport à l'ordre 1, il est nécessaire d'effectuer un zoom, ce que nous avons fait sur la figure 4.14. Nous

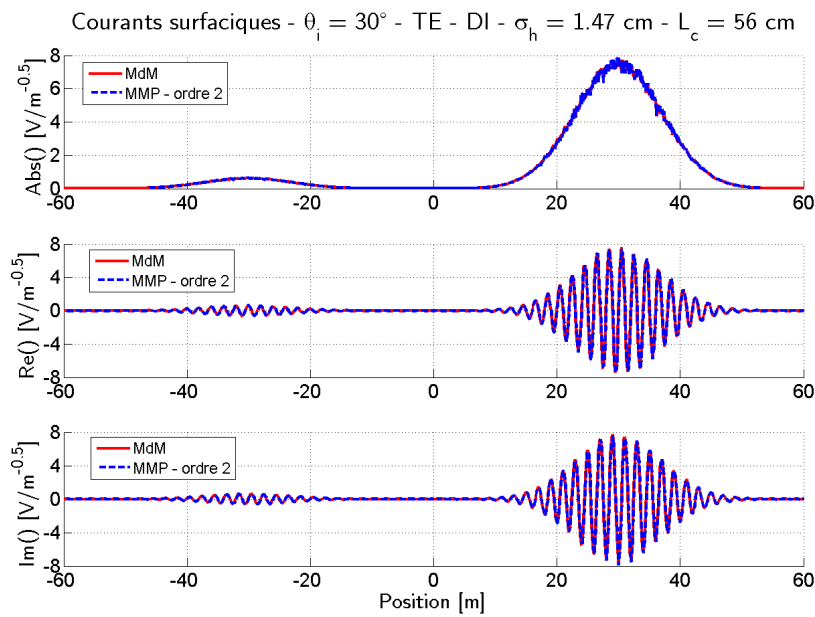


FIGURE 4.13 – Courants surfaciques générés par une onde incidente de Thorsos, de longueur d'onde  $\lambda = 1$  m, d'angle d'incidence  $30^\circ$ , sur une surface rugueuse de FA exponentielle, d'écart-type des hauteurs  $\sigma_h = 1.47$  cm et de longueur de corrélation  $L_c = 0.56$  m. Les résultats illustrent la comparaison de la **MdM** à la **MPP** à l'ordre 2

avons représenté les ordres 0, 1 et 2 sur une même figure 4.14 afin de pouvoir mieux visualiser les différences sur les courants selon l'ordre perturbatif. Un zoom a été effectué au niveau de la partie centrale de la surface pour les deux grandeurs  $\Psi$  et  $\frac{\partial \Psi}{\partial n}$  présentées. Nous pouvons voir sur la figure 4.14 que l'ordre 1 présente une

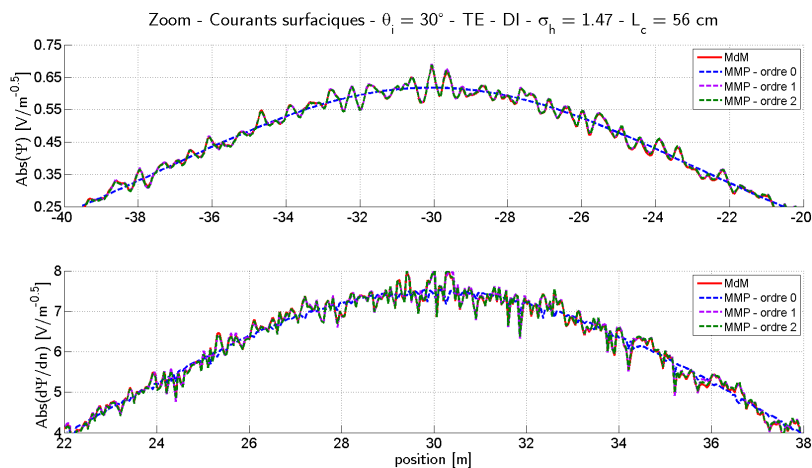


FIGURE 4.14 – Comparaison des courants obtenus avec la **MdM** et la **MPP** pour les ordres 0, 1, 2 sur la partie centrale de la surface

meilleure concordance que l'ordre 0 vis-à-vis de la **MdM**. L'amélioration de l'ordre 2 est difficile à voir sauf pour quelques détails. Sur ce type de résultat, les courants surfaciques à l'ordre 1 présentent déjà une grande conformité aux résultats de référence.



### 4.6.5 Champ diffracté

Les courants calculés précédemment génèrent un champ électromagnétique qui se propage dans les milieux  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$ . Nous nous intéressons aux champs diffractés dans le milieu  $\Omega_0$ . Dans la première figure 4.15, nous avons représenté le module du champ incident qui illumine la surface, dans la portion de l'espace comprise entre 30 cm et 10 m au-dessus de la surface rugueuse. Les figures 4.16 et 4.17 illustrent les champs diffractés

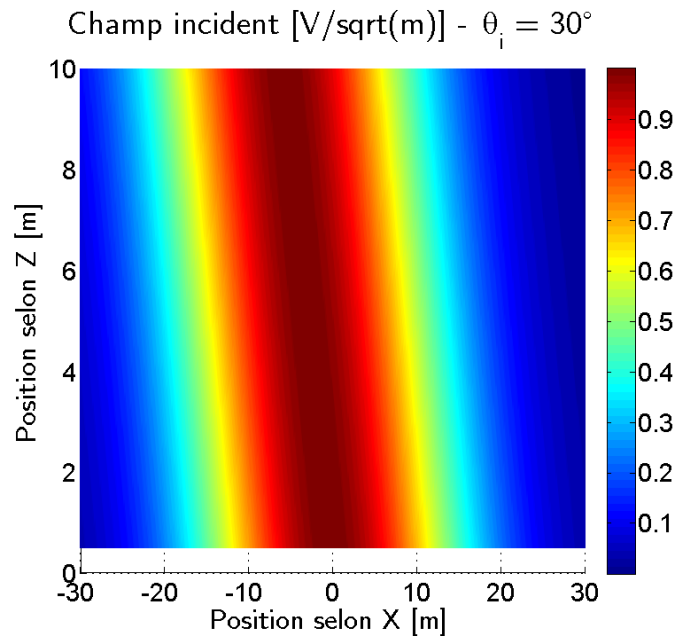


FIGURE 4.15 – Module du champ incident issu de l'onde de Thorsos qui vient éclairer la surface rugueuse

en champ proche au-dessus de la surface, entre 30 cm et 10 m, obtenu à l'aide de la **MdM** et de la **MPP** à partir des courants surfaciques calculés à la section précédente (ordre 2 pour la **MPP**). L'échelle des longueurs n'étant pas la même en abscisse et en ordonnée, il n'est pas immédiat de remarquer que l'angle de diffraction principal est de 30 degrés pour un angle d'incidence également de 30 degrés. Le champ est principalement diffracté dans la direction spéculaire  $\theta_d = \theta_i = 30^\circ$  et la rugosité du sol réfléchit une partie de l'énergie dans d'autres directions. Nous remarquons que dans cette configuration, peu de champ est rétrodiffusé vers l'émetteur. La répartition des champs dans l'espace est relativement la même avec les deux méthodes. Dans les deux figures 4.18 et 4.19, nous avons tracé les modules des champs diffractés obtenus à partir des courants d'ordre 0 et 1 de la **MPP**. Comme pour les courants surfaciques, nous pouvons voir une différence assez nette entre les champs diffractés d'ordre 0 et ceux d'ordre 1. Par contre, entre ceux de l'ordre 1 et de l'ordre 2 les différences sont minimales.

### 4.6.6 Coefficient de diffusion incohérent

Nous avons représenté dans les figures 4.20 et 4.21 les SERn obtenues à partir des courants de la **MdM** et de la **MPP**, aux ordres 0, 1 et 2, affichés dans les figures 4.6, 4.7 et 4.8. Les SERn montrent de manière encore plus évidente que sur la figure 4.17 que le champ est diffracté principalement dans la direction spéculaire  $\theta_d = 30^\circ$ . Nous confirmons également que l'ordre 1 de la **MPP** épouse bien la SERn de la **MdM** pour toutes les directions de l'espace et que l'ordre 2 n'apporte que des corrections mineures. La figure 4.21 présente les SERn associées aux courants surfaciques calculés aux figures 4.11, 4.12 et 4.13 pour une surface diélectrique. Nous arrivons aux mêmes conclusions que pour la surface PC.



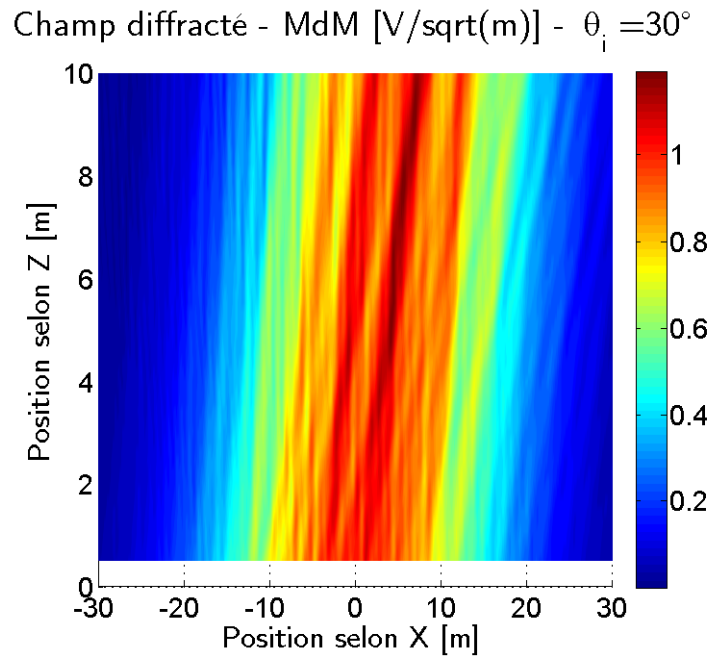


FIGURE 4.16 – Module du champ diffracté au-dessus de la surface rugueuse, à partir des courants calculés à l'aide de la **MdM**

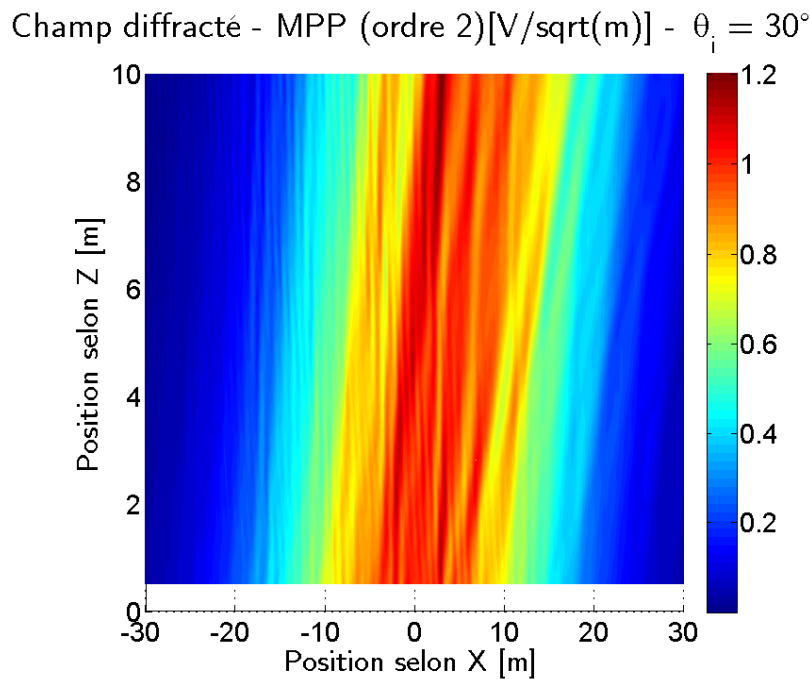


FIGURE 4.17 – Module du champ diffracté au-dessus de la surface, à partir des courants calculés à l'aide de la **MPP** à l'ordre 2

## 4.7 Domaine de validité de la MPP

Les paragraphes précédents ont permis de comparer des résultats de la **MPP** à ceux d'une méthode de référence : la **MdM**. Nous avons vu que des écarts existaient entre les résultats, à la fois sur les courants surfaciques, les champs diffractés et les coefficients de diffusion bistatiques incohérents. Les comparaisons entre les deux méthodes ont été effectuées pour une configuration, donc pour une seule valeur des paramètres de la scène. Pour déterminer le domaine de validité de la **MPP**, nous devons tester la méthode sur l'ensemble des valeurs que peuvent prendre ces paramètres. Nous devons également déterminer sur quel

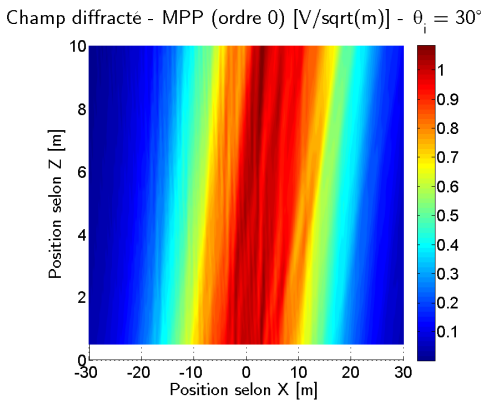


FIGURE 4.18 – Module du champ diffracté au-dessus de la surface, à partir des courants calculés à l'aide de la **MPP** à l'ordre 0

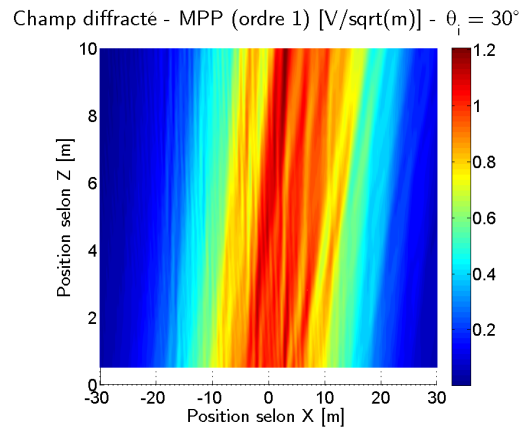


FIGURE 4.19 – Module du champ diffracté au-dessus de la surface, à partir des courants calculés à l'aide de la **MPP** à l'ordre 1

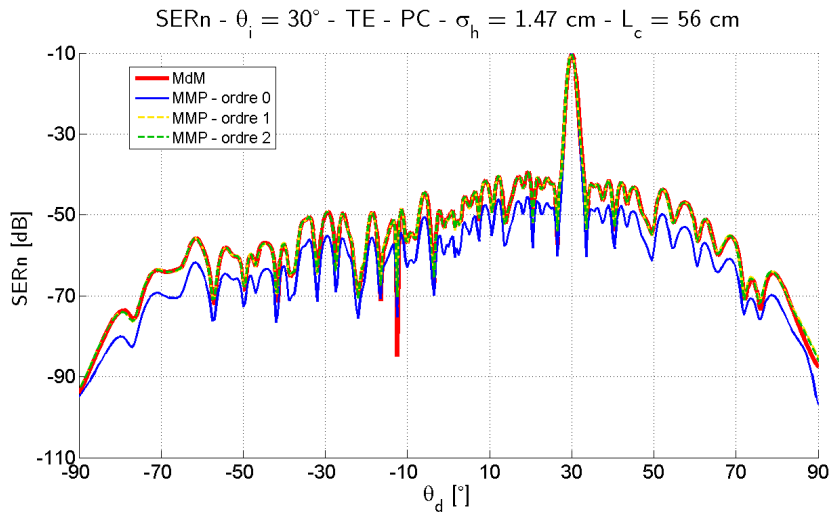


FIGURE 4.20 –  $SER_n$  de la surface rugueuse, parfaitement conductrice, de longueur  $L = 60$  m, de FA exponentielle, d'écart-type des hauteurs  $\sigma_h = 1.47$  cm et de longueur de corrélation  $L_c = 0.56$  m, éclairée par une onde de Thorsos de paramètre  $g = L/6$  de longueur d'onde  $\lambda = 1$  m et d'angle d'incidence 30 degrés

grandeur relative à la diffusion électromagnétique nous allons déterminer l'erreur, et quel critère d'erreur appliquer.

Thales Communications & Security cherche à déterminer le niveau de champ rétrodiffusé par une surface rugueuse. La grandeur d'intérêt est donc le champ diffusé, que nous allons obtenir par simulation de Monte-Carlo. Nous venons de voir à travers les figures 4.17, 4.18 et 4.19 que nous pouvons déterminer les champs diffractés (et diffusés) en différentes positions de l'espace. Nous avons choisi de comparer les champs diffusés à 1 mètre de hauteur par rapport au plan moyen de la surface et sur toute la longueur de la surface. Cette hauteur correspond notamment à celle de l'antenne de réception embarquée sur le capteur.

Comme critère d'erreur, nous considérons que nos résultats sont valides si la différence entre les champs diffusés obtenus par la **MdM** et ceux obtenus par la **MPP** présentent une erreur inférieure à 1 dB.

L'étude sur le domaine de validité n'est pas terminée à ce jour, les résultats ne seront donc pas présentés ici mais nous en présentons la démarche.

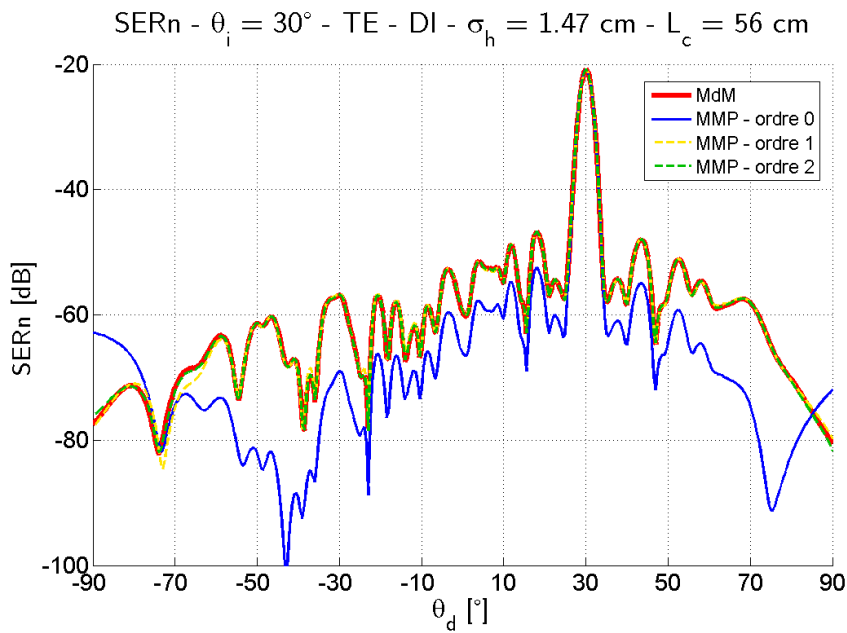


FIGURE 4.21 – SER<sub>n</sub> de la surface rugueuse, diélectrique, de longueur  $L = 60$  m, de FA exponentielle, d'écart-type des hauteurs  $\sigma_h = 1.47$  cm et de longueur de corrélation  $L_c = 0.56$  m, éclairée par une onde de Thorsos de paramètre  $g = L/6$  de longueur d'onde  $\lambda = 1$  m et d'angle d'incidence 30 degrés

#### 4.7.1 Paramètres influençant le domaine de validité de MPP

Dans le calcul des inconnues du modèle **MPP** apparaissent les grandeurs suivantes :

- la transformée de Fourier des hauteurs  $\tilde{z}(k_x)$ , dépendante des paramètres  $L_c$  et  $\sigma_h$
- l'angle d'incidence  $\theta_i$
- la fréquence  $f$

Pour la génération de la surface rugueuse aléatoire, nous distinguons également les différentes natures possibles pour la FA. Les équations des inconnues sont également différentes si la surface est PC ou diélectrique et si la polarisation est TE ou TM. La détermination du domaine de validité de **MPP** est donc une étude paramétrique de paramètre :

- $L_c$
- $\sigma_h$
- nature de la FA (gaussienne, exponentielle, ...)
- $f$
- $\theta_i$
- polarisation (TE ou TM)
- nature de la surface (PC ou diélectrique)

Par ailleurs, nous devons choisir quelles grandeurs nous allons étudier et comparer à une méthode de référence pour valider le modèle, ainsi qu'un critère d'erreur acceptable permettant de valider ou non une configuration.

Nous ne sommes pas allés au bout de l'étude du domaine de validité de la méthode **MPP**. Le nombre de surfaces à générer étant très important étant donné le nombre de configurations à tester, nous n'avons pas eu le temps d'aller au bout de l'étude. De plus, pour tester des configurations aux angles d'incidence rasants, nous devons respecter le critère de Thorsos qui implique de générer des surfaces de grandes tailles. Nous ne disposons pas d'assez de ressources mémoires pour traiter toutes les configurations dans le temps imparti.

## 4.8 Comment implanter la MPP dans la plateforme Prométhée ?

### 4.8.1 Problématique

Dans la version actuelle de la plateforme de calcul Prométhée, lorsque nous illuminons une surface rugueuse, générée à partir des paramètres statistiques  $\sigma_h$  et  $L_c$ , par une onde incidente d'angle  $\theta_i$  et de longueur d'onde  $\lambda$ , nous pouvons calculer le champ diffracté au-dessus de la surface aux points préalablement choisis. Si nous changeons la surface rugueuse de cette scène par une seconde surface de mêmes paramètres statistiques et calculons à nouveau le champ diffracté aux mêmes points que précédemment, les valeurs de champs obtenus seront différentes. Cela est dû au fait que pour chaque surface générée, nous calculons un champ déterministe. Nous avons vu, à travers l'équation (2.71), que le champ peut se mettre sous la forme d'une somme d'un champ cohérent et d'un champ incohérent. Pour les deux surfaces décrites précédemment, étant donné qu'elles ont les mêmes paramètres statistiques et qu'elles sont observées aux mêmes points, elles ont le même champ cohérent mais leur champ incohérent différent. Pour calculer le champ cohérent, il faut effectuer des simulations de Monte-Carlo : reproduire  $N$  fois la scène décrite en début de paragraphe puis calculer la moyenne des champs diffractés. Cette méthode est longue et fastidieuse.

Ce que nous souhaiterions rendre possible sur la plateforme, c'est l'accessibilité du champ diffusé cohérent à partir de la simulation d'une seule scène de calcul. Nous avons montré (4.62) à l'aide du modèle **MPP** que nous pouvons obtenir une expression analytique du champ diffusé cohérent. Dans le cas d'une onde incidente plane, le champ diffusé cohérent obtenu se propage dans la direction spéculaire : la même direction que celle d'une onde incidente plane réfléchie par une surface lisse. Cette caractéristique nous a orientés dans le choix de la modélisation du champ diffusé cohérent. Nous proposons de représenter la surface rugueuse par une surface lisse et de lui affecter une grandeur effective caractéristique de la rugosité du sol et des paramètres de l'onde incidente. Nous n'aurions alors plus à représenter les rugosités par un maillage de cellules hexaédriques, ce qui offre la possibilité de diminuer le nombre de cellules requises pour représenter finement la surface.

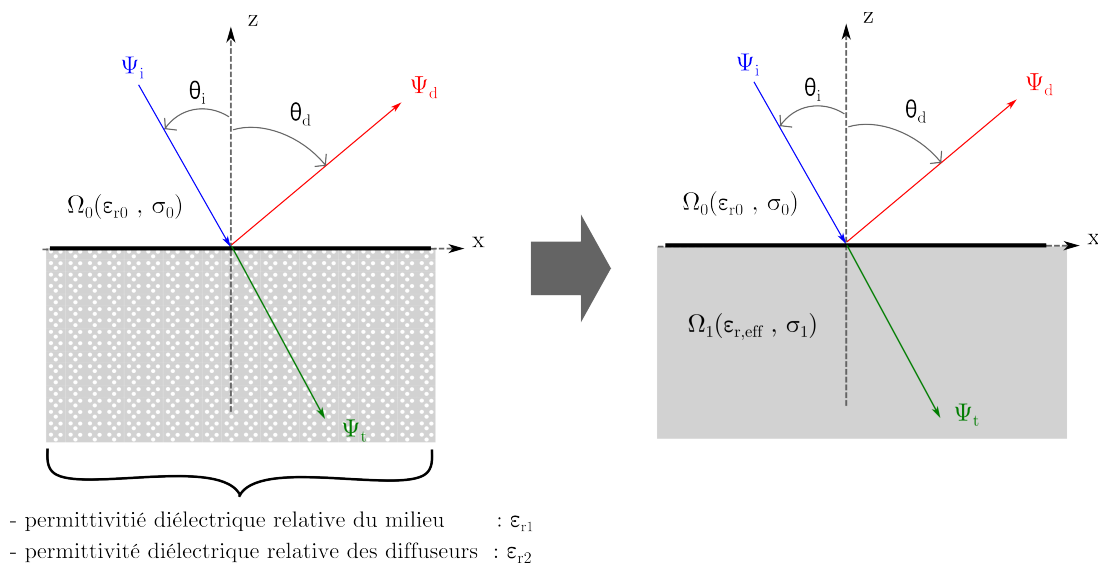


FIGURE 4.22 – Illustration du problème étudié par Barrera et al. : l'onde incidente illumine un sol diélectrique dans lequel sont répartis aléatoirement des diffuseurs circulaires

Cette piste, où nous représentons la surface du sol rugueux avec une surface lisse à laquelle nous affectons une grandeur effective, a notamment été inspirée des travaux de Barrera et al. [109] et de Tsang et al. [110]. Leur problématique, illustrée par la figure 4.22 est différente puisqu'ils traitent le cas de la diffusion par un sol diélectrique dans laquelle sont distribués, de manière aléatoire, des diffuseurs circulaires (ou sphériques). De plus, leur interface entre le sol et l'air est plane. Dans leur problème, l'onde incidente

plane qui vient éclairer la surface subit une première transformation. Une partie de l'onde est réfléchie dans la direction spéculaire du milieu supérieur et une autre partie est transmise dans le sol. L'onde transmise est diffusée par les diffuseurs présents dans le sol, et cela, dans toutes les directions de l'espace. Un champ diffusé cohérent peut alors être calculé ainsi qu'une composante incohérente. Pour accéder au champ cohérent, certains auteurs [111] ont décidé de modéliser le milieu par une grandeur effective, ici, la permittivité diélectrique relative, pour prendre en compte l'impact des diffuseurs sur le champ cohérent. Par analogie avec ces travaux, nous avons supposé dans notre cas, que les variations des hauteurs de la surface sont des diffuseurs locaux, distribués aléatoirement, qui diffusent l'onde incidente dans les différentes directions de l'espace, et que nous pouvons également modéliser leurs effets sur le champ diffusé cohérent par une grandeur effective.

Le phénomène de diffusion par une surface rugueuse étant différent selon que la surface est PC ou diélectrique par la présence ou non d'une onde transmise, nous traitons les deux cas séparément. Pour le cas d'une surface PC, comme illustrée sur la figure 4.23, le modèle équivalent est composé d'une surface lisse sur laquelle nous affectons une impédance de surface effective. Comme son nom l'indique, la grandeur effective est ici surfacique. Pour le cas d'une surface diélectrique, comme le montre la figure 4.24, le modèle

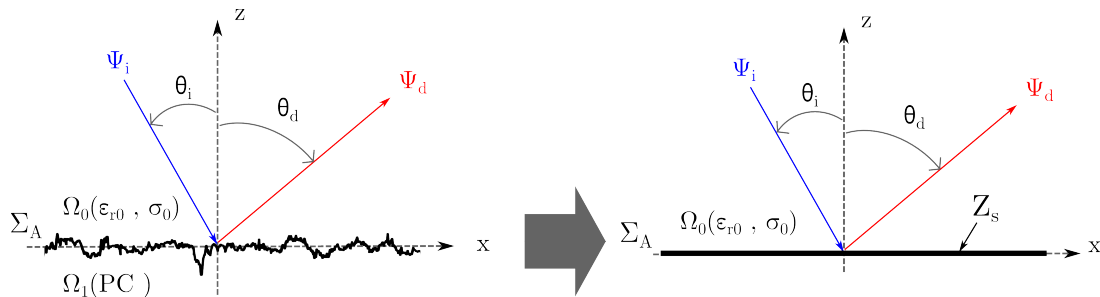


FIGURE 4.23 – Grandeur effective pour le cas d'une surface PC

équivalent est composé d'un sol qui possède une permittivité diélectrique effective. L'interface entre le sol et l'air est lisse. La permittivité diélectrique effective est affectée au sol et non pas à l'interface, dans ce cas, c'est une grandeur volumique.

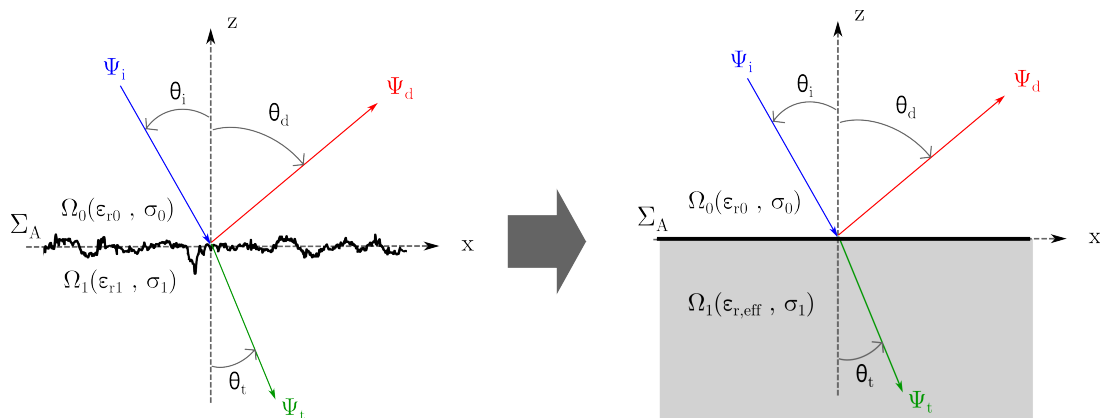


FIGURE 4.24 – Grandeur effective pour le cas d'une surface diélectrique

## 4.8.2 État de l'art sur les grandeurs effectives

Durant cette thèse, la recherche bibliographique initiale nous a rapidement orienté vers l'impédance de surface effective comme grandeur effective car elle apparaissait dans des travaux où la MPP était étudiée. Feinberg [112], [113] a été l'un des précurseurs à obtenir l'expression d'une impédance de surface effective

dans ses travaux sur la propagation d'ondes radio le long d'une surface rugueuse. Il a été notamment le premier à décrire le fait que les faibles rugosités sur une surface PC augmentait l'impédance d'une valeur nulle à une valeur finie.

Barrick a conduit plusieurs études [114], [115] sur la propagation d'ondes HF et VHF au-dessus de surfaces de mer faisant également apparaître la notion d'impédance d'effective. Il a travaillé ultérieurement sur l'utilisation de cette grandeur au sein de la **MPP** et sur son intérêt pour améliorer le domaine de validité de la méthode aux incidences rasantes [103] et [105]. Il donne notamment l'expression de la  $SER_n$  en faisant apparaître un terme d'impédance de surface qui améliore la validité de l'expression aux incidences rasantes. Plus tard, Li-Xin et al. [106] obtiennent une expression similaire de la  $SER_n$  aux incidences rasantes. Voronovich et al. [116] ont proposé un modèle numérique de coefficient de rétrodiffusion pour une surface de mer aux angles rasants. Leur modèle fait également apparaître un terme d'impédance de surface effective.

Wait a été également un contributeur important de la propagation d'onde au-dessus de surfaces rugueuses en mettant en avant la portée et la commodité de l'impédance de surface effective normalisée dans un problème de propagation d'onde au-dessus d'un sol [117], [118] et [119]. Bass et al. [107] ont étudié de manière approfondie l'impédance de surface effective en utilisant une extension de la **MPP** basée sur le développement en série de la fonction de Green et de la méthode des diagrammes de Feynman. D'autres théories de diffusion par des surfaces rugueuses ont suivi à travers les travaux de Ito [120] et Ishimaru et al. [121], [122], [123]. Ishimaru et al. [124] a notamment exprimé le champ diffusé cohérent en fonction d'une impédance de surface effective et d'une fonction d'atténuation pour une surface fortement conductrice. L'expression qu'ils obtiennent concorde avec celle de Feinberg [112]. Quant à leurs expressions du champ diffusé incohérent et de la  $SER_n$ , elles concordent avec celles résultant des travaux de Fuks et al. [125].

Les travaux suivants font également référence à l'impédance de surface effective. Barrick [114] donne deux définitions de l'impédance de surface normalisée. La première consiste au rapport du champ diffusé cohérent sur le champ diffusé par une surface lisse. La seconde la définit comme le rapport du vecteur de Poynting se propageant vers la surface sur le vecteur de Poynting se propageant dans la direction spéculaire (inverser le rapport des deux). Yuferev et al. [126] a défini l'impédance de surface comme étant un moyen de fournir une relation approximée entre les composantes de champ électrique et magnétique sur la surface d'un milieu conducteur (diélectrique à perte) sous l'effet de l'effet de peau. Toporkov et al. [127] ont rappelé dans leur travaux, en l'illustrant numériquement, que l'ajout d'une impédance de surface à la formulation classique de la  $SER_n$  obtenue par la **MPP** contribue à augmenter la précision du modèle. Brelet et al. [128] ont présenté des résultats numériques de l'impédance de surface effective et de la  $SER_n$  après avoir utilisé la **MPP** basée sur le développement de la fonction de Green et des diagrammes de Feynman. Roger de Roo et al. [129], Bryukhovetskii [130] ont également apporté une contribution remarquable sur le sujet.

Les travaux qui ont relié un coefficient de réflexion cohérent à l'impédance de surface effective sont [131], Valenzuela [132], Ishimaru et al. [122], [124], [123] et Fuks et al. [125], [104] ainsi que Ito [120]. Dans les travaux de Kumar et Sarkar [133], nous voyons apparaître la notion de coefficient de diffusion cohérent qui traduit le rapport entre le champ diffusé par une surface rugueuse dans la direction spéculaire sur le champ incident. Barrick [103] donne des expressions de coefficients de réflexion pour les polarisations TE et TM en faisant apparaître un terme d'impédance pour le premier et un terme d'admittance pour le second.

Feinberg [112] a remarqué, comme pour l'impédance de surface, qu'en présence de rugosité de sol, il obtenait une terme de permittivité diélectrique de valeur infinie que la permittivité diélectrique du milieu en question était infinie. Sentenac et al. [111], [134] et [135] a effectué des travaux sur la diffusion par des particules placées aléatoirement sous une surface rugueuse. Elle montre notamment que l'intensité diffusée moyenne par un tel milieu est proche de la somme de l'intensité diffusée par les particules sous une surface lisse et de l'intensité de la surface rugueuse dont la permittivité est évaluée à l'aide de la théorie des milieux



effectifs. Ces travaux ont fait apparaître notamment la notion de permittivité diélectrique effective pour un problème différent du notre mais qui ont tout de même inspiré nos travaux.

### 4.8.3 Coefficient de diffusion cohérent

Nous avons vu, via les expressions (4.64), (4.66) et (4.68) que le champ diffusé cohérent est diffusé dans la direction spéculaire  $\theta_d = \theta_i$ , la même direction que le champ diffracté par une surface lisse. Ces équations montrent également que l'amplitude du champ diffusé cohérent est inférieure, en valeur absolue, à celle du champ diffracté par la surface lisse. Cela est dû aux rugosités du sol qui dissipent de l'énergie dans d'autres directions, et non plus uniquement dans la direction spéculaire.

A l'image du coefficient de Fresnel en réflexion (2.25), nous définissons un coefficient de réflexion cohérent, noté  $\mathcal{R}_{coh}$ , comme étant le rapport du champ diffusé cohérent pris sur le plan moyen  $z = 0$  sur le champ incident calculé sur le même plan de coordonnées  $z = 0$  :

$$\mathcal{R}_{coh} = \frac{\langle \Psi_d(x, z = 0) \rangle}{\langle \Psi_i(x, z = 0) \rangle} \quad (4.75)$$

Que ce soit pour une surface PC ou diélectrique et une polarisation de l'onde incidente TE ou TM, nous avons déterminé que le champ diffusé cohérent, en tout point de l'espace, pouvait s'écrire :

$$\langle \Psi_d(x, z) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \langle \tilde{\Psi}_d^{(0)}(k_x) \rangle + \langle \tilde{\Psi}_d^{(2)}(k_x) \rangle \right] e^{j(k_x x + k_z z)} dk_x \quad (4.76)$$

car pour une onde incidente plane, quelque soit la configuration (polarisation et nature de la surface),  $\langle \tilde{\Psi}_d^{(1)}(k_x) \rangle = 0$ .

Les sous-sections suivantes permettent de déterminer les expressions analytiques de ce coefficient de réflexion cohérent pour les deux types de surface (PC ou diélectrique) et de polarisation (TE et TM).

#### Surfaces PC

Pour la polarisation TE, en reprenant l'expression du champ diffusé cohérent (4.76), nous pouvons calculer le coefficient de réflexion cohérent (4.75). Nous obtenons :

$$\mathcal{R}_{TE,coh} = \mathcal{R}_{PC,TE} + 2k_{iz} \int_{-\infty}^{\infty} k'_z W(k_{ix} - k'_x) dk'_x \quad (4.77)$$

où  $\mathcal{R}_{PC,TE} = -1$  est le coefficient de Fresnel en réflexion pour une surface lisse PC et pour la polarisation TE.  $W$  est la densité spectrale de puissance de la fonction des hauteurs. Elle est donnée par les expressions (3.3.3) selon que la surface est de FA gaussienne, exponentielle ou en cosinus amorti. Dans notre étude, nous avons vu que les surfaces étudiées étaient mieux représentées par des surfaces de FA exponentielles. L'expression du coefficient de diffusion cohérent associé est alors :

$$\mathcal{R}_{TE,coh} = \mathcal{R}_{PC,TE} + 2k_{iz} \int_{-\infty}^{\infty} 2k'_z \frac{\sigma_h^2 L_c}{1 + (k_{ix} - k'_x)^2 L_c^2} dk'_x \quad (4.78)$$

Le coefficient de réflexion dépend des paramètres  $L_c$ ,  $\sigma_h$ , de l'angle d'incidence  $\theta_i$  et de la longueur d'onde  $\lambda$ . Nous pouvons voir que lorsque nous "lissons" une surface rugueuse, c'est-à-dire lorsque les hauteurs de la surface deviennent de plus en plus faibles ( $\sigma_h \rightarrow 0$ ) ou la longueur de corrélation augmente ( $L_c \rightarrow \infty$ ),

le coefficient de réflexion cohérent tend vers le coefficient de réflexion de Fresnel ( $\mathcal{R}_{TE,coh} \xrightarrow[\sigma_h \rightarrow 0]{} \mathcal{R}_{F,TE}$ ) pour reproduire en réflexion le comportement d'une surface lisse.

En suivant la même démarche, pour la polarisation TM, nous obtenons le coefficient de réflexion cohérent suivant :

$$\mathcal{R}_{TM,coh} = \mathcal{R}_{PC,TM} - \frac{2}{k_{iz}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(k_0^2 - k'_x k_{ix})^2}{k'_z} W(k_{ix} - k'_x) dk'_x \quad (4.79)$$

où  $\mathcal{R}_{PC,TM} = 1$  est le coefficient de Fresnel en réflexion pour une surface PC et pour la polarisation TM. En adoptant le modèle de densité spectrale de puissance  $W$  pour des surfaces de FA exponentielle, le coefficient (4.79) devient :

$$\mathcal{R}_{TM,coh} = \mathcal{R}_{PC,TM} - \frac{2}{k_{iz}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(k_0^2 - k'_x k_{ix})^2}{k'_z} \frac{2\sigma_h^2 L_c}{1 + (k_{ix} - k'_x)^2 L_c^2} dk'_x \quad (4.80)$$

### Surfaces diélectriques

Pour une surface rugueuse diélectrique éclairée par une onde incidente plane en polarisation TE, l'expression du champ diffusé cohérent est donnée par (4.68). En l'incluant dans la définition du coefficient de réflexion cohérent (4.75), nous obtenons :

$$\mathcal{R}_{TE,coh}^{DI} = \mathcal{R}_{DI,TE} + \frac{2k_{iz}k_0^2(\epsilon_{r1} - 1)}{(k_{tiz} + k_{iz})^2} \int_{-\infty}^{\infty} W(k'_x - k_{ix}) [k'_z - k_{tz} + k_{tiz}] dk'_x \quad (4.81)$$

L'exposant DI de  $\mathcal{R}_{TE,coh}^{DI}$  caractérise le type de surface, ici diélectrique, pour distinguer le coefficient de réflexion cohérent du cas PC.  $\mathcal{R}_{DI,TE}$  est le coefficient de réflexion de Fresnel donné en (2.25). En remplaçant la densité spectrale de puissance  $W$  par son expression analytique correspondant à une surface de FA exponentielle, nous obtenons :

$$\mathcal{R}_{TE,coh}^{DI} = \mathcal{R}_{DI,TE} + \frac{2k_{iz}k_0^2(\epsilon_{r1} - 1)}{(k_{tiz} + k_{iz})^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sigma_h^2 L_c}{1 + (k_{ix} - k'_x)^2 L_c^2} [k'_z - k_{tz} + k_{tiz}] dk'_x \quad (4.82)$$

Pour la surface diélectrique, le coefficient de réflexion cohérent possède les mêmes dépendances que pour le cas PC : les paramètres  $L_c$  et  $\sigma_h$ , l'angle d'incidence  $\theta_i$  et la longueur d'onde  $\lambda$ .

N'ayant pu obtenir une expression de l'inconnue à l'ordre 2  $\tilde{\Psi}_d^{(2)}$  qui soit concise et validée pour la polarisation TM, nous ne traitons pas le cas du coefficient de réflexion cohérent pour la polarisation TM.

## 4.8.4 Formulations proposées

### Impédance de surface effective pour une surface PC

Nous avons vu en 4.8.2 que plusieurs auteurs ont lié dans leurs travaux [125], [123] le coefficient de réflexion cohérent à un terme d'impédance de surface normalisée. Pour la polarisation TE, la relation proposée est :

$$\mathcal{R}_{TE,coh} = \frac{k_z Z_{TE,n} - k_0}{k_z Z_{TE,n} + k_0} \quad (4.83)$$

Nous trouvons également dans les travaux de [], des relations proches inspirées de la théorie des lignes de transmission :

$$\mathcal{R}_{TE,coh} = \frac{Z_{TE} - Z_0}{Z_{TE} + Z_0} = \frac{1 - Q}{1 + Q} \text{ avec } Q = \frac{Z_0}{Z_{TE}} \quad (4.84)$$



où  $Z_0$  est l'impédance du vide définie au chapitre II. En posant  $Q = \frac{k_0}{k_z Z_{TE,n}}$ , nous trouvons une expression homogène à un terme d'impédance pour  $Z_{TE}$  :

$$Z_{TE} = Z_0 \frac{k_z}{k_0} Z_{TE,n} \quad (4.85)$$

A partir de (4.77), (4.83) et (4.85), nous trouvons comme expression d'impédance de surface :

$$Z_{TE} = Z_0 \frac{k_z}{k_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k'_z}{k_0} W(k_{ix} - k'_x) dk'_x \quad (4.86)$$

Dans l'expression (4.83),  $Z_{TE,n}$  est sans dimension et correspond aux expressions d'impédance de surface normalisée (l'indice  $n$  signifie normalisée) obtenues par Brelet et al. [136], Bass et Fuks [107].

Nous pouvons remarquer que lorsque l'écart-type des hauteurs diminue, l'impédance de surface diminue également ( $Z_{TE} \xrightarrow{\sigma_n \rightarrow 0} 0$ ) et est nulle si la surface est lisse.

L'impédance de surface que nous avons obtenue peut être utilisée pour modéliser les effets de la rugosité sur le champ cohérent dans la plateforme Prométhée. En effet, en revenant à la définition d'une impédance de surface, comme étant un rapport de composantes du champ électrique sur des composantes du champ magnétique, au niveau de la surface, nous avons la définition suivante pour le cas PC en 2D :

$$Z_{TE} = \frac{E_y}{H_z} \quad (4.87)$$

où  $E_y$  est la composante de champ électrique selon  $\hat{y}$  (tangentielle à la surface), que nous avons noté  $E_y = \Psi \hat{y}$  durant notre étude.  $H_z$  est la composante de champ magnétique selon  $\hat{z}$  (normale à la surface). Cela signifie, qu'à partir de la connaissance du champ électrique tangentiel ( $E_y = \Psi$ ) et de l'impédance de surface (4.87), nous pouvons déterminer l'inconnue  $H_z$  sur la surface.

Pour la polarisation TM, la relation entre le coefficient de réflexion cohérent (4.79) et l'impédance de surface effective  $Z_{TM,n}$  est, d'après [] :

$$\mathcal{R}_{TM,coh} = \frac{k_z - k_0 Z_{TM,n}}{k_z + k_0 Z_{TM,n}} \quad (4.88)$$

où  $Z_{TM,n}$  est une impédance de surface normalisée (sans dimensions). En revenant à la théorie des lignes, nous pouvons écrire :

$$\mathcal{R}_{TM,coh} = \frac{Z_{TM} - Z_0}{Z_{TM} + Z_0} = \frac{1 - Q}{1 + Q} \quad (4.89)$$

avec  $Q = \frac{Z_0}{Z_{TM}}$  et  $Z_0$  l'impédance du vide. D'après (4.88) et (4.89),  $Q$  s'écrit :

$$Q = \frac{k_0 Z_{TM,n}}{k_z} \quad (4.90)$$

ce qui donne pour l'impédance de surface effective  $Z_{TM}$  :

$$Z_{TM} = \frac{k_z}{k_0} \frac{Z_0}{Z_{TM,n}} \quad (4.91)$$

Ainsi, nous trouvons pour l'impédance de surface en polarisation TM :

$$Z_{TM} = \frac{k_z}{k_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Z_0 k'_z k_0}{(k_0^2 - k'_x k_{ix})^2 W(k_{ix} - k'_x)} dk'_x \quad (4.92)$$

Pour la polarisation TM, le champ magnétique est tangentiel à la surface et s'écrit  $H_y = \Psi \hat{y}$ . Le champ électrique est normal au champ magnétique et ne possède pas de composante tangentielle sur la surface, il s'écrit alors  $E = E_z \hat{z}$ . Nous avons alors l'expression suivante pour l'impédance de surface en polarisation TM :

$$Z_{TM} = \frac{E_z}{H_y} \quad (4.93)$$

D'après la relation (4.93), à partir de la connaissance du champ magnétique tangentiel en polarisation TM et de l'impédance de surface (4.92), nous pouvons déterminer l'inconnue  $E_z$  sur la surface.

### Permittivité diélectrique effective pour une surface diélectrique

Pour un sol diélectrique, les relations (4.86) et (4.88) ne peuvent plus être utilisées. Nous utilisons une autre approche pour calculer la permittivité diélectrique effective. Nous cherchons à déterminer la permittivité diélectrique relative contenue dans l'expression du coefficient de réflexion de Fresnel (2.25) pour que celui-ci soit égal au coefficient de réflexion cohérent déterminé en (4.82). Nous avons donc :

$$\mathcal{R}_{TE,coh}^{DI} = \frac{k_{iz} - k_{tz}}{k_{iz} + k_{tz}} \quad (4.94)$$

avec  $k_{tz} = \sqrt{\epsilon_{r,eff} k_0^2 - k_{tx}^2}$ . En isolant la permittivité diélectrique effective  $\epsilon_{r,eff}$ , et en utilisant la relation entre les angles incident et transmis  $\sqrt{\epsilon_{r,1}} \sin \theta_t = \sqrt{\epsilon_{r,0}} \sin \theta_i$ , nous obtenons :

$$\epsilon_{r,eff} = \frac{k_{iz}^2}{k_0^2} \left[ \frac{1 - \mathcal{R}_{TE,coh}^{DI}}{1 + \mathcal{R}_{TE,coh}^{DI}} \right]^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\epsilon_{r,0}}{\epsilon_{r,1}} \sin^2 \theta_i}} \quad (4.95)$$

En intégrant l'expression du coefficient de réflexion cohérent (4.82) dans (4.95), nous obtenons l'expression de la permittivité diélectrique effective.

Il est à noter que l'expression obtenue en (4.95) fait apparaître la permittivité diélectrique relative initiale du sol. Il est important de la garder afin de ne pas changer la direction de propagation spéculaire du champ cohérent.

### 4.8.5 Scénario d'utilisation des grandeurs effectives dans la plateforme

Les grandeurs effectives précédemment calculées (4.86), (4.92) et (4.95) peuvent être implantées dans la plateforme de calcul Prométhée. Pour le cas d'une surface rugueuse aléatoire PC, la figure 4.25 reflète l'utilisation de l'impédance de surface dans la plateforme. Nous avons vu que les expressions analytiques des impédances de surface obtenues pour les polarisation TE (4.86) et TM (4.92) dépendent de l'angle d'incidence. Pour ne pas avoir à affecter à chaque cellule de sol une valeur d'impédance de surface en fonction de l'angle de l'onde incidente qui vient l'illuminer, nous proposons, dans un premier temps, de travailler avec une onde incidente plane. Pour générer cette onde, nous utilisons une surface de Huygens [137] qui permet, dans une scène de volume fini, de simuler l'illumination d'une onde qui vient de l'infini.

A l'intérieur de la surface de Huygens, nous générons une surface lisse (2D) et lui affectons le modèle SIBC (Surface Impedance Boundary Conditions). Ce modèle va permettre d'affecter les impédances de surface sur l'interface du sol. L'interface de sol SIBC ne peut pas traverser les surfaces de Huygens. Elle a donc une surface finie dans la plateforme et nous aurons forcément de la diffraction pas les bords. Pour limiter l'influence de ces effets de bords, il est important de générer une surface de sol de grande dimension. De plus, afin d'éviter les réflexions des ondes sur les limites du volume du calcul, nous ajoutons des PML (Perfect Matched Layer), qui permettent d'absorber les ondes qui sortent du volume de calcul. L'utilisateur peut ensuite placer des sondes de champ électriques au-dessus de la surface pour calculer le champ diffusé cohérent au-dessus de la surface, sans avoir à effectuer des simulations de Monte-Carlo.

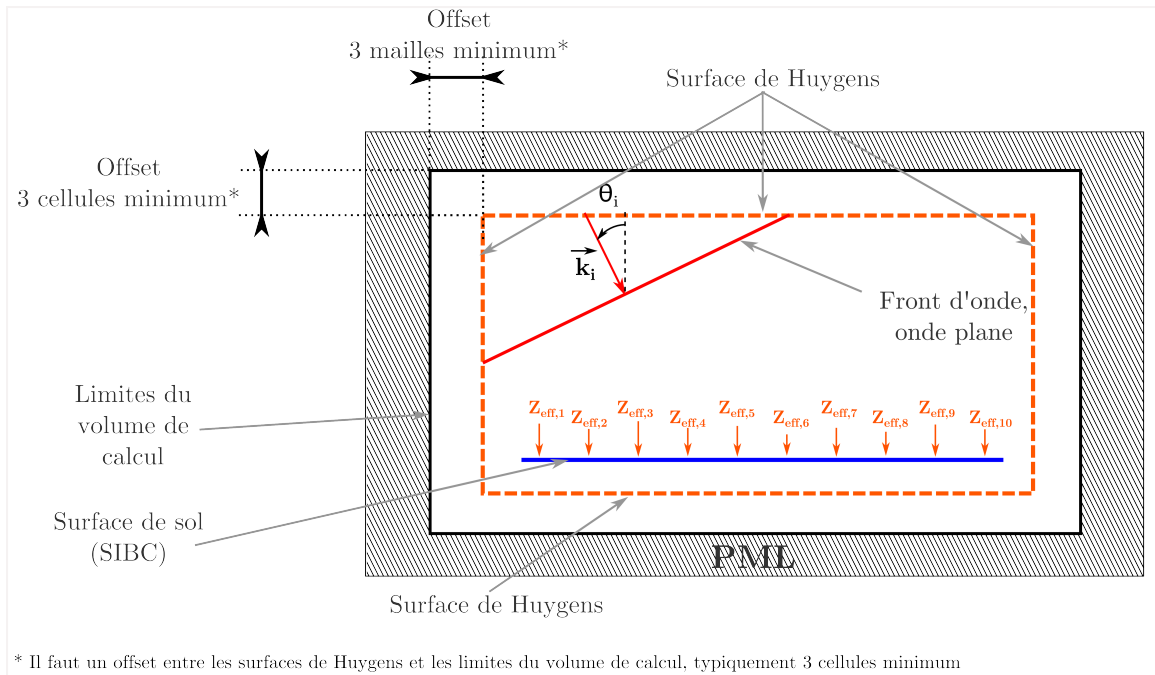


FIGURE 4.25 – Scénario d’utilisation de l’impédance de surface dans la plateforme de calcul 3D FDTD

Pour le cas d’une surface diélectrique, la figure 4.26 illustre le scénario d’intégration de la permittivité diélectrique effective dans la plateforme Prométhée. A partir de la connaissance de l’angle et de la polarisation de l’onde incidente, des paramètres de rugosités et de la nature de la surface rugueuse, nous pouvons calculer la valeur de la permittivité diélectrique effective. Cette permittivité est ensuite affectée au milieu servant à modéliser le sol qui, contrairement à la surface SIBC, peut être traversée par les surfaces de Huygens. Nous devons toujours respecter la contrainte de offset en plaçant des cellules entre les surfaces de Huygens et la limite du domaine de calcul, selon l’axe  $\hat{z}$  en disposant au minimum trois cellules de sol. Dans

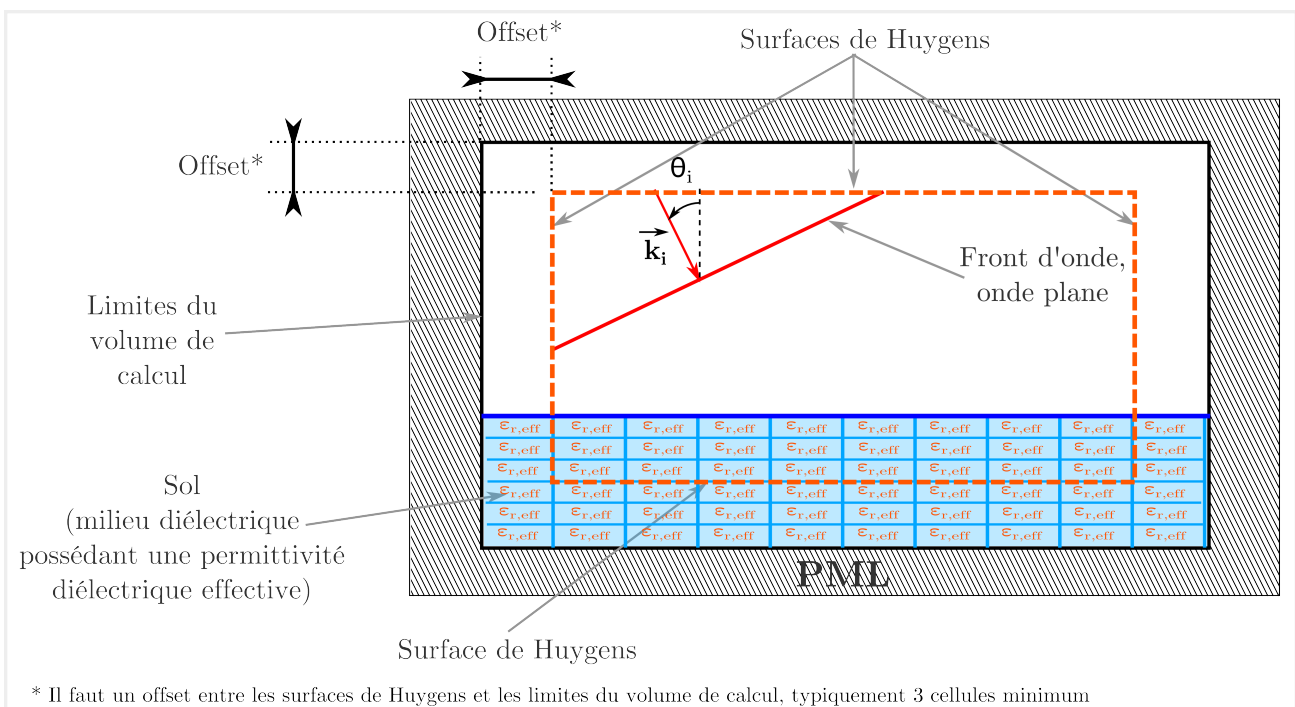


FIGURE 4.26 – Scénario d’utilisation de la permittivité diélectrique effective dans la plateforme de calcul 3D FDTD

cette scène, l'onde incidente plane est générée à nouveau à partir de la surface de Huygens. Pour éviter les réflexions sur les limites du domaine de calcul, nous utilisons à nouveau des couches absorbantes (PML). Contrairement au cas d'implantation de l'impédance de surface, nous n'avons pas de problème d'effets de bords étant donné que les extrémités du sol sont au contact des limites du domaine de calcul et donc des PML.



---

## Conclusion & Perspectives

## 5.1 Conclusion

Nous avons présenté les travaux réalisés pendant les trois années de thèse et portant sur la diffusion d'une onde électromagnétique par des surfaces rugueuses en présence d'un fil enfoui. Pour étudier cette problématique, nous avons travaillé sur trois volets principaux.

Le premier volet a été le développement d'un simulateur électromagnétique de la diffraction d'une onde incidente plane par un fil mince, rectiligne et de longueur finie. Dans cette étude, nous avons calculé les courants à la surface du fil et déterminé son diagramme de rayonnement. La visualisation des courants surfaciques aide à la compréhension du phénomène de couplage entre l'onde plane et le fil mince. Nous avons pu observer que le couplage sur un fil de longueur égale à plusieurs longueurs d'ondes revient au couplage sur des fils de longueur élémentaire mis bout à bout. Les informations obtenues à l'aide du diagramme de rayonnement ont permis de mieux estimer les configurations de fil qui favorisent sa détection sur une scène opérationnelle et d'identifier les scénarios pour lesquels la détection est défavorable.

Le second volet a traité de la mesure, de la modélisation et de la caractérisation de surfaces rugueuses. Nous avons présenté l'appareil de mesure que nous avons fabriqué, ainsi que le protocole de mesure mis en place. Sur deux terrains expérimentaux, nous avons relevé six profils de surfaces rugueuses. A partir de l'exemple du profil le plus long, nous avons décrit comment le modéliser en deux composantes : une composante pseudo-déterministe comportant les rugosités basses fréquences et une composante aléatoire comportant les rugosités hautes fréquences. La composante pseudo-déterministe a été modélisée à l'aide d'un polynôme et la composante aléatoire a été obtenue par soustraction de la composante pseudo-déterministe du profil complet. La composante aléatoire a pu être caractérisée par deux fonctions : sa DDP et sa FA. La DDP a été modélisée par une fonction gaussienne et la FA correspondait davantage au comportement d'une fonction exponentielle.

De ces deux fonctions, nous avons extrait deux paramètres clés : l'écart-type des hauteurs et la longueur de corrélation. Les mesures ont montré que l'écart-type des hauteurs des profils relevés est compris entre 1.23 cm et 1.96 cm et la longueur de corrélation est comprise entre 26 cm et 56 cm. A l'aide de ces deux paramètres, de l'information sur l'angle et sur la longueur d'onde de l'onde incidente, nous avons calculé le paramètre de rugosité de Rayleigh. Les valeurs obtenues ont montré que la rugosité électromagnétique de la surface est faible, c'est-à-dire que les variations des hauteurs de la surface sont faibles devant la longueur d'onde. Cela a orienté le choix du modèle de diffusion vers un modèle basse fréquence. Le modèle que nous avons choisi est la **Méthode des Petites Perturbations**.

A partir du livre de Tsang & al. [36], nous avons reproduit les développements du modèle **MPP** pour une scène 2D, afin d'obtenir les expressions du champ diffracté en tout point de l'espace au dessus d'une surface PC pour les polarisations TE et TM. Nous avons également pu obtenir une expression alternative des courants surfaciques de celle proposée par ce livre et la valider en la comparant à la **MdM**. Tsang & al. ont développé la méthode **MPP** pour une surface rugueuse, PC, éclairée par une onde incidente plane. Nous avons repris leur travaux pour obtenir une expression récursive des courants surfaciques, pour des surfaces PC et diélectriques, à n'importe quel ordre et pour n'importe quelle onde incidente.

Dans le cas particulier d'une onde incidente plane, nous avons pu étendre leur méthode pour une surface diélectrique afin d'obtenir une expression analytique des courants surfaciques et du champ diffracté, jusqu'à l'ordre 2 pour la polarisation TE et jusqu'à l'ordre 1 pour la polarisation TM. A partir des expressions analytiques des champs diffractés et de moyennage statistique, nous avons pu obtenir les expressions des champs diffusés cohérents et des coefficients de diffusion bistatiques incohérents. Les coefficients de diffusion bistatiques incohérents obtenus ont pu être comparés à ceux de la littérature pour valider leurs expressions. Dans le cas d'une onde incidente plane et d'une surface de longueur infinie, nous avons pu voir que le champ diffusé cohérent se propage dans la direction spéculaire uniquement et que le champ diffusé incohérent se propage dans toutes les directions du demi-espace au-dessus de la surface avec une intensité variable.

A partir des expressions analytiques des champs cohérents obtenues à l'aide de la méthode **MPP** et conformément aux travaux du domaine, nous avons proposé la définition du coefficient de réflexion cohérent comme étant le rapport du champ diffusé cohérent calculé sur le plan moyen  $z = 0$  sur le champ incident calculé sur le plan moyen  $z = 0$ . Ce coefficient de réflexion cohérent permet d'accéder directement à la connaissance du champ diffusé cohérent à partir de la connaissance du champ incident et des paramètres statistiques de la surface rugueuse.

Pour les surfaces PC, par analogie avec la théorie des lignes de transmission et d'après les méthodes employées dans les articles d'Ishimaru [122], [123] et Barrick [105], [103], nous avons lié ce coefficient de réflexion cohérent à des termes d'impédance de surface effective. Dans le cas de surfaces rugueuses diélectriques, nous avons relié le coefficient de réflexion cohérent à une expression de permittivité diélectrique effective en nous inspirant des coefficients de Fresnel. Contrairement au cas PC où l'impédance de surface s'applique sur l'interface, la permittivité diélectrique effective est à appliquer sur tout le milieu en dessous de la surface. Avec cette permittivité diélectrique effective, nous sommes capables de calculer le champ diffusé cohérent à partir du coefficient de réflexion cohérent et du champ incident. La permittivité diélectrique effective permet également de relier des paramètres géométriques de surfaces rugueuses à des paramètres diélectriques de sol.

## 5.2 Perspectives

Les trois années pendant lesquelles j'ai pu étudier ce sujet de thèse ont permis d'atteindre les résultats présentés plus haut. Nous proposons ici des pistes sur lesquelles nos travaux peuvent être approfondis ou prolongés :

- **la modélisation de la composante pseudo-déterministe à partir d'une approche spectrale.** Nous proposons une autre approche de la modélisation de la composante pseudo-déterministe qui fournit une meilleure signification physique que l'approche polynomiale. A partir de la transformée de Fourier des hauteurs, nous proposons de modéliser la composante pseudo-déterministe par les composantes spectrales basses fréquences, celles qui seraient inférieures à une fréquence  $f_0$ . La fréquence  $f_0$  serait déterminée à partir d'un extremum local de la densité spectrale de puissance des hauteurs. La composante aléatoire serait alors déterminée par la partie haute fréquence de la transformée de Fourier des hauteurs. L'avantage de cette méthode est qu'elle donne une signification physique à la décomposition du profil en plusieurs composantes selon la bande spectrale qu'elles recouvrent. Il serait intéressant de tester cette méthode numériquement sur un de nos profils des hauteurs en le décomposant en deux composantes et de comparer les résultats avec la méthode actuelle.
- **la modélisation de la fonction d'autocorrélation (FA) des hauteurs de la surface avec un modèle à 2, voire 3 paramètres.** Dans ce manuscrit, la FA a été modélisée par une fonction exponentielle, qui est une fonction strictement positive. Or, expérimentalement, cette fonction peut prendre des valeurs négatives. Ainsi, il serait intéressant de modéliser la FA intégrant cette propriété et quantifier cet impact sur le coefficient de diffusion bistatique incohérent. Ce travail a été initié durant la thèse en multipliant le profil exponentiel par une fonction cosinus, mais n'a pas été présenté car non finalisé.
- **la finalisation du calcul des expressions analytiques du modèle MPP.** Déterminer l'expression analytique des courants surfaciques pour le cas d'une surface diélectrique rugueuse, en polarisation TM et à l'ordre 2.
- **la comparaison des champs diffractés avec ceux calculés par la décomposition du champ diffracté en somme d'ondes planes.** Nous avons calculer le champ diffracté en utilisant le principe de Huygens. Nous n'avons pas utilisé la décomposition en sommes d'ondes pour calculer numériquement le champ diffracté alors que nous l'avons utilisée pour son calcul analytique. Il peut être



intéressant de comparer les champs diffractés obtenus à l'aide du principe de Huygens et ceux issus de la décomposition en somme d'ondes planes.

- **l'étude paramétrique des grandeurs effectives.** Nous avons obtenu les expressions analytiques des grandeurs effectives. Mener une étude paramétrique en faisant varier la longueur de corrélation, l'écart-type des hauteurs, la longueur d'onde et l'angle d'incidence permettrait d'évaluer la variabilité de l'impédance de surface effective et de la permittivité diélectrique effective. Pour la permittivité diélectrique effective, nous pourrions notamment déterminer comment la conductivité électrique effective évolue en fonction des paramètres de rugosité (longueur de corrélation et écart-type des hauteurs).

Le besoin initial de l'industriel consistait notamment à mieux connaître les phénomènes physiques mis en jeu, pouvoir améliorer leur capacité de simuler ces phénomènes et améliorer les capacités de traitements. Pour mieux répondre aux besoins de l'industriel, voici les démarches que nous proposons :

- **Objectif industriel : améliorer les résultats de simulation et la compréhension des phénomènes mis en jeu.** Etendre le modèle MPP à un problème 3D pour inclure éventuellement le phénomène de dépolarisation. De plus, dans le cadre de l'ANR MCIED, l'IETR a développé un code 3D, basé sur la MdM, calculant le champ diffracté par une surface rugueuse en présence d'un fil enfoui. La méthode résultante a été accélérée à l'aide de l'algorithme PILE, permettant de quantifier les différentes contributions (fil, surface rugueuse et couplage fil/surface rugueuse). Afin d'accélérer cette méthode, il serait pertinent d'introduire le modèle MPP pour le calcul des interactions locales sur la surface rugueuse, au lieu d'utiliser une décomposition LU de la matrice impédance, coûteuse en temps de calcul et espace mémoire.
- **Objectif industriel : améliorer les algorithmes de traitement pour limiter les fausses alarmes.** Pour atteindre cet objectif, le besoin requis par les équipes de traitement du signal est la modélisation de la FA spatiale du champ diffusé au dessus de la surface, à hauteur de l'antenne de réception. Actuellement, cette fonction est connue pour un problème 2D. Ainsi, il serait pertinent de l'étendre à un problème 3D.

Dans cette thèse, nous avons obtenu des résultats de simulations numériques et de nombreuses perspectives proposées portent sur d'autres simulations à mener. Dans le but de valider ces résultats de simulations en les comparant à des résultats de mesure, nous proposons deux approches expérimentales afin de mesurer le champ diffusé par une surface rugueuse :

- **la mesure de l'impédance effective sur terrain réel.** Il est complexe de mesurer le champ diffusé en environnement réel à cause du bruit environnant et de la non maîtrise de nombreux paramètres (présence de végétation ou d'objets contenus dans la sol). Faure [69] a proposé une manière indirecte de mesurer une impédance de surface effective en acoustique. Nous pouvons nous inspirer de ses travaux pour mettre en place un protocole expérimental permettant d'accéder à l'impédance de surface par la mesure.
- **la mesure du champ diffracté dans une chambre anéchoïque.** Nous proposons une méthode en laboratoire pour mesurer le champ diffracté par une surface rugueuse. En laboratoire, dans une chambre anéchoïque, nous nous plaçons dans un environnement électromagnétique privé du bruit environnant. Comme nous savons générer numériquement une surface rugueuse, nous pouvons usiner une surface rugueuse à partir d'un modèle numérique. En effectuant les simulations électromagnétiques sur le profil généré, il est alors possible de les comparer à celles obtenues expérimentalement sur la surface usinée à partir du même profil. La surface étant de dimension finie, il faut donc prendre garde de s'affranchir du problème de diffraction sur les bords.



## Calculs préalables sur le champ incident

La fonction des variations hauteurs sur la surface peut s'exprimer par la relation :

$$h : x \mapsto h(x) \quad (\text{A.1})$$

Pour simplifier les notations, nous écrivons  $z = h(x)$ . La fonction des variations de hauteur de la surface est de moyenne nulle  $\langle z \rangle = 0$  et sa pente s'écrit :

$$\gamma = \frac{\partial z}{\partial x} \quad (\text{A.2})$$

En utilisant les opérateurs transformée de Fourier et transformée de Fourier inverse, nous avons les relations suivantes entre  $z$ , sa transformée de Fourier  $\tilde{z}$  et la pente  $\gamma$

$$\begin{cases} \tilde{z} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} z e^{-jk_x x} dx \\ z = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{z} e^{jk_x x} dk_x \\ \gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} j k_x \tilde{z} e^{jk_x x} dk_x \end{cases}$$

### A.1 Développement perturbatif d'une onde incidente plane

Nous définissons l'expression d'une onde incidente plane illuminant la surface avec un angle  $\theta_i$  selon la verticale et se propageant dans la direction  $k_{ix}\hat{x} - k_{iz}\hat{z}$  par :

$$\Psi_i(x, z) = \Psi_{i0} e^{j(k_{ix}x - k_{iz}z)} \quad (\text{A.3})$$

où

$$\begin{cases} k_{ix} = k_0 \sin(\theta_i) \\ k_{iz} = k_0 \cos(\theta_i) \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Nous avons vu au chapitre III que les variations des hauteurs sont faibles devant la longueur d'onde, nous avons donc  $|k_{iz}z| \ll 1$  et nous pouvons effectuer le développement en série de Taylor (jusqu'à l'ordre 2) de la fonction exponentielle selon le paramètre  $k_{iz}z$  :

$$\Psi_i(x, z) = \Psi_{i0} e^{jk_{ix}x} \left( 1 - jk_{iz}z - \frac{k_{iz}^2 z^2}{2} \right) \quad (\text{A.5})$$

L'onde incidente  $\Psi_i$  peut s'écrire comme la somme de petites perturbations :

$$\Psi_i = \Psi_i^{(0)} + \Psi_i^{(1)} + \Psi_i^{(2)} \quad (\text{A.6})$$

où les termes des différents ordres sont :

$$\begin{cases} \Psi_i^{(0)} &= \Psi_{i0} e^{jk_{ix}x} & (\text{Ordre 0}) \\ \Psi_i^{(1)} &= -jk_{iz}z \Psi_{i0} e^{jk_{ix}x} & (\text{Ordre 1}) \\ \Psi_i^{(2)} &= -\frac{k_{iz}^2 z^2}{2} \Psi_{i0} e^{jk_{ix}x} & (\text{Ordre 2}) \end{cases}$$

La dérivée normale de l'onde incidente  $\frac{\partial \Psi_i}{\partial n}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_i}{\partial n} &= \mathbf{n} \cdot \nabla \Psi_i \\ &= n_x \cdot \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + n_z \cdot \frac{\partial \Psi_i}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

où  $\hat{\mathbf{n}}$  est le vecteur normale à la surface et qui a pour expression  $\hat{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \end{pmatrix}$ . Dans la décomposition en petites perturbations  $\gamma$  est un terme d'ordre 1 car les pentes des hauteurs sont également faibles devant l'unité :  $\gamma \ll 1$ . La dérivée normale du champ incident peut également s'écrire comme une somme de petites perturbations :

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_z \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{array}{l} \frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_i^{(2)}}{\partial x} \\ \frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_i^{(2)}}{\partial z} \end{array} \right) \quad (\text{A.8})$$

où les dérivées partielles de l'onde incidente selon  $x$ ,  $\frac{\partial \Psi_i}{\partial x}$ , et selon  $z$ ,  $\frac{\partial \Psi_i}{\partial z}$ , s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} &= jk_{ix} \Psi_{i0} e^{j(k_{ix}x - k_{iz}z)} \\ \frac{\partial \Psi_i}{\partial z} &= -jk_{iz} \Psi_{i0} e^{j(k_{ix}x - k_{iz}z)} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Après avoir effectué un développement en série de la fonction exponentielle selon le paramètre  $k_{iz}z$  pour les dérivées partielles (A.9), nous identifions leurs termes aux ordres 0, 1 et 2 :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial x} &= jk_{ix} \Psi_{i0} e^{jk_{ix}x} & (\text{Ordre 0}) \\ \frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial x} &= k_{ix} k_{iz} z \Psi_{i0} e^{jk_{ix}x} & (\text{Ordre 1}) \\ \frac{\partial \Psi_i^{(2)}}{\partial x} &= -\frac{jk_{iz}^2 k_{ix} z^2}{2} \Psi_{i0} e^{jk_{ix}x} & (\text{Ordre 2}) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial z} &= -jk_{iz} \Psi_{i0} e^{jk_{ix}x} & (\text{Ordre 0}) \\ \frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial z} &= -k_{iz}^2 z \Psi_{i0} e^{jk_{ix}x} & (\text{Ordre 1}) \\ \frac{\partial \Psi_i^{(2)}}{\partial z} &= \frac{jk_{iz}^3 z^2}{2} \Psi_{i0} e^{jk_{ix}x} & (\text{Ordre 2}) \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

Identifions les termes d'ordres 0, 1 et 2 du développement en série de Taylor de la dérivée normale du champ incident :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi_i}{\partial \mathbf{n}} &= \frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial \Psi_i^{(2)}}{\partial \mathbf{n}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial z} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \left( -\gamma \frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial z} \right) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \left( -\gamma \frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_i^{(2)}}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{A.11}$$

En remplaçant les termes des dérivées partielles (A.1) et (A.10) dans (A.11), nous obtenons les expressions suivantes pour les premiers ordres du développement perturbatif de la dérivée normale du champ incident :

$$\begin{cases}
\frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial \mathbf{n}} = -jk_{iz} \frac{\Psi_{i0} e^{jk_{ix}x}}{\sqrt{1+\gamma^2}} & \text{(Ordre 0)} \\
\frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial \mathbf{n}} = -(j\gamma k_{ix} + k_{iz}^2 z) \frac{\Psi_{i0} e^{jk_{ix}x}}{\sqrt{1+\gamma^2}} & \text{(Ordre 1)} \\
\frac{\partial \Psi_i^{(2)}}{\partial \mathbf{n}} = \left( \frac{jk_{iz}^3 z^2}{2} - \gamma k_{ix} k_{iz} z \right) \frac{\Psi_{i0} e^{jk_{ix}x}}{\sqrt{1+\gamma^2}} & \text{(Ordre 2)}
\end{cases}$$

Nous donnons ci-dessous les expressions des termes perturbatifs du champ incident dans le domaine spatiale et leur équivalent dans le domaine spectral :

$$\left\{ \begin{array}{lll}
\Psi_i^{(0)} = \Psi_{i0} e^{jk_{ix}x} & \longleftrightarrow & \mathcal{F} \left( \Psi_i^{(0)} \right) = \Psi_{i0} \delta(k_x - k_{ix}) \\
\Psi_i^{(1)} = -jk_{iz} z \Psi_{i0} e^{jk_{ix}x} & \longleftrightarrow & \mathcal{F} \left( \Psi_i^{(1)} \right) = -jk_{iz} \Psi_{i0} \tilde{z} (k_x - k_{ix}) \\
\Psi_i^{(2)} = -\frac{k_{iz}^2 z^2}{2} \Psi_{i0} e^{jk_{ix}x} & \longleftrightarrow & \mathcal{F} \left( \Psi_i^{(2)} \right) = -\frac{k_{iz}^2}{2} \tilde{z} (k_x - k_{ix}) * \tilde{z} \\
\frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial x} = jk_{ix} \Psi_{i0} e^{jk_{ix}x} & \longleftrightarrow & \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial x} \right) = jk_{ix} \Psi_{i0} \delta(k_x - k_{ix}) \\
\frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial x} = k_{ix} k_{iz} z \Psi_{i0} e^{jk_{ix}x} & \longleftrightarrow & \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial x} \right) = k_{ix} k_{iz} \Psi_{i0} \tilde{z} (k_x - k_{ix}) \\
\frac{\partial \Psi_i^{(2)}}{\partial x} = \frac{-jk_{ix} k_{iz}^2 z^2}{2} \Psi_{i0} e^{jk_{ix}x} & \longleftrightarrow & \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(2)}}{\partial x} \right) = \frac{-jk_{ix} k_{iz}^2}{2} \Psi_{i0} \tilde{z} (k_x - k_{ix}) * \tilde{z} \\
\frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial z} = -jk_{iz} \Psi_{i0} e^{jk_{ix}x} & \longleftrightarrow & \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial z} \right) = -jk_{iz} \Psi_{i0} \delta(k_x - k_{ix}) \\
\frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial z} = -k_{iz}^2 z \Psi_{i0} e^{jk_{ix}x} & \longleftrightarrow & \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial z} \right) = -k_{iz}^2 \Psi_{i0} \tilde{z} (k_x - k_{ix}) \\
\frac{\partial \Psi_i^{(2)}}{\partial z} = \frac{jk_{iz}^3 z^2}{2} \Psi_{i0} e^{jk_{ix}x} & \longleftrightarrow & \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(2)}}{\partial z} \right) = \frac{jk_{iz}^3}{2} \Psi_{i0} \tilde{z} (k_x - k_{ix}) * \tilde{z}
\end{array} \right.$$



## Calculs préalables sur le champ diffracté

Le champ diffracté par une surface rugueuse peut s'écrire comme la somme d'ondes planes se propageant dans les différentes directions du demi espace au-dessus de la surface :

$$\Psi_d(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}_d(k_x) e^{j(k_x x + k_z z)} dk_x \quad (\text{B.1})$$

Comme les variations des hauteurs sont faibles devant la longueur d'onde, nous avons  $|k_{iz}z| \ll 1$ . Nous effectuons le développement en série de Taylor de la fonction exponentielle contenant ce paramètre jusqu'à l'ordre 2 et écrivons  $\tilde{\Psi}_d$  comme une somme de petites perturbations. Nous obtenons :

$$\Psi_d = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \tilde{\Psi}_d^{(0)} + \tilde{\Psi}_d^{(1)} + \tilde{\Psi}_d^{(2)} \right) \left( 1 + jk_z z - \frac{k_z^2 z^2}{2} \right) e^{jk_x x} dk_x \quad (\text{B.2})$$

Après l'identification des termes des différents ordres, nous avons :

$$\begin{aligned} \Psi_d &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}_d^{(0)} e^{jk_x x} dk_x && (\text{Ordre 0}) \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ jk_z z \tilde{\Psi}_d^{(0)} + \tilde{\Psi}_d^{(1)} \right] e^{jk_x x} dk_x && (\text{Ordre 1}) \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ -\frac{k_z^2 z^2}{2} \tilde{\Psi}_d^{(0)} + jk_z z \tilde{\Psi}_d^{(1)} + \tilde{\Psi}_d^{(2)} \right] e^{jk_x x} dk_x && (\text{Ordre 2}) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Pour chacun des ordres de (B.3), nous reconnaissons une transformée de Fourier inverse.  $z$  doit donc être exprimé dans le domaine spectral par  $\tilde{z}$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} \Psi_d &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}_d^{(0)} e^{jk_x x} dk_x && (\text{Ordre 0}) \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \tilde{z} * \left( jk_z \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) + \tilde{\Psi}_d^{(1)} \right] e^{jk_x x} dk_x && (\text{Ordre 1}) \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ -\tilde{z} * \tilde{z} * \left( \frac{k_z^2}{2} \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) + \tilde{z} * \left( jk_z \tilde{\Psi}_d^{(1)} \right) + \tilde{\Psi}_d^{(2)} \right] e^{jk_x x} dk_x && (\text{Ordre 2}) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

où  $*$  est le symbole de la convolution définie par  $(a * b)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(t)b(\tau - t)dt$ . Le champ diffracté s'écrit comme la somme de petites perturbations  $\Psi_d = \Psi_d^{(0)} + \Psi_d^{(1)} + \Psi_d^{(2)}$ , dont les expressions sont données par :

$$\begin{cases} \Psi_d^{(0)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}_d^{(0)} e^{jk_x x} dk_x \\ \Psi_d^{(1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \tilde{z} * \left( jk_z \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) + \tilde{\Psi}_d^{(1)} \right] e^{jk_x x} dk_x \\ \Psi_d^{(2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ -\tilde{z} * \tilde{z} * \left( \frac{k_z^2}{2} \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) + \tilde{z} * \left( jk_z \tilde{\Psi}_d^{(1)} \right) + \tilde{\Psi}_d^{(2)} \right] e^{jk_x x} dk_x \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Nous venons de fournir les expressions des petites perturbations du champ diffractés jusqu'à l'ordre 2. Les inconnues qui sont à déterminer sont les  $\tilde{\Psi}_d^{(0)}$ ,  $\tilde{\Psi}_d^{(1)}$  et  $\tilde{\Psi}_d^{(2)}$ . Déterminons désormais les termes du développement perturbatif de la dérivée normale du champ diffracté :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_d}{\partial \mathbf{n}} &= \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \Psi_d}{\partial \mathbf{n}} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{n}_x \\ \mathbf{n}_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_d}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial \Psi_d}{\partial \mathbf{z}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Les dérivées partielles du champ diffracté sont développées en série jusqu'à l'ordre 2 :

$$\frac{\partial \Psi_d}{\partial \mathbf{n}} = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_x \\ \mathbf{n}_z \end{pmatrix} \cdot \left( \frac{\partial \Psi_d^{(0)}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \Psi_d^{(1)}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \Psi_d^{(2)}}{\partial \mathbf{x}} \right) + \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_d^{(0)}}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial \Psi_d^{(1)}}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial \Psi_d^{(2)}}{\partial \mathbf{z}} \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

En regroupant les termes d'ordre 0, 1 et 2, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_d}{\partial \mathbf{n}} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2}} \frac{\partial \Psi_d^{(0)}}{\partial \mathbf{z}} \quad (\text{ordre 0}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2}} \left( -\gamma \frac{\partial \Psi_d^{(0)}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \Psi_d^{(1)}}{\partial \mathbf{z}} \right) \quad (\text{ordre 1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2}} \left( -\gamma \frac{\partial \Psi_d^{(1)}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \Psi_d^{(2)}}{\partial \mathbf{z}} \right) \quad (\text{ordre 2}) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Calculons les termes perturbatifs de chacune des dérivées partielles. La dérivée partielle selon  $x$  s'écrit :

$$\frac{\partial \Psi_d}{\partial \mathbf{x}} = \int_{-\infty}^{+\infty} jk_x \tilde{\Psi}_d(k_x) e^{j(k_x x + k_z z)} dk_x \quad (\text{B.9})$$

En développant en série de Taylor la fonction exponentielle et en écrivant  $\tilde{\Psi}_d$  comme une somme de petites perturbations, nous avons :

$$\frac{\partial \Psi_d}{\partial \mathbf{x}} = \int_{-\infty}^{+\infty} jk_x \left( \tilde{\Psi}_d^{(0)}(k_x) + \tilde{\Psi}_d^{(1)}(k_x) + \tilde{\Psi}_d^{(2)}(k_x) \right) \left( 1 + jk_z z - \frac{k_z^2 z^2}{2} \right) e^{jk_x x} dk_x \quad (\text{B.10})$$

En identifiant les termes des ordres 0, 1 et 2, nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi_d}{\partial x} &= \int_{-\infty}^{+\infty} j k_x \tilde{\Psi}_d^{(0)}(k_x) e^{j k_x x} dk_x && \text{(Ordre 0)} \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} \left( -k_x k_z z \tilde{\Psi}_d^{(0)}(k_x) + j k_x \tilde{\Psi}_d^{(1)}(k_x) \right) e^{j k_x x} dk_x && \text{(Ordre 1)} \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} \left( -\frac{j k_z^2 k_x z^2}{2} \tilde{\Psi}_d^{(0)}(k_x) - k_x k_z z \tilde{\Psi}_d^{(1)}(k_x) + j k_x \tilde{\Psi}_d^{(2)}(k_x) \right) e^{j k_x x} dk_x && \text{(Ordre 2)}
\end{aligned} \tag{B.11}$$

Nous procédons de la même manière pour la dérivée partielle selon  $z$ ,  $\frac{\partial \Psi_d}{\partial z}$  :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi_d}{\partial z} &= \int_{-\infty}^{+\infty} j k_z \tilde{\Psi}_d(k_x) e^{j(k_x x + k_z z)} dk_x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} j k_z \left( \tilde{\Psi}_d^{(0)}(k_x) + \tilde{\Psi}_d^{(1)}(k_x) + \tilde{\Psi}_d^{(2)}(k_x) \right) e^{j k_x x} \left( 1 + j k_z z - \frac{k_z^2 z^2}{2} \right) dk_x
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Dans la suite, pour simplifier les notations, nous écrivons  $\tilde{\Psi}_d^{(i)}$  pour  $\tilde{\Psi}_d^{(i)}(k_x)$ . En identifiant les termes des ordres 0, 1 et 2, nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi_d}{\partial z} &= \int_{-\infty}^{+\infty} j k_z \tilde{\Psi}_d^{(0)} e^{j k_{ix} x} dk_x && \text{(Ordre 0)} \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} \left( -k_z^2 z \tilde{\Psi}_d^{(0)} + j k_z \tilde{\Psi}_d^{(1)} \right) e^{j k_{ix} x} dk_x && \text{(Ordre 1)} \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} \left( -\frac{j k_z^3 z^2}{2} \tilde{\Psi}_d^{(0)} - k_z^2 z \tilde{\Psi}_d^{(1)} + j k_z \tilde{\Psi}_d^{(2)} \right) e^{j k_{ix} x} dk_x && \text{(Ordre 2)}
\end{aligned} \tag{B.13}$$

La dérivée normale  $\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}}$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi_d}{\partial \mathbf{n}} &= \frac{\partial \Psi_d^{(0)}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial \Psi_d^{(1)}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial \Psi_d^{(2)}}{\partial \mathbf{n}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} j k_z \tilde{\Psi}_d^{(0)} e^{j k_{ix} x} dk_x && \text{(Ordre 0)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ j k_z \tilde{\Psi}_d^{(1)} + (-j \gamma k_x - k_z^2 z) \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right] e^{j k_{ix} x} dk_x && \text{(Ordre 1)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ j k_z \tilde{\Psi}_d^{(2)} + (-j \gamma k_x - k_z^2 z) \tilde{\Psi}_d^{(1)} \right] e^{j k_{ix} x} dk_x \\
&+ \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \gamma k_x k_z z - \frac{j k_z^3 z^2}{2} \right] \tilde{\Psi}_d^{(0)} e^{j k_{ix} x} dk_x && \text{(Ordre 2)}
\end{aligned} \tag{B.14}$$



En notant  $\mathcal{F}(\gamma) = jk_x \tilde{z}$  et  $\mathcal{F}(z) = \tilde{z}$ , nous obtenons au final :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi_d}{\partial \mathbf{n}} &= \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} jk_z \tilde{\Psi}_d^{(0)}(k_x) e^{jk_{ix}x} dk_x && \text{(Ordre 0)} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( jk_z \tilde{\Psi}_d^{(1)} + (k_x \tilde{z}) * (k_x \tilde{\Psi}_d^{(0)}) - \tilde{z} * (k_z^2 \tilde{\Psi}_d^{(0)}) \right) e^{jk_{ix}x} dk_x && \text{(Ordre 1)} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( jk_z \tilde{\Psi}_d^{(2)} + (k_x \tilde{z}) * (k_x \tilde{\Psi}_d^{(1)}) - \tilde{z} * (k_z^2 \tilde{\Psi}_d^{(1)}) \right) e^{jk_{ix}x} dk_x \\
&+ \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ (jk_x \tilde{z}) * \tilde{z} * (k_x k_z \tilde{\Psi}_d^{(0)}) - \tilde{z} * \tilde{z} * \frac{jk_z^3}{2} \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right] e^{jk_{ix}x} dk_x && \text{(Ordre 2)}
\end{aligned} \tag{B.15}$$



## Annexe C : Problème de Dirichlet - surface PC

### C.1 Cas d'une onde incidente quelconque

Nous rappelons la condition aux limites de Dirichlet qui s'applique pour une onde incidente en polarisation TE :

$$\Psi = \Psi_i + \Psi_d = 0 \quad (\text{C.1})$$

En décomposant le champ incident et le champ diffusé en petites perturbations, jusqu'à l'ordre 2, nous avons :

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi_i + \Psi_d \\ &= \Psi_i^{(0)} + \Psi_d^{(0)} + \Psi_i^{(1)} + \Psi_d^{(1)} + \Psi_i^{(2)} + \Psi_d^{(2)} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

D'après la conditions aux limites de Dirichlet,  $\Psi_i = -\Psi_d$ . Cette relation est établie pour chacun des ordres de la **MPP**, nous avons alors :

$$\begin{cases} \Psi_d^{(0)} = -\Psi_i^{(0)} \\ \Psi_d^{(1)} = -\Psi_i^{(1)} \\ \Psi_d^{(2)} = -\Psi_i^{(2)} \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

En utilisant les développements de l'annexe B, le système d'équations (C.3) devient :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}_d^{(0)} e^{jk_x x} dk_x &= -\Psi_i^{(0)} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \tilde{z} * \left( jk_z \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) + \tilde{\Psi}_d^{(1)} \right) e^{jk_x x} dk_x &= -\Psi_i^{(1)} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \left( -\tilde{z} * \tilde{z} * \left( \frac{k_z^2}{2} \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) + \tilde{z} * \left( jk_z \tilde{\Psi}_d^{(1)} \right) + \tilde{\Psi}_d^{(2)} \right) e^{jk_x x} dk_x &= -\Psi_i^{(2)} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Effectuons une transformée de Fourier, notée  $\mathcal{F}$ , de (C.4), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}_d^{(0)} &= -\mathcal{F}\left(\Psi_i^{(0)}\right) \\ \tilde{z} * \left(jk_z \tilde{\Psi}_d^{(0)}\right) + \tilde{\Psi}_d^{(1)} &= -\mathcal{F}\left(\Psi_i^{(1)}\right) \\ -\tilde{z} * \tilde{z} * \left(\frac{k_z^2}{2} \tilde{\Psi}_d^{(0)}\right) + \tilde{z} * \left(jk_z \tilde{\Psi}_d^{(1)}\right) + \tilde{\Psi}_d^{(2)} &= -\mathcal{F}\left(\Psi_i^{(2)}\right)\end{aligned}\quad (\text{C.5})$$

Nous avons alors un système récursif où les inconnues à trouver successivement sont  $\tilde{\Psi}_d^{(0)}$ ,  $\tilde{\Psi}_d^{(1)}$  et  $\tilde{\Psi}_d^{(2)}$  :

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}_d^{(0)} = -\mathcal{F}\left(\Psi_i^{(0)}\right) \\ \tilde{\Psi}_d^{(1)} = -\mathcal{F}\left(\Psi_i^{(1)}\right) - \tilde{z} * \left(jk_z \tilde{\Psi}_d^{(0)}\right) \\ \tilde{\Psi}_d^{(2)} = -\mathcal{F}\left(\Psi_i^{(2)}\right) + \tilde{z} * \tilde{z} * \left(\frac{k_z^2}{2} \tilde{\Psi}_d^{(0)}\right) - \tilde{z} * \left(jk_z \tilde{\Psi}_d^{(1)}\right) \end{cases}\quad (\text{C.6})$$

Nous venons de déterminer les inconnues  $\tilde{\Psi}_d^{(0)}$ ,  $\tilde{\Psi}_d^{(1)}$  et  $\tilde{\Psi}_d^{(2)}$ . Pour obtenir les courants surfaciques, il faut réinjecter les inconnues dans l'expression des courants en polarisation TE :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}} &= \frac{\Psi_i}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial \Psi_d}{\partial \mathbf{n}} \\ &= \frac{\Psi_i^{(0)}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial \Psi_d^{(0)}}{\partial \mathbf{n}} \\ &\quad + \frac{\Psi_i^{(1)}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial \Psi_d^{(1)}}{\partial \mathbf{n}} \\ &\quad + \frac{\Psi_i^{(2)}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial \Psi_d^{(2)}}{\partial \mathbf{n}}\end{aligned}\quad (\text{C.7})$$

soit, pour leur expression sous forme de petites perturbations :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}} &= \frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial \mathbf{n}} \\ &= \frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} jk_z \tilde{\Psi}_d^{(0)} e^{jk_{ix}x} dk_x \quad (\text{Ordre 0}) \\ &\quad + \frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ jk_z \tilde{\Psi}_d^{(1)} + (k_x \tilde{z}) * \left( k_x \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) - \tilde{z} * \left( k_z^2 \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) \right] e^{jk_{ix}x} dk_x \quad (\text{Ordre 1}) \\ &\quad + \frac{\partial \Psi_i^{(2)}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( jk_z \tilde{\Psi}_d^{(2)} + (k_x \tilde{z}) * \left( k_x \tilde{\Psi}_d^{(1)} \right) - \tilde{z} * \left( k_z^2 \tilde{\Psi}_d^{(1)} \right) \right) e^{jk_{ix}x} dk_x \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ jk_x \tilde{z} * \tilde{z} * \left( k_x k_z \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) - \tilde{z} * \tilde{z} * \left( \frac{jk_z^3}{2} \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) \right] e^{jk_{ix}x} dk_x \quad (\text{Ordre 2})\end{aligned}\quad (\text{C.8})$$

## C.2 Cas d'une onde incidente plane

Les solutions du système d'équations pour la polarisation TE étaient :

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}_d^{(0)} = -\mathcal{F}(\Psi_i^{(0)}) \\ \tilde{\Psi}_d^{(1)} = -\mathcal{F}(\Psi_i^{(1)}) - \tilde{z} * (jk_z \tilde{\Psi}_d^{(0)}) \\ \tilde{\Psi}_d^{(2)} = -\mathcal{F}(\Psi_i^{(2)}) + \tilde{z} * \tilde{z} * \left(\frac{k_z^2}{2} \tilde{\Psi}_d^{(0)}\right) - \tilde{z} * (jk_z \tilde{\Psi}_d^{(1)}) \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

Nous insérons dans le système (C.9) les expressions qui suivent et issues de l'annexe A :

$$\begin{cases} \Psi_i^{(0)} = \Psi_{i0} e^{jk_{ix}x} \\ \Psi_i^{(1)} = -jk_{iz}z \Psi_{i0} e^{jk_{ix}x} \\ \Psi_i^{(2)} = -\frac{k_{iz}^2 z^2}{2} \Psi_{i0} e^{jk_{ix}x} \\ \mathcal{F}(\Psi_i^{(0)}) = \Psi_{i0} \delta(k_x - k_{ix}) \\ \mathcal{F}(\Psi_i^{(1)}) = -jk_{iz} \Psi_{i0} \tilde{z}_{k_{ix}} \\ \mathcal{F}(\Psi_i^{(2)}) = -\frac{k_{iz}^2}{2} \Psi_{i0} \tilde{z}_{k_{ix}} * \tilde{z} \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

Nous obtenons au final :

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}_d^{(0)} = -\Psi_{i0} \delta(k_x - k_{ix}) \\ \tilde{\Psi}_d^{(1)} = 2jk_{iz} \Psi_{i0} \tilde{z}_{k_{ix}} \\ \tilde{\Psi}_d^{(2)} = 2\Psi_{i0} k_{iz} \tilde{z} * (k_z \tilde{z}_{k_{ix}}) \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

Les expressions des courants surfaciques dans le cas d'une onde incidente plane s'obtiennent en insérant les inconnues (C.11) dans les expressions ci-dessous :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}} &= \frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial \mathbf{n}} \\ &= -jk_{iz} \frac{\Psi_{i0} e^{jk_{ix}x}}{\sqrt{1+\gamma^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} jk_z \tilde{\Psi}_d^{(0)} e^{jk_{ix}x} dk_x \\ &\quad + -(j\gamma k_{ix} + k_{iz}^2 z) \frac{\Psi_{i0} e^{jk_{ix}x}}{\sqrt{1+\gamma^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ jk_z \tilde{\Psi}_d^{(1)} + (k_x \tilde{z}) * (k_x \tilde{\Psi}_d^{(0)}) - \tilde{z} * (k_z^2 \tilde{\Psi}_d^{(0)}) \right] e^{jk_{ix}x} dk_x \\ &\quad + \left( \frac{jk_{iz}^3 z^2}{2} - \gamma k_{ix} k_{iz} z \right) \frac{\Psi_{i0} e^{jk_{ix}x}}{\sqrt{1+\gamma^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ jk_z \tilde{\Psi}_d^{(2)} + (k_x \tilde{z}) * (k_x \tilde{\Psi}_d^{(1)}) - \tilde{z} * (k_z^2 \tilde{\Psi}_d^{(1)}) \right] e^{jk_{ix}x} dk_x \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ (jk_x \tilde{z}) * \tilde{z} * (k_x k_z \tilde{\Psi}_d^{(0)}) - \tilde{z} * \tilde{z} * \left( \frac{jk_z^3}{2} \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) \right] e^{jk_{ix}x} dk_x \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$





## Annexe D : Problème de Neumann - surface PC

### D.1 Cas d'une onde incidente quelconque

La condition aux limites de Neumann pour une onde incidente en polarisation TM est :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\Psi_i}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial \Psi_d}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (\text{D.1})$$

Nous avons alors l'égalité suivante :

$$\frac{\partial \Psi_d}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\partial \Psi_i}{\partial \mathbf{n}} \quad (\text{D.2})$$

En utilisant les développements perturbatifs de l'annexe B, la relation (D.2) est équivalente pour chacun des ordres à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} jk_z \tilde{\Psi}_d^{(0)} e^{jk_{ix}x} dk_x = -\frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial z} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ jk_z \tilde{\Psi}_d^{(1)} + (k_x \tilde{z}) * (k_x \tilde{\Psi}_d^{(0)}) - \tilde{z} * (k_z^2 \tilde{\Psi}_d^{(0)}) \right] e^{jk_{ix}x} dk_x = \gamma \frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial z} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ jk_z \tilde{\Psi}_d^{(2)} + (k_x \tilde{z}) * (k_x \tilde{\Psi}_d^{(1)}) - \tilde{z} * (k_z^2 \tilde{\Psi}_d^{(1)}) + (jk_x \tilde{z}) * \tilde{z} * (k_x k_z \tilde{\Psi}_d^{(0)}) - \tilde{z} * \tilde{z} * \left( \frac{jk_z^3}{2} \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) \right] e^{jk_{ix}x} dk_x \\ = \gamma \frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_i^{(2)}}{\partial z} \end{array} \right. \quad (\text{D.3})$$

Nous effectuons alors une transformée de Fourier :

$$\begin{cases} jk_z \tilde{\Psi}_d^{(0)} = -\mathcal{F}\left(\frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial z}\right) & \text{(ordre 0)} \\ jk_z \tilde{\Psi}_d^{(1)} + (k_x \tilde{z}) * (k_x \tilde{\Psi}_d^{(0)}) - \tilde{z} * (k_z^2 \tilde{\Psi}_d^{(0)}) = (jk_x \tilde{z}) * \mathcal{F}\left(\frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial x}\right) - \mathcal{F}\left(\frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial z}\right) & \text{(ordre 1)} \\ jk_z \tilde{\Psi}_d^{(2)} + (k_x \tilde{z}) * (k_x \tilde{\Psi}_d^{(1)}) - \tilde{z} * (k_z^2 \tilde{\Psi}_d^{(1)}) + (jk_x \tilde{z}) * \tilde{z} * (k_x k_z \tilde{\Psi}_d^{(0)}) - \tilde{z} * \tilde{z} * \left(\frac{jk_z^3}{2} \tilde{\Psi}_d^{(0)}\right) \\ = \mathcal{F}(\gamma) * \mathcal{F}\left(\frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial x}\right) - \mathcal{F}\left(\frac{\partial \Psi_i^{(2)}}{\partial z}\right) & \text{(ordre 2)} \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

En utilisant l'expression  $\mathcal{F}(\gamma) = jk_x \tilde{z}$ , nous obtenons les expressions des inconnues pour la condition aux limites de Neumann :

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}_d^{(0)} = -\frac{\mathcal{F}\left(\frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial z}\right)}{jk_z} \\ \tilde{\Psi}_d^{(1)} = \frac{(jk_x \tilde{z}) * \mathcal{F}\left(\frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial x}\right) - \mathcal{F}\left(\frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial z}\right) - (k_x \tilde{z}) * (k_x \tilde{\Psi}_d^{(0)}) + \tilde{z} * (k_z^2 \tilde{\Psi}_d^{(0)})}{jk_z} \\ \tilde{\Psi}_d^{(2)} = \frac{(jk_x \tilde{z}) * \mathcal{F}\left(\frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial x}\right) - \mathcal{F}\left(\frac{\partial \Psi_i^{(2)}}{\partial z}\right) - (k_x \tilde{z}) * (k_x \tilde{\Psi}_d^{(1)}) + \tilde{z} * (k_z^2 \tilde{\Psi}_d^{(1)})}{jk_z} \\ + \frac{-(jk_x \tilde{z}) * \tilde{z} * (k_x k_z \tilde{\Psi}_d^{(0)}) + \tilde{z} * \tilde{z} * \left(\frac{jk_z^3}{2} \tilde{\Psi}_d^{(0)}\right)}{jk_z} \end{cases} \quad (\text{D.5})$$

Pour obtenir l'expression des courants en polarisation TM, nous réinsérons les inconnues précédentes dans l'expression des courants surfaciques en polarisation TM :

$$\Psi = \Psi_i + \Psi_d = \Psi_i^{(0)} + \Psi_d^{(0)} + \Psi_i^{(1)} + \Psi_d^{(1)} + \Psi_i^{(2)} + \Psi_d^{(2)} \quad (\text{D.6})$$

Soit, pour son équivalent en termes perturbatifs :

$$\begin{cases} \Psi^{(0)} = \Psi_i^{(0)} + \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}_d^{(0)} e^{jk_x x} dk_x & \text{(Ordre 0)} \\ \Psi^{(1)} = \Psi_i^{(1)} + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \tilde{z} * (jk_z \tilde{\Psi}_d^{(0)}) + \tilde{\Psi}_d^{(1)} \right] e^{jk_x x} dk_x & \text{(Ordre 1)} \\ \Psi^{(2)} = \Psi_i^{(2)} + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ -\tilde{z} * \tilde{z} * \left(\frac{k_z^2}{2} \tilde{\Psi}_d^{(0)}\right) + \tilde{z} * (jk_z \tilde{\Psi}_d^{(1)}) + \tilde{\Psi}_d^{(2)} \right] e^{jk_x x} dk_x & \text{(Ordre 2)} \end{cases} \quad (\text{D.7})$$

## D.2 Cas d'une onde incidente plane

Pour une onde incidente plane, nous insérons les termes d'onde plane de l'annexe A dans les expressions des inconnues (D.5), nous obtenons après calcul :

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}_d^{(0)} = \Psi_{i0} \delta(k_x - k_{ix}) \\ \tilde{\Psi}_d^{(1)} = \frac{2i}{k_z} (k_x k_{ix} - k_0^2) \tilde{z}_{k_{ix}} \\ \tilde{\Psi}_d^{(2)} = \frac{2(k_x k_{ix} - k_0^2) \tilde{z}_{k_{ix}} \left[ k_z * \tilde{z} - \frac{k_x}{k_z} * k_x \tilde{z} \right]}{k_z} \end{cases} \quad (\text{D.8})$$

Pour obtenir les courants surfaciques, il faut réinsérer les inconnues (D.8) dans les expressions ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \Psi^{(0)} = \Psi_{i0} e^{jk_{ix}x} + \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}_d^{(0)} e^{jk_x x} dk_x \quad (\text{Ordre 0}) \\
 \Psi^{(1)} = -jk_{iz}z \Psi_{i0} e^{jk_{ix}x} + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \tilde{z} * \left( jk_z \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) + \tilde{\Psi}_d^{(1)} \right] e^{jk_x x} dk_x \quad (\text{Ordre 1}) \\
 \Psi^{(2)} = -\frac{k_{iz}^2 z^2}{2} \Psi_{i0} e^{jk_{ix}x} + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ -\tilde{z} * \tilde{z} * \left( \frac{k_z^2}{2} \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) + \tilde{z} * \left( jk_z \tilde{\Psi}_d^{(1)} \right) + \tilde{\Psi}_d^{(2)} \right] e^{jk_x x} dk_x \quad (\text{Ordre 2})
 \end{array} \right. \quad (\text{D.9})$$





## Annexe E : Surfaces diélectriques

### E.1 Cas d'une onde quelconque

Nous rappelons les conditions aux limites pour une surface diélectrique

$$\forall \in S, \begin{cases} \Psi_0(x, z) = \Psi_1(x, z) \\ \mathbf{n} \cdot \nabla \Psi_0(x, z) = \rho_{01} \mathbf{n} \cdot \nabla \Psi_1(x, z) \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

Les champs dans les milieux  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$  peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \Psi_0(x, z) = \Psi_i(x, z) + \Psi_d(x, z) \\ \Psi_1(x, z) = \Psi_t(x, z) \end{cases} \quad (\text{E.2})$$

où  $\Psi_d(x, z)$  et  $\Psi_t(x, z)$  peuvent s'écrire comme une somme d'ondes planes :

$$\begin{aligned} \Psi_d(x, z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}_d e^{j(k_x x + k_z z)} dk_x \\ \Psi_t(x, z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}_t e^{j(k_x x - k_{tz} z)} dk_x \end{aligned}$$

Nous effectuons le développement perturbatif des grandeurs suivantes :

$$\begin{cases} \Psi_i &= \sum_{m=0}^N \Psi_i^{(m)} \\ \tilde{\Psi}_d &= \sum_{m=0}^N \tilde{\Psi}_d^{(m)} \\ \tilde{\Psi}_t &= \sum_{m=0}^N \tilde{\Psi}_t^{(m)} \\ e^{jk_z z} &= \sum_{m=0}^N (j)^m \frac{k_z^m z^m}{m!} \\ e^{-jk_{tz} z} &= \sum_{m=0}^N (-j)^m \frac{k_{tz}^m z^m}{m!} \end{cases}$$

En développant jusqu'à l'ordre 2 la conditions aux limites  $\Psi_0 = \Psi_1$ , nous avons :

$$\begin{aligned} &\Psi_i^{(0)} + \Psi_i^{(1)} + \Psi_i^{(2)} + \dots \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \tilde{\Psi}_d^{(0)} + \tilde{\Psi}_d^{(1)} + \tilde{\Psi}_d^{(2)} \right) \left( 1 + jk_z z - \frac{k_z^2 z^2}{2} \right) e^{jk_x x} dk_x \dots \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \tilde{\Psi}_t^{(0)} + \tilde{\Psi}_t^{(1)} + \tilde{\Psi}_t^{(2)} \right) \left( 1 - jk_{tz} z - \frac{k_{tz}^2 z^2}{2} \right) e^{jk_x x} dk_x \dots \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Nous identifions et regroupons les termes pour chacun des ordres : Ordre 0 :

$$\Psi_i^{(0)} + \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}_d^{(0)} e^{jk_x} dk_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}_t^{(0)} e^{jk_x} dk_x \quad (\text{E.4})$$

Ordre 1 :

$$\Psi_i^{(1)} + \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \tilde{\Psi}_d^{(1)} + jk_z z \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) e^{jk_x} dk_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \tilde{\Psi}_t^{(1)} - jk_{tz} z \tilde{\Psi}_t^{(0)} \right) e^{jk_x} dk_x \quad (\text{E.5})$$

Ordre 2 :

$$\begin{aligned} \Psi_i^{(2)} + \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \tilde{\Psi}_d^{(2)} + jk_z z \tilde{\Psi}_d^{(1)} - \frac{k_z^2 z^2}{2} \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) e^{jk_x} dk_x \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \tilde{\Psi}_t^{(2)} - jk_{tz} z \tilde{\Psi}_t^{(1)} - \frac{k_{tz}^2 z^2}{2} \tilde{\Psi}_t^{(0)} \right) e^{jk_x} dk_x \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Nous effectuons une transformée de Fourier ( $\mathcal{F}$ ) sur les précédentes relations et nous isolons les inconnues du champ transmis :

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}_t^{(0)} = \mathcal{F} \left( \Psi_i^{(0)} \right) + \tilde{\Psi}_d^{(0)} \\ \tilde{\Psi}_t^{(1)} = \mathcal{F} \left( \Psi_i^{(1)} \right) + \tilde{\Psi}_d^{(1)} + \tilde{z} * \left( jk_z \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) + \tilde{z} * \left( jk_{tz} \tilde{\Psi}_t^{(0)} \right) \\ \tilde{\Psi}_t^{(2)} = \mathcal{F} \left( \Psi_i^{(2)} \right) + \tilde{\Psi}_d^{(2)} + \tilde{z} * \left( jk_z \tilde{\Psi}_d^{(1)} \right) - \tilde{z} * \tilde{z} * \left( \frac{k_z^2}{2} \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) + \tilde{z} * \left( jk_{tz} \tilde{\Psi}_t^{(1)} \right) \\ + \tilde{z} * \tilde{z} * \left( \frac{k_{tz}^2}{2} \tilde{\Psi}_t^{(0)} \right) \end{cases} \quad (\text{E.7})$$

Nous venons d'exploiter la première équation des conditions aux limites, passons à la seconde équation :

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \Psi_0 = \rho_{01} \mathbf{n} \cdot \nabla \Psi_1 \quad (\text{E.8})$$

qui est équivalente à

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \Psi_i + \mathbf{n} \cdot \nabla \Psi_d(\mathbf{r}) = \rho_{01} \mathbf{n} \cdot \nabla \Psi_t \quad (\text{E.9})$$

ou

$$\left( \frac{-\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} \right) \cdot \left( \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_d}{\partial z} \right) = \rho_{01} \left( \frac{-\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} \right) \cdot \left( \frac{\partial \Psi_t}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_t}{\partial z} \right) \quad (\text{E.10})$$

ou même encore :

$$\Leftrightarrow \left( \frac{-\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} \right) \cdot \left( \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + \int_{-\infty}^{+\infty} jk_x \tilde{\Psi}_d e^{j(k_x + k_z z)} \right) = \rho_{01} \left( \frac{-\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} \right) \cdot \left( \int_{-\infty}^{+\infty} jk_x \tilde{\Psi}_t e^{j(k_x - k_{tz} z)} \right) \quad (\text{E.11})$$

Nous développons les calculs jusqu'à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
& \frac{-\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_i^{(2)}}{\partial x} \right) + \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_i^{(2)}}{\partial z} \right) \\
& - \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} jk_x \left( \tilde{\Psi}_d^{(0)} + \tilde{\Psi}_d^{(1)} + \tilde{\Psi}_d^{(2)} \right) \left( 1 + jk_z z - \frac{k_z^2 z^2}{2} \right) e^{jk_x} dk_x \\
& + \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} jk_z \left( \tilde{\Psi}_d^{(0)} + \tilde{\Psi}_d^{(1)} + \tilde{\Psi}_d^{(2)} \right) \left( 1 + jk_z z - \frac{k_z^2 z^2}{2} \right) e^{jk_x} dk_x \\
& = -\frac{\rho_{01}\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} jk_x \left( \tilde{\Psi}_t^{(0)} + \tilde{\Psi}_t^{(1)} + \tilde{\Psi}_t^{(2)} \right) \left( 1 - jk_{tz} z - \frac{k_{tz}^2 z^2}{2} \right) e^{jk_x} dk_x \\
& - \frac{\rho_{01}}{\sqrt{1+\gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} jk_{tz} \left( \tilde{\Psi}_t^{(0)} + \tilde{\Psi}_t^{(1)} + \tilde{\Psi}_t^{(2)} \right) \left( 1 - jk_{tz} z - \frac{k_{tz}^2 z^2}{2} \right) e^{jk_x} dk_x
\end{aligned} \tag{E.12}$$

Identifions les termes d'ordres 0, 1 et 2 : Ordre 0 :

$$\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial z} + \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} jk_z \tilde{\Psi}_d^{(0)} e^{jk_x} dk_x = \frac{-\rho_{01}}{\sqrt{1+\gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} jk_{tz} \tilde{\Psi}_t^{(0)} e^{jk_x} dk_x \tag{E.13}$$

Ordre 1 :

$$\begin{aligned}
& \frac{-\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} \frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial z} \\
& - \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} jk_x \tilde{\Psi}_d^{(0)} e^{jk_x} dk_x + \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( jk_z \tilde{\Psi}_d^{(1)} - k_z^2 z \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) e^{jk_x} dk_x \\
& = -\frac{\rho_{01}\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} jk_x \tilde{\Psi}_t^{(0)} e^{jk_x} dk_x - \frac{\rho_{01}}{\sqrt{1+\gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( jk_{tz} \tilde{\Psi}_t^{(1)} + k_{tz}^2 z \tilde{\Psi}_t^{(0)} \right) e^{jk_x} dk_x
\end{aligned} \tag{E.14}$$

Ordre 2 :

$$\begin{aligned}
& \frac{-\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} \frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \frac{\partial \Psi_i^{(2)}}{\partial z} \\
& - \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( jk_x \tilde{\Psi}_d^{(1)} - k_x k_z z \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) e^{jk_x} dk_x + \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( jk_z \tilde{\Psi}_d^{(2)} - k_z^2 z \tilde{\Psi}_d^{(1)} - \frac{jk_z^3 z^2}{2} \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) e^{jk_x} dk_x \\
& = -\frac{\rho_{01}\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( jk_x \tilde{\Psi}_t^{(1)} + k_x k_{tz} z \tilde{\Psi}_t^{(0)} \right) e^{jk_x} dk_x - \frac{\rho_{01}}{\sqrt{1+\gamma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( jk_{tz} \tilde{\Psi}_t^{(2)} + k_{tz}^2 z \tilde{\Psi}_t^{(1)} - \frac{jk_{tz}^3 z^2}{2} \tilde{\Psi}_t^{(0)} \right) e^{jk_x} dk_x
\end{aligned} \tag{E.15}$$

Nous effectuons la transformée des expressions obtenues pour les ordres 0, 1 et 2 :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Ordre 0 :} \\
 \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial z} \right) + jk_z \tilde{\Psi}_d^{(0)} = -\rho_{01} jk_{tz} \tilde{\Psi}_t^{(0)} \\
 \text{Ordre 1 :} \\
 -\mathcal{F}(\gamma) * \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial x} \right) + \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial z} \right) - \mathcal{F}(\gamma) * \left( jk_x \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) + jk_z \tilde{\Psi}_d^{(1)} - \tilde{z} * \left( k_z^2 \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) \\
 = -\rho_{01} \mathcal{F}(\gamma) * \left( jk_x \tilde{\Psi}_t^{(0)} \right) - \rho_{01} jk_{tz} \tilde{\Psi}_t^{(1)} - \rho_{01} \tilde{z} * \left( k_{tz}^2 \tilde{\Psi}_t^{(0)} \right) \\
 \text{Ordre 2 :} \\
 -\mathcal{F}(\gamma) * \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial x} \right) + \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(2)}}{\partial z} \right) - \mathcal{F}(\gamma) * \left[ jk_x \tilde{\Psi}_d^{(1)} - \tilde{z} * \left( k_x k_z \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) \right] \\
 + jk_z \tilde{\Psi}_d^{(2)} - \tilde{z} * \left( k_z^2 \tilde{\Psi}_d^{(1)} \right) - \tilde{z} * \tilde{z} * \left( \frac{jk_z^3}{2} \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) \\
 = -\rho_{01} \mathcal{F}(\gamma) * \left[ jk_x \tilde{\Psi}_t^{(1)} + \tilde{z} * k_x k_{tz} \tilde{\Psi}_t^{(0)} \right] - \rho_{01} \left[ jk_{tz} \tilde{\Psi}_t^{(2)} + \tilde{z} * \left( k_{tz}^2 \tilde{\Psi}_t^{(1)} \right) - \tilde{z} * \tilde{z} * \left( \frac{jk_{tz}^3}{2} \tilde{\Psi}_t^{(0)} \right) \right]
 \end{array} \right. \quad (\text{E.16})$$

En prenant en compte la notation  $\mathcal{F}(\gamma) = jk_x \tilde{z}$ , nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Ordre 0 :} \\
 \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial z} \right) + jk_z \tilde{\Psi}_d^{(0)} = -\rho_{01} jk_{tz} \tilde{\Psi}_t^{(0)} \\
 \text{Ordre 1 :} \\
 -(jk_x \tilde{z}) * \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial x} \right) + \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial z} \right) - (jk_x \tilde{z}) * \left( jk_x \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) + jk_z \tilde{\Psi}_d^{(1)} - \tilde{z} * \left( k_z^2 \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) \\
 = -\rho_{01} (jk_x \tilde{z}) * \left( jk_x \tilde{\Psi}_t^{(0)} \right) - \rho_{01} jk_{tz} \tilde{\Psi}_t^{(1)} - \rho_{01} \tilde{z} * \left( k_{tz}^2 \tilde{\Psi}_t^{(0)} \right) \\
 \text{Ordre 2 :} -(jk_x \tilde{z}) * \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial x} \right) + \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(2)}}{\partial z} \right) - (jk_x \tilde{z}) * \left[ jk_x \tilde{\Psi}_d^{(1)} - \tilde{z} * \left( k_x k_z \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) \right] \\
 + jk_z \tilde{\Psi}_d^{(2)} - \tilde{z} * \left( k_z^2 \tilde{\Psi}_d^{(1)} \right) - \tilde{z} * \tilde{z} * \left( \frac{jk_z^3}{2} \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) \\
 = -\rho_{01} (jk_x \tilde{z}) * \left( jk_x \tilde{\Psi}_t^{(1)} \right) - \rho_{01} (jk_x \tilde{z}) * \tilde{z} * \left( k_x k_{tz} \tilde{\Psi}_t^{(0)} \right) - \rho_{01} jk_{tz} \tilde{\Psi}_t^{(2)} \\
 - \rho_{01} \tilde{z} * \left( k_{tz}^2 \tilde{\Psi}_t^{(1)} \right) + \rho_{01} \tilde{z} * \tilde{z} * \left( \frac{jk_{tz}^3}{2} \tilde{\Psi}_t^{(0)} \right)
 \end{array} \right. \quad (\text{E.17})$$

Soit, après développement :

Ordre 0 :

$$\mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial z} \right) + jk_z \tilde{\Psi}_d^{(0)} = -\rho_{01} jk_{tz} \tilde{\Psi}_t^{(0)}$$

Ordre 1 :

$$\begin{aligned} & - (jk_x \tilde{z}) * \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial x} \right) + \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial z} \right) - (jk_x \tilde{z}) * (jk_x \tilde{\Psi}_d^{(0)}) + jk_z \tilde{\Psi}_d^{(1)} - \tilde{z} * (k_z^2 \tilde{\Psi}_d^{(0)}) \\ & = -\rho_{01} (jk_x \tilde{z}) * (jk_x \tilde{\Psi}_t^{(0)}) - \rho_{01} jk_{tz} \tilde{\Psi}_t^{(1)} - \rho_{01} \tilde{z} * (k_{tz}^2 \tilde{\Psi}_t^{(0)}) \end{aligned}$$

(E.18)

Ordre 2 :

$$\begin{aligned} & - (jk_x \tilde{z}) * \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial x} \right) + \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(2)}}{\partial z} \right) - (jk_x \tilde{z}) * (jk_x \tilde{\Psi}_d^{(1)}) + (jk_x \tilde{z}) * \tilde{z} * (k_x k_z \tilde{\Psi}_d^{(0)}) \\ & + jk_z \tilde{\Psi}_d^{(2)} - \tilde{z} * (k_z^2 \tilde{\Psi}_d^{(1)}) - \tilde{z} * \tilde{z} * \left( \frac{jk_z^3}{2} \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) \\ & = +\rho_{01} (k_x \tilde{z}) * (k_x \tilde{\Psi}_t^{(1)}) - \rho_{01} (jk_x \tilde{z}) * \tilde{z} * (k_x k_{tz} \tilde{\Psi}_t^{(0)}) - \rho_{01} jk_{tz} \tilde{\Psi}_t^{(2)} \\ & - \rho_{01} \tilde{z} * (k_{tz}^2 \tilde{\Psi}_t^{(1)}) + \rho_{01} \tilde{z} * \tilde{z} * \left( \frac{jk_{tz}^3}{2} \tilde{\Psi}_t^{(0)} \right) \end{aligned}$$

Nous obtenons donc trois systèmes de deux équations et deux inconnues pour chaque ordre perturbatif :

Ordre 0 :

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}_t^{(0)} = \mathcal{F} \left( \Psi_i^{(0)} \right) + \tilde{\Psi}_d^{(0)} \\ \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial z} \right) + jk_z \tilde{\Psi}_d^{(0)} = -\rho_{01} jk_{tz} \tilde{\Psi}_t^{(0)} \end{cases} \quad (\text{E.19})$$

Ordre 1 :

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}_t^{(1)} = \mathcal{F} \left( \Psi_i^{(1)} \right) + \tilde{\Psi}_d^{(1)} + \tilde{z} * (jk_z \tilde{\Psi}_d^{(0)}) + \tilde{z} * (jk_{tz} \tilde{\Psi}_t^{(0)}) \\ - (jk_x \tilde{z}) * \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial x} \right) + \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial z} \right) + (k_x \tilde{z}) * (k_x \tilde{\Psi}_d^{(0)}) + jk_z \tilde{\Psi}_d^{(1)} - \tilde{z} * (k_z^2 \tilde{\Psi}_d^{(0)}) \\ = \rho_{01} (k_x \tilde{z}) * (k_x \tilde{\Psi}_t^{(0)}) - \rho_{01} jk_{tz} \tilde{\Psi}_t^{(1)} - \rho_{01} \tilde{z} * (k_{tz}^2 \tilde{\Psi}_t^{(0)}) \end{cases} \quad (\text{E.20})$$

Ordre 2 :

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}_t^{(2)} = \mathcal{F} \left( \Psi_i^{(2)} \right) + \tilde{\Psi}_d^{(2)} + \tilde{z} * (jk_z \tilde{\Psi}_d^{(1)}) - \tilde{z} * \tilde{z} * \left( \frac{k_z^2}{2} \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) + \tilde{z} * (jk_{tz} \tilde{\Psi}_t^{(1)}) \\ + \tilde{z} * \tilde{z} * \left( \frac{k_{tz}^2}{2} \tilde{\Psi}_t^{(0)} \right) \\ - (jk_x \tilde{z}) * \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial x} \right) + \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(2)}}{\partial z} \right) + (k_x \tilde{z}) * (k_x \tilde{\Psi}_d^{(1)}) + (jk_x \tilde{z}) * \tilde{z} * (k_x k_z \tilde{\Psi}_d^{(0)}) \\ + jk_z \tilde{\Psi}_d^{(2)} - \tilde{z} * (k_z^2 \tilde{\Psi}_d^{(1)}) - \tilde{z} * \tilde{z} * \left( \frac{jk_z^3}{2} \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) \\ = +\rho_{01} (k_x \tilde{z}) * (k_x \tilde{\Psi}_t^{(1)}) - \rho_{01} (jk_x \tilde{z}) * \tilde{z} * (k_x k_{tz} \tilde{\Psi}_t^{(0)}) - \rho_{01} jk_{tz} \tilde{\Psi}_t^{(2)} \\ - \rho_{01} \tilde{z} * (k_{tz}^2 \tilde{\Psi}_t^{(1)}) + \rho_{01} \tilde{z} * \tilde{z} * \left( \frac{jk_{tz}^3}{2} \tilde{\Psi}_t^{(0)} \right) \end{cases} \quad (\text{E.21})$$

Nous résolvons ces systèmes d'équations. Pour l'ordre 0, nous obtenons :

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}_d^{(0)} = \frac{-\mathcal{F}\left(\frac{\partial\Psi_i^{(0)}}{\partial z}\right) - j\rho_{01}k_{tz}\mathcal{F}\left(\Psi_i^{(0)}\right)}{jk_z + i\rho_{01}k_{tz}} \\ \tilde{\Psi}_t^{(0)} = \frac{-\mathcal{F}\left(\frac{\partial\Psi_i^{(0)}}{\partial z}\right) + jk_z\mathcal{F}\left(\Psi_i^{(0)}\right)}{j(k_z + \rho_{01}k_{tz})} \end{cases} \quad (\text{E.22})$$

En résolvant le système à l'ordre 1, en représentant les équations dans le domaine spectral, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_d^{(1)} = & \frac{-(jk_x\tilde{z}) * \mathcal{F}\left(\frac{\partial\Psi_i^{(0)}}{\partial x}\right)}{-j(k_z + \rho_{01}k_{tz})} \\ & + \frac{1}{-j(k_z + \rho_{01}k_{tz})}\mathcal{F}\left(\frac{\partial\Psi_i^{(1)}}{\partial z}\right) \\ & + \frac{\rho_{01}jk_{tz}}{-j(k_z + \rho_{01}k_{tz})}\mathcal{F}\left(\Psi_i^{(1)}\right) \\ & + \frac{(k_x\tilde{z}) * \left(k_x\tilde{\Psi}_d^{(0)}\right) - \rho_{01}k_{tz}\left[\tilde{z} * k_z\tilde{\Psi}_d^{(0)}\right] - \tilde{z} * \left(k_z^2\tilde{\Psi}_d^{(0)}\right)}{-j(k_z + \rho_{01}k_{tz})} \\ & - \frac{\rho_{01}(k_x\tilde{z}) * \left(k_x\tilde{\Psi}_t^{(0)}\right) - \rho_{01}k_{tz}\left[\tilde{z} * \left(k_{tz}\tilde{\Psi}_t^{(0)}\right)\right] + \rho_{01}\tilde{z} * \left(k_{tz}^2\tilde{\Psi}_t^{(0)}\right)}{-j(k_z + \rho_{01}k_{tz})} \end{aligned} \quad (\text{E.23})$$

Nous obtenons  $\tilde{\Psi}_t^{(1)}$  de la forme :

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_t^{(1)} = & \frac{-(jk_x\tilde{z}) * \mathcal{F}\left(\frac{\partial\Psi_i^{(0)}}{\partial x}\right)}{-j(k_z + \rho_{01}k_{tz})} \\ & + \frac{1}{-j(k_z + \rho_{01}k_{tz})}\mathcal{F}\left(\frac{\partial\Psi_i^{(1)}}{\partial z}\right) \\ & + \frac{-jk_z}{-j(k_z + \rho_{01}k_{tz})}\mathcal{F}\left(\Psi_i^{(1)}\right) \\ & + \frac{(k_x\tilde{z}) * \left(k_x\tilde{\Psi}_d^{(0)}\right) - \tilde{z} * \left(k_z^2\tilde{\Psi}_d^{(0)}\right) + k_z\left[\tilde{z} * \left(k_z\tilde{\Psi}_d^{(0)}\right)\right]}{-j(k_z + \rho_{01}k_{tz})} \\ & + \frac{-\rho_{01}(k_x\tilde{z}) * \left(k_x\tilde{\Psi}_t^{(0)}\right) + \rho_{01}\tilde{z} * \left(k_{tz}^2\tilde{\Psi}_t^{(0)}\right) + k_z\left[\tilde{z} * \left(k_{tz}\tilde{\Psi}_t^{(0)}\right)\right]}{-j(k_z + \rho_{01}k_{tz})} \end{aligned} \quad (\text{E.24})$$

Pour le système à l'ordre 2, les calculs deviennent long et fastidieux, nous procédons également de la même manière, pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_d^{(2)} = & \frac{-(jk_x \tilde{z}) * \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial x} \right)}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})} \\
& + \frac{1}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})} \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(2)}}{\partial z} \right) \\
& + \frac{j\rho_{01} k_{tz}}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})} \mathcal{F} \left( \Psi_i^{(2)} \right) \\
& + \frac{(jk_x \tilde{z}) * \tilde{z} * \left( k_x k_z \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) - \tilde{z} * \tilde{z} * \left( \frac{jk_z^3}{2} \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) - \rho_{01} j k_{tz} \left[ \tilde{z} * \tilde{z} * \left( \frac{k_z^2}{2} \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) \right]}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})} \\
& + \frac{-\tilde{z} * \left( k_z^2 \tilde{\Psi}_d^{(1)} \right) + (k_x \tilde{z}) * \left( k_x \tilde{\Psi}_d^{(1)} \right) - \rho_{01} k_{tz} \left[ \tilde{z} * \left( k_z \tilde{\Psi}_d^{(1)} \right) \right]}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})} \\
& + \frac{\rho_{01} (jk_x \tilde{z}) * \tilde{z} * \left( k_x k_{tz} \tilde{\Psi}_t^{(0)} \right) - \rho_{01} \tilde{z} * \tilde{z} * \left( \frac{jk_{tz}^3}{2} \tilde{\Psi}_t^{(0)} \right) + \rho_{01} j k_{tz} \left[ \tilde{z} * \tilde{z} * \left( \frac{k_{tz}^2}{2} \tilde{\Psi}_t^{(0)} \right) \right]}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})} \\
& + \frac{-\rho_{01} (k_x \tilde{z}) * \left( k_x \tilde{\Psi}_t^{(1)} \right) + \rho_{01} \tilde{z} * \left( k_{tz}^2 \tilde{\Psi}_t^{(1)} \right) - \rho_{01} k_{tz} \left[ \tilde{z} * \left( k_{tz} \tilde{\Psi}_t^{(1)} \right) \right]}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})}
\end{aligned} \tag{E.25}$$

Pour notre étude, n'ayant pas besoin de  $\tilde{\Psi}_t^{(2)}$ , nous ne l'avons pas calculé.

## E.2 Cas particulier d'une onde plane

Nous réinjectons les termes d'ondes incidentes planes de l'annexe A dans les expressions récursives des inconnues obtenues pour une onde incidente quelconque. En utilisant la notation  $k_{tiz} = \sqrt{k_0^2 \epsilon - k_{ix}^2}$ , le système résolu nous donne au final :

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}_d^{(0)} = \Psi_{i0} \delta(k_x - k_{ix}) \left( \frac{k_{iz} - \rho_{01} k_{tiz}}{\rho_{01} k_{tiz} + k_{iz}} \right) \\ \tilde{\Psi}_t^{(0)} = \Psi_{i0} \delta(k_x - k_{ix}) \left( \frac{2k_{iz}}{\rho_{01} k_{tiz} + k_{iz}} \right) \end{cases} \tag{E.26}$$

Nous obtenons alors pour les deux polarisations :

$$\text{TE : } \begin{cases} \tilde{\Psi}_d^{(0)} = \Psi_{i0} \delta(k_x - k_{ix}) \left( \frac{k_{iz} - k_{tiz}}{k_{tiz} + k_{iz}} \right) \\ \tilde{\Psi}_t^{(0)} = \Psi_{i0} \delta(k_x - k_{ix}) \left( \frac{2k_{iz}}{k_{tiz} + k_{iz}} \right) \end{cases} \tag{E.27}$$

et

$$\text{TM : } \begin{cases} \tilde{\Psi}_d^{(0)} = \Psi_{i0} \delta(k_x - k_{ix}) \left( \frac{k_{iz} - \frac{\epsilon_{r0}}{\epsilon_{r1}} k_{tiz}}{\frac{\epsilon_{r0}}{\epsilon_{r1}} k_{tiz} + k_{iz}} \right) \\ \tilde{\Psi}_t^{(0)} = \Psi_{i0} \delta(k_x - k_{ix}) \left( \frac{2k_{iz}}{\frac{\epsilon_{r0}}{\epsilon_{r1}} k_{tiz} + k_{iz}} \right) \end{cases} \tag{E.28}$$



Pour déterminer les inconnues d'ordre 1, nous utilisons les expressions obtenues grâce à la méthode récursive dans lesquelles on intègre les expressions de l'onde plane et les inconnues d'ordre 0 :

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_d^{(1)} = & \frac{-(jk_x \tilde{z}) * \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(0)}}{\partial x} \right)}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})} \\
& + \frac{1}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})} \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial z} \right) \\
& + \frac{\rho_{01} j k_{tz}}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})} \mathcal{F} \left( \Psi_i^{(1)} \right) \\
& + \frac{-(jk_x \tilde{z}) * \left( j k_x \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) + \rho_{01} j k_{tz} \left[ \tilde{z} * \left( j k_z \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right) \right] - \tilde{z} * \left( k_z^2 \tilde{\Psi}_d^{(0)} \right)}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})} \\
& + \frac{\rho_{01} (j k_x \tilde{z}) * \left( j k_x \tilde{\Psi}_t^{(0)} \right) + \rho_{01} j k_{tz} \left[ \tilde{z} * \left( j k_{tz} \tilde{\Psi}_t^{(0)} \right) \right] + \rho_{01} \tilde{z} * \left( k_{tz}^2 \tilde{\Psi}_t^{(0)} \right)}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})}
\end{aligned} \tag{E.29}$$

Après de longs calculs, nous obtenons :

$$\tilde{\Psi}_d^{(1)} = 2k_{iz} \Psi_{i0} \tilde{z}_{k_{ix}} \frac{(1 - \rho_{01})(k_{ix} k_x - \rho_{01} k_{tiz} k_{tz}) - k_0^2 (1 - \rho_{01} \epsilon_{r1})}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})(\rho_{01} k_{tiz} + k_{iz})} \tag{E.30}$$

Pour le calcul de  $\tilde{\Psi}_t^{(1)}$ , en ajoutant les termes d'ondes planes, nous avons :

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_t^{(1)} = & \frac{-(jk_x \tilde{z}) * (j k_{ix} \Psi_{i0} \delta(k_x - k_{ix}))}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})} \\
& + \frac{1}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})} - k_{iz}^2 \Psi_{i0} \tilde{z}_{k_{ix}} \\
& + \frac{-j k_z}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})} (-j k_{iz} \Psi_{i0} \tilde{z}_{k_{ix}}) \\
& + \Psi_{i0} \left( \frac{k_{iz} - \rho_{01} k_{tiz}}{\rho_{01} k_{tiz} + k_{iz}} \right) \frac{(k_x \tilde{z}) * (k_x \delta(k_x - k_{ix}))}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})} \\
& + \Psi_{i0} \left( \frac{k_{iz} - \rho_{01} k_{tiz}}{\rho_{01} k_{tiz} + k_{iz}} \right) \frac{-\tilde{z} * (k_z^2 \delta(k_x - k_{ix})) + k_z [\tilde{z} * (k_z \delta(k_x - k_{ix}))]}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})} \\
& + \Psi_{i0} \left( \frac{2k_{iz}}{\rho_{01} k_{tiz} + k_{iz}} \right) \frac{-\rho_{01} (k_x \tilde{z}) * (k_x \delta(k_x - k_{ix}))}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})} \\
& + \Psi_{i0} \left( \frac{2k_{iz}}{\rho_{01} k_{tiz} + k_{iz}} \right) \frac{+\rho_{01} \tilde{z} * (k_{tz}^2 \delta(k_x - k_{ix})) + k_z [\tilde{z} * (k_{tz} \delta(k_x - k_{ix}))]}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})}
\end{aligned} \tag{E.31}$$

Après de longs calculs, nous obtenons :

$$\tilde{\Psi}_t^{(1)} = 2k_{iz} \Psi_{i0} \tilde{z}_{k_{ix}} \frac{(1 - \rho_{01})(k_x k_{ix} + k_{tiz} k_z) + k_0^2 (\rho_{01} \epsilon_{r1} - 1)}{-j(\rho_{01} k_{tiz} + k_{iz})(k_z + \rho_{01} k_{tz})} \tag{E.32}$$

Le couple de solutions pour l'ordre 1 est donc :

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}_d^{(1)} = 2k_{iz} \Psi_{i0} \tilde{z}_{k_{ix}} \frac{(1 - \rho_{01})(k_{ix} k_x - \rho_{01} k_{tiz} k_{tz}) - k_0^2 (1 - \rho_{01} \epsilon_{r1})}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})(\rho_{01} k_{tiz} + k_{iz})} \\ \tilde{\Psi}_t^{(1)} = 2k_{iz} \Psi_{i0} \tilde{z}_{k_{ix}} \frac{(1 - \rho_{01})(k_x k_{ix} + k_{tiz} k_z) + k_0^2 (\rho_{01} \epsilon_{r1} - 1)}{-j(\rho_{01} k_{tiz} + k_{iz})(k_z + \rho_{01} k_{tz})} \end{cases} \tag{E.33}$$

Nous obtenons pour les cas particuliers TE et TM :

$$\text{TE : } \begin{cases} \tilde{\Psi}_d^{(1)} = 2k_{iz} \Psi_{i0} \tilde{z}_{k_{ix}} \frac{-k_0^2 (1 - \epsilon_{r1})}{-j (k_z + k_{tz}) (k_{tiz} + k_{iz})} \\ \tilde{\Psi}_t^{(1)} = 2k_{iz} \Psi_{i0} \tilde{z}_{k_{ix}} \frac{k_0^2 (\epsilon_{r1} - 1)}{-j (k_{tiz} + k_{iz}) (k_z + k_{tz})} \end{cases} \quad (\text{E.34})$$

$$\text{TM : } \begin{cases} \tilde{\Psi}_d^{(1)} = 2k_{iz} \Psi_{i0} \tilde{z}_{k_{ix}} \frac{\left(1 - \frac{\epsilon_{r0}}{\epsilon_{r1}}\right) \left(k_{ix} k_x - \frac{\epsilon_{r0}}{\epsilon_{r1}} k_{tiz} k_{tz}\right) - k_0^2 \left(1 - \frac{\epsilon_{r0}}{\epsilon_{r1}} \epsilon_{r1}\right)}{-j \left(k_z + \frac{\epsilon_{r0}}{\epsilon_{r1}} k_{tz}\right) \left(\frac{\epsilon_{r0}}{\epsilon_{r1}} k_{tiz} + k_{iz}\right)} \\ \tilde{\Psi}_t^{(1)} = 2k_{iz} \Psi_{i0} \tilde{z}_{k_{ix}} \frac{\left(1 - \frac{\epsilon_{r0}}{\epsilon_{r1}}\right) (k_x k_{ix} + k_{tiz} k_z) + k_0^2 \left(\frac{\epsilon_{r0}}{\epsilon_{r1}} \epsilon_{r1} - 1\right)}{-i \left(\frac{\epsilon_{r0}}{\epsilon_{r1}} k_{tiz} + k_{iz}\right) \left(k_z + \frac{\epsilon_{r0}}{\epsilon_{r1}} k_{tz}\right)} \end{cases} \quad (\text{E.35})$$

Pour l'ordre 2, nous avons comme expression de  $\Psi_d^{(2)}$  :

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_d^{(2)} = & \frac{-(jk_x \tilde{z}) * \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(1)}}{\partial x} \right)}{-j (k_z + \rho_{01} k_{tz})} \\ & + \frac{1}{-j (k_z + \rho_{01} k_{tz})} \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(2)}}{\partial z} \right) \\ & + \frac{j \rho_{01} k_{tz}}{-i (k_z + \rho_{01} k_{tz})} \mathcal{F} \left( \Psi_i^{(2)} \right) \\ & + \frac{(jk_x \tilde{z}) * \tilde{z} * \left(k_x k_z \tilde{\Psi}_d^{(0)}\right) - \tilde{z} * \tilde{z} * \left(\frac{jk_z^3}{2} \tilde{\Psi}_d^{(0)}\right) - \rho_{01} j k_{tz} \left[\tilde{z} * \tilde{z} * \left(\frac{k_z^2}{2} \tilde{\Psi}_d^{(0)}\right)\right]}{-j (k_z + \rho_{01} k_{tz})} \\ & + \frac{-\tilde{z} * \left(k_z^2 \tilde{\Psi}_d^{(1)}\right) + (k_x \tilde{z}) * \left(k_x \tilde{\Psi}_d^{(1)}\right) - \rho_{01} k_{tz} \left[\tilde{z} * \left(k_z \tilde{\Psi}_d^{(1)}\right)\right]}{-j (k_z + \rho_{01} k_{tz})} \\ & + \frac{\rho_{01} (jk_x \tilde{z}) * \tilde{z} * \left(k_x k_{tz} \tilde{\Psi}_t^{(0)}\right) - \rho_{01} \tilde{z} * \tilde{z} * \left(\frac{jk_{tz}^3}{2} \tilde{\Psi}_t^{(0)}\right) + \rho_{01} j k_{tz} \left[\tilde{z} * \tilde{z} * \left(\frac{k_{tz}^2}{2} \tilde{\Psi}_t^{(0)}\right)\right]}{-j (k_z + \rho_{01} k_{tz})} \\ & + \frac{-\rho_{01} (k_x \tilde{z}) * \left(k_x \tilde{\Psi}_t^{(1)}\right) + \rho_{01} \tilde{z} * \left(k_{tz}^2 \tilde{\Psi}_t^{(1)}\right) - \rho_{01} k_{tz} \left[\tilde{z} * \left(k_{tz} \tilde{\Psi}_t^{(1)}\right)\right]}{-j (k_z + \rho_{01} k_{tz})} \end{aligned} \quad (\text{E.36})$$

soit, avec les termes d'onde plane :

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_d^{(2)} = & \frac{-(jk_x \tilde{z}) * (k_{ix} k_{iz} \Psi_{i0} \tilde{z}_{k_{ix}})}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})} \\
& + \frac{1}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})} \frac{jk_{iz}^3}{2} \Psi_{i0} \tilde{z}_{k_{ix}} * \tilde{z} \\
& + \frac{j\rho_{01} k_{tz}}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})} \frac{-k_{iz}^2}{2} \tilde{z}_{k_{ix}} * \tilde{z} \\
& + \frac{(jk_x \tilde{z}) * \tilde{z} * \left(k_x k_z \tilde{\Psi}_d^{(0)}\right) - \tilde{z} * \tilde{z} * \left(\frac{jk_z^3}{2} \tilde{\Psi}_d^{(0)}\right) - \rho_{01} j k_{tz} \left[\tilde{z} * \tilde{z} * \left(\frac{k_z^2}{2} \tilde{\Psi}_d^{(0)}\right)\right]}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})} \\
& + \frac{-\tilde{z} * \left(k_z^2 \tilde{\Psi}_d^{(1)}\right) + (k_x \tilde{z}) * \left(k_x \tilde{\Psi}_d^{(1)}\right) - \rho_{01} k_{tz} \left[\tilde{z} * \left(k_z \tilde{\Psi}_d^{(1)}\right)\right]}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})} \\
& + \frac{\rho_{01} (jk_x \tilde{z}) * \tilde{z} * \left(k_x k_{tz} \tilde{\Psi}_t^{(0)}\right) - \rho_{01} \tilde{z} * \tilde{z} * \left(\frac{jk_{tz}^3}{2} \tilde{\Psi}_t^{(0)}\right) + \rho_{01} j k_{tz} \left[\tilde{z} * \tilde{z} * \left(\frac{k_{tz}^2}{2} \tilde{\Psi}_t^{(0)}\right)\right]}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})} \\
& + \frac{-\rho_{01} (k_x \tilde{z}) * \left(k_x \tilde{\Psi}_t^{(1)}\right) + \rho_{01} \tilde{z} * \left(k_{tz}^2 \tilde{\Psi}_t^{(1)}\right) - \rho_{01} k_{tz} \left[\tilde{z} * \left(k_{tz} \tilde{\Psi}_t^{(1)}\right)\right]}{-j(k_z + \rho_{01} k_{tz})}
\end{aligned} \tag{E.37}$$

Nous obtenons au final comme expressions de  $\tilde{\Psi}_d^{(2)}$  :

$$\tilde{\Psi}_d^{(2)}(k_x) = -\Psi_{i0} k_{iz} \tilde{B} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{z}(k'_x - k_{ix}) \tilde{z}(k_x - k'_x) [-k_{tz} - k_{tiz} + 2k'_{tz} - 2k'_z] dk'_x \tag{E.38}$$

$$\text{avec } \tilde{B} = \frac{k_0^2(\epsilon_r - 1)}{(k_{tz} + k_z)(k_{tiz} + k_{iz})}.$$

## MPP récursif

Dans les précédentes sections, nous avons déterminé les inconnues de la **MPP** aux ordres 0, 1 et 2. Nous montrons dans cette annexe que nous pouvons obtenir une expression récursive des inconnues de **MPP** à n'importe quel ordre. Écrivons le développement en série de Taylor des termes suivants :

$$\tilde{\Psi}_d = \sum_{m=0}^{+\infty} \tilde{\Psi}_d^{(m)} \quad \Psi_i = \sum_{m=0}^{+\infty} \Psi_i^{(m)} \quad e^{jk_z z} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(jk_z z)^m}{m!} \quad (\text{F.1})$$

### F.1 Problème de Dirichlet

Nous intégrons les équations (F.1) dans la condition aux limites de Dirichlet (2.15), nous obtenons :

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \Psi_i^{(m)} + \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{m=0}^{+\infty} \tilde{\Psi}_d^{(m)} \right) \left( \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(jk_z z)^m}{m!} \right) e^{jk_x x} dk_x = 0 \quad (\text{F.2})$$

Nous identifions les termes de même ordre  $k$  dans la condition aux limites :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \Psi_i^{(k)} + \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^k \tilde{\Psi}_d^{(m)} \frac{(jk_z z)^{k-m}}{k-m!} e^{jk_x x} dk_x = 0 \quad (\text{F.3})$$

Nous effectuons la transformée de Fourier de (F.3). Nous avons alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathcal{F} \left( \Psi_i^{(k)} \right) + \sum_{m=0}^k \left( \prod_{*}^{k-m} \tilde{z} \right) \tilde{\Psi}_d^{(m)} \frac{(jk_z)^{k-m}}{k-m!} = 0 \quad (\text{F.4})$$

où  $\prod_{*}^N$  est défini comme l'opérateur produit de convolution tel que :  $\prod_{*}^N \tilde{z} = \underbrace{\tilde{z} * \tilde{z} \cdots * \tilde{z}}_{N \text{ fois}}$ . Alors

$$\begin{cases} \text{Pour } k = 0, \mathcal{F}(\Psi_i^{(0)}) + \tilde{\Psi}_d^{(0)} = 0 \\ \forall k \geq 1, \mathcal{F}(\Psi_i^{(k)}) + \tilde{\Psi}_d^{(k)} + \sum_{m=0}^{k-1} \left( \prod_{*}^{k-1-m} \tilde{z} \right) \tilde{\Psi}_d^{(m)} \frac{(jk_z)^{k-1-m}}{(k-1-m)!} = 0 \end{cases} \quad (\text{F.5})$$

Nous obtenons finalement, dans le cas de la polarisation TE,  $\forall k \in \mathbb{N}$  les expressions des inconnues de **MPP** :

$$\begin{cases} \text{Pour } k = 0, \tilde{\Psi}_d^{(0)} = -\mathcal{F}(\Psi_i^{(0)}) \\ \forall k \geq 1, \tilde{\Psi}_d^{(k)} = -\mathcal{F}(\Psi_i^{(k)}) - \sum_{m=0}^{k-1} \left( \prod_*^{k-1-m} \tilde{z} \right) \tilde{\Psi}_d^{(m)} \frac{(jk_z)^{k-m}}{k-m!} \end{cases} \quad (\text{F.6})$$

## F.2 Problème de Neumann

Nous considérons les développements perturbatifs supplémentaires suivants :

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial x} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\partial \Psi_i^{(m)}}{\partial x} \quad \frac{\partial \Psi_i}{\partial z} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\partial \Psi_i^{(m)}}{\partial z} \quad (\text{F.7})$$

Nous intégrons les équations de (F.1) dans les dérivées partielles du champ diffusé :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_d}{\partial x} &= \int_{-\infty}^{+\infty} jk_x \left( \sum_{m=0}^{+\infty} \tilde{\Psi}_d^{(m)} \right) \left( \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(jk_z \tilde{z})^m}{m!} \right) e^{jk_x x} dk_x \\ \frac{\partial \Psi_d}{\partial z} &= \int_{-\infty}^{+\infty} jk_z \left( \sum_{m=0}^{+\infty} \tilde{\Psi}_d^{(m)} \right) \left( \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(jk_z \tilde{z})^m}{m!} \right) e^{jk_x x} dk_x \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

En intégrant (F.1), (F.7) et (F.8) dans la condition aux limites de Neumann (2.15), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & -\gamma \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\partial \Psi_i^{(m)}}{\partial x} - \gamma \int_{-\infty}^{+\infty} jk_x \left( \sum_{m=0}^{+\infty} \tilde{\Psi}_d^{(m)} \right) \left( \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(jk_z \tilde{z})^m}{m!} \right) e^{jk_x x} dk_x \\ & + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\partial \Psi_i^{(m)}}{\partial z} + \int_{-\infty}^{+\infty} jk_z \left( \sum_{m=0}^{+\infty} \tilde{\Psi}_d^{(m)} \right) \left( \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(jk_z \tilde{z})^m}{m!} \right) e^{jk_x x} dk_x = 0 \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

Nous effectuons la transformée de Fourier de (F.9) en considérant que  $\mathcal{F}(\gamma) = jk_x \tilde{z}$ . En identifiant les termes d'ordre  $k$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, -jk_x \tilde{z} * \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(k)}}{\partial x} \right) - jk_x \tilde{z} * jk_x \sum_{m=0}^{k-1} \left( \prod_*^{k-1-m} \tilde{z} \right) \tilde{\Psi}_d^{(m)} \frac{(jk_z)^{k-1-m}}{(k-1-m)!} \\ + \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(k)}}{\partial z} \right) + jk_z \sum_{m=0}^k \left( \prod_*^{k-m} \tilde{z} \right) \tilde{\Psi}_d^{(m)} \frac{(jk_z)^{k-m}}{(k-m)!} = 0 \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

Nous trouvons alors :

$$\tilde{\Psi}_d^{(k)} = \frac{jk_x \tilde{z} * \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(k)}}{\partial x} \right) - \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(k)}}{\partial z} \right) + jk_x \tilde{z} * \sum_{m=0}^{k-1} \left( \prod_*^{k-1-m} \tilde{z} \right) \frac{(jk_z)^{k-1-m}}{(k-1-m)!} \left[ jk_x \tilde{\Psi}_d^{(m)} - jk_z \tilde{\Psi}_d^{(m)} \right]}{jk_z} \quad (\text{F.11})$$

### F.3 Surfaces diélectriques

D'après les conditions aux limites (2.14) pour une surface diélectrique, nous devons également prendre en compte les décompositions en série du champ transmis :

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}_t &= \sum_{m=0}^{+\infty} \tilde{\Psi}_t^{(m)} \\ \frac{\partial \Psi_t}{\partial x} &= \int_{-\infty}^{+\infty} jk_x \left( \sum_{m=0}^{+\infty} \tilde{\Psi}_t^{(m)} \right) \left( \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-jk_{tz}\tilde{z})^m}{m!} \right) e^{jk_x x} dk_x \\ \frac{\partial \Psi_t}{\partial z} &= \int_{-\infty}^{+\infty} jk_z \left( \sum_{m=0}^{+\infty} \tilde{\Psi}_t^{(m)} \right) \left( \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-jk_{tz}\tilde{z})^m}{m!} \right) e^{jk_x x} dk_x\end{aligned}\quad (\text{F.12})$$

La première condition aux limites du cas diélectrique impose :

$$\begin{cases} \text{Pour } k = 0, \mathcal{F}(\Psi_i^{(0)}) + \tilde{\Psi}_d^{(0)} = \tilde{\Psi}_t^{(0)} \\ \forall k \geq 1, \mathcal{F}(\Psi_i^{(k)}) + \tilde{\Psi}_d^{(k)} + \sum_{m=0}^{k-1} \left( \prod_{*}^{k-1-m} \tilde{z} \right) \tilde{\Psi}_d^{(m)} \frac{(jk_{dz})^{k-1-m}}{(k-1-m)!} = \tilde{\Psi}_t^{(k)} + \sum_{m=0}^{k-1} \left( \prod_{*}^{k-1-m} \tilde{z} \right) \tilde{\Psi}_t^{(m)} \frac{(-jk_{tz})^{k-1-m}}{(k-1-m)!} \end{cases}\quad (\text{F.13})$$

qui permet d'exprimer les inconnues  $\tilde{\Psi}_t^{(k)}$  en fonction des autres inconnues  $\tilde{\Psi}_d^{(k)}$  et des décompositions du champ incident.

$$\begin{cases} \text{Pour } k = 0, \tilde{\Psi}_t^{(0)} = \mathcal{F}(\Psi_i^{(0)}) + \tilde{\Psi}_d^{(0)} \\ \forall k \geq 1, \tilde{\Psi}_t^{(k)} = \mathcal{F}(\Psi_i^{(k)}) + \tilde{\Psi}_d^{(k)} + \sum_{m=0}^{k-1} \left( \prod_{*}^{k-1-m} \tilde{z} \right) \tilde{\Psi}_d^{(m)} \frac{(jk_{dz})^{k-1-m}}{(k-1-m)!} - \sum_{m=0}^{k-1} \left( \prod_{*}^{k-1-m} \tilde{z} \right) \tilde{\Psi}_t^{(m)} \frac{(-jk_{tz})^{k-1-m}}{(k-1-m)!} \end{cases}\quad (\text{F.14})$$

La seconde condition aux limites permet d'obtenir les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}, -jk_x \tilde{z} * \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(k)}}{\partial x} \right) + \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(k)}}{\partial z} \right) - jk_x \tilde{z} * jk_x \sum_{m=0}^{k-1} \left( \prod_{*}^{k-1-m} \tilde{z} \right) \tilde{\Psi}_d^{(m)} \frac{(jk_{dz})^{k-1-m}}{(k-1-m)!} \\ + jk_{dz} \sum_{m=0}^k \left( \prod_{*}^{k-m} \tilde{z} \right) \tilde{\Psi}_d^{(m)} \frac{(jk_{dz})^{k-m}}{(k-m)!} = -jk_x \tilde{z} * jk_x \sum_{m=0}^{k-1} \left( \prod_{*}^{k-1-m} \tilde{z} \right) \tilde{\Psi}_t^{(m)} \frac{(-jk_{tz})^{k-1-m}}{(k-1-m)!} \\ + jk_{tz} \sum_{m=0}^k \left( \prod_{*}^{k-m} \tilde{z} \right) \tilde{\Psi}_t^{(m)} \frac{(-jk_{tz})^{k-m}}{(k-m)!}\end{aligned}\quad (\text{F.15})$$

Nous isolons  $\tilde{\Psi}_t^{(k)}$  et  $\tilde{\Psi}_d^{(k)}$  :

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}, jk_{dz} \tilde{\Psi}_d^{(k)} - j\rho_{01} k_{tz} \tilde{\Psi}_t^{(k)} = -jk_x \tilde{z} * \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(k)}}{\partial x} \right) - jk_x \tilde{z} * jk_x \sum_{m=0}^{k-1} \left( \prod_{*}^{k-1-m} \tilde{z} \right) \tilde{\Psi}_d^{(m)} \frac{(jk_{dz})^{k-1-m}}{(k-1-m)!} \\ + \mathcal{F} \left( \frac{\partial \Psi_i^{(k)}}{\partial z} \right) + jk_{dz} \sum_{m=0}^{k-1} \left( \prod_{*}^{k-1-m} \tilde{z} \right) \tilde{\Psi}_d^{(m)} \frac{(jk_{dz})^{k-1-m}}{(k-1-m)!} \\ + \rho_{01} jk_x \tilde{z} * jk_x \sum_{m=0}^{k-1} \left( \prod_{*}^{k-1-m} \tilde{z} \right) \tilde{\Psi}_t^{(m)} \frac{(-jk_{tz})^{k-1-m}}{(k-1-m)!} - \rho_{01} jk_{tz} \sum_{m=0}^{k-1} \left( \prod_{*}^{k-m} \tilde{z} \right) \tilde{\Psi}_t^{(m)} \frac{(-jk_{tz})^{k-1-m}}{(k-1-m)!}\end{aligned}\quad (\text{F.16})$$

Nous incluons l'expression (F.14) de  $\tilde{\Psi}_t^{(k)}$  dans l'équation (F.16) et en continuant les calculs nous pouvons obtenir une expression récursive pour  $\tilde{\Psi}_d^{(k)}$

# Bibliographie

- [1] Vic Snyder and al. DoD's fight against IEDs today and tomorrow. Technical report, JIEDDO, 2008. [18](#)
- [2] C Guiffaut. OPEN-TEMSEI-FD : Time electromagnetic simulator-finite difference. *Licence CECILL-C, Laboratory XLIM, University of Limoges, UMR CNRS, 6172*. [24](#)
- [3] Kane S Yee et al. Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 14(3) :302–307, 1966. [24](#), [50](#)
- [4] K.S. Yee, K. Shlager, and A.H. Chang. An algorithm to implement a surface impedance boundary condition for FDTD [EM scattering]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 40(7) :833–837, Jul 1992. [24](#)
- [5] L. Nagy, R. Dady, and A. Farkasvolgyi. Algorithmic complexity of FDTD and ray tracing method for indoor propagation modelling. In *3rd European Conference on Antennas and Propagation, 2009. EuCAP 2009.*, pages 2262–2265, March 2009. [24](#)
- [6] Nicolas Dechamps and Christophe Bourlier. Electromagnetic scattering from a rough layer : Propagation-inside-layer expansion method combined to an updated BMIA/CAG approach. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 55(10) :2790–2802, 2007. [26](#)
- [7] Nicolas Dechamps. *Méthodes numériques appliquées au calcul de la diffusion d'une onde électromagnétique*. PhD thesis, Université de Nantes, 2004. [26](#), [51](#), [77](#)
- [8] Roger F. Harrington. Matrix methods for field problems. *Proceedings of the IEEE*, 55(2) :136–149, 1967. [27](#), [50](#)
- [9] Sophocles J. Orfanidis. *Electromagnetic waves and antennas*. ece, 2002. [27](#), [28](#), [29](#), [30](#)
- [10] D.H. Werner, P.L. Werner, and J.K. Breakall. Some computational aspects of Pocklington's electric field integral equation for thin wires. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 42(4) :561–563, Apr 1994. [27](#)
- [11] Raphael Toribio. *Méthode d'extraction de poles de résonance : application à la caractérisation des cibles*. PhD thesis, Université de Nantes, 2002. [27](#)
- [12] Roger F. Harrington and J.R. Mautz. Straight wires with arbitrary excitation and loading. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 15(4) :502–515, 1967. [30](#)
- [13] H. Chao, B. Strait, and C. Taylor. Radiation and scattering by configurations of bent wires with junctions. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 19(5) :701–702, 1971. [30](#)
- [14] EK Miller and FJ Deadrick. Some computational aspects of thin-wire modeling. In *Numerical and asymptotic techniques in electromagnetics*, pages 89–127. Springer, 1975. [30](#)



- [15] C.M. Butler and D.R. Wilton. Analysis of various numerical techniques applied to thin-wire scatterers. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 23(4) :534–540, Jul 1975. 30
- [16] James Clerk Maxwell. *A treatise on electricity and magnetism*, volume 1. Clarendon press, 1881. 34, 38
- [17] Philip M Morse and Herman Feshbach. Methods of theoretical physics. *International Series in Pure and Applied Physics, New York : McGraw-Hill, 1953, 1, 1953.* 35
- [18] Jakob J Stamnes. *Waves in Focal Regions : propagation, diffraction and focusing of light, sound and water waves.* CRC Press, 1986. 35
- [19] Max Born and Emil Wolf. *Principles of optics : electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light.* Cambridge University Press, 1999. 36
- [20] C. Bourlier, N. Pinel, and G. Kubické. *Method of Moments for 2D Scattering Problems.* ISTE, 2013. 36, 39, 51, 53
- [21] Jin Au Kong. Theory of electromagnetic waves. *New York, Wiley-Interscience, 1975. 348 p., 1 :348, 1975.* 36, 41
- [22] J. P. Pérez. *Optique : fondements et applications avec 200 exercices et problèmes résolues.* Masson, 2000. 39
- [23] Julius Adams Stratton. *Electromagnetic theory.* John Wiley & Sons, 2007. 41
- [24] G.B. Arfken. *Mathematical methods for physicists.* Academic Press, 1970. 42
- [25] P.M.C. Morse and H. Feshbach. *Methods of theoretical physics.* Number vol. 2 in International series in pure and applied physics. McGraw-Hill, 1953. 42
- [26] Lord Rayleigh. V. On the incidence of aerial and electric waves upon small obstacles in the form of ellipsoids or elliptic cylinders, and on the passage of electric waves through a circular aperture in a conducting screen. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 44(266) :28–52, 1897. 43
- [27] RF Millar. On the Rayleigh assumption in scattering by a periodic surface. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 65, pages 773–791. Cambridge Univ Press, 1969. 43
- [28] D Maystre and R Petit. Sur la diffraction d’une onde plane par un reseau infiniment conducteur. *Optics Communications*, 4(1) :97–101, 1971. 43
- [29] J Pavageau. Sur la méthode des spectres d’ondes planes dans les problèmes de diffraction. *CR Acad. Sci. Paris B*, 266 :135–138, 1968. 43
- [30] D. Maystre and M. Cadilhac. Singularities of the continuation of fields and validity of Rayleigh hypothesis. *Journal of Mathematical Physics*, 26(9) :2201–2204, 1985. 43
- [31] R Petit and M Cadilhac. Sur la diffraction d’une onde plane par un réseau infiniment conducteur. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l’Académie des Sciences Série B*, 262(7) :468, 1966. 43
- [32] P. M. van den Berg and J. T. Fokkema. The Rayleigh hypothesis in the theory of reflection by a grating. *Journal of Optical Society of America*, 69(1) :27–31, Jan 1979. 43

- [33] Alexandre V Tishchenko. Numerical demonstration of the validity of the Rayleigh hypothesis. *Optics express*, 17(19) :17102–17117, 2009. [43](#)
- [34] T Nordam, PA Letnes, and I Simonsen. Validity of the Rayleigh hypothesis for two-dimensional randomly rough metal surfaces. In *Journal of Physics : Conference Series*, volume 454, page 012033. IOP Publishing, 2013. [43](#)
- [35] L. Tsang, J.A. Kong, and K.H. Ding. *Scattering of Electromagnetic Waves, Theories and Applications*. A Wiley interscience publication. Wiley, 2000. [46](#), [49](#), [91](#), [102](#), [107](#)
- [36] L. Tsang, J.A. Kong, K.H. Ding, and C.O. Ao. *Scattering of Electromagnetic Waves, Numerical Simulations*. Scattering of Electromagnetic Waves. Wiley, 2004. [48](#), [51](#), [53](#), [77](#), [80](#), [130](#)
- [37] Gustav Mie. Beitrage zur optik trüber medien, speziell kolloidaler metallösungen. *Annalen der Physik*, 25 :377–345, 1908. [50](#)
- [38] Tanos Mikhael Elfouhaily and Charles-Antoine Guérin. A critical survey of approximate scattering wave theories from random rough surfaces. *Waves in Random Media*, 14 :R1–R40, 2004. [50](#), [56](#), [90](#)
- [39] Eric I. Thorsos. The validity of the Kirchhoff approximation for rough surface scattering using a Gaussian roughness spectrum. *Journal of the Acoustical Society of America*, 3 :78–92, 1988. [51](#), [55](#), [90](#)
- [40] Eric I Thorsos and Darrell R Jackson. Studies of scattering theory using numerical methods. *Waves in Random Media*, 1(3) :S165–S190, 1991. [52](#)
- [41] David Anthony Kapp. *A new method to calculate wave scattering from rough surfaces at low grazing angles*. 1995. [53](#)
- [42] Hongxia Ye and Ya-Qiu Jin. Parameterization of the tapered incident wave for numerical simulation of electromagnetic scattering from rough surface. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 53(3) :1234–1237, 2005. [53](#)
- [43] Jakov V. Toporkov, Ra'id S. Awadallah, and Gary S. Brown. Issues related to the use of a Gaussian-like incident field for low-grazing-angle scattering. *Journal of Optical Society of America*, 16(1) :176–187, Jan 1999. [53](#)
- [44] N. Pinel and C. Bourlier. *Electromagnetic Wave Scattering Random Rough Surfaces : Asymptotic Models*. Wiley, 2013. [54](#), [55](#)
- [45] J.W.S.B. Rayleigh and R.B. Lindsay. *The Theory of Sound*. Number vol. 1 in Dover Books on Physics. Dover, 1945. [55](#)
- [46] James A Ogilvy. *Theory of wave scattering from random rough surfaces*. A. Hilger, 1991. [55](#), [56](#)
- [47] Fawwaz T Ulaby, Richard K Moore, Adrian K Fung, and Artech House. *Microwave remote sensing : Active and passive*, volume 1. Addison-Wesley Reading, MA, 1981. [55](#)
- [48] P Ya Ufimtsev. Method of edge waves in the physical theory of diffraction. Technical report, DTIC Document, 1971. [55](#)
- [49] A Michaeli. Incremental diffraction coefficients for the extended physical theory of diffraction. *IEEE ASSP Magazine Transactions on antennas and propagation*, 43(7) :732–734, 1995. [55](#)
- [50] Douglas S Jones and Morris Kline. *Asymptotic expansion of multiple integrals and the method of stationary phase*. Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1956. [55](#)

- [51] Joseph B Keller. Geometrical theory of diffraction. *Journal of Optical Society of America*, 52(2) :116–130, 1962. 55
- [52] Vladimir Andreevich Borovikov and Boris Evseevich Kinber. *Geometrical theory of diffraction*. Number 37. IET, 1994. 55
- [53] Robert G Kouyoumjian and Prabhakar H Pathak. A uniform geometrical theory of diffraction for an edge in a perfectly conducting surface. *Proceedings of the IEEE*, 62(11) :1448–1461, 1974. 55
- [54] Shung Wu Lee and Georges A Deschamps. A uniform asymptotic theory of electromagnetic diffraction by a curved wedge. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 24(1) :25–34, 1976. 55
- [55] JA Sánchez-Gil, AA Maradudin, and ER Mendez. Limits of validity of three perturbation theories of the specular scattering of light from one-dimensional, randomly rough, dielectric surfaces. *Journal of Optical Society of America*, 12(7) :1547–1558, 1995. 55, 90
- [56] Soto-Crespo, Nieto-Vesperinas, and Friberg. Scattering from slightly rough random surfaces : A detailed study on the validity of the small perturbation method. *Journal of Optical Society of America*, 7 :1185–1201, 1990. 55
- [57] MF Chen and AK Fung. A numerical study of the regions of validity of the Kirchhoff and small-perturbation rough surface scattering models. *Radio Science*, 23(2) :163–170, 1988. 55, 90
- [58] MJ Kim, HM Berenyi, RE Burge, and S Tajbakhsh. Region of validity of perturbation theory for dielectrics and finite conductors. *Waves in random media*, 5(3) :305–328, 1995. 55, 90
- [59] MJ Kim and Andrew J Stoddart. The region of validity of perturbation theory. *Waves in random media*, 3(4) :325–342, 1993. 55, 90
- [60] A Voronovich. Small-slope approximation for electromagnetic wave scattering at a rough interface of two dielectric half-spaces. *Waves in Random Media*, 4(3) :337–368, 1994. 55
- [61] A.K. Fung, Z. Li, and K.S. Chen. Backscattering from a randomly rough dielectric surface. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 30(2) :356–369, Mar 1992. 56
- [62] N Baghdadi, C King, A Chanzy, and JP Wigneron. An empirical calibration of the integral equation model based on SAR data, soil moisture and surface roughness measurement over bare soils. *International Journal of Remote Sensing*, 23(20) :4325–4340, 2002. 56
- [63] Nicolas Pinel. *Étude de modèles asymptotiques de la diffusion des ondes électromagnétiques par des interfaces naturelles*. PhD thesis, Université de Nantes, 2006. 56, 71, 76
- [64] A.G. Voronovich. *Wave scattering from rough surfaces*. Springer series on wave phenomena. Springer-Verlag, 1994. 56, 91
- [65] Bharat Bhushan. *Modern Tribology Handbook*. CRC Press, 2000. 58
- [66] J. Cihlar and al. Review Article Procedures for the description of agricultural crops and soils in optical and microwave remote sensing studies. *International Journal of Remote Sensing*, 8 :427–439, 1987. 58
- [67] Chin Y. Poon and Bharat Bhushan. Comparison of surface roughness measurements by stylus profiler, AFM and non-contact optical profiler. *Wear*, 190(1) :76 – 88, 1995. Macro and Micro-Tribology and Mechanics of Magnetic Storage Systems. 58

- [68] MA Ghazavi, A Yosufvand, and B Hosseinzadeh. The application of micro-relief meter for soil tillage studies. *Journal of American Science*, 6(11) :85–89, 2010. [58](#), [59](#)
- [69] Olivier Faure. *Analyse numérique et expérimentale de la propagation acoustique extérieure : effets de sol en présence d'irrégularités de surface et méthodes temporelles*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2014. [58](#), [132](#)
- [70] Bharat Bhushan. *Introduction to Tribology*. John Wiley & Sons, 2013. [58](#), [64](#), [73](#)
- [71] X. Blaes and P. Defourny. Characterizing bidimensional roughness of agricultural soil surfaces for SAR modeling. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 46(12) :4050–4061, Dec 2008. [58](#)
- [72] M. El-Shenawee and C.M. Rappaport. Monte Carlo simulations for clutter statistics in minefields : AP-mine-like-target buried near a dielectric object beneath 2-D random rough ground surfaces. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 40(6) :1416–1426, 2002. [58](#)
- [73] A G Voronovich and V U Zavorotny. Theoretical model for scattering of radar signals in Ku- and C-bands from a rough sea surface with breaking waves. *Waves random media*, 11 :247–269, 2001. [58](#)
- [74] Jean M. Bennett. Measurement of the rms roughness, autocovariance function and other statistical properties of optical surfaces using a FEKO scanning interferometer. *Appl. Opt.*, 15(11) :2705–2721, Nov 1976. [59](#)
- [75] Chi-Hua Huang and Joe M. Bradford. Portable laser scanner for measuring soil surface roughness. *Soil Sci. Am. J.*, 54 :1402–1406, 1990. [59](#)
- [76] P. Bertuzzi and M. Caussignac. Measuring in-situ soil surface roughness using a laser profilometer. *Spectral Signatures of Objects in Remote Sensing*, 1 :p. 19, 1988. [59](#), [61](#)
- [77] Michael L Oelze, James M Sabatier, and Richard Raspet. Roughness measurements of soil surfaces by acoustic backscatter. *Soil Science Society of America Journal*, 67(1) :241–250, 2003. [59](#)
- [78] Judith Coulombe-Simoneau, Stéphane Hardy, Nicolas Baghdadi, Christine King, Ferdinand Bonn, and YVES Le Bissonnais. RADARSAT based monitoring of soil roughness over an agricultural area affected by excessive runoff. *IAHS PUBLICATION*, pages 362–364, 2001. [59](#)
- [79] Werner Jester and Andreas Klik. Soil surface roughness measurement - Methods, applicability, and surface representation. *CATENA*, 64 :174 – 192, 2005. 25 Years of Assessment of Erosion. [59](#), [60](#)
- [80] Ali Saleh. Soil roughness measurement : Chain method. *Journal of Soil ans Water Conservation*, 48 :527–529, 1993. [59](#)
- [81] F. Mattia, M. Davidson, T. Le Toan, C.M.F. D'Haese, N.E.C. Verhoest, A.M. Gatti, and M. Borgeaud. A comparison between soil roughness statistics used in surface scattering models derived from mechanical and laser profilers. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 41(7) :1659–1671, 2003. [60](#), [75](#)
- [82] M. Nishimoto. Characteristics of rough surface parameters estimated from measured surface profile of finite length. In *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS), 2010*, pages 4436–4439, 2010. [73](#)
- [83] Jim Stiles Yisok Oh. Chapter IX. Surface roughness measurements. [74](#)

- [84] Yisok Oh and Young Chul Kay. Condition for precise measurement of soil surface roughness. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 36(2) :691–695, 1998. 74
- [85] Francesco Mattia, Thuy Le Toan, and Malcolm Davidson. An analytical, numerical, and experimental study of backscattering from multiscale soil surfaces. *Radio Science*, 36 :119–135, 2001. 74
- [86] JM Elson and JM Bennett. Relation between the angular dependence of scattering and the statistical properties of optical surfaces. *Journal of Optical Society of America*, 69(1) :31–47, 1979. 74
- [87] Nadir Patir. A numerical procedure for random generation of rough surfaces. *Wear*, 47(2) :263 – 277, 1978. 79
- [88] D. Bergstrom, J. Powell, and A. F H Kaplan. The absorption of light by rough metal surfaces ; A three-dimensional ray-tracing analysis. *Journal of Applied Physics*, 103(10) :103515–103515–12, 2008. 79
- [89] Karim Ait Braham. *Diffusion des ondes électromagnétiques par des surfaces rugueuses aléatoires naturelles. Méthode exacte en coordonnées curviligne et principe du couplage faible*. PhD thesis, Université de Versailles Saint Quentin en Yvelines, 2007. 79
- [90] K. Uchida, J. Honda, and Kwang-Yeol Yoon. An algorithm for rough surface generation with inhomogeneous parameters. In *International Conference on Parallel Processing Workshops, 2009. ICPPW '09.*, pages –, Sept 2009. 80
- [91] K. Chen P. Xu and L. Tsang. Analysis of microwave emission of exponential correlated rough soil surfaces from 1.4 Ghz to 36.5 Ghz. *Progress In Electromagnetics Research*, 108 :205–218, 2010. 86
- [92] Lord Rayleigh. On the dynamical theory of gratings. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 79(532) :399–416, 1907. 90
- [93] U. Fano. The theory of anomalous diffraction gratings and of quasi-stationary waves on metallic surfaces (Sommerfeld's Waves). *Journal of Optical Society of America*, 31(3) :213–222, Mar 1941. 90
- [94] Stephen O. Rice. Reflection of electromagnetic waves from slightly rough surfaces. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 4(2-3) :351–378, 1951. 90
- [95] W. Peake. Theory of radar return from terrain. In *1958 IRE International Convention Record*, volume 7, pages 27–41, March 1959. 90
- [96] G Valenzuela. Depolarization of EM waves by slightly rough surfaces. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 15(4) :552–557, 1967. 90
- [97] G. R. Valenzuela. Scattering of electromagnetic waves from a tilted, slightly rough surface. *Radio Science*, 3(11) :1498–1509, 1970. 90
- [98] Joel T Johnson. Third-order small-perturbation method for scattering from dielectric rough surfaces. *Journal of Optical Society of America*, 16(11) :2720–2736, 1999. 90
- [99] Metin A Demir and Joel T Johnson. Fourth-and higher-order small-perturbation solution for scattering from dielectric rough surfaces. *Journal of Optical Society of America*, 20(12) :2330–2337, 2003. 90
- [100] K. A. O'Donnell. High-order perturbation theory for light scattering from a rough metal surface. *Journal of Optical Society of America*, 18(7) :1507–1518, Jul 2001. 90



- [101] Li-Xin Guo, Yu Liang, Jie Li, and Zhen-Sen Wu. A high order integral SPM for the conducting rough surface scattering with the tapered wave incidence-TE case. *Progress In Electromagnetics Research*, 114 :333–352, 2011. [90](#)
- [102] J. M. Soto-Crespo and M. Nieto-Vesperinas. Electromagnetic scattering from very rough random surfaces and deep reflection gratings. *Journal of Optical Society of America*, 6(3) :367–384, Mar 1989. [90](#)
- [103] D. Barrick. Grazing behavior of scatter and propagation above any rough surface. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 46(1) :73–83, 1998. [90](#), [121](#), [131](#)
- [104] I.M. Fuks and V.I. Tatarskii. Scattering cross section from a rough surface for small grazing angles. In *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium Proceedings, 1998. IGARSS '98.*, volume 4, pages 2279–2283 vol.4, 1998. [90](#), [121](#)
- [105] D. Barrick and R. Fitzgerald. The failure of classic perturbation theory at a rough Neumann boundary near grazing. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 48(9) :1452–1460, Sep 2000. [90](#), [121](#), [131](#)
- [106] Guo Li-Xin, Wei Guo-Hui, Kim Cheyoung, and Wu Zhen-Sen. Modification of classical SPM for slightly rough surface scattering with low grazing angle incidence. *Communications in Theoretical Physics*, 44(5) :901, 2005. [90](#), [121](#)
- [107] Fridrikh Gershonovich Bass and Iosif Moiseevich Fuks. Wave scattering from statistically rough surfaces. *Oxford Pergamon Press International Series on Natural Philosophy*, 93, 1979. [91](#), [121](#), [124](#)
- [108] Ralf Schiffer. Reflectivity of a slightly rough surface. *Applied optics*, 26(4) :704–711, 1987. [108](#)
- [109] Rubén G. Barrera and Augusto Garcia-Valenzuela. Coherent reflectance in a system of random Mie scatterers and its relation to the effective-medium approach. *Journal of Optical Society of America*, 20(2) :296–311, Feb 2003. [119](#)
- [110] L Tsang and JA Kong. Effective propagation constants for coherent electromagnetic wave propagation in media embedded with dielectric scatters. *Journal of Applied Physics*, 53(11) :7162–7173, 1982. [119](#)
- [111] A. Sentenac, H. Giovannini, and M. Saillard. Scattering from rough inhomogeneous media : splitting of surface and volume scattering. *Journal of Optical Society of America*, 19(4) :727–736, Apr 2002. [120](#), [121](#)
- [112] EL Feinberg. Propagation of radio waves along an inhomogeneous surface. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 11 :60–91, 1959. [120](#), [121](#)
- [113] Eo Feinberg. On the propagation of radio waves along an imperfect surface. *J. Phys.(Moscow)*, 8 :317–330, 1944. [120](#)
- [114] Donald E Barrick. Theory of HF and VHF propagation across the rough sea, 1, The effective surface impedance for a slightly rough highly conducting medium at grazing incidence. *Radio Science*, 6(5) :517–526, 1971. [121](#)
- [115] Donald E Barrick. Theory of HF and VHF propagation across the rough sea, 2, Application to HF and VHF propagation above the sea. *Radio Science*, 6(5) :527–533, 1971. [121](#)
- [116] A.G. Voronovich and V.U. Zavorotny. The effect of steep sea-waves on polarization ratio at low grazing angles. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 38(1) :366–373, 2000. [121](#)

- [117] James R. Wait. The ancient and modern history of EM ground-wave propagation. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 40(5) :7–24, Oct 1998. [121](#)
- [118] J. Wait. Guiding of electromagnetic waves by uniformly rough surfaces : Part i. *IRE Transactions on Antennas and Propagation*, 7(5) :154–162, 1959. [121](#)
- [119] J.R. Wait. Guiding of electromagnetic waves by uniformly rough surfaces : Part ii. *IRE Transactions on Antennas and Propagation*, 7(5) :163–168, December 1959. [121](#)
- [120] Shigeo Ito. Analysis of scalar wave scattering from slightly rough random surfaces : A multiple scattering theory. *Radio Science*, 20(1) :1–12, 1985. [121](#)
- [121] A. Ishimaru, J.D. Rockway, Seung woo Lee, and Y. Kuga. Propagation and scattering of low grazing skimming waves over conducting rough surfaces. In *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium, 2000. Proceedings. IGARSS 2000.*, volume 7, pages 3093–3095 vol.7, 2000. [121](#)
- [122] A. Ishimaru, J.D. Rockway, and Seong-Woo Lee. Sommerfeld and Zenneck wave propagation for a finitely conducting one-dimensional rough surface. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 48(9) :1475–1484, Sep 2000. [121](#), [131](#)
- [123] Akira Ishimaru, John D Rockway, Yasuo Kuga, and Seung-Woo Lee. Transverse electric and transverse magnetic Green’s function for coherent and incoherent propagation over a finitely conducting rough surface. *Radio Science*, 37(3) :1–1, 2002. [121](#), [123](#), [131](#)
- [124] Akira Ishimaru, John D Rockway, and Yasuo Kuga. Rough surface Green’s function based on the first-order modified perturbation and smoothed diagram methods. *Waves in random Media*, 10(1) :17–31, 2000. [121](#)
- [125] Iosif M Fuks, Valerian I Tatarskii, and Donald E Barrick. Behaviour of scattering from a rough surface at small grazing angles. *Waves in Random Media*, 9(3) :295–305, 1999. [121](#), [123](#)
- [126] S. Yuferev, N. Farahat, and N. Ida. Use of the perturbation technique for implementation of surface impedance boundary conditions for the FDTD method. *IEEE Transactions on Magnetics*, 36(4) :942–945, Jul 2000. [121](#)
- [127] J.V. Toporkov and M.A. Sletten. Numerical study of wide-band low-grazing HF clutter from ocean-like surfaces. In *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, volume 1A, pages 388–391 Vol. 1A, July 2005. [121](#)
- [128] Yohann Brelet and Christophe Bourlier. SPM numerical results from an effective surface impedance for a one-dimensional perfectly-conducting rough sea surface. *Progress In Electromagnetics Research*, 81 :413–436, 2008. [121](#)
- [129] R.D. De Roo and F.T. Ulaby. Bistatic specular scattering from rough dielectric surfaces. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 42(2) :220–231, Feb 1994. [121](#)
- [130] AS Briukhovetskii, VM Tigrov, and IM Fuks. Effective-impedance tensor of a statistically rough ideally conducting surface. *Radiofizika*, 27 :999–1005, 1984. [121](#)
- [131] V. D. Freilikher and I. M. Fuks. Green’s function method dot he Helmholtz equation with perturbed boundary conditions. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 13(1) :73–79, 1970. [121](#)
- [132] Gaspar R Valenzuela. Theories for the interaction of electromagnetic and oceanic waves - A review. *Boundary-Layer Meteorology*, 13(1-4) :61–85, 1978. [121](#)

- [133] R. Kumar and A. Sarkar. Specular scattering with effective reflection coefficient. In *International Geoscience and Remote Sensing Symposium, 1988. IGARSS '88. Remote Sensing : Moving Toward the 21st Century*, volume 3, pages 1327–1328, Sep 1988. [121](#)
- [134] Anne Sentenac, G. Toso, and M. Saillard. Study of coherent scattering from one-dimensional rough surfaces with a mean-field theory. *Journal of Optical Society of America*, 15(4) :924–931, Apr 1998. [121](#)
- [135] A Sentenac and J-J Greffet. Mean-field theory of light scattering by one-dimensional rough surfaces. *Journal of Optical Society of America*, 15(2) :528–532, 1998. [121](#)
- [136] Yohann Brelet. *Diffusion des ondes électromagnétiques par une surface rugueuse monodimensionnelle sous incidences modérées et rasantes : Application au domaine maritime*. PhD thesis, Nantes, 2008. [124](#)
- [137] Allen Taflove, Susan C Hagness, et al. Computational electrodynamics : the finite-difference time-domain method. *Norwood, 2nd Edition, MA : Artech House, 1995, 1995*. [125](#)







# Thèse de Doctorat

**Clément CHANEL**

**Diffusion électromagnétique par un sol : prise en compte d'un fil enfoui par l'introduction d'une impédance effective dans un code FDTD**

**Electromagnetic scattering from a soil: Taking into account of a buried wire by the introduction of an effective impedance in an FDTD code**

## Résumé

Le contexte de cette thèse est l'étude de la diffusion d'une onde électromagnétique par un sol faiblement rugueux en présence d'un fil enfoui. Le problème est supposé bidimensionnel (les surfaces rugueuses ne dépendent que d'une variable d'espace) et les milieux, de part et d'autre de la surface, sont considérés homogènes. Tout d'abord, un dispositif expérimental a été mis en oeuvre afin de mesurer des profils de sols rugueux pour en déterminer les grandeurs caractéristiques, en particulier l'écart-type des hauteurs et la longueur de corrélation. Les valeurs de ces grandeurs nous permettent ainsi de choisir le modèle de diffusion électromagnétique asymptotique : la Méthode des Petites Perturbations (**MPP**), valide pour des variations des hauteurs de la surface très faibles devant la longueur d'onde du Radar. Puis, à partir de cette méthode, les courants de surface ont été exprimés analytiquement en fonction de l'ordre du développement perturbatif et de la nature de l'onde incidente. Le cas d'une onde plane a été étudié en particulier. Ensuite, les résultats numériques ont été comparés à ceux obtenus par une méthode numérique rigoureuse : la Méthode des Moments. Enfin, les expressions analytiques du champ diffusé, obtenues par la MPP, nous ont permis de calculer le coefficient de réflexion cohérent et l'impédance de surface effective associée. Cette impédance a pour vocation d'être implantée dans une plateforme de calcul 3D FDTD, dans laquelle le fil sera pris en compte.

## Mots clés

Diffusion électromagnétique, mesure de rugosité, surfaces rugueuses aléatoires, Méthode des Petites Perturbations (MPP), Méthode des Moments, impédance de surface effective

## Abstract

This thesis studies the electromagnetic wave scattering from a slightly rough soil in the presence of a buried wire. The problem is assumed to be two-dimensional (2D) (the rough surface depends only on one space variable) and the media separating the boundaries are assumed to be homogeneous. Firstly, a sensor was built up to measure the profiles of the rough soil in order to determine its statistical characteristics, such as the standard deviation of the heights and the correlation length. These parameters allow us to choose the adequate asymptotic electromagnetic scattering model devoted to our application: The Small Perturbation Method (SPM), valid for surface heights much smaller than the Radar wavelength. Then, from the SPM, the surface currents are expressed analytically, according to the order of expansion of the method and to the nature of the incident wave. The specific case of a plane incident wave is studied. In addition, the numerical results are compared to those obtained by a rigorous numerical method: the Method of Moments. Finally, the analytical expressions of the scattered field, obtained by SPM, allow us to derive the coherent reflection coefficient and the associated effective surface impedance. The purpose is to implement this impedance into a 3D FDTD simulation platform, in which the buried wire is taken into account.

## Key Words

Electromagnetic scattering, roughness measurement, random rough surfaces, Small Perturbation Method (SPM), Method of Moments, effective surface impedance.