'CUANDO UNA CRECE, LA OTRA DECRECE'... ¿PROPORCIONALIDAD INVERSA O DIRECTA?

Daniela Reyes-Gasperini, Gisela Montiel, Ricardo Cantoral
Cinvestav; IPN, CICATA Legaria, México
dreyes@cinvestav.mx, gmontiel@ipn.mx, rcantor@cinvestav.mx

RESUMEN

El concepto matemático de la proporcionalidad es introducido en la clase de matemáticas usando, habitualmente, ejemplos de la vida cotidiana como son la compra-venta para la proporcionalidad directa, o el asunto del tiempo que tarda en pintar una superficie cierta cantidad de pintores para la proporcionalidad inversa. En tales situaciones, algunas de las 'reglas mnemotécnicas' utilizadas para trabajar cada caso son 'cuando una magnitud aumenta, la otra también', o bien, 'cuando una magnitud aumenta, la otra disminuye', respectivamente. En este artículo presentaremos una selección de actividades, sus fundamentos y sus posibles respuestas, basándonos en una *unidad de análisis socioepistémica* sobre la proporcionalidad, para que a través de ellas, pueda realizarse la *problematización del saber matemático escolar*.

PALABRAS CLAVE: Socioepistemología de la proporcionalidad, Problematización del saber matemático.

INTRODUCCIÓN

La pregunta que se esboza en el título de este artículo tiene un carácter desafiante, por tanto, invitamos a los lectores de este escrito, antes de continuar con su lectura, a tomar postura sobre la pregunta y justificar los porqués de sus respuestas. De esta manera, las reflexiones venideras serán por demás satisfactorias.

El saber seleccionado para discutir en este artículo, la proporcionalidad, tiene la peculiaridad de ser transversal a todos los niveles educativos, desde los niveles básicos con problemas "simples" de porcentajes, hasta el nivel superior en el trabajo con variación lineal o localmente lineal. Asimismo, su complejidad ya sea a nivel cognitivo como didáctico ha sido reportada por diversas investigaciones desde décadas atrás (Dupuis & Pluvinage, 1981; Hart, 1988; Lamon, 1993, 1999; Lesh, Post & Behr, 1988; Noelting, 1980a, 1980b; Piaget &Inhelder, 1984; Vergnaud, 1988, 1990) y aun hoy, sigue siendo una problemática sumamente estudiada (Ben-Chaim, Ilany & Keret, 2007, 2008; Howe, Nunes & Bryant, 2011; Ilany, Keret & Ben-Chaim, 2004; Martínez & González, 2008; Oliveira, 2009; Orrill & Brown, 2012; Rivas & Godino, 2010; Rivas, Godino & Konic, 2009, Salazar & Díaz,2009; Sánchez Ordoñez, 2013; Valdemoros, 2010), pues todavía sigue siendo un tema de preocupación para los sistemas educativos (Secretaría de Educación Pública, 2011) y de interés para los investigadores.

Realizar una *problematización del saber matemático* relacionado a lo proporcional a través de una *unidad de análisis socioepistémica* (Reyes-Gasperini, 2013; Reyes-Gasperini & Cantoral, 2013), concibiendo a ésta como una estructura teórica con base al análisis sistémico de las dimensiones didáctica, epistemológica, cognitiva y social del saber matemático en cuestión, nos ha permitido diseñar, hasta el momento, algunas actividades que ponen en conflicto las reglas mnemotécnicas que dentro de las clases de matemática se escuchan, y en esa medida queremos contribuir a una mejor educativa que problematice el saber y no sólo lo memorice.

Estas reglas, sin dudas, tienen como fin –y la mayoría de las veces lo logran–“facilitar o simplificar” los procesos de aprendizaje, sin embargo, ellas mismas son las que posteriormente inducen errores matemáticos en los desempeños de los estudiantes, pues al momento de argumentar, tienen un peso tal de validez en los estudiantes que comienzan a generar contradicciones en ellos mismos.

En este artículo presentaremos una selección de actividades, sus fundamentos y sus posibles respuestas, basándonos en dicha *unidad de análisis socioepistémica* sobre la proporcionalidad, para que a través de ellas, pueda realizarse la *problematización del saber matemático escolar*.

MARCO TEÓRICO

La noción de proporcionalidad, como dijimos, ha sido estudiada desde diferentes enfoques teórico – didácticos, que pueden clasificarse de la siguiente manera:

- **Investigaciones fundacionales relativas a las ESTRUCTURAS GENERATIVAS**: investigaciones pioneras que han servido de sustento para todas las investigaciones futuras (Hart, 1988; Piaget & Inhelder, 1984; Lamon, 1993, 1999; Lesh et al., 1988; Noelting, 1980a, 1980b; Vergnaud, 1988, 1990).

- **Investigaciones de clasificación de ESTRATEGIAS Y ARGUMENTACIONES**: a través de situaciones puntuales los investigadores caracterizan y clasifican los tipos de respuestas en estudiantes (Howe et al., 2011; Oliveira, 2009; Sánchez Ordoñez, 2013), profesores (Berk, Taber, Carrino & Poetzl, 2009; Contreras, Carrillo, Zakaryan, Muñoz-Catalán &Climent, 2012; Godino, Rivas, Castro &Konic, 2008; Ilany et al., 2004) e individuos fuera del aula (Carraher, Carraher&Schliemann, 1991; Soto& Rouche, 1995).

- **PROPUESTAS DIDÁCTICAS:** investigaciones que realizan propuestas de intervención en el aula con estudiantes (Ben-Chaim et al., 2007, 2008; Oller, 2012; Orrill & Brown, 2012).

Desde la Teoría Socioepistemológica (Cantoral, 2013) hemos estudiado a la proporcionalidad a través de una *unidad de análisis socioepistémica* (*uase*), concibiendo a ésta como una estructura teórica con base al análisis sistémico de las dimensiones didáctica, epistemológica, cognitiva y social del saber matemático en cuestión (Reyes-Gasperini, 2011, 2013; Reyes-Gasperini & Cantoral, en prensa; Reyes-Gasperini & Cantoral, 2013).

La *dimensión social* permite estudiar a los saberes matemáticos identificando la dimensión funcional, situacional e histórica, basada en la praxis, que está al nivel de la actividad y es soslayada y desdibujada en la práctica por el discurso Matemático Escolar(dME). La dimensión social, aunada a la *dimensión epistemológica* que estudia la naturaleza del saber, reconoce a la matemática como parte de una cultura producto de la actividad humana.

Asimismo, bajo la mirada socioepistemológica, se concibe que los conocimientos se dotan de significados a través de <u>su uso y su funcionalidad</u>, por tanto se plantea la necesidad de que docentes y estudiantes, aunque inmersos en un sistema educativo, se relacionen con el conocimiento matemático de una manera más activa con la intención de que construyan ideas fundamentales sobre dicho conocimiento, más allá de las abstracciones, procedimientos y el aprendizaje propias de su aplicación, es decir, que comiencen a relacionarse con el saber matemático concibiéndolo a éste como un conocimiento puesto en uso. Es decir, la significación que construirá a partir de la actividad de relacionarse con el saber matemático, permitirá entender en profundidad aquellas nociones que las miradas platónicas consideran como “la matemática escolar”.

Para poder hacer este análisis, la *dimensión didáctica* del saber juega un papel importante, pues será a través del estudio de libros de textos, programas de estudio, notas y observaciones de clase, entre otros, que se podrá investigar cómo se presenta el conocimiento matemático estudiado en el sistema didáctico. Conjuntamente con estos análisis, es a través del estudio de la *dimensión cognitiva* que se exploran los procesos de apropiación del saber matemático basado en el reconocimiento de que el paso del conocimiento al saber responde a procesos propios del desarrollo del pensamiento matemático.

Para consultar el desarrollo completo de la *uase* de la proporcionalidad, recomendamos revisar (Reyes-Gasperini, 2011, 2013; Reyes-Gasperini & Cantoral, en prensa; Reyes-Gasperini & Cantoral, 2013). De dicho estudio retomaremos en este escrito una selección de las actividades confeccionadas para trabajar en diversos curso-taller impartidos para docentes o docentes en formación de nivel secundario (estudiantes entre los 12 y17 años de edad)en dos entornos educativos latinoamericanos: México y Argentina.

ACTIVIDADES

Actividad 1 ¿Por qué?

a) A la derecha se presenta la gráfica de la función f, ¿$f(x)$ representa a una función proporcional inversa o directa? Justifica ampliamente tu respuesta:

____

b) ¿Qué estrategias usaste para responder y justificar?

____

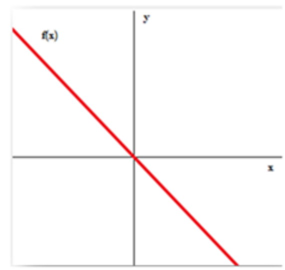


Figura 1: Actividad 1 incisos *a* y *b* de la Guía de actividades.

Es sabido que las gráficas aparecen en algunos libros de textos como representaciones[1] de las funciones expresadas en forma algebraica, por lo cual, hacer la pregunta sólo con el referente gráfico tiene una complejidad particular.

La intención de esta actividad es detectar cuáles son las argumentaciones de los participantes cuando se enfrentan a una gráfica de naturaleza proporcional. Con base en la regla mnemotécnica de que “en una relación de proporcionalidad inversa, cuando una magnitud aumenta, la otra disminuye”, podría ser viable contestar que esta función es de proporcionalidad inversa. Sin embargo, otra regla mnemotécnica es que “toda recta que pasa por el origen es de proporcionalidad directa”.

En este momento, como se dijo en un comienzo, las “recetas” comienzan a “contradecirse”: no puede una sostenerse conjuntamente con la otra. Es aquí en donde deben construirse argumentos basados en un pensamiento matemático, superando en este caso las reglas y el pensamiento cualitativo (Piaget & Inhelder, 1984).

¿Por qué suponemos que esta es una respuesta viable?

---

[1]Decimos "representación" en tanto "re-presentar" (volver a presentar) un objeto matemático, ya que los libros de textos poseen una centración en los propios objetos matemáticos y en su acceso a través de sus representaciones, considerándolas a éstas como preexistentes con elementos de vinculación entre ellas, por ejemplo "inclinación-pendiente" en la recta con el parámetro m de la fórmula $y = mx + b$.

Al poner en práctica esta actividad de manera controlada con aproximadamente 150 profesores de los estados mexicanos de Oaxaca, Puebla, Hidalgo, Querétaro y Baja California, el 75% de quienes participan contestan que corresponde a una función de proporcionalidad inversa y la argumentación es que "a mayor *x*, menor *y*". Es decir, hay indicios empíricos de que esta situación provoca la apertura a la discusión de ¿qué es la proporcionalidad?

El objetivo principal de esta actividad es generar en los participantes el cuestionamiento sobre sus argumentaciones, confrontándolas en la puesta en común y que en el diálogo confeccionen una nueva argumentación sólida. Es decir, que reflexionen sobre que si bien en este caso se cumple que "a mayor *x* menor *y*", por qué este tipo de argumentaciones no es suficiente para asegurar que es o no una función de proporcionalidad inversa.

Actividad 1 ¿Por qué?

c) Dada una función en su representación tabular, como tabla de valores, completa la frase:

X	Y
1	14
2	28
3	42
4	56

La tabla de valores representa una función de proporcionalidad ____________________,
porque____

¿Qué estrategias usaste para responder y justificar?________________________________

____

***Figura 2*:** Actividad 1 inciso *c* de la Guía de actividades.

En esta actividad se pretende que los participantes expongan estrategias para argumentar por qué es una función de proporcionalidad directa, incentivando a que hay más de una argumentación y de esta manera, mostrar la diversidad de pensamientos que subyacen a una misma pregunta, pues aquí, pueden hacerse explícitos todos los modelos de pensamiento que competen a la proporcionalidad directa (ver figura 1).Los resultados obtenidos de las aplicaciones muestran que surgen todos los modelos del desarrollo del pensamiento proporcional, siendo el más común el que refiere al pensamiento aditivo simple: "porque sumo 14".

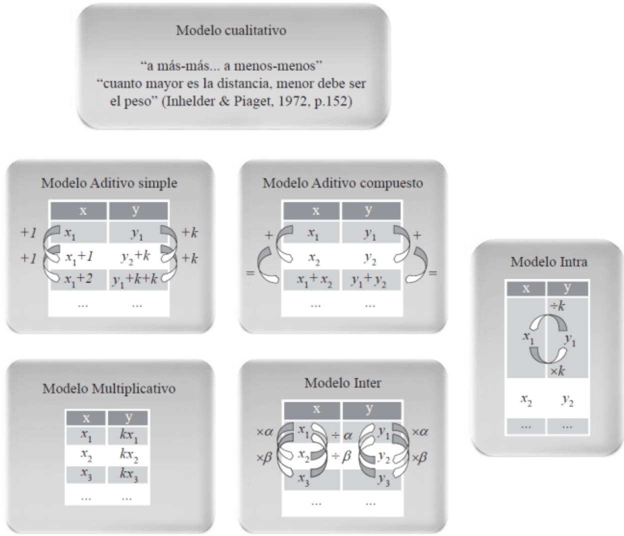


***Figura 3*:** Modelos del pensamiento proporcional (Reyes-Gasperini, 2011, 2013)

A continuación, esbozaremos una situación diseñada para un libro de texto de secundaria mexicano (12-15 años), Matemáticas 2 de Mac Graw Hill (Cantoral, Cabañas, Farfán & Ferrari, 2012), con base en los análisis realizados en nuestras investigaciones.

La actividad tiene como objetivo general confrontar una situación de proporcionalidad directa, una inversa y una situación no proporcional, como así también, erradicar las reglas mnemotécnicas sin argumentaciones contundentes. Para concluir, se coloca un verdadero y falso con las frases típicas sobre proporcionalidad para consolidar lo discutido en las situaciones anteriores.

En la primera situación (ver Figura 4) se pretende trabajar sobre la noción de proporcionalidad directa. Dado que previamente se discutió sobre la necesidad de especificar que la tabla representa una relación de proporcionalidad o no, se discutirá sobre el tipo de enunciado, en el cual, se aclara que el vehículo se desplaza a una velocidad constante, por tanto, la discusión puede trabajarse respecto al significado de velocidad como algo cotidiano y a la noción de "situación ideal", pues se debe generar la idea de ser críticos en el aula y si realmente ese fuera un auto, no cabría posibilidad alguna de que durante 4 horas no cambiara su velocidad (idea de *contexto sintáctico* versus *contexto real*).

Como podrá observarse, luego de completar la tabla, las preguntas versan sobre "la relación" y no sobre las cantidades, pues lo proporcional encuentra su naturaleza en la relación entre las magnitudes, más que en los valores cuantificables de éstas.

La respuesta que se espera, más allá de que la relación sea que ambos aumentan (pensamiento cualitativo), es que su razón se mantiene constante. Así, la última pregunta pretende analizar la situación en su conjunto: la constante de proporcionalidad y el significado que se le da dentro del problema.

Actividad 2 Comparando sucesos de la vida cotidiana

Compararemos los siguientes sucesos de la vida cotidiana: la distancia que recorre un auto en un tiempo dado, el costo de un viaje en bus y cómo va acortándose una vela encendida.

a. Un vehículo se desplaza a velocidad constante.

i. Completa la tabla e indica si este suceso representa una relación de proporcionalidad. Si tu respuesta es sí, ¿es una relación de proporcionalidad directa o inversa? En grupo justifiquen sus respuestas.

Velocidad (km/h)						
Tiempo (h)	2	2.5	3			4.25
Distancia (km)			270	337.5	360	

ii. ¿Cuál es la velocidad a la que se desplaza el vehículo?

iii. Formen grupos de tres compañeros y comenten las distintas estrategias para encontrar la velocidad. Justifiquen sus respuestas.

iv. Si consideramos que y es la cantidad de kilómetros recorridos, y que x es la cantidad de horas empleadas, ¿cómo se relacionan estas cantidades con la velocidad?

v. ¿Por qué se puede asegurar que la velocidad es constante? ¿Puedes encontrar una relación entre ésta y la constante de proporcionalidad? Comenta con tus compañeros y argumenten sus respuestas.

Figura 4: Actividad 2 inciso *a* de la Guía de actividades.

b. Una empresa que renta un bus con una capacidad para 30 personas, brinda una lista de precios, ¿cuál es el costo del micro?

i. Completa la tabla e indica si este suceso representa una relación de proporcionalidad. Si tu respuesta es sí, ¿es una relación de proporcionalidad directa o inversa? En grupo justifiquen sus respuestas.

Cantidad total del precio de la renta del autobús							
Cantidad de pasajeros	8		12	16		28	30
Cantidad de precio por pasajero		$400		$250.00	$200.00	$142.85	$133.33

ii. ¿De cuánto dinero es la renta del bus? Justifica tu respuesta.

iii. Formen grupos de tres compañeros y comenten las distintas estrategias para encontrar la cantidad de dinero que es la renta. Justifiquen sus respuestas.

iv. ¿Qué relación existe entre la cantidad pasajeros y la cantidad del precio de la renta del bus? Si llamamos y a la cantidad de pasajeros, y x a la cantidad de precio por pasajero, ¿cómo se relacionan estas variables con la cantidad del precio de la renta del bus?

Figura 5: Actividad 2 inciso *b* de la Guía de actividades.

La segunda situación (ver Figura 5) tiene como objetivo trabajar sobre la idea de proporcionalidad inversa y las preguntas tienen los mismos objetivos que la anterior, haciendo la diferencia que en este caso, la relación refiere al producto que se mantiene constante entre los pares de valores de las magnitudes.

Si bien las primeras dos situaciones trabajan sobre proporcionalidad directa e inversa de una manera "evidente", en la tercera situación (ver Figura 6) se genera conflicto de la siguiente manera:

c. ***Una vela se consume a medida que transcurre el tiempo.***

i. Completa la tabla e indica si este suceso representa una relación de proporcionalidad. Si tu respuesta es sí, ¿es una relación de proporcionalidad directa o inversa? En grupo justifiquen sus respuestas.

Relación											
Tiempo (min)	5	10	15			45	60	75	90		120
Long. de la vela (cm)	24		22	21	19		13			5	1

ii. ¿Cuánto disminuye la longitud o largo de la vela cada vez que aumenta 5 minutos?

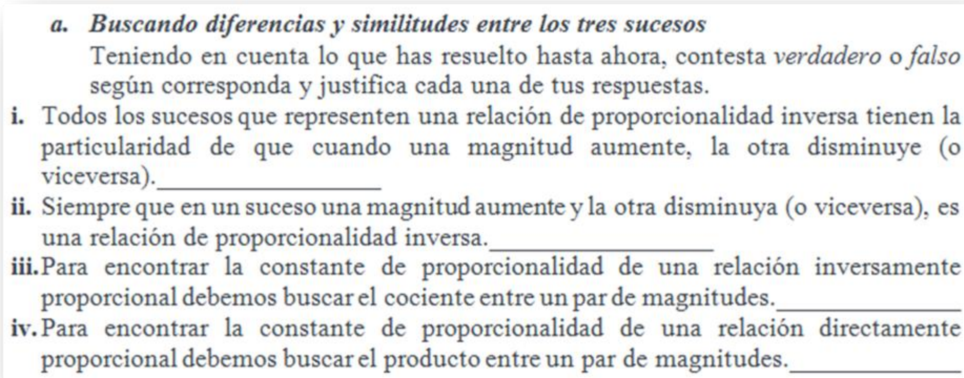
iii. ¿Qué relación existe entre la cantidad de minutos y la longitud de la vela? Comenta con tus compañeros y argumenten sus respuestas.

Figura 6: Actividad 2 inciso *c* de la Guía de actividades.

- Si suponemos que es una situación de proporcionalidad inversa con base en la argumentación de que una magnitud aumenta y la otra disminuye (lo que al comienzo era la argumentación más relevante), por el trabajo realizado durante las interacciones sabemos que en una relación de proporcionalidad inversa se cumple que $y.x = k$, por lo cual, el producto de las magnitudes de cada par ordenado, debe dar constante. Al probarlo, se genera una contradicción, pues se comprueba que no dan constantes, por lo tantose descarta el hecho de que sea de proporcionalidad inversa. También podría hacerse una gráfica y verificar que ésta no es una hipérbola, sino que es una recta,y no podría considerarse una relación de proporcionalidad inversa.
- Si al dibujarla observamos que es una recta, se podría suponer, erróneamente, que es una relación de proporcionalidad directa. Sabiendo que $\frac{y}{x} = k$, al buscar dichas razones se observa que éstas no son constantes. O bien, también se puede justificar que no es una función de proporcionalidad directa pues si bien es una recta, no pasa por el origen. Pero al ser una recta su gráfica, tampoco puede ser de proporcionalidad inversa, como se dijo anteriormente.

En este momento, comienza a reflexionarse sobre la función lineal no proporcional, sobre la pendiente como razón de cambio, sobre lo proporcional que subyace en la razón de cambio y en la justificación gráfica y algebraica de por qué la función lineal con $b \neq 0$ no puede ser una función de proporcionalidad.

En la última actividad (ver Figura 7) se concentra la información discutida y validada a lo largo de las otras actividades, pues es donde se vuelven a poner en contradicción las reglas mnemotécnicas.



a. ***Buscando diferencias y similitudes entre los tres sucesos***

Teniendo en cuenta lo que has resuelto hasta ahora, contesta *verdadero* o *falso* según corresponda y justifica cada una de tus respuestas.

- **i.** Todos los sucesos que representen una relación de proporcionalidad inversa tienen la particularidad de que cuando una magnitud aumente, la otra disminuye (o viceversa).________________
- **ii.** Siempre que en un suceso una magnitud aumente y la otra disminuya (o viceversa), es una relación de proporcionalidad inversa.________________
- **iii.** Para encontrar la constante de proporcionalidad de una relación inversamente proporcional debemos buscar el cociente entre un par de magnitudes.______________
- **iv.** Para encontrar la constante de proporcionalidad de una relación directamente proporcional debemos buscar el producto entre un par de magnitudes.______________

Figura 7: Actividad 3 de la Guía de actividades.

El *inciso i* es el que da nombre a este artículo *`cuando una crece, la otra decrece´ ¿proporcionalidad inversa o directa?* Esta regla mnemotécnica es válida siempre que la constante de proporcionalidad sea positiva. Durante la primaria los estudiantes trabajan con los Números Naturales, por lo que carece de sentido especificar cuándo es válida dicha afirmación. Lo mismo ocurre para el caso de la proporcionalidad inversa. Un gráfico de este hecho ayudará a visualizar lo que estamos diciendo:

Figura F: Gráficas de funciones proporcionales con constantes positivas y negativas

Los contraejemplos posibles para los distintos incisos son: *i*. el caso donde la constante de proporcionalidad sea negativa; *ii*. el caso de la vela de la actividad anterior, así como cualquier función lineal con pendiente negativa y, en particular, las de proporcionalidad directa con constante de proporcionalidad negativa.

Por tanto, a través de actividades específicas hemos cuestionado al saber matemático escolar, pues como ha reportado Soto (2010), existen argumentaciones, procedimientos y significados que impone el dME que excluyen a los actores del sistema educativo de construir conocimiento matemático. En este caso, hemos ejemplificado cómo esas imposiciones que se refieren a lo proporcional pueden cuestionarse a partir de ciertas actividades.

REFLEXIONES FINALES

La confección de las actividades se realiza a partir de la *uase* de lo proporcional. Con ello se busca hacer foco en la discusión sobre la matemática en juego y no sólo en las acciones de profesores y estudiantes, porque en realidad estas últimas son efectos del dME y no un reflejo de su dominio de conocimientos, es decir, postulamos que este tipo de actividades debe estar acompañado de un proceso de *problematización de saber matemático escolar* junto a los actores del sistema didáctico, pues la legitimidad y normatividad del dME en la acción de educación matemática impide la confección de argumentaciones diversas y la propuesta carente de problematización del saber matemático escolar podría perder su esencia y objetivo didáctico (por ejemplo, contestar “verdadero” en los *incisos i* y *ii* de la Figura 7).

En este escrito cuestionamos al saber matemático escolar, concibiendo que desde la Teoría Socioepistemológica no sólo reflexionamos sobre el cómo se enseña, sino sobre el qué se enseña. Es decir, hemos realizado una aproximación a la *problematización del saber matemático escolar*, en particular, lo hemos *dialectizado*, hemos reconocido la contradicción no sólo como mera errata o falla, sino que hemos reconocido que ella tiene un rol interno fundamental de confrontación (Cantoral, 2013) y sobre su base, hemos construido distintos caminos para construir argumentaciones.

En este momento, las investigaciones realizadas nos permiten conjeturar que la *problematización del saber matemático* y la posterior *problematización del saber matemático escolar* con los agentes del sistema educativo permitirán contribuir a una nueva e innovadora relación al saber matemático, lo que teóricamente se denomina como *empoderamiento docente* (Reyes-Gasperini & Cantora, en prensa; Reyes-Gasperini & Cantoral, 2013). Este hecho acompañará al objetivo de la Teoría Socioepistemológica sobre el Rediseño del discurso Matemático Escolar en donde se realiza una propuesta alternativa e innovadora sobre las Matemáticas Escolares centrada en *prácticas* y no en *objetos* abstractos, donde se privilegie la articulación de argumentaciones, se permita la emergencia de racionalidades situadas o contextualizadas, se favorezca el carácter funcional del saber (su valor de uso), se impulse una resignificación progresiva que considere marcos de referencia diversos. Todo ello, sobre la consideración de que las *prácticas sociales* son la base de la construcción del conocimiento matemático.

En síntesis, la Socioepistemología propone un rediseño, pero no sólo de sus estructuras objetivables (libros de texto, currículos, programas de estudio, evaluaciones nacionales, entre otros), sino propone el *Rediseño del discurso Matemático Escolar* (*RdME*), es decir, un cambio de concepción profundo sobre la acción de la educación matemática, que precisa del tránsito del programa clásico a un programa alternativo con base en la construcción social del conocimiento matemático (Cantoral, 2013).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ben-Chaim, D.,Ilany, B. S., &Keret, Y. (2007). Designing and implementing authentic investigative proportional reasoning tasks: the impact on pre-service mathematics teachers'content and pedagogical knowledge and attitudes. *Journal Mathematics Teacher Education, 10*, 333-340.

Ben-Chaim, D.,Ilany, B. S., &Keret, Y. (2008)."Atividades Investigativas Autênticas" parao Ensino de Razão e Proporção na Formação de Professores de Matemática para os Níveis Elementar e Médio. *Boletim de Educação Matemática, 21*(31), 125-159.

Berk, D.,Taber, S.,Carrino, C.,&Poetzl, C. (2009). Developing Prospective ElementaryTeachers' Flexibility in the Domain of Proportional Reasoning. *Mathematicalthinking andlearning,11*(3), 113-135.doi: 10.1080/10986060903022714

Cantoral, R., Cabañas, G., Farfán, R.,& Ferrari, M. (2012). *Matemáticas 2. Serie Desarrollo del pensamiento matemático*. México, D.F.: Mc Graw Hill.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.

Carraher, T., Carraher, D., & Schliemann, A. (1991). *En la vida diez, en la escuela cero*. Mé-xico: Siglo XXI Editores.

Contreras, L., Carrillo, J.,Zakaryan, D., Muñoz-Catalán, M.C., &Climent, N. (2012). Un estudio exploratorio sobre las competencias numéricas de los estudiantes para maestro. *Boletim de Educação Matemática, 26*(42B), 433-457.

Dupuis, C. &Pluvinage, F. (1981). La proportionnalité et son utilisation. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2*(2), 165-212.

Godino, J. D., Rivas, M.,Castro, W., &Konic, P. (2008). Elementos para el análisis didáctico de situaciones problema en la formación matemática de maestros. En J. L. Blanco y J. Murillo (Eds.), *Boletín SEIEM 25*. Recuperado el 19 de junio de 2013 de http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/comunicacionesgrupos/GruposXII/DidMatDisCientifica/GodinoRivasCastroYKonic.pdf

Hart, K. (1988). Ratio and Proportion. In J. Hiebert& M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp.198-219). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Howe, C., Nunes, T, & Bryant, P. (2011). Rational number and proportional reasoning: using intensive quantities to promote achievement in mathematics and science. *Journal of Science and Mathematics Education, 9*, 391-417.

Ilany, B.,Keret, Y., & Ben-Chaim, D. (2004).Implementation of a model using authentic investigative activities for teaching ratio and proportion in pre-service elementary teacher education. In M. J. Høines& A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 81-88). Bergen, Norway: PME.

Lamon, S. (1993). Ratio and Proportion: Connecting Content and Children´s Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(1), 41-61.

Lamon, S. (1999). Reasoning Proportionally. In S. Lamon (Ed.), *Teahcing fractions and rations for understanding* (pp. 223-238). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Lesh, R., Post, T. R., & Behr, M. (1988). Proportional Reasoning. In J. Hiebert& M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp.93-118). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Martínez, N.& González, J. (2008).*Construcción y uso significativo del concepto de pro porcionalidad. Diseño e implementación de actividades desde la experiencia de in vestigación acción.* Taller realizado en 9° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, 16-18 octubre 2008. Valledupar, Colombia.

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept.Part I – Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics, 11*, 217-253.

Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II – Problem-structure at successive stages: Problem-solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *EducationalStudies in Mathematics, 11*, 331-363.

Oliveira, I. (2009). Proporcionalidade: estratégias utilizadas na Resolução de Problemas por alunos do Ensino Fundamental no Quebec. *Boletim de Educação Matemática, 22*(34), 57-80.

Oller, A. (2012). *Proporcionalidad aritmética: una propuesta didáctica para alumnos de secundaria*(Tesis de Doctorado no publicada). Universidad de Valladolid, Valladolid, España.

Orrill, C. H.& Brown, R. E. (2012). Making sense of double number lines in professional development: exploring teachers´ understandings of proportional relationships. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*, 381-403. DOI: 10.1007/s10857-012-9218-z

Piaget, J.&Inhelder, B. (1984).El preadolescente y las operaciones proposicionales. En J. Piaget y B. Inhelder (Ed.), *Psicología del niño* (12a ed.) (pp. 131-150). España, Ma-drid: Ediciones Morata.

Reyes-Gasperini, D. (2011). *Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica: Estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas*(Tesis de maestría no publicada). Cinvestav, D.F., México.

Reyes-Gasperini, D. (2013). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa de intervención para el cambio y la mejora educativa*(Memoria Predoctoral no publicada). Cinvesta, D.F., México.

Reyes-Gasperini, D. & Cantoral, R. (en prensa). Socioepistemología y empoderamiento docente: acciones para un cambio educativo. *Boletim de Educação Matemática*.

Reyes-Gasperini, D.& Cantoral, R. (2013). Problematización del saber matemático a través de una unidad de análisis socioepistémica para el empoderamiento docente: el caso de la proporcionalidad. D.F., México: XVI EIME.

Rivas, M.& Godino, J. D. (2010). Desarrollo del conocimiento del profesor mediante el estudio de configuraciones epistémicas y cognitivas de la proporcionalidad. *Investigación arbitraria, 14*(48), 189-205.

Rivas, M., Godino, J. D., & Konic, P. (2009). Análisis epistémico y cognitivo de tareas en la formación de profesores de matemáticas. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 453-462). Santander: SEIEM.

Salazar, M.& Díaz, L. (2009). La actividad de medir aporta significados a fracciones y razones. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22* (pp. 207-216). México: RELME.

Sánchez Ordoñez, E. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: Una mirada desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 16*(1), 65-97.

Secretaría de Educación Pública (2011). *Programa de Estudio 2011. Guía para el maestro.* México, D.F.: Secretaría de Educación Pública.

Soto, D. (2010). *El Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una visión Socioepistemológica*(Tesis de Maestría no publicada). Cinvestav, DF, México.

Soto, I.&Rouche, N. (1995). Problemas de Proporcionalidad resueltos por campesinos chilenos. *Educación Matemática, 7*(1), 77-95.

Valdemoros, M. (2010). Dificultades didácticas en la enseñanza de razón y proporción: estudio de caso. *ActaLatinoamericana de MatemáticaEducativa 23* (pp. 217-226). México: RELME.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert& M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp.141-161). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherchers en Didactiques des Mathématiques, 10*(2), 133-170.