La construction de l’espace numérique et le rôle des reprises en classe de seconde : un problème de la profession.

Mirène Larguier

UNIVERSITÉ MONTPELLIER 2
SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC

THÈSE pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ MONTPELLIER II
Discipline : mathématiques appliquées
Spécialité : didactique des mathématiques
École doctorale : Informatique et Information pour la Société

présentée et soutenue publiquement par

LARGUIER Mirène

le 23 novembre 2009

sous la direction de
BRONNER Alain

La construction de l'espace numérique et le rôle des reprises en classe de seconde : un problème de la profession

JURY

BOSCH Marianna, Université Ramon Llull, Barcelone (examinatrice)
BRONNER Alain, IUFM de Montpellier, Université Montpellier2 (directeur de thèse)
CHEVALLARD Yves, IUFM d'Aix-Marseille, Université de Provence, (rapporteur)
MARGOLINAS Claire, IUFM d'Auvergne, Université Blaise Pascal (examinatrice)
MERCIER Alain, INRP (examinateur)
SENSEVY Gérard, IUFM de Bretagne, Université de Bretagne Occidentale (rapporteur)

Si vous vous en tenez à la nature, à ce qu'elle recèle de simple, à ce qui est réduit, qu'à peine quelqu'un remarque et qui, de manière inaperçue, peut parvenir à la grandeur et à l'incommensurable, si vous avez cet amour pour ce qui est infime, et si, en toute simplicité, vous cherchez à gagner, pour le servir, la confiance de ce qui semble indigent, tout vous sera plus facile, tout sera plus cohérent et en quelque manière plus harmonieux, non sans doute pour l'entendement qui, étonné, observe une certaine réserve, mais pour votre conscience la plus profonde, pour votre lucidité et votre savoir. Vous êtes si jeune, en quelque sorte avant tout début, et je voudrais, aussi bien que je le puis, vous prier, cher Monsieur, d'être patient à l'égard de tout ce qui dans votre cœur est encore irrésolu, et de tenter d'aimer *les questions elles-mêmes* comme des pièces closes et comme des livres écrits dans une langue fort étrangère. Ne cherchez pas pour l'instant des réponses, qui ne sauraient vous être données car vous ne seriez pas en mesure de les vivre. Or il s'agit précisément de tout vivre. *Vivez* maintenant les questions. Peut-être vivrez-vous par la suite et petit à petit, sans vous en apercevoir, en ayant, un jour lointain, pénétré au sein des réponses.

Rainer Maria Rilke, *Lettres à un jeune poète*.

Sommaire

1 Introduction : l'origine de la recherche

1.1 L'obstination à vouloir faire des révisions systématiques

Des observations réalisées en classe de seconde dans le cadre de la formation initiale des professeurs de mathématiques, ou encore des discours de professeurs expérimentés, parfois même des conseillers pédagogiques de professeurs stagiaires, ont éveillé un intérêt pour la question de l'enseignement du numérique et de l'articulation entre les deux institutions collège et lycée. Il faut « refaire les bases », disent souvent les professeurs, il ne faut pas faire de révisions systématiques disent les programmes en vigueur au moment de l'étude[1] : « Le calcul numérique et le calcul algébrique ne doivent pas constituer un chapitre de révision systématique, mais se retrouvent au travers des différents chapitres. En particulier, ils seront traités en relation étroite avec l'étude des fonctions ». Une règle du métier de professeur de mathématiques semble pourtant être fixée, elle pourrait s'énoncer ainsi : les élèves ont trop de difficultés avec le calcul numérique et le calcul algébrique pour pouvoir aborder les nouveautés du programme de seconde, il faut donc commencer par des révisions. C'est ce qui est justifié par Rosalie[2] lors d'un interview au mois d'octobre 2004. Après avoir commencé l'année par un chapitre intitulé : « Nombres, calcul et ordre », elle argumente *a posteriori* le choix de ce premier chapitre[3] :

> Je pense que mon premier chapitre était peut-être un peu long […] D'un autre côté c'est le début de la rentrée donc c'est pas trop grave […]. C'est relativement important qu'ils fassent les bases de cette année […]. Dans le premier chapitre il y a le mot calcul parce qu'on a revu les bases du collège et c'est une base importante.

Cette règle du métier, cette norme (Cirade, 2006), est également repérable à travers les choix des auteurs de manuels. La consultation de huit manuels[4], correspondant au programme de 2000 et parus en 2004 ou 2005, confirme ce choix de début de progression en seconde, à savoir contenir des révisions sur le numérique et/ou l'algébrique (Cf. section 6). En effet un seul des manuels ne commence pas par un premier chapitre sur les nombres mais par un chapitre sur les statistiques. C'est le manuel Math 2de chez Nathan (il ne fait pas partie des manuels analysés dans la section 6). Par ailleurs sur les sept autres manuels le premier chapitre contient toujours la dénomination des ensembles de nombres et pour six d'entre eux

[1] Extrait des programmes de la classe de seconde paru au BO hors-série n° 6 du 12 août 1999 et applicable à la rentrée 2000.

[2] Jeune professeur stagiaire en deuxième année d'IUFM qui sera présentée plus loin

[3] Les extraits des données de la thèse (verbatim, interviews) apparaîtront sur fond gris, les citations d'auteurs ainsi que les extraits de programmes ou de leurs commentaires seront sur fond blanc.

[4] Une étude de ces manuels est présentée plus loin dans la section 6

le chapitre contient la reprise des connaissances du collège sous la forme de révisions systématiques. Celui qui se distingue est le manuel Bréal de l'IREM de Poitiers qui commence par un premier chapitre dénommé « Les nombres » et qui ne contient aucune révision des savoirs déjà rencontrés en collège.

Un entretien avec Mathieu, l'un des professeurs de seconde dont il sera longuement question dans cette recherche, reflète bien les arguments qui étayent cette règle. Dans le lycée de Mathieu la majorité des enseignants de seconde suit une progression qu'ils ont élaborée ensemble. J'ai interrogé Mathieu à propos de cette progression commune :

> **Chercheur** : Le premier chapitre là, calculs numériques, j'imagine que l'an prochain vous reprendrez le même ?
>
> **Mathieu** : Je trouve que ça fonctionne bien, oui. C'est une manière de raccrocher sur ce qu'ils ont fait, c'est une manière pour moi de travailler tout ce qu'ils ne savent pas faire, [...]

Ce sont des difficultés du côté des élèves qui sont identifiées par Mathieu et par les professeurs en général. Mais les mathématiques à enseigner, en particulier concernant le numérique et l'algébrique, n'apparaissent pas comme étant problématiques pour le professeur. Un objectif de ce travail est de transformer ce constat de difficultés vécues par les élèves en *problème de la profession* qui se pose à l'enseignant, dans un processus de changement de point de vue tel qu'il est proposé par Cirade dans sa thèse (2006) menée dans le cadre des développements de la théorie anthropologique du didactique par Chevallard.

1.2 L'évitement avec de nouvelles possibilités de rencontre

Voici un exemple pour illustrer une absence de prise de conscience par un professeur d'un lieu possible pour réactiver des connaissances sur le calcul numérique et algébrique. Il s'agit d'un extrait d'une séance de statistiques observée en septembre 2004 dans une classe de seconde d'un professeur stagiaire à l'IUFM de Montpellier.

Pendant une séance de statistiques, le professeur explique aux élèves les transformations d'écriture suivantes qu'il a écrites au tableau :

$$\frac{x_1n_1 + x_2n_2 + ... + x_pn_p}{N}$$

$$= \frac{x_1n_1}{N} + \frac{x_2n_2}{N} + ... + \frac{x_pn_p}{N}$$

$$= x_1 \times \frac{n_1}{N} + \ldots. + x_p \times \frac{n_p}{N}$$

Pour la première transformation, le professeur explicite en disant : « on décompose la fraction », pour la deuxième étape le professeur dit : « quand on a un produit au numérateur on a le droit de sortir l'un des termes ».

Le professeur gère un travail algébrique de transformation d'écritures dans le cadre des statistiques, et ne semble pas du tout conscient de la possibilité de reprise de connaissances en calcul algébrique pourtant nécessaires dans cet épisode. Le discours qui justifie les transformations accompagne seulement des gestes de manipulation des écritures : « décomposer », « sortir ». Un geste de reprise du calcul algébrique en mettant au jour les éléments théoriques qui justifient les transformations aurait pu avoir lieu en ce début d'année. Il aurait favorisé un meilleur rapport personnel des élèves avec le calcul en remettant en scène des savoirs nécessairement déjà institutionnalisés au collège. Il aurait permis l'élaboration d'un capital théorique commun à développer au cours des rencontres avec le numérique et l'algébrique pour cette classe de seconde.

Dans ce dernier exemple je considère qu'il s'agit d'une tâche du domaine algébrique puisqu'il s'agit de transformer une écriture algébrique, c'est-à-dire un objet de l'algèbre (autrement dit un nombre dont l'écriture contient des lettres). Cependant c'est l'occasion d'une reprise de savoirs nécessaires aussi bien pour le domaine algébrique que pour le domaine numérique. En fait cet exemple illustre très bien ce qui a été identifié par Bronner (2007) comme étant l'articulation entre le numérique et l'algébrique (abrégé en NAA). Les règles convoquées ici sont celles relatives aux opérations sur les quotients de nombres, ces nombres étant écrits avec des lettres. Ce sont bien des savoirs théoriques du domaine algébrique qui sont à l'œuvre, mais les mêmes règles auraient été appliquées de la même manière si l'expression avait été strictement numérique. Dans cette recherche ce sont ainsi essentiellement des connaissances du numérique qui seront étudiées, mais cela nécessite de définir pour ce travail une frontière entre les domaines numérique et algébrique ainsi qu'une zone frontalière : le NAA. Ces délimitations sont précisées dans la partie théorique de manière à éclairer le lecteur sur le *numérique en question*[1] dans ce travail.

1.3 Les premières questions de recherche

La question inaugurale de ce travail est la suivante : comment les professeurs de seconde procèdent pour « reprendre les bases » du numérique nécessaires à toute activité mathématique, avec des élèves qui arrivent d'horizons différents, avec des niveaux différents, alors que ces « bases » devraient être normalement acquises conformément au programme du collège et qu'il faut de surcroît éviter les révisions systématiques ?

La recherche entreprise pour le DEA (Larguier, 2005) s'est intéressée à cette question, elle constitue l'amorce de ce travail de thèse. Elle avait pour thème les problèmes d'enseignement et d'apprentissage liés à la *reprise* du numérique au moment particulier de la *reprise scolaire*, c'est-à-dire la période entre la rentrée de septembre et les vacances de Toussaint. Cette

[1] Cette expression évoque le titre de la note de synthèse d'HDR d'Alain Bronner (2007) : « La question du numérique : Le numérique en questions ».

recherche a permis d'étudier les caractéristiques des choix d'enseignants de mathématiques en début d'année scolaire en seconde de détermination concernant les organisations mathématique et didactique (Chevallard, 1999a) des *reprises* du domaine numérique.

Dans le prolongement de ces travaux, l'objectif essentiel du travail de thèse est d'approfondir cette étude sur les conditions actuelles d'enseignement et d'apprentissage du numérique lors de moments identifiés comme des *reprises* de ces domaines tout au long de la classe de seconde. Le moment du recueil des données dépasse donc le temps de la *reprise scolaire* pour recouvrir l'année scolaire toute entière. Par ailleurs un autre élargissement est prévu, à savoir l'étude des *reprises* du numérique dans le cadre numérique évidemment mais aussi dans d'autres cadres où le numérique est convoqué, comme le cadre algébrique ou encore le cadre géométrique (au sens de Douady, 1986).

Cette recherche est l'une des composantes de *l'observatoire des pratiques sur le numérique* (Bronner, 2007). Le but de cet observatoire est de recueillir des données, de développer une méthodologie d'analyse, de produire des connaissances sur ces pratiques, et enfin d'élaborer des projets d'ingénierie en s'appuyant sur les résultats obtenus.

La visée de la recherche est de révéler et de cerner un *problème de la profession* de professeur de mathématiques (Chevallard & Cirade, 2006), elle a trois dimensions :

- **descriptive** pour comprendre ce qui de façon réelle et effective détermine les valeurs des critères caractéristiques de l'enseignement et de l'apprentissage lors des reprises du domaine numérique ;
- **analytique** pour évaluer l'efficacité de l'enseignement au regard de l'efficacité des apprentissages ; ce qui suppose d'interroger cette efficacité et de définir des critères pour son évaluation ;
- **transformative** pour déboucher sur des propositions de formation initiale et continue relativement au problème étudié, problème qu'il faut faire reconnaître aux enseignants comme un *problème de la profession.*

Les questions de recherche peuvent se formuler ainsi : comment les enseignants contextualisent dans leurs pratiques effectives les prescriptions officielles concernant l'enseignement du numérique ? Quelle est alors l'activité mathématique des élèves lors de cet enseignement ? Quel rapport personnel les élèves élaborent-ils concernant les objets enseignés ? Est-ce que les enseignants ont les connaissances nécessaires relatives aux savoirs à enseigner ? Ces questions portent aussi bien sur les *gestes professionnels* des enseignants (Bronner & Larguier, 2004) que sur les gestes d'étude des élèves, ainsi que sur leur articulation.

Ces questions s'inscrivent dans la problématique suivante : quelles sont les conditions et les contraintes véritables de l'enseignement du numérique tout au long de la classe de seconde dans une perspective de reprise et de continuité entre ancien et nouveau ? Comment les différentes logiques des curriculums officiel et réel se confrontent ? (Pour le sens donné à curriculum, voir Larguier, 1998).

L'objectif est de regarder l’histoire de tout un domaine d’enseignement, et le problème du *tissage*[1] (Bucheton, 2006) ou encore de l’articulation des enseignements tout au long de l’année scolaire. De quoi vont dépendre la chronogenèse et la topogénèse (Chevallard, 1992) au niveau de la classe ? C'est tout le processus d'enseignement où intervient le numérique qui est l'objet de la recherche, et en particulier il s'agit de repérer le rôle et la place des reprises du numérique.

2 Cadre théorique

Les concepts et les outils théoriques utilisés dans cette recherche ne seront pas tous redéfinis *a priori*. En général une *reprise* des définitions déjà données par leurs auteurs ne m’apparaît pas nécessaire s’il s’agit de théories bien connues dans la communauté de la didactique des mathématiques. Cependant un développement sur un élément du cadre théorique sera présenté dans certains cas :

- Lorsque l’auteur a donné des définitions multiples et différentes, je présenterai celle qui me semble la plus fonctionnelle pour mon travail (exemple pour la définition d’une praxéologie au sens de Chevallard). Ce choix apparaît alors comme une trace du travail ;
- Lorsqu’un concept théorique n’est pas très répandu dans la communauté (exemple de la *mémoire didactique* au sens de Matheron) ;
- Lorsqu’un concept est en cours de développement en lien direct avec cette recherche (exemple de la notion de *reprise* centrale dans ce travail).

2.1 Cadre théorique principal

Dans la continuité du travail déjà engagé en DEA, les outils théoriques sont essentiellement empruntés à la théorie des situations de Brousseau (1998b) et à la théorie anthropologique du didactique de Chevallard (1992,1999a). Je développe plus loin certains aspects de leurs recherches particulièrement utiles dans ce travail.

Pour la compréhension de ce que recouvre le numérique et pour son étude, les travaux d’Alain Bronner (1997, 2001, 2007) m’apportent des outils d’analyse que je vais décrire également.

[1] Le tissage se caractérise par des gestes professionnels comme la mise en lien des différentes séances d’une séquence. Il peut également être caractérisé à un grain beaucoup plus fin comme le lien que le professeur permet aux élèves de réaliser entre leurs formulations spontanées et les connaissances institutionnalisées. Toutes les relations que le professeur met en scène ou que les élèves activent concernant les apprentissages visés, constituent le tissage.

2.1.1 Praxéologie : choix d'une définition

Le terme de praxéologie a été utilisé par Chevallard dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique. Il décrit une praxéologie comme étant un quadruplet (type de tâches, technique, technologie, théorie). A travers ses écrits, il a donné de multiples définitions de cette notion, j'ai choisi la suivante pour sa précision (Chevallard, 1997) :

> En toute institution, l'activité des personnes occupant une position donnée se décline en différents types de tâches T, accomplis au moyen d'une certaine manière de faire, ou technique, τ . Le couple [T, τ] constitue, par définition, un savoir-faire. Mais un tel savoir-faire ne saurait vivre à l'état isolé : il appelle un environnement technologico-théorique [θ,Θ],ou savoir (au sens restreint), formé d'une technologie θ, « discours » rationnel (logos) censé justifier et rendre intelligible la technique (tekhnê), et à son tour justifié et éclairé par une théorie Θ, généralement évanouissante. Le système de ces quatre composantes, noté [T/τ/θ/Θ], constitue alors une organisation praxéologique ou praxéologie, dénomination qui a le mérite de rappeler la structure bifide d'une telle organisation, avec sa partie pratico-technique [T/τ] (savoir-faire), de l'ordre de la praxis, et sa partie technologico-théorique [θ/Θ] (savoir), de l'ordre du logos.

Dans le postulat énoncé précédemment par Chevallard, les praxéologies peuvent ne pas être exprimées complètement. Il écrit en effet :

> […] on tient ici pour un postulat que toute action humaine procède d'une praxéologie en admettant bien sûr que cette praxéologie puisse être en cours d'élaboration, ou, aussi bien, que sa construction se soit arrêtée – peut-être définitivement, à l'échelle d'une vie humaine ou institutionnelle – en la figeant dans un état d'incomplétude ou de sous-développement, avec, par exemple, un type de tâches mal identifié, une technique à peine ébauchée, une technologie incertaine, une théorie inexistante. (Ibid.).

La complétude des praxéologies des organisations mathématiques sera un critère d'analyse de cette recherche et sera en lien avec une de ses hypothèses.

2.1.2 Le geste professionnel vu comme une praxéologie

Les praxéologies peuvent être utilisées pour décrire du point de vue de la discipline les mathématiques enseignées, il s'agit de l'organisation mathématique en réponse à la question : « qu'est-ce qui est enseigné ? ». Une analyse en terme de praxéologies est également possible du côté des types de tâches de l'enseignant. La question générique est alors : « comment enseigner telle notion ? ».

Une praxéologie permet de modéliser toute pratique sociale et en conséquence elle permet de décrire et d'analyser les tâches d'enseignement du professeur. Il existe des praxéologies du professeur (Chevallard parle de praxéologies enseignantes), avec des praxéologies globales (exemple : construire une séquence ou une progression) qui recouvrent des praxéologies plus ponctuelles (exemple : donner une consigne ou faire réviser la somme de deux quotients). La théorie anthropologique permet donc de décrire les gestes professionnels de l'enseignant. La TAD amène un autre regard sur le geste professionnel comme praxéologie liée à un type de tâches d'enseignement. Ainsi nous considérons qu'un geste professionnel se décrit, se décompose et s'analyse dans ce modèle selon les quatre dimensions : type de tâches, technique, technologie, théorie (Bronner & Larguier, 2004).

Je précise que la définition précédente du geste professionnel est différente de celle donnée par Jorro (2002) qui avait utilisé cette dénomination[1]. Elle fait une distinction entre deux points de vue sur « l'agir professionnel » :

- un point de vue rationnel « majoritairement rivé à la pensée stratégique, si bien qu'il résulterait d'une suite d'actions à mener, d'une mobilisation préméditée de compétences professionnelles » (Ibid.) ;
- et un autre point de vue plus large qu'elle propose pour « saisir l'épaisseur symbolique de toute pratique. Chaque praticien agirait selon des valeurs et des croyances qu'il actualiserait sous la forme de gestes professionnels » (Ibid.).

En reprenant cette distinction, je défends l'existence d'un point de vue rationnel d'un geste professionnel quand il est envisagé dans une anticipation par rapport à une tâche didactique. Ainsi ce geste professionnel résulte du rapport personnel de l'enseignant qui est plus ou moins conforme au rapport institutionnel, et il est une description d'un possible de l'action effective à venir. Cette anticipation peut être une analyse *a priori* au sens fort de la didactique des mathématiques, une fiche de préparation au sens commun du métier, ou encore la reprise des propositions d'enseignement d'un manuel, etc.

Au niveau de la description et de l'analyse de l'agir de l'enseignant dans le réel de la classe, le geste professionnel est appréhendé dans l'acte d'enseignement dans son contexte effectif et singulier. Le sujet est ainsi pris en considération comme interprète d'un texte connu *a priori*, et dont la singularité exprime aussi les dimensions affectives, symboliques, éthiques qui conditionnent ses décisions dans la dynamique de l'enseignement. La mesure de l'écart entre le geste professionnel décrit *a priori* et le geste professionnel observé réellement dans la dynamique de la classe, est alors un indicateur intéressant pour étudier la variabilité des réponses pour une tâche d'enseignement donnée. Ainsi la dimension personnelle émotive de l'enseignant qui se dit dans l'agir professionnel n'est pas exclue *a priori*, même si je ne vise pas à repérer cette dimension dans le contexte de cette recherche. La comparaison entre les possibles d'une situation et sa réalisation effective constitue un élément essentiel de l'analyse didactique des séances observées pour cette recherche.

[1] « les gestes professionnels complètent l'approche des gestes du métier en intégrant des dimensions plus singulières, en particulier :

– des dimensions biographiques, existentielles, qui relèvent du sens postural ;

– des indices de reconnaissance d'autrui, de son affectivité et de son émotivité ;

– des signes de son univers symbolique, éthique » (Jorro, 2002, p. 75)

2.1.3 Apport des travaux d'Alain Bronner

2.1.3.1 Le filtre du numérique

Les travaux de Bronner (1997, 2001, 2007) sur les domaines du numérique et de l'algébrique constituent un appui particulièrement important de ce travail de recherche. Dans les derniers développements de ses travaux (2007), il a élaboré un outil essentiel pour les recherches dans le cadre de *l'observatoire du numérique*, c'est le *filtre du numérique* (Cf. Figure 1).

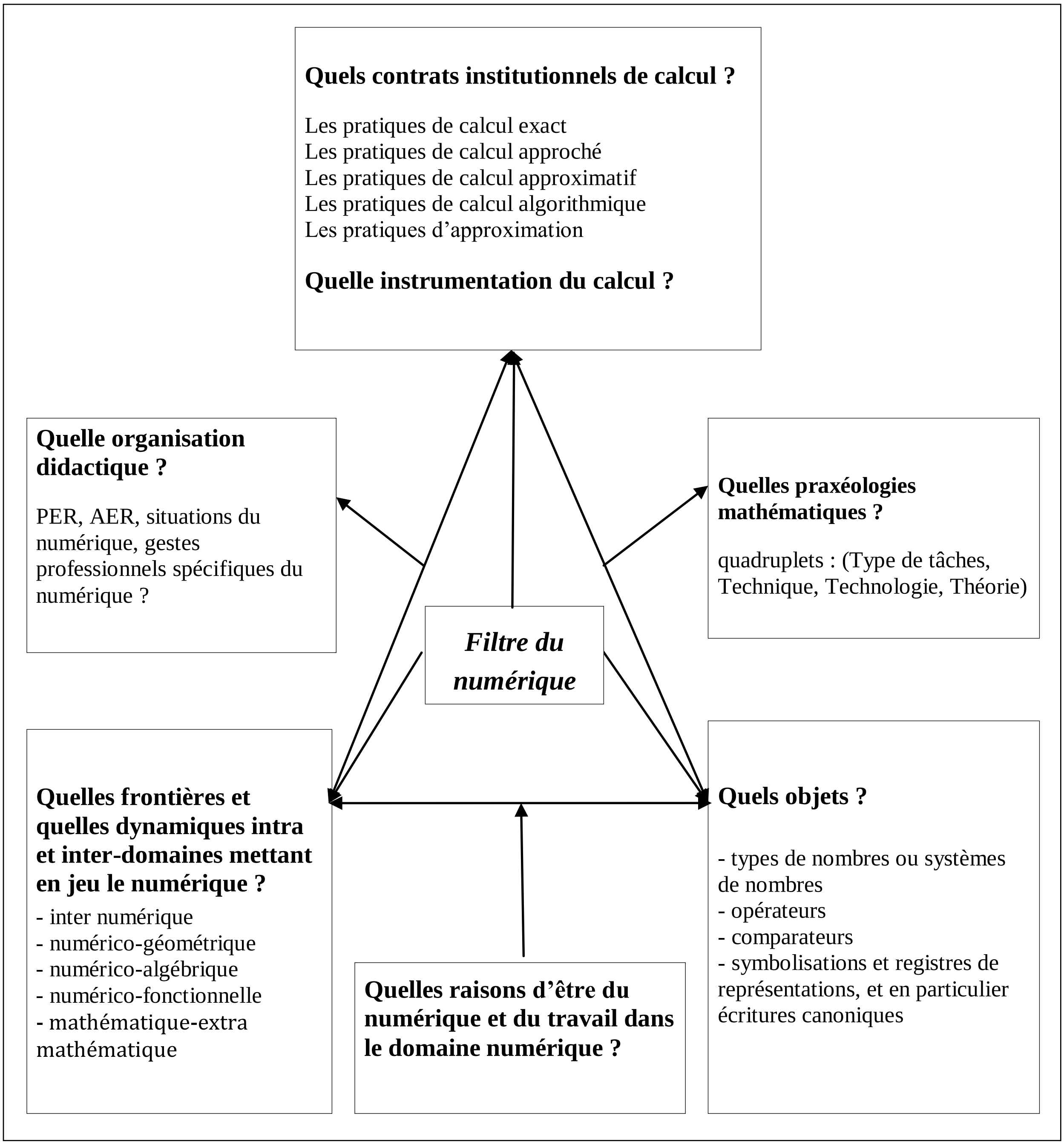


Figure 1: filtre du numérique (Bronner, 2007)

Cet outil sert à « traquer » le numérique, en énumérant ses différents composants, il permet de l'interroger et de caractériser les éléments constitutifs de cet espace ainsi que les relations de ces éléments. C'est un outil d'investigation et de catégorisation. Il est présenté ci-dessus sous une forme schématisée Il fonctionne en quelque sorte comme s'il donnait à voir une cartographie de l'espace numérique à construire d'après le curriculum officiel, ou construit d'après le curriculum réel, en classe de seconde.

2.1.3.2 Délimitation du numérique dans cette recherche

Dans la note de synthèse de son HDR (2007), Bronner a cherché à cerner ce qu'est le numérique. Je m'appuie sur ses travaux pour donner une délimitation du numérique relative à ce contexte de recherche. Bronner développe l'idée qu'une définition n'existe pas dans l'absolu et qu'elle dépend de l'institution qui abrite ce domaine. Il écrit que « Le numérique est […] le produit d'une fabrication sociale inscrite dans le temps et réalisée en établissant une relation avec des objets comme on construit un rapport à l'espace. » Ainsi suivant les époques et les institutions les limites sont floues entre numérique, arithmétique et algébrique.

Concernant le numérique comme domaine pour l'institution d'enseignement dans les classes de seconde des lycées en France, je vais déterminer des contours du numérique avec certains choix qui peuvent être discutés. Cette localisation du numérique en tant que domaine sera enrichie plus tard grâce au *filtre du numérique*.

Dans le contexte de cette recherche, le numérique est tout d'abord caractérisé par ses objets qui sont essentiellement des nombres réels ne contenant pas de lettres sachant que toute expression contenant des lettres est alors un objet de l'algèbre. Dans ce contexte, les dénominations *expression numérique* et *expression algébrique* (ou *expression littérale*) vont de pair avec *calcul numérique* et *calcul algébrique* et sont celles qui sont utilisées dans les programmes. Elles correspondent respectivement aux deux domaines numérique et algébrique. À partir de la classe de seconde les différents types de nombres rencontrés en collège sont réorganisés sous la forme d'ensembles avec leurs dénominations. Le soubassement théorique qui reste implicite à ce niveau renvoie aux structures algébriques de ces ensembles et à une théorie des nombres. Dans le processus de transposition didactique du savoir de référence vers le savoir à enseigner voici deux exemples de ce que pourraient être alors les formes les plus cohérentes d'énoncés théoriques nécessaires pour travailler le numérique en seconde :

- Premier énoncé : Quels que soient les réels a, b et c on a $a(b+c) = ab + ac$
- Deuxième énoncé : Quel que soit le réel a et quels que soient les réels non nuls b et c on a $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$

Ces énoncés sont conformes au curriculum officiel comme l'attestent les extraits suivants du document d'accompagnement du programme de seconde[1] :

> Les quantificateurs ∃ et ∀ ne sont pas au programme de la seconde ; on soulignera cependant l'universalité de la plupart des énoncés mathématiques ; à propos d'une propriété portant sur un ensemble E, on insistera sur le fait que la seule exhibition d'un contre exemple suffit à démontrer qu'elle est fausse et que si E est un ensemble infini, aucune liste finie de cas où elle est vraie n'en constitue une démonstration[2]. […]
>
> On s'attachera à s'assurer du sens que les élèves attribuent à la notion de formule algébrique (identités remarquables, factorisations, développements,...).

D'un point de vue formel, les règles qui régissent le calcul numérique (comme le calcul algébrique d'ailleurs) ainsi que les transformations des écritures des nombres sont des règles algébriques qui assurent la généralité grâce à l'une des fonctions essentielle de l'algèbre identifiée notamment par Chevallard (1984) puis par Grugeon (1995). Il s'agit de l' « utilisation de l'outil algébrique pour généraliser » (Grugeon, 1995) ce type de traitement algébrique étant mis en œuvre en particulier pour « exprimer une propriété numérique générale » (Ibid.). Le contour du numérique est difficile à cerner puisque d'un point de vue théorique les règles qui permettent le travail mathématique de calcul et de transformation des nombres sont de nature algébrique.

Parmi les autres objets du numérique, le programme de seconde prévoit la rencontre avec des nouveautés comme les intervalles ou la valeur absolue, ainsi que des reprises d'objets numériques déjà travaillés au collège comme les égalités et les inégalités. Ces objets contribuent à la construction de l'espace numérique de la classe de seconde, mais ils sont souvent travaillés avec des nombres indéterminés et deviennent alors des objets du domaine algébrique d'après la définition stricte donnée précédemment. Le territoire numérique est donc précisément délimité par ses objets, mais il est nécessairement imbriqué et articulé avec le territoire algébrique pour deux raisons liées :

- à la nature de ses outils (les règles de calcul par exemple) ;
- à la nature des nombres en jeu (nombres connus ou indéterminés).

Cette articulation du numérique et de l'algébrique est désignée par le NAA en empruntant ce nom à Bronner (2004) qui a marqué ainsi la reconnaissance de ce territoire frontalier.

---

[1] Ce document concerne le programme de 2nde paru au BO hors-série n° 6 du 12 août 1999 et applicable à la rentrée 2000. L'extrait suivant concerne la partie intitulée « fonctions ».

[2] Document d'accompagnement, extrait du point 6 de la partie « Orientations générales » intitulé « Rédaction, logique, notations. »

Pour terminer cette tentative de description je donne un exemple. Dans le numérique je peux rencontrer la tâche de calcul de l'expression numérique $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$ **.** Différentes praxéologies sont alors possibles :

a. En contextualisant les nombres donnés dans un cadre relatif aux durées cela peut permettre de dire que si c'était un quart d'heure ajouté à une demi-heure, sachant qu'une demi-heure est égale à deux quarts d'heure cela ferait un quart d'heure et encore deux quarts d'heure, et cela donne trois quarts d'heure, le résultat est donc $\frac{3}{4}$**.**

b. En mobilisant la connaissance qu'un quotient $\frac{a}{b}$ est une autre écriture de la division de a par b et en utilisant les opérations arithmétiques le calcul est le suivant : (1:4)+(1:2)=0,25+0,5=0,75 qui est égal à $\frac{3}{4}$ ce qui est officiellement une connaissance mémorisée dès le CM2.

c. En utilisant la règle *algébrique* de la somme de deux quotients ainsi que la règle algébrique, dite communément de simplification des quotients, le calcul devient : $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1\times 2}{2\times 2}=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$

Si la nature de la tâche est bien numérique, les praxéologies possibles sont très différentes et mobilisent des connaissances dans des domaines également très différents, ce que je résume dans le tableau suivant.

Praxéologie	a	b	c
Technologie	Référence aux durées en heure, demi-heure et quart d'heure	Appui sur les opérations arithmétiques dans l'ensemble des décimaux et sur la connaissance que 0,75 = $\frac{3}{4}$	Recours aux règles algébriques relatives aux quotients
Connaissances mobilisées	Connaissance sociale et quotidienne des durées	Connaissance de la conversion entre écriture fractionnaire et écriture décimale et des techniques opératoires	Savoirs relatifs à la règle fondamentale des quotients et à la règle d'addition de deux quotients
Nature du bloc technologico-théorique	Pragmatique	Arithmétique	Algébrique
Niveau scolaire à partir duquel cette praxéologie est possible	CM1	6^{e}	4^{e}

Tableau 1: praxéologies différentes pour une même tâche numérique

Le même type de tâches numérique avec un spécimen comme $\frac{3}{\sqrt{7}}+\frac{4}{\sqrt{5}}$ ne pourrait évidemment pas être résolu avec les deux premières praxéologies mais la technologie serait de nature algébrique en lien avec une technique basée sur des transformations réglées par des règles de calcul formel.

La question du numérique se présente alors en deux temps selon la réponse à la question : Les objets en jeu sont-ils des nombres exprimés sans aucune lettre ?

- Si la réponse est non, alors le type de tâches est algébrique ;
- Si la réponse est oui, alors le type de tâches est numérique mais la praxéologie mathématique est justifiée par des connaissances de natures différentes : pragmatique, arithmétique ou algébrique. Je dirai alors que c'est la praxéologie qui est de nature pragmatique, arithmétique ou algébrique.

2.2 Cadres théoriques complémentaires

Le cadre théorique principal que j'ai présenté, sera utilisé en tenant compte de développements théoriques qui sont très complémentaires avec les paradigmes théoriques précédents. Je cite en particulier les travaux de Matheron (2000) et de Mercier (1999) pour l'étude didactique de la mémoire et pour le concept de création d'ignorance (Mercier, 1996) ; les développements apportés par Margolinas (2004) à la TSD ; et les recherches menées en lien avec « le triplet fondamental : mésogenèse, topogenèse, chronogenèse » par Sensevy (2007).

D'autres apports théoriques me paraissent également nécessaires pour cette recherche, et de façon non exhaustive je cite : les registres de représentation sémiotique de Duval (1993) ; les notions de concept et de champ conceptuel de Vergnaud (1994) ; les concepts de dialectique outil/objet et de cadre de Douady (1986, 1994).

Un autre cadre théorique n'appartient pas au champ de la didactique des mathématiques, mais les questions soulevées, concernant l'analyse des pratiques enseignantes, sont proches de celles de cette recherche. Il s'agit des recherches pluri-disciplinaires d'une équipe ERT dont j'ai fait partie et qui ont nourri ma réflexion de façon importante. Cette recherche technologique portait sur les gestes professionnels des enseignants dans les débuts de cours. Elle a notamment débouché sur une modélisation d'une situation d'enseignement, appelée le *modèle du pluri-agenda* (Bucheton & al., 2009). Cette modélisation de la situation d'enseignement définit les gestes professionnels des enseignants, comprenant des gestes de *tissage*, de *pilotage*, d'*atmosphère* et d'*étayage* relativement à un contenu d'enseignement donné qui constitue le cœur incontournable du système. Les concepts de ce modèle n'apparaîtront pas véritablement comme cadre théorique dans cet écrit, mais je précise que les notions notamment de *tissage*, de *pluri-agenda* ou encore de *logiques profondes* sont des éléments du modèle utilisés en lien avec cette référence.

2.3 Le choix du cadre théorique par rapport à d'autres cadres

Depuis quelques années les recherches concernant l'enseignement et l'apprentissage s'intéressent à l'analyse des pratiques enseignantes « de tous les jours ». Elles ont comme fondement la didactique d'une discipline, les sciences de l'éducation, les théories ergonomiques venues du monde du travail, la didactique comparée (Sensevy, 2007). Dans ce foisonnement de modèles théoriques, le cadre de la double approche, didactique et ergonomique, développé par Aline Robert (2000) aurait pu être pertinent pour ce travail. Un des exemples de son utilisation est le travail de thèse de Roditi (2005) qui écrit à la page 29 « La méthodologie doit donc permettre d'analyser le projet et son animation, en conjuguant les deux points de vue : l'apprentissage des élèves et l'exercice du métier. »

Roditi inscrit ses recherches dans un premier cadre, celui de la didactique des mathématiques, pour analyser les situations d'enseignement ainsi que « les pratiques enseignantes pour leur contribution aux apprentissages » (Ibid.). Les théories utilisées reprennent celles développées notamment par Douady (1986) sur la dialectique outil/objet et par Vergnaud (1990) relative aux champs conceptuels. Par ailleurs Roditi utilise une approche venue de la psychologie ergonomique pour considérer les pratiques enseignantes comme exercice d'un métier. Roditi explique cette nécessaire double approche par un changement de point de vue : « Il ne s'agit plus d'étudier l'activité du professeur en fonction des apprentissages potentiels mais en fonction de besoins, liés à l'exercice du métier. » (Ibid.) Ainsi les contraintes qui pèsent sur les choix des enseignants sont abordées dans un deuxième cadre ergonomique complémentaire du cadre didactique.

En conséquence, Roditi justifie le choix du cadre théorique de la double approche par le fait que les théories issues de la didactique des mathématiques ne lui permettent pas d'analyser les contraintes qui pèsent sur les choix des professeurs. Il convoque donc le cadre théorique de la psychologie ergonomique en l'explicitant ainsi (Ibid. p24) :

> Par la seconde approche des pratiques enseignantes, les activités professionnelles de l'enseignant sont considérées comme un travail. Un travail soumis à des contraintes imposées par l'institution scolaire, un travail qui comporte des exigences spécifiques liées aux conditions d'exercice de la profession, mais aussi un travail dans lequel le professeur s'investit personnellement.

Pourtant la théorie anthropologique du didactique, développée depuis presque 30 ans par Chevallard[1], apparaît comme permettant d'englober *les deux approches*. En particulier *l'échelle des niveaux de codétermination didactique* (Cf. annexe 11.2), allant du niveau des

[1] Le premier congrès international de la TAD a eu lieu à Baeza en Espagne du 26 au 27 octobre 2005. L'année 2005 a correspondu au 25e anniversaire de la première présentation par Yves Chevallard de la notion de Transposition Didactique, germe de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD). Le thème du congrès était : « Société, Ecole et Mathématiques : apports de la TAD » (actes publiés en 2007).

sujets abordés dans l'enseignement d'une discipline donnée jusqu'au niveau de la civilisation, permettent d'appréhender aussi bien les pratiques ordinaires d'une classe, que les conditions et les contraintes à d'autres niveaux comme « des contraintes imposées par l'institution scolaire » (Ibid.) au niveau de l'École. Cette vision unificatrice me semble plus adéquate pour rendre compte à travers un même modèle de la complexité des situations analysées. Ainsi un cadre unique permet d'envisager à la fois l'enseignement par rapport aux contraintes de la discipline et par rapport aux contraintes du métier qui peuvent être repérées jusqu'au niveau de la civilisation. Par ailleurs cette théorie permet de regarder un système à travers des organisations mathématiques et didactiques suggérées par une institution ou choisies par le professeur, comme à travers les rapports personnels des élèves relativement aux objets enseignés. L'enseignement comme l'apprentissage peuvent être englobés dans cette vision du point de vue de la TAD. Le métier avec ses normes est par ailleurs envisagé davantage comme une profession avec ses problèmes spécifiques. Ainsi l'étude de l'enseignement des mathématiques revient à repérer des *problèmes d'une profession* pour s'en emparer et rechercher des réponses possibles (Chevallard, 2005 ; Cirade, 2006). Les contradictions qui sont signalées par Roditi comme conséquence de l'articulation de deux cadres théoriques différents sont alors effacées grâce au choix d'un modèle unique, elles ne sont que des forces internes d'un système complexe.

Une autre raison m'amène à ne pas choisir ce cadre de la double approche, elle concerne la conception relative aux erreurs. Dans le travail de Roditi les erreurs sont considérées comme des incidents didactiques, cette conception me semble contradictoire avec la TSD. Dans le modèle ergonomique une tâche est prescrite et son effectuation est observée et analysée. L'erreur est alors identifiée comme un incident. Dans la TSD certaines erreurs sont anticipées comme obstacles que l'élève doit franchir par adaptation, elles sont le signe que l'élève rencontre véritablement un problème à résoudre. Ce type d'erreur mis au jour est alors un levier pour permettre de déstabiliser les connaissances antérieures, c'est un outil pour que l'élève doute de ce qu'il savait et accepte d'aller à la rencontre de nouvelles connaissances. Dans le cadre de la double approche, l'erreur qualifiée d'incident didactique serait plutôt le révélateur d'un défaut d'un enseignement magistral.

2.4 La dimension émotionnelle

Les niveaux de codétermination didactique définis par Chevallard ne sont pas *a priori* élaborés pour permettre la prise en compte de la dimension psychologique personnelle du professeur avec ses sentiments, ses émotions, alors que cette dimension est présente dans l'approche ergonomique. Cependant le travail amorcé en DEA montre qu'il est possible de rendre compte des effets de cette composante sur les décisions du professeur. Cette dimension de la situation didactique peut être considérée comme symptomatique d'une contrainte repérable par exemple au niveau de la société. Voici un extrait du mémoire de DEA dans lequel j'explicite comment la sensibilité personnelle du professeur débutant Rosalie envers les élèves de seconde pèse sur ses choix d'enseignement :

> La perception de l'individu derrière celle de l'élève est une donnée intéressante qui a une influence sur les choix didactiques. Pour Rosalie ce sont des adolescents fragiles et sensibles : « Ce sont des grands bébés qui ont envie de se voir grands et qui ont envie d'être maternés, écoutés par les enseignants et pris en charge en fait. Je pense que pour eux c'est pas évident d'arriver en seconde. Souvent ils arrivent de petits collèges dans un grand lycée, je pense qu'ils sont sensibles en tant qu'individus. »
>
> La société à travers les voix médiatiques parlent beaucoup de la crise d'adolescence, Rosalie répercute cela en écho : « c'est important de prendre en compte que l'on a des ados en pleine crise en face de nous et que faut pas les rebuter, il ne faut pas qu'ils sortent de la seconde en disant le prof de maths m'a dégoûté des maths. Ça serait bien qu'ils sortent en disant je fais littéraire, mais le prof de maths m'a quand même fait aimer les maths et je lirai des bouquins à côté sur les mathématiques. »
>
> Rosalie exprime certainement en miroir sa propre sensibilité et cela peut expliquer qu'elle ne s'autorise pas à demander certains efforts aux élèves par peur de les dégoûter. Par ailleurs elle exprime un objectif qui dépasse celui de l'enseignement et rejoint la formation du citoyen et elle souhaite contribuer à développer chez lui la curiosité intellectuelle et le goût des mathématiques.[...] Je discerne là des contraintes au niveau de la société, un professeur est inscrit lui même dans une société et il est le vecteur de certaines de ses valeurs, comme il est le vecteur de valeurs personnelles conditionnées par sa sensibilité, son histoire individuelle et collective…

Dans cette recherche la composante émotionnelle des sujets enseignants ou élèves ne sera pas étudiée. C'est un choix théorique et méthodologique assumé. Cependant des éléments de cette nature peuvent jouer le rôle de *logiques profondes* (Bucheton, 2009) qui prennent la place d'un discours implicite pour expliquer des choix du professeur comme dans l'exemple précédent. Ainsi en analysant un geste professionnel, sa raison d'être peut se situer du côté des émotions ressenties par le professeur. Dans ce cas ce type de paramètre sera repéré comme faisant partie de l'élément justifiant ce geste.

2.5 La notion de reprise

La notion de *reprise* étant centrale pour cette recherche, je vais en donner dans cette section une définition de travail pour permettre une meilleure compréhension de la suite de cet écrit. Pour parvenir à donner cette définition j'ai réalisé un repérage d'auteurs de la didactique des mathématiques qui ont travaillé sur ce sujet, ou sur des sujets proches, comme celui de la mémoire.

La reprise évoque le renouvellement d'un évènement, comme la reprise d'une pièce de théâtre, elle met donc en lien des manifestations qui se produisent dans des temps différents, dans le même contexte ou dans un contexte différent. Dans le cadre de la couture, la reprise sert à réparer un tissu déchiré ou usé. Les techniques pour repriser des vêtements étaient encore enseignées dans les lycées de jeunes filles jusque dans les années soixante. La reprise concerne donc quelque chose d'ancien qui est repris à l'identique comme une copie conforme, ou bien qui est repris avec des transformations et en conséquence des nouveautés. Dans ce dernier cas il s'agit de « nouer » ensemble de l'ancien et du nouveau. La reprise va nécessairement de pair avec de l'ancien gardé sous une forme ou une autre en mémoire. La reprise est donc à rapprocher de la notion de mémoire.

Je vais présenter dans la section suivante les références à différents auteurs avant de parvenir à donner une définition de travail de la notion de *reprise*. En premier lieu des auteurs en didactique des mathématiques ont travaillé sur les notions de mémoire : Brousseau et Centeno ont défini la *mémoire didactique* ; Matheron a repris cette notion puis il a identifié différentes formes de mémoire ; Perrin-Glorian a décrit des situations de rappel, qui font évidemment référence au rappel d'éléments mis en mémoire. Cette dernière auteure en vient à repérer dans les situations de rappel ce qu'elle appelle la *dévolution* et l'*institutionnalisation après-coup*, ce qui m'a amenée à préciser les différents statuts des connaissances dans ces processus en me référant à Brousseau. En particulier la distinction entre connaissance et savoir m'apparaît opérationnelle pour la suite de cette recherche. Cette différence permet également de mieux identifier la nature des objets lors de moments de reprise. Enfin j'expliciterai le sens donné au terme de reprise respectivement par Brousseau et par Chevallard avant de donner la définition de la notion de *reprise* emblématique de cette recherche.

2.5.1 La notion de mémoire en didactique des mathématiques

2.5.1.1 Première définition par Brousseau & Centeno

La notion de reprise évoque celle de mémoire, puisqu'il s'agit de reprendre quelque chose gardé en mémoire par au moins un système. Au minimum il s'agit de la *mémoire permanente* inscrite dans le curriculum officiel. Il peut s'agir également de la *mémoire didactique de l'enseignant* définie de façon opératoire par Brousseau & Centeno (1991) :

> La mémoire de l'enseignant sera ce qui le conduit à modifier ses décisions en fonction de son passé scolaire commun avec ses élèves, sans pour autant changer son système de décision. Le caractère « didactique » de cette mémoire vient de ce que les décisions modifiées concernent le rapport de l'élève (chaque élève) avec le savoir (son savoir ou le savoir à enseigner) en général ou/et un savoir particulier.

Pour ces auteurs, la *mémoire didactique* de l'enseignant apparaît nécessaire pour gérer les rappels et même les oublis, et pour contrôler le statut des apprentissages. En effet un processus de transposition locale (à rapprocher de la notion de tissage) est à l'œuvre au cours des apprentissages entre des connaissances contextualisées, et des savoirs institutionnalisés en général décontextualisés. Au terme de leur travail les auteurs, ayant comparé des enseignements avec et sans mémoire à l'école primaire, arrivent à cette conclusion que ces deux formes d'enseignement conduisent à des apprentissages très différents, et que :

> Utiliser un système coûteux en mémoire demande aux enseignants des efforts considérables qui peuvent ne pas être couronnés de succès. Mais cela permet des formes d'apprentissages et des résultats interdits aux systèmes « sans mémoire ». Les systèmes sans mémoire conduisent à des limitations qui affectent le rapport au savoir des élèves. (Brousseau et Centeno, 1991).

Il semble possible de transférer les résultats de ce travail à l'enseignement du second degré. Pour la recherche en cours, une contrainte particulière au niveau de l'École (au sens de Chevallard) est la séparation des deux cycles collège/lycée. La situation est d'une certaine manière la même que lors du passage d'une classe à l'autre, mais elle est amplifiée dans ce contexte d'entrée au lycée. Elle a pour conséquence la privation de *mémoire didactique* pour les professeurs de seconde qui n'appartiennent pas à la même institution d'enseignement que ceux de troisième et ne peuvent pas suivre en général la même classe du collège au lycée. La seule mémoire de référence est alors celle fixée par les textes officiels, mais elle ne « fournit pas un ensemble de situations standard qui peuvent jouer le rôle d'une mémoire des conditions d'apprentissage » (Ibid.). Pour faire des reprises qui sont des rappels du collège, les professeurs ne peuvent prendre appui sur les causes des apprentissages qui ont permis une première rencontre avec les savoirs de leurs élèves. Le contexte qui a permis d'introduire des connaissances en tant que *décor didactique* (Ibid., page 21) ne peut être évoqué, et les professeurs de seconde sont donc privés de ce choix didactique pour une situation de reprise utilisant un rappel de connaissances du collège. Pourtant des gestes professionnels de reprise sont à la charge des professeurs qui ne peuvent compter uniquement sur les souvenirs des élèves comme le souligne Brousseau (1998b) : « Transformer les souvenirs en connaissances mobilisables est une opération didactique et cognitive mais pas seulement un acte individuel de mémorisation. L'organisation de la *mémoire didactique* fait partie d'une gestion plus générale du temps didactique. » (p. 323)

2.5.1.2 La notion de mémoire didactique par Matheron

La recherche présentée précédemment sur la *mémoire didactique* de l'enseignant a été *reprise* par Matheron (2000) dans son travail de recherche en thèse sur les différents types de mémoire. Dans ce travail, il réalise « une étude didactique de la mémoire dans l'enseignement des mathématiques ». Il mentionne notamment des résultats d'un questionnaire donné à une quarantaine de professeurs de seconde qui laisse apparaître : « une connaissance professionnelle et pratique d'un certain type de mémoire rencontré lors de l'enseignement des mathématiques ». En particulier, l'un des aspects repéré par Matheron relatif aux représentations mentales de ces enseignants concerne le passage du seuil entre collège et lycée :

> Le passage de l'élève dans la classe supérieure garantit qu'il se souviendra des notions et techniques enseignées dans la classe de niveau inférieur, et que le professeur sera en droit de lui demander de les mobiliser. Il résulte de ce dernier point que le passage d'une classe à la classe de niveau supérieur est interprété, à travers le prisme du contrat didactique, comme garantissant, grosso modo, une certaine homogénéité des connaissances pour les élèves d'une même classe à un niveau donné du cursus scolaire. Cette clause du contrat se traduit par le présupposé d'une mémoire collective commune des élèves au sujet des connaissances relatives au niveau inférieur, et ce malgré des histoires didactiques personnelles différentes (Matheron, 2000).

Le professeur qui enseigne en début de seconde se trouve dans une situation particulière. Il est privé de la *mémoire didactique* des situations du collège qui ont permis la construction des premières connaissances du numérique. En conséquence il est possible qu'il soit amené à présupposer une mémoire collective des élèves assez homogène qui est le socle de l'ancien à articuler avec le nouveau. Ce professeur peut demander à ses élèves de seconde de se souvenir de leurs connaissances du collège, c'est le cas pour Clotilde[1] qui déclare lors d'un entretien que ses élèves ont des souvenirs qui reviennent facilement. Il est probable que cette demande corresponde à l'une des conceptions de la mémoire définies par Matheron, celle qui est comprise comme étant une propriété interne du sujet, et qui est appréhendée sous son aspect psychologique.

Matheron (2000) définit différentes mémoires, et s'il reconnaît l'existence de cette mémoire privée d'un individu qui va de pair avec la répétition et la restitution, il prend en compte d'autres types de mémoire dans un cadre institutionnel :

- *la mémoire discursive* : elle se dit, se raconte, elle permet la restitution des souvenirs ;
- *la mémoire sémantique* : vue comme la question du sens des pratiques, elle associe un sens à un outil dans un contexte donné, elle fait sens pour celui qui connaît l'usage de l'outil ;
- *la mémoire pratique* : elle permet à une personne qui appartient à une institution de s'assujettir aux pratiques de l'institution. Elle utilise des outils, des ostensifs eux-mêmes porteurs d'une mémoire. C'est une propriété des personnes qui possèdent une mémoire pour des gestes antérieurement appris ;
- *la mémoire ostensive* : elle est donnée à voir à d'autres par une institution ou par un individu. C'est un produit institutionnel des pratiques, qui peut être gestuel, langagier, graphique…

A la dimension psychologique de la mémoire privée d'un individu, s'ajoute donc une dimension sociale d'un sujet par rapport à des institutions. Les souvenirs du sujet appartiennent alors à l'ensemble des pensées communes du groupe. Ainsi l'individu peut se replacer « au point de vue du groupe », c'est-à-dire que le sujet mobilise sa mémoire personnelle pour des pratiques d'une institution.

2.5.1.3 Les situations de rappel au sens de Perrin-Glorian

En lien avec son travail de définition de la mémoire, Matheron examine les *situations de rappel* définies par Perrin-Glorian (1992) dans sa thèse. Ces situations, telles qu'elles sont décrites, supposent que le professeur a enseigné lui-même à ses élèves le thème mathématique concerné. Cela l'autorise à demander à des élèves de rappeler en les évoquant des situations travaillées dans des séances antérieures. Perrin-Glorian précise bien que pour ces situations de rappel :

---

[1]Clotilde et Mathieu sont les deux professeurs qui ont accepté la présence du chercheur dans leur classe.

> Il ne s'agit pas de révision ni de rappel par le maître de ce qui a été fait, il s'agit plutôt pour les élèves de se rappeler une ou plusieurs situations déjà traitées dans des séances précédentes sur un même thème, avec un peu de recul donc, de faire un retour par la pensée et la parole sur ces séances.

Cette situation didactique permet d'atteindre différents objectifs, variables selon les élèves :

- homogénéiser la classe en permettant à tous de reprendre à leur compte ce qu'ils n'avaient peut être pas trouvé ;
- avancer dans la formulation ;
- dépersonnaliser et pré-décontextualiser les objets de savoir ;
- permettre à certains élèves de se replacer au point de vue du groupe classe.

Pour que des situations de rappels puissent exister, cela suppose que l'enseignant ait vécu avec ses élèves les situations antérieures qui ont permis l'émergence des connaissances en cours d'apprentissage. Ce contexte n'est pas possible dans le cas des enseignements réalisés au début de l'année de seconde, en conséquence les reprises du numérique au moment de la *reprise scolaire* ne peuvent pas permettre aux enseignants l'articulation de l'ancien vu au collège avec le nouveau du lycée par des situations de rappel au sens de Perrin-Glorian.

Mais que se passe-t-il ensuite après le début de l'année ? La situation devient différente, la *mémoire didactique* permet des situations de rappel, ainsi que des moments de tissage entre différentes rencontres avec les connaissances visées. Comment les enseignants mettent-ils cela en œuvre, par quels gestes professionnels ? Des éléments des travaux de Perrin-Glorian sont intéressants pour expliciter les processus d'apprentissage lors des situations de rappel. Je reprends en particulier l'idée d'une *dévolution après coup* possible pour certains élèves, ainsi que celle de *l'institutionnalisation* qui consiste à :

> […] considérer l'institutionnalisation comme un processus qui se déroule tout au long de l'enseignement, un moteur de l'avancement du contrat didactique et non comme une phase en fin de processus où le maître fait son cours. […] Nous pensons donc que, pour certains élèves au moins, l'institutionnalisation ne peut se faire que de façon très progressive avec de nombreux cycles contextualisation – décontextualisation, ce qui conduit à distinguer des étapes dans l'institutionnalisation. (1992)

La situation de rappel au sens de Perrin-Glorian donne donc un exemple de situation de reprise dans le cas de reprise de notions déjà rencontrées auparavant dans la même année scolaire. Ce cas entrera dans la description des différents cas possibles de situations de reprise du numérique en seconde.

2.5.1.4 Les situations nildidactiques

Une situation de reprise sans lien avec du nouveau peut prendre la forme d'une situation nildidactique définie par Margolinas (2004) pour la distinguer d'une situation adidactique. Voici comment elle explicite la différence entre ces deux situations :

> Dans le modèle que je propose [celui du milieu], ces situations [nildidactiques] ne mettent en jeu que deux niveaux de la structuration du milieu : le niveau -3, dans lequel l'interaction avec le milieu n'implique que des connaissances naturalisées, le niveau -2, dans lequel l'interaction avec le milieu n'implique que des connaissances stables, réactualisées par la situation. Dans la

> définition que j'ai donnée de situation didactique, un critère n'est pas rempli ici, l'existence d'un savoir non encore institué. C'est pourquoi je ne considère pas ces situations comme adidactiques (p. 99).

La fonction de ce type de situations peut être d'actualiser des connaissances déjà institutionnalisées. Ces situations nildidactiques donnent à l'élève une part d'autonomie qui ne peut être confondue avec la posture de l'élève dans une situation adidactique. Elles peuvent s'apparenter à une répétition dans laquelle l'autonomie signe la faculté de mimétisme et non pas un processus d'apprentissage par adaptation.

2.5.2 L'évolution du statut des connaissances

2.5.2.1 Le rôle particulier de l'institutionnalisation

Lors du processus d'institutionnalisation, l'enseignant gère l'évolution du statut des connaissances. Je fais l'hypothèse que dans la nouvelle mise en scène au lycée de connaissances anciennes du collège, l'enseignant a, ou peut avoir, pour objectif une homogénéisation de ces connaissances sous la forme de *savoirs canoniques*, comme les désigne Brousseau (1998a) :

> Les connaissances canoniquement constituées sont celles qui sont intelligibles pour les autres, partagées, conformes à la volonté didactique de la société, celles dont l'intérêt est garanti par l'histoire et par la culture et qui seront réutilisées par la suite. Seule l'intervention didactique du professeur permet de repérer ces connaissances canoniques dans ce qui a été conçu par l'élève ou par les élèves dans les situations autonomes. Ce statut de connaissance institutionnalisée ne peut surgir des situations où l'intention didactique est dissimulée à l'élève. (p. 20)

Ces savoirs canoniques nécessaires dans l'activité mathématique vont régler et justifier les savoir-faire. Ils sont à rapprocher des éléments technologiques et théoriques des praxéologies mathématiques au sens de Chevallard.

Dans la modélisation des situations de rappel par Perrin-Glorian, j'ai souligné précédemment que deux concepts sont essentiels à savoir ceux de dévolution et d'institutionnalisation. Ce dernier concept est important dans la recherche que je mène ; en effet une observation particulière est centrée sur les organisations mathématiques et sur l'institutionnalisation. Cette situation est appréhendée soit comme un processus d'enseignement, soit comme un moment permettant éventuellement la constitution de traces écrites utilisables pour l'étude par les élèves.

2.5.2.2 Les différents statuts des connaissances

Un retour sur la théorie des situations didactiques de Brousseau me parait nécessaire pour souligner encore le rôle de l'institutionnalisation et le statut des notions visées dans le curriculum réel. Brousseau (1998a) souligne :

> […] la nécessité de phases d'institutionnalisation qui donnent à certaines connaissances le statut culturel indispensable de "savoirs". De même que les théorèmes en actes s'évanouissent bientôt en l'absence de formulation et de preuve, les connaissances privées et même publiques restent contextualisées et vont disparaître dans le flot des souvenirs quotidiens si elles ne sont pas replacées dans un répertoire spécial dont la culture et la société affirment l'importance et

> l'usage. Le fonctionnement des connaissances est différent de celui des savoirs, aussi bien dans les rapports entre les institutions que dans l'activité isolée des sujets. Les " savoirs" sont les moyens sociaux et culturels d'identification, d'organisation, de validation et d'emploi des connaissances. (p. 9)

Le statut des notions qui sont les enjeux de l'étude est variable, la différence entre connaissances et savoirs est à ce titre intéressante. Une caractérisation encore plus fine a été réalisée par Brousseau et Centeno (1991), ils classent les différents statuts manipulés par l'enseignant selon 5 catégories[1] :

- *décor didactique*, c'est une connaissance implicite dans la situation ou qui est associée à un problème, seul le professeur connaît les savoirs relatifs aux questions posées aux élèves ;
- *modèle implicite*, l'élève utilise une connaissance dont il a besoin dans la situation mais n'en a pas conscience ;
- *connaissance formulée,* la connaissance est rendue explicite grâce à un langage qui permet de la formuler et de la faire formuler par les élèves ;
- *connaissance structurée*, la connaissance devient un objet en rapport avec d'autres connaissances, elle est validée et devient une connaissance mathématique ;
- *connaissance institutionnalisée,* la connaissance est considérée comme acquise et va pouvoir être utilisée à son tour comme outil.

La transformation des connaissances selon ces différents statuts se réalise notamment selon un processus de conversion didactique géré par l'enseignant. Ce processus est décrit ainsi par Brousseau et Centeno (1991) en l'empruntant à Chevallard :

> La situation didactique agit comme cause (ou ensemble de causes) de l'apprentissage de l'élève, (par des conditions qu'il n'a ni choisies ni même repérées), elle lui procure une connaissance ou même un savoir contextualisé et non institutionnalisé.
>
> Pour intégrer cette connaissance comme savoir, l'élève doit la placer par rapport à son système propre de savoir (qui est peut être conforme à la culture) et par rapport aux savoirs institutionnalisés. Il lui faut donc la traduction d'une filiation ou d'une genèse légitime de ce savoir. Il doit donc identifier des " raisons" (par exemple une démonstration…) pour accepter cette connaissance qui va se substituer aux causes. Il y a donc conversion d'un phénomène psychologique en un phénomène épistémologique (au sens de Chevallard).

Dans un texte de 2002, Brousseau reprend les 5 statuts précédents en faisant une hiérarchie en 5 niveaux des formes de rapports à une notion de la part de l'élève :

[1] Seules les expressions en italique sont celles des auteurs.

- *niveau P : présence de la notion*, c'est le niveau de décision, l'élève peut accomplir une tâche dans une situation où les objets et les relations mathématiques caractéristiques de la notion sont présents, mais il n'a pas besoin de les connaître ;
- *niveau U : usage implicite de la notion,* l'élève reconnaît implicitement la notion, à ce niveau il met en œuvre des schèmes, des concepts ou des théorèmes en acte ;
- *niveau F : formulation,* l'élève peut formuler la notion dans différents langages pour nommer, communiquer, interpréter. Il peut en particulier effectuer des messages ;
- *niveau V : validation*, la notion est mise à l'épreuve, elle est validée en relation avec d'autres savoirs, elle est définie. L'élève en particulier par des échanges avec d'autres, construit des concepts et des théories ;
- *niveau R : référence,* l'élève sait que la notion qu'il a identifiée personnellement appartient à un répertoire culturel, et que c'est un savoir.

Les définitions de 1991 et de 2002 sont complémentaires, c'est la raison pour laquelle j'ai choisi de les conserver toutes les deux. Bien que leurs différences ne soient pas très claires, je note cependant qu'en 1991 il s'agit de qualifier essentiellement les contenus de la situation et par conséquent le statut des connaissances ; alors qu'en 2002 le point de vue change et ce qui est regardé c'est davantage la relation de l'élève avec la connaissance, c'est-à-dire son rapport personnel avec elle. C'est l'évolution des théories didactiques qui est visible à travers ces deux points de vue avec une prise en compte de l'élève qui a évolué.

Brousseau (2002) souligne la dépendance de ces différents niveaux et la responsabilité du professeur pour mener à bien les conversions de statuts notamment lors de situations de *reprises* :

> Les connaissances et les apprentissages d'un certain niveau sont soutenus et améliorés par les connaissances qui se développent à d'autres niveaux. Il n'y a pas de dépendance étroite ni de hiérarchie générale entre ces différentes formes d'acquisition. Mais par exemple une connaissance implicite (de niveau U) aura du mal à persister et à s'étendre en dehors des situations qui la produisent si elle n'est pas identifiée et formulée (F) lors de ses reprises, que la validation ne peut pas se faire sans formulation et qu'elle ne sera pas retenue sans une institutionnalisation.

L'importance de l'institutionnalisation et de la gestion par le professeur de la conversion des différents statuts des connaissances est encore une fois affirmée. Je souligne l'emploi du terme de *reprises* par Brousseau et les conditions qu'il précise pour assurer la transformation de la connaissance jusqu'au statut de savoir de référence. Lors des reprises du numérique tout au long de la classe de seconde, ce critère, relatif au statut des connaissances mobilisées effectivement, sera à prendre en compte. Il sera repris en lien avec l'hypothèse 3 sur l'efficacité des apprentissages que je décrirai plus loin.

2.5.2.3 La fonction de l'institutionnalisation ou la fin du chantier de construction

Je reprends une métaphore utilisée par Bosch et Chevallard (1999) celle de l'échafaudage. L'organisation mathématique est ce qui reste quand l'échafaudage élaboré dans la situation d'enseignement est enlevé et qu'il faut que les élèves prennent conscience de ce qui est à retenir comme connaissances instituées et comme savoirs de référence. Voilà ce que Bosch et Chevallard (Ibid.) explicitent à ce propos :

> On peut montrer, plus généralement, que la « microgenèse » individuelle d'une technique pour résoudre un type de problèmes donné suppose, dans un premier temps, une prolifération ostensive importante : la technique se construit sur une base d'objets empruntés à des univers divers de l'activité humaine et en recourant à de nombreux points d'appui ostensifs – discursifs, gestuels, graphiques, écrits. Mais l'évolution de l'activité – qui aboutira, le cas échéant, à une technique stabilisée – conduit ensuite à une réduction ostensive de plus en plus évidente, la mise en œuvre de la technique tendant à mettre au rebut tout l'échafaudage ostensif qui en avait permis la construction.

Chevallard (1998) précise en se situant encore dans cette analogie du chantier d'une construction :

> Les autres moments de l'étude [autres que celui de l'institutionnalisation], en effet, ne livrent encore qu'une organisation mathématique *en chantier*, où l'ouvrage fait, voulu pour durer, se mêle nécessairement aux « reliefs » d'une construction élaborée par essais, retouches, arrêts et reprises. Or ce qui mérite de durer, ce qui vaut d'être pérennisé ne s'impose nullement de soi-même, à coup sûr. Tel exemple, dont l'examen a bien servi le projet de construction en révélant des perspectives *a priori* insoupçonnées, tel état de telle technique, que l'on aura mis longtemps à dépasser, tel théorème, en lui-même insuffisant mais qui fut le premier résultat *démontré*, seront-ils intégrés à l'organisation mathématique définitive, ou bien les écartera-t-on ? Le moment de l'institutionnalisation, c'est donc d'abord celui où, dans la construction « brute » qui, peu à peu, a émergé de l'étude, vont être séparés, par un mouvement qui engage l'avenir, le « mathématiquement nécessaire », qui sera conservé, et le « mathématiquement contingent », qui, bientôt, sera oublié. En ce sous-moment d'*officialisation*, une praxéologie mathématique désormais coupée de l'histoire singulière qui l'a portée à l'existence fait son entrée dans la culture de l'institution qui en a hébergé la genèse.

Chevallard souligne dans cette longue citation un type de tâches qui incombe au professeur : faire le tri entre ce qui n'était qu'un élément de l'échafaudage, et ce qui est la construction achevée (le plus souvent dans un état intermédiaire avant une prochaine reprise). Il reprend une distinction inlassablement répétée par Brousseau (1998b) entre le « mathématiquement nécessaire » et le « mathématiquement contingent ». Le nécessaire est ce qui est et qui ne peut pas ne pas être, alors que le contingent est ce qu'on peut observer mais qu'on aurait pu ne pas observer. Ce travail de tri fait écho à l'opposition entre causes et raisons soulignée par Annie Bessot et Michèle Artigue à l'école d'été 2009 de Clermont-Ferrand : le professeur organise son cours en des causes du savoir, ces causes sont transformées en raisons mathématiques.

2.5.3 La notion de reprise décrite par Guy Brousseau

Brousseau (1998a) s'est intéressé aux moments de reprise et dans un texte de 1998 il définit différents « contrats de reprise des savoirs anciens ». Il distingue :

- *la révélation*, contrat dans lequel le savoir ancien est péjoré ou rejeté en faveur d'un savoir nouveau ;

- *le rappel*, en reprenant le concept de situation de rappel défini par Perrin-Glorian dont il dit qu'il est « une situation didactique particulière qui est un des instruments principaux de l'institutionnalisation » ;
- *la reprise* qui correspond à un remaniement du savoir ancien correspondant à une modification de sa forme, ou de sa constitution même, pouvant aller jusqu'au rejet : « la forme ancienne est dans ce cas ouvertement mise en cause, dans sa forme, elle fait l'objet d'une formulation, ou d'une traduction, ou dans sa constitution même, elle est alors l'objet au moins d'un commentaire, souvent d'une explication, d'une remise en cause, d'une critique, ou même d'un rejet. La reprise place le savoir ancien dans une nouvelle dialectique. »

Pour Brousseau, le terme de reprise est en lien avec celui de remaniement plus ou moins grand de la notion elle-même, ou de remaniement éventuel de la genèse des savoirs.

2.5.4 La notion de reprise décrite par Chevallard

Dans un texte écrit dans le cadre de la formation initiale des professeurs de collège et de lycée, Chevallard (2002) parle également de la *reprise d'étude :* « Lorsque les élèves arrivent dans la classe, le thème θ ne leur est pas inconnu : le problème didactique posé au professeur est alors celui, non du recommencement, mais de la reprise et de la poursuite de l'étude du thème. » Je fais une réorganisation du texte qu'il développe pour décrire ce geste de reprise d'étude relativement au type de tâches suivant : un thème ayant déjà été en partie étudié dans les classes antérieures, le professeur doit diriger une reprise de l'étude du thème qui est à nouveau un enjeu didactique.

Une technique se dégage des propositions de Chevallard (Ibid.) :

- mettre en évidence le nouveau dans l'étude du thème, ce qui constitue donc véritablement l'enjeu didactique. Chevallard dit qu'il s'agit là d'un élément crucial ;
- ne pas reprendre totalement l'étude du thème et s'efforcer de faire apparaître le nouveau à étudier par rapport à l'ancien ;
- bien différencier ce moment d'enseignement de reprise d'étude d'un rappel qui viserait la remémoration collective de faits déjà rencontrés ;
- repérer le tracé de la frontière entre les classes successives relativement au thème ;
- articuler l'étude qui doit être impulsée dans la classe avec le travail déjà réalisé dans la classe précédente ;
- déterminer les besoins didactiques des élèves relativement au thème d'étude en utilisant par exemple la technique du test d'entrée dans le thème individuellement et par écrit ;
- mettre en place un travail adapté aux besoins de certains élèves pour assurer une maîtrise suffisante avant de relancer le temps collectif d'étude du thème ;
- utiliser les systèmes didactiques auxiliaires pour répondre aux besoins de ces élèves.

Les éléments technologico-théoriques avancés par Chevallard pour justifier cette technique didactique sont les suivants :

- un argument de conformité institutionnelle : ce qui est officiellement préconisé c'est la poursuite de l'approche du thème par son activation dans le cadre de l'étude d'autres thèmes ; ce qui est officiellement proscrit ce sont les révisions systématiques ;
- du côté du professeur, il est de sa responsabilité de faire avancer le temps didactique, la reprise d'étude n'est pas un recommencement, mais c'est une poursuite de l'étude du thème ;
- du côté des élèves, ils attendent du professeur d'assumer la responsabilité précédente et d'éviter des répétitions vécues passivement ; sinon ils risquent d'exprimer leur désaccord par des remarques du style « on l'a déjà fait ».

Chevallard souligne des contraintes qui peuvent peser sur les enseignants et les conduire à se perdre dans « les errements des révisions systématiques » :

- la volonté de rassembler la classe, surtout en seconde où les élèves arrivent de collèges différents ;
- le désir plus ou moins conscient de captation des élèves, en leur faisant sentir que « la vie commence avec moi » ;
- la peur d'avoir à assumer le moment où il faut créer du temps didactique, en se rassurant dans des temps de révisions pendant lesquels le professeur travaille sur du temps didactique créé par d'autres.

2.5.5 Définition de travail de la notion de reprise

À la lumière des travaux des auteurs précédents, je vais donner une définition de la notion de *reprise*. L'objet *reprise* peut être considéré selon différents points de vue, à l'échelle de l'année scolaire, et à l'échelle de la séance de classe ; d'un point de vue générique et d'un point de vue spécifique des mathématiques.

À l'échelle de l'année scolaire, c'est une période temporelle, c'est la reprise du temps d'enseignement après les vacances et après le collège. Je l'ai appelée la *reprise scolaire*. Cette reprise s'inscrit en moyenne entre la date officielle de la rentrée scolaire et les vacances de Toussaint. Cette dernière borne temporelle a été fixée en fonction de déclarations d'enseignants lors d'entretiens. Le point de vue sur les reprises est alors générique et il est en grande partie caractérisé par des contraintes au niveau de l'École. Les questions posées dans cette recherche pourraient en conséquence être relatives à toute discipline d'enseignement. À cette même échelle de l'année scolaire, la *reprise scolaire* est également regardée plus spécifiquement par rapport à une discipline donnée. La question se pose alors de savoir quelle est la planification de l'enseignement dans cette discipline en ce début d'année scolaire. Plus précisément pour cette recherche : quel est le début de la progression de l'enseignement des mathématiques pour la *reprise scolaire* ? Quelle place et quel rôle sont donnés au numérique dans cette progression ?

Un deuxième point de vue à l'échelle de toute l'année scolaire me conduit à m'intéresser aux reprises du numérique dans tous les domaines où il apparaît tout au long de l'année soit comme enseignement explicitement visé, soit comme connaissances au service de domaines mathématiques autres que le domaine numérique. Un dernier point de vue consiste à différencier des reprises du numérique selon qu'il s'agit ou non d'une première rencontre dans le cadre du programme de seconde.

Le terme de reprise a un sens plus large que celui utilisé par Brousseau qui suppose un remaniement de la notion ; et également plus large que celui utilisé par Chevallard qui suppose lui aussi un nouvel enjeu didactique lié à la reprise de l'étude. La dénomination *reprise du numérique*, qui sera abrégée en RDN, pourra qualifier dans ce travail deux grandes catégories décrites ci-dessous selon que la première rencontre avec la connaissance numérique a eu lieu au collège ou non :

- soit des connaissances ont déjà été rencontrées en collège (exemple : règle de la somme de deux quotients) et leur reprise peut aller des révisions systématiques jusqu'à une avancée du temps didactique en reliant l'ancien à du nouveau (par exemple nécessité de l'outil somme de deux quotients dans le cadre fonctionnel) ;
- soit des connaissances sont nouvelles en seconde (exemple : savoir démontrer qu'un nombre est irrationnel) et une reprise est possible dans le même contexte ou dans un autre que celui de la première rencontre (exemple : dans le domaine de la trigonométrie avec les valeurs des sinus et des cosinus de certains angles[1]).

Pour la période particulière de la *reprise scolaire*, je suppose que le domaine numérique sera nécessairement abordé. En effet l'activité mathématique en seconde ne peut se concevoir sans une maîtrise suffisante de ce domaine, et de ce point de vue la question générique des reprises a certainement une importance particulière dans le cas spécifique du domaine numérique. Je postule donc que de façon incontournable, ces reprises du numérique vont nécessairement exister lors de la *reprise scolaire* (cela sera confirmé par mes observations) sous l'une des formes suivantes :

- soit ces RDN seront des révisions systématiques des connaissances numériques du collège ;
- soit ces RDN seront en lien avec l'enseignement de thèmes du domaine du programme de seconde « Calcul et fonctions » ;
- soit elles apparaîtront comme besoins nécessaires pour d'autres domaines d'enseignement de seconde. Dans ce cas il sera intéressant d'analyser s'il existe ou non une volonté consciente du professeur de créer un moment de poursuite de ces

[1] Ce cas fera l'objet d'une étude détaillée dans la section 9.

apprentissages du numérique sollicités comme outils nécessaires au service d'autres cadres.

Voici la définition que je propose de cette notion de reprise du numérique en seconde dans le cadre de ce travail :

> Lorsqu'un thème du numérique a déjà été en partie enseigné, soit au collège soit lors d'une rencontre précédente en seconde, j'appelle reprise du numérique le moment de l'enseignement où ce thème, ou bien des sujets liés à ce thème, interviennent de nouveau et sont actualisés dans des thèmes de l'enseignement de cette classe. La reprise se situe donc au moment d'une nouvelle mise en scène de savoirs déjà institutionnalisés auparavant.

2.5.6 Le rapport au nouveau dans la notion de reprise

L'étude des reprises peut se décliner selon une position sur un axe relatif aux notions visées et institutionnalisées. Cet axe a pour extrêmes :

- d'une part les révisions systématiques sans rencontre avec des connaissances nouvelles du programme de seconde, ce qui se traduit par des rappels ou des révisions ;
- d'autre part les reprises en lien avec des apprentissages de connaissances nouvelles.

Ce critère choisi pour caractériser les reprises est *le rapport au nouveau.* Il peut varier entre deux extrêmes : les révisions systématiques et des reprises qui présentent un nouvel enjeu d'étude.

Une forme d'enseignement qui favorise des reprises liées à du nouveau, pour des reprises de connaissances rencontrées pour la première fois soit au collège soit au lycée, est actuellement reconnue sous le terme *d'enseignement en spirale* (ou *enseignement spiralé*). Antoine, professeur expert membre de la noosphère[1], décrit ainsi cette technique d'enseignement au cours d'un entretien que j'ai eu avec lui en octobre 2004 :

> J'ouvre plein de tiroirs et on en referme un de temps en temps, on en ré-ouvre un de temps en temps. [...] Ces révisions systématiques lassent les élèves. Là tel que je travaille j'ai pas de lassitude. [...] Tu vois, je ne pourrais pas donner la façon dont j'enseigne je crois à un jeune stagiaire parce que j'ai une vue assez synoptique de ce que je veux faire et ça ne se

[1] Il a notamment fait partie de la commission Kahane.

> refermera que peut-être d'ici deux ou trois mois. Il y a plein de tiroirs ouverts en fait dans ma façon de faire en ce moment. Et je pense que ça serait pas très rassurant.

Antoine connaît bien les pratiques habituelles de ses collègues, qui sont des gestes du métier, des gestes routiniers non interrogés comme je le soulignais précédemment. Il oppose l'enseignement en spirale qu'il pratique avec la norme du métier concernant les reprises du numérique et de l'algébrique du début de l'année de seconde :

> C'est un chapitre délicat [la reprise du numérique et de l'algébrique], puisque tu sais que le gros défaut sur lequel on essaie de lutter c'est les révisions systématiques et tu as des mômes qui font des identités en veux tu en voilà puis de toute façon un mois après ils en ont une dans le problème ils ne la verront pas. On sait que ça sert pas à grand chose et puis ces révisions systématiques lassent les élèves.

3 Des hypothèses

Trois hypothèses avaient été élaborées et testées dans le cadre du travail de DEA, elles sont reprises dans le nouveau contexte de cette thèse mais elles nécessitent la prise en compte de certaines évolutions. Il s'agit donc d'une reprise en lien avec du nouveau ! Je précise les principaux changements de contexte :

- des données recueillies tout au long de l'année de seconde et non pas pendant une seule séance dans la période de la *reprise scolaire* ;
- un concept de reprise qui a été étendu ;
- une étude centrée essentiellement sur le domaine numérique, en laissant de côté le domaine algébrique (même si l'étude de certains types de tâches numériques m'amènera à m'intéresser à des objets algébriques) ;
- une analyse outillée par le *filtre du numérique* pour débusquer les connaissances de ce domaine.

En raison du changement de regard qui est porté sur toute l'année scolaire, une quatrième hypothèse est formulée et sera également mise à l'épreuve.

3.1 Première hypothèse H1

Une première hypothèse du travail de DEA était que les gestes de reprise sont des gestes très délicats. En effet les prescriptions des instructions officielles de 2002 pour les reprises des domaines numérique et algébrique en début de seconde définissent une position intenable pour la majorité des enseignants dans le réel de la classe. Cette hypothèse a été vérifiée dans les deux cas étudiés, elle apparaît toujours comme une hypothèse forte du travail. Elle va encore être travaillée pour prolonger la mise au jour des conditions et des contraintes à différents *niveaux de codétermination didactique* (au sens de Chevallard, Cf. annexe 11.2). Ce geste délicat de reprise va être étudié à travers ses apparitions, mais aussi à travers ses manques, ou ses évitements, sur toute l'année scolaire, dans tous les habitats possibles du curriculum de seconde. Le grain de description d'un geste de reprise est très variable :

- il peut être l'année scolaire dans le cas des diverses occurrences d'un même objet du numérique dans la progression annuelle ;
- il peut être également de l'ordre d'une séquence, d'une séance, voire de quelques minutes par exemple lorsqu'un outil du numérique est convoqué dans le cadre d'un autre domaine (exemple : la vérification de l'égalité de deux quotients dans un problème nécessitant l'emploi de la réciproque du théorème de Thalès).

Je rappelle la prescription des programmes qui recommande de ne pas faire de révisions systématiques. La recherche des raisons qui justifient ce choix de la noosphère est une piste de travail intéressante à explorer. Ainsi il existerait une logique institutionnelle à identifier pour la croiser avec une logique épistémologique dans le processus de transposition didactique (Chevallard, 1985). Il y aurait alors une logique de la transposition didactique à expliciter. L'institution organiserait la rencontre de la logique épistémologique et du temps institutionnel avec des implicites sur des articulations épistémologiques. L'affirmation des programmes sur le fait qu'il ne faut pas faire de révisions systématiques est à interroger : quels sont ses fondements ? Qu'est-ce qui est pris en compte par l'institution quand elle dit « ne pas faire de révision » ? Sur quoi se base-t-elle ? L'institution ne justifie pas cela, comme elle ne justifie rien de ses choix en général. Ne pas faire de révision est-ce pertinent ? Si le travail du DEA a montré que pour les enseignants la prescription officielle paraissait définir une position intenable, une question est à élucider, celle de savoir pour quelles raisons l'institution maintient cette prescription, quelle en est la logique ? Il est possible que les professeurs n'appréhenderaient pas ces raisons d'être implicites et qu'ils n'en soupçonneraient même pas l'existence alors qu'elles font partie des *savoirs pour enseigner*.

Cette logique institutionnelle se heurte à des normes du métier, à des conceptions des apprentissages de la part des professeurs. « On reprend bien les bases et après on y va » cette norme de la pratique des révisions systématiques, sur quoi repose-t-elle ? D'autres questions peuvent être soulevées : depuis quand les prescriptions officielles précisent qu'il ne faut pas faire de révisions systématiques ? Est-ce que cela a été l'inverse ?

J'ai trouvé une esquisse de réponse dans un document (Cf. Voir en annexe 11.5) qui donne la répartition des matières d'enseignement des écoles normales de la fin du XIX^{e} siècle figurant dans la circulaire du 2 juillet 1866. Le numérique se situe dans la matière intitulée « Calcul : système légal des poids et mesure. Arithmétique appliquée aux opérations pratiques. Tenue des livres. » La première année contient les secteurs « Nombres entiers. Fractions. Système métrique. ». La deuxième année comprend explicitement une partie intitulée « Révision du système métrique et des fractions ». La troisième année est composée également d'une très grande part de révisions : « Révision et compléments du cours d'arithmétique appliquée ». Une étude historique serait intéressante à développer sur la conception des programmes et leur évolution. Est-ce que cette pratique des révisions comme parties explicites d'un programme d'enseignement a duré longtemps ? Est-ce qu'il y aurait encore actuellement un héritage de ces pratiques ancrées dans la conviction de nombreux professeurs qui commencent leur progression par des révisions systématiques ? Ces questions sont simplement ouvertes dans le cadre de cette recherche et je ne vais pas chercher à y répondre.

En revenant au contexte de ma recherche et en considérant l'unité de la séance des questions différentes se posent pour analyser les gestes professionnels de reprise : est-ce que ce sont des gestes spécifiques ? Quelles sont leurs caractéristiques ? Pourquoi sont-ils des gestes délicats ? Comment le professeur va-t-il permettre aux élèves de reconstituer un répertoire de connaissances et de savoirs déjà rencontrés en collège de manière solide ?

Cette première hypothèse peut s'énoncer ainsi :

Les gestes professionnels de reprise du numérique sont des gestes très délicats pour les professeurs de seconde car deux logiques différentes se heurtent à leur sujet : la logique des concepteurs des programmes, jugée irréaliste par les professeurs, et la logique des professeurs confrontés au réel de leur classe, logique qui se traduit dans des normes du métier.

3.2 Deuxième hypothèse H2

Une deuxième hypothèse du DEA était relative à la variabilité des gestes de reprise en fonction des enseignants. Le travail de thèse vise à tester cette hypothèse en comparant deux enseignants relativement aux reprises du numérique et devrait aboutir à l'établissement de « portraits », amorce d'une typologie qui pourrait être complétée dans un travail ultérieur. Cette hypothèse est déplacée essentiellement vers l'étude de la variabilité des gestes de reprise pour un même enseignant sur toute l'année scolaire. Les questions deviennent alors : quelle est cette variabilité en fonction des moments de l'année, en fonction des domaines étudiés, en fonction des moments de l'étude ? Les *gestes professionnels* lors de la *reprise scolaire* sont-ils les mêmes lors des réinvestissements du numérique en cours d'année ? Les gestes de reprise du numérique sont-ils spécifiques, sont-ils différents de gestes professionnels d'enseignement sans reprise pour des objets du numérique nouveaux en seconde ? Une description de l'organisation mathématique annuelle globale de l'enseignement du numérique est également un objectif du travail avec le souci de comparer les gestes d'enseignement.

Cette deuxième hypothèse peut s'énoncer ainsi :

Pour un même enseignant les gestes professionnels d'enseignement du numérique sont variables en fonction de divers paramètres qui peuvent être en particulier la période d'enseignement, le caractère ancien ou nouveau des objets enseignés. Cette variabilité pour un enseignant donné devrait se retrouver en comparant deux enseignants.

3.3 Troisième hypothèse H3

Une troisième hypothèse était relative à la complétude des praxéologies. Elle postulait que l'organisation mathématique construite au terme d'un processus de reprise, comportait souvent des lacunes relatives aux quadruplets (type de tâches, technique, technologie, théorie). Cette hypothèse pose donc la question de l'institutionnalisation des connaissances de nouveau rencontrées et du statut de ces connaissances. Ont-elles acquis au terme de différents moments de l'enseignement un statut de savoir de référence ou de connaissance institutionnalisée au sens de Brousseau (Cf. section 2.5.2 p. 24) ? Les élèves ont-ils la possibilité d'étayer les manipulations de signes numériques par des arguments mathématiques ? Connaissent-ils les éléments technologiques ou théoriques mathématiques nécessaires pour justifier ces manipulations ? Cela ne signifie évidemment pas que les élèves auront à justifier explicitement toutes leurs actions dans le domaine numérique, ce qui rendrait l'activité impossible dans ce domaine. Par ailleurs cela serait contraire à une évolution nécessaire pour progresser dans la pratique des mathématiques à savoir la gestion de l'implicite qui varie en fonction du niveau d'étude et en fonction de la personne qui étudie.

Ainsi la question de la complétude est plutôt de savoir si l'institutionnalisation est aboutie du point de vue épistémologique et si les élèves ont accès à un répertoire des savoirs canoniques qui ont été revisités. Elle pose la question de savoir comment le professeur organise son enseignement pour que les praxéologies mathématiques normalement déjà rencontrées au collège soient de nouveau disponibles pour les élèves. Cette question est étendue aux praxéologies nouvelles à construire en seconde, l'étude de leur complétude est également un objectif du travail.

La comparaison entre des praxéologies mathématiques faisant partie des mathématiques à enseigner au collège, et des praxéologies mathématiques nouvelles du programme de seconde, est à développer. Elle concerne d'ailleurs l'hypothèse précédente relative à la variabilité des gestes de reprise. Cependant au niveau de la complétude des praxéologies institutionnalisées, et de la mise à la disposition des élèves de tous les éléments mathématiques épistémologiquement nécessaires, un autre regard est posé. Cette hypothèse revient à se demander quel est le rapport personnel à l'activité mathématique qui risque de s'élaborer pour les élèves en lien avec les choix d'enseignement des professeurs. Pour exemple, le professeur dont il est question dans l'introduction (Cf. p. 6) explique « on décompose la fraction » sans aucune référence à la règle d'addition des quotients qui légitimerait cette transformation. Ainsi les connaissances qui auraient pu être mobilisées explicitement ne vivent que comme *décor didactique*. Si ce type de discours technologique est rituel pour ce professeur (ce que je ne sais pas), les élèves risquent de ne pas repérer les éléments théoriques justifiant ce genre de transformation d'écriture. Du même coup c'est la spécificité même de l'activité mathématique qui risque de ne pas être perçue par les élèves.

Ce terme de complétude a été utilisé par Bosch et al. (2004) pour caractériser les organisations mathématiques locales (OML). Les auteurs qualifient leur recherche de *programme épistémologique* (différencié de programme cognitif) ce qui signifie que le problème didactique est dépersonnalisé, et que c'est l'étude de l'activité mathématique institutionnalisée qui est mise au premier plan. C'est ce point de vue que je développe également avec le critère de la complétude des praxéologies ponctuelles (OMP). En revanche Bosch et al. (Ibid.) s'intéressent à un ensemble de praxéologies ponctuelles qui forment une praxéologie mathématique locale. Ils décrivent le degré de complétude d'une OML de façon beaucoup plus large et ambitieuse que je ne le fais dans cette étude en restreignant la complétude à l'analyse de la structure des OMP. La complétude des OMP est à rapprocher de l'un des indicateurs du degré de complétude des OML décrit par Bosch et al. (ils ont défini sept indicateurs). C'est l'indicateur désigné par OML5 qui stipule qu'une OML est d'autant plus complète qu'elle permet de développer un discours technologique plus fonctionnel et qui facilite l'interprétation du fonctionnement d'une technique et de son résultat. Cela suppose qu'il existe dans l'OML des éléments technologiques pour mener à bien cette tâche d'interprétation.

Cette troisième hypothèse peut s'énoncer ainsi :

Les praxéologies mathématiques à la disposition des élèves au terme d'un processus d'institutionnalisation sont souvent incomplètes. Cette incomplétude est accentuée dans le cas de reprises de savoirs du collège, mais elle existe également pour des objets nouveaux de seconde. C'est le rapport personnel des élèves à l'activité mathématique qui risque alors d'être non conforme aux nécessités épistémologiques de la discipline.

3.4 Quatrième hypothèse H4

Finalement ce sont toutes les occurrences du numérique qui sont analysées dans ce travail avec l'ambition de donner une vision panoramique de l'enseignement du numérique sur toute l'année scolaire. Dans cette vision d'ensemble les reprises sont repérées avec leur spécificité, que ce soient les reprises de connaissances du collège, ou de connaissances de seconde. Dans cette histoire annuelle du numérique, je fais l'hypothèse que les professeurs vont souvent ne pas parvenir à repérer des occasions intéressantes de reprise qui auraient pu alimenter le processus de chronogenèse. C'est cette histoire en creux des occasions manquées que je vais décrire également, alors qu'une prise de conscience par les professeurs de l'existence de nouvelles situations pour des RDN permettrait des apprentissages plus solides. Cette cécité des enseignants peut être un symptôme d'un *problème de la profession* qui doit donc être clairement identifié pour chercher à lui donner des réponses.

Cette quatrième hypothèse peut s'énoncer ainsi :

L'enseignement du numérique en classe de seconde doit être considéré comme un problème posé à la profession de professeur de mathématiques. Ce problème se traduit notamment par de nombreux rendez-vous manqués avec des possibilités de reprises sous la forme de poursuites d'étude qui auraient été nécessaires pour construire des apprentissages solides.

3.5 Récapitulatif des quatre hypothèses

Je résume ci-dessous ces quatre hypothèses en les repérant par une abréviation et un titre.

H1 : Le geste professionnel de reprise, un geste très délicat.

Les gestes professionnels de reprise du numérique sont des gestes très délicats pour les professeurs de seconde car deux logiques différentes se heurtent à leur sujet. La logique des concepteurs des programmes, jugée irréaliste par les professeurs, et la logique des professeurs confrontés au réel de leur classe, logique qui se traduit dans des normes du métier.

H2 : La variabilité relative à l'enseignement du numérique

Pour un même enseignant les gestes professionnels d'enseignement du numérique sont variables en fonction de divers paramètres qui peuvent être en particulier la période d'enseignement, le caractère ancien ou nouveau des objets enseignés. Cette variabilité pour un enseignant donné devrait se retrouver en comparant deux enseignants.

H3 : L'incomplétude des praxéologies

Les praxéologies mathématiques à la disposition des élèves au terme d'un processus d'institutionnalisation sont souvent incomplètes. Cette incomplétude est accentuée dans le cas de reprises de savoirs du collège, mais elle existe également pour des objets nouveaux de seconde. C'est le rapport personnel des élèves à l'activité mathématique qui risque alors d'être non conforme aux nécessités épistémologiques de la discipline.

H4 : Un problème de la profession

L'enseignement du numérique en classe de seconde doit être considéré comme un problème posé à la profession de professeur de mathématiques. Ce problème se traduit notamment par de nombreux rendez-vous manqués avec des possibilités de reprises sous la forme de poursuites d'étude qui auraient été nécessaires pour construire des apprentissages solides.

4 Méthodologie

Je commencerai dans cette partie par montrer comment le processus de transposition didactique (Chevallard, 1985) permet d'identifier des savoirs de différentes natures, ce qui sera représenté comme le paysage des savoirs. Je vais repérer dans cette carte des relations à explorer dans ce travail, elles situeront d'autres savoirs spécifiques pour enseigner. La recherche en cours est *une étude clinique*, ce que Chevallard (2008) explicite en disant qu'elle est fondée sur une *observation directe*, que ce soit des personnes (professeurs et élèves) ou des traces écrites du travail des classes concernées. Je présenterai les professeurs qui ont accepté cette entrée, évidemment intrusive, dans leurs classes de seconde.

Je décrirai comment se développera la recherche à partir des données recueillies grâce à une méthode globale d'analyse. Pour parvenir à un grain d'analyse plus fin, je décrirai des outils permettant de caractériser les praxéologies mathématiques. Il s'agit notamment du *filtre du numérique* que j'ai déjà présenté, ainsi que d'un ensemble de critères spécifiques des RDN. Je terminerai cet exposé sur la méthode par des précisions sur la conduite des entretiens avec le professeur et avec les élèves.

4.1 Identification des savoirs du domaine numérique

4.1.1 Le paysage des savoirs

La recherche devrait permettre d'identifier les reprises et les nouveautés du numérique en seconde ainsi que les différents domaines où ce numérique est sollicité : la géométrie vectorielle ou les fonctions par exemple. Je rappelle l'idée qui est de « traquer » le numérique ainsi que des questions relatives à cette investigation : comment le numérique est travaillé ailleurs dans d'autres domaines ? Comment fonctionne le numérique, comment les professeurs se servent des autres domaines pour continuer à enseigner le numérique ?

Des précisions sont nécessaires pour situer le statut de ces savoirs relatifs au numérique dont il sera question par la suite. Le schéma suivant est un outil méthodologique permettant de visualiser ces localisations et de montrer l'organisation des différentes composantes de la recherche du point de vue du savoir. Il utilise les distinctions concernant les savoirs énoncées par Chevallard dans le processus de transposition didactique (1985).

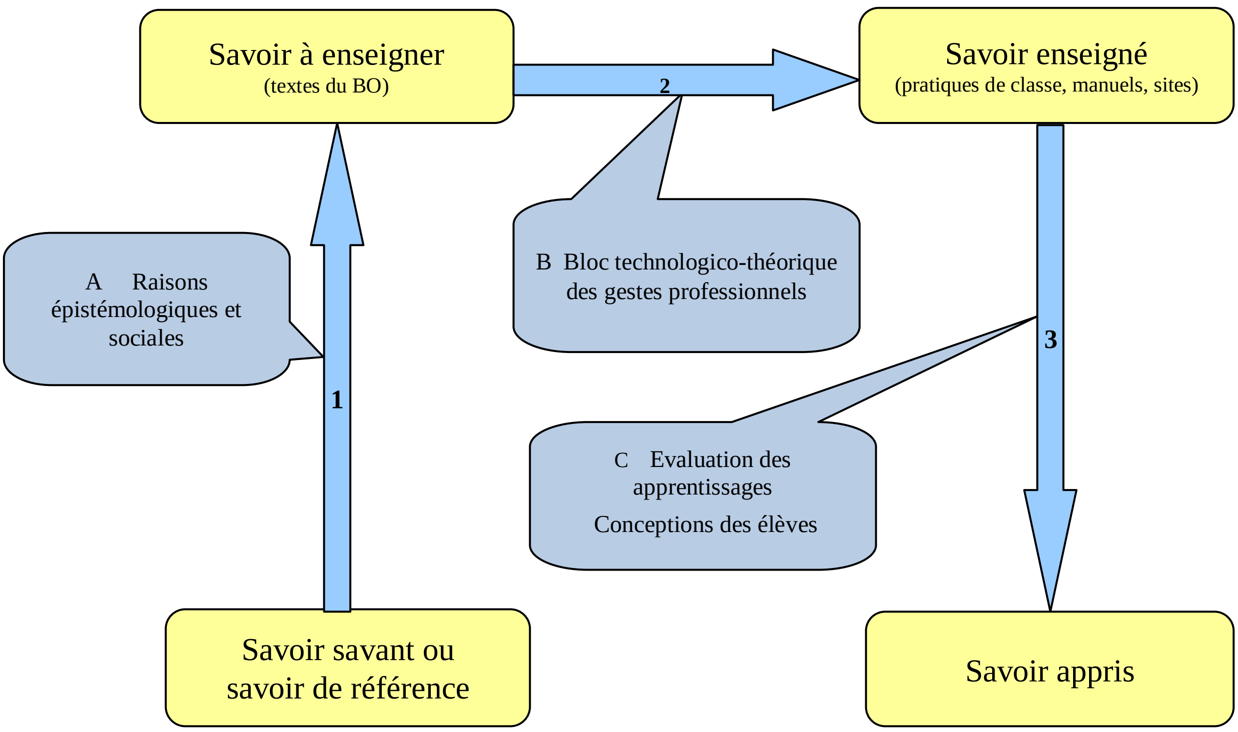


Figure 2: paysage des savoirs du numérique

Dans une lettre adressée aux universités en 2008 dans le cadre de la réforme de la formation des enseignants, Chevallard écrit :

> Les mathématiques qu'étudie le futur professeur de mathématiques ont beau être d'ascendance savante, elles n'en sont pas moins pour lui un ensemble de savoirs au service de l'exercice

> d’une profession, en sorte par exemple que des connaissances acquises d’abord sans règle ou à de toutes autres fins devront ensuite être revisitées, retravaillées, resserrées ou amplifiées, dans une perspective d’adéquation aux besoins du métier.
>
> Raffinons un peu ce qui précède en distinguant, parmi les savoirs professionnels *du professeur,* les savoirs *à enseigner* et les savoirs *pour enseigner* (les seconds contenant les premiers). Dans le cas d’un professeur de mathématiques, les premiers sont, par définition, de nature essentiellement mathématique. Mais une grande partie des seconds seront *aussi* des savoirs mathématiques : savoirs mathématiques pour enseigner des mathématiques mais qui ne sont pas eux-mêmes des savoirs à enseigner ; savoirs «disciplinaires », donc, qui ne sont pas là pour être enseignés mais pour outiller conceptuellement et techniquement l’enseignement des savoirs à enseigner. (p. 24)

Les savoirs pour enseigner pourraient se retrouver en particulier dans les cases B et C, mais aussi dans la case A, les enseignants devant être à même de partager les raisons qui ont conduit la noosphère à faire des choix de programmes.

4.1.2 Exploration du schéma

Flèche 1 : Le savoir à enseigner peut être analysé en cherchant ses raisons d'être et sa logique du côté de l'épistémologie de la discipline en faisant référence au savoir savant. La question posée est de savoir si la logique institutionnelle est ou non justifiée par une logique épistémologique. Cette question est en lien avec la première hypothèse pour laquelle j’ai déjà souligné qu’il faut étudier deux histoires différentes :

- l’histoire de la construction des connaissances du numérique dans une logique épistémologique ;
- l’histoire des élèves qui du primaire au lycée construisent leurs connaissances du numérique conformément au curriculum officiel selon la logique de la transposition didactique.

L’étude de l’articulation de ces deux logiques est à réaliser pour avoir une meilleure lisibilité des choix opérés par les concepteurs des programmes. Par ailleurs les textes officiels relatifs au numérique, les programmes et leurs accompagnements, seront analysés de manière à repérer d'une part les apprentissages nouveaux de la classe de seconde par rapport au collège, et d'autre part les thèmes qui nécessitent des réactualisations du numérique.

D'autres champs théoriques peuvent éclairer les choix des auteurs des textes officiels, ce sont par exemple les théories de l'apprentissage issues de la psychologie cognitive.

Flèche 2 : C'est dans l'étude du passage du savoir à enseigner vers le savoir enseigné, dans le deuxième temps du processus de transposition didactique, que l'hypothèse H_1 est particulièrement explorée en évaluant la distance entre la prescription officielle et la mise en œuvre effective, et les raisons d'être de cette distance.

Les données relatives au savoir enseigné sont constituées à partir de l'observation dans les classes, et par le recueil de tous les matériaux écrits. Ils constituent les matériaux privilégiés pour continuer le travail relatif à l'hypothèse H_2 sur la variabilité des choix des enseignants.

Les gestes professionnels des enseignants sont modélisés en tant que praxéologies enseignantes. Les éléments technologico-théoriques qui les sous-tendent peuvent être de différentes natures :

- des représentations mentales personnelles appuyées à leur tour par des *logiques profondes* éthiques, psychologiques, sociologiques ;
- le rapport personnel du professeur à la discipline des mathématiques et aux savoirs de référence ;
- des conceptions personnelles sur les processus d'apprentissage, la vision du métier d'enseignant, consolidées par des *gestes du métier* (Clot et al., 2000) largement partagés par la communauté enseignante ;
- des théories sur l'enseignement et l'apprentissage issues de champs divers comme la didactique des mathématiques, les sciences de l'éducation, la psychologie cognitive...

Flèche 3 : L'écart éventuel entre le savoir enseigné et le savoir appris peut être apprécié par les professeurs eux-mêmes grâce aux divers dispositifs d'évaluation mis en place, mais également par leur capacité d'observation des élèves et par leur compétence à savoir analyser les attitudes et les productions des élèves. Cette dimension du métier représente encore une part importante des savoirs pour enseigner. Je souligne en particulier la compétence suivante pour le professeur : savoir analyser les conceptions des élèves pour une notion donnée. Une part de la recherche consiste à analyser les moyens utilisés par les professeurs pour évaluer, en particulier sous la forme des devoirs à la maison et en classe. Du côté du chercheur il y a lieu également d'interroger l'efficacité de l'enseignement, il est donc nécessaire de regarder les apprentissages. Sont-ils solides, pertinents ? Mais que signifient ces questions ? Quels sont les critères retenus pour évaluer les effets de l'enseignement ? L'évaluation repose sur des postulats qui doivent être explicités et argumentés. En particulier le postulat relatif à la troisième hypothèse selon lequel l'enseignement doit permettre à l'élève de disposer de praxéologies mathématiques complètes qui ont été institutionnalisées, même si les éléments technologico-théoriques sont adaptés au niveau des élèves.

En conclusion, la méthodologie doit permettre de *traquer* le numérique sous toutes ses formes, qu'il soit vu à travers différents prismes qui le font apparaître comme le savoir à enseigner, enseigné et appris, ou qu'il soit sous une forme plus difficile à cerner mais essentielle, celle des savoirs pour enseigner.

Le savoir à enseigner établit en théorie l'horizon de travail du professeur. Je développerai plus particulièrement ce savoir à enseigner relatif au numérique en étudiant le curriculum officiel grâce à l'analyse des programmes du collège et de seconde et des accompagnements de ces programmes qui étaient en vigueur au moment de cette étude. Cette recherche sera organisée en fonction des différents niveaux de l'échelle de codétermination didactique de Chevallard (Cf. annexe 11.2).

Le savoir enseigné est évidemment celui qui peut être capté dans la vie d'une classe, mais c'est aussi celui qui est véhiculé par les manuels scolaires. Une étude de manuels parus en 2004 et 2005 - comme celui utilisé dans les classes de Mathieu et de Clotilde - donnera une vue des choix curriculaires des auteurs de manuels. Dans la section suivante je présente la méthodologie spécifique pour observer et analyser le savoir enseigné et appris.

4.2 Une étude clinique

4.2.1 Antoine, Clotilde, Mathieu et Rosalie

Le travail est qualitatif à partir de l'étude de plusieurs cas d'enseignants volontaires. Les premières données ont été recueillies pendant l'année scolaire 2004-2005 pour le travail de DEA (Larguier, 2005), elles concernaient deux professeurs lors de la *reprise scolaire*. Chacun d'eux a été filmé lors d'une seule séance de seconde concernant le domaine numérique au mois de septembre, et a été interviewé au cours du mois d'octobre 2004. Il s'agissait de deux professeurs à des moments très différents de leur carrière. Rosalie, jeune professeur stagiaire en formation initiale et Antoine professeur expert intervenant à l'IUFM (institut universitaire de formation des maîtres), membre très actif de l'APMEP (association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public) et proche de la retraite.

Pour la recherche dans le cadre de la thèse, le recueil des données a été réalisé à partir de deux classes de seconde dont les enseignants n'étaient ni des débutants ni des experts, et dont les élèves avaient des options qui les destinaient *a priori* vers des bacs généraux, majoritairement un bac scientifique d'ailleurs. Les deux professeurs enseignaient dans un même lycée de la périphérie de Montpellier[1], ils ont été observés tout au long de l'année scolaire, Mathieu en 2006-2007 et Clotilde l'année suivante. Les deux classes étaient qualifiées de « bonnes » par les professeurs comme l'attestent les appréciations qui suivent.

La classe de Mathieu avait un effectif de 36 élèves avec les options sciences et SES[2]. « Je n'ai pas rencontré de problèmes particuliers, ça fonctionne bien » a déclaré son professeur lors d'un interview réalisé le 6 décembre 2006. Le deuxième cas suivi l'année suivante chez Clotilde concernait une classe de 32 élèves options SES et MPI[3], et le professeur était également très satisfait par cette classe :

> On a donné beaucoup de félicitations, beaucoup d'encouragements, même si le niveau… parfois j'ai des élèves qui m'impressionnent, là il n'y en n'a pas un qui m'impressionne mais c'est plutôt une volonté de travail en général qui est assez époustouflante. Ils vont au bout de leur idée, ils poseront des questions, c'est rare ça, même des élèves très moyens, tant qu'ils ne comprennent pas ils posent des questions.

[1] Dans le sud de la France.

[2] Sciences économiques et sociales.

[3] MPI : mesures physiques et informatique.

Pendant l'année scolaire 2006-2007, Mathieu ayant été le premier cas d'enseignant suivi dans le cadre de la thèse pendant toute l'année scolaire, ce cas a permis de mettre à l'épreuve la méthodologie de la recherche, mais aussi de la faire évoluer. Cette phase exploratoire a par ailleurs été une phase active de la recherche permettant d'appréhender les premiers résultats du travail.

Le manuel utilisé dans le lycée de Clotilde et de Mathieu est celui qui a été édité par Hachette Éducation sous le nom de DÉCLIC 2^{de} en 2004. Les données recueillies dans le cadre du DEA chez Rosalie et Antoine sont utilisées quand elles s'avèrent pertinentes et complémentaires avec celles de la thèse chez Mathieu et Clotilde.

4.2.2 Les critères retenus pour la coopération avec les enseignants

4.2.2.1 Les critères retenus pour le choix des enseignants

Les enseignants choisis pour la thèse l'ont été sur la base de quelques critères, notamment :

- avoir une expérience du métier comprise entre 5 et 15 ans mais ne pas appartenir à la noosphère (non débutants, mais également non repérés comme experts) ;
- accepter l'observation de séances pendant toute l'année et l'accès à tous les documents écrits de la classe ;
- autoriser le suivi de quelques élèves représentant la diversité des niveaux de la classe.

La lettre adressée aux enseignants de mathématiques de plusieurs lycées pour trouver des volontaires ne dévoilait ni le projet d'étudier le domaine numérique, ni le rôle des reprises. Elle n'indiquait que l'intérêt du chercheur pour l'enseignement des mathématiques en classe de seconde (Cf. annexe 11.3).

L'étude clinique de ces enseignants a été menée de manière à repérer, décrire et analyser l'organisation globale sur l'année scolaire de l'enseignement du numérique avec ses reprises et ses nouveautés. Pour ces enseignants les données recueillies sont nombreuses :

- vidéos de séances à différents moments de l'année scolaire et dans des cadres mathématiques différents. C'est une personne ne participant pas à la recherche qui a réalisé les films et qui a apporté son soutien technique ;
- interviews ;
- recueil de toutes les productions écrites de quelques élèves (cahier de cours, cahier d'exercices, devoirs à la maison et en classe) ainsi que des documents écrits du professeur ;
- interviews de quelques élèves.

Le « contrat » de collaboration établi avec les professeurs a été précisément élaboré. Le premier contact avec un enseignant ayant accepté d'ouvrir les portes de sa classe pour les besoins de la recherche est important. Il est nécessaire d'une part d'expliciter suffisamment les raisons qui amènent le chercheur à faire cette intrusion dans la zone privée du travail du professeur, et d'autre part de ne pas dévoiler les enjeux de la recherche relative à l'observation spécifique de l'enseignement du numérique. En effet, les choix du professeur observé dans sa classe doivent être le moins possible influencés par le chercheur. Je présente ci-dessous les principes généraux qui avaient été fixés avec les professeurs ayant accepté les investigations du chercheur.

4.2.2.2 Le mode de coopération avec les enseignants

Un objectif final caché pour l'enseignant

Un objectif de la recherche est de repérer une progression annuelle de l'enseignement du numérique dans tous les domaines d'enseignement en classe de seconde. Mais aucune question ne sera posée *a priori* à l'enseignant sur la progression envisagée, ni sur les enseignements spécifiques du numérique. La programmation de l'enseignement du numérique ne sera visible que dans la reconstruction consécutive à sa mise en place effective et à son observation.

Une présence non dénuée d'impact mais aucune ingérence volontaire

Pendant toute la durée des observations, le chercheur évitera autant que possible toute intervention, toute influence sur l'enseignement, toute question pouvant être interprétée comme une évaluation. Il est vrai, cependant, que la présence même d'un observateur est un facteur qui peut avoir une influence sur les observables, et le chercheur doit en avoir conscience. Pour répondre à une attente légitime du professeur observé, le recueil de données sera limité dans le temps entre le début de l'année scolaire et fin mai. A partir de cette date un retour pourra être fait au professeur observé pour qu'il puisse avoir un bénéfice en échange de son accord, pour compenser les désagréments possibles résultant de la recherche.

Une négociation toujours active

Les interventions en classe du chercheur seront négociées dès le départ avec le professeur, mais celui ci doit avoir la garantie qu'il conserve la liberté de donner des limites aux demandes du chercheur. Cela concerne en particulier le choix des séances observées et/ou filmées : une moyenne d'une séance par mois est à prévoir, mais avec une répartition très variable. Le chercheur choisira les séances qui seront observées en fonction des propositions du professeur, de ses disponibilités personnelles et du contenu annoncé. Il fixera avec le professeur la date de chaque observation quelques jours à l'avance. Les différents dispositifs de l'enseignement pourront faire l'objet d'observations : cours en classe entière, module et aide individualisée.

Des autorisations multiples de la part du professeur

De nombreux matériaux seront rassemblés pendant le temps de recueil des données. Le professeur devra autoriser :

- l'accès aux écrits concernant l'enseignement (cours, devoirs...) : les écrits du professeur utilisés pendant les séances, ou préalablement ; les écrits des élèves ; les écrits du cahier de texte s'il existe...
- l'accès à des documents utilisés par le professeur, ressources diverses : manuel de la classe ou autre, publication IREM ou APMEP…

La possibilité de recueillir des informations du côté des élèves

Le recueil de données du côté des élèves :

- le choix de quelques élèves volontaires, représentant un élève en difficulté, un élève moyen et un très bon élève, sera réalisé en concertation entre le professeur et le chercheur. Tous les écrits produits et utilisés par ces élèves seront recueillis. Par ailleurs ces élèves pourront être interrogés en dehors de la classe et ils pourront être enregistrés pendant la classe ;
- des questionnaires pourront être donnés à tous les élèves de la classe.

L'utilisation des données

Elles sont toujours anonymées, elles ne peuvent être utilisées et communiquées que dans le cadre de la recherche ou de la formation si l'accord explicite de l'enseignant l'autorise.

D'autres éléments viennent compléter la description du contexte d'enseignement : des renseignements sur le manuel utilisé en classe et sur son intégration par le professeur à la vie de la classe ; sur la machine à calculer utilisée et son usage ; sur l'intégration des TICE dans le cours de mathématiques ; sur les conditions de travail du professeur et des élèves, notamment le travail en équipe des professeurs...

Les demandes précédentes doivent être explicitées dès le début de la coopération de recherche. Le professeur et les parents des élèves filmés ou interviewés doivent accepter les enregistrements sonores et visuels, des autorisations écrites sont prévues à ce sujet (Cf. annexe 11.4).

4.2.3 La méthode du carottage et l'analyse des progressions annuelles

Le recueil des données dynamiques, au fil des séances observées, peut être appréhendé par le schéma suivant :

<table>
<tr><th colspan="7">Reprise scolaire</th><th>…..</th><th colspan="5">Moment « normal »</th><th>…..</th></tr>
<tr><td>S_1</td><td>S_2</td><td>S_3</td><td>S_4</td><td>S_5</td><td>S_6</td><td>S_7</td><td>…..</td><td>S_n</td><td>S_{n+1}</td><td>S_{n+2}</td><td>S_{n+3}</td><td>S_{n+4}</td><td>……</td></tr>
</table>

Certaines séances comme par exemple S_3, S_7 ou S_{n+2} sont observées et parfois filmées, et toutes les productions de certains élèves et du professeur sont recueillies durant tout le parcours de l'année scolaire. Les données de la *reprise scolaire* sont comparées à des données similaires obtenues dans un moment d'enseignement dit « normal » (qui n'est pas situé lors de la *reprise scolaire*).

Je présenterai sous la forme de plusieurs tableaux le déroulement annuel de l'enseignement respectivement chez Mathieu et chez Clotilde, chaque tableau correspondant à un demi-trimestre limité par des vacances (Cf. section 7). Je ferai apparaître la progression suivie, les dates des devoirs, ainsi que les dates pour le recueil de données dynamiques : observations de séances et interviews du professeur et des élèves. C'est une vision globale que je peux offrir pour un premier point de vue sur l'organisation annuelle de l'enseignement dans ces deux classes. Les éléments qui m'intéressent dans cette analyse sont multiples, je les présente globalement mais ils sont tous en relation avec l'enseignement du numérique et ils répondent aux objectifs suivants :

- Avoir une vision globale de la programmation annuelle avec les choix des chapitres et de leur enchainement ;
- Pouvoir comparer le choix de programmation du professeur avec les prescriptions du curriculum officiel à ce sujet ;
- Etudier les gestes professionnels des enseignants pour amorcer le travail de l'année de seconde et en particulier localiser les occurrences des RDN ;
- Montrer où se situent les prises d'informations tout au long de l'année
- Localiser les séances qui seront analysées avec un grain beaucoup plus fin ;
- Comparer les deux professeurs relativement à leurs choix de progressions.

4.3 Une méthodologie didactique globale spécifique

« La didactique des mathématiques et les didactiques d'une façon plus générale se construisent dans une tension entre des élaborations *a priori* liées à des cadres théoriques et les réalités de l'enseignement d'une discipline. » Cette phrase est l'introduction de la présentation du thème de l'école d'été de didactique des mathématiques en août 2009 à Clermont Ferrand[1], elle montre que la question des ingénieries didactiques (autre terme pour désigner les « élaborations *a priori* liées à des cadres théoriques » dans le contexte de cette école d'été) est une question vive pour les recherches en didactique des mathématiques. Je vais décrire dans quelles conditions va s'élaborer dans cette recherche l'analyse *a priori* comme outil pour rendre compte de la réalité d'un enseignement.

Cette recherche s'appuie sur l'observation de classes de seconde normales[2] avec une méthodologie originale par rapport à celle qui a été le plus utilisée en didactique des mathématiques, notamment lors d'ingénieries didactiques (Artigue, 1990). Cette méthodologie se différencie de la démarche précédente dans la mesure où l'observation dans les classes est première. Ainsi le chercheur évite au maximum de donner ses objectifs de recherche à l'enseignant, et il s'abstient de tout commentaire pouvant être perçu comme une appréciation que ce soit avant ou après chacune des séances observées. Par ailleurs le chercheur n'a pas d'attente concernant ce qu'il va observer. Cette neutralité est observée sur toute la durée de l'étude, c'est-à-dire l'année scolaire, pour éviter au maximum d'influencer les choix du professeur. En conséquence les organisations mathématique et didactique des

[1] http://www.ardm.eu/contenu/th%C3%A8me

[2] J'entends par classes normales, des classes qui ne présentent pas de difficulté ni de spécificités particulières et dont les enseignants ne sont ni débutants ni réputés experts (ni formateurs, ni tuteurs…).

séances observées ne sont pas définies par une analyse *a priori* en fonction d'un projet du chercheur.

4.3.1 Description de la méthodologie globale

Le protocole suivi pour la méthodologie comprend plusieurs phases qui vont être décrites ci-dessous. Ces différentes phases sont nécessairement dépendantes de la phase 0 qui est le point de départ obligatoire : c'est la phase d'observation dans les classes (ou à défaut la prise en compte des traces écrites). Les autres phases ne sont pas toujours suivies selon l'ordre numérique de présentation.

Phase 0 : C'est l'observation dans les classes qui permet l'accès aux connaissances enseignées qui ont été décidées par l'enseignant sans aucune interaction préalable avec le chercheur.

Phase 1 : À partir des éléments révélés dans la dynamique de l'enseignement, est élaborée une analyse *a priori* ascendante. Elle s'appuie sur les choix d'activités du professeur sans aucune modification de la trame de la séance en prenant en compte les acquis antérieurs des élèves, la *mémoire didactique* de la classe et la conformité au curriculum officiel. Cette analyse *a priori* définit donc les praxéologies mathématiques possibles à ce moment de l'histoire de la classe observée.

Phase 2 : À partir de l'observation de la classe et du recueil des données effectives une analyse *a posteriori* est élaborée par le chercheur. Un certain nombre de critères seront retenus pour développer cette analyse *a posteriori* grâce à des outils présentés plus loin (Cf. section 4.4).

Phase 3 : Il est alors possible de faire un parallèle entre l'analyse *a priori* et l'analyse *a posteriori* de la séance observée.

Une autre dimension de la recherche en lien avec la troisième hypothèse réside dans les comparaisons possibles :

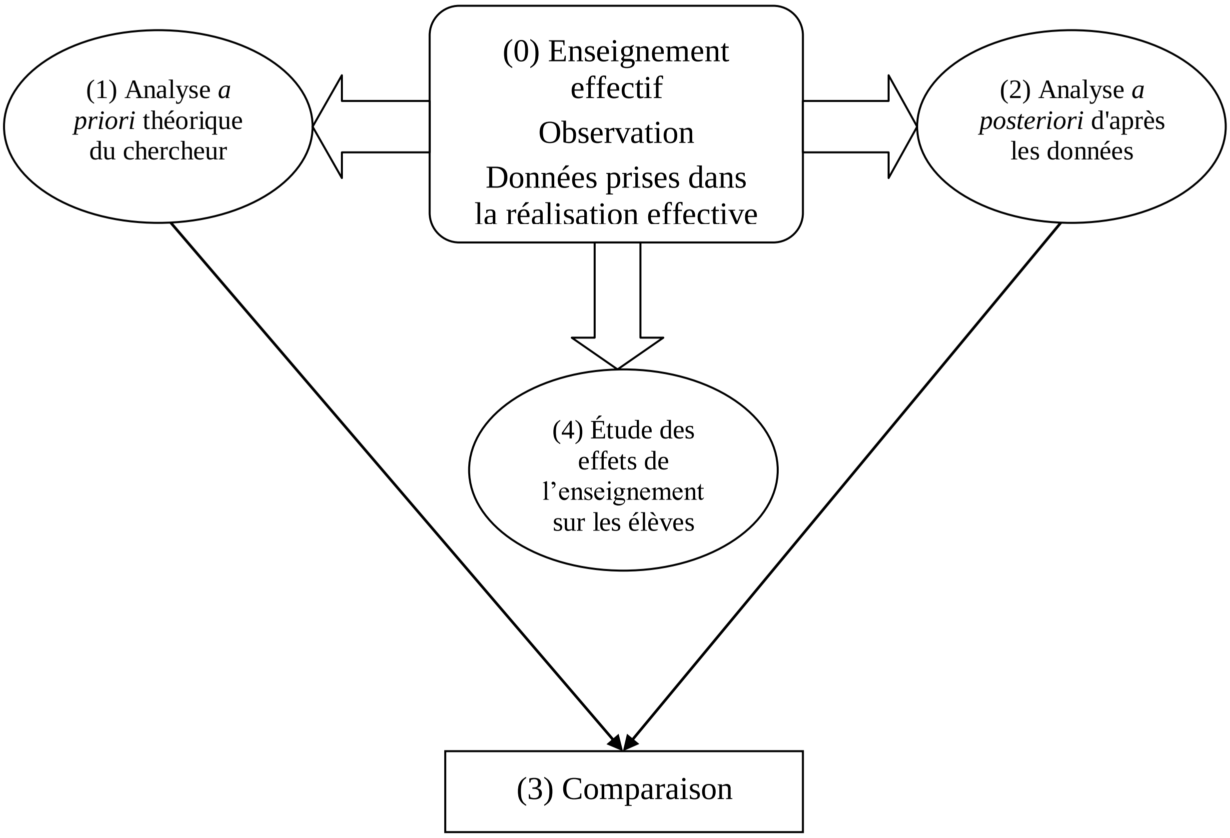
- entre les cas étudiés, pour mieux appréhender les conditions et les contraintes des choix des enseignants ;
- entre différents moments d'enseignement pour un même professeur.

Phase 4 : Les apprentissages seront étudiés grâce aux productions écrites des élèves (cahiers, devoirs, tests proposés par le chercheur) et aux productions orales recueillies en classe ou lors d'entretiens. Les gestes professionnels des enseignants et les gestes d'étude des élèves seront corrélés pour analyser les effets de l'enseignement sur les apprentissages.

4.3.2 Représentation schématique de la méthodologie globale

Je vais représenter les liens entre les différentes phases par un schéma qui permet de mettre en valeur un élément important de la méthodologie qui est la mise en réseau de l'analyse des données. Pour parvenir à décrire au plus près la réalité des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage, et pour développer les analyses les plus fines possibles, les données statiques et dynamiques sont croisées entre elles. La solidité des analyses sera éprouvée en cherchant dans toutes les traces recueillies à vérifier la cohérence ou l'incohérence des résultats du travail. Ainsi c'est un entretien avec un élève qui pourra confirmer ou non l'analyse de la nature des apprentissages, ce sont des réponses trouvées dans un devoir d'élève qui pourront valider ou non l'apparition de certaines conceptions anticipées par le chercheur…

Dans le schéma qui suit les nombres (1), (2) etc. renvoient aux numéros des quatre phases décrites précédemment.



La méthodologie exposée précédemment sera également suivie dans certains cas alors que je n'ai aucune donnée dynamique disponible. Les analyses *a priori* et *a posteriori* ne seront basées alors que sur les traces écrites. Pour traquer le numérique tout au long de l'année, même lorsque je n'étais pas physiquement présente, cette extension de la méthodologie s'est avérée indispensable.

4.3.3 Proximité avec la triple analyse *a priori* décrite par Assude et Mercier

Assude et Mercier (2007) décrivent une analyse *a priori* en trois temps :

> Nous avons choisi d'effectuer une analyse *a priori* selon deux axes principaux : le premier axe est celui du modèle formel mathématique que nous pouvons identifier dans les situations, le second axe est celui des techniques que les élèves peuvent mettre en œuvre pour attaquer le problème posé. Nous avons commencé à donner quelques éléments du troisième axe – celui des problèmes didactiques rencontrés par les professeurs -, au fur et à mesure de nos besoins. » (pp. 177,178).

L'analyse *a priori* que je développe (Cf. (1) dans le schéma) se rapproche du deuxième axe défini par les auteurs précédents. Une différence importante existe cependant : dans le cas de l'étude qu'ils présentent, Assude et Mercier ont fait travailler les professeurs observés sur un canevas de deux séances consécutives contenant le problème à poser aux élèves. Dans le travail que je mène je ne sais rien de ce que je vais observer, si ce n'est parfois le titre du chapitre en cours.

4.4 Outils d'analyse des praxéologies mathématiques des RDN

Pour développer l'analyse *a posteriori* présentée dans la section précédente, des outils sont nécessaires pour décrire et analyser les données avec un grain plus fin que celui de la séance. En particulier un outil me permet de caractériser une praxéologie mathématique ponctuelle par rapport à des critères relatifs au numérique et à ses reprises. Par ailleurs le *filtre du numérique* est spécifiquement élaboré pour *l'observatoire du numérique* (Bronner, 2007).

4.4.1 Outil pour les praxéologies mathématiques ponctuelles relatives aux RDN

4.4.1.1 Le critère du rapport au nouveau

Un premier axe a été décrit pour caractériser une reprise, il concerne le rapport au nouveau (Cf. 2.5.6). Je rappelle cette caractéristique à tout moment d'enseignement d'un objet du numérique, qu'il corresponde ou non à une reprise de connaissances du collège, ce qui renvoie alors aux quatre catégories générales suivantes :

- une reprise de connaissances du collège
    - sous la forme de révisions systématiques ;
    - en lien avec du nouveau.
- la rencontre avec des objets nouveaux du lycée
    - sous la forme d'une première rencontre ;
    - sous la forme d'une reprise.

Ces catégories sont à considérer comme des extrêmes qui ne représentent évidemment pas toutes les situations possibles.

4.4.1.2 Le critère de complétude des praxéologies

Un deuxième critère d'analyse des praxéologies concerne la complétude des organisations mathématiques institutionnalisées, il est fonction des praxéologies construites explicitement au terme d'un processus d'enseignement. Il est à mettre en relation avec les objectifs d'apprentissages de l'enseignant :

- soit ce sont des techniques données à reproduire par mimétisme, et non justifiées par un discours, des éléments de la praxéologie sont alors manquants ;
- soit ce sont des savoir-faire pour l'action, légitimés uniquement par des discours qui sont des raisons utilitaires et pratiques, ou même ergonomiques. Par exemple pour une tâche de simplification de quotients, le bloc technologico-théorique pourrait être réduit

au discours suivant : « on barre avec un trait en haut et en bas le même nombre ». Autrement dit la technologie ne serait pas absente, mais elle n'assurerait pas la consistance épistémologique attendue en mathématiques, des éléments de la praxéologie sont alors non valides au niveau de la discipline des mathématiques ;

- soit ce sont des savoirs constitués en praxéologies complètes ce qui suppose d'être cohérents au niveau épistémologique, et fondés par des raisons mathématiques. Pour l'exemple précédent, le discours technologico-théorique pourrait être : « pour simplifier un quotient, si on est dans le cas où on a le quotient de deux produits qui ont un facteur commun, alors ce quotient a une autre écriture qui est obtenue en supprimant ce facteur commun ».

Cette classification est un outil pour caractériser les organisations mathématiques visées en lien avec la troisième hypothèse pour laquelle je postule qu'un enseignement efficace va de pair avec un enseignement qui construit des praxéologies mathématiques complètes.

Ce critère de *complétude* des praxéologies permet de les repérer selon leur degré de complétude entre deux extrêmes : soit elles sont complètes, et sous-entendu consistantes ; soit elles sont incomplètes.

Je fais l'hypothèse en lien avec H_3 que ce qui devrait guider principalement les enseignants dans leurs choix pour un enseignement efficace est de permettre aux élèves de se poser des questions sur les raisons d'être mathématiques de l'existence des savoirs, et qu'un enseignement réduit à des règles pour opérer syntaxiquement sur les écritures ne peut permettre aux élèves de comprendre ce qu'est une véritable activité mathématique.

4.4.1.3 Critère relatif à la frontière entre collège et lycée

Les organisations mathématiques peuvent être également analysées en fonction d'une frontière qui sépare les enseignements du collège de ceux du lycée. Cette frontière peut être définie selon trois critères permettant de préciser le caractère de nouveauté d'une organisation mathématique, à savoir :

- l'exigibilité des connaissances visées en fonction de la frontière collège/lycée fixée par les programmes ;
- la complexité de la situation allant de l'exercice d'application au problème ouvert[1] ;
- la nature des spécimens choisis comme expressions numériques ou algébriques pour les tâches données dans le domaine du numérique.

4.4.1.4 Le critère du statut des connaissances

Une dimension supplémentaire est la prise en compte du statut des connaissances selon les différents niveaux définis par Brousseau et que j'ai décrits dans la section 2.5.2 (Cf. p. 24).

[1] au sens de l'IREM de Lyon (Arsac & al., 1988).

Ces premiers critères au nombre de 6, peuvent être interprétés comme les composantes d'un vecteur $\vec{R}$ (R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6). Ces 6 dimensions sont répertoriées dans le tableau suivant qui synthétise les critères décrits précédemment pour caractériser les praxéologies mathématiques dans des moments de travail du numérique.

<table>
<tr><th></th><th>Critères</th><th colspan="6">Choix d'enseignement du numérique</th></tr>
<tr><td rowspan="2">R_1</td><td rowspan="2">Rapport au nouveau</td><td colspan="3">Révisions systématiques de connaissances du collège
1</td><td colspan="3">Reprises de connaissances du collège liées à du nouveau
2</td></tr>
<tr><td colspan="3">Première rencontre avec une notion du programme de seconde
3</td><td colspan="3">Reprise d'une notion rencontrée pour la première fois en seconde
4</td></tr>
<tr><td>R_2</td><td>Complétude des praxéologies</td><td colspan="3">Praxéologies incomplètes
1</td><td colspan="3">Praxéologies complètes
2</td></tr>
<tr><td>R_3</td><td>Exigibilité des connaissances visées</td><td colspan="2">Exigible en collège
1</td><td colspan="2">Exigible à partir de la seconde
2</td><td colspan="2">Exigible au lycée après la seconde
3</td></tr>
<tr><td>R_4</td><td>Notion utilisée comme outil ou objet</td><td colspan="3">Notion travaillée comme objet
1</td><td colspan="3">Notion travaillée comme outil
2</td></tr>
<tr><td>R_5</td><td>Nature des spécimens choisis par rapport à la tâche</td><td colspan="2">Conforme au programme de collège
1</td><td colspan="2">Conforme au programme de seconde
2</td><td colspan="2">Conforme au programme après la seconde
3</td></tr>
<tr><td>R_6</td><td>Statut final de la connaissance au sens de Brousseau</td><td colspan="6">Cinq niveaux possibles repérés de 1 à 5 (Cf. section 2.5.2.2 p. 24)</td></tr>
</table>

Tableau 2 : outil d'analyse d'une praxéologie ponctuelle

4.4.2 Mise en œuvre du *filtre du numérique*

Ce filtre présenté dans la partie théorique (Cf. section 2.1.3.1 p. 12) permet de penser le numérique dans toutes ses occurrences, permet de le questionner, de le nommer selon un cadre méthodiquement organisé. Il n'apparaîtra pas toujours explicitement mais il sera en arrière fond du raisonnement pour tenter de ne pas occulter certaines dimensions du numérique.

L'intérêt de cet outil est double :

- d'une part en partant de l'analyse des données, le filtre permet d'identifier les éléments constitutifs du numérique en les catégorisant. Ainsi la notion de valeur absolue est un objet du numérique nouveau en seconde qui apparaît davantage en tant qu'opérateur dans le curriculum réel, que sous la forme d'une fonction ;

- d'autre part en partant du filtre, il donne une grille de questions pour enquêter sur le numérique. Par exemple pour le concept de valeur absolue, quelles sont les dynamiques dans lesquelles ce concept prend part ?

L'outil d'analyse des praxéologies ponctuelles et le *filtre du numérique* sont deux outils qui vont se compléter. Si le premier permet de caractériser les unités d'enseignement comme chacune des tâches de l'activité mathématique, le second permet davantage une vue globale et synthétique sur un thème donné pour contribuer à la description de l'espace numérique.

4.5 Les entretiens avec les professeurs et les élèves

Deux sortes d'entretiens ont eu lieu pour cette recherche, avec les professeurs et avec quelques élèves. Leur trame a été précisément pensée *a priori* pour ne pas dévoiler l'objectif de la recherche relative au numérique. Du côté des professeurs ils ont servi à identifier des éléments technologiques des gestes professionnels des enseignants, et du côté des élèves ils ont permis de révéler des conceptions sur certaines notions et de vérifier quels apprentissages étaient construits. Leur fonction est principalement d'étayer des analyses déjà développées avec d'autres données.

4.5.1 La conduite des entretiens avec les enseignants

Le premier entretien avec le professeur de la classe, comme ceux qui ont été programmés tout au long de l'année, suit un cadre structuré qui a été construit méthodiquement et qui répond à certains choix *a priori*. Les premières séances de l'enseignant n'ayant pas été observées directement, il est intéressant de connaître le premier thème abordé, appelé en général « chapitre », et les raisons de son choix. Lors de l'entretien des renseignements peuvent être recueillis sur la progression annuelle choisie par l'enseignant. Mais aucune question directe n'est posée à ce sujet pour ne pas risquer de culpabiliser un professeur qui ne construirait sa progression qu'au fur et à mesure de l'avancée de l'année, ou qui ne se poserait pas de question à ce sujet en suivant par exemple la progression d'un manuel. D'une manière générale, toutes les questions du chercheur qui pourraient laisser supposer au professeur qu'il n'est pas « en règle » par rapport à des normes du métier sont évitées.

L'objectif étant de repérer toutes les occurrences du numérique dans la progression annuelle, en précisant sa place, son rôle, notamment lorsqu'il s'agit de reprises, il est nécessaire de ne pas induire des réponses et d'utiliser volontairement des formulations neutres comme : « je m'intéresse à ce que vous avez fait avec vos élèves depuis le 1er septembre, que pouvez-vous me dire à ce sujet ? » plutôt que « est-ce que vous avez commencé par un chapitre sur le numérique ? » Un objectif important pendant le travail d'écoute est de capter les mots des personnes interrogées et de les réutiliser dans les questions suivantes. Certaines réponses sont donc notées au cours de l'interview pour avoir la plus grande fidélité possible aux mots employés spontanément. Pour ces raisons les mots inducteurs comme numérique, algébrique, révision, reprise, rappel … sont évités pour pouvoir repérer les mots spontanés des enseignants et les reprendre dans la suite de l'entretien. Les questions les plus ouvertes possibles ont comme objectifs de faire émerger :

- les raisons du choix du premier thème à enseigner dans la progression de seconde ;
- les représentations sur les connaissances de collège des élèves ;
- les conceptions relatives aux processus d'apprentissage ;
- la connaissance du programme et de son accompagnement en lien avec le numérique.

Par ailleurs des questions ont pour but de parvenir à mieux cerner les *gestes professionnels* relatifs à l'enseignement du numérique, sans expliciter cet objectif particulier, pour repérer s'il existe :

- des gestes professionnels différents en fonction du domaine considéré (numérique/géométrique par exemple), ou bien des gestes génériques ;
- une prise d'information des connaissances préalables des élèves. Si oui comment ? Est-ce en se basant sur des *a priori*, sur les programmes, ou sans aucun souci de cela ?

La trame du premier entretien avec Mathieu et puis Clotilde l'année suivante est en annexe (Cf. annexe 11.9).

4.5.2 Les entretiens avec les élèves

Dans chaque classe trois élèves, parmi les élèves identifiés comme sérieux, ont été choisis par le professeur pour être représentatifs des différents niveaux de la classe. Ils ont accepté ma demande qui était de les interviewer régulièrement dans l'établissement en dehors de leurs heures de cours. J'ai choisi de les interroger ensemble pour qu'ils ne soient pas impressionnés de se trouver dans un face à face avec moi. J'ai alterné des moments de questions/réponses oralement et par écrit. Les objectifs sont les suivants :

- Évaluer les apprentissages et repérer les conceptions en cours de construction ;
- Étudier les gestes d'étude des élèves ;
- Étayer les analyses développées à partir des autres données ;
- Recueillir le point de vue des élèves et les mots qu'ils ont pour le dire.

La trame du premier entretien ainsi que les questions posées à l'écrit lors du premier contact sont en annexe (Cf. annexe 11.10).

Les données, recueillies pendant les rencontres directes avec les élèves devraient permettre de mieux cerner les apprentissages pour lesquels les questions suivantes sont à explorer : quel est le lien entre enseignement et apprentissage ?

- quels sont les effets des choix du professeur sur les connaissances des élèves ?
- comment caractériser et repérer l'efficacité de l'enseignement et la solidité des apprentissages ?

L'étude des données recueillies auprès des élèves, en particulier les devoirs en classe et à la maison, doit permettre de dévoiler les conceptions développées par les élèves concernant certains objets du numérique, et concernant également la rationalité mathématique, autrement dit la spécificité des règles du jeu mathématique ou encore le rapport personnel des élèves à l'activité mathématique. Deux points de vue pourront être comparés : d'une part l'évaluation par le professeur des apprentissages et d'autre part l'analyse de ces apprentissages par le chercheur, ce qui a déjà été pointé précédemment.

4.6 Organisation du mémoire

Dans une première section (Cf. 5) je vais décrire et analyser le curriculum officiel, c'est-à-dire le savoir à enseigner, relatif au numérique en seconde. De ce point de vue les programmes et leurs accompagnements constituent à la fois un appui et une contrainte au niveau de l'École (au sens de l'échelle des niveaux de codétermination didactique de Chevallard) pour les professeurs.

Dans la deuxième section je vais présenter Rosalie, Antoine, Clotilde et Mathieu, les quatre professeurs grâce auxquels j'ai pu mener cette recherche. Concernant Clotilde et Mathieu, je vais décrire et comparer les progressions qu'ils ont choisies pour l'année scolaire. Je vais par ailleurs indiquer comment, à la manière d'un géologue qui étudie un terrain en examinant des *carottes*, je vais mener mon exploration de l'enseignement annuel de ces deux professeurs.

Ensuite pour présenter l'analyse et les résultats du travail de recherche à partir des données, j'utilise notamment le *filtre du numérique* et en particulier les différentes dynamiques que je rappelle : inter-numérique ; numérico-géométrique ; numérico-algébrique ; numérico-fonctionnelle ; mathématique-extra mathématique. L'organisation du texte du mémoire va être opérée en fonction de ces processus dynamiques mis en œuvre dans l'enseignement du numérique en référence avec le savoir à enseigner tel qu'il apparaît dans le curriculum officiel au moment de sa première apparition.

Je donne quelques exemples pour illustrer cette catégorisation :

- la valeur absolue est définie dans le programme de seconde à partir d'une dynamique inter-numérique, puisqu'elle est à relier avec la distance de deux nombres ;
- les nombres exprimant des lignes trigonométriques d'angles, sont produits dans une dynamique numérico-géométrique, puisque c'est à partir de la géométrie du triangle rectangle, reprise du programme de collège, que ces nombres sont obtenus.

Cela ne signifie pas que d'autres dynamiques ne puissent être développées dans l'enseignement de ces thèmes conformément au curriculum officiel, bien au contraire. Pour exemple, la valeur absolue est étroitement liée à la droite graduée, la distance de deux nombres se traduisant très facilement par analogie dans le cadre géométrique par la distance de deux points. C'est d'ailleurs une introduction dans une dynamique numérico-géométrique qui peut être choisie pour l'enseignement de la valeur absolue.

Voici l'architecture de cette présentation en fonction des différentes dynamiques :

- Dynamique inter-numérique dans la section 8 (p. 92)

    - la dénomination des ensembles de nombres et la mise au jour d'un type de tâches qui apparaît comme l'emblème du numérique ;
    - la valeur absolue, un objet nouveau dans le programme de seconde qui devient un prétexte pour développer des tâches dans le cadre algébrique.
- Dynamique numérico-géométrique dans la section 9 (p. 261)
    - La trigonométrie, un lieu de confluence pour de nombreuses difficultés en lien avec le numérique ;
    - un rendez-vous possible pour une reprise de la tâche emblématique dans le domaine de la trigonométrie.

Les données de la thèse qui ont été exploitées correspondent aux thèmes cités précédemment. Ils ont été choisis en fonction des critères suivants :

- Le thème de la nature des nombres est un thème incontournable pour l'étude du numérique. Par ailleurs c'est le premier chapitre de la progression des deux professeurs qui a été travaillé pendant la *reprise scolaire*, une période particulière. Bien que je n'ai pas assisté en direct aux séances le concernant, les données statiques nombreuses permettent son étude ;
- Les thèmes de la valeur absolue et de la trigonométrie ont été choisis pour leur intérêt au regard de la construction des connaissances sur le numérique. Par ailleurs les possibilités que j'ai eu pour assister en direct à des séances, m'ont permis de suivre plusieurs séances sur ces deux thèmes dans les deux classes de Mathieu et de Clotilde. La richesse des données dynamiques a donc été un argument supplémentaire pour choisir d'analyser ces thèmes.

La méthodologie décrite dans la section 4.3 (p. 45) sera strictement suivie pour l'étude des dynamiques inter-numériques. Pour les thèmes appartenant au domaine numérique les analyses *a priori* et *a posteriori* à partir du curriculum réel, seront bien séparées. En revanche l'étude de la trigonométrie qui s'inscrit dans une dynamique numérico-géométrique ne respectera pas formellement cette séparation entre *analyse a priori* et *analyse a posteriori*. Toutefois les principes méthodologiques resteront toujours en tant que cadrage des analyses.

5 Le curriculum officiel

Pour l'étude de la première hypothèse, il est nécessaire d'identifier les conditions – en terme d'appuis et de contraintes – qui pèsent sur le système didactique et notamment les choix du professeur aux différents niveaux de l'échelle de codétermination didactique. Je rappelle ces différents niveaux du moins spécifique au plus spécifique : civilisation, société, école, pédagogie, discipline, domaine, secteur, thème, sujet. Ensuite j'analyserai les conditions qui régissent l'enseignement du numérique en les explorant à partir du niveau de l'École jusqu'au niveau du thème.

5.1 Le niveau de l'École

5.1.1 La continuité du collège au lycée

Le niveau de l'École est celui où sont décidées les structures des institutions d'enseignement et en particulier du collège et du lycée et par conséquent la rupture entre ces deux institutions. L'analyse du programme de seconde et de son accompagnement permet de cerner la question des reprises du numérique en début de seconde pour assurer malgré tout la continuité de l'enseignement entre collège et lycée. Je vais montrer comment une contrainte à ce niveau de l'École rejaillit sur le niveau du domaine numérique.

Les accompagnements du programme précisent la nécessité d'articulation des enseignements entre collège et lycée en assurant la continuité entre les deux institutions :

> Ce programme s'inscrit dans la continuité de celui qui est mis en œuvre dans les classes de collège et appliqué dans les classes de troisième à compter de la rentrée 1999. Sa présentation en trois colonnes reprend volontairement celle du programme des collèges : la classe de 2de est en effet la dernière classe du tronc commun à public hétérogène à tous égards ; le profil de ses élèves la rend très proche des classes de collège. **Pour aider les enseignants de 2de à réaliser au mieux cette continuité[1],** le programme rappelle systématiquement les grandes lignes des programmes antérieurs.

La continuité est donc à assurer d'un point de vue épistémologique relativement aux contenus à enseigner, mais aussi d'un point de vue social relativement aux sujets des deux institutions ce qui en fait une contrainte au niveau de l'École. Une aide sous la forme de rappels est donnée aux professeurs pour garantir une bonne mémoire institutionnelle des enseignants qui vont devoir assurer la liaison en évitant les ruptures. Un palliatif est ainsi donné aux enseignants du lycée qui sont privés de *la mémoire didactique* des enseignements du collège.

Cette notion de continuité est contextualisée dans le domaine du numérique par la demande institutionnelle de réaliser des synthèses à propos du concept de nombre relativement à deux aspects : leur nature et leur comparaison. Voici des recommandations des accompagnements du programme de seconde relatives à ces synthèses :

> **Nature et écriture des nombres**
>
> On fera une synthèse des connaissances rencontrées jusque là par les élèves et on introduira les notations usuelles des différents ensembles. Les élèves devront savoir reconnaître à quels ensembles appartiennent les nombres rencontrés.
>
> […]
>
> **Ordre des nombres**
>
> Il s'agit de faire une synthèse des connaissances de collège à propos de la comparaison des décimaux, des rationnels et, plus généralement, des nombres réels.

[1] Mis en gras dans cet écrit

Cette demande correspond à une poursuite du processus d'institutionnalisation, autrement dit une institutionnalisation après coup comme la dénomme Perrin-Glorian (1992). Les différents types de nombres ont été rencontrés tout au long du collège, la classe de seconde offre une organisation plus théorique de cette diversité et une classification.

La difficulté provoquée par le changement d'établissement est prise en compte comme une contrainte mais des appuis sont donnés aux enseignants pour résoudre ce problème de mise en lien, de *tissage* entre les deux institutions. Il est clairement affirmé que les programmes apportent des éléments « pour aider les enseignants de 2de à réaliser au mieux cette continuité ».

5.2 Le niveau pédagogique

L'organisation des séances est décidée à ce niveau. Conformément aux directives ministérielles le cours de mathématiques est décomposé en quatre heures en classe entière, une heure de module (l'effectif est la moitié de l'effectif total), une heure d'aide individualisée (effectif maximum de huit élèves). Le lycée dans lequel j'ai fait les observations de Mathieu et de Clotilde a fait le choix de coupler le module de mathématiques avec un module dans une autre discipline, ce qui supprime pour les professeurs la possibilité de choisir les élèves en fonction de besoins particuliers. Je m'intéresserai à la façon dont les deux professeurs gèrent ces différents temps de travail avec les élèves, en lien avec les gestes professionnels d'enseignement du numérique.

5.3 Le niveau de la discipline

5.3.1 Organisation du numérique à l'intérieur de la discipline des mathématiques

Je reprends l'échelle pour les niveaux correspondant à la discipline des mathématiques pour décrire une hiérarchie visible dans l'écriture des programmes officiels. Chevallard (1999) précise à propos de ces niveaux que :

> La hiérarchie des niveaux ainsi ébauchée, qui va des sujets d'étude à la discipline en passant par les thèmes, les secteurs, les domaines, a pour principal mérite […] de permettre un premier tri dans les paquets de contraintes présidant à l'étude scolaire en évitant un déséquilibre trop flagrant entre ce qui serait pris en compte et ce qui serait laissé pour compte.

Je prends l'exemple du type de tâches T: *Déterminer à quel ensemble appartient un nombre*[1]. T correspond à un **sujet d'étude**, qui est l'unité minimale de découpage des contenus. En lien

[1] Ce type de tâches apparaîtra dans des séances observées et jouera un rôle important dans ce travail comme étant emblématique des organisations mathématiques ponctuelles du domaine numérique. .

avec T une **organisation mathématique ponctuelle** va être développée dans la classe. Ce type de tâches T fait partie des tâches prescrites par le curriculum officiel sous l'intitulé *« les élèves devront savoir reconnaître à quels ensembles appartiennent les nombres rencontrés »* (Accompagnement des programmes de seconde). Cette prescription officielle fait partie d'un **thème d'étude,** présent dans le programme sous la dénomination « Nature et écriture des nombres ». Ce thème correspond à une **organisation mathématique locale**, elle même plongée dans une **organisation mathématique régionale** qui correspond au **secteur d'étude** *« nombres ».* Au niveau supérieur se trouve une organisation mathématique globale sous la dénomination d'un **domaine** dénommé *« calcul et fonctions »,* et le dernier niveau des organisations mathématiques ce sont les **mathématiques** elle mêmes, qui se situent au niveau de la **discipline d'étude**. On peut remarquer que le niveau du domaine correspond à ce que le programme de seconde appelle chapitre, terme qui est également très employé spontanément par les professeurs, mais qui désigne alors plutôt au sens de Chevallard (1999a) une organisation régionale correspondant au niveau des secteurs[1]. Dans la suite de ce travail le terme de chapitre sera utilisé dans « la sémantique familière de l'action » (Sensevy, 2007), c'est-à-dire au quotidien dans le métier. Le tableau suivant est un résumé des éléments précédents :

Niveau	**Organisation mathématique**	**Niveau de codétermination didactique**	**Exemple**
1		**Discipline**	Les mathématiques en seconde
2	Globale	**Domaine**	Calcul et fonctions
3	Régionale	**Secteur** autour d'une même théorie Θ	Nombres
4	Locale	**Thème** autour d'une même technologie θ	Nature et écriture des nombres
5	Ponctuelle	**Sujet** relatif à un type de tâches	Déterminer la nature d'un nombre

Tableau 3 : extrait des programmes de seconde de 2000

[1] Le terme de *chapitre* désigne en fait dans le programme de seconde soit un *domaine* (« Le programme qui suit est écrit dans le cadre d'une seconde de détermination. Il est composé de trois grands chapitres : statistique, calcul et fonctions, géométrie. ») soit un *secteur* (« Le calcul numérique et le calcul algébrique ne doivent pas constituer un chapitre de révision systématique, mais se retrouvent au travers des différents chapitres. En particulier, ils seront traités en relation étroite avec l'étude des fonctions. »)

5.3.2 Des reprises du numérique qui ne sont pas des révisions systématiques

Des instructions sont données dans le programme de mathématiques de seconde concernant les domaines numérique et algébrique et disent clairement qu'il s'agit de faire des *reprises en lien avec du nouveau* et non pas des *révisions systématiques.* Je rappelle cette citation des programmes de seconde[1] déjà en partie citée en page 5 :

> Le calcul numérique et le calcul algébrique ne doivent pas constituer un chapitre de révision systématique, mais se retrouvent au travers des différents chapitres. En particulier, ils seront traités en relation étroite avec l'étude des fonctions. Comme la géométrie, les activités de calcul doivent être l'occasion de développer le raisonnement et l'activité de démonstration.

Une autre recommandation est lisible dans cet extrait : la démonstration qui est la signature de l'activité mathématique est à développer aussi dans le domaine numérique. Ainsi la rationalité mathématique doit s'exercer dans tous les domaines des mathématiques avec les mêmes règles du jeu.

La prescription précédente fait écho à une autre qui est dans l'introduction générale pour le collège du BO hors série du 9 septembre 2004 :

> Il convient de faire fonctionner les notions et « outils » mathématiques étudiés au cours des années précédentes dans de nouvelles situations, autrement qu'en reprise ayant un caractère de révision. En sixième, particulièrement, les élèves doivent avoir conscience que leurs connaissances évoluent par rapport à celles acquises à l'école primaire.

Dans les programmes actuellement en vigueur au collège depuis la rentrée 2009 cette phrase a été conservée intégralement[2]. La même préoccupation est explicitement exprimée pour le domaine de la géométrie en classe de seconde[3] :

> Proposer aux élèves des problèmes utilisant pleinement les acquis de connaissances et de méthodes du collège. Pour dynamiser la synthèse et éviter les révisions systématiques, trois éclairages nouveaux sont proposés : les triangles isométriques, les triangles de même forme et des problèmes d'aires.

Un élément de technique apparaît concernant un geste professionnel d'élaboration d'une situation de synthèse : il est possible de réaliser une synthèse en la reliant avec du nouveau. C'est à l'occasion de l'avancée du temps didactique et la découverte de nouveaux apprentissages que les élèves vont de nouveau rencontrer des acquis du collège et ainsi les revisiter sans que le processus de chronogenèse ne soit arrêté. La synthèse n'est donc pas un préalable avant la rencontre avec de nouvelles notions. Elle constitue en fait une nouveauté, elle offre un nouveau regard sur des apprentissages en évolution.

---

[1] programme de seconde paru au BO hors-série n° 6 du 12 août 1999 et applicable à la rentrée 2000 puis de nouveau paru dans le BO hors série n°2 du 30 août 2001, programme resté en vigueur jusqu'en 2008-2009.

[2] B.O. spécial n° 6 du 28 août 2008.

[3] BO hors série n°2 du 30 août 2001

5.3.3 La dialectique outil/objet et les jeux de cadres

5.3.3.1 Le jeu de cadres dans les programmes

En lisant encore davantage entre les lignes, les *dialectiques outil/objet* et *ancien/nouveau,* les *jeux de cadres* décrits par Douady (1986) ainsi que la *théorie des situations didactiques de Brousseau* (1998) sont en arrière plan des raisons d'être des prescriptions du curriculum officiel citées dans la section précédente (Cf. 5.3.2). Le caractère d'outil des notions est affirmé ainsi que le rôle essentiel de la résolution de problèmes. La logique qui sous-tend les programmes est basée sur des résultats de la recherche en didactique des mathématiques : privilégier les activités de démonstrations, la résolution de problèmes où les notions apparaissent comme outils, les jeux de cadres qui favorisent les changements de points de vue nécessaires dans l'activité mathématique. Elle est également basée sur des conceptions des apprentissages : les élèves doivent être placés dans de véritables situations de résolution de problèmes qui permettent d'engendrer une dynamique, une motivation personnelle, au lieu d'être enfermés dans une répétition ennuyeuse. Cette conception évoque évidemment le processus de dévolution au sens de Brousseau (1998b) qui ne peut pleinement se dérouler que dans des situations didactiques et adidactiques au sens fort du terme.

En résumé les raisons qui amènent les concepteurs des programmes à faire ces recommandations apparaissent implicitement :

- raison épistémologique : les activités de calcul sont au service d'un aspect essentiel et spécifique de l'activité mathématique à savoir le raisonnement et la démonstration, elles n'ont pas de raison d'être travaillées pour elles-mêmes (Cf. rapports de la commission Kahane, 2002 ; 2004) ;
- raison pédagogique : dans le passage d'une classe à l'autre il faut que les élèves aient le sentiment d'évoluer et non pas de recommencer ce qui a été fait au niveau précédent en prenant le risque de les lasser ;
- raison didactique : l'enseignement doit être dynamique et des situations nouvelles, des éclairages nouveaux sur des notions déjà connues, vont permettre ce processus d'avancée du temps didactique.

J'identifie deux logiques différentes du côté des concepteurs des programmes et du côté des enseignants. La logique des enseignants correspond à des normes du métier : il faut refaire les bases ; il faut que les élèves aient acquis de l'aisance dans les calculs avant d'aborder des problèmes ; le niveau des élèves est tellement bas qu'il est impossible de démarrer un nouveau programme sans faire de révisions ; etc. Ces constats viennent étayer la première hypothèse en révélant des éléments technologiques du côté des professeurs non partagés avec la noosphère et qui conditionnent les gestes professionnels.

5.3.3.2 Proposition d'un changement de cadre dans le curriculum officiel

Pour le thème « fonctions de référence », le document d'accompagnement propose un regard nouveau relatif à des « pièges classiques » des domaines numérique et algébrique, revisités dans le cadre fonctionnel :

> Il est souvent utile aux élèves de revoir, à l'éclairage des propriétés de linéarité (l'image d'une somme est la somme des images ; l'image de *k* fois un nombre est *k* fois l'image du nombre), les pièges classiques que constituent la somme de deux carrés, de deux inverses, de deux racines ou encore $\sqrt{a^2+b^2}$.

On trouve donc là une suggestion d'un type de tâches permettant de faire vivre un point de vue nouveau sur une erreur comme : $(a + b)^2 = a^2 + b^2$. Il s'agit de regarder cette égalité comme exprimant une propriété d'une fonction linéaire, ce qui est faux pour cette fonction de référence, la fonction carré. Ainsi le programme donne des exemples de praxéologies mathématiques à développer pour un travail relatif à des erreurs classiques. Il s'agit d'une reprise en lien avec du nouveau grâce à un changement de cadre. L'égalité précédente n'est plus considérée comme une identité (objet du numérique ou de l'algébrique selon la présence ou non de lettres) mais comme la traduction d'une propriété supposée de linéarité de la fonction carré.

5.3.4 Une véritable activité mathématique

L'expression de *véritable activité mathématique* amène à se demander ce que serait une activité mathématique qui ne serait pas véritable. La réponse est en creux dans la définition suivante :

> À travers la résolution de problèmes, la modélisation de quelques situations et l'apprentissage progressif de la démonstration, les élèves prennent conscience petit à petit de ce qu'est **une véritable activité mathématique**[1] : identifier et formuler un problème, conjecturer un résultat en expérimentant sur des exemples, bâtir une argumentation, contrôler les résultats obtenus en évaluant leur pertinence en fonction du problème étudié, communiquer une recherche, mettre en forme une solution.

Cette citation est extraite du « Préambule pour le collège » du programme de mathématiques[2] qui sera en vigueur à partir de la rentrée 2009. Elle était déjà inscrite dans les programmes antérieurs depuis la rentrée 2005. Elle a un écho dans le document d'accompagnement du programme de seconde dans un paragraphe consacré à « L'organisation de l'activité mathématique dans la classe » :

> L'organisation de la classe doit permettre aux élèves d'expérimenter les diverses facettes de l'activité mathématique décrites dans l'introduction du programme. Certaines ("chercher, trouver des résultats partiels, se poser des questions, expliquer oralement une démarche, rédiger au brouillon puis au propre, (…), accéder au plaisir de la découverte et à l'expérience de la compréhension") renvoient à l'étude de situations et à la résolution de problèmes : le choix de ces situations et de ces problèmes doit être fait avec attention ; ils déterminent la qualité de l'activité scientifique menée dans la classe, légitiment l'introduction de nouveaux contenus et

[1] Mis en gras dans cet écrit

[2] B.O. spécial n° 6 du 28 août 2008.

> justifient ensuite leur efficacité. D'autres ("appliquer des techniques bien comprises, étudier une démonstration qu'on n'aurait pas trouvée soi-même, (…), bâtir un ensemble cohérent de connaissances") relèvent de la découverte puis de l'assimilation d'un savoir dont les élèves doivent pouvoir sentir la cohérence et l'harmonie.

Dans cette citation les parties entre guillemets renvoient au programme lui-même, ce qui montre l'insistance des auteurs pour que ces recommandations soient effectivement prises en compte dans les pratiques. Ainsi à travers l'étude du curriculum officiel, il apparaît que l'enseignement doit permettre à l'élève de vivre une « véritable activité mathématique » dont les formes sont multiples et complémentaires et qui peuvent se résumer en : chercher, expérimenter, conjecturer, démontrer. Cette conception de l'activité mathématique est donc au lycée dans la continuité de celle des programmes du collège.

L'accompagnement du programme de seconde dénonce des gestes du métier repérables en particulier dans l'étude des manuels scolaires : « Contrairement à l'image que certains manuels scolaires relatifs aux programmes de 1990 ont pu laisser transparaître, l'enseignement ne peut pas être réduit au simple énoncé de définitions et de propriétés admises, accompagné d'exercices d'applications très répétitifs. » Ce document met en garde contre des gestes professionnels élaborés par les enseignants et cautionnés par les manuels de seconde. Il invite à une vigilance épistémologique sur la nature même de la discipline des mathématiques.

De façon encore plus précise, une recommandation est faite dans cet accompagnement des programmes pour que les enseignants aient conscience de l'importance d'aborder chaque notion selon ses différents aspects :

> Pour chaque notion, le programme invite à repérer la multiplicité et la complémentarité des points de vue (graphique, numérique, algébrique, géométrique) et rappelle l'importance, lors de son approche et sa mise en place, d'une démarche expérimentale. Dans chaque chapitre, l'accent a été mis sur les activités faisant fonctionner les connaissances (thèmes y compris) et sur la résolution de problèmes.

On peut lire encore une fois à travers ces recommandations la nécessité de faire « fonctionner » les connaissances en tant qu'*outils* avant de les intégrer comme *objets* (Douady, 1986) dans les savoirs institutionnalisés, et l'intérêt d'utiliser des *changements de cadres* (Douady, 1986) et des *registres de représentation sémiotique* différents (Duval, 1993) pour construire des apprentissages solides à travers une « véritable activité mathématique ». Concernant la question des registres, Duval (1993) décrit une situation très classique du manque de *flexibilité* (au sens de Bosch et al., 2004) dans l'activité mathématique des élèves :

> Des élèves peuvent très bien effectuer l'addition de deux nombres avec leur écriture décimale et avec leur écriture fractionnaire, et ne pas du tout penser à convertir, si cela s'avère nécessaire l'écriture décimale d'un nombre en son écriture fractionnaire (et réciproquement), ou même échouer pour cette conversion. C'est très souvent ce type d'exemple qui est avancé, pour expliquer que les élèves arrivent en seconde et ne savent pas calculer ! C'est oublier que l'écriture décimale, l'écriture fractionnaire et l'écriture avec exposant constituent trois registres différents de représentation des nombres.

Dans le curriculum officiel le chercheur peut lire entre les lignes des soubassements théoriques. Mais quelle est la lecture d'un professeur qui n'a peut-être jamais rencontré ces théories ? Identifier ce type de connaissances nécessaires au professeur est l'un des objectifs de cette recherche en lien avec ce problème de la profession évoqué dans la quatrième hypothèse.

5.3.5 La place du secteur « Calcul et fonctions » dans la discipline

Le programme et son accompagnement donnent des indications générales pour l'organisation de l'enseignement sous la forme d'un réseau qui privilégie les articulations entre les secteurs, mais aussi entre les différents cadres (Douady, 1994) et registres de représentation sémiotique (Duval, 1993). L'extrait suivant donne une illustration de ces recommandations et montre encore une fois cette demande forte adressée aux professeurs : il faut proposer des problèmes aux élèves.

> **2. Calcul et fonctions**
>
> Le programme rassemble sous un titre unique un bilan sur les ensembles de nombres, les problèmes de calcul numérique et algébrique et l'étude des fonctions. C'est une invitation forte à chaque enseignant pour qu'il construise son cours en faisant interagir ces divers éléments : calcul numérique ou littéral et recherche d'images, résolution d'équations par le calcul ou dans un environnement graphique, de façon approchée ou exacte, ordre entre les nombres et variations de fonctions, etc. On veillera, en particulier, à choisir des problèmes se prêtant à plusieurs approches et admettant des types de résolution variés.
>
> De ce fait, aucun titre relatif au calcul algébrique n'apparaît : celui-ci se retrouve dans les divers items du programme. Il n'est pas question ainsi de minimiser sa place ; une certaine aisance est indispensable pour manipuler avec profit sommes, produits ou quotients ; une telle aisance libère ensuite la pensée pour une réflexion plus profonde ou pertinente. L'entraînement au calcul est donc à poursuivre : mais en l'asservissant aux réels besoins des problèmes à traiter et sans en faire un incontournable préalable à leur traitement.

Figure 3 : extrait du document d'accompagnement de seconde

Je souligne cette recommandation dans le texte précédent : ce sont les « réels besoins des problèmes à traiter » qui vont motiver l'apprentissage du calcul. Le programme explicite très clairement le choix de ne pas avoir fait figurer ni le numérique ni l'algébrique en tant que domaines. L'injonction est très claire, il n'y a pas un travail préalable sur les objets du calcul numérique ou algébrique, mais un travail pour lequel ces connaissances fonctionnent comme outils de résolution de problèmes. Le modèle d'enseignement, *cours théorique sur les objets à enseigner et application du cours*, est rejeté par les programmes, au niveau pédagogique et disciplinaire cette conception de l'enseignement est dépassée. En d'autres termes le curriculum officiel invite les professeurs à élaborer des organisations mathématiques locales et régionales et à rejeter la juxtaposition d'organisations mathématiques ponctuelles en restant assujettis à une lecture linéaire du programme compris comme une liste de sujets à enseigner (Artaud & Menotti, 2008).

5.4 Le niveau du domaine « Calcul et fonctions »

5.4.1 Les savoirs à enseigner en terme de contenus

5.4.1.1 Les thèmes du domaine « Calcul et fonctions »

La séparation du domaine « Calcul et fonctions » en deux secteurs « Nombres » et « Fonctions » apparaît nettement dans le document d'accompagnement des programmes et non pas dans le programme lui-même. Ce qui apparaît également dans le document d'accompagnement ce sont les différents thèmes du secteur « nombres » que je reprends ci-dessous dans l'ordre tels qu'ils apparaissent :

- Nature et écriture des nombres ;
- Représentation des nombres dans une calculatrice ;
- Ordre de grandeur et écriture scientifique ;
- Calcul à la main et à la machine ;
- Nombres premiers ;
- Ordre des nombres ;
- Valeur absolue d'un nombre.

Tous ces thèmes sont présents dans le programme lui-même (Cf. annexe 11.6) mais ils se retrouvent de façon désordonnée dans les trois colonnes du tableau de présentation du programme soit dans « contenus », soit dans « capacités attendues », soit dans « commentaires » (Cf. Figure 4: extrait des programmes de seconde).

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Nature et écriture des nombres. Notations $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathcal{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. Représentation des nombres dans une calculatrice. Nombres premiers.	Distinguer un nombre d'une de ses valeurs approchées. Interpréter un résultat donné par une calculatrice. Organiser un calcul à la main ou à la machine. Décomposer un entier en produit de nombres premiers.	On admettra que l'ensemble des réels est l'ensemble des abscisses des points d'une droite. On travaillera sur les ordres de grandeur. On donnera un ou deux exemples de limites d'utilisation d'une calculatrice. On fera quelques manipulations de nombres en écriture scientifique. On se limitera à des exemples (du type 56 x 67) pour lesquels la connaissance des tables de multiplication suffit.
Ordre des nombres. Valeur absolue d'un nombre.	Choisir un critère adapté pour comparer des nombres. Comparer a, a^2 et a^3 lorsque a est positif. Caractériser les éléments d'un intervalle et le représenter.	La valeur absolue d'un nombre permet de parler facilement de la distance entre deux nombres.

Figure 4: extrait des programmes de seconde

Il semblerait que les auteurs des accompagnements du programme aient réorganisé le secteur relatif aux nombres en lui donnant tout d'abord un titre *Nombres* et en faisant mieux apparaître les unités d'enseignement en tant que thèmes au sens de Chevallard. Est-ce qu'ils ont pris conscience d'un manque de clarté dans les programmes concernant les nombres ? Cependant les professeurs qui « suivraient » seulement le programme risquent de ne pas profiter de cet effort de clarté. Dans le travail de thèse de Cirade (2006) figure l'exemple d'un professeur stagiaire qui pose une question au sujet de l'enseignement du secteur des nombres en seconde. Voici cette question citée par Cirade : « Comment faire des liens entre divers types de tâches ? Par exemple entre nombres premiers et ordre de grandeur en utilisant l'écriture scientifique ? (p. 141) » Le commentaire suivant est proposé par Cirade à propos de cette question :

> L'auteur de la question est un jeune agrégé qui soutiendra une thèse d'Université en mathématiques au cours même de l'année de formation : sa culture mathématique est donc, en principe, substantielle. Mais, à l'évidence, la culture mathématique pour l'enseignant et plus encore pour l'enseignement, qui devrait faire la spécificité de la profession, lui est encore largement étrangère ! La confusion à laquelle il succombe est, il est vrai, poussée en avant par le texte même du programme – reproduit ci-après[1] –, lequel rapproche, en les distinguant de manière insuffisamment explicite, des thèmes d'étude entre lesquels un lecteur mal préparé peut, à cause de leur proximité textuelle, imaginer des liens plus importants qu'ils ne le sont en réalité.
>
> On aura noté, en effet, que la rubrique des contenus énonce presque d'un même mouvement les deux thèmes de « la représentation des nombres dans une calculatrice » et des « nombres premiers », rapprochement formel à quoi correspond, dans la rubrique des capacités attendues, le rapprochement, d'une part, de types de tâches relatifs au bon usage de la calculatrice, d'autre part, d'un type de tâches des plus classiques, la décomposition d'un entier en produit de nombres premiers. Quant à la rubrique des commentaires, elle enchaîne des considérations sur les notions et types de tâches ainsi rapprochés, entre lesquels l'auteur de la question cherche en conséquence à établir des liens qu'il doit postuler faute de les percevoir nettement – d'où sa question. On voit ainsi combien peut être incertain l'abord d'éléments mathématiques à enseigner dès lors que, en eux-mêmes tout classiques sans doute, ces éléments occupent une place minorée, voire introuvable, dans la culture mathématique de qui est fraîchement issu des études universitaires. On retrouvera encore et encore ce sentiment de fragilité des nouveaux venus dans la profession face aux mathématiques qui en sont le pain quotidien. (p. 141)

5.4.1.2 Les reprises du numérique dans le domaine « Calcul et fonctions »

Je repère dans le programme des reprises de connaissances du collège et des notions nouvelles du numérique qui doivent faire l'objet d'une première rencontre. Elles sont présentées dans le tableau suivant (Cf. Tableau 4) en regard des deux secteurs du domaine « Calcul et fonctions ». Je précise que pour le secteur « Fonctions » je n'ai pas fait mention des deux dernières parties intitulées « Fonctions et formules algébriques » et « Mise en équation ; résolution algébrique et graphique d'équations et d'inéquations ». Il est bien évident que ce travail dans le cadre algébrique va nécessiter une articulation avec le cadre numérique, mais je me limite dans cette analyse des programmes aux notions strictement numériques. Chevallard (1999a) propose un découpage du secteur *Fonctions* en deux parties qu'il intitule : *Fonctions* et *Modèles et modélisation algébrique*. La deuxième partie correspond à ce que je n'ai pas analysé dans le domaine « Calcul et fonctions ». Ce découpage du domaine en trois secteurs apparaît plus cohérent et insiste sur cette fonction de modélisation de l'algèbre

[1] Dans ce texte c'est la Figure 4: extrait des programmes de seconde qui est au dessus

(Chevallard, 1984 ; Grugeon, 1995). Je précise que le tableau ne contient que des formulations empruntées au programme et à son accompagnement (ou des formulations qui en sont très proches).

Thèmes	Reprises de connaissances du collège	Nouveautés du programme de seconde
Nature et écriture des nombres	Synthèse des connaissances rencontrées jusque là	Dénomination des ensembles L'ensemble des réels est l'ensemble des abscisses des points d'une droite (admis)
Représentation des nombres dans une calculatrice	Usage d'une calculatrice de type scientifique (modèle collège) Interpréter un résultat donné par la machine (souvent une valeur approchée décimale)	Limites d'utilisation d'une calculatrice
Ordre de grandeur et écriture scientifique	Valeur exacte et valeur approchée Ordre de grandeur d'un résultat Ecriture scientifique Puissances	Lien avec un TP de physique
Calcul à la main et à la machine	Distinguer un nombre d'une de ses valeurs approchées Conventions de priorité Comparer des résultats obtenus à la main et à la machine	
Nombres premiers	Multiples et diviseurs communs PGCD et nombres premiers entre eux Calcul mental Manipulation des puissances et des fractions	Nombre premier Décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers
Ordre des nombres	Synthèse des connaissances du collège sur la comparaison des nombres en fonction de leur nature (décimal, rationnel, réel)	Intervalles Lien entre la comparaison de deux nombres et le signe de leur différence Comparaison de a, a^2 et a^3 (a étant un réel positif)
Valeur absolue d'un nombre		Distance de deux nombres Valeur absolue vue comme une notation
Notion de fonction. Étude qualitative	Pourcentages Proportionnalité Tableau de données Lectures graphiques exactes ou approchées	Définition générale d'une fonction numérique d'une variable réelle « Boîte noire » qui produit une valeur numérique quand on introduit un nombre Problème de maximum ou de minimum Ensemble de définition Image d'un nombre
Fonctions de référence		Des notions rencontrées comme opérateurs au collège vues comme fonctions : carré, inverse, sinus, cosinus ; d'autres sont en option : racine carrée, cube, valeur absolue… Autre regard dans le cadre des fonctions sur les pièges classiques : somme de deux carrés, de deux inverses, de deux racines ou $\sqrt{a^2+b^2}$ Enroulement de l'ensemble des réels sur le cercle trigonométrique Valeurs exactes des sinus et cosinus de 30°, 45° et 60° Mesures en radian comprises entre $-\pi$ et π ou entre 0 et 2π

Tableau 4: reprises du collège et nouveautés du programme de seconde concernant le numérique

Un terme anodin en apparence apparaît dans les programmes et il peut être interrogé, c'est celui de *synthèse*. Comment élaborer une *situation de synthèse* ? Quel est le type de reprise derrière la notion de synthèse ?

Un thème est en lui-même une nouveauté. Il s'agit de « Représentation des nombres dans une calculatrice ». La calculatrice est évidemment un objet présent au collège et dont l'usage commence dès l'école primaire. Le document d'accompagnement du programme de troisième fait référence au calcul approché et au calcul formel possibles avec certaines calculatrices :

> Autrefois, les machines ne permettaient que du calcul approché dans certains cas (fractions non décimales, radicaux par exemple), mais aujourd'hui, les logiciels de calcul formel sont accessibles désormais aux collégiens dans certaines calculatrices de poche. Pourvu que l'on ait bien choisi l'écriture à utiliser pour les nombres, ce que l'on appelle encore leur format, on peut par exemple obtenir en lecture directe de l'affichage d'une calculatrice une égalité du genre : $\frac{1}{666}-\frac{1}{999}=\frac{1}{1998}$.
>
> […] Les exemples fourmillent, à commencer par tous ceux qu'il convient de mettre en rapport avec les formats possibles des nombres. Que l'on explore par exemple, si on n'en a pas encore eu l'occasion, les mêmes calculs sur des racines carrées effectués par un logiciel de calcul formel, selon qu'on lui aura demandé du calcul exact ou du calcul approché (on peut pour cela puiser des idées à partir des exemples mêmes du programme, ainsi : $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$ peut conduire à une variété importante de calculs ayant valeur de tests).

L'usage des calculatrices et la comparaison de leurs potentialités sont donc bien inscrits dans le curriculum officiel du collège. L'expression « formats d'un nombre » apparaît, elle est floue, il semblerait qu'elle englobe d'autres écritures du nombre et des valeurs approchées. Le thème inscrit dans le programme de seconde sur la représentation des nombres dans une machine commence donc à être travaillé en collège. Il est repris en seconde en lien avec du nouveau comme le précise le document d'accompagnement du programme :

> Sans entrer dans des détails techniques souvent difficilement accessibles et sujets à une constante évolution, un élève doit avoir pris conscience qu'une calculatrice de type scientifique opère essentiellement sur un nombre fini de chiffres et que le plus souvent, elle ne donne qu'une valeur approchée décimale d'un résultat.

Le nouveau réside dans une prise de conscience :

- des contraintes propres à une calculatrice donnée ;
- des limites d'une calculatrice ;
- du rôle spécifique des décimaux pour approcher les réels.

5.5 Le niveau du thème « Nature et écriture des nombres »

Je m'intéresse de façon plus précise au thème « Nature et écriture des nombres ». Qu'est-ce qui est ciblé précisément comme contenus à enseigner dans ce thème ? Quelle est la technologie qui sous-tend l'unité de ce thème ? Voilà les deux questions que je vais travailler.

Les savoirs à enseigner sont précisés dans le curriculum officiel, je rappelle l'essentiel des demandes :

- un objectif général du programme est le suivant : « Approfondir la connaissance des différents types de nombres » ;
- une demande du document d'accompagnement est de faire « une synthèse des connaissances rencontrées jusque là par les élèves » et d'introduire « les notations usuelles des différents ensembles » ;
- un lien numérico-géométrique est à réaliser conformément au programme : « L'ensemble des réels est l'ensemble des abscisses des points d'une droite (admis) ».

5.5.1 Le lien entre nature d'un nombre et écriture d'un nombre

Les savoirs à institutionnaliser sont répertoriés dans le tableau suivant (Cf. Tableau 5) dans lequel sont synthétisés tous les critères de reconnaissance des différents types de nombres à travers les diverses écritures les caractérisant. Des éléments du tableau sont surlignés en gris ce qui signifie qu'ils ne sont pas conformes au programme. Cependant pour un nombre : *être réel mais ne pas être rationnel*, cela le définit comme un *irrationnel* (ce qui est dans le programme) et la notation de cet ensemble sous la forme $\mathbb{R}$-$\mathbb{Q}$ est intéressante comme représentation pour désigner cet ensemble. De la même façon l'opposition décimal/idécimal est à développer comme étant une problématique centrale dans l'enseignement secondaire (Bronner, 1987), et la notation $\mathbb{R}$-$\mathbb{D}$ exprime cet ensemble des réels privés des décimaux. Bronner dans sa thèse a créé les nombres idécimaux, c'est-à-dire non décimaux, en reprenant l'opposition décimal/idécimal sur le modèle de rationnel/irrationnel et a montré un vide didactique à propos de l'étude des décimaux. Le terme idécimal n'est pas à utiliser avec les élèves, un synonyme de *idécimal* est *non décimal.*

Dans ce tableau, les critères de reconnaissance des types de nombres suivent en particulier une proposition qui se trouve dans un thème optionnel du programme de seconde et qui est la suivante : « Caractérisation des éléments de $\mathbb{D}$ et de $\mathbb{Q}$, soit en terme de développement décimal fini ou périodique, soit comme quotient irréductible d'entiers (le dénominateur étant ou non de la forme $2^p \times 5^q$). » Il est à remarquer que la distinction entre $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$ n'est pas claire dans cet énoncé dans lequel il faut implicitement reconnaître ce qui caractérise un élément de $\mathbb{D}$ ou de $\mathbb{Q}$.

Ensemble de nombres	Écriture décimale sans aucun zéro inutile	Exemple d'écriture décimale	Écritures caractéristiques	Exemple
$\mathbb{N}$ Entiers naturels	Une partie entière, sans virgule et sans partie décimale	2009		
$\mathbb{Z}$ Entiers relatifs	un signe + ou – suivi d'une partie entière, sans virgule et sans partie décimale	–2009	Le nombre est composé d'une valeur absolue[1] qui est un entier, et d'un signe qui est soit + ; soit -	
$\mathbb{D}$ Décimaux	La partie décimale contient un nombre fini de chiffres (éventuellement nul)	–2009 –23,015	$a \times 10^{-n}$ $(a \in \mathbb{Z})$ $(n \in \mathbb{N})$	-23015×10^{-3}
			$\frac{a}{10^n}$ $(a \in \mathbb{Z})$ $(n \in \mathbb{N})$	$\frac{-23015}{1000}$
			$\frac{a}{2^p \times 5^q}$ $(a \in \mathbb{Z})$ $(p \in \mathbb{N})$ $(q \in \mathbb{N})$	$\frac{-4603}{2^3 \times 5^2}$
$\mathbb{Q}$ Rationnels	La partie décimale peut être finie, ou être infinie et périodique	$-425{,}6\underline{138}$	$\frac{a}{b}$ $(a \in \mathbb{Z})$ $(b \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{-708647}{1665}$
$\mathbb{R}$ Réels	La partie décimale peut être finie, être infinie et périodique ou non	–23,015 $-425{,}6\underline{138}$ 5,101001000...		
$\mathbb{R}$-$\mathbb{D}$ Idécimaux	La partie décimale est infinie	$-425{,}6\underline{138}$... 5,101001000...		
$\mathbb{R}$-$\mathbb{Q}$ Irrationnels	La partie décimale est infinie et non périodique	5,101001000...		

Tableau 5: les ensembles de nombres et les écritures associées

L'importance de l'écriture décimale apparaît clairement dans ce tableau. L'écriture décimale d'un réel existe quel que soit ce réel et ce tableau synthétise les différentes caractéristiques de

[1] La valeur absolue peut être désignée par *distance à zéro*, notion travaillée au collège. Elle peut également être introduite, ou reprise, à ce moment de l'enseignement

ces écritures en fonction de la nature du nombre. Une question comme « quelle est la partie décimale de $\frac{13}{29}$ » est donc légitime et devrait pouvoir être posée en classe de seconde. Un parallèle est à faire avec la recherche de la partie entière d'un réel qui est une question qui se pose dans certains problèmes.

Je rappelle une définition[1] de la partie entière et de la partie décimale d'un réel dans le savoir de référence :

> On appelle partie entière d'un réel x et on note $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier qui lui est inférieur ou égal. Il est caractérisé par $E(x) \in \mathbb{N} \wedge E(x) \leq x < E(x) + 1$. $x - E(x)$ est appelé partie décimale ou partie fractionnaire de x, et est noté $[x]$.

Il apparaît nécessaire de fixer des règles concernant le registre des écritures décimales à savoir :

- Des pointillés après le dernier chiffre de la partie décimale traduisent le fait que la partie décimale est illimitée ;
- Si l'écriture décimale est infinie et périodique la période est soulignée (soit au dessus des chiffres, soit au dessous), ou alors elle est précisée en langage naturel. Les pointillés sont alors superflus.

5.5.2 Travail de la technique dans le thème « Nature et écriture des nombres »

5.5.2.1 Une praxéologie locale en lien avec une technologie

Je reviens à la deuxième question qui était de savoir quelle technologie commune sous-tend ce thème « Nature et écriture des nombres ». Pour répondre à cette question le tableau donne à voir le lien étroit pour un type de nombres entre sa nature et son écriture. À la question : « de quelle nature est ce nombre ? » la réponse générale est de reconnaître l'une des formes d'écriture décrites dans le tableau qui signe la nature du nombre, si cette reconnaissance n'est pas possible alors un travail de transformation de l'écriture du nombre est nécessaire pour obtenir l'une des écritures caractéristiques (ou canoniques). La technologie sous-jacente est alors composée par les écritures canoniques des différents types de nombres et de l'ensemble des règles de transformations des écritures des nombres pour parvenir à l'une des écritures canoniques caractéristique d'un type de nombre.

Des questions – et même des raisons d'être – pour lesquelles cette technologie pourra être mise en œuvre peuvent être les suivantes (la liste n'est pas exhaustive) :

- Quelle est la nature de ce nombre ?
- Est-ce que ces nombres sont égaux ?
- Est-ce que ce nombre est la valeur exacte de cette expression numérique ?

[1] Cette définition est extraite du site http://www.les-mathematiques.net/moteur/chercher.php3

- Quelle est la valeur exacte de cette expression numérique ?
- Est-ce que la solution graphique de cette équation est la valeur exacte de la solution ?
- Est-ce que la calculatrice donne la valeur exacte de ce nombre ?

Evidemment ces questions peuvent se poser au cours de la résolution d'un problème dans tous les domaines des mathématiques. La praxéologie locale ainsi définie autour de cette technologie amène à développer des praxéologies ponctuelles relatives au travail de techniques pour réaliser des transformations d'écriture des nombres.

5.5.2.2 Écritures canoniques des décimaux

Un type de tâches particulier en lien avec le problème plus général évoqué précédemment est de montrer qu'un nombre est décimal en utilisant la technique suivante : le transformer sous la forme $a \times 10^{-n}$ avec ($a \in \mathbb{Z}$) et ($n \in \mathbb{N}$). Les écritures canoniques du décimal sont au nombre de quatre dans le tableau précédent, ce qui nécessite un choix et va conditionner la technique en fonction du problème posé.

Mais ce tableau ne serait pas complet sans avoir ajouté une autre forme d'écriture à répertorier comme étant caractéristique d'un nombre décimal, à savoir l'écriture scientifique très utilisée dans toutes les disciplines scientifiques et mentionnée dans le programme. Je rappelle sa règle d'écriture pour un décimal non nul :

$$a \times 10^{n} \ (a \in \mathbb{D}) \text{ et } 1 \leq |a| < 10 \text{ et } (n \in \mathbb{Z})$$

Cette écriture est souvent utilisée pour l'affichage de la calculatrice en mode approché. Elle peut être étendue à tout nombre réel non nul.

5.5.2.3 L'opposition décimal/idécimal

Le curriculum officiel propose des types de tâches comme la reconnaissance de la nature des nombres pouvant être décimaux ou idécimaux, rationnels ou irrationnels. A côté de l'opposition rationnel/irrationnel, on voit apparaître des tâches de différenciation décimal/idécimal[1] au sens de Bronner (1997). Ce type de tâches était au centre de l'enseignement du numérique à l'époque de la réforme des mathématiques modernes, et il a été ensuite totalement péjoré pour revenir timidement aujourd'hui comme une proposition et non pas une prescription (Bronner, 2001). Cette proposition représente bien une reprise en lien avec du nouveau en donnant une représentation sémiotique d'un décimal sous la forme d'une écriture totalement nouvelle par rapport au collège. Cette nouvelle caractérisation du décimal permet d'enrichir le concept de décimal au sens de Vergnaud (1990) ainsi que le rapport personnel des élèves à l'objet nombre décimal. Elle devient également un élément technologique ou théorique permettant de développer de nouvelles praxéologies

[1] Le terme idécimal n'est pas utilisé dans les classes avec les élèves, il est synonyme pour eux de « non décimal ».

mathématiques. Je montrerai plus loin comment cela peut ouvrir le champ des démonstrations en seconde concernant le type de tâches T.

5.5.2.4 *Le cas des irrationnels*

Pour démontrer qu'un nombre est irrationnel il apparaît nécessaire que certaines connaissances soient institutionnalisées. En particulier j'ai développé plus loin le fait que le nombre π a été obligatoirement rencontré au collège mais que son statut n'est certainement pas clair en l'absence de critères précis pour différencier les types de nombres (Cf. p. 100). En classe de seconde ce statut d'irrationnel de π devrait être institué comme savoir à admettre. Il apparaît également nécessaire d'institutionnaliser le théorème suivant :

« si a est un entier naturel et si a n'est pas un carré parfait alors $\sqrt{a}$ est un nombre irrationnel. »

Cela permettrait de développer de manière plus satisfaisante des démonstrations à propos du type de tâches T dans le cas de certains irrationnels. Ces connaissances feraient ainsi partie de l'espace numérique en construction en classe de seconde.

5.5.3 Rôle de la droite graduée dans le thème « Nature et écriture des nombres »

Je m'intéresse au statut et au rôle de la droite des réels dans le curriculum. Le programme de seconde précise ceci : « On admettra que l'ensemble des réels est l'ensemble des abscisses des points d'une droite. » Par ailleurs le curriculum officiel donne un appui aux professeurs de seconde en faisant figurer un « rappel des programmes antérieurs » pour chacun des domaines. Ce qui concerne la droite graduée est rappelé dans le Tableau 6. L'avènement de la droite graduée complète est la finalité d'un processus de reprises successives commencé au début du collège. En effet la droite graduée apparaît en sixième, elle est enrichie en cinquième avec les nombres négatifs, elle est petit à petit complétée grâce aux nouvelles rencontres avec des rationnels et des irrationnels. Elle constitue un outil d'unification des nombres qui permet de dépasser les différences dans leurs écritures et qui permet une représentation mentale de tout réel.

SIXIÈME	CINQUIÈME	QUATRIÈME	TROISIÈME
Abscisses positives sur une droite graduée. Repérage dans le plan par des entiers relatifs.	Repérage sur une droite graduée et dans le plan.	Alignement de points et proportionnalité.	Coordonnées du milieu d'un segment, d'un vecteur ; distance de deux points à partir de leurs coordonnées.

Tableau 6 : programme de seconde, rappel des années antérieures

Dans l'introduction des programmes du collège une mention particulière est inscrite pour souligner l'importance de cette droite dans la rubrique *Travaux numériques* : « Se représenter la droite graduée complète, avec son zéro séparant les valeurs positives et négatives et apprendre à y localiser les nombres rencontrés » (p. 17). Dans l'accompagnement des programmes du cycle central 5^e- 4^e se trouve également cette recommandation :

> Le souci de progressivité conduit à une évolution dans la manière d'employer les coordonnées. Par exemple, on peut parler d'un point d'abscisse $-\frac{4}{3}$ sur une droite graduée dès la classe de 5^e, mais il sera alors situé grâce à une approximation du quotient ; le placement du point par une construction utilisant le résultat de Thalès est prévu en classe de 3^e. (p. 62)

On a ici affaire à un type de tâches numérico-géométrique : « placer un point d'abscisse un réel donné sur la droite graduée » qui peut se développer encore en troisième et en seconde avec des irrationnels écrits avec des racines carrées ou des fonctions trigonométriques. La droite graduée est finalement un outil qui permet la réification des nombres et de leurs relations grâce à l'isomorphisme entre la droite affine et euclidienne et l'ensemble des réels.

Je termine ce regard sur la place de la droite des réels dans le curriculum officiel de la classe de seconde par la vision pour le moins originale et étrange de cette droite qui peut s'enrouler ! C'est effectivement l'image qui est donnée dans le programme pour faire comprendre la fonction du cercle trigonométrique : « La définition de $sin\,x$ et $cos\,x$ pour un réel x quelconque se fera en « enroulant $\mathbb{R}$ » sur le cercle trigonométrique ».

5.6 Le niveau du thème « Valeur absolue »

Dans le secteur « Calcul et fonctions », un objet apparaît comme étant complètement nouveau en seconde avec une désignation et une notation spécifiques, c'est *la valeur absolue* d'un nombre. Comme la désignation des ensembles, la valeur absolue est une borne temporelle dans l'avancée des savoirs. Une nouveauté qui donne la preuve que le processus de chronogenèse est bien relancé. Je développerai plus loin l'analyse de l'enseignement de la valeur absolue chez Mathieu et chez Clotilde (Cf. section 8.2).

5.6.1 Le curriculum officiel concernant la valeur absolue

5.6.1.1 La valeur absolue un nouvel objet du numérique

Le programme en vigueur au moment de ce travail inscrit l'objet valeur absolue dans le domaine « Calcul et fonctions » et dans un thème essentiellement numérique. Je rappelle précisément ce qui est écrit dans le programme sous la forme d'un tableau (voir page suivante) qui reprend une partie de la Figure 4 présentée en page 63. Il apparaît notamment dans ce tableau que l'ordre des nombres et la valeur absolue d'un nombre semblent être des thèmes que le programme veut associer, un lien possible parait être la notion d'intervalle.

Pour éclairer le programme ce commentaire se trouve dans le document d'accompagnement : « Aucune étude particulière n'est demandée. Cette **notation**[1] sera présentée essentiellement pour exprimer la distance entre deux nombres. » Les programmes présentent la notion de

[1] Mis en gras dans cet écrit

valeur absolue dans le cadre numérique comme étant la distance entre deux nombres ; cette notion est dans les contenus du programme, mais l'accompagnement du programme minimise cette place pour la réduire à une notation. Cette conception conforte l'idée que la valeur absolue apparaît davantage comme un nouvel *opérateur*[1] de l'*espace numérique* construit en seconde.

Contenus	**Capacités attendues**	**Commentaires**
Ordre des nombres. Valeur absolue d'un nombre.	Choisir un critère adapté pour comparer des nombres. Comparer a, a^2 et a^3 lorsque a est positif. Caractériser les éléments d'un intervalle et le représenter.	La valeur absolue d'un nombre permet de parler facilement de la distance entre deux nombres.

Tableau 7 : la valeur absolue dans le programme de seconde

Voici un autre thème du domaine « Calcul et fonctions » dans lequel apparaît explicitement la valeur absolue :

Contenus	**Capacités attendues**	**Commentaires**
Premières fonctions de référence.	Établir le sens de variation et représenter graphiquement les fonctions $x \to x^2$, $x \to \frac{1}{x}$. Connaître la représentation graphique de $x \to \sin x$ et de $x \to \cos x$	D'autres fonctions telles que : $x \to \sqrt{x}$, $x \to x^3$, $x \to \lvert x \rvert$, etc., pourront être découvertes à l'occasion de problèmes. Les résultats les concernant pourront être admis.

Tableau 8

L'opérateur valeur absolue peut être travaillé en tant que fonction à l'occasion de résolutions de problèmes, mais ce n'est qu'une proposition.

5.6.1.2 La valeur absolue : une reprise du collège

Un respect scrupuleux des programmes peut laisser penser que la valeur absolue est réduite à l'usage d'une notation quand elle est pertinente et que son usage est surtout rencontré en lien avec une conception géométrique des nombres appréhendés en tant qu'abscisses de points comme cela vient d'être montré dans le paragraphe précédent.

Cette conception de la valeur absolue n'est pas nouvelle, elle est à relier à la première rencontre avec le concept qui a eu nécessairement lieu en classe de cinquième lorsque les élèves ont appris à additionner les nombres relatifs. La dénomination la plus couramment utilisée alors a été *la distance à zéro* du nombre pour nommer de fait sa valeur absolue. Le programme de cinquième exprime clairement que « la notion de valeur absolue n'est pas

[1] Voir le *filtre du numérique* (Cf. section 2.1.3.1).

introduite[1] ». Pourtant ce même programme indique que le concept est travaillé en acte en précisant ceci :

> **Compétences exigibles**
>
> • Sur une droite graduée :
>
> – lire l'abscisse d'un point donné,
>
> – placer un point d'abscisse donnée,
>
> – déterminer la distance de deux points d'abscisses données.
>
> […]
>
> **Commentaires**
>
> Les activités graphiques conduiront :
>
> – à enrichir la correspondance entre nombres et points d'une droite déjà graduée à l'aide de nombres entiers, en développant l'usage des nombres décimaux relatifs,
>
> – à interpréter l'abscisse d'un point d'une droite graduée en termes de distance et de position par rapport à l'origine ; en particulier, le cas où l'origine est le milieu de deux points donnés mérite de retenir l'attention,
>
> – à relier la distance de deux points sur un axe et la soustraction des nombres relatifs,
>
> […]

Par ailleurs, les objets suivants qui figurent au programme de cinquième nécessitent le recours de ce *concept en acte*. Il s'agit en particulier de :

- la notion d'opposé d'un nombre ;
- les règles de comparaison de deux relatifs ;
- la règle d'addition des relatifs.

La disparition de l'objet valeur absolue en tant que concept explicite a amené les enseignants et les auteurs de programmes à combler ce vide didactique en créant l'expression *distance à zéro* ou encore *partie numérique*[2].

5.6.1.3 Les types de tâches algébriques en lien avec la valeur absolue

Aucun travail dans le cadre algébrique en lien avec la valeur absolue n'est mentionné comme un objectif du programme. Pourtant, comme je le montrerai plus loin, les professeurs Mathieu et Clotilde proposent un travail important concernant les résolutions d'équations ou d'inéquations comportant des valeurs absolues. La question se pose de savoir si ces types de tâches algébriques sont ou non conformes au programme officiel de seconde. D'après les précisions du curriculum officiel données précédemment la réponse parait négative. Pourtant

[1] Programme de cinquième entré en vigueur en 2006, mais cette précision était déjà dans les programmes de 1985.

[2] En examinant dix manuels de cinquième parus en 2006, un seul emploie l'expression *partie numérique* (Bréal), les neuf autres utilisent l'expression *distance à zéro*.

du côté du savoir enseigné, pour les professeurs cette question apparaît de façon récurrente et sa réponse n'est pas évidente. Voici par exemple en quels termes un professeur stagiaire de l'IUFM de Marseille en formation initiale en 2006-2007 s'interroge :

> Il a été dit en GFP[1] que, en ce qui concerne la résolution d'équations et inéquations avec les valeurs absolues, cela doit se faire graphiquement à l'aide de la droite graduée, au regard du fait que la valeur absolue doit être vue comme une distance. Néanmoins certains élèves m'ont demandé s'ils pouvaient faire la résolution algébrique (cas positif, cas négatif, résolution classique). Je leur ai répondu par la négative en argumentant que c'est hors programme. Ma PCP[2] m'a dit par ailleurs que ce serait bien qu'ils la voient quand même (« pour les bons élèves »). Je pense leur montrer juste une fois avec les valeurs approchées en module, ceci étant à rapprocher des limites de suites, ce à quoi se prête mieux une résolution algébrique (je pense…). Est-ce une bonne initiative ?

Ce stagiaire ne se demande pas si « la résolution d'équations et inéquations avec les valeurs absolues » fait véritablement partie du curriculum officiel. Sa question porte seulement sur les techniques à développer. Son formateur de GFP à l'IUFM et sa conseillère pédagogique ne mettent pas en doute non plus l'existence de ce type de tâches algébriques dans le savoir à enseigner.

En résumé ces questions subsistent pour l'enseignement de la valeur absolue en seconde : Quelle interprétation donner des textes officiels ? Quelle raison d'être de la valeur absolue ? Qu'est-ce qui peut motiver son étude ? Quelles articulations avec des connaissances plus anciennes ou ultérieures ? Quelles articulations avec d'autres cadres ?

L'ancien programme de seconde, avant celui qui est entré en vigueur en 1999, comportait ce commentaire explicite : « L'étude des équations ou inéquations comportant des radicaux est en dehors des objectifs du programme ; il en est de même pour celles comportant des valeurs absolues, mis à part, les exemples numériques du type $|x - a| = b$ ou $|x - a| \leq b$. » Avec ces exemples dans lesquels l'inconnue a pour coefficient le nombre 1, le lien peut être effectivement fait facilement avec la notion d'intervalle.

5.6.1.4 Le travail relatif à la valeur absolue conformément au curriculum officiel

A la lecture du curriculum officiel, le travail relatif à la notion de valeur absolue apparaît donc très réduit, et ce qui est strictement exigible peut se résumer aux connaissances suivantes :

1°) savoir interpréter et utiliser la notation de la valeur absolue et savoir donner la valeur absolue d'un réel déterminé.

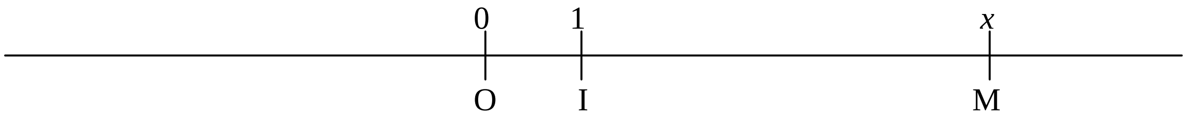
Exemples : $|4| = 4$; $|-4| = 4$; $|\sqrt{5} - 3| = 3 - \sqrt{5}$

[1] Groupe de formation professionnelle, dispositif de formation initiale mis en place à l'IUFM de Marseille

[2] Conseillère pédagogique

2°) savoir exprimer et utiliser la valeur absolue d'un réel indéterminé, c'est à dire savoir que : *la valeur absolue d'un réel positif est lui même, la valeur absolue d'un réel négatif est égale à son opposé.*

3°) savoir donner une interprétation de la valeur absolue d'un nombre dans le cadre de la géométrie : *si on a un nombre, et si on considère le point d'une droite graduée qui a pour abscisse ce nombre, alors la valeur absolue de ce nombre est la distance de ce point à l'origine de la droite.*



$$|x| = OM = d(O\,;M\,)$$

4°) connaître et savoir utiliser le théorème :

Si deux points A et B ont respectivement pour abscisses a et b sur une droite graduée alors la distance AB est égale à la valeur absolue de la différence des abscisses des deux points.

Connaître la définition de la distance de deux nombres qui est égale à la distance AB, ou encore à $|a-b|$.

5°) savoir changer de point de vue entre un ensemble de nombres défini soit par des intervalles, soit par des inégalités. En particulier :

- connaître et savoir utiliser les équivalences suivantes : quel que soit le réel x et le réel strictement positif a :
  $$|x| < a \Leftrightarrow x > -a \text{ et } x < a \Leftrightarrow x \in \,]-a; a[$$
- $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ ou $x > a \Leftrightarrow x \in \,]-\infty\,; -a[\, \cup \,]a\,;\, +\infty[$
- savoir interpréter chacune de ces propositions dans le registre graphique avec une droite graduée.

5.6.1.5 Des situations pour faire travailler la valeur absolue

Une question devrait se poser au professeur de seconde, celle de savoir quelles sont les raisons d'être et les situations à faire rencontrer aux élèves pour qu'ils étudient ce concept et les connaissances repérées précédemment.

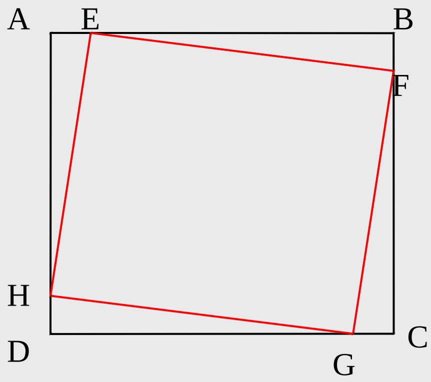
Voici des éléments de réponse :

- calculs du type $\sqrt{f(x)^2}$;
- résolutions d'inéquations du premier degré à une inconnue ;
- recherche de deux points d'une droite graduée pour lesquels on connaît une relation portant sur leur distance ;
- recherche de valeurs approchées d'un nombre et détermination de la marge d'erreur dans un problème d'approximation ;

- modélisation d'une situation conduisant à résoudre une équation ou une inéquation comportant des valeurs absolues, le coefficient de l'inconnue étant le nombre 1. Un exemple est donné par Chevallard ci-dessous : un problème dans le cadre géométrique amène à résoudre une inéquation du second degré à une inconnue se ramenant à une forme du type $(x-a)^2 \geq b$ (a et b étant des réels strictement positifs).

Des matériaux pour une réponse à la question précédente

Voici un extrait d'une réponse écrite par Chevallard (séminaire 2002-2003) relative à une question similaire à celle présentée auparavant.

> . Le programme de 2de semble en effet ne pas pousser à la considération d'expressions telles que $|2x + 10|$: la décision de bannir celles-ci de la classe de 2de n'est donc, *a priori*, nullement illégitime.
>
> . On peut toutefois prendre un point de vue un peu différent sur cette question si l'on situe les expressions considérées dans un contexte d'emploi fonctionnel. Un exemple permettra d'illustrer ce phénomène.
>
> • Considérons un carré de carton ABCD de 8 cm de côté. Les « coins » ayant été un peu endommagés, on veut retailler le carton selon le schéma ci-après, où l'on a AE = BF = CG = DH = x (on suppose connu le fait que le quadrilatère EFGH est un carré), l'aire du carré inscrit devant rester supérieure à, disons, 50 cm^2.
>
> 
>
>
> • Selon la manière dont on calcule l'aire du carré inscrit, on arrive à l'une ou l'autre des inéquations équivalentes suivantes : $x^2 + (8-x)^2 \geq 50$ ou $64 - 2(8-x)x \geq 50$. La seconde inéquation, pour s'en tenir à celle-là, équivaut encore à $(8-x)x \leq 7$. Cette inéquation se résout ainsi : $-x^2 + 8x - 7 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 \geq 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 \geq 9 \Leftrightarrow |x-4| \geq 3 \Leftrightarrow x \leq 1$ ou $x \geq 7 \Leftrightarrow x \in [0 ; 1] \cup [7 ; 8]$.

En synthèse, pour que l'objet valeur absolue s'insère dans le curriculum de l'année de seconde, il paraît nécessaire de trouver des situations mathématiques, comme celle proposée par Chevallard, qui motivent son emploi. Le passage suivant de l'introduction du programme de mathématiques de seconde étaye cette proposition : « Chaque chapitre est l'occasion de constater l'économie de pensée qu'apportent des notations adaptées et d'éprouver la nécessité d'avoir à ce propos des conventions claires. »

6 Analyse du savoir enseigné à partir des manuels

J'ai analysé sept manuels parus en même temps que le manuel Déclic des classes de Mathieu et de Clotilde (six parus en 2004 comme le Déclic et un en 2005). Tous ces manuels abordent le programme de seconde par un chapitre sur les nombres. Un manuel qui se singularise est paru chez Nathan (intitulé Math 2^{de}) mais il ne fait pas partie de ceux que j'ai analysés précisément. Ce manuel propose un premier chapitre intitulé « Statistiques. Simulations ». Il est donc caractérisé par le fait qu'il commence par un chapitre qui ne concerne pas le domaine numérique mais qui « embarque » nécessairement de très nombreuses connaissances du numérique qui se trouvent ainsi utilisées de façon fonctionnelle. Dès le début du chapitre de ce livre une reprise sous la forme de révisions est proposée avec des rappels sur les formules donnant la moyenne. Le domaine de la statistique est propice au travail sur le calcul numérique et algébrique et il permet la reprise de ces notions en tant qu'outils ce qui légitime leur intérêt et donne des raisons d'être pour leur apprentissage. L'articulation entre les domaines du numérique et de la statistique est explicitement précisée dans le document d'accompagnement des programmes : « La statistique donne lieu à de nombreuses activités numériques et favorise la maîtrise du calcul […] ». Les sept manuels qui commencent par un chapitre concernant les nombres font cependant des choix assez différents. Ces différences s'expriment à travers les contenus mathématiques mais aussi à travers l'activité mathématique proposée. Dans la comparaison de ces sept manuels le premier chapitre aborde toujours les ensembles de nombres et leur dénomination. Les connaissances sont travaillées en général en tant qu'objets, les exercices n'ont aucune finalité, les autres cadres sont peu convoqués. Un manuel se distingue, le Bréal, il propose en introduction de véritables résolutions de problèmes, l'un dans le cadre numérique, un autre dans le cadre de la géométrie euclidienne (Cf. annexe 11.7). Ce dernier problème permet de produire des nombres rationnels et irrationnels dans une *dynamique numérico-géométrique* (en référence au *filtre du numérique* de Bronner). Ainsi une reprise de connaissances anciennes du collège va être articulée avec des nouveautés de seconde en examinant les caractéristiques des nombres apparus dans la résolution d'un problème. Le Tableau 9 de la page suivante synthétise ces éléments.

	Etude du contenu du premier chapitre sans la partie exercices			
Manuel	Titre du premier chapitre	L'ensemble des réels est-il associé à la droite graduée ?	Le cadre géométrique est-il présent ?	De véritables problèmes pour motiver les différents nombres sont-ils proposés ?
Collection Math'x Didier 2005	Les nombres	oui	oui (2 problèmes)	oui
Collection Radial Belin 2004	Nombres. Ordre dans $\mathbb{R}$. Valeur absolue.	non	non (sauf pour construire $-\sqrt{5}$)	non
Modulo math Didier 2004	Nombres. Calcul littéral.	oui	non (sauf nombre d'or)	oui
Collection hyperbole Nathan 2004	Nombres et calculs.	oui	oui (dans la partie appelée TD)	non
Trans math Nathan 2004	Nombres. Calculs. Equations.	oui	non	non
Bréal IREM de Poitiers 2004	Les nombres	oui	oui	Oui (en introduction et dans la proposition des thèmes d'étude)
Déclic Hachette 2004	Calcul numérique et algébrique	non	non	non

Tableau 9 : analyse du premier chapitre de manuels de seconde

En explorant ces différents ouvrages de seconde, je peux constater que le manuel Déclic est très représentatif des choix des autres auteurs. Il apparaît avec le plus de cloisonnements entre les cadres mathématiques. Le cadre géométrique n'est pas convoqué dans le corps du cours (il le sera cependant dans la partie des exercices), la droite graduée n'est même pas associée à l'ensemble des réels, et les objets sont présentés sans être motivés par une tâche ou un problème ou encore une question. Les auteurs sont presque dans la provocation en intitulant leur premier chapitre « Calcul numérique et algébrique » en négligeant totalement la recommandation de l'accompagnement des programmes[1] déjà citée précédemment (Cf. section 5.3.5) :

> Le programme rassemble sous un titre unique un bilan sur les ensembles de nombres, les problèmes de calcul numérique et algébrique et l'étude des fonctions. C'est une invitation forte à chaque enseignant pour qu'il construise son cours en faisant interagir ces divers éléments […] De ce fait, aucun titre relatif au calcul algébrique n'apparaît : celui-ci se retrouve dans les divers items du programme.

[1] Ce document concerne le programme de 2^{de} paru au BO hors-série n° 6 du 12 août 1999

7 Analyse des progressions de Clotilde et de Mathieu

7.1 Progressions annuelles

Je présente le déroulement de l'année dans les classes de Mathieu et de Clotilde sous la forme de tableaux. Chaque tableau correspond à une période scolaire entre deux temps de vacances. L'année est ainsi décomposée en cinq périodes, et chacune d'entre elle est découpée en semaines. La date du premier jour de la semaine, le lundi, l'identifie. J'indique les éléments qui apparaissent dans ces tableaux :

- Les chapitres enseignés ;
- Les devoirs donnés tout au long de l'année : devoirs à la maison (DM) ; devoirs en classe (DS), certains étant des devoirs de contrôle notés sur 20, d'autres sont des interrogations écrites rapides notés sur 5 ou sur 10 ;
- Les dates des entretiens avec des élèves ou avec le professeur (noté : Entret.);
- Les dates de mes observations dans la classe en précisant si la séance a été filmée ou non (noté : Observ.)

7.1.1 Déroulement de l'année pour la classe de Mathieu

	Reprise scolaire							**Vacances**
Semaine	04 09 06	11 09 06	18 09 06	25 09 06	02 10 06	09 10 06	16 10 06	26 10 06
Chapitre	**Activités numériques**						**Int. de $\mathbb{R}$**	
Devoirs	Test			DS n°1 27/09		DS n°2 le 11/10		
Entret.								
Observ.								

Tableau 10 : organisation de l'enseignement dans la classe de Mathieu (partie 1)

Le début de mes observations dans la classe de Mathieu a été assez tardif : le 2 décembre 2006. J'avais sous-estimé la difficulté de trouver des enseignants non débutants et non experts, volontaires pour ouvrir leur porte à un regard extérieur. Les très nombreuses demandes adressées à des professeurs sont pratiquement toutes restées sans réponse. Je n'ai donc pas pu observer directement la classe de Mathieu dans cette période particulière que j'ai appelée la *reprise scolaire* (Cf. p. 29).

	Fin du premier trimestre							Vacances
Semaine	06 11 06	13 11 06	20 11 06	27 11 06	04 12 06	11 12 06	18 12 06	25 12 07
Chapitre	**Intervalles de ℝ**		**Géométrie plane**					
Devoirs	DM n°1 06/11	DS n° 3 15/11		DS n° 4 02/12			DS sur 5 23/12	
Entret.			Prof 25/11		Prof 06/12	Prof 16/12		
Observ.				02/12 1 h	06/12 1 h filmée	16/12 2 h 1 h AI filmées		

Tableau 11 : organisation de l'enseignement dans la classe de Mathieu (partie 2)

	Début deuxième trimestre					Vacances
Semaine	08 01 07	15 01 07	22 01 07	29 01 07	05 02 07	12 02 07
Chapitre	**Généralités sur les fonctions**			**Triangles iso. et sem.**		
Devoirs	DM n°2 10/01		DS sur 5 27/01	DS n°5 29/01		
Entret.					3 élèves 06/02	
Observ.	13/01 2 h filmées 1h	17/01 1h				

Tableau 12 : organisation de l'enseignement dans la classe de Mathieu (partie 3)

	Fin deuxième trimestre					Vacances
Semaine	26 02 07	05 03 07	12 03 07	19 03 07	26 03 07	02 04 07
Chapitre	**Vecteurs**			**Fonctions usuelles**		
Devoirs	DM n°3 03/03		DS n°6 14/03	DS n°7 21/03		
Entret.						
Observ.	03/03 2h		17/03 2h		28/03 1 h	

Tableau 13 : organisation de l'enseignement dans la classe de Mathieu (partie 4)

Au cours de l'année 2006 2007 j'ai assisté à 19 séances d'enseignement dans la classe de Mathieu, dont sept séances qui ont été filmées. J'ai eu cinq entretiens avec le professeur et deux avec les élèves. Par ailleurs une élève a accepté en fin d'année, le 2 juin, de répondre par écrit à des questions qui reprenaient des notions du programme (noté « Test » dans le tableau).

	Troisième trimestre								
Semaine	16 04 07	23 04 07	30 04 07	07 05 07	14 05 07	21 05 07	28 05 07	04 06 07	11 06 07
Chapitre		**Fonctions affines**			**Trigonométrie**			**Fin des cours le 04/06**	
Devoirs			DS n°8 05/05		DM n°4 16/05		Test 1 élève 02/06		
Entret.						Prof 26 /05	2 élèves 29/05	Prof 05/06	
Observ.						23/05 1h filmée 26/05 2h	02/06 2h		

Tableau 14 : organisation de l'enseignement dans la classe de Mathieu (partie 5)

7.1.2 Déroulement de l'année pour la classe de Clotilde

L'année 2006 2007 pendant laquelle j'ai suivi l'enseignement dans la classe de Mathieu, a été une année de recueil de données, mais également une année exploratoire pour préciser la méthodologie. Ainsi j'ai pu commencer beaucoup plus tôt ma coopération avec Clotilde que j'ai rencontrée dès le 18 septembre et j'ai pu assister à quatre séances pendant la *reprise scolaire*.

	Reprise scolaire								Vacances
Semaine	03 09 07	10 09 07	17 09 07	24 09 07	01 10 07	08 10 07	15 10 07	22 10 07	29/10
Chapitre	**Calcul numérique et algébrique**					**Géométrie plane**		**Int. et v. a.**	
Devoirs			QCM	DM n°1 27/09	DS n°1 05/10		DS n°2 17/10	DM n°2 23/10	
Entret.			18/09 prof						
Observ.			21/09 1h		03/10 1h			22/10 1h filmée 24/10 1h	

Tableau 15 : Organisation de l'enseignement dans la classe de Clotilde (partie 1)

	Fin du premier trimestre							Vacances
Semaine	12 11 07	19 11 07	26 11 07	03 12 07	04 12 07	10 12 07	17 12 07	24 12 07
Chapitre	**Int. et v. a.**	**Fonctions : généralités**				**Transformations et triangles**		
Devoirs	QCM	DS n°3 16/11		DS sur 10 30/11		DS n°4 10/12	DM n°3 19/12	
Entret.					Prof 6/12			
Observ.			28/11 1h		06/12 1h module			

Tableau 16 : Organisation de l'enseignement dans la classe de Clotilde (partie 2)

	Début deuxième trimestre						Vacances
Semaine	07 01 08	14 01 08	21 01 08	28 01 08	04 02 08	11 02 08	18 02 08
Chapitre		**Fonctions affines – systèmes linéaires**				**Vecteur**	
Devoirs	DS sur 10 11/01 DM 07/01	DM n°4 16/01 DS n°5 18/01		DS n°6 28/01		DS n°7 15/02	
Entret.							
Observ.				31/01 1h			

Tableau 17: Organisation de l'enseignement dans la classe de Clotilde (partie 3)

	Fin deuxième trimestre						Vacances
Semaine	03 03 08	10 03 08	17 03 08	24 03 08	31 03 08	07 04 08	14 04 08
Chapitre	**Vecteurs**		**Fonction carré et fonction inverse**				
Devoirs	DM n°5 03/03		DS sur 10 17/03	DS n°8 28/03		DS sur 10 09/04 DM n°6 10/04	
Entret.						10/04 3 élèves Prof.	
Observ.			17/03 1h			10/04 1h 11/04 1h	

Tableau 18 : Organisation de l'enseignement dans la classe de Clotilde (partie 4)

	Troisième trimestre								Vacances
Semaine	28 04 08	05 05 08	12 05 08	19 05 08	26 05 08	02 06 08	09 06 08	16 06 08	
Chapitre		**Trigonométrie**		**Géométrie dans l'espace**			**Statistique**		
Devoirs		DS n°9 05/05	DS n°10 15/05 révision			DS n°11 02/06			
Entret.									
Observa.	30/04 1h 02/05 1h	09/05 1h film	16/05 1h						

Tableau 19 : Organisation de l'enseignement dans la classe de Clotilde (partie 5)

J'ai assisté dans l'année à 14 séances dans la classe de Clotilde, et deux séances ont été filmées. J'ai enregistré trois entretiens avec le professeur et un seul entretien avec trois élèves. Cette deuxième année aurait dû permettre de recueillir davantage de données du côté des élèves grâce à des entretiens et à des observations de leur travail en dehors des heures de classe. Mais ce projet n'a pas pu aboutir comme je l'aurais voulu.

7.1.3 Un geste professionnel : programmer l'enseignement sur l'année

Je vais donner un point de vue global sur les programmations annuelles élaborées par Mathieu et Clotilde, mais auparavant je vais revenir à la notion de *geste professionnel*. Un geste professionnel (Larguier et Bronner, 2004) est nécessaire dans le métier de professeur de mathématiques, il est relatif au type de tâches « élaborer une progression annuelle pour un niveau d'enseignement donné ». Je rappelle des prescriptions du programme de seconde[1] relatives à l'élaboration de cette progression :

> Le programme qui suit est écrit dans le cadre d'une seconde de détermination. Il est composé de trois grands chapitres : statistique, calcul et fonctions, géométrie. […]
>
> À titre indicatif, le temps à consacrer aux différents chapitres pourrait être de 1/8 pour les statistiques, le reste se répartissant équitablement entre les deux autres chapitres. L'informatique, devenue aujourd'hui absolument incontournable, permet de rechercher et d'observer des lois expérimentales dans deux champs naturels d'application interne des mathématiques : les nombres et les figures du plan et de l'espace. Cette possibilité d'expérimenter, classiquement davantage réservée aux autres disciplines, doit ouvrir largement la dialectique entre l'observation et la démonstration, et, sans doute à terme, changer profondément la nature de l'enseignement. Il est ainsi nécessaire de familiariser le plus tôt

[1] BO hors série du 30 août 2001.

> possible les élèves avec certains logiciels ; en seconde, l'usage de logiciels de géométrie est indispensable.

Malgré ces injonctions, après une année d'observation auprès de ces deux professeurs, j'ai constaté que Mathieu et Clotilde ont choisi de ne pas consacrer un huitième de l'année à l'enseignement du domaine de la statistique. Mathieu n'a pas abordé ce domaine, en justifiant ce choix par le fait que les contenus abordés en seconde seront de nouveau travaillés en première. Clotilde a fait un chapitre de statistique en fin d'année et voici ce qu'elle m'a dit lors d'un entretien le 10 avril 2008 à ce propos :

> **Chercheur** : Qu'est ce que vous pensez des programmes qui disent qu'il faut consacrer un huitième du temps au moins aux statistiques en seconde ?
>
> **Clotilde** : Ah moi je comprends pas.
>
> **Chercheur** : Vous ne comprenez pas.
>
> **Clotilde** : J'ai fait un DESS de statistiques pourtant et je devrais aimer ça mais euh franchement euh je vois pas trop euh. C'est clair je suis bête et disciplinée moi mais…
>
> **Chercheur** : Enfin c'est dans les programmes actuels
>
> **Clotilde** : Oui oui je le ferai. Si la nécessité se... s'ils en mettent plus j'en ferai plus parce qu'on me dira d'en faire plus.

La progression suivie par Mathieu est cautionnée par un groupe de neuf professeurs du lycée qui suivent cette progression commune. Les tableaux précédents rendent compte de ce choix. D'autre part Mathieu et Clotilde n'ont pas utilisé d'ordinateur en classe et n'ont jamais conduit leurs élèves en salle informatique malgré une dotation en matériel informatique importante dans leur lycée. Je ne connais pas les raisons pour lesquelles ils n'ont pas développé cet aspect concernant l'apprentissage de certains logiciels.

Les programmations annuelles des enseignements de Mathieu et de Clotilde confirment ce qui a été observé par Artaud et Menotti (2008) à propos des programmations élaborées par des professeurs de seconde pour le secteur « fonctions » : « La plupart d'entre elles utilisent une structuration thématique qui suit globalement l'ordre de présentation du programme sur les fonctions […] ». En analysant l'organisation mathématique au niveau du secteur fonctions, elles ont observé : « une succession de types de tâches et de techniques associées qui reflète la structuration du programme sans que leur fonctionnalité soit recherchée. On aboutit alors à une juxtaposition d'organisations mathématiques ponctuelles […], leur articulation n'étant pas manifeste. » Le même phénomène sera repéré lors de l'étude des organisations mathématiques chez Mathieu et Clotilde, son origine semble donc être la soumission des enseignants à l'ordre linéaire d'écriture des programmes en ne tenant pas compte des prescriptions pourtant très explicites qui demandent aux professeurs de faire des liens entre différents secteurs. Cette difficulté déjà maintes fois dénoncée par Chevallard est décrite ainsi par Artaud & Menotti (2008) : « le manque d'articulation des différents composants de l'organisation mathématique mise en place, en raison notamment d'un manque de « fonctionnalisation » de ces différents composants et d'une vision trop thématique du secteur à étudier. »

7.2 Débuts des progressions lors de la *reprise scolaire*

7.2.1 Description

Pour débuter la progression de l'année de seconde en mathématiques plusieurs cas sont possibles relativement à la présence de connaissances du numérique et concernant les RDN :

- soit le premier chapitre concerne directement le domaine numérique et contient nécessairement des RDN ;
- soit le premier chapitre ne concerne pas le domaine numérique (par exemple statistique, fonctions, géométrie…) et permet ou non des RDN.

Cette dernière éventualité parait peu probable dans la mesure où les connaissances numériques apparaissent nécessaires dans tous les domaines d'enseignement de seconde.

Je présente un tableau (Cf. Tableau 20) qui donne les progressions suivies par Mathieu et Clotilde pendant la *reprise scolaire*. J'ai reproduit la structure du cours telle qu'elle apparaît dans des cahiers d'élèves.

Mathieu[1]	**Clotilde**[2]
Chapitre I - Activités numériques I – Techniques de base 1°) Opérations sur les fractions 2°) Développements 3°) Puissance d'un nombre 4°) Racine carrée 5°) Méthode : comment démontrer une égalité ? 6°) Factoriser II – Ensembles de nombres III – Equations du premier degré à une inconnue IV – Arithmétique **Chapitre II -Intervalles de $\mathbb{R}$** I – Inéquations II – Intervalles III – Valeur absolue	**Chapitre I - Calcul numérique et algébrique** I – Les ensembles de nombres II – Les différentes écritures 1°) Valeur exacte et valeur approchée 2°) Notation scientifique. Ordre de grandeur 3°) Ordre de priorité dans le calcul numérique III – Rappel sur les puissances IV – Développer et factoriser V – Rappels sur les racines carrées VI – Arithmétique et nombres premiers **Chapitre II – Géométrie plane** **Chapitre III – Intervalles et valeur absolue** I – Intervalles de **R** II – Application des intervalles aux inéquations III – Valeur absolue

Tableau 20: progressions de la reprise scolaire chez Mathieu et Clotilde

[1] Mathieu ne donne jamais de cours polycopié, tout est écrit par le professeur au tableau et les élèves recopient.

[2] Les parties grisées correspondent à des cours donnés sur polycopiés et que les élèves ont en partie complétés.

Les deux professeurs ont commencé le programme annuel par un chapitre contenant des révisions des domaines numérique et/ou algébrique où les notions travaillées le sont en tant qu'objets, et non pas en tant qu'outils au service de la résolution de problèmes. Les choix des deux professeurs est donc un chapitre concernant directement le domaine numérique. Cependant une différence est notable : Clotilde commence tout de suite par une nouveauté du programme (les ensembles de nombres) alors que Mathieu fait des reprises sous la forme de révisions systématiques (les techniques de base) avant d'aborder les ensembles de nombres. Cependant les deux professeurs composent ce premier chapitre en associant des révisions systématiques - qui vont jusqu'au recommencement de cours du collège - avec des nouveautés du programme de seconde : les ensembles de nombres et l'arithmétique. Pour les deux professeurs le véritable commencement du programme de seconde se réalise avec les ensembles de nombres. Cette nouveauté du programme de seconde semble être la porte d'entrée la plus commune vers les mathématiques du lycée[1]. Ce début de progression est vécu comme étant satisfaisant par les deux professeurs pour ce temps de la *reprise scolaire* (de la rentrée aux vacances de Toussaint) et ils ont justifié ce choix *a posteriori*. Ainsi Mathieu lors de l'interview du 6 décembre 2006 déclare :

> C'est une progression commune, elle nous convient […] Je trouve que ça fonctionne bien [le premier chapitre calculs numériques], oui. C'est une manière de raccrocher sur ce qu'ils ont fait, c'est une manière pour moi de travailler tout ce qu'ils ne savent pas faire.

De même Clotilde explicite son choix dans l'interview du 6 décembre 2007 :

> Pour la progression j'essaie d'intercaler géométrie algèbre pour varier et après il y a aussi que je ne veux pas commencer par un chapitre trop difficile en début d'année pour pouvoir les mettre en confiance, et après il y a une logique du programme quoi qui fait que… moi je trouve qu'il n'y a pas beaucoup de questions sur la progression de seconde, ça va se passer assez naturellement.

Un élément technologique dans le geste professionnel d'organisation globale de l'enseignement de l'année de seconde est le souci de parvenir à construire des apprentissages solides concernant les bases du calcul numérique et algébrique pour les élèves qui vont aller principalement en première S mais également en première ES. Les enseignants de seconde qui ont l'expérience de ces classes de première savent que le manque de maîtrise de techniques de base concernant le calcul vont être des obstacles importants, ils savent également qu'il existe une grande rupture entre la seconde et la première. C'est le cas pour Mathieu et Clotilde qui justifient ainsi leurs progressions lors d'entretiens menés avec eux. Chez Mathieu les « techniques de base » sont explicitement travaillées sous la forme de révisions systématiques en début de seconde. Chez Clotilde, la nouveauté emblématique à l'entrée du programme est

[1] Une étude des manuels en vigueur ainsi que les visites dans les classes de seconde confortent cette impression.

travaillée en premier sous le titre « les ensembles de nombres », cependant des « rappels » sont explicitement présents dans ce premier chapitre. Voici comment Clotilde interrogée le 10 avril 2008 justifie le fait d'entrainer systématiquement les élèves pour qu'ils maîtrisent les calculs numériques et algébriques :

> **Clotilde :** Les premières S j'ai remarqué le problème, souvent c'était, c'est pas tellement dans la compréhension de la notion qu'on leur a amenée c'est dans les calculs algébriques qu'il y a à faire pour pouvoir utiliser cette notion. Je sais pas dans les suites, les suites ils ont bien compris ce que c'était une suite mais les suites géométriques avec les puissances ça marche plus. Ce qu'ils savent pas c'est calculer avec une puissance. Et souvent dans tous les contrôles que je fais, les fautes, elles sont calculatoires, elles sont pas dans le fond… Du coup d'où mon idée d'essayer en seconde de bien insister dessus et c'est pour ça qu'aussi du coup là j'ai fait tout le chapitre en me disant qu'il faut absolument qu'on développe, qu'on factorise pour que l'année prochaine ça doit être acquis.

7.3 Des éléments technologiques du geste professionnel

Le geste professionnel d'organisation annuelle de l'enseignement est influencé par certaines conditions qui apparaissent comme des justifications des choix opérés par Mathieu et Clotilde, je considère ces justifications comme des éléments technologiques du geste professionnel.

7.3.1 Le poids de l'écriture des programmes

C'est une contrainte au niveau de la discipline qui peut expliquer le choix des professeurs concernant le premier chapitre de leur progression, elle provient du découpage du programme et de l'ordre choisi pour son écriture. Il est par ailleurs fortement probable que ce phénomène se retrouve pour les autres chapitres. J'ai déjà mentionné cette influence des programmes dans le paragraphe 4.2.3 en étayant mon argumentation par l'article de Artaud et Menotti (2008) qui décrivent le même phénomène concernant l'enseignement du secteur fonctions en seconde. Ainsi le programme, tributaire de la linéarité de l'écriture des contenus, propose implicitement un ordre dans le savoir à enseigner. Ce programme est subdivisé en trois domaines présentés ainsi successivement : *Statistique / Calcul et fonctions / Géométrie*. Le premier domaine pourrait inciter les professeurs à commencer par la statistique, mais ce choix apparaît rarement malgré l'incitation forte de la noosphère (voir les choix des auteurs de manuels, Cf. section 6). Pour expliquer ce constat, il est fort probable que, d'une part, des résistances soient à l'œuvre concernant l'enseignement de la statistique et que, d'autre part, les enseignants choisissent un chapitre qu'ils pensent maîtriser en tant que savoir de référence et savoir à enseigner. Une autre raison provient de cette conviction qu'il faut refaire les bases avant d'aborder véritablement le programme de seconde, raison qui apparaît comme une norme du métier (Cf. paragraphe 1.1 p. 5).

Les professeurs peuvent trouver *naturel* de suivre les contenus du domaine dans l'ordre donné. Le programme décline les objectifs généraux de chaque domaine ; ainsi pour le domaine « Calcul et fonctions » le premier objectif du programme est le suivant : *Approfondir* *la connaissance des différents types de nombres.* Par ailleurs dans le document d'accompagnement nous trouvons ce commentaire déjà mentionné en ce qui concerne le secteur *Nombres* et le thème « Nature et écriture des nombres » : « On fera une synthèse des connaissances rencontrées jusque là par les élèves et on introduira les notations usuelles des différents ensembles. Les élèves devront savoir reconnaître à quels ensembles appartiennent les nombres rencontrés. » L'approfondissement et la synthèse des connaissances du collège concernant les ensembles de nombres sont donc bien inscrites en premier. Ainsi la reconnaissance de la nature des nombres est un type de tâches très précisément identifié dans le curriculum officiel. J'ai analysé sa place dans le curriculum réel et j'ai suivi son histoire au cours de l'année chez Mathieu et Clotilde (Cf. section 8.1.1).

7.3.2 L'influence des manuels pour Mathieu et Clotilde

Une autre contrainte pèse certainement dans les choix des professeurs, elle provient des choix des auteurs de manuels. Dans le manuel des classes de Clotilde et de Mathieu le premier chapitre abordé est intitulé *Calcul numérique et algébrique*. Par ailleurs dans la partie des exercices de ce chapitre figurent des rappels du collège dans des parties encadrées intitulées *Fractions*, *Racine carrée*, *Puissance n* (ce qui est une appellation étrange). À la fin du livre une section est appelée *Techniques de Base* et elle comprend notamment une partie *Bases d'algèbre*. J'ai repris le tableau précédent (Cf. Tableau 20 p. 86) pour le premier chapitre enseigné par Mathieu et Clotilde en signalant les reprises du manuel. J'ai utilisé des trames de fond différentes dont la légende est dans le Tableau 21. Les deux professeurs s'inspirent beaucoup du livre pour construire leur enseignement. Chez Clotilde le travail annoncé par le titre sur les différentes écritures comprenant « 1°) Valeur exacte et valeur approchée » et « 2°) Notation scientifique. Ordre de grandeur » est également une reprise de contenus du chapitre du livre, même s'ils ne correspondent pas à des titres mais au corps du texte.

Légende	**Titre qui est une reprise à l'identique du livre et qui se trouve dans :**
a	le cours du premier chapitre intitulé *Calcul numérique et algébrique*
b	la partie *Techniques de Base* à la fin du livre
c	les exercices qui suivent le premier chapitre et qui comportent des rappels présentés dans des encadrés (Cf. annexe 11.8)

Tableau 21 : légende du tableau 22

Clotilde	Mathieu
Chapitre I – Calcul numérique et algébrique	**Chapitre I - Activités numériques**
I – Les ensembles de nombres	**I – Techniques de base**
II – Les différentes écritures	**1°) Opérations sur les fractions**
1°) Valeur exacte et valeur approchée	**2°) Développements**
2°) Notation scientifique. Ordre de grandeur	**3°) Puissance d'un nombre**
	4°) Racine carrée
3°) Ordre de priorité dans le calcul numérique	**5°) Méthode : comment démontrer une égalité ?**
III – Rappel sur les puissances	**6°) Factoriser**
IV – Développer et factoriser	**II – Ensembles de nombres**
V – Rappels sur les racines carrées	**III – Equations du premier degré à une inconnue**
VI – Arithmétique et nombres premiers	**IV – Arithmétique**

Tableau 22 : reprises du manuel dans le premier chapitre

7.3.3 Conclusion sur le geste professionnel de programmation annuelle

Le regard sur le début de la programmation annuelle de l'enseignement révèle des influences fortes qui conduisent les professeurs à *suivre* le curriculum officiel au niveau des contenus sans en respecter l'esprit. Une technique consiste à *suivre* l'ordre de présentation des thèmes du programme ainsi que la programmation du manuel de la classe. Les choix des auteurs de programme comme des auteurs des manuels servent alors de caution et de justification technologique. Des raisons correspondant à des logiques profondes viennent consolider ces choix de progressions : il faut refaire les bases avant d'aborder véritablement le nouveau ; il faut assoir les techniques de calcul du collège avant de donner de véritables problèmes à résoudre. Je reprends un extrait d'interview avec Mathieu réalisé le 6 décembre 2006 (le début a déjà été cité au paragraphe 1.1 p. 5) :

> **Chercheur** : Le premier chapitre là, calculs numériques, j'imagine que l'an prochain vous reprendrez le même ?
>
> **Mathieu** : Je trouve que ça fonctionne bien, oui. C'est une manière de raccrocher sur ce qu'ils ont fait, c'est une manière pour moi de travailler tout ce qu'ils ne savent pas faire,
>
> **Chercheur** : par exemple ?
>
> **Mathieu** : Ben tout ce qui est technique de calcul de base quoi, addition de fractions euh, racines carrées euh, résolution simple d'équations, ça me permet de travailler avec, alors j'ai essayé quelques fois de commencer par la géométrie dans l'espace, ou... mais je trouve

> que c'est une fausse démarche, dans le sens où elle … quand on revient sur les calculs on est confronté aux mêmes problèmes, sauf peut être qu'il y a une autre ambiance qui s'est installée, peut être qu'ils sont bien dans cette ambiance là, et un peu plus ouverts, mais sinon les mêmes problèmes reviennent, donc autant les attaquer tout de suite et travailler dessus toute l'année.

La logique des professeurs représentée ici par les déclarations de Mathieu repose sur le fait, partagé et indiscutable dans la communauté des professeurs, qu'il faut s'attaquer tout de suite aux techniques de base qui sont alors travaillées pour elles-mêmes en dehors de toute raison d'être ou fonctionnalité. Cette logique n'est pas celle qui apparaît dans les programmes où les calculs doivent être assujettis à de réels besoins dans des résolutions de problèmes. Ainsi l'hypothèse H1 qui postulait que deux logiques se heurtaient est vérifiée dans le contexte de ce geste professionnel d'organisation de la programmation pour la *reprise scolaire*.

7.4 Deux professeurs et un style commun

L'organisation didactique des séances dans les classes de seconde de Mathieu et de Clotilde suit un scénario qui sera pratiquement toujours le même tout au long de l'année lors de mes observations. Le professeur donne un exercice qu'il dicte, qu'il écrit au tableau ou qui provient du manuel de la classe, les élèves cherchent sans avoir de consigne particulière concernant l'usage de la machine ou concernant le fait que le travail est individuel ou à plusieurs. Une différence est à noter : dans la classe de Clotilde des activités ou des parties du cours sont données sous la forme de photocopies. Pendant les temps de recherche des élèves, le professeur circule dans les rangs et intervient pour aider, pour signaler une erreur et également pour observer les stratégies mises en œuvre. Après un temps toujours relativement court par rapport au travail à réaliser, le professeur corrige lui-même au tableau ou demande à un élève de venir corriger, il interroge les élèves qui désirent participer à la correction. Pendant les phases de recherche et les phases de correction collective, les élèves semblent être libres de choisir leur attitude : active, passive, intéressée, désintéressée, voire désinvolte ou dissipée. Un *geste professionnel d'atmosphère* de Mathieu consiste à laisser les élèves responsables de leur investissement dans le travail à condition que le niveau sonore ne soit pas élevé et que certaines limites ne soient pas dépassées : un manque de respect, une agitation trop grande par exemple. Sa technique est de solliciter les élèves, de répondre à leurs demandes, mais si un élève décide de ne pas jouer son métier d'élève il le rend responsable de ce choix. Le contrat pédagogique est le suivant exprimé dans le langage du métier : le professeur assume complètement sa part du travail pour expliquer, valider les réponses individuelles, faire la correction finale, l'élève choisit de s'investir dans le travail proposé et s'il ne fait pas ce choix il ne perturbe pas la classe.

Pendant les moments « de cours », le professeur écrit tout ce qui est à apprendre au tableau et les élèves recopient. Chez Clotilde une variante consiste à donner parfois une photocopie qu'elle commente en sollicitant les élèves pour qu'ils complètent les parties qui sont laissées à leur charge.

Ces professeurs ne mettent pas en place de travaux de groupes, même si les élèves sont en général libres de travailler en concertation avec leurs voisins. Ils n'utilisent pas les outils informatiques en classe, mais seulement pour leur usage personnel.

Je suppose que pour ces deux professeurs le déroulement de la classe est une question pédagogique réglée une fois pour toutes, et qu'elle ne dépend pas du contenu, ce n'est pas pour eux une question didactique. Est-ce que dans le *pluri-agenda* du professeur (Bucheton, 2009), cet *impensé* est une façon d'alléger une charge de travail trop lourde ?

8 Dynamique inter-numérique

Dans cette partie j'aborde deux thèmes du cadre numérique : la nature et l'écriture des nombres et la valeur absolue d'un réel. Ces deux thèmes sont représentatifs du tissage nécessaire entre des connaissances anciennes du collège et nouvelles du lycée. C'est moins évident pour la notion de valeur absolue, mais elle a déjà été rencontrée au collège en classe de cinquième, même si ce n'est pas sous sa dénomination officielle.

8.1 La nature des nombres

8.1.1 Un type de tâches emblématique du numérique chez Clotilde et Mathieu

Je rappelle ce commentaire de l'accompagnement des programmes de seconde qui précise bien l'articulation entre ancien et nouveau et que j'ai déjà cité deux fois :

> On fera une synthèse des connaissances rencontrées jusque là par les élèves et on introduira les notations usuelles des différents ensembles. Les élèves devront savoir reconnaître à quels ensembles appartiennent les nombres rencontrés.

Cet extrait indique également un type de tâches spécifique du numérique : « *reconnaître à quels ensembles appartiennent les nombres rencontrés* ». Ce type de tâches est emblématique du domaine numérique travaillé en début d'année lors de la *reprise scolaire*. Il peut apparaître également emblématique de la liaison collège/lycée en permettant une reprise de connaissances anciennes tout en travaillant des connaissances complètement nouvelles (la désignation des ensembles). Je rappelle que j'ai noté T ce type de tâches (Cf. p. 56).

Dans les classes de Clotilde et de Mathieu, d'après l'analyse des écrits (cahiers d'élèves et devoirs), des spécimens de T sont travaillés dans le premier chapitre. Les justifications ne sont généralement pas demandées. Ainsi dans le cahier d'exercices des élèves de Clotilde les affirmations suivantes apparaissent sans aucune justification :

$$\text{« } \sqrt{18} \text{ irrationnel ; } \frac{1}{3} \text{ rationnel »}$$

Le même type de réponse se trouve dans les cahiers d'exercices de la classe de Mathieu.

Je vais m'intéresser dans ce chapitre à l'enseignement du thème « Nature et écriture des nombres » chez ces deux professeurs et plus particulièrement aux praxéologies développées relativement au type de tâches T.

8.1.2 Analyse du thème « Nature et écriture des nombres » chez Mathieu

8.1.2.1 Analyse du cours de Mathieu

Le thème « Nature et écriture des nombres » s'insère dans un premier chapitre intitulé *Activités numériques* que je décris en partie pour montrer comment ce thème est articulé avec d'autres (Cf. section 7.2.1 page 86 pour voir la progression de la *reprise scolaire*).

Reprise des « techniques de base »

Ce premier chapitre du cours de Mathieu débute par des révisions, annoncées par *Techniques de base* (Cf. Tableau 20 p. 86), que les élèves ont écrites à la main sur leur cahier à partir du 9 septembre 2006 vraisemblablement en recopiant (avec une erreur d'orthographe pour « techniques ») ce que le professeur a écrit au tableau. Les dénominations des ensembles n'ayant pas encore été travaillées cela ne permet pas au professeur de préciser le domaine de validité des règles qui sont rappelées. Même en l'absence de ces dénominations rien n'est dit sur les indéterminées des identités rappelées dans ce cours comme on peut le voir dans l'extrait de cours de la Figure 5.

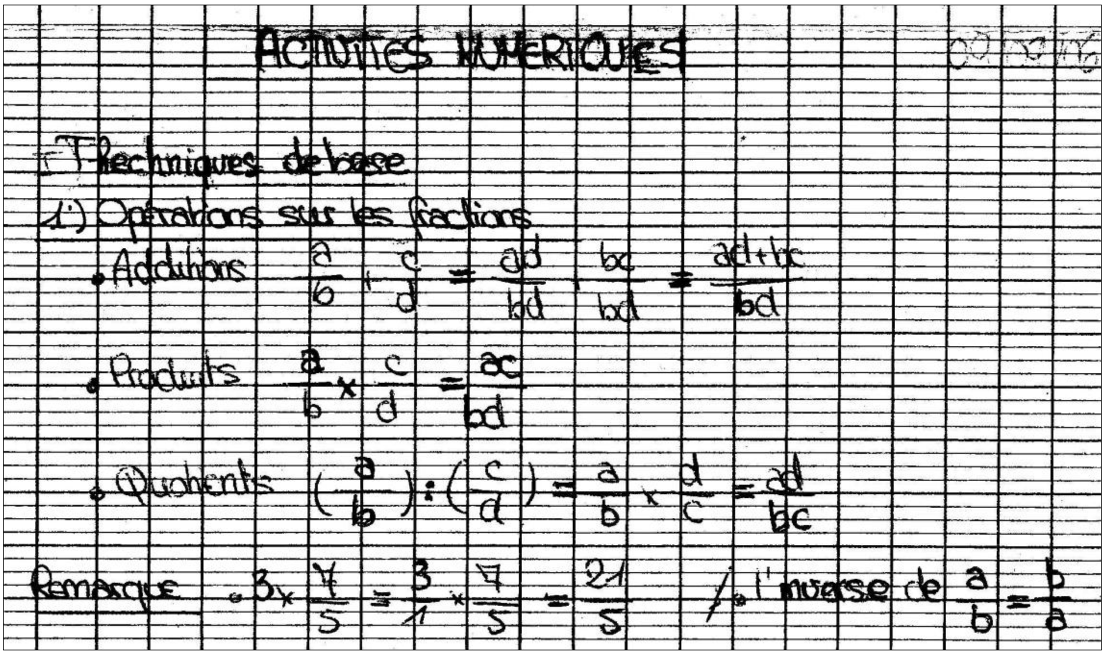


Figure 5: extrait de cahier d'un élève de la classe de Mathieu

Dans ces rappels concernant les quotients, la règle intitulée traditionnellement règle fondamentale des quotients, n'est pas rappelée, à savoir :

« Quels que soient le réel a et les réels b et c non nuls $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$»

L'écriture de cette règle est absente dans tout ce premier chapitre. Elle sera pourtant nécessaire dans les activités données aux élèves. Est-ce qu'elle a été formulée oralement en lien avec des types de tâches qui la nécessitent ?

Je note dans le cours pris par l'élève la forme incorrecte de l'écriture : « L'inverse de $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$ ». Qui en est l'auteur, l'élève ou le professeur ? C'est en tout cas une erreur très fréquente chez les élèves, elle traduit une conception erronée de l'égalité et/ou une conversion incorrecte du registre de la langue naturelle vers le registre du langage symbolique mathématique. Le signe d'égalité « traduit » le verbe être : l'inverse de a sur b « est » b sur a.

Dans la première partie de ce cours de Mathieu les techniques de base comprennent également les notions suivantes (leur intitulé et leur ordre est respecté) : développements, puissance d'un nombre, racine carrée, méthode pour démontrer une égalité, factoriser. Je note que dans ces techniques de base le professeur inclut des rappels de règles qui appartiennent aussi bien au domaine numérique qu'au domaine algébrique. Je note également une séparation entre le rappel des éléments théoriques qui justifient un développement et ceux qui justifient une factorisation alors qu'une même identité, un même élément théorique, correspond à deux théorèmes et respectivement à deux types de tâches qui sont le développement et la factorisation (Bellard & al., 2005).

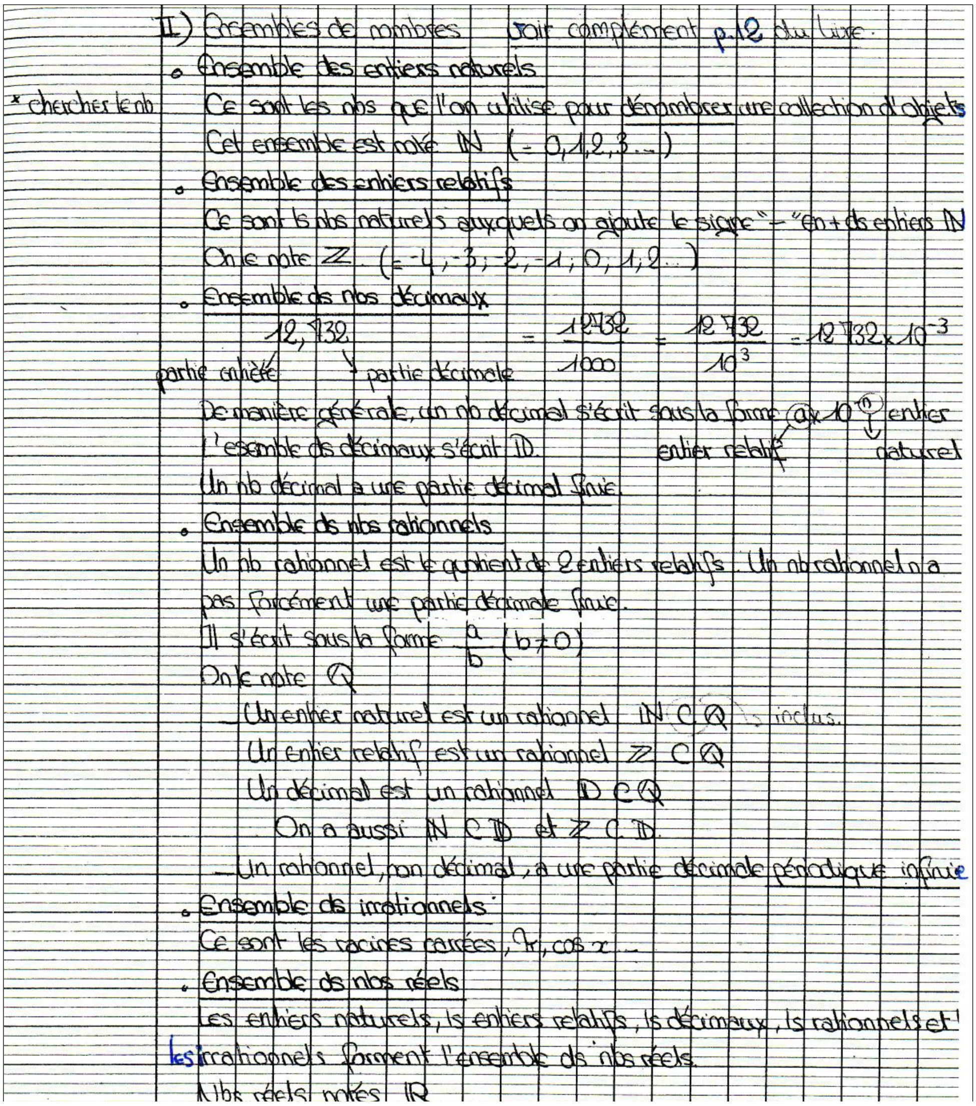
Des reprises sous la forme de révisions systématiques

Le geste de reprise de Mathieu en ce début d'année scolaire est un recommencement sous la forme de révisions systématiques qui ne fait pas démarrer le processus de chronogenèse. La reprise de règles du domaine numérique est utile pour que les élèves puissent s'y référer en tant qu'éléments du bloc technologico-théorique des praxéologies mathématiques du numérique (idem pour le domaine algébrique). En l'absence de *mémoire didactique*, comme je l'ai déjà souligné antérieurement, cette reprise permet de construire au début de la classe de seconde une mémoire commune de ces énoncés théoriques. Cependant, si les dénominations des ensembles de nombres avaient été enseignées, cette reprise aurait pu se faire en lien avec du nouveau en précisant la nature des nombres figurant dans les identités et en mobilisant les nouvelles connaissances sur les ensembles de nombres.

Les énoncés de savoir ainsi institutionnalisés auraient été ainsi épistémologiquement plus conformes aux nécessités mathématiques. En faisant ce choix le professeur aurait pu faire une reprise de connaissances rencontrées en collège en lien avec du nouveau et ainsi aurait pu faire avancer le temps didactique. Le choix de travailler les ensembles de nombres avec leurs dénominations avant la reprise des règles du numérique et de l'algébrique est donc pertinent pour pouvoir donner des énoncés plus rigoureux mathématiquement. Cela constitue d'ailleurs une raison d'être épistémologique pour la connaissance des ensembles de nombres.

Les ensembles de nombres

Dans une deuxième partie de ce premier chapitre, Mathieu présente les ensembles de nombres (Cf. Figure 6). Je remarque que l'élève a écrit : « voir complément p. 12 du livre » ce qui confirme l'appui sur le livre pour le professeur. L'élève qui a recopié le cours que j'ai photocopié utilise des notations non conformes aux usages mathématiques concernant les symboles utilisés pour écrire en extension les ensembles de nombres. Est-ce encore une erreur de sa part (elle est d'ailleurs répétée deux fois) ou bien est-ce l'écriture utilisée par le professeur ? Mais que faut-il préconiser pour l'écriture symbolique des ensembles en extension alors qu'aucune étude théorique n'est attendue à propos de la théorie des ensembles ?



I) Ensembles de nombres voir complément p.12 du livre.

- Ensemble des entiers naturels

* chercher le nb — Ce sont les nbs que l'on utilise pour dénombrer une collection d'objets

Cet ensemble est noté $\mathbb{N}$ $(= 0, 1, 2, 3 \ldots)$

- Ensemble des entiers relatifs

Ce sont les nbs naturels auxquels on ajoute le signe "−" en + des entiers $\mathbb{N}$

On le note $\mathbb{Z}$ $(= -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 \ldots)$

- Ensemble des nbs décimaux

$$\underbrace{12}_{\text{partie entière}},\underbrace{732}_{\text{partie décimale}} = \frac{12732}{1000} = \frac{12732}{10^3} = 12732 \times 10^{-3}$$

De manière générale, un nb décimal s'écrit sous la forme $a \times 10^{n}$ — entier relatif — entier naturel

L'ensemble des décimaux s'écrit $\mathbb{D}$.

Un nb décimal a une partie décimal finie.

- Ensemble des nbs rationnels

Un nb rationnel est le quotient de 2 entiers relatifs. Un nb rationnel n'a pas forcément une partie décimale finie.

Il s'écrit sous la forme $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$

On le note $\mathbb{Q}$

– Un entier naturel est un rationnel $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ ⊂ inclus.
Un entier relatif est un rationnel $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
Un décimal est un rationnel $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$
On a aussi $\mathbb{N} \subset \mathbb{D}$ et $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.

– Un rationnel non décimal a une partie décimale périodique infinie

- Ensemble des irrationnels :

Ce sont les racines carrées, π, $\cos x$ ...

- Ensemble des nbs réels

Les entiers naturels, les entiers relatifs, les décimaux, les rationnels et les irrationnels forment l'ensemble des nbs réels.

Nbs réels notés $\mathbb{R}$

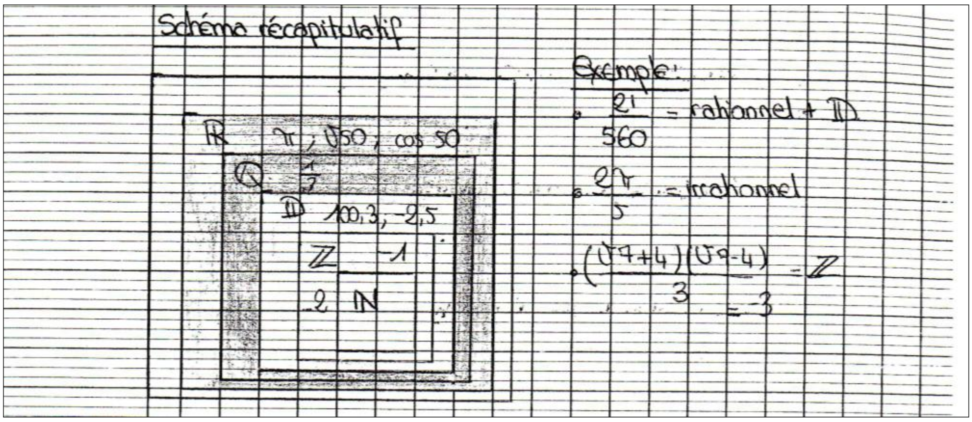
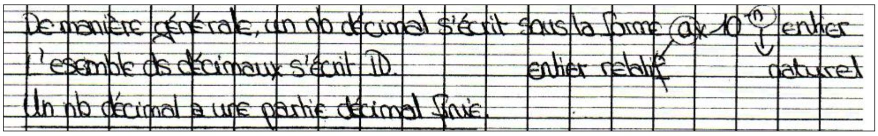


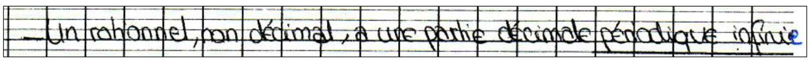
Figure 6 : prise de note par un élève du premier chapitre de Mathieu

Il ne reste que quelques vestiges d'un enseignement qui a occupé une place très importante au collège et au lycée au moment de la réforme des mathématiques modernes. Les ruines de ce domaine se réduisent à du vocabulaire et à des notations dans quelques secteurs de l'enseignement : la dénomination des ensembles de nombres et leur inclusion ; les intervalles de ℝ, leur réunion et leur intersection ; l'ensemble des solutions d'une équation ou d'une inéquation. Pourquoi les conserver ou alors pourquoi ne pas inscrire explicitement l'enseignement de ce domaine dans le curriculum ? La réponse à cette question n'est pas immédiate et demanderait une étude, mais en ne conservant que quelques signifiants sans l'objectif de développer les concepts et les théorèmes en jeu, l'activité mathématique est dénaturée et s'apparente à un jeu de traduction en sténodactylo.

L'écriture canonique du nombre décimal choisie par Mathieu pour être institutionnalisée dans son cours est sous la forme du produit d'un entier relatif par une puissance de 10 à exposant entier négatif. Il est précisé aussi que la partie décimale d'un nombre décimal est finie.



Pour les rationnels idécimaux le professeur évoque une *partie décimale périodique infinie*.



Mathieu précise donc les critères de reconnaissance des décimaux et des rationnels idécimaux à partir de leurs écritures décimales.

Les irrationnels sont définis comme « les racines carrées, π, cos*x* » ce qui peut donner lieu à un obstacle didactique se traduisant par une confusion entre des signes apparents dans l'écriture du nombre et la nature de ce nombre. Bronner dans sa thèse (1987) écrit à propos de l'enseignement de l'irrationalité présentée dans un manuel scolaire[1] de 1947 :

> La présentation de ce thème a pu conduire nos "ancêtres élèves'' à des connaissances erronées : les rationnels sont présentés comme "*les nombres qui ne contiennent pas de radicaux*'', tandis que "*les irrationnels sont les nombres qui comprennent un ou plusieurs radicaux*''. $\sqrt{5}$, puis des "monstres'' comme $2+\sqrt{3}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, surgissent comme exemples prototypiques de nombres irrationnels. Seules la forme et l'écriture représentant ces nombres pourraient être retenues, et des nombres comme $\sqrt{4}$, mais surtout comme $\sqrt{641601}$ (= 801 évidemment !), risquent d'être pris comme irrationnels. Il est clair que les auteurs attendent d'abord une "simplification'', une "transformation'' ou un "calcul'' avant que le résultat final soit donné, mais c'est largement implicite. (p. 89)

J'ajoute que l'obstacle pourrait se traduire également avec la définition du manuel précédent par $\cos\frac{\pi}{4}$ est un rationnel puisqu'il ne contient pas de radicaux. Avec les critères donnés par Mathieu c'est cette autre erreur qui pourrait apparaître : $\cos\frac{\pi}{3}$ est un irrationnel.

[1] Lebossé et Héméry, 1947, Mathématiques, classe de troisième, Nathan.

Pour revenir au cours de Mathieu, un exemple montre que la présence de racines carrées dans un nombre n'implique pas obligatoirement qu'il soit irrationnel. Il s'agit de $\frac{(\sqrt{7}+4)(\sqrt{7}-4)}{3}$ qui est égal au nombre entier relatif -3. La caractéristique des irrationnels donnée dans le cours aurait pu laisser croire que ce nombre est irrationnel de la même manière que $\sqrt{49}$.

Le traditionnel schéma utilisant les diagrammes de Venn illustre les inclusions successives des ensembles, mais les éléments ne sont pas référés par des croix. Cette règle de formation dans ce registre de représentation schématique des ensembles n'est pas fixée rigoureusement dans le savoir de référence, mais dans le savoir à enseigner il est utile de différencier un objet, ici un élément d'un ensemble, de sa dénomination.

Les équations

La troisième partie de ce premier chapitre de Mathieu est consacrée aux équations rencontrées au collège : celles du premier degré à une inconnue, et celles du second degré (et même plus) à une inconnue se ramenant à un produit nul de plusieurs facteurs du premier degré. Cette place dans l'organisation des savoirs est encore en contradiction avec le titre du chapitre « Activités numériques ».

Les objectifs apparents de Mathieu

Ce qui semble être le plus important pour Mathieu c'est le terme « activités » qui se traduit dans le travail proposé aux élèves dans la partie des exercices par de multiples activités pour entraîner les élèves à calculer, développer, factoriser, résoudre. Si le dernier type de tâches s'inscrit évidemment dans le domaine algébrique, le troisième n'est travaillé que dans l'algébrique, et les deux premiers ont pour cadre soit le numérique, soit l'algébrique. Par exemple des développements sont demandés avec :

- une expression numérique comme $\left(4-3\sqrt{2}\right)^2$
- ou encore algébrique comme $x(x+1)(x-4)-x^2(x-3)$ (la nature des nombres désignés par les lettres n'étant jamais précisée).

8.1.2.2 Analyse a priori du travail de la technique dans les exercices

Dans la partie des exercices donnés par Mathieu dans le premier chapitre, les seuls exercices en lien avec T (déterminer la nature d'un nombre) ou les différentes écritures des nombres sont issus du livre : le numéro 26 de la page 22 et le numéro 65 de la page 26 (voir page suivante).

Conformément à la méthodologie qui a été présentée, je développe une analyse *a priori* à partir des données, à savoir les exercices 26 et 65, correspondant au choix du professeur. Les résultats de cette analyse sont conditionnés par le curriculum officiel et les connaissances supposées des élèves de Mathieu au moment où ces exercices ont été donnés.

[méthode A page 13, exercices 26 et 27]

26 Indiquer la nature du chacun des nombres suivants (on donnera la réponse par une appartenance à un ensemble) :

a) $-\frac{84}{14}$; b) $\frac{\pi}{3}$; c) $-\frac{25}{\sqrt{100}}$; d) 3,333 ; e) $\frac{-60\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$;

f) $\frac{4{,}1\times 10^{-3}}{5\times 10^{-4}}$; g) 1,6666… h) $-6\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

Figure 7 : exercices donnés par Mathieu

65 On cherche à obtenir la valeur exacte du nombre $2\,952^4$ à l'aide d'une calculatrice numérique.

a) Calculer $2\,952^2$ et l'écrire sous la forme $a\times 10^4+b$ avec a et b entiers.

b) Développer $(a\times 10^4+b)^2$ en conservant les lettres a et b.

c) En utilisant les valeurs trouvées en a), calculer a^2, $2ab$, b^2 à l'aide de la calculatrice.

d) En posant l'opération, calculer, à l'aide des résultats obtenus en c), la valeur exacte de $2\,952^4$.

Figure 8 : exercices donnés par Mathieu

Le flou sur les écritures décimales illimitées

Dans l'exercice 26 huit spécimens sont proposés pour T. Une question se pose à propos de la nature du nombre 1,6666… Que dire de ce nombre ? Les pointillés signifient implicitement que la partie décimale est infinie, mais rien n'indique qu'elle est périodique. La nature de ce nombre ne peut donc pas être donnée : c'est un nombre réel qui est idécimal, mais est-ce qu'il est rationnel ou irrationnel ? Cette précision n'est pas possible en l'absence de renseignements supplémentaires sur les décimales qui suivent les quatre chiffres 6 de la partie décimale illimitée. Le choix des auteurs du manuel Déclic n'est pas cohérent en ce qui concerne les règles de formation du registre des écritures décimales illimitées périodiques. Ainsi dans le livre figure un exercice où coexistent des écritures pour lesquelles la période est précisée par un trait au dessus des chiffres composant la période et une écriture pour laquelle il faut supposer que l'écriture décimale illimitée est périodique de période 9. C'est l'exercice 47 de la page 24 reproduit Figure 9. Ainsi les auteurs attendaient-ils une interprétation de l'écriture 1,6666… comme étant périodique de période égale à 6 ? Ce manque de cohérence est pour le moins étonnant et montre que l'abandon de ce qui faisait l'essentiel de l'enseignement des réels au moment de la réforme des mathématiques modernes, laisse là aussi des vestiges mathématiquement peu rigoureux (Bronner, 1987).

47 **Développement décimal périodique**

On se propose de vérifier sur quelques exemples un théorème admis :

« tout nombre admettant un **développement décimal périodique** est un **rationnel** ».

1° Soit le nombre $x = 0{,}3737\overline{37}\ldots$ dont la période 37 a **deux** chiffres.

a) Justifier que $100 \times x = 37 + x$.

b) Résoudre cette équation et en déduire la valeur exacte de x en fraction. Quelle est alors la nature de x ?

2° En procédant de la même façon, démontrer que :

$$\mathbf{0,999999\ldots = 1}.$$

3° a) Déterminer l'écriture fractionnaire du nombre :

$$x = 0{,}123123\overline{123}\ldots$$

b) En remarquant que $12{,}0909\overline{09}\ldots = 12 + 0{,}0909\overline{09}\ldots$, déterminer l'écriture fractionnaire de $12{,}0909\overline{09}\ldots$

Figure 9: exercice n° 47 page 24

Dans cet exercice les élèves sont censés effectuer notamment le produit $100 \times x$ alors que ce type de multiplication avec des rationnels idécimaux n'a jamais été rencontré dans le curriculum officiel. Qu'attendent les auteurs du manuel ? Est-ce qu'ils pensent que les élèves vont étendre les algorithmes connus avec les décimaux à ces nombres idécimaux ? Mais ces auteurs demandent de justifier que $100 \times x = 37 + x$, les élèves n'ont pas les connaissances nécessaires pour cette justification, ils peuvent seulement conjecturer cette égalité.

Pour revenir aux nombres de l'exercice 26, les nombres 3,333 et 1,6666… sont donnés pour repérer que le premier a une écriture décimale finie et non nulle et qu'il est donc décimal, contrairement au deuxième qui a une écriture décimale illimitée et qui est donc idécimal.

Reprise du travail sur les quotients

Les nombres $-\frac{84}{14}$; $-\frac{25}{\sqrt{100}}$; $\frac{4{,}1\times10^{-3}}{5\times10^{-4}}$ et $\frac{-60\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$ sont donnés sous des apparences qui pourraient laisser penser, en se fiant à une appréhension perceptive, qu'ils sont rationnels puisqu'ils sont écrits sous la forme d'un quotient ou que le deuxième et le quatrième sont irrationnels à cause de la présence des racines carrées. Je remarque que pour les nombres $-\frac{84}{14}$, $\frac{4{,}1\times10^{-3}}{5\times10^{-4}}$ et $-\frac{25}{\sqrt{100}}$ deux praxéologies sont possibles : l'une repose sur l'opération arithmétique de la division (pour le troisième en mobilisant d'abord la connaissance que $\sqrt{100}$ est égal à 10) ; l'autre repose sur la mise en œuvre de règles de simplification des quotients. Les blocs technologico-théoriques de ces deux praxéologies sont alors fondamentalement différents : le premier se réfère au domaine numérique, le second au domaine algébrique. J'ai qualifié ces deux praxéologies respectivement *d'arithmétique* et *d'algébrique* dans le paragraphe 2.1.3.2. La mise en relation de ces deux types de raisonnement est intéressante pour créer du sens et ne pas perdre de vue l'aspect numérique de la conservation du nombre (sa dénotation) à travers ses transformations d'écriture en vertu des règles algébriques. Cette articulation qui correspond à un travail dans le NAA sera de nouveau mise en relief à propos du travail réalisé dans la classe de Clotilde (Cf. Tableau 26: p. 118).

Pour mettre en œuvre la praxéologie algébrique, la règle dite de simplification des quotients est nécessaire, elle n'a cependant pas fait l'objet d'un rappel dans le cours de Mathieu. En particulier pour le nombre $\frac{-60\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$ ce savoir est nécessaire et ne peut être remplacé par un discours technologique du type « on divise le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{2}$ ».

La reprise du rapport au nombre π

Je reviens à l'analyse du numéro 26. Pour les nombres $\frac{\pi}{3}$ et $-6\sqrt{3}+\sqrt{2}$, la démonstration de leur irrationalité est possible grâce à un raisonnement par l'absurde basé sur l'irrationalité des nombres π et $\sqrt{6}$. Ces démonstrations seront développées plus loin. Auparavant je m'intéresse au statut du nombre π dans le curriculum officiel des classes du collège des élèves que j'ai observés en seconde en 2006-2007 et 2007-2008. Il s'agit des programmes et de leurs accompagnements parus au BO n° 25 du 20 juin 1996. En sixième se trouve dans le domaine Travaux géométriques la compétence exigible suivante : Calculer la longueur d'un cercle, mais rien n'est dit sur le nombre π. Pour les professeurs qui veulent saisir cette opportunité il est possible de décrire l'écriture décimale illimitée de π pour la différencier de celle d'un nombre décimal et d'aborder ainsi la notion de partie décimale finie ou infinie d'une écriture décimale. Des commentaires de l'accompagnement du programme de sixième soutiennent cette compréhension du curriculum. Dans la partie Activités numériques voici cette recommandation :

> Les nombres entiers sont des nombres familiers aux élèves. Il n'en est pas de même des nombres décimaux. Les évaluations faites en 6e ont montré combien la signification des écritures décimales échappe encore à beaucoup d'élèves à l'entrée en 6e. Il est nécessaire de conduire un travail sur la signification de l'écriture décimale et de la relier au travail sur les opérations et à la multiplication et la division par 0,1 ; 0,01 ou 0,001. […] Un travail de réflexion sur la division et son algorithme doit être mené […].

Un travail important sur le concept de nombre décimal est donc attendu en sixième. La compréhension du fait que la partie décimale est finie ou limitée dans un nombre décimal doit s'accompagner de ce que je nomme par analogie avec le champ de la médecine un diagnostic différentiel. Pour savoir diagnostiquer ce qu'est un nombre décimal l'élève doit savoir également diagnostiquer ce qu'il n'est pas. Ainsi la rencontre avec des nombres qui ont une écriture décimale illimitée est importante, cette rencontre résulte d'ailleurs d'une expérience qui a déjà eu lieu en cycle 3, à savoir le calcul à la main du quotient d'un entier par un autre entier lorsque le résultat est idécimal. Pour résumer et revenir au nombre π, la présentation de nombres qui ont une écriture décimale illimitée périodique ou non périodique comme π (qui en est un prototype classique) à côté de nombres décimaux en écriture décimale est importante pour sensibiliser les élèves au monde des nombres et à leurs caractéristiques. Cette initiation est culturelle, elle est également importante pour travailler le calcul exact et approché, ce qui est un autre objectif de la classe de sixième. Je poursuis l'étude du curriculum concernant le nombre π. En cinquième ce nombre est de nouveau fréquenté avec le calcul de l'aire d'un disque de rayon donné et avec le volume d'un cylindre de révolution qui sont des compétences exigibles. En quatrième c'est en lien avec le volume d'un cône de révolution que le nombre π sera de nouveau rencontré. Dans la présentation du programme de troisième figure cette demande : « faire une première synthèse sur les nombres avec un éclairage historique et une mise en valeur de processus algorithmiques » et dans les commentaires du secteur *Nombres entiers et rationnels* des précisions sont données : « À côté des nombres rationnels, on rencontre au collège des nombres irrationnels comme π et $\sqrt{2}$. On pourra éventuellement démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$. » Au terme du collège le nombre π a été utilisé dans le cadre de la géométrie plane et de l'espace et il a été présenté comme un nombre irrationnel, cette connaissance étant admise. C'est à travers la description de son écriture décimale que le nombre π est surement le mieux appréhendé et les élèves de sixième apprécient cette comptine qui permet de mémoriser les premiers chiffres de cette écriture : « Que j'aime à faire connaître un nombre utile aux sages… ». En conclusion le nombre π a été rencontré à chaque niveau de classe du collège dans le cadre géométrique, il a pu être montré comme prototype de nombre irrationnel en troisième, et en seconde son irrationalité devrait être admise.

Pour $\frac{\pi}{3}$, un raisonnement par l'absurde, reposant sur l'irrationalité de π, est alors possible. Si ce nombre non nul était rationnel il aurait une écriture sous la forme d'un quotient de deux entiers relatifs non nuls, on aurait alors :

$$\frac{\pi}{3}=\frac{p}{q}\Leftrightarrow \pi=\frac{3q}{p}$$

ce qui démontrerait que π est un nombre rationnel. Dans la démonstration précédente, pour ne pas s'appuyer sur l'implicite que le triple d'un entier relatif est un entier relatif, il serait intéressant de développer des connaissances relatives aux opérations dans les différents ensembles de nombres et d'étudier si ce sont des lois de composition interne ou non. Ce type de problème peut être utilisé plus largement pour donner des raisons d'être de la production de nouveaux nombres dans des dynamiques numérico-numériques ou numérico-algébriques. Par exemple des nombres rationnels idécimaux peuvent être produits comme quotients d'entiers naturels. Un autre objectif est d'assurer davantage de cohérence dans l'édifice des savoirs à enseigner à partir du lycée.

La reprise du travail sur l'irrationalité de nombres exprimés avec des racines carrées

Pour le nombre $-6\sqrt{3}+\sqrt{2}$: soit l'irrationalité de tout nombre du style $p\sqrt{a}+q\sqrt{b}$ avec a et b des entiers naturels qui ne sont pas tous les deux des carrés parfaits et dont le produit n'est pas un carré parfait, et p et q des rationnels est admise ; soit l'irrationalité de ce nombre est démontrée. Une démonstration par l'absurde possible en seconde pourrait être la suivante :

On suppose que le nombre $-6\sqrt{3}+\sqrt{2}$ est rationnel, il n'est pas nul (ce qui en toute rigueur demanderait également à être démontré), il existe donc deux entiers relatifs non nuls p et q tels que :

$$-6\sqrt{3}+\sqrt{2}=\frac{p}{q}$$

les carrés de ces deux nombres sont alors égaux :

$$\left(-6\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Leftrightarrow 110 - 12\sqrt{6} = \frac{p^2}{q^2}$$

où p^2 et q^2 sont des entiers naturels. On en déduit que $\sqrt{6} = \frac{110q^2 - p^2}{12q^2}$ ce qui démontrerait que $\sqrt{6}$ est un nombre rationnel[1] ce qui est contraire au fait qu'il soit irrationnel. En effet $\sqrt{6}$ est un nombre irrationnel en vertu du théorème[2] énoncé dans la section 5.5.2.3 : « si ($a \in \mathbb{N}$) et si a n'est pas un carré parfait alors $\sqrt{a}$ est un nombre irrationnel ».

Un problème dont la fonctionnalité est à interroger

L'exercice 65 (Cf. Figure 8 p. 98) est le seul exercice figurant dans ce chapitre où les objets numériques ne sont pas travaillés directement comme objets de savoir mais comme outils de résolution de problème. La finalité du problème est de calculer le nombre 2952^4. La méthode proposée par le manuel consiste à transformer l'écriture du nombre 2952^2 qui est égal à 8 714 304 sous une forme qui est donnée à savoir : $(a\times10^4+b)^2$. On trouve a=871 et b= 4 304, il est demandé de développer : $(a\times10^4+b)^2$ « en conservant les lettres a et b », ce qui donne : $a^2\times10^8+2ab\times10^4+b^2$. À la troisième question il est demandé de calculer a^2, $2ab$, b^2 à la calculatrice ce qui donne respectivement ces résultats : 758 641 ; 3 748 784 ; 18 524 416. Enfin le calcul posé de la somme $a^2\times10^8+2ab\times10^4+b^2$ donne le nombre recherché :

	7	5	8	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0
+				3	7	4	8	7	8	4	0	0	0	0
+							1	8	5	2	4	4	1	6
	7	5	9	0	1	6	0	6	3	6	4	4	1	6

Quelle peut être l'initiative de l'élève dans ce problème ? Les trois premières questions sont très guidées et peuvent être faites indépendamment de la prise en compte de l'objectif cible du problème. D'ailleurs les élèves ne sont pas amenés à expérimenter le fait que le nombre dépasse les capacités d'affichage des calculatrices usuelles, le problème posé n'est donc pas leur problème qui n'est que dans le topos du professeur (Chevallard, 1998). Ce problème présente l'apparence d'un problème nécessitant la mise en œuvre d'outils non dévoilés à l'avance, mais la façon dont il est posé anéantit tout processus de dévolution. Seule la

[1] Cela suppose que le travail proposé précédemment a été réalisé, à savoir l'étude des opérations dans les différents ensembles pour savoir si elles sont ou non des lois de composition internes.

[2] Le manuel Trans math 2de édité en 2004 chez Nathan fait le choix d'instituer ce théorème et déclare : « On sait démontrer que $\sqrt{n}$ est irrationnel lorsque n est un entier naturel qui n'est pas le carré d'un entier. » (p. 16)

dernière question laisse un peu d'autonomie à l'élève qui doit comprendre les liens entre l'objectif cible et les questions intermédiaires et en particulier comprendre l'égalité suivante :

$$2952^4 = a^2 \times 10^8 + 2ab \times 10^4 + b^2$$

Je remarque que l'objectif du problème n'est là que comme décor de fond de scène didactique : « On cherche à obtenir la valeur exacte du nombre 2952^4 à l'aide d'une calculatrice numérique. » La forme affirmative signale implicitement que les questions à se poser ne résident pas dans cette partie du problème. Ainsi le problème donné aux élèves en lien avec l'écriture des nombres entiers et l'usage de la calculatrice est un faux problème, dans lequel les initiatives des élèves sont très pauvres. Une transformation de l'énoncé et de l'organisation didactique pour restaurer un défi aux yeux des élèves et un enjeu didactique enrichi pourrait être :

« Premier temps :

> Calculer 2952^4 avec votre calculatrice. Comparer les résultats donnés par des calculatrices différentes. Avez-vous obtenu la valeur exacte de ce nombre ? Expliquez pourquoi.

Deuxième temps après avoir fait une synthèse de la question précédente le professeur relance la recherche :

> Chercher un moyen alliant à la fois le calcul à la main et le maximum possible le calcul avec la machine pour obtenir l'écriture décimale de ce nombre. »

8.1.2.3 Analyse a posteriori de l'exercice 26

Voici les réponses d'un élève de Mathieu pour l'exercice 26 (Cf. Figure 7 p. 98) :

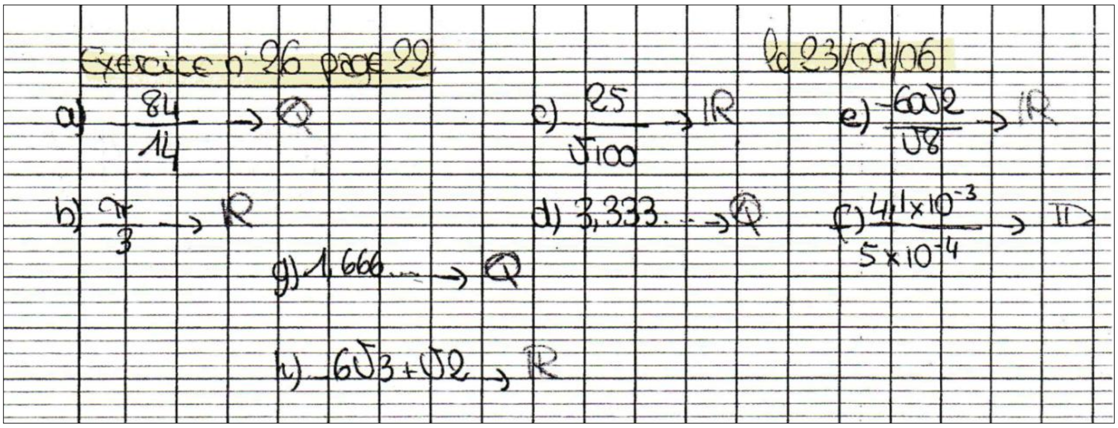


Figure 10 : exercice n°26 p. 22 chez Mathieu

Le rapport à la nature des nombres

Est-ce que cet exercice n'a pas été corrigé ? Est-ce que l'élève n'a pas pris la correction ? En tout cas l'élève assimile tous les nombres qui comportent un radical avec un réel (c, e, h), il assimile également un quotient d'entiers avec un rationnel (a) et l'apparition des puissances de 10 semble signer pour l'élève un nombre décimal. Ces réponses confirment l'obstacle repéré dans l'analyse *a priori* sur les confusions ente la nature d'un nombre et la forme de son écriture. Cet exercice est donc intéressant pour révéler ce type d'obstacle. Dans l'organisation didactique de ce moment de classe, il aurait été pertinent d'instaurer un débat entre les élèves pour confronter leurs diverses réponses. Mais je n'ai jamais assisté à cette forme de travail dans la classe de Mathieu. En voyant que l'élève dont j'ai le cahier n'a pas corrigé ses erreurs je pense pouvoir en conclure que cet exercice n'a pas donné lieu à une poursuite d'étude pour que les élèves élaborent un rapport aux nombres épistémologiquement plus solide.

Conformément à ce qui a été anticipé le nombre 1,6666… est pris pour un rationnel, l'élève l'écrit d'ailleurs avec trois chiffres 6 au lieu de quatre dans le livre, ce qui n'aurait pas d'importance effectivement si l'écriture avait été infinie périodique de période égale à 6. Le nombre du d) est lui aussi mal écrit puisque l'élève rajoute des pointillés, il est alors traité comme 1,6666… et il est déclaré rationnel.

L'utilisation du symbolisme

Une dernière remarque concerne la forme de la réponse. L'élève utilise une flèche qui ne pourrait avoir du sens que si cette flèche était la conversion en langage symbolique de la relation « appartient à cet ensemble de nombres qui est le plus petit sous-ensemble possible » entre l'ensemble des réels et l'ensemble des ensembles de nombres. Mais cette flèche est en général utilisée par les élèves comme signe d'abréviation, ou signe sténographique, alors même que le langage naturel qui traduit la relation implicite n'est pas encore maîtrisé.

En me référant au cours de Mathieu je repère que ni l'expression « tel nombre appartient à tel ensemble » ou « tel nombre fait partie de tel ensemble » ni le symbole d'appartenance correspondant ne sont utilisés. En revanche je trouve les écritures suivantes extraites du cours de Mathieu pris par cet élève (Cf. Figure 11) où le signe égal est utilisé de façon incorrecte, et je me demande encore une fois si elles sont spontanément utilisées par l'élève ou si ce sont des copies du tableau écrit par le professeur. Une autre cause possible est que ces symboles ne sont pas importants pour l'élève qui les considère peut-être comme des abréviations personnelles, et non pas comme un registre à part entière avec des règles de formation spécifiques. Est-ce que le professeur identifie de son côté des objets à enseigner ? Ce sont des questions qui restent sans réponse.

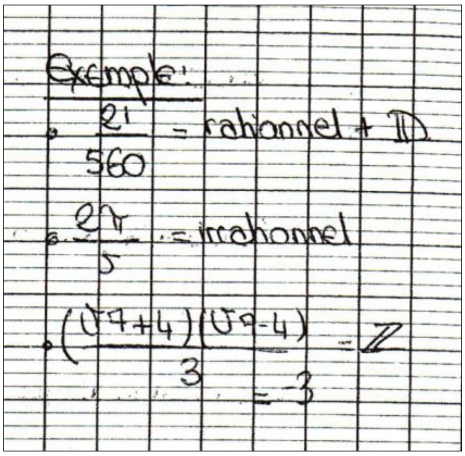
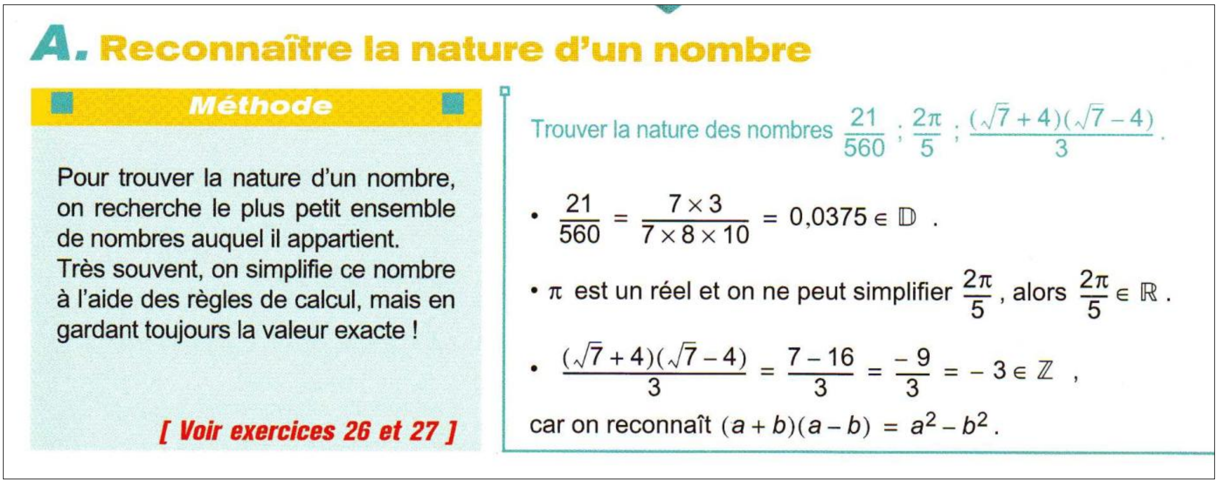


Figure 11

Le cas des irrationnels

L'élève, n'ayant manifestement pas pris la correction de l'exercice 26, je ne sais pas ce qui était attendu pour la démonstration de l'irrationalité du nombre $-6\sqrt{3}+\sqrt{2}$. Cependant la référence à ce qui a été fait en cours par Mathieu et ce que propose le manuel utilisé, m'amènent à supposer que ce secteur du domaine numérique n'est pas repéré par le professeur comme l'occasion de développer des démonstrations.

La proposition du livre pour répondre à des questions relatives au type de tâches T est à ce propos pour le moins étonnante. Elle est reproduite dans la figure ci-dessous et elle est mentionnée comme méthode à utiliser pour les exercices 26 et 27.



A. Reconnaître la nature d'un nombre

Méthode

Pour trouver la nature d'un nombre, on recherche le plus petit ensemble de nombres auquel il appartient.
Très souvent, on simplifie ce nombre à l'aide des règles de calcul, mais en gardant toujours la valeur exacte !

[Voir exercices 26 et 27]

Trouver la nature des nombres $\frac{21}{560}$; $\frac{2\pi}{5}$; $\frac{(\sqrt{7}+4)(\sqrt{7}-4)}{3}$.

- $\frac{21}{560} = \frac{7\times 3}{7\times 8\times 10} = 0{,}0375 \in \mathbb{D}$.
- π est un réel et on ne peut simplifier $\frac{2\pi}{5}$, alors $\frac{2\pi}{5} \in \mathbb{R}$.
- $\frac{(\sqrt{7}+4)(\sqrt{7}-4)}{3} = \frac{7-16}{3} = \frac{-9}{3} = -3 \in \mathbb{Z}$,

car on reconnaît $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Figure 12: extrait du livre p. 13

Il est admis par les auteurs du livre que π est un réel, partant de cette prémisse le quotient $\frac{2\pi}{5}$ qui n'est pas simplifiable est déclaré être un irrationnel. Ce raisonnement est évidemment faux, le nombre $\frac{2}{7}$ lui aussi ne peut être simplifié, et pourtant il est rationnel. L'affirmation a une valeur de certitude, pourtant elle repose sur un argument d'autorité et non pas sur des arguments mathématiques. Quel rapport personnel les élèves vont-ils développer avec les mathématiques si l'appréhension perceptive du nombre suffit pour en déterminer la nature alors qu'une démonstration qui n'est pas évidente est nécessaire ? J'ai développé cette démonstration par l'absurde dans l'analyse *a priori*, elle permet de faire rencontrer aux élèves un raisonnement qu'ils ont déjà mis implicitement en œuvre pour démontrer par exemple qu'un triangle n'est pas rectangle en lien avec le théorème de Pythagore ou plutôt en lien avec sa contraposée utilisée en acte (au sens de Vergnaud, 1994).

Regard sur la méthode du manuel

Une technique habituelle donnée par le manuel pour déterminer la nature d'un nombre est décrite ainsi : « on simplifie ce nombre à l'aide des règles de calcul, mais en gardant toujours la valeur exacte ! ». Ce discours présente des incohérences. Le verbe « simplifier » désigne certainement des types de tâches très différents comme des simplifications de quotients, mais aussi des calculs ou encore des développements comme dans le troisième spécimen donné dans le manuel. Ce verbe ne peut donc pas référer à ces différentes transformations. Par ailleurs ce ne sont pas que des règles de calcul qui seront mises en œuvre. Comme je viens de le signaler dans le troisième spécimen c'est la connaissance d'une identité remarquable ou encore la règle de la distributivité qui sont mises en œuvre. Dans le premier spécimen c'est la règle de simplification des quotients, il ne s'agit donc pas de règles de calcul. Une troisième incohérence est de préciser qu'il faut garder la valeur exacte, ce qui sous-tendrait l'idée qu'il est possible de transformer l'écriture d'un nombre en modifiant sa valeur.

Le manque de solidité épistémologique de ce discours montre comment peuvent être véhiculées dans le savoir enseigné des méthodes qui ne permettent pas de construire chez les élèves un rapport idoine aux règles du jeu de la discipline des mathématiques.

L'irrationalité des nombres écrits avec des radicaux

Plusieurs choix seraient cependant possibles de la part du professeur à ce niveau de seconde pour un spécimen comme $-6\sqrt{3}+\sqrt{2}$:

- Ne jamais donner de spécimen de ce type qui nécessite des démonstrations complexes ;
- Demander aux élèves de faire une conjecture sur la nature du nombre puis leur demander d'admettre la réponse en précisant explicitement ce statut ;
- Faire la démonstration de l'irrationalité de ce nombre et demander aux élèves de l'étudier ;
- Attendre des élèves qu'ils fassent un raisonnement par l'absurde comme celui de l'analyse *a priori*.

Ces choix seraient épistémologiquement et didactiquement cohérents au regard de la discipline, et ils seraient également cohérents pour faire entrer les élèves dans la rationalité mathématique.

Analyse a posteriori de l'exercice 65

Je m'intéresse maintenant à l'exercice 65 (Cf. Figure 8 p. 98) et aux réponses du même élève :

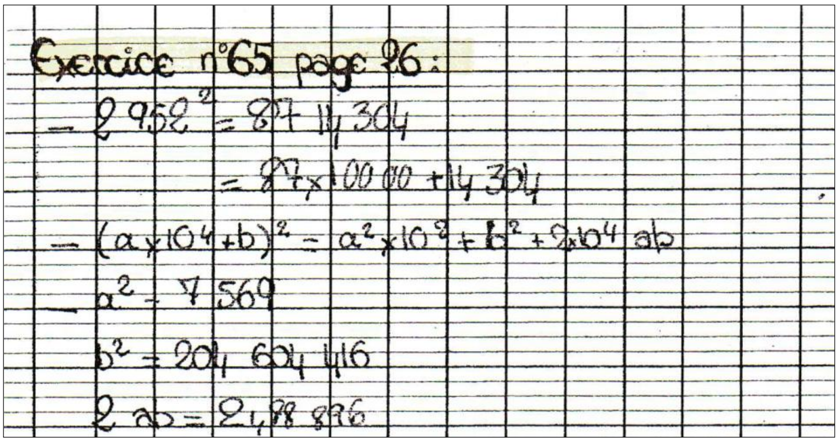


Figure 13: n°65 page 26 chez Mathieu

Comme je l'avais anticipé dans l'analyse *a priori* l'élève s'est contenté de répondre aux trois premières questions très guidées et n'a pas su utiliser ces réponses partielles pour répondre à la question cible du problème. Là encore la correction ne figure pas dans le cahier de l'élève. Est-ce que l'addition posée a été effectuée lors de cette correction ? Je n'ai pas de réponse. Cependant la reprise de ces techniques opératoires apprises en primaire est un moyen pour se doter d'une représentation mentale des nombres. Dans ce problème les conversions entre les écritures utilisant les puissances de 10 et les écritures décimales donnent du sens à ces différentes écritures en montrant qu'elles répondent à des besoins, ainsi c'est la dernière question qui était la plus intéressante pour obliger à une synthèse entre les différentes questions. Je peux dire que cette question n'a pas laissé de trace au moins pour cet élève !

Conclusion

Dans tous les exercices trouvés dans le cahier d'exercices relatif au premier chapitre, un seul utilise le cadre géométrique. Ainsi il faut rechercher si un triangle dont les mesures sont exprimées avec des radicaux est ou non rectangle. Cet exercice est donc une motivation pour utiliser des calculs numériques et pour comparer des nombres en mobilisant les règles concernant les radicaux. J'ai inscrit ce type de travail dans le NAA. Cependant le cloisonnement entre les domaines numérique et algébrique et les autres domaines est pratiquement total. Les dynamiques du numérique avec d'autres domaines ne sont pas mises en œuvre. L'ensemble des réels n'est même pas mis en relation avec la droite graduée alors que c'est une demande explicite du programme.

8.1.3 Analyse du thème « Nature et écriture des nombres » chez Clotilde

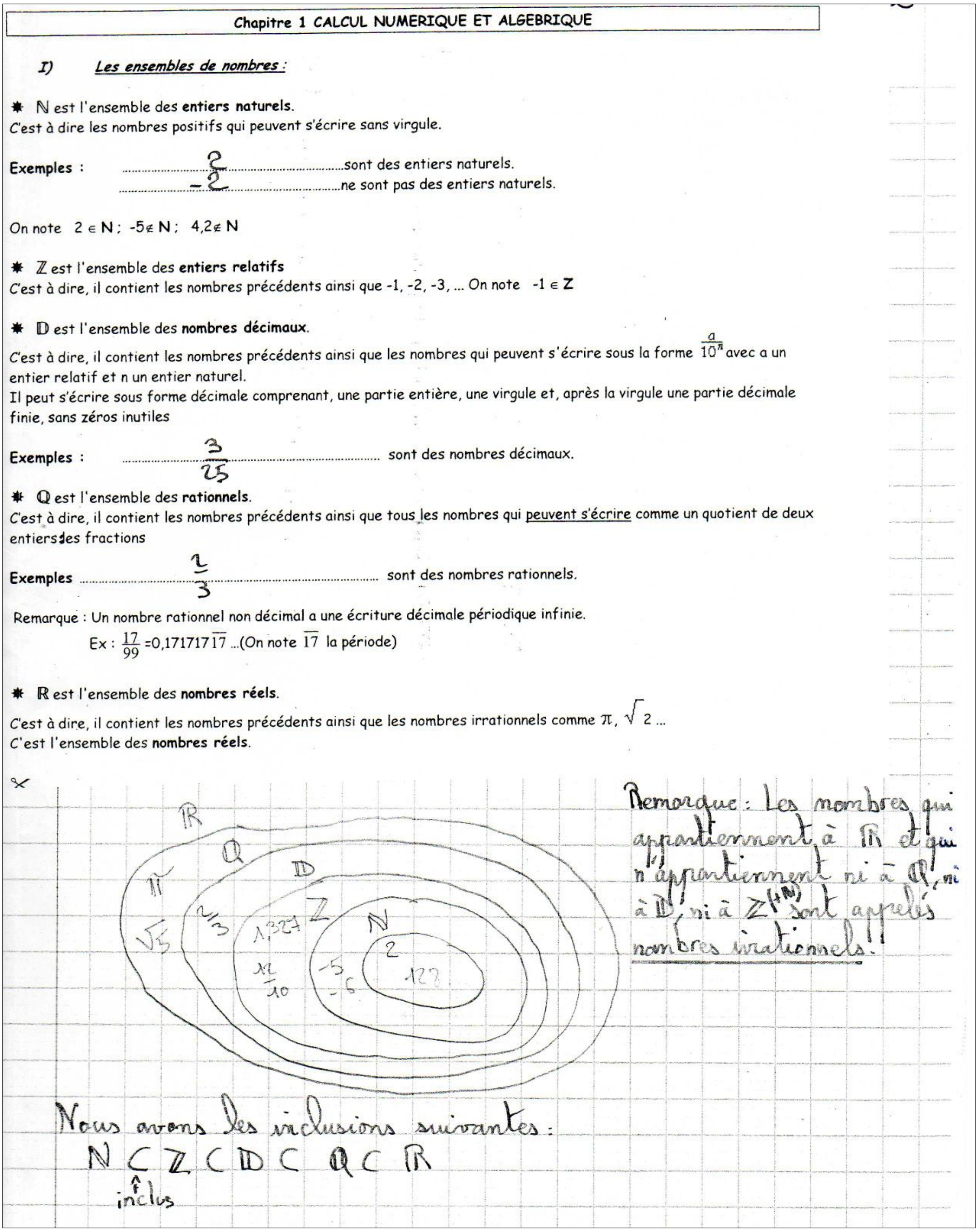
Analyse du cours de Clotilde relativement à T

Je commence par présenter le contexte d'enseignement du thème « Nature et écriture des nombres » qui figure dans le premier chapitre de la progression de Clotilde (Cf. section 7). Les données que j'utilise sont des traces écrites recueillies dans les cahiers d'un élève (cahier de cours et cahier d'exercices) ainsi que dans les devoirs de plusieurs élèves. Je vais décrire et analyser les praxéologies mathématiques travaillées relativement au thème cité précédemment.

8.1.3.1 Étude du cours de Clotilde

Pour démarrer le cours du premier chapitre Clotilde a donné aux élèves une photocopie à compléter en partie (Cf. Figure 14: cours de Clotilde). Je m'intéresse aux choix relatifs aux éléments théoriques institutionnalisés apparaissant dans cette photocopie. Elle privilégie certaines formes caractéristiques pour reconnaître la nature d'un nombre. Pour les décimaux elle présente deux formes différentes, sous la forme du quotient d'un entier relatif par une puissance de 10 à exposant entier naturel, et sous la forme d'une écriture décimale dont la partie décimale est finie (ce sont deux formes répertoriées dans le Tableau 5: les ensembles de nombres p. 68). Je remarque cependant que la description de l'écriture décimale d'un nombre décimal correspond seulement à un nombre décimal non entier, c'est-à-dire un élément de $\mathbb{D}$-$\mathbb{N}$. Je remarque également que l'exemple donné comme élément de $\mathbb{D}$ est une fraction, l'exemple n'est donc pas directement donné sous une forme canonique mais la justification du fait que ce nombre est décimal n'est pas donnée.

Clotilde introduit la notion d'*écriture décimale périodique infinie* et elle donne une règle claire pour l'écriture de ce type de nombre ; je rappelle que cette notion est proposée en option dans les thèmes du programme qui évoquent un : « développement décimal fini ou périodique ».



Chapitre 1 CALCUL NUMERIQUE ET ALGEBRIQUE

I) ***Les ensembles de nombres :***

✱ $\mathbb{N}$ est l'ensemble des **entiers naturels.**
C'est à dire les nombres positifs qui peuvent s'écrire sans virgule.

Exemples : ....2..........sont des entiers naturels.
..........−2..........ne sont pas des entiers naturels.

On note $2 \in \mathbb{N}$; $-5 \notin \mathbb{N}$; $4{,}2 \notin \mathbb{N}$

✱ $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des **entiers relatifs**
C'est à dire, il contient les nombres précédents ainsi que -1, -2, -3, ... On note $-1 \in \mathbb{Z}$

✱ $\mathbb{D}$ est l'ensemble des **nombres décimaux.**
C'est à dire, il contient les nombres précédents ainsi que les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec a un entier relatif et n un entier naturel.
Il peut s'écrire sous forme décimale comprenant, une partie entière, une virgule et, après la virgule une partie décimale finie, sans zéros inutiles

Exemples : ....$\frac{3}{25}$.......... sont des nombres décimaux.

✱ $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des **rationnels.**
C'est à dire, il contient les nombres précédents ainsi que tous les nombres qui peuvent s'écrire comme un quotient de deux entiers : les fractions

Exemples ....$\frac{2}{3}$.......... sont des nombres rationnels.

Remarque : Un nombre rationnel non décimal a une écriture décimale périodique infinie.
Ex : $\frac{17}{99} = 0{,}171717\overline{17}$ ...(On note $\overline{17}$ la période)

✱ $\mathbb{R}$ est l'ensemble des **nombres réels.**
C'est à dire, il contient les nombres précédents ainsi que les nombres irrationnels comme π, $\sqrt{2}$ ...
C'est l'ensemble des **nombres réels.**

Remarque : Les nombres qui appartiennent à $\mathbb{R}$ et qui n'appartiennent ni à $\mathbb{Q}$, ni à $\mathbb{D}$, ni à $\mathbb{Z}$ (+N) sont appelés nombres irrationnels !

Nous avons les inclusions suivantes :
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
inclus

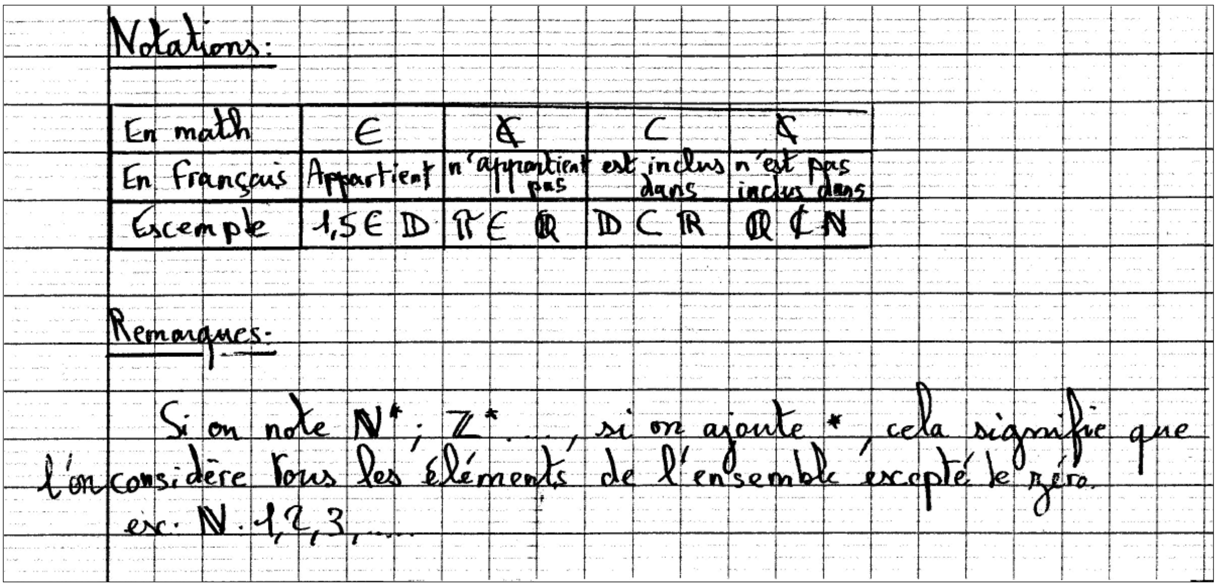
Figure 14: cours de Clotilde

Elle convoque les incontournables $\sqrt{2}$ et π comme exemples d'irrationnels. Enfin elle fait faire la représentation schématique de l'inclusion des ensembles sous la forme de diagrammes de Venn et elle ajoute $\sqrt{5}$ comme nouvel exemple de nombre irrationnel. Je remarque que les éléments ne sont pas représentés par des croix comme les règles de formation de ce type de représentation sémiotique le nécessiteraient au niveau du lycée pour distinguer un objet de sa dénomination. Le symbole de l'inclusion est également employé alors que le concept théorique d'inclusion des ensembles est rencontré de façon totalement intuitive. Cependant il n'est pas demandé ni dans le programme ni dans son accompagnement de travailler l'inclusion des ensembles de nombres. La seule indication relative au symbole de l'inclusion se trouve dans le document d'accompagnement du programme de seconde, elle précise que les symboles d'inclusion, intersection, réunion seront « employés à bon escient et sans excès » sans aucune indication sur les contextes dans lesquels utiliser ces notations.

Pour revenir au cours de Clotilde, la remarque inscrite à la main en marge du dessin n'est pas cohérente avec l'inclusion des ensembles de nombres. Cette remarque est la suivante : « Les nombres qui appartiennent à $\mathbb{R}$ et qui n'appartiennent ni à $\mathbb{Q}$, ni à $\mathbb{D}$, ni à $\mathbb{Z}$, $^{(+\mathbb{N}\ )}$ sont appelés nombres irrationnels. » Je note encore une fois la présence de vestiges de l'enseignement du domaine des ensembles sans un minimum de travail nécessaire pour donner du sens à ces notions comme celle d'inclusion par exemple. De façon plus cohérente avec l'esprit des programmes, Clotilde n'utilise pas les notations des ensembles avec des accolades qui eux aussi n'ont plus de sens pour les élèves depuis l'abandon de l'enseignement de la théorie des ensembles. Pourtant ces notations subsistent en général pour exprimer l'ensemble des solutions d'une équation.

La place du symbolisme en mathématiques

Cette première partie du premier chapitre sur les ensembles de nombres se termine par un paragraphe consacré à des notations spécifiques du domaine des ensembles (Cf. Figure 15).



Notations:

En math	$\in$	$\notin$	$\subset$	$\not\subset$
En français	Appartient	n'appartient pas	est inclus dans	n'est pas inclus dans
Exemple	$1,5 \in \mathbb{D}$	$\pi \in \mathbb{Q}$	$\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$	$\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{N}$

Remarques:

Si on note $\mathbb{N}^*$; $\mathbb{Z}^*$ ..., si on ajoute $*$, cela signifie que l'on considère tous les éléments de l'ensemble excepté le zéro.

ex. $\mathbb{N}$. 1, 2, 3, ...

Figure 15: cours CH1 Clotilde

Je remarque deux erreurs de l'élève qui a copié le cours : l'une concerne π, l'autre l'ensemble ℕ*. L'importance accordée par le professeur à ces nouveaux symboles semble marquer la véritable entrée dans le programme de seconde et signifier ainsi le démarrage du processus de chronogenèse.

Une interprétation particulière de l'écriture des nombres

La deuxième partie de ce chapitre est organisée comme suit (Cf. Figure 16) :

II) Les différentes écritures d'un nombre

1- Valeurs exactes, approchées, arrondies

2- Notation scientifique. Ordre de grandeur.

II) Les différentes écritures d'un nombre

1- valeurs exactes, approchées, arrondies

Nombre en valeur exacte	$\frac{2004}{7}$	$\frac{\pi}{60}$	cos(72°)	$\frac{3\sqrt{7}-8}{17}$
affichage calculatrice	286,2857143	0,0523598776	0,3090169944	-0,0036909451
troncature à 3 décimales	286,285	0,052	0,309	- 0,003
valeur approchée à 10^{-3} près: - par défaut	286,285	0,052	0,309	- 0,004
- par excès	286,286	0,053	0,310	- 0,003
valeur arrondie à 10^{-3} près	286,286	0,052	0,309	- 0,004

2 - Notation scientifique. Ordre de grandeur

Un nbre décimal s'écrit en notation physique : $a \times 10^p$ avec $1 \leqslant a < 10$ et $p \in \mathbb{Z}$.

ex : 0,000 679 en notation scientifique est égal à $6,79 \times 10^{-4}$

Figure 16 : extrait du cours de Clotilde, premier chapitre

Elle montre une interprétation personnelle par Clotilde de ce qui est désigné par les *écritures d'un nombre*. En effet le titre donné à cette partie est ambiguë dans la mesure où il annonce des valeurs qui peuvent être approchées ou arrondies. Cette conception est étonnante dans la mesure où un nombre donné apparaît sous différentes écritures, différents signes, qui doivent tous correspondre à la même valeur exacte. Ce choix de Clotilde constitue un obstacle didactique puisqu'une valeur approchée d'un nombre ne dénote pas (en général) ce nombre (Drouhard, 1997). Avec cette présentation le lien entre la nature d'un nombre et ses différentes représentations sémiotiques risque d'être confus. Une des raisons qui peuvent amener un professeur à développer cette compréhension vient vraisemblablement du manque de clarté de l'écriture du programme que j'avais déjà repérée et qui est bien analysée par Cirade (2004) que j'ai citée précédemment (Cf. 5.4.1). Un effet de la mise en page des programmes place sur la même ligne le contenu « Nature et écriture des nombres » avec la capacité exigible suivante : *Distinguer un nombre d'une de ses valeurs approchées.* Cette analyse permet d'identifier un certain nombre de difficultés, symptômes de différents problèmes à différents niveaux :

- la difficulté que le professeur éprouve pour interpréter un programme, il manque au professeur des connaissances pour enseigner qui sont des connaissances sur les mathématiques à enseigner ;
- la difficulté du formateur pour faire prendre conscience au professeur de cette difficulté significative d'un problème de la profession ;
- la difficulté des auteurs des programmes pour allier la concision du programme avec les développements nécessaires pour sa compréhension et sa mise en œuvre.

Les éléments du cours institués par Clotilde sont avant tout des définitions et des notations et ils ne comprennent pas de techniques des praxéologies mathématiques en lien avec le thème travaillé. Ils ne comprennent pas non plus de démonstrations, alors que l'occasion pourrait être saisie de faire étudier et apprendre aux élèves des démonstrations comme celle de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ qui est proposée dans le programme[1].

8.1.3.2 Le travail de la technique

J'analyse les travaux trouvés dans un cahier d'exercices d'un élève. Je ne peux pas savoir s'il s'agit de travail à la maison ou en classe puisque je ne dispose que de traces écrites qui ne comportent pas ces indications. Les premiers exercices trouvés dans ce cahier concernent essentiellement le type de tâches T (déterminer la nature d'un nombre) et les différentes écritures des nombres. Ces exercices proviennent d'un autre manuel que celui de la classe et ils ont été donnés aux élèves sous la forme d'une photocopie. Je ne sais pas pour quelle raison Clotilde fait le choix de ces exercices au lieu de prendre ceux du manuel de la classe pourtant très utilisé tout au long de l'année. Il est possible que les livres n'aient pas encore été distribués au début de l'année, cela peut être une raison, mais alors pourquoi ne pas photocopier les exercices du manuel de la classe ? Pour respecter les choix méthodologiques je n'ai pas posé ce type de question de manière à ne pas dévoiler les enjeux de la recherche et à ne pas influencer les choix ultérieurs du professeur. J'aurais pu cependant poser ce type de question en fin d'année.

[1] C'est une proposition des programmes qui est l'un des exemples proposés pour développer une culture de l'histoire des mathématiques : « Problèmes historiques sur les nombres, irrationalité de $\sqrt{2}$, crible d'Ératosthène, etc. »

Les exercices donnés aux élèves sur cette feuille photocopiée sont présentés sous le terme TD1, c'est à dire *travaux dirigés* numéro 1. La forme générale de l'enseignement de Clotilde, telle que j'ai pu l'observer directement tout au long de l'année, suit le schéma traditionnel et normalisé dans le métier d'un cours suivi d'applications sous la forme d'exercices cherchés par les élèves sous la direction du professeur.

2nde 5 **Feuille de TD1** **Septembre 2007**

Ensembles de nombres

▸ **8.** Monter que les nombres ci-dessous sont des nombres rationnels en les mettant sous la forme $\frac{a}{b}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.
1) $1{,}5$; $-0{,}38$. **2)** $-\frac{3}{2{,}5}$; 10^3.
3) $(-3)\times 0{,}01$; $\frac{3\pi}{4\pi}$. **4)** $-\frac{\sqrt{0{,}36}}{7}$; $\frac{3}{4}\times 10^{-2}$.

▸ **9.** Montrer que les nombres ci-dessous sont des nombres décimaux en les mettant sous la forme $a \times 10^p$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$.
1) $12{,}305$; $-15\,000$. **2)** $0{,}012\,5$; $\frac{3}{4}$.
3) $\frac{-7}{5}$; $1{,}3^2$; $(-6{,}2)^3$.
4) $\frac{1{,}2}{0{,}4}$; $\frac{0{,}125}{62{,}5}$.

▸ **10.** En utilisant le signe $\in$ et les symboles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, écrire à quels ensembles appartiennent les nombres ci-dessous.
1) -2 ; $7{,}5$. **2)** $\frac{10}{4}$; $-\frac{7}{3}$.
3) 0 ; $\sqrt{0}$. **4)** $\frac{0}{5}$; $-\sqrt{1}$. **5)** $\sqrt{3}$; $-\frac{1}{\pi}$.

11. Avec la calculatrice, sans utiliser la touche de la virgule, calculer $0{,}000\,052 \times 26{,}957\,8$. Trouver plusieurs possibilités et écrire la suite des touches utilisées.

▸ **12.** Sans utiliser la calculatrice, trouver les écritures représentant un même nombre.
1) $\frac{\sqrt{325\times 75}}{\sqrt{39}}$; $2{,}3$; $\sqrt{\frac{4}{9}}$; 25 ; $\frac{2}{3}$; $12+13$;
$\frac{100}{4}$; 9 ; $\frac{16}{24}$; $2\times\frac{1}{3}$; $\frac{1}{23}$; $\sqrt{81}$.
2) 13 ; 16 ; 10^{-2} ; $\left(\frac{1}{10}\right)^2$; $\frac{1}{100}$; $\sqrt{169}$;
$4\times 5-4$; $(-4)^2$.

13. Effectuer chacun des calculs suivants, puis donner l'écriture scientifique du résultat.
$A = 52\times 10^4 \times 25 \times 10^7$;
$B = 0{,}024 \times 10^7 \times 96 \times 10^{-3}$;
$C = \frac{72\times 10^{-3}\times 2\times 10^5}{15\times 10^2\times 4\times 10^{-1}}$.

~~**14.** **1)** Avec la calculatrice, effectuer chacun des calculs ci-après.~~
~~**2)** Écrire le nombre affiché par la calculatrice à l'aide de l'écriture scientifique.~~

Figure 17: exercices CH1 Clotilde

8.1.3.3 Analyse a priori à partir de la feuille de TD1

Les types de tâches travaillés dans les différents exercices

Je développe une analyse *a priori* à partir des choix d'exercices de Clotilde. Je vais détailler dans un tableau (Cf. Tableau 23) les différents types de tâches travaillés. Je considère le type de tâches T (déterminer la nature d'un nombre, c'est-à-dire « le plus petit ensemble » auquel il appartient) comme étant emblématique du numérique. Des éléments du travail de la technique relative à T sont des types de tâches comme T_r ou T_d qui sont travaillés dans les exercices 8 et 9. D'autres éléments de cette étude de T vont apparaître dans l'exercice 10 pour démontrer qu'un nombre est irrationnel, je reprendrai cela plus loin.

Les exercices 8, 9 et 10 ne pourraient pas être proposés sous cette forme en collège puisqu'ils utilisent les dénominations des ensembles, ce qui est une nouveauté du lycée. En revanche l'exercice 13 aurait pu être donné dès la classe de quatrième, l'écriture scientifique étant abordée à ce niveau.

Numéro de l'exercice	Type de tâches	Technique	Technologie	Théorie
8	T_r : montrer qu'un nombre est rationnel	Écrire le nombre sous la forme du quotient d'un entier relatif par un entier naturel non nul	Transformations des écritures des nombres Écritures canoniques Notations	Propriétés du corps des réels
9	T_d : montrer qu'un nombre est décimal	Écrire le nombre sous la forme du produit d'un entier relatif par une puissance de 10		
10	T	Écrire chacun des nombres (si nécessaire) sous une des formes caractéristiques des ensembles de nombres		
11	Calculer le produit de nombres en écritures décimales dont l'un au moins s'écrit avec une virgule sans utiliser la touche virgule d'une calculatrice	Écrire chaque nombre décimal non entier sous la forme d'un produit ou d'un quotient d'un entier et d'une puissance de 10		
12	Déterminer si des nombres sont égaux ou non	Écrire les nombres sous l'une des formes canoniques relatives à sa nature pour pouvoir les comparer		
13	Effectuer un calcul pour obtenir une écriture scientifique du résultat	Mettre en œuvre les propriétés du produit et du quotient de nombres ainsi que des puissances pour obtenir une écriture scientifique		

Tableau 23: praxéologies mathématiques CH1 Ex. Clotilde

Analyse des exercices 8 et 9

Je reprends les critères définis dans la section 4.4.1 (p. 48) pour analyser les exercices 8 et 9. Les dimensions R2 et R6 (Complétude des praxéologies et Statut final de la connaissance au sens de Brousseau) ne pourront être étudiées que dans l'analyse *a posteriori* après la réalisation effective, elles vont dépendre de la situation didactique. Les valeurs données aux différents critères sont attribuées en fonction des consignes données, mais elles traduisent parfois de façon trompeuse le véritable travail de l'élève. Par exemple tel type de tâches qui apparaît comme une nouveauté du programme de seconde, ne demande en fait que des connaissances déjà enseignées en troisième (exercices 8 et 9 notamment). Je commence par donner les valeurs des différents critères et je les commenterai ensuite.

	Critères d'analyse[1] / Spécimens	R_1 Rapport au nouveau	R_3 Exigibilité des connaissances visées	R_4 Notion utilisée comme outil ou objet	R_5 Nature des spécimens choisis
Exercice numéro 8	1,5	3	2	1	1
	-0,38	3	2	1	1
	$-\frac{3}{2,5}$	3	2	1	1
	10^3	3	2	1	1
	$(-3)\times 0,01$	3	2	1	1
	$\frac{3\pi}{4\pi}$	3	2	1	1
	$-\frac{\sqrt{0,36}}{7}$	3	2	1	1
	$\frac{3}{4}\times 10^{-2}$	3	2	1	1

Tableau 24 : analyse de l'exercice 8 donné par Clotilde

Ce qui apparaît nettement dans ces tableaux c'est la régularité des valeurs des critères. Les différentes tâches constituent une première rencontre dans ce temps de *reprise scolaire* en conformité avec le curriculum officiel de seconde. Cependant la complexité de ces tâches est très faible, les spécimens choisis n'offrent pas de nouveautés par rapport au collège et les notions en jeu ne sont pas problématisées, elles sont travaillées en tant qu'objets et non pas en tant qu'outils de résolution de problème.

[1] Pour traduire les codes 1, 2, 3 ou 4 se référer au tableau de la page 50.

	Critères d'analyse[1] / Spécimens	R_1 Rapport au nouveau	R_3 Exigibilité des connaissances visées	R_4 Notion utilisée comme outil ou objet	R_5 Nature des spécimens choisis
Exercice 9	12,305	3	2	1	1
	-15 000	3	2	1	1
	0,012 5	3	2	1	1
	$\frac{3}{4}$	3	2	1	1
	$\frac{-7}{5}$	3	2	1	1
	$1{,}3^2$	3	2	1	1
	$(-6{,}2)^3$	3	2	1	1
	$\frac{1{,}2}{0{,}4}$	3	2	1	1
	$\frac{0{,}125}{62{,}5}$	3	2	1	1

Tableau 25 : analyse de l'exercice 9 donné par Clotilde

Je vais montrer cependant que les nouveautés de ces deux exercices 8 et 9 ne sont en fait qu'une apparence de nouveauté. Dans les consignes les notations des ensembles de nombres apparaissent ainsi que la caractéristique générale d'un rationnel et d'un décimal. Cela suffit pour les considérer comme une première rencontre avec un objet du programme de seconde. Cela suffit également pour déclarer que les connaissances visées sont exigibles à partir du lycée. Mais en analysant de plus près l'exercice 8 (la même chose pourrait être développée pour l'exercice 9) il apparaît un problème posé à l'élève qui est aussitôt remplacé par un autre qui est seulement du niveau du collège. En effet la question posée à l'élève est articulée en deux parties :

[1] Pour traduire les codes 1, 2, 3 ou 4 se référer au tableau de la page 50.

1°) Première partie de la question : « Monter (sic !) que les nombres ci-dessous sont des nombres rationnels ». Si cette question avait été la seule, la recherche d'une technique aurait été dans le topos de l'élève qui aurait eu à mobiliser des connaissances relatives aux nombres rationnels. Plusieurs techniques auraient pu être mises en œuvre pour répondre à la question posée. Je note que dans le contexte de cet exercice dire qu'un nombre est rationnel ne veut pas dire que c'est le plus petit ensemble auquel il appartient. Une technique évidente pour plusieurs des spécimens serait d'utiliser l'inclusion des ensembles pour répondre à la question posée ;

2°) Deuxième partie de la question : « en les mettant sous la forme $\frac{a}{b}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ ».

De fait les élèves n'ont pas à réfléchir à la première question, la question de la reconnaissance d'un nombre rationnel n'est présente que comme décor didactique, elle n'est là que pour introduire un deuxième type de tâches qui est la transformation d'écriture sous la forme d'un quotient d'entiers.

En conclusion pour les exercices 8 et 9, le travail de la technique est en cours relativement à T_r et T_d mais il y a la mise en place d'une substitution d'un type de tâches par un autre et une installation du travail proposé aux élèves qui va ouvrir la porte à des effets Jourdain (Brousseau, 1998a). Une autre conséquence du glissement d'un type de tâches à un autre est le rapport au nouveau. Les consignes des exercices 8 et 9 m'amènent à les considérer comme étant une première rencontre en seconde, rien que la présence des dénominations des ensembles de nombres justifie cette appréciation. Cependant le véritable travail demandé aux élèves ne leur fait mobiliser que des connaissances du collège. La consigne de l'exercice 8 aurait pu être en troisième : « Montrer que les nombres ci-dessous peuvent se mettre sous la forme $\frac{a}{b}$ où a est un entier relatif et b un entier naturel non nul. » L'exercice formulé ainsi aurait été une reprise du collège sans aucune nouveauté, idem pour l'exercice 9.

Concernant l'exercice 9, je note que la forme caractéristique de reconnaissance d'un décimal n'est pas la même dans le cours de Clotilde et dans cet exercice. En effet elles sont respectivement sous la forme d'un quotient d'un entier relatif par une puissance de 10 à exposant entier naturel et d'un produit d'un entier relatif par une puissance de 10 à exposant entier relatif. Cette différence peut conduire les élèves à percevoir un décimal sous deux aspects distincts qui peuvent ainsi enrichir leur conception du décimal, mais elle peut également être source de difficulté. Est-ce que cela a été anticipé par le professeur comme étant un problème dévolu aux élèves ?

Les transformations d'écriture demandées dans les exercices 8 et 9 nécessitent la mise en œuvre de règles sur les puissances, et en conséquence offrent l'occasion d'une nouvelle rencontre avec ces règles qui ont été travaillées sur des exemples au collège et qui devraient être institutionnalisées en seconde[1]. Les transformations d'écriture nécessitent également la contextualisation de la règle dite fondamentale des quotients. Cette règle déjà institutionnalisée en collège *pour tout nombre connu à ce niveau* peut être reprise en lien avec du nouveau en précisant les ensembles de référence (Cf. section 8.1.2.1 p. 93). Lors de la simplification de $\frac{3\pi}{4\pi}$ qui figure dans l'exercice 8, il est d'ailleurs nécessaire de savoir que cette règle a un domaine de validité sur ℝ*. Les exercices 8 et 9 donnent également l'occasion de rencontre avec plusieurs règles concernant les quotients, les puissances, les racines carrées. Ces exercices offrent donc des situations de reprise qui pourraient être saisies pour organiser un répertoire des règles qui régissent le numérique en identifiant précisément leurs ensembles de validité. Ce geste professionnel de reprise aurait deux objectifs principaux :

- repérer les théorèmes qui règlent le travail sur le numérique et préciser leur domaine de validité en utilisant les ensembles de nombres ;
- constituer la *mémoire didactique* de la classe et en particulier le répertoire des éléments théoriques nécessaires pour assurer la validité des organisations mathématiques.

Un geste professionnel de reprise de la part du professeur pourrait être de demander aux élèves de formuler à l'oral puis à l'écrit les éléments théoriques permettant les transformations des écritures. Un répertoire pourrait alors être constitué au fur et à mesure des rencontres avec ces savoirs du collège nécessaires à l'activité mathématique. Ainsi l'*institutionnalisation après coup* dont il a été question dans la partie théorique pourrait être activée. Le bloc technologico-théorique des praxéologies mathématiques rencontrées pourrait être dévoilé comme étant le socle nécessaire réglant les activités numériques. Des connaissances utilisées en acte pourraient devenir des savoirs institutionnalisés à condition d'identifier et de répertorier les définitions et les théorèmes mis en œuvre et utilisés en acte.

---

[1] Le curriculum officiel n'est pas clair à ce sujet. Au collège les puissances ne sont travaillées qu'à travers des exemples. En quatrième dans les compétences exigibles on trouve : « Utiliser sur des exemples numériques, avec ou sans calculatrice scientifique, les égalités : $10^m \times 10^n = 10^{m+n}$; $\frac{1}{10^n} = 10^{-n}$; $(10^m)^n = 10^{mn}$ » et également : « Utiliser sur des exemples numériques, pour des exposants très simples des égalités telles que : $a^2 \times a^3 = a^5$; $\frac{a^2}{a^5} = a^{-3}$; $(ab)^2 = a^2b^2$ ». En troisième on trouve ce commentaire dans le programme : « On consolidera les compétences en matière de calcul sur les puissances ; notamment sur les puissances de 10. » Dans le savoir à enseigner il n'est donc pas dit que les élèves sortant du collège connaissent les règles concernant les puissances (sous entendu dans leur généralité). En seconde le programme ne demande pas de façon explicite l'institutionnalisation de ces règles. L'esprit reste le même que celui du collège : un travail contextualisé sur des exemples. Les puissances sont évoquées dans le document d'accompagnement en lien avec les nombres premiers : « La définition de nombre premier permet une nouvelle approche de ce travail en même temps qu'elle prépare la partie arithmétique des programmes ultérieurs et entretient des qualités indispensables de calcul (calcul mental, manipulation des puissances et des fractions) », et en lien avec l'écriture scientifique des nombres : « Ces activités seront l'occasion de travailler sur les propriétés des puissances. »

Nature des praxéologies ponctuelles liées au choix des nombres des exercices 8 et 9

Les praxéologies ponctuelles mises en œuvre pour certains spécimens des exercices 8 et 9 peuvent être *arithmétique* ou *algébrique* selon la terminologie définie dans le Tableau 1: praxéologies différentes pour une même tâche numérique (Cf. p. 15). J'explicite cela (Cf. Tableau 26) avec le nombre 1,5 de l'exercice 8 et le nombre $\frac{1,2}{0,4}$ de l'exercice 9.

Praxéologie	Spécimen	Technique fondée sur les opérations arithmétiques dans $\mathbb{D}$ et des conventions d'écriture	Technique fondée sur des règles algébriques relatives aux quotients
P_1 praxéologie arithmétique	1,5	1,5 est le résultat mémorisé du quotient de 15 par 10 qui peut s'écrire ainsi : $\frac{15}{10}$	$1,5=\frac{1,5}{1}=\frac{1,5\times 10}{1\times 10}=\frac{15}{10}$
P_2 praxéologie algébrique	$\frac{1,2}{0,4}$	La division de 1,2 par 0,4 effectuée à la main ou à la machine donne 3 qui est égal à : $3\times 1=3\times 10^0$	$\frac{1,2}{0,4}=\frac{1,2\times 10}{0,4\times 10}=\frac{12}{4}=\frac{3\times 4}{1\times 4}$ $=\frac{3}{1}=3$

Tableau 26: Clo.- Ch. 1- Ex. n°8 et n°9 Praxéologies ponctuelles

La connaissance des opérations arithmétiques dans $\mathbb{D}$, ici la division, est suffisante pour répondre dans le cas de certains spécimens avec une praxéologie du type P_1 ; mais des connaissances des règles de transformations des quotients peuvent être utilisées pour manipuler de façon formelle les écritures numériques dans des praxéologies de type P_2. J'ai considéré (Cf. section 2.1.3.2 p. 13) alors que ce type de travail est davantage du côté de l'algébrique, les nombres pouvant être manipulés sans égard pour leur valeur. La comparaison de ces deux praxéologies permet d'assoir des fondements pour une bonne articulation entre les domaines numérique et algébrique. Il est vraisemblable que dans une même classe de seconde les deux types de raisonnements coexistent, leur mise en œuvre explicite est un appui pour faire les liens entre eux et pour consolider l'articulation entre le numérique et l'algébrique (le NAA). Pour le spécimen 1,5 une autre technique est possible et peut enrichir encore les conceptions sur les objets du numérique. Elle repose sur la règle de formation du registre des écritures décimales qui définit l'écriture à virgule 1,5 comme étant égale à la fraction décimale $\frac{15}{10}$.

Analyse de l'exercice 10

Dans l'exercice 10 de la feuille de TD1 (Cf. p. 112) ce sont dix spécimens de T qui sont travaillés. Les techniques possibles dépendent évidemment de la nature du nombre ainsi que de son écriture qui sont des variables didactiques. Un implicite réside dans la consigne. Une réponse évidente pourrait être que tous ces nombres appartiennent à l'ensemble des réels. Mais une autre réponse est attendue : il s'agit de trouver le plus petit ensemble auquel appartient chacun de ces nombres. La consigne insiste sur ces emblèmes de la nouveauté que sont les symboles. Pourtant des conclusions dans le registre du langage naturel comme : « -2 est un nombre entier relatif » ou encore « $-\frac{1}{\pi}$ est un nombre réel qui n'est pas rationnel et qui est donc irrationnel » permettraient de développer le concept de nombre de façon plus solide à travers la diversité des signifiants langagiers (Vergnaud, 1990). En laissant les élèves libres de formuler leurs réponses comme ils le veulent, en langage naturel ou symbolique ou encore schématique, la pluralité des représentations langagières consolide le concept ainsi représenté. Par exemple le schéma qui figure l'inclusion des ensembles et qui est inséré dans la partie du cours pourrait être utilisé pour donner les réponses de l'exercice 10. Ce schéma deviendrait alors un outil opératoire pour représenter dans un registre graphique la nature des nombres au lieu de rester comme un décor désuet confiné dans la partie du cours.

Comme je l'ai fait précédemment pour les exercices 8 et 9, je reprends les critères définis dans la section 4.4.1 (Cf. p. 48) pour analyser l'exercice 10.

	Critères d'analyse[1] / Spécimens	R_1 Rapport au nouveau	R_3 Exigibilité des connaissances visées	R_4 Notion utilisée comme outil ou objet	R_5 Nature des spécimens choisis
Exercice 10	-2	3	2	1	1
	7,5	3	2	1	1
	$\frac{10}{4}$	3	2	1	1
	$-\frac{7}{3}$	3	2	1	1
	0	3	2	1	1
	$\sqrt{0}$	3	2	1	1
	$\frac{0}{5}$	3	2	1	1
	$-\sqrt{1}$	3	2	1	1
	$\sqrt{3}$	3	2	1	2
	$-\frac{1}{\pi}$	3	2	1	2

Tableau 27 : analyse Clo.- Ch. 1- Ex. n°10

[1] Pour traduire les codes 1, 2, 3 ou 4, se référer au tableau de la page 50.

Les valeurs des critères sont pratiquement les mêmes que pour les exercices 8 et 9. Les spécimens choisis sont encore familiers depuis le collège en tant que nombres, mais les deux derniers sont complexes par rapport à la démonstration de leur irrationalité. L'énoncé de l'exercice nécessite de la part de l'élève un décodage des dénominations des ensembles et des savoirs sur la caractérisation de chaque type de nombres, ce qui justifie la valeur 3 attribuée au critère « Rapport au nouveau ».

Je regarde plus précisément les réponses envisageables pour certains spécimens. Pour $-\frac{7}{3}$ une technique possible repose sur la division à la main de 7 par 3. Le quotient a une écriture décimale illimitée périodique de période égale à 3, le nombre est donc rationnel et idécimal. Ce nombre est donc rationnel. Ce type d'expérience de calcul à la main devrait être vécu par chaque élève de seconde, il permet *de toucher du doigt* cet objet qui est un nombre rationnel idécimal appréhendé sous son écriture décimale infinie et périodique.

Pour le nombre $\sqrt{3}$, soit il est admis dans la classe qu'il est irrationnel, soit l'irrationalité de tout nombre du style $\sqrt{a}$ avec a entier naturel qui n'est pas un carré parfait est admise[1]. Ce qui peut être démontré en seconde c'est l'idécimalité d'un nombre de ce type, elle repose sur le dernier chiffre de l'écriture décimale du nombre dans le cas où il aurait été décimal, mais l'irrationalité de ce nombre ne peut être démontrée au niveau de la seconde.

Pour $-\frac{1}{\pi}$ un raisonnement par l'absurde fondé sur l'irrationalité de π - qui devrait être institutionnalisée en seconde - est possible. Si ce nombre non nul était rationnel il aurait une écriture sous la forme d'un quotient de deux entiers relatifs non nuls, on aurait alors : $-\frac{1}{\pi}=\frac{p}{q} \Leftrightarrow \pi=\frac{-q}{p}$ ce qui démontrerait que π est un nombre rationnel.

Analyse des exercices 11 et 12

Les exercices 11 et 12 obligent à faire des changements d'écriture des nombres en tant qu'outils de résolution du problème posé (Cf. Tableau 23: praxéologies mathématiques CH1 Ex. Clotilde p. 113). Même si ces problèmes ne sont pas véritablement problématiques, les changements d'écriture sont à la charge de l'élève et ils sont mobilisés dans ce contexte grâce à des types de tâches qui deviennent des raisons d'être pour T. En effet les changements d'écriture vont dépendre de la nature du nombre et vont être orientés par la détermination de cette nature. Par exemple le rationnel idécimal $\frac{2}{3}$ ne sera pas transformé en écriture décimale et cette écriture sous la forme d'une fraction sera considérée comme son écriture canonique la plus pertinente dans le contexte de l'exercice 12. Ainsi les transformations d'écritures opérées par les élèves permettent de développer le concept de nombre perçu à travers différents

[1] Le manuel Trans math 2de édité en 2004 chez Nathan fait ce choix et déclare : « On sait démontrer que $\sqrt{n}$ est irrationnel lorsque n est un naturel qui n'est pas le carré d'un entier » (p 16).

signifiants. L'objet nombre peut être ainsi différencié de son écriture privilégiée - ou canonique - qui est en général celle qui apparaît dans la définition d'un type de nombres. J'analyserai plus loin cette tâche en terme de registres au sens de Duval.

L'exercice 11 est en rupture par rapport aux questions habituelles et cela peut dérouter les élèves relativement au contrat didactique élaboré dans la classe. En effet plusieurs possibilités sont demandées au lieu d'une seule, et c'est le registre d'écriture pour traduire les touches utilisées avec la machine qui est sollicité. Ce registre a fait l'objet d'un travail dans le TD3 (Cf. annexe 11.30) que Clotilde a proposé à ses élèves au cours du mois de septembre en lien avec ce premier chapitre. Cet exercice 11 est ainsi une première occasion de rencontre avec le maniement d'une calculatrice et son langage spécifique. Je note que le type de tâches de cet exercice fait partie d'un *genre de tâches* qui peut s'énoncer ainsi : « faire un calcul avec une machine alors qu'elle est cassée et que l'un des signes de l'écriture du calcul ne fonctionne pas ».

Dans l'exercice 12 le repérage des écritures qui dénotent le même objet nombre nécessite l'emploi du concept d'égalité pour traduire le fait que des écritures différentes sont équivalentes pour référer à un même nombre. Ce type de tâches est essentiel pour développer la flexibilité des points de vue sur les nombres indispensable dans la résolution de problèmes.

8.1.3.4 Analyse a posteriori du travail de la technique relative à T

Analyse du TD1

Je présente l'analyse *a posteriori* des exercices présentés dans la Figure 17 (Cf. p. 112). Je m'appuie sur les écrits trouvés dans un cahier d'élève. Une remarque préalable est nécessaire à ce sujet : lorsque j'ai assisté à une séance d'enseignement j'ai noté le plus précisément possible tout ce qui a été dit et écrit par le professeur. J'ai recueilli notamment les corrections réalisées par le professeur au tableau. La comparaison entre ce que j'ai noté et ce qui est noté dans les cahiers d'exercices des élèves m'a permis de repérer des différences très importantes même chez des élèves très attentifs et très sérieux. Les écrits trouvés dans les cahiers ne reflètent pas toujours le travail du professeur, et je n'ai aucun moyen pour savoir ce qui a été véritablement réalisé lorsque je n'ai pas assisté à la séance. En particulier les données trouvées dans les cahiers des élèves ne permettent pas de trouver la trace d'éléments technologico-théoriques s'ils n'ont existé qu'oralement.

Exercice 8

Voici les réponses de l'élève pour l'exercice 8 :

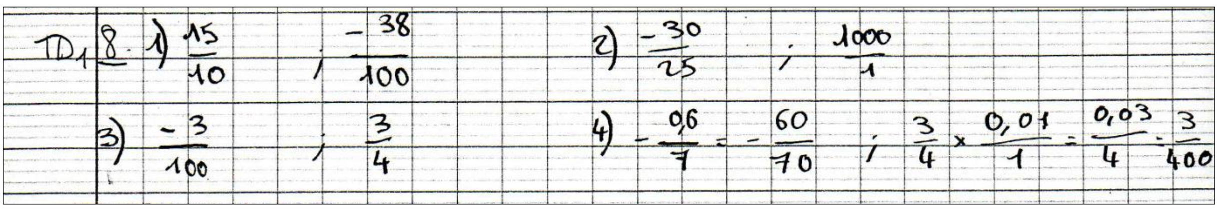


Figure 18 : Clo.- Ch. 1- Ex. n°8

La transformation des écritures sous la forme d'un quotient d'entiers ne semble pas poser de difficulté à cet élève même si une erreur est visible pour le septième spécimen. Les traces écrites ne permettent pas de connaître les techniques utilisées par l'élève, les praxéologies ne sont donc pas complètes et les connaissances mobilisées le sont au moins au niveau 2 (la connaissance est mobilisée en tant que *modèle implicite*) d'après l'échelle établie par Brousseau. Rien ne permet non plus de savoir si les règles utilisées en acte ont été formulées par le professeur ou par les élèves.

Je remarque également l'absence des égalités qui auraient donné un ostensif pour signifier le changement de l'écriture et non pas du nombre. Il est fort probable que pour l'élève l'important est d'écrire un résultat, et non pas de prouver des égalités. Comme cela avait été anticipé dans l'analyse *a priori*, l'élève ne s'intéresse qu'à la deuxième partie de la question et la démonstration qui devait conclure que les nombres sont rationnels n'est pas achevée (tout au moins à l'écrit).

Exercice 9

Voici les réponses du même élève pour l'exercice 9 :

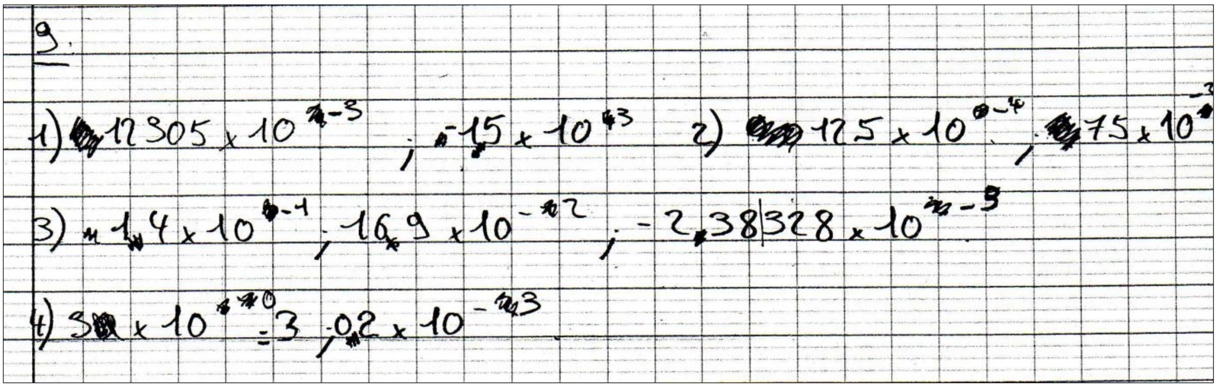


Figure 19 : Clo.- Ch. 1- Ex. n°9

Pour l'exercice 9 il est visible que l'élève a corrigé ses réponses personnelles. La consigne n'a pas été interprétée correctement. Elle nécessitait le décodage des données $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$. Apparemment l'élève n'a pas compris que le nombre a devait être un entier. Si l'exercice précédent amenait l'élève à écrire les nombres sous une forme familière travaillée dès la classe de sixième (l'écriture fractionnaire), dans cet exercice 9 il fallait correctement interpréter la nature des nombres a et p de l'écriture $a \times 10^p$, ce qui visiblement a posé problème à l'élève. Dans cet exercice 9, les spécimens choisis sont plus proches du collège puisque les nombres convoqués ne comportent aucun radical dans leur écriture. Je remarque comme dans l'exercice précédent que seuls les résultats attendus sont écrits alors qu'il s'agissait de produire des égalités, et que la démonstration demandée, à savoir démontrer que les nombres sont décimaux, n'est pas achevée.

Je constate que les exercices 8 et 9 auraient dû permettre de développer des éléments de technique relatifs à T, mais qu'ils sont en fait transformés sous la contrainte de la deuxième partie de la consigne qui fait oublier l'objectif annoncé principalement. Ainsi les types de tâches que j'avais nommées T_r et T_d (démontrer qu'un nombre est rationnel, démontrer qu'un nombre est décimal) ne sont pas véritablement identifiés.

J'ai souligné la différence entre la caractérisation du décimal donnée par Clotilde dans son cours et celle qui est donnée dans cet exercice. Est-ce voulu par Clotilde pour amener les élèves à rencontrer une nouvelle appréhension du nombre décimal de façon à enrichir leur conception du décimal ? Veut-elle faire travailler les règles de transformation des écritures concernant les puissances de 10 à exposant négatif déjà rencontrées en collège ? Est-ce qu'elle n'a pas pris conscience de cette différence relative aux éléments théoriques ?

Exercice 10

L'exercice 10 est directement en lien avec T (déterminer la nature d'un nombre). Les réponses de l'élève sont dans la Figure 20 : Clo.- Ch. 1- Ex. n°10et la Figure 21.

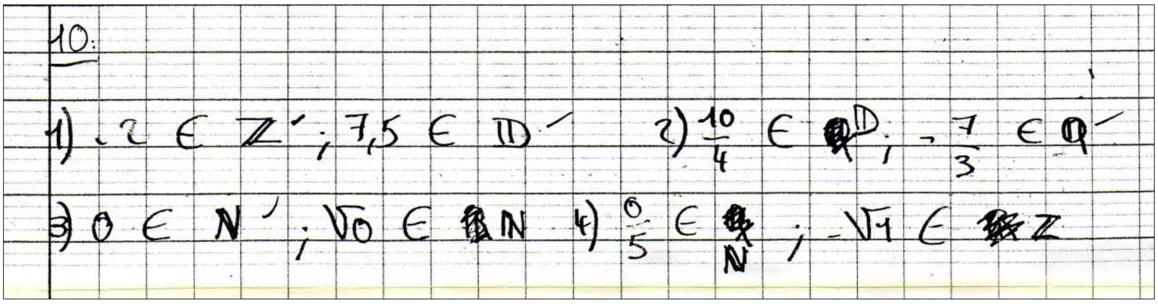


Figure 20 : Clo.- Ch. 1- Ex. n°10

Les réponses personnelles de l'élève sont encore visibles, elles ont parfois été barrées et la réponse corrigée a été écrite à côté. Lorsque la réponse est juste l'élève l'a repérée en inscrivant un petit trait. Il semblerait que l'élève assimile la nature d'un nombre avec une écriture particulière : un quotient avec un rationnel, la présence d'un radical avec un irrationnel. Duval (1993) a repéré cet obstacle qui consiste à identifier un objet avec l'un de ses registres de représentation sémiotique, l'exemple de cet élève est très représentatif de ce type d'erreur.

Par ailleurs s'il est évident d'après l'écriture du nombre $\frac{-7}{3}$ qu'il est sous la forme canonique d'un rationnel, il n'est pas du tout évident qu'il soit idécimal. Dans la classe de Clotilde le théorème figurant dans les thèmes du programme et présenté précédemment n'a pas été enseigné, il ne sera d'ailleurs pas du tout enseigné au cours de l'année[1]. La praxéologie basée sur ce théorème ne peut pas être mise en œuvre par les élèves, mais elle aurait pu être enseignée par le professeur. De façon plus simple une autre praxéologie est entièrement

[1] Je rappelle ce théorème :

« Caractérisation des éléments de D et de Q, soit en terme de développement décimal fini ou périodique, soit comme quotient irréductible d'entiers (le dénominateur étant ou non de la forme $2^p \times 5^q$). »

disponible pour les élèves, elle correspond à la technique de la division à la main de 7 par 3 proposée dans l'analyse *a priori*. Les élèves disposent des termes pour dire que « la division ne s'arrête pas », ils sont dans la partie du cours : le nombre a une « écriture décimale périodique infinie » de période égale à 3. Est-ce que ce raisonnement a été fait oralement ? Il est impossible de le savoir. En revanche la réponse figurant dans le cahier de l'élève est incomplète, la démonstration pourtant nécessaire pour affirmer que la nature du nombre est un rationnel (non décimal) est absente. Une hypothèse étayée par les analyses précédentes des choix de Clotilde est que ce professeur est essentiellement préoccupé par l'enseignement des nouveaux symboles au détriment de l'enseignement de la démonstration. Ainsi le domaine numérique ne semble pas investi par Clotilde comme étant un lieu propice au développement spécifique de la pensée mathématique.

Pour chacun des nombres $\sqrt{3}$ et $-\frac{1}{\pi}$ je fais le même constat : la praxéologie est incomplète, la démonstration de l'irrationalité de ces nombres est absente (Cf. Figure 21).

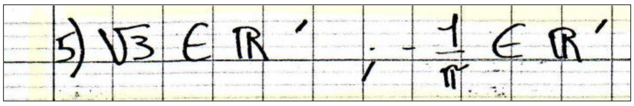


Figure 21 : Clo.- Ch. 1- Ex. n°10 (fin)

Pourtant π est traditionnellement convoqué à côté de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{3}$ comme exemple prototypoque de nombre irrationnel. Le raisonnement par l'absurde possible en classe de seconde pourrait être mis en œuvre pour démontrer l'irrationalité de $-\frac{1}{\pi}$; mais la démonstration est évitée. Des énoncés peuvent ainsi prendre une valeur épistémique de certitude sans avoir été validés par une démonstration (Duval, 1993). Ce constat est à rapprocher de la troisième hypothèse (Cf. section 3.3) dans laquelle je développais l'idée que l'incomplétude des praxéologies mathématiques pouvait engendrer pour les élèves un rapport personnel à l'activité mathématique non conforme à l'épistémologie de la discipline.

Exercice 11

Pour l'exercice 11 l'élève a inscrit cette seule réponse :

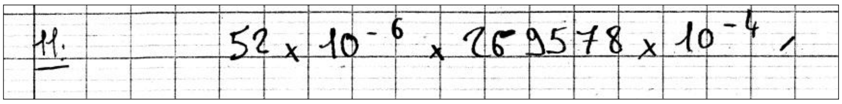


Figure 22 : Ex. n°11, chapitre 1, chez Clotilde

Il s'est contenté de proposer une seule possibilité et non pas plusieurs. Est-ce un effet du contrat didactique qui laisserait entendre que trouver une réponse à une question en mathématiques est suffisant pour faire son métier d'élève ? De plus cette réponse n'est pas exprimée dans le registre de la calculatrice mais dans le registre des expressions numériques. Les ruptures anticipées précédemment semblent se confirmer à travers cette réponse.

L'élève, comme il le fait habituellement, a tracé un petit trait qui signifie certainement que sa réponse est juste. Est-ce que cette réponse est la seule donnée dans la classe ? Est-ce que le registre du langage de la machine n'a pas été proposé ? Est-ce que Clotilde sachant qu'elle allait faire ce travail dans le TD3 n'a pas voulu aborder ce travail à ce moment là en respectant des cloisonnements dans l'organisation de sa séquence ? Il paraît vraisemblable que la préoccupation de Clotilde en lien avec cet exercice devait être uniquement de motiver l'emploi des puissances de 10, et cet objectif a donc été atteint.

Exercice 12

Voici les réponses de ce même élève à l'exercice 12 :

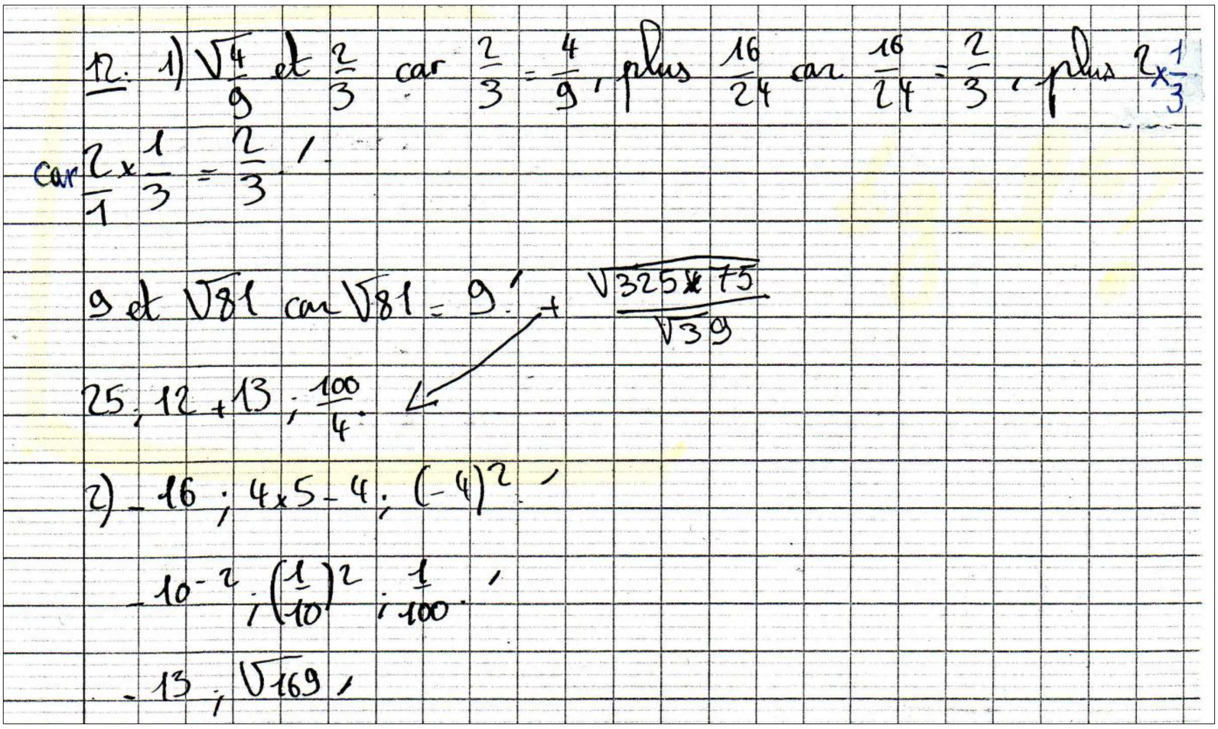


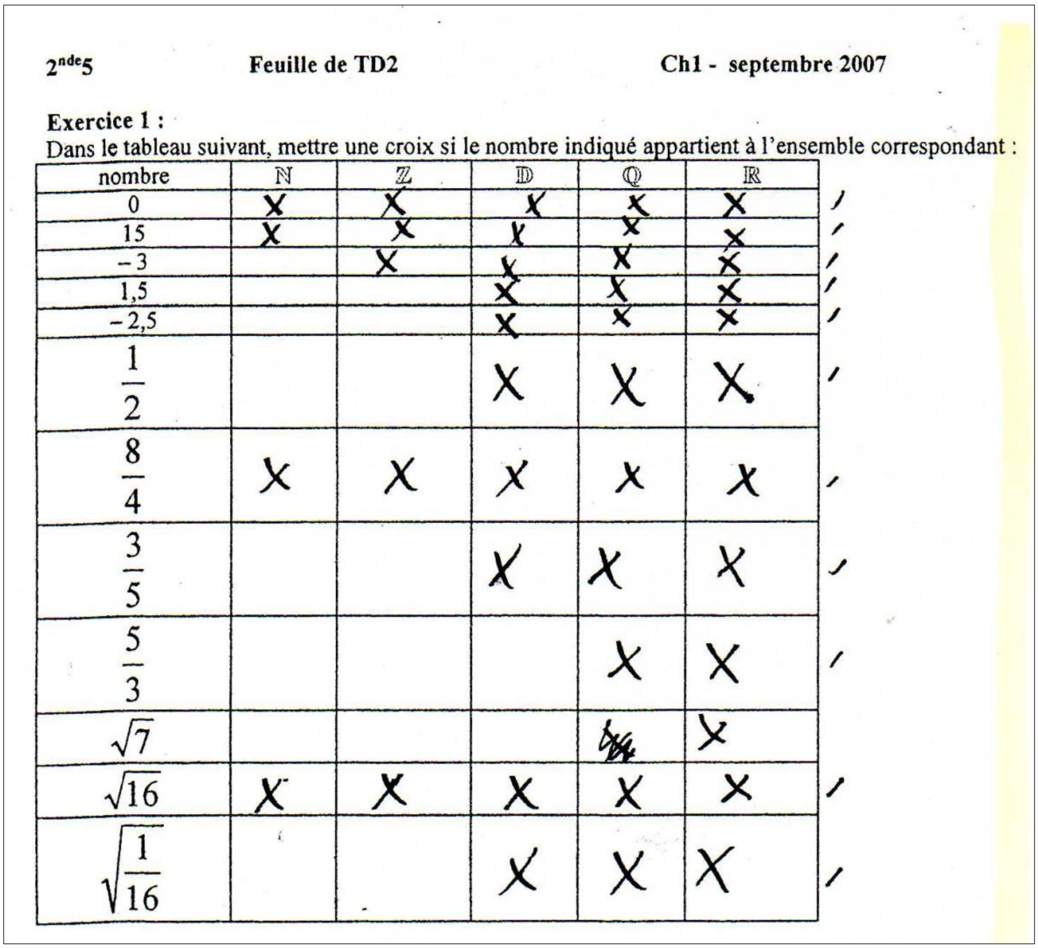
Figure 23: exercices d'un élève de Clotilde

Il est intéressant de regarder comment l'élève a inscrit ses réponses. Le signe d'égalité entre les écritures représentant le même nombre aurait été le plus pertinent pour répondre à la question posée. Mais cet élève juxtapose les écritures qui vont ensemble sans signifier le plus important, à savoir leur référence commune. L'égalité est pourtant utilisée mais comme signe sténographique qui remplace une relation comme : $\frac{2}{3}$ *a pour carré* $\frac{4}{9}$. Je me demande si ce n'est pas la même conception qui est dans l'égalité suivante qui est juste : $\frac{16}{24} = \frac{2}{3}$. Elle serait la traduction de : $\frac{16}{24}$ *donne après simplification* $\frac{2}{3}$. Ces remarques confirment que le concept d'égalité est un obstacle pour les élèves qui est d'origine épistémologique (Bachelard, 1938 ; Brousseau, 1983), mais cette difficulté pour les élèves signe de façon synchrone un problème d'enseignement pour le professeur. En lien avec la quatrième hypothèse (Cf. section 3.4 p. 36) je repère une occasion manquée pour travailler le concept d'égalité qui est pourtant une clé de voûte de la technologie sur laquelle repose le thème « Nature et écriture des nombres ».

Le premier nombre de l'exercice, le nombre $\frac{\sqrt{325\times75}}{\sqrt{39}}$, pose problème à l'élève qui le met dans un premier temps avec un autre nombre comportant un radical. Nous retrouvons là encore la confusion entre la nature d'un nombre et les éléments de surface de son écriture. J'assimile cela à une erreur résultant d'une *appréhension perceptive*, par analogie avec les appréhensions des dessins d'après Duval (1995). Je remarque également que les transformations d'écriture de ce nombre ne sont pas écrites pour démontrer qu'il est égal à 25, qui est l'écriture canonique d'un entier. Ces transformations ne sont pourtant pas triviales. Est-ce que la correction a été faite au tableau mais l'élève n'a pas jugé utile de la copier ? Je n'ai pas de réponse.

Suite du travail de la technique sur le thème « Nature et écriture des nombres »

Dans ce premier chapitre un autre exercice relatif au travail de T figure dans les exercices, il a été donné sur une deuxième fiche photocopiée intitulée TD2. La Figure 24 donne les réponses corrigées de l'élève dont j'ai photocopié le cahier. On peut voir de nouveau les traits que l'élève a ajoutés pendant la correction lorsque la réponse est juste, ainsi qu'une réponse fausse qui a été barrée.


2nde5 Feuille de TD2 Ch1 - septembre 2007

Exercice 1 :
Dans le tableau suivant, mettre une croix si le nombre indiqué appartient à l'ensemble correspondant :

nombre	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
0	X	X	X	X	X
15	X	X	X	X	X
-3		X	X	X	X
1,5			X	X	X
$-2,5$			X	X	X
$\frac{1}{2}$			X	X	X
$\frac{8}{4}$	X	X	X	X	X
$\frac{3}{5}$			X	X	X
$\frac{5}{3}$				X	X
$\sqrt{7}$				~~X~~	X
$\sqrt{16}$	X	X	X	X	X
$\sqrt{\frac{1}{16}}$			X	X	X

Figure 24 :Clo. – Ch. 1 – TD2

Dans cet exercice, quatre nombres sont donnés sous la forme d'un quotient d'entiers mais un seul est idécimal. De même trois nombres sont écrits avec un radical mais un seul est irrationnel. Il est probable que le professeur a voulu développer chez les élèves une *appréhension discursive* du nombre, de façon analogue à *l'appréhension discursive des dessins* au sens de Duval (1995), en dépassant une *appréhension perceptive* spontanée. Je remarque que ce type d'activité sur la nature des nombres ne nécessite pas de raisonnement écrit. Pourquoi $\sqrt{7}$ est-il irrationnel ? L'élève a corrigé une erreur à son propos, ce serait intéressant de savoir pourquoi.

8.1.3.5 Les autres types de tâches du premier chapitre

Dans le premier chapitre les autres activités font travailler l'écriture scientifique, l'usage de la machine à calculer et son registre d'écriture spécifique, les notions d'arrondis et de valeurs approchées, des reprises sous la forme de révisions systématiques des développements et des factorisations d'expressions algébriques, et enfin de nombreux calculs numériques. Toutes les activités proposées font travailler directement les objets sans aucune finalité.

Rendre rationnels les dénominateurs : une dynamique numérico-algébrique

Une partie des exercices est consacrée à « rendre rationnels les dénominateurs ». Dans ce type de tâches, des nombres comme $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ ou encore $\frac{3\sqrt{2}-1}{\sqrt{5}-2\sqrt{7}}$ ne sont utilisés que pour servir la cause de calculs qui sont l'héritage d'une longue tradition de pratiques mathématiques. La rupture numérique/algébrique est complète dans ce type de travail. Les nombres $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ et $\frac{3\sqrt{2}-1}{\sqrt{5}-2\sqrt{7}}$ sont manipulés comme si les radicaux avaient un statut d'indéterminées et il est probable que la conservation du nombre à travers ses différentes transformations sémiotiques ne soit pas un souci pour l'élève. Les nombres ne dénotent pas pour les élèves qui se comportent en *calculateurs aveugles*. Je cite Drouhard et al. (1997) à ce propos :

> Nous pensons donc que les "calculateurs aveugles" ignorent que les expressions dénotent. À plus forte raison, ils ne peuvent pas savoir que cette dénotation est conservée par les transformations. (p. 16) […]
>
> Les "calculateurs aveugles" ne savent pas que les expressions dénotent, et leurs professeurs peuvent ne pas savoir que les "calculateurs aveugles" ne le savent pas. C'est un malentendu complet, et qui peut durer longtemps, car chacun interprète le discours de l'autre à sa manière. (p. 17)

Je repère dans la citation précédente des savoirs pour l'enseignant : le professeur devrait connaître la notion de dénotation et prendre conscience de l'incidence des problèmes qui lui sont liés. Cet éclairage enrichirait ainsi le milieu de la situation didactique et pourrait amener le professeur qui prépare son cours en position P+1 à modifier ses choix (Margolinas, 2004).

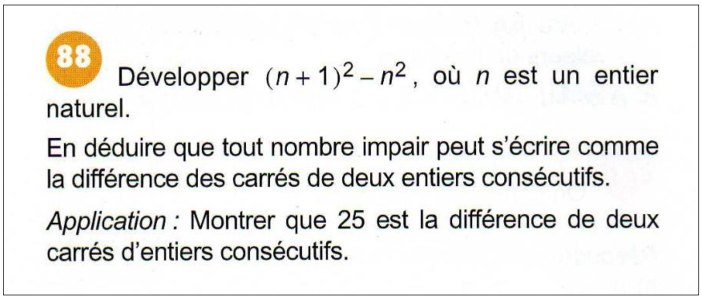
En utilisant le *filtre du numérique* je peux observer à travers le type de tâches « rendre rationnels les dénominateurs » la mise en œuvre implicite d'une dynamique numérico-algébrique. En effet les calculs numériques proposés amènent les élèves à manipuler des règles algébriques sur des objets nombres dans une pratique de calcul exact. Ces nombres sont choisis dans les différents ensembles, en particulier les irrationnels écrits avec des radicaux servent de prétexte pour basculer du numérique vers l'algébrique. Des formes d'écriture traditionnelles qui résident dans la *mémoire pratique* des professeurs (au sens de Matheron, 2000) doivent être utilisées en raison de règles du contrat didactique de calcul. Ainsi les dénominateurs des quotients doivent-ils être rationnels, les irrationnels comportant un radical doivent être exprimés de façon à ce que chacun des nombres sous un radical soit le plus petit possible, etc. Pour revenir au contexte de l'exercice donné par Clotilde, ces exigences sont inscrites dans le contrat didactique et n'ont aucune raison d'être ni en référence avec l'épistémologie mathématique, ni avec les besoins particuliers d'un problème.

La dynamique ainsi enclenchée est pauvre, en effet le mouvement du numérique vers l'algébrique n'a lieu que dans un sens unique, l'articulation entre les deux domaines n'est pas travaillée. Par ailleurs les praxéologies mathématiques sont incomplètes, les éléments théoriques ne sont pas travaillés en tant que savoirs mais apparaissent uniquement dans des formes contextualisées. L'organisation didactique est également très pauvre, les questions posées n'ont pas de raison d'être, elles ne correspondent à aucune motivation, elles ne sont pas problématisées.

Autres dynamiques et fonctionnalité des savoirs numériques

En analysant toutes les activités données dans ce chapitre, une seule utilise le cadre géométrique. Des calculs d'aires de triangle rectangle et de trapèze rectangle avec un point mobile sur un côté sont l'occasion pour travailler des formes algébriques. Il n'est pas de la responsabilité de l'élève de choisir une lettre pour exprimer la longueur non donnée et pour effectuer un changement de cadre.

D'autre part l'algèbre n'est utilisée qu'une seule fois comme outil de modélisation d'une situation donnée dans le cadre numérique. Mais cette situation est donnée dans une logique d'exposition du savoir et non pas dans une logique d'exploration ou d'investigation. Voici cet énoncé du n° 88 (page 28) du manuel de la classe.



88 Développer $(n+1)^2 - n^2$, où n est un entier naturel.

En déduire que tout nombre impair peut s'écrire comme la différence des carrés de deux entiers consécutifs.

Application : Montrer que 25 est la différence de deux carrés d'entiers consécutifs.

Figure 25: exercice n°88 p.28 du manuel Déclic

Une autre démarche aurait pu motiver l'emploi de l'algèbre dont l'une des fonctions est la généralisation ou encore la modélisation de faits numériques (Chevallard, 1984 ; Grugeon, 1995). C'est ainsi que la recherche de plusieurs exemples différents comme pour le cas du nombre 25 pourrait amener les élèves à faire une conjecture puis à la démontrer grâce à un nombre générique. Des recherches déjà anciennes comme celles de Chevallard (1984) ou encore Balacheff[1] (1987) montrent que le choix d'une lettre pour exprimer un nombre

[1] Ses recherches sur les différents types de preuve utilisés par les élèves ont montré la difficulté du passage de l'exemple générique vers la généralisation algébrique.

quelconque est une démarche difficile pour les élèves qui rencontrent là un obstacle épistémologique qui correspond au passage du numérique à l'algébrique.

8.1.3.6 Conclusion

Dans la classe de Clotilde, n'ayant pas assisté aux séances, j'ai souligné des points obscurs dans les données recueillies. Cela concerne en particulier le travail de formulation des connaissances. Si ce travail de formulation a eu lieu il n'aura été réalisé qu'à l'oral et probablement à la demande du professeur. En effet les activités proposées ne contiennent pas de situations de formulation au sens de Brousseau (1998b), par conséquent des temps de formulation des connaissances en jeu ne peuvent être qu'en réponse à des demandes du professeur. Les connaissances mobilisées dans le travail de la technique pour le thème « Nature et écriture des nombres » sont stabilisées à l'écrit au maximum au niveau 2 celui des connaissances implicites. Un niveau 3 de connaissance formulée a peut être existé oralement en vertu d'une règle du contrat didactique qui serait que le professeur contrôle les savoir-faire en posant des questions pour vérifier l'acquisition des savoirs mis en œuvre. L'analyse des exercices du TD1 révèle que les techniques sont le plus souvent des *techniques invisibles* telles que les décrit Assude et Mercier (2007) :

> Les techniques *invisibles* sont celles qui permettent de produire un résultat mais ne sont pas explicitées car leur usage n'implique ni commentaire ni contrôle langagier : pour qui les met en œuvre, elles sont muettes, la pratique démontrée est le procédé de leur transmission (p. 154).

8.1.4 Geste professionnel de reprise chez Clotilde pour la *reprise scolaire*

8.1.4.1 La technique du geste de reprise

Une technique est visible concernant le geste de reprise des connaissances du collège pour le premier chapitre de Clotilde. Elle consiste à inclure un certain nombre de rappels des règles du collège dans la partie du cours de ce premier chapitre. Certains rappels sont donnés en photocopie, il s'agit des notions suivantes :

- Rappel sur les puissances
- Développer et factoriser
- Critères de divisibilité
- Rappel des règles concernant les quotients

D'autres rappels sont copiés à la main par les élèves dans leur cahier de cours :

- Notation scientifique et ordre de grandeur
- Ordre de priorité dans les calculs
- Rappel sur les racines carrées

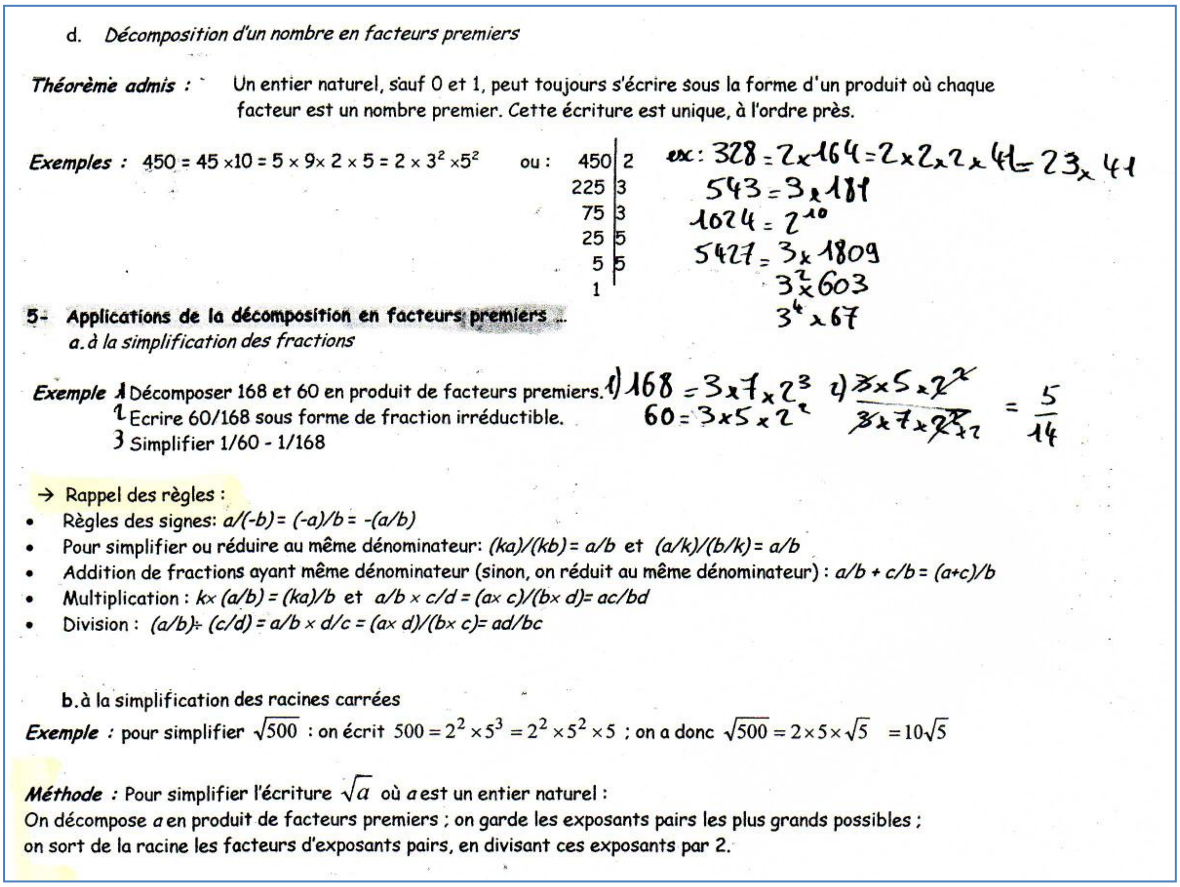
Clotilde constitue ainsi le répertoire des énoncés théoriques nécessaires pour le numérique et l'algébrique déjà rencontrés en collège et alimente ainsi la *mémoire didactique* pour sa classe. Pourquoi certains rappels sont-ils sous la forme de photocopies et d'autres non ? Je n'ai pas de réponse à cette question. Je remarque que Clotilde n'utilise pas les ensembles de nombres pour énoncer plus rigoureusement les définitions et les règles alors que ces connaissances nouvelles pourraient trouver là une raison d'être. Par exemple la définition de a^n comme celle de $\sqrt{a}$ sont données respectivement pour « a étant un nombre non nul » et pour « a étant un nombre positif », quant aux identités rien n'est dit sur le domaine de référence des lettres qui les constituent. Ces RDN sont donc sans nouveauté sur l'axe du rapport au nouveau.

8.1.4.2 La fonction des énoncés théoriques du numérique

Est-ce que Clotilde a demandé aux élèves de faire des liens oralement entre les techniques mises en œuvre dans les exercices et les éléments théoriques rappelés dans le cours ? Je suppose que non, en effet pour réaliser ce *geste de tissage* un élément théorique aurait manqué, il s'agit de la règle :

« Quels que soient le réel a et les réels b et c non nuls $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$»

Cette règle est nécessaire dans l'exercice 8 pour $\frac{3\pi}{4\pi}$ comme je l'ai souligné dans l'analyse *a priori* (Cf. section 8.1.3.3 p. 112). Elle est également nécessaire dans l'exercice 12 pour certains spécimens. Est-ce que cette règle est supposée connue et comme naturalisée et ne nécessiterait pas de rappel explicite pour Clotilde ? Cependant cette règle figure parmi cinq autres à la fin du chapitre dans la partie relative à l'arithmétique (Cf. Figure 26) et elle n'était donc pas rappelée sous la forme d'un écrit au moment où le TD1 a été travaillé. La technique qui active le besoin de ce rappel des règles sur les quotients est la simplification de $\frac{3\times5\times2^2}{3\times7\times2^3}$. La nécessité mathématique du recours à cet élément théorique était pourtant déjà présente auparavant.



d. *Décomposition d'un nombre en facteurs premiers*

Théorème admis : Un entier naturel, sauf 0 et 1, peut toujours s'écrire sous la forme d'un produit où chaque facteur est un nombre premier. Cette écriture est unique, à l'ordre près.

Exemples : $450 = 45 \times 10 = 5 \times 9 \times 2 \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5^2$ ou :

450	2
225	3
75	3
25	5
5	5
1	

ex : $328 = 2\times164 = 2\times2\times2\times41 = 2^3\times41$
$543 = 3\times181$
$1024 = 2^{10}$
$5427 = 3\times1809$
$3^2\times603$
$3^4\times67$

5- Applications de la décomposition en facteurs premiers ...

a. à la simplification des fractions

Exemple 1 Décomposer 168 et 60 en produit de facteurs premiers.
2 Ecrire 60/168 sous forme de fraction irréductible.
3 Simplifier 1/60 - 1/168

1) $168 = 3\times7\times2^3$
$60 = 3\times5\times2^2$
2) $\frac{\cancel{3}\times5\times\cancel{2^2}}{\cancel{3}\times7\times\cancel{2^2}\times2} = \frac{5}{14}$

→ Rappel des règles :

- Règles des signes: *a/(-b) = (-a)/b = -(a/b)*
- Pour simplifier ou réduire au même dénominateur: *(ka)/(kb) = a/b* et *(a/k)/(b/k) = a/b*
- Addition de fractions ayant même dénominateur (sinon, on réduit au même dénominateur) : *a/b + c/b = (a+c)/b*
- Multiplication : *k× (a/b) = (ka)/b* et *a/b × c/d = (ax c)/(b× d)= ac/bd*
- Division : *(a/b)÷ (c/d) = a/b × d/c = (ax d)/(b× c)= ad/bc*

b. à la simplification des racines carrées

Exemple : pour simplifier $\sqrt{500}$: on écrit $500 = 2^2 \times 5^3 = 2^2 \times 5^2 \times 5$; on a donc $\sqrt{500} = 2 \times 5 \times \sqrt{5} = 10\sqrt{5}$

Méthode : Pour simplifier l'écriture $\sqrt{a}$ où a est un entier naturel :
On décompose a en produit de facteurs premiers ; on garde les exposants pairs les plus grands possibles ;
on sort de la racine les facteurs d'exposants pairs, en divisant ces exposants par 2.

Figure 26 : Clo.- Ch. 1 - Cours

En observant l'extrait du cours de Clotilde, je constate encore une fois que rien n'est dit dans ces cinq règles du paragraphe 5 a) sur la nature des nombres en jeu. D'après le contexte, l'arithmétique et la décomposition en facteurs premiers d'un entier naturel, ces règles sont valables pour les nombres entiers naturels (non nuls pour les nombres en dénominateur ce qui n'est pas dit non plus) alors qu'il est nécessaire que leur domaine de validité soit l'ensemble des réels (non nuls pour les nombres en dénominateur). Pourtant la deuxième règle citée, dite règle de simplification, a été nécessairement utilisée dans les exercices du TD1, elle aurait pu être rappelée à cette occasion comme je l'ai déjà dit.

8.1.4.3 Méthode pour simplifier les racines carrées

Cet extrait se termine par une méthode pour simplifier des racines carrées. « On sort de la racine les facteurs d'exposants pairs », la méthode comprend des éléments technologiques qui ne sont pas référés à des éléments théoriques. Les transformations d'écriture sont basées sur des manipulations des nombres et le théorème relatif à la racine carrée d'un produit est totalement occulté alors qu'il justifie la transformation précédente. Le terme de « méthode » semble autoriser le développement d'une praxéologie incomplète réduite à une technique et à un discours technologique « ergonomique » qui n'est pas justifié par des éléments théoriques identifiés. Ce type de discours peut être à l'origine d'obstacles didactiques se traduisant par des erreurs du type : $\sqrt{a^{2n} * b^{2p}}=a^n * b^p$ avec a, b, n et p qui sont des entiers naturels et où l'opérateur $*$ est la multiplication, l'addition ou la soustraction (Bellard & al., 2005). Cette règle-élève ayant évidemment un domaine de validité non vide, elle peut être aisément acceptée comme toujours valide par les élèves. Cette méthode dite de « simplification des racines carrées » correspond à une technique faible au sens de Assude et Mercier (2007) :

> Les techniques *faibles* sont celles qui permettent de produire un résultat et qui sont explicitées : la manière de faire peut être montrée et commentée par un expert ou observée par un apprenti comme un savoir en situation (p. 154).

J'ai déjà souligné l'abus de langage relatif au verbe « simplifier » dans les types de tâches numériques. Est-ce que $30\sqrt{3}$ est plus simple que $\sqrt{2700}$? Cette question n'a pas de sens de façon absolue.

Pour comparer les nombres $\sqrt{2700}$ et $15\sqrt{12}$ il est peut-être « plus simple » de transformer le deuxième nombre ainsi : $15\sqrt{12} = \sqrt{15^2} \times \sqrt{12}=\sqrt{225 \times 12} = \sqrt{2700}$. Les deux nombres sont donc égaux. Les transformations des écritures des nombres ne sont donc pas finalisées par la recherche du plus simple mais par la recherche de la forme la plus adaptée en fonction d'une question. Encore une fois c'est la connaissance des différentes formes prises par les nombres, certaines étant canoniques, qui va permettre d'orienter le travail mathématique en fonction d'un but.

8.1.4.4 Une raison d'être des dénominations des ensembles

Un intérêt de la définition des ensembles de nombres pourrait être d'avoir enfin les mots pour dire à quels ensembles appartiennent les indéterminées figurant dans une identité, les inconnues figurant dans une équation, etc. Mais Clotilde, comme Mathieu, ne profitent pas de cette possibilité qui leur est offerte d'être plus rigoureux sur la nature des nombres utilisés dans les activités numériques. Le flou qui régnait sur les nombres du *grand fourre-tout* du collège continue à exister en seconde malgré la reprise possible des dénominations des ensembles après les avoir introduits en début de chapitre. Ainsi je note une opportunité manquée pour réinvestir des savoirs nouveaux qui permettraient d'énoncer avec davantage de précision les éléments théoriques qui fondent le socle du numérique. Les énoncés théoriques sont donc rappelés sans lien avec du nouveau, alors que des reprises faisant avancer le temps didactique auraient été possibles.

Ces questions en appellent d'autres : pourquoi Clotilde et Mathieu n'ont-ils pas le souci d'être plus rigoureux au moment de l'institutionnalisation des savoirs alors que cette rigueur concernant les énoncés théoriques de référence est l'un des aspects caractéristiques de la discipline des mathématiques ? Comment dans ces conditions initier les élèves aux contraintes épistémologiques propres aux mathématiques et en particulier les initier à la spécificité de la preuve en mathématiques ?

8.1.5 Des raisons d'être pour T et la praxéologie liée à T

Nous avons vu comment les praxéologies mathématiques construites dans les classes de Mathieu et de Clotilde relatives au type de tâches T sont incomplètes. Les éléments du bloc technologico-théorique sont le plus souvent absents, la réponse attendue par le professeur repose sur de nombreux implicites qui ne sont certainement pas partagés par tous les élèves. Les connaissances qui auraient pu faire l'objet d'une reprise d'étude des apprentissages du collège en lien avec du nouveau sont en particulier :

- la définition d'un nombre décimal et sa reconnaissance à partir de l'une de ses cinq écritures caractéristiques possibles ;
- la connaissance du fait qu'un nombre rationnel écrit sous la forme fractionnaire peut être soit un nombre idécimal[1] (Bronner, 1997), soit un nombre décimal pouvant être aussi un nombre entier ;
- la reconnaissance de la nature d'un nombre à partir de son écriture décimale finie ou illimitée.

Des connaissances nouvelles en seconde concernent l'identification des ensembles de nombres avec leurs notations et de manière plus générale la reconnaissance des types de nombres grâce à leurs écritures « canoniques », c'est-à-dire des formes qui facilitent le travail avec les nombres (calcul, comparaison…). Par ailleurs le professeur peut choisir des sujets d'étude parmi des thèmes donnés dans les programmes. Ainsi l'un d'entre eux concerne une nouvelle conception et technologie du décimal comme pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible dont le dénominateur est un produit de puissances de 2 et de 5.

[1] Ce terme n'est pas à utiliser avec les élèves.

Le travail de reprise en lien avec le type de tâches T emblématique du numérique est sous-estimé par les enseignants qui semblent ne pas avoir conscience des organisations mathématiques à développer en conformité avec la demande des programmes, et surtout en conformité avec la rationalité mathématique. Mais quelles sont les raisons d'être de cette tâche emblématique ? Quel problème mathématique essentiel pour la discipline motive la maîtrise des praxéologies en lien avec T ? En posant ce type de question, je me réfère à Chevallard qui dénonce l'enseignement des mathématiques comme étant la visite d'un musée, ou encore l'enseignement de réponses toutes faites véhiculées par la tradition, alors même que les questions à l'origine de ces réponses ont été perdues (Chevallard, 2000). Il interroge ce qui motive le calcul sur les nombres afin de les exprimer sous certaines formes particulières, et il fait prendre conscience du problème qui légitime ce travail dans le domaine numérique :

> On rencontre […] un grand problème des mathématiques : comment reconnaître si deux objets mathématiques d'un certain type sont ou ne sont pas le même objet ? Comment savoir par exemple si $7\times5–8 = 23$? Ou si $\frac{60}{84} = \frac{380}{532}$? Ou, encore, si $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} – \frac{(n–1)n(2n–1)}{6} = n^2$?
>
> À ce grand problème, il existe une solution générique, universelle : pour répondre à la question posée, il suffit chaque fois de disposer d'un système d'écriture des objets du type considéré, dans lequel chacun de ces objets ait une écriture et une seule. Le calcul de l'écriture « canonique » des objets à comparer permet alors de répondre : ainsi a-t-on $7\times5 – 8 = 35 –8 = 7$, ce qui montre que $7\times5 – 8 \neq 23$. De même, il vient d'une part $\frac{60}{84} = \frac{4\times15}{4\times21} = \frac{3\times5}{3\times7} = \frac{5}{7}$, d'autre part $\frac{380}{532} = \frac{190}{266} = \frac{5\times19}{19\times7} = \frac{5}{7}$, en sorte qu'on peut conclure, cette fois, positivement : on a bien l'égalité $\frac{60}{84} = \frac{380}{532}$.

Ainsi ce n'est pas la connaissance de la nature du nombre qui est importante, mais la connaissance pour un type de nombre donné de son écriture canonique. Cette nécessité est renforcée par une autre inhérente au travail mathématique : l'activité de démonstration en mathématiques oblige le plus souvent à utiliser des valeurs exactes. Cette règle fait partie du *contrat institutionnel de calcul* en référence au *filtre du numérique* (Bronner, 2007). Ces raisons expliquent alors pourquoi il est important de connaître les valeurs exactes des lignes trigonométriques de certains angles comme : $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et pourquoi on garde cette écriture avec un radical (il reste à justifier l'intérêt en mathématiques pour certaines valeurs d'angles, ce que nous n'expliciterons pas ici). Je développe plus loin cet exemple, différents types de nombres apparaissant dans le cadre de la trigonométrie, une reprise du travail du début de l'année sur le numérique est alors possible.

Dans la réalité de ce que nous avons pu observer, les professeurs font rencontrer aux élèves en début d'année le type de tâche T sur un certain nombre de spécimens en conformité avec les programmes, sans motiver ce travail par un problème spécifique de la discipline, et sans utiliser ce travail ultérieurement pour motiver à son tour une poursuite de l'étude de la synthèse relative aux nombres. Pourtant je vais montrer qu'une reprise de T est possible dans la suite du programme de seconde – j'ai cité le cas de la trigonométrie - mais les professeurs ne perçoivent pas ces nouveaux habitats pour réactiver ce type de tâches T.

8.1.6 Le geste de reprise du numérique chez Rosalie

Je vais compléter les analyses précédentes avec le cas de Rosalie jeune professeur stagiaire qui est agrégée et que j'avais observée lors d'une séance en septembre 2004. L'extrait que je vais utiliser se passe dans une classe de seconde lors de la correction au tableau de l'exercice suivant :

> **Exercice : des valeurs approchées de π.**
>
> Les nombres suivants sont des valeurs approchées de π **:**
>
> 3 ; $(\frac{4}{3})^4$; $3{,}14$; $\frac{22}{7}$; $\frac{103993}{33102}$; $\frac{167}{80}+\frac{\sqrt{10}}{3}$.
>
> 1°) Quelle est la nature de ces différentes valeurs approchées ?
>
> 2°) A l'aide d'une calculatrice, classer par ordre croissant ces valeurs approchées.

Une élève a écrit ses réponses au tableau pour la première question. Le professeur est à côté d'elle et sollicite la classe pour vérifier les écrits du tableau.

> Le professeur fait des commentaires sur l'écriture des noms d'ensembles écrits au tableau :
>
> **Professeur** : c'est un nombre réel puisque tous les nombres qu'on connaît sont réels. Et $\mathbb{R}$ ça s'écrit comme ça, il y a une double barre (elle ajoute la double barre). C'est pas un R majuscule, c'est pas le R de René, c'est un R avec une barre de réel. Alors le deuxième 3,14 appartient à $\mathbb{D}$, est-ce que quelqu'un n'est pas d'accord avec ça ? < silence > C'est une écriture décimale, la partie décimale de cette écriture est finie, donc c'est un nombre décimal ; pas de problème.
>
> Le professeur passe aux données suivantes et désigne $\frac{22}{7} \in \mathbb{R}$ écrit au tableau.
>
> **Professeur** : Alors qui n'est pas d'accord on lève le doigt …
>
> **Élève :** moi je ne suis pas d'accord
>
> **Professeur** : Alexis…
>
> **Alexis** : c'est un nombre rationnel
>
> **Professeur** : pourquoi ?
>
> **Alexis** : parce que c'est une fraction et la partie décimale est infinie
>
> **Professeur** : comment on sait ? < silence > Le mieux c'est de poser la division parce que la calculatrice elle vous donnera toujours un nombre fini de chif… de termes puisqu'elle écrit les nombres qu'elle a sur son écran. Maintenant celui là (elle désigne « $\frac{103993}{33102} \in \mathbb{R}$ » écrit au tableau par un élève) qui c'est qui n'est pas d'accord ?

La démonstration pour le premier quotient $\frac{22}{7}$ est évoquée oralement mais n'est pas écrite. Elle repose sur une division qui n'est pas réalisée ni par les élèves, ni par le professeur. La praxéologie est incomplète. La preuve n'est pas développée complètement ni par les élèves, ni par le professeur. Rosalie ne demande pas aux élèves d'utiliser la calculatrice pour vérifier ce qu'elle « écrit sur son écran », et évite ainsi un débat qui aurait pu avoir lieu sur la nature des nombres affichés, ce qui aurait certainement permis de consolider un apprentissage nécessaire et prescrit dans le programme.

Pour le spécimen $\frac{103993}{33102}$ il est nécessaire de changer de technique, la division à la main étant trop laborieuse. La nouvelle technique peut reposer sur le théorème déjà cité qui apparaît dans un thème d'étude du programme[1] de seconde, pour démontrer que le nombre est idécimal. On voit entre les deux tâches un effet du changement de variable didactique, dont on peut se demander s'il est réellement anticipé comme tel par l'enseignant. En effet le fait que le deuxième nombre soit idécimal n'est pas démontré et n'est même pas questionné dans la séance observée :

> **Professeur** : Maintenant $\frac{103993}{33102} \in \mathbb{R}$ qui c'est qui n'est pas d'accord ?
>
> Yohan : je suis d'accord mais c'est aussi un nombre rationnel
>
> Professeur voilà c'est vrai (elle rectifie au tableau en même temps) mais $\frac{103993}{33102}$ appartient à $\mathbb{R}$, et appartient à $\mathbb{Q}$.

L'étude de la nature du nombre au-delà de $\mathbb{Q}$ n'est pas faite, il n'y a même pas de technique disponible contrairement à $\frac{22}{7}$ et en conséquence il n'y a pas de mise en place d'une nouvelle praxéologie, elle est évitée.

Pourtant une praxéologie ponctuelle conforme au curriculum officiel aurait pu être construite dans cette classe pour la deuxième tâche. En voici la description : une **technique** possible en classe de seconde est de déterminer la fraction irréductible égale au quotient donné. Dans le cas présent, l'algorithme d'Euclide permet de démontrer que le numérateur et le dénominateur sont premiers entre eux, et que par conséquent la fraction donnée est irréductible. Le dénominateur n'étant pas un produit de puissances de 2 et de 5, le nombre donné est donc un nombre idécimal.

La **technologie** qui justifie la pratique précédente repose sur des théorèmes et des définitions :

- la définition d'une fraction irréductible ;
- le théorème qui justifie l'algorithme d'Euclide :

  Si a et b sont deux entiers avec a supérieur à b, et si r est le reste de la division euclidienne de a par b, alors le PGCD de a et de b, est égal au PGCD de b et de r ;
- le théorème qui permet de conclure que le quotient est idécimal :

[1] « *Caractérisation des éléments de $\mathbb{D}$ et de $\mathbb{Q}$, soit en terme de développement décimal fini ou périodique, soit comme quotient irréductible d'entiers (le dénominateur étant ou non de la forme $2^p \times 5^q$)»*

Si une fraction est irréductible, elle représente un nombre décimal si et seulement si son dénominateur peut s'écrire comme produit de puissances de 2 et de 5.

La **théorie** qui à son tour justifie les énoncés précédents est l'arithmétique.

La comparaison entre ce qui aurait pu être construit pour la deuxième tâche et ce qui l'a été effectivement, fait apparaître clairement des évitements dans les organisations mathématiques visées. Nous pouvons nous demander pour quelles raisons Rosalie fait ces choix :

- s'agit-il d'un manque de réflexion dans l'analyse *a priori* de la séance ?
- la praxéologie mathématique conforme au curriculum officiel n'est-elle pas disponible dans la classe de Rosalie ?
- est-ce qu'elle pense que cette praxéologie est trop difficile à mettre en place et en conséquence elle préfère éviter le problème ?

8.1.7 Conclusion et retour sur les hypothèses

Ces analyses chez Rosalie, Clotilde et Mathieu m'amènent à faire certains constats qui étayent les hypothèses que j'avais élaborées.

Première hypothèse : le geste professionnel de reprise, un geste très délicat

La logique qui sous-tend les savoirs à enseigner est de ne pas faire de révisions systématiques et de ne pas faire un chapitre intitulé calcul numérique ou algébrique, mais la logique des professeurs observés est de soutenir que le programme de seconde ne peut être abordé sans refaire les bases. Une autre norme du métier est de réduire la synthèse sur les nombres à la présentation sommaire des ensembles de nombres en insistant sur une nouveauté considérée comme l'essentiel de l'enseignement, à savoir les notations des ensembles. Le maniement des symboles semble être la préoccupation principale au détriment de l'élaboration de praxéologies mathématiques complètes et épistémologiquement cohérentes. L'insistance de Rosalie sur l'écriture du $\mathbb{R}$ de réels est à ce propos symptomatique de cette focalisation. Cette dernière remarque vient conforter la troisième hypothèse relative à la complétude des praxéologies.

Deuxième hypothèse : la variabilité relative à l'enseignement du numérique

En comparant Mathieu et Clotilde ce sont en premier lieu les ressemblances qui apparaissent. Elles se traduisent par le choix d'insérer de nombreux rappels des énoncés théoriques du collège dans le cours, également par les activités d'étude données aux élèves qui sont majoritairement des activités qui font travailler les objets en tant qu'objets et rarement en tant qu'outils. Les véritables problèmes sont pratiquement absents chez les deux professeurs. Une analyse plus précise fait apparaître pourtant une différence importante : Mathieu donne très peu de place au travail sur les nombres (nature, écriture, valeurs approchées…) alors que Clotilde développe beaucoup plus ces thèmes. En revanche Mathieu fait faire aux élèves de très nombreux exercices dans le cadre algébrique sous la forme de révisions systématiques. Il s'agit très traditionnellement d'enchainer des développements, des factorisations, des résolutions d'équations et d'inéquations. Une autre différence est que Clotilde ne recommence pas en général le cours déjà enseigné en collège et elle donne des photocopies pour ne pas arrêter l'horloge didactique. Mathieu fait tout copier à ses élèves sans distinguer l'ancien du nouveau.

Troisième hypothèse : l'incomplétude des praxéologies

Je viens de rappeler le manque de solidité des connaissances institutionnalisées. Les techniques sont le plus souvent *invisibles,* les démonstrations sont le plus souvent évitées même dans la partie théorique du cours. Je reprends l'exemple des racines carrées d'entiers qui ne sont pas des carrés parfaits pour lesquelles la démonstration de leur idécimalité pourrait être facilement démontrée. Les connaissances sont manipulées au mieux au niveau 2 décrit par Brousseau.

Quatrième hypothèse : un problème de la profession

Le domaine numérique est naturalisé pour les enseignants qui ne soupçonnent vraisemblablement pas les difficultés du savoir à enseigner et qui manquent de connaissances pour cet enseignement. Voici quelques uns des symptômes de cet obstacle :

Le cloisonnement extrême des enseignements dont un exemple est la non reprise des ensembles de nombres pour exprimer de façon plus rigoureuse les énoncés théoriques. Un autre exemple est l'absence presque totale de jeux de cadres au sens de Douady ce qui ne permet pas de faire jouer leur rôle aux dynamiques décrites dans le *filtre du numérique*. Un autre symptôme encore est le manque de prise de conscience du lien entre la détermination de la nature d'un nombre avec ses différentes écritures. Ce constat est à mettre en parallèle avec le fait que ces professeurs suivent le programme comme étant une succession de sujets à traiter sans vision plus locale ou plus régionale des praxéologies mathématiques à élaborer.

8.2 Rencontre avec la valeur absolue chez Clotilde et Mathieu

8.2.1 Méthodologie et données à propos de la valeur absolue

La méthodologie suivie, et en particulier l'étude clinique, m'a permis de rencontrer différents objets d'enseignement concernant le numérique. Ainsi j'ai pu observer directement celui de valeur absolue dans les deux classes de Clotilde et de Mathieu en étant présente pendant les séances d'enseignement. Je vais décrire et analyser la place et le rôle de cet objet en lien avec les RDN (les reprises du numérique) dans le savoir enseigné. Le curriculum officiel inscrit la notion de valeur absolue dans le cadre numérique, c'est la distance entre deux nombres, c'est la raison pour laquelle l'étude de cet objet est dans la section des *dynamiques inter-numérique*. J'ai développé précédemment les attentes relatives au savoir à enseigner pour la valeur absolue (Cf. section 5.6 p. 72). Je rappelle cette précision du document d'accompagnement : « Aucune étude particulière n'est demandée. Cette notation sera présentée essentiellement pour exprimer la distance entre deux nombres. »

Les données recueillies dans la réalisation effective des séances chez ces deux professeurs ont été étudiées pour analyser et comparer les choix concernant l'enseignement de la valeur absolue. Il s'agit en particulier de la séance observée le 2 décembre 2006 chez Mathieu et de la séance observée et filmée le 22 octobre 2007 chez Clotilde. L'étude des cahiers des élèves (cours et exercices), ainsi que des devoirs (à la maison et en classe), a permis de décrire les organisations mathématiques choisies et de les comparer sur la durée de la séquence. Des entretiens avec les professeurs et avec quelques élèves représentatifs des différents niveaux de la classe ont complété ces données.

Après avoir donné une vision globale de la séquence, j'étudierai les données dynamiques des séances observées – ce qui m'amènera à m'intéresser à des types de tâches algébriques – j'explorerai ensuite les données statiques pour compléter l'étude de l'objet valeur absolue.

8.2.2 Les connaissances institutionnalisées dans le savoir enseigné

Le tableau suivant détaille la trame de la séquence relative à la valeur absolue à partir des cahiers de cours des deux professeurs.

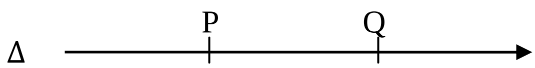
Trame du cours de Mathieu	**Trame du cours de Clotilde**
1°) Définition *Soit x un nombre réel et M le point d'abscisse x sur la droite des réels, la valeur absolue de x notée* $\lvert x \rvert$ *est la distance de O à M.* Conséquence : - la valeur absolue de x est toujours positive - si $x \geq 0$ alors $\lvert x \rvert = x$ - si $x \leq 0$ alors $\lvert x \rvert = -x$ 2°) Application : Résoudre l'équation $\lvert x \rvert = a$ Résoudre l'équation $\lvert x \rvert \leq 2$ Résoudre l'équation $\lvert x \rvert \geq 3$ 3°) Définition : Soit A le point d'abscisse a et B le point d'abscisse b, la distance AB est égale à $\lvert b-a \rvert$. Résoudre $\lvert x-5 \rvert = 7$ $\lvert 1-x \rvert \leq 3$ $\lvert x+2 \rvert \geq 3$	1°) Distance de deux nombres et définition de $\lvert p-q \rvert$ *La distance entre deux nombres réels p et q est celui des deux nombres p-q et q-p qui est positif ou nul. Cette distance se note* $\lvert p-q \rvert$ *et se lit « valeur absolue de p moins q ».*  *Conséquence : la valeur absolue de x, notée* $\lvert x \rvert$*, est la distance de x à zéro.* 2°) Propriétés Pour tout x réel $\lvert x \rvert \geq 0$ si $x \geq 0$ alors $\lvert x \rvert = x$ et si $x \leq 0$ alors $\lvert x \rvert = -x$ 3°) Résolution d'équations du type : $\lvert x-a \rvert = b$ Exemples traités : $\lvert x-3 \rvert = 2$ $\lvert x+5 \rvert = 4$ et 5 autres spécimens 4°) Résolution d'inéquations du type $\lvert x-a \rvert > b$ Exemples : $\lvert x \rvert > 3$ $\lvert x-5 \rvert \geq 2$ $\lvert 5-3x \rvert \geq 7$ 5°) Résolution d'inéquations du type $\lvert x-a \rvert < b$ Exemples : $\lvert x \rvert < 4$ $\lvert x-3 \rvert \leq 7$ $\lvert 5-3x \rvert \leq 2$

Tableau 28: trame du cours de Clotilde et de Mathieu sur la valeur absolue

Un premier constat apparaît à la lecture de ce tableau : les deux professeurs prennent la valeur absolue comme un prétexte qui leur sert pour développer des types de tâches dans le cadre algébrique. La valeur absolue, nouvel objet du numérique, est pour eux une clé d'entrée vers l'algèbre avec en particulier la résolution d'équations et d'inéquations. C'est en quelque sorte *une dynamique numérico-algébrique* qui est mise en œuvre par les professeurs comme si la raison d'être de la valeur absolue était de faire vivre ce travail algébrique. Je vais donc analyser l'enseignement de ces professeurs en suivant le fil de l'objet valeur absolue qui m'amènera à m'intéresser momentanément à l'algèbre.

À l'échelle de la séquence, de nombreuses similitudes existent dans les progressions choisies, toutes les deux ambitieuses par rapport aux prescriptions officielles à cause de ce travail très important réalisé dans le cadre algébrique. Cependant, à l'échelle de la séance, si des choix sont communs sur les contenus abordés, les conceptions sont différentes concernant les objets traités. Les définitions de la valeur absolue données par les deux professeurs sont différentes. Pour Mathieu c'est l'articulation entre les cadres géométrique et numérique qui permet la définition de la valeur absolue d'un réel, ce réel étant considéré comme l'abscisse d'un point. Clotilde ne donne pas directement la valeur absolue d'un réel, le point de départ est la distance de deux réels, le cadre est alors numérique. Cependant, sans que cela ne soit explicitement dit, les deux réels sont les abscisses de deux points de la droite réelle. Il faut implicitement comprendre que les réels p et q sont respectivement les abscisses des points P et Q représentés sur la droite Δ. La définition donnée s'appuie donc également pour Clotilde sur une dynamique numérico-géométrique.

Des praxéologies différentes ont été choisies pour les mêmes types de tâches privilégiés par les professeurs et pourtant pratiquement hors programme. Les tâches sont du type « résoudre une équation du style $|ax+b|=c$ » ou du type « résoudre une inéquation du style[1] $|ax+b|<c$ », les nombres a et b étant des réels et c étant un réel positif. Mathieu privilégie une *technique géométrique* utilisant la droite graduée quand Clotilde privilégie une *technique algébrique* fondée sur le signe du binôme $ax+b$. Ces praxéologies mathématiques seront explicitées dans l'analyse *a priori* des séances. Les interviews avec les professeurs et l'analyse approfondie des éléments technologiques développés en classe permettront de découvrir les logiques de ces professeurs ainsi que les raisons profondes qui pilotent leurs choix. Des entretiens avec des élèves donneront accès aux conceptions en cours de développement pour l'objet valeur absolue.

L'objet valeur absolue est véritablement nouveau en seconde mais une première rencontre a pourtant nécessairement eu lieu en classe de cinquième pour définir la somme de deux nombres relatifs ainsi que la notion d'opposé. C'est sous l'appellation la plus courante de distance à zéro en lien avec la droite graduée que ce concept en acte de valeur absolue a été travaillé implicitement. Cette référence à la distance à zéro semble présente pour Mathieu qui commence le cours par le lien entre $|x|$ et la distance OM. Dans la classe de Clotilde c'est également la distance de deux points d'une droite graduée qui semble jouer un rôle important dans la construction de la séquence, même si ce lien est juste évoqué en illustration et n'est pas justifié mathématiquement. Des notions déjà travaillées en collège sont par conséquent

[1] Le signe d'inégalité peut évidemment varier selon les quatre possibilités : $<$; $>$; $\leq$ ou $\geq$.

présentes dans les choix de Mathieu et de Clotilde, mais il faudra analyser plus précisément la réalisation effective de cet enseignement pour savoir comment ont été réalisées ces reprises du collège.

8.2.3 Les types de tâches privilégiés dans la séquence valeur absolue

Avant d'étudier l'objet valeur absolue respectivement chez Mathieu puis chez Clotilde, je donne dans le Tableau 29 un aperçu des types de tâches travaillés par les deux professeurs en comptabilisant tous les spécimens que j'ai trouvés dans les cahiers de cours et d'exercices ainsi que dans les devoirs (à la maison et en classe).

Types de tâches	Nombre de spécimens pour chaque type de tâches (à gauche pour Mathieu, à droite pour Clotilde)				
	Cours		Ex.	Dev.	Tot.
T$_{n1}$: Calculer la valeur absolue d'un nombre $\lvert a\rvert$, a réel donné sous une forme canonique	Avec a positif : 1/ 2 Avec a négatif : 1/ 2		0 / 0	0/0	2/4
T$_{n2}$: Calculer $\lvert a-b\rvert$, a et b réels donnés	0 / 6		0 / 0	0/1	0/7
T$_{n3}$: Exprimer sans valeur absolue une expression numérique comportant plusieurs valeurs absolues. Ex : $\lvert 2\sqrt{2}-3\rvert-\lvert\sqrt{2}+1\rvert$	0 / 4		6 / 5	2/4	8/13
T$_{n4}$: Conversion (ou association) entre un intervalle, une inégalité simple ou double, un ensemble de points de la droite réelle, une expression avec valeur absolue Ex : $x\in[-2;2]\Leftrightarrow\lvert x\rvert\leq 2$	0 / 0		7 / 14	4/4	11/18
T$_{a1}$: résoudre l'équation $\lvert ax\text{-}b\rvert=c$ $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ $(c\in\mathbb{R}^*)$	a=1 et b=0	2 / 0	2 / 0	0/0	23/19
	$a\neq 1$ et b=0	0 / 0	1 / 0	0/0	
	a=1 et b>0	1 / 3	6 / 3	0/0	
	$a\neq 1$ et $b\neq 0$	0 / 1	6 / 6	3/0	
	a=1 et b<0	0 / 3	0 / 1	2/2	
T$_{a2}$: résoudre l'inéquation $\lvert ax+b\rvert\circ c$ $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ $(c\in\mathbb{R}^*)$ ($\circ$ remplace l'une des inégalités)	1er cas : a=1 et b=0	2 / 2	2 / 0	0/0	24/22
	2^{e} cas : $a\neq 1$ et b=0	0 / 0	1 / 0	0/0	
	3^{e} cas : a=1 et $b\neq 0$	1 / 2	3 / 6	2/0	
	4^{e} cas : $a\neq 1$ et $b\neq 0$	1 / 1	9 / 9	3/2	
T$_{a3}$: Résoudre un système de deux inéquations du type $\lvert ax+b\rvert\circ c$	0 / 0		6 / 5	2/1	8/6

Tableau 29 : organisations mathématiques chez Mathieu et chez Clotilde

Dans le tableau précédent je n'ai comptabilisé que les types de tâches trouvés dans les traces du travail réalisé pendant l'étude du thème de la valeur absolue. Je n'ai pas tenu compte de reprises éventuelles de ce thème, comme cela s'est produit par exemple dans un devoir commun qui a eu lieu le 29 janvier 2007 dans la classe de Mathieu. L'inventaire présenté montre encore des choix similaires pour les deux professeurs avec un grand nombre d'activités qui sont dans le cadre algébrique, mais ce détournement du numérique vers l'algébrique est plus marqué chez Mathieu dont la préoccupation essentielle est d'entrainer les élèves à réussir la résolution d'équations et d'inéquations comportant des valeurs absolues. J'ai compté globalement les tâches respectivement numériques et algébriques, les effectifs sont présentés dans le tableau suivant.

	Mathieu	Clotilde
tâches dans le cadre numérique (repéré par T_n)	19 (soit 26% des tâches travaillées chez Mathieu)	38 (soit 45% des tâches travaillées chez Clotilde)
tâches dans le cadre algébrique (repéré par T_a)	55 (74% des tâches)	47 (55% des tâches)

Je vais nuancer le classement du type de tâches T_{n4} du côté du numérique. En fait ce type de tâches appartient à cette zone frontalière entre numérique et algébrique qui a été définie précédemment et qui est appelée le NAA (Cf. p. 7). Je reprends l'exemple donné dans le tableau :

L'intervalle $[-2; 2]$ étant donné, il faut le convertir avec des valeurs absolues, les réponses suivantes sont possibles :

- c'est l'ensemble de tous les réels dont la valeur absolue est inférieure à 2 ;
- $(x \in \mathbb{R})$ et $|x| \leq 2$

La première réponse est encore dans le domaine numérique et s'exprime sous la forme de tous les nombres caractérisés par une contrainte, être inférieurs à 2. En revanche la deuxième réponse suppose de partager un implicite au sujet du nombre x. Il apparaît unique mais il représente en fait une infinité de nombres, cette conversion du langage naturel vers le langage symbolique s'accompagne d'un saut conceptuel du domaine numérique vers le domaine algébrique. Cet exemple illustre la rupture entre le numérique et l'algébrique.

Les objets convoqués dans le type de tâches T_{n4} sont donc des objets du numérique, mais les réponses attendues, comme dans l'exercice 67 de la page 48 qui sera analysé plus loin (Cf. p. 163), nécessitent la mise en œuvre d'une pensée algébrique. En conclusion T_{n4} est typiquement un type de tâches du NAA.

Je précise également que tous ces types de tâches sont travaillés en tant qu'objets et jamais en tant qu'outils de résolution de problèmes. Les deux professeurs ont choisi un style d'enseignement qui est un entrainement systématique pour travailler certaines techniques des domaines numérique et algébrique, en cela ils ne suivent pas le curriculum officiel.

Dans ce tableau le type de tâches T_{n1} est marginal et les professeurs ne contrôlent pas cette connaissance lors des devoirs, elle est pourtant élémentaire et elle réalise le lien avec l'ancien du collège. Je montrerai plus loin que des élèves de ces classes, pourtant reconnus comme de bons élèves, ne savent pas répondre à la question « quelle est la valeur absolue du nombre – 5 ? ».

Pour les types de tâches numériques, le choix des expressions numériques (notamment pour T_{n3}) se complexifie très vite en particulier grâce aux nombres irrationnels qui sont utilisés à cette occasion pour jouer *un rôle de service* auprès de la valeur absolue. Le même phénomène de complexité croissante est observé pour les types de tâches algébriques. Par exemple les résolutions d'inéquations sont très nombreuses dans les deux classes, même lors des contrôles. Pour le quatrième cas répertorié de T_{a2} (T_{a2} : résoudre l'inéquation$|ax+b| \circ c$), le plus complexe, c'est un total de 13 spécimens chez Mathieu (dont 3 en contrôle en classe) et 12 chez Clotilde (dont 2 en contrôle en classe).

L'inventaire quantitatif qui vient d'être présenté sera complété par une analyse plus approfondie de certaines tâches dans la suite de cet écrit.

8.2.4 Des questions particulières dans la séquence valeur absolue

Je n'ai pas intégré dans le Tableau 29 des activités trouvées dans les cahiers d'exercices ni certaines questions posées dans les devoirs et qui sont atypiques par rapport aux types de tâches repérés chez Mathieu et chez Clotilde. Je fais l'inventaire de ces questions particulières ci-dessous.

8.2.4.1 Un genre de tâches qui se dégage

Chez Mathieu dans le devoir en classe du 2 décembre 2006 (Cf. annexe 11.11) se trouve la question suivante :

> Déterminer une inéquation, comportant une valeur absolue, dont l'ensemble des solutions est :
>
> a) $]-\infty;-7[\ \cup]5;+\infty[$;
>
> b) $[-12;5]$;
>
> c) $]6{,}5;18{,}5[$.

J'analyserai plus loin cette question grâce aux devoirs de plusieurs élèves. Dans le devoir donné par Clotilde du 16 novembre 2007 se trouve une question proche de celle posée par Mathieu :

> Déterminer une équation ou une inéquation ayant pour ensemble de solutions :
>
> a. L'ensemble des solutions est -1 et 5.
>
> b. $S=\left[3-\sqrt{2}\,;\ 3+\sqrt{2}\,\right]$

L'énoncé dans le devoir de Clotilde est plus ouvert que celui de Mathieu. J'analyserai également les productions de quatre élèves de Clotilde pour cette question (Cf. section 8.5.1).

Ces questions appartiennent à un genre de tâches qui pourrait se dire ainsi : « trouver soit une équation soit une inéquation connaissant l'ensemble de ses solutions », je note T_{a4} ce type de tâches.

Ce genre de tâches n'a pas été travaillé dans la séquence bien qu'il puisse se rapprocher du type de tâches T_{n4} (Conversion (ou association) entre un intervalle, une inégalité simple ou double, un ensemble de points de la droite réelle, une expression avec valeur absolue (Cf. Tableau 29 p. 140). J'ai explicité la raison pour laquelle j'avais qualifié T_{n4} comme étant un type de tâches numérique, de même T_{a4} est qualifié comme étant un type de tâches algébrique puisque qu'il faut rechercher un objet de l'algèbre : une équation ou une inéquation. Cependant T_{n4} comme T_{a4} contribuent à explorer la zone frontalière entre numérique et algébrique : le NAA.

8.2.4.2 Différence entre Mathieu et Clotilde relativement à la nature des tâches

Chez Clotilde j'ai trouvé des questions relatives à la valeur absolue, ou encore des situations servant de contexte au travail de la valeur absolue, qui ne figurent pas du tout dans la séquence de Mathieu sur la valeur absolue.

Une question déroutante

Je présente en premier lieu dans le devoir en classe du 16 novembre 2007 (Cf. annexe 11.12) la question suivante :

> **Exercice 3 :**
> 1°) c) Résoudre l'inéquation dans $\mathbb{R}$: $|-x-\pi| \leq -3$

Cette question est relative au type de tâches T_{a2} (résoudre $|ax+b| \leq c \ \ avec \ (a;b) \in \mathbb{R}^2$ et $(c \in \mathbb{R}^*)$) familier pour les élèves lorsque le réel c est un nombre positif. Le cas où c est négatif n'a pas encore été rencontré et il est intéressant même s'il est certainement déroutant. J'analyserai des réponses d'élèves à cette question en rupture avec le contrat didactique habituel concernant ce type de tâches (Cf. section 8.5.1.2 p. 239).

Un contexte favorable au travail de la valeur absolue

Clotilde se différencie clairement de Mathieu relativement aux choix des activités proposées aux élèves sur le thème de la valeur absolue. Je présente ces choix ci-dessous :

- Des questions posées dans le cadre des mesures de grandeurs géométriques et portant sur des recherches d'encadrement de périmètre, aire et volume. Ce sont les exercices numéro 35 page 45 et numéro 66 page 47 (Cf. annexe 11.22) ;
- Deux exercices en lien avec la notion d'imprécision des mesures, ce sont les numéros 63 et 64 de la page 47 du manuel (Cf. Figure 27 et Figure 28).

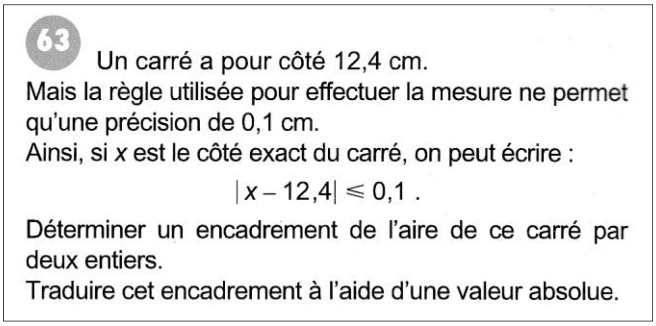
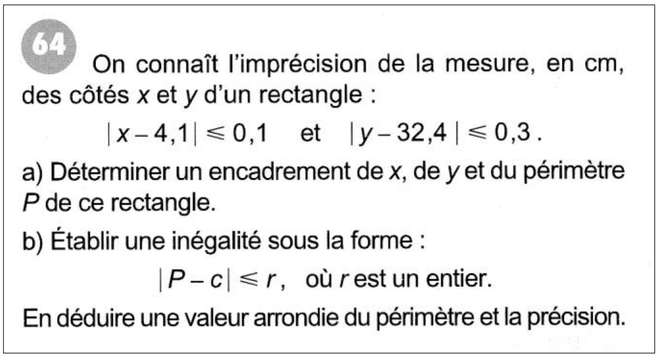

63 Un carré a pour côté 12,4 cm.
Mais la règle utilisée pour effectuer la mesure ne permet qu'une précision de 0,1 cm.
Ainsi, si x est le côté exact du carré, on peut écrire :
$$|x - 12{,}4| \leqslant 0{,}1 .$$
Déterminer un encadrement de l'aire de ce carré par deux entiers.
Traduire cet encadrement à l'aide d'une valeur absolue.

Figure 27 : n° 63 p. 47

Je note que l'énoncé de l'exercice 63 introduit une rupture dans *le contrat institutionnel de calcul* (au sens du *filtre du numérique*, Cf. paragraphe 2.1.3.1 p. 12). « Un carré a pour côté 12,4 cm » constitue une donnée du problème qui a une valeur épistémique de certitude (Duval & Egret, 1993). Cette donnée est alors incohérente avec la suite du texte qui fait comprendre que la valeur exacte du côté est un nombre x différent de 12,4. Il aurait mieux valu dire : « On a mesuré le côté d'un carré avec une règle et on a trouvé 12,4 cm ».


64 On connaît l'imprécision de la mesure, en cm, des côtés x et y d'un rectangle :

$$|x - 4{,}1| \leq 0{,}1 \quad \text{et} \quad |y - 32{,}4| \leq 0{,}3 .$$

a) Déterminer un encadrement de x, de y et du périmètre P de ce rectangle.

b) Établir une inégalité sous la forme :

$$|P - c| \leq r, \quad \text{où } r \text{ est un entier.}$$

En déduire une valeur arrondie du périmètre et la précision.

Figure 28 : exercice n° 64 p. 47

Dans le devoir du 16 novembre 2007, Clotilde a calqué un exercice sur le modèle du numéro 64 de la page 47. Cela montre l'importance accordée par Clotilde à ce type de problème. Cependant Clotilde a supprimé dans le devoir la dernière question qui donne pourtant du sens à ce type de recherche et qui est importante notamment dans la discipline de la physique. Voici l'exercice posé dans le devoir :

> **Exercice 4 :**
>
> On connaît l'imprécision de la mesure en cm, des côtés x et y d'un parallélogramme :
>
> $|x - 3{,}2| \leq 0{,}2$ et $|y - 25{,}3| \leq 0{,}1$
>
> a) Déterminer un encadrement de *x*, de *y* et du périmètre *P* de ce parallélogramme
>
> b) Etablir une inégalité sous la forme $|P - c| \leq r$

Une raison d'être pour la valeur absolue

Les problèmes d'approximation des mesures et de recherche de marges d'erreurs notamment dans des situations de mesures de grandeurs, constituent un contexte qui justifie l'utilité de la notion de valeur absolue. Il est probable que ce soit ce contexte qui soit implicitement désigné dans le curriculum officiel quand il est dit que la valeur absolue est surtout utilisée pour parler de la distance de deux nombres. Les situations précédentes proposées par Clotilde sont donc tout à fait pertinentes pour motiver le travail de la valeur absolue. Cependant il n'est pas de la responsabilité de l'élève de modéliser grâce à la valeur absolue des données comme : « la largeur d'un rectangle a pour mesure 4,1 m à 0,1 m près » ou bien « on a mesuré le côté d'un carré et on a trouvé 12,4 cm. La règle utilisée ne permet une précision que de 0,1 cm ». Il n'est pas non plus de sa responsabilité de dégager le sens des résultats obtenus en les exprimant en langage naturel, sauf à la fin de l'exercice 64. Les situations travaillées dans ces exercices du manuel apparaissent alors comme des décors qui ne nécessitent pas chez les élèves une véritable prise de conscience de l'intérêt de cet étrange nouvel objet du numérique.

8.2.5 À la recherche de situations pour servir la cause de la valeur absolue

En décrivant les activités des séquences de Mathieu et de Clotilde sur le thème de la valeur absolue je fais plusieurs constats. En premier lieu la valeur absolue est travaillée essentiellement en tant qu'objet et non pas en tant qu'outil de résolution de problème. Les raisons d'être de l'étude de ce thème sont le plus souvent réduites au fait de suivre les contenus du programme officiel, avec une dérive vers des types de tâches algébriques en faisant de la valeur absolue un prétexte pour travailler les techniques du calcul algébrique.

Pourtant une des raisons d'être conforme au curriculum officiel serait le travail sur les valeurs approchées des nombres et la détermination de leur précision notamment dans le cadre des grandeurs. Les activités originales par rapport à Mathieu qui ont été données par Clotilde sont des exemples de contextes pertinents pour faire travailler la valeur absolue. Il faudrait cependant construire à partir de ces idées de véritables situations didactiques au sens fort du terme.

En résumé, dans cette partie consacrée au thème de la valeur absolue, je vais m'intéresser à des types de tâches algébriques qui ne font pas partie du domaine numérique, pour décrire et analyser comment ces professeurs se servent d'un objet nouveau du numérique pour investir le champ de l'algèbre. Je cherche à analyser ce *geste de détournement* du numérique vers l'algébrique.

8.3 La valeur absolue chez Mathieu

Je rappelle comment je décris et j'analyse les données en suivant la méthodologie de recherche exposée à la section 4.3 (p. 45). Le point de départ est l'observation du curriculum réel en privilégiant les données recueillies dans la dynamique de l'enseignement effectif lorsque c'est possible. Dans le cas de la valeur absolue j'ai observé la séance du 2 décembre 2006, à partir de la trame de cette séance je développe une analyse *a priori* sans chercher à mettre en discussion les choix de la trame de la séance. Je développe par ailleurs l'analyse *a posteriori* de la séance observée pour la comparer à l'analyse *a priori*. Ces résultats d'analyse sont complétés par l'étude de données statiques (écrits des cahiers et des devoirs) ainsi que par d'autres données dynamiques comme des entretiens avec le professeur ou avec les élèves.

8.3.1 Le curriculum réel chez Mathieu le 2 décembre 2006

La première séance à laquelle j'ai assisté chez Mathieu est celle du 2 décembre 2006, je ne savais pas ce que le professeur allait enseigner. Il avait annoncé ma présence aux élèves en précisant que je m'intéressais à la façon dont les mathématiques sont enseignées en seconde (c'est d'ailleurs le seul renseignement connu par Mathieu en vertu d'un choix méthodologique déjà présenté). C'est un samedi matin, le cours a lieu de 8 h 30 à 9 h 30 et il sera suivi d'une heure de devoir surveillé. Mathieu a commencé depuis quelques séances un troisième chapitre consacré à la géométrie, mais la séance observée clôture le travail relatif au deuxième chapitre de la progression suivie par Mathieu. Je rappelle le début de la programmation de Mathieu qui est présenté à la section 7.2.1. (p. 86) :

> **Chapitre I -** Activités numériques
>
> **Chapitre II -**Intervalles de ℝ
>
> I – Inéquations

II – Intervalles

III – Valeur absolue

Dès le début de la séance de ce samedi 2 décembre, des élèves demandent au professeur de faire des exercices pour réviser le contrôle. Le professeur accepte très vite cette demande et donne des systèmes d'inéquations comportant des valeurs absolues à résoudre. J'assiste donc à une *reprise* du travail de la technique relative à ce type de système sous la forme d'une séance de révision. Au cours de la séance trois spécimens seront travaillés :

$$\begin{cases} |2x-1| > 2 \\ et \\ |x-\sqrt{3}| < \sqrt{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \left|\frac{x-1}{3}\right| < 1 \\ et \\ \left|\frac{x+1}{4}\right| > \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \left|\frac{2x-1}{3}\right| > 2 \\ et \\ \left|\frac{1-3x}{2}\right| < 1 \end{cases}$$

Je vais étudier le type de tâches T_{a3} (Cf. Tableau 29 p. 140) à l'aide de l'outil d'analyse des praxéologies ponctuelles pour une première caractérisation de ces trois spécimens. Les codes utilisés dans le tableau sont explicités à la page 50. J'utilise également le *filtre du numérique* qui me sert à cerner l'ensemble des questions qui se posent relativement au numérique.

	Critères d'analyse / Spécimens	R_1 Rapport au nouveau	R_3 Exigibilité des connaissances visées	R_4 Notion utilisée comme outil ou objet	R_5 Nature des spécimens choisis
Le type de tâches T_3	$\begin{cases} \|2x-1\| > 2 \\ et \\ \|x-\sqrt{3}\| < \sqrt{2} \end{cases}$	3	3	1	3
	$\begin{cases} \left\|\frac{x-1}{3}\right\| < 1 \\ et \\ \left\|\frac{x+1}{4}\right\| > \frac{1}{2} \end{cases}$	3	3	1	3
	$\begin{cases} \left\|\frac{2x-1}{3}\right\| > 2 \\ et \\ \left\|\frac{1-3x}{2}\right\| < 1 \end{cases}$	3	3	1	3

Tableau 30 : analyse de trois spécimens de T_3

Ce tableau donne à voir le manque de conformité du travail d'exploration de l'objet valeur absolue en référence avec le curriculum officiel. Il souligne également l'absence de raisons d'être et de motivation pour ces tâches. Les nombres donnés dans les inéquations sont écrits uniquement avec les chiffres 1, 2, 3 ou 4 sous la forme d'entiers et ils peuvent apparaître en dénominateur de quotients ou « sous une racine ». Le premier spécimen ne comporte pas de quotient contrairement aux deux autres, ce qui peut engendrer une difficulté supplémentaire pour les deux derniers. Les comparateurs sont « strictement plus petit » et « strictement plus grand » toujours utilisés ensemble. Rien n'est précisé concernant l'inconnue pour laquelle il faut supposer que c'est un nombre réel. Le *contrat institutionnel de calcul* est le calcul exact. La calculatrice n'a pas d'utilité dans ce type de tâches. La dynamique de T_{a3} est numérico-algébrique dans la mesure où l'objet valeur absolue est défini dans le domaine numérique et qu'il est exploité dans le cadre algébrique.

8.3.2 Les praxéologies mathématiques a priori du type de tâches Ta3

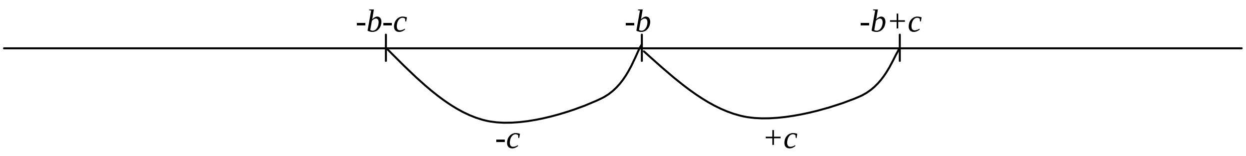
Je vais prendre comme données les types de tâches proposés par Mathieu et je vais rechercher les praxéologies mathématiques conformes au programme et possibles en fonction de l'histoire de cette classe. Je m'intéresse en particulier à un spécimen du type de tâches T_{a3} qui a été étudié lors de la séance du 2 décembre 2006. Je vais donner une praxéologie mathématique possible à partir de l'observation de ce moment de classe.

Je rappelle ce type de tâches T_{a3} : « résoudre un système de deux inéquations du premier degré à une inconnue du style $|ax+b|<c$ et $|a'x+b'|<c'$ avec a et a' non nuls, c et c' strictement positifs et x un nombre réel (chaque inégalité pouvant avoir l'une des quatre possibilités des inégalités strictes ou larges) ». Les différentes techniques développées ci-dessous représentent celles qui sont possibles dans cette classe de seconde, en prenant en compte le curriculum officiel et le curriculum réel et par conséquent les connaissances supposées des élèves au moment de l'élaboration de la technique relative à T_{a3}. J'étudierai uniquement les deux cas correspondant aux inégalités strictes. Les différentes praxéologies que je vais présenter sont caractérisées par les éléments importants de chacun des quatre niveaux praxéologiques.

8.3.2.1 Praxéologie géométrique

Première technique τ_1 : la technique géométrique[1]

- considérer $|ax+b|<c$ (respectivement $|ax+b|>c$) comme la distance des réels ax et $-b$ qui est strictement inférieure à c (respectivement strictement supérieure à c) ;
- représenter graphiquement les nombres $-b$; $-b-c$ et $-b+c$ sur la droite réelle pour « visualiser » le nombre ax sous la forme d'intervalles de $\mathbb{R}$;



- traduire le schéma précédent par des inégalités :

$-b-c<ax<-b+c$ (respectivement $ax<-b-c$ ou $-b+c<ax$)

- en déduire des inégalités équivalentes pour le nombre x :

Si $a>0$ $\frac{-b-c}{a}<x<\frac{-b+c}{a}$ avec $a\neq 0$ (respectivement $x<\frac{-b-c}{a}$ ou $\frac{-b+c}{a}<x$)

[1] Dire que la technique est géométrique signifie que la démarche globale est guidée par des considérations géométriques même si localement des connaissances algébriques sont en jeu.

Si $a < 0$ $\frac{-b+c}{a} < x < \frac{-b-c}{a}$ avec $a \neq 0$ (respectivement $x < \frac{-b+c}{a}$ ou $\frac{-b-c}{a} < x$)

- en déduire l'appartenance du nombre x à des intervalles de ℝ ce qui donne les solutions de la première inéquation ;

- faire le même travail avec la deuxième inéquation et chercher ensuite l'intersection des deux ensembles de solutions à l'aide des représentations graphiques utilisant la droite graduée ;

- interpréter des ensembles de points qui sont des segments ou des demi-droites représentés dans le registre graphique, par des intervalles de ℝ, ensembles de réels. Faire des conversions du registre graphique vers le registre des écritures symboliques des intervalles.

Technologie θ_1

- dans le cadre algébrique, un changement de point de vue est nécessaire : le nombre $ax+b$ est la différence des deux nombres ax et $-b$;

- un changement de cadre est nécessaire, du cadre algébrique dans lequel le problème est posé, au cadre géométrique de la droite graduée. L'expression algébrique est la différence de deux abscisses de deux points de la droite réelle, et grâce au registre graphique des intervalles de réels correspondent à l'ensemble des nombres ax ;

- des inégalités portant sur le nombre ax sont équivalentes à des inégalités portant sur le nombre x ;

- le système a pour solution l'intersection des solutions des deux inéquations.

Théorie $\Theta 1$

Isomorphisme entre le corps des réels et la droite affine.

Règles relatives à la relation d'ordre dans ℝ.

8.3.2.2 Praxéologie algébrique

Deuxième technique τ_2 : technique algébrique

Il n'y a pas de changement de cadre, qui reste le cadre algébrique, on a deux cas possibles :

soit $|ax+b|<c \Leftrightarrow -c<ax+b<c$ (premier cas)

soit $|ax+b|>c \Leftrightarrow ax+b<-c$ *ou* $ax+b>c$ (deuxième cas)

Chaque inéquation se ramène alors à un ensemble de deux inéquations sans valeur absolue. Cela conduit à rechercher la solution d'un système dans le premier cas, ou bien à rechercher pour solution la réunion des deux ensembles de solutions des deux inéquations dans le deuxième cas.

Cette technique présente trois possibilités pour interpréter les solutions de chaque inéquation :

- soit le cadre algébrique est convoqué avec une expression des solutions sous la forme d'inégalités ;
- soit le cadre numérique est utilisé pour donner les solutions en utilisant des intervalles ;

- soit le cadre géométrique est utilisé comme dans la première technique pour visualiser les solutions sur la droite réelle.

Première variante de la deuxième technique

Une variante de la deuxième technique consiste à commencer par se ramener à un système de deux inéquations du style $|x+\beta|<\gamma$ (avec γ >0) grâce à la transformation d'écriture suivante :

$$|ax+b| = \left|a(x+\frac{b}{a})\right| = |a|\left|x+\frac{b}{a}\right| \text{ avec } a \neq 0$$

L'inéquation proposée $|ax+b|<c$ est alors équivalente à $\left|x+\frac{b}{a}\right|<\frac{c}{|a|}$

La même transformation est opérée pour la deuxième inéquation.

Technologie θ_2

$\theta_2$repose essentiellement sur les équivalences suivantes : c étant positif $|x|$<c $\Leftrightarrow$ -c<x<c

et $|x|$>c $\Leftrightarrow$ x<-c ou x>c

La propriété suivante justifie la variante de la deuxième technique.

$|ab|=|a|\times|b|$ quels que soient les réels a et b.

Une remarque est nécessaire en ce qui concerne cette propriété de la valeur absolue du produit. Est-elle conforme au curriculum officiel ? Une réponse rigoureuse amène une réponse négative. Mais si le concept de valeur absolue doit être rencontré en seconde, en conformité avec les programmes, des problèmes devraient pouvoir être modélisés par des inéquations du type $|ax+b|<c$. La propriété est alors un outil pertinent pour développer la technique précédente qui permet de se ramener aux deux équivalences suivantes :

$$|x+b|<c \Leftrightarrow x \in]-b-c;-b+c[$$

ou

$$|x+b|>c \Leftrightarrow x \in]-\infty;-b-c[\cup]-b+c;+\infty[$$

Théorie

Règles relatives au corps des réels et à la relation d'ordre dans ℝ.

Deuxième variante de la deuxième technique

Une technique peut découler des éléments technologico-théoriques précédents, elle consiste à faire un tableau des signes pour les deux expressions algébriques dont on prend les valeurs absolues, ce qui permet de les exprimer sur chacun des intervalles déterminé grâce au tableau, sans le symbole de la valeur absolue. Le problème revient alors à résoudre plusieurs systèmes et à chercher l'intersection des solutions. La même variante est possible comme dans la deuxième technique.

8.3.3 Analyse a posteriori de la séance du 2 décembre 2006

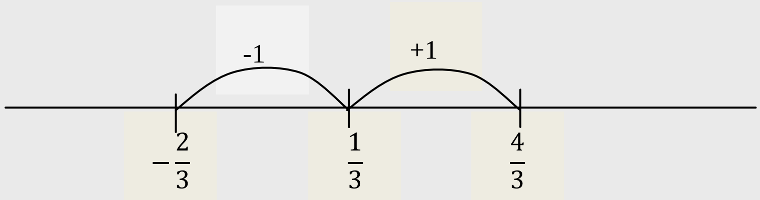
8.3.3.1 Description d'un moment de la vie de la classe à propos de la valeur absolue

Lors de la séance du 2 décembre 2006 chez Mathieu, un premier spécimen du type de tâches T_{a3} est corrigé au tableau par le professeur selon la technique τ_1. Un deuxième spécimen est la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} \left|\dfrac{x-1}{3}\right| < 1 \\ et \\ \left|\dfrac{x+1}{4}\right| > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Il est résolu successivement avec les deux techniques τ_1 et τ_2 que le professeur reprend au tableau dans une phase de correction après avoir observé en passant dans les rangs que les élèves utilisaient soit l'une, soit l'autre technique, qui avaient été travaillées dans la séquence.

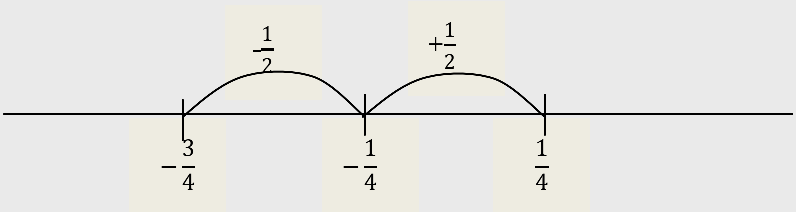
Pour la première technique, j'analyse les éléments du bloc technologico-théorique qui sont explicités. Le professeur au tableau lors d'une phase de correction collective commente ce qu'il a vu sur les cahiers des élèves en passant auprès d'eux.

> Le professeur a écrit au tableau le système à résoudre et il montre la première inéquation :
>
> $$\left|\frac{x-1}{3}\right| < 1$$
>
> Puis il commente la technique de résolution à partir de ses observations :
>
> **Mathieu** : j'ai vu plusieurs techniques, la première méthode j'ai vu ça, c'est valeur absolue de x sur trois moins un tiers inférieur à un. En fait x moins un sur trois je vais le séparer en deux, ils ont dit c'est la distance entre x sur 3 et un tiers, et ils ont fait un schéma.
>
> Le professeur écrit en même temps qu'il parle :
>
> $\left|\frac{x}{3} - \frac{1}{3}\right| < 1$
>
> 
>
>
> Il commente le schéma tout en le réalisant :
>
> **Mathieu** : J'ai un tiers plus un, ça fait quoi ?
>
> **Élèves** : quatre tiers
>
> **Mathieu** : ils ont dit, x sur 3 appartient à l'intervalle moins deux tiers, quatre tiers ; si x sur 3 est là dedans, x tout seul il est où ?
>
> **Élèves** : entre −2 et 4
>
> Le professeur écrit : $\frac{x}{3} \in \left]-\frac{2}{3}\ ;\ \frac{4}{3}\right[$ $\quad x \in]-2\ ; 4[$
>
> **Mathieu** : je garde cela en mémoire.
>
> **Mathieu** : Ensuite j'ai (il écrit en même temps au tableau $\left|\frac{x+1}{4}\right| > \frac{1}{2}$) c'est la distance entre quoi et quoi ?

<silence>

Mathieu : c'est (il parle et écrit au tableau en même temps) $d(\frac{x}{4}\ ;\ -\frac{1}{4}) > \frac{1}{2}$ et on a dit que (il écrit $d(a\,;b\,) = |b-a|$) la distance entre a et b c'est une soustraction comme j'ai plus c'est moins par moins.

Mathieu enchaine en faisant le schéma suivant à main levée qui correspond à la mise en œuvre de la première technique



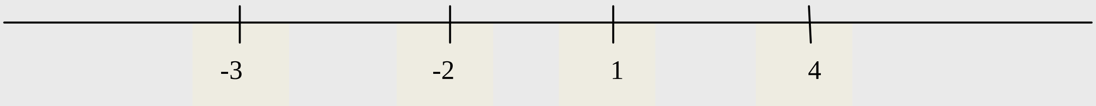
Puis il écrit en lisant ce qu'il écrit : $\frac{x}{4} \in \left]-\infty\ ;\ -\frac{3}{4}\right[\ \cup\ \left]\frac{1}{4}\ ;\ +\infty\right[$

Mathieu : ils se sont retrouvés avec x qui est dans quel intervalle ?

(Silence des élèves, il continue à écrire en lisant ce qu'il écrit)

$$x \in]-\infty\,;\,-3[\ \cup\ ]1\,;\ +\infty[$$

Mathieu : après je n'ai plus qu'à placer les nombres, j'ai -3, après j'ai -2… (il représente la droite graduée à main levée)



Il hachure sur ce dessin les segments qui correspondent aux solutions de chacune des deux inéquations et s'adresse à la classe.

Mathieu : qu'est-ce que vous en concluez ? ... l'ensemble des solutions ?

Mathieu écrit : S =]1 ; 4[

Mathieu : ceux qui ont fait autrement ? J'ai parlé de la méthode 1 je vais parler de la méthode 2.

Mathieu écrit sous la dictée d'une élève qui a résolu le système en utilisant une autre méthode :

$$\left|\frac{x-1}{3}\right| < 1 \quad \begin{cases} x-1<3 \\ \text{ou[1]} \\ x-1>-3 \end{cases} \quad (1)$$

Mathieu : c'est plus des écarts, c'est basé sur ce système là : que dire d'un nombre dont la valeur absolue est plus grande que 1 ?

[1] Mathieu fait une erreur et écrit « ou » au lieu de « et ». Cette erreur est présente dans les cahiers que j'ai consultés pour d'autres cas similaires.

Il écrit : $|x| > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \text{ou} \\ x < -1 \end{cases}$

Mathieu : avant d'écrire ça (il montre la ligne (1)) qu'est-ce qu'elle aurait pu écrire à la place ?

Il écrit et lit en même temps :

$$\left|\frac{x-1}{3}\right| < 1 \begin{cases} \frac{x-1}{3} < 1 \\ \text{ou} \\ \frac{x-1}{3} > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 < 3 \\ \text{ou} \\ x-1 > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ \text{ou} \\ x > -2 \end{cases}$$

Mathieu : dire que $\left|\frac{x+1}{4}\right| > \frac{1}{2}$ (il écrit et lit en même temps), ça veut dire quoi ?

Il reprend l'écriture et la lecture simultanément :

$$\begin{cases} \frac{x+1}{4} > \frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ \frac{x+1}{4} < -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 2 \\ \text{ou} \\ x+1 < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \text{ou} \\ x < -3 \end{cases}$$

Mathieu : et on termine comme tout à l'heure.

8.3.3.2 Occasion de reprise manquée pour une praxéologie ponctuelle du collège

L'occasion est donnée dans cet épisode de rencontrer des transformations d'écritures relatives à des quotients, il s'agit d'une reprise de savoirs du collège sur la somme de deux quotients :

$$\frac{x-1}{3} = \frac{x}{3} - \frac{1}{3}$$

« En fait $x - 1$ sur 3 je vais le séparer en deux » explique le professeur, en restant au niveau d'un savoir-faire et d'une manipulation des écritures sans référence à la règle qui légitime ce geste de transformation d'écriture. L'occasion n'est pas saisie pour remettre en mémoire l'élément théorique, le savoir institutionnalisé qui permet de contrôler ce geste sur les écritures. Cela pose les questions suivantes :

- est-ce que saisir ce type d'occasion n'entraînerait pas le professeur dans des détours préjudiciables à la clarté globale de la technique visée ?
- est-ce que les élèves ne risquent pas d'étendre le geste légitime ici à des cas comme : $\frac{x \times 4}{3} = \frac{x}{3} \times \frac{4}{3}$ en justifiant par « je l'ai séparé en deux » ?
- est-ce que la règle qui légitime cette transformation est disponible sous la forme d'un écrit pour les élèves ?
- est-ce que cette opportunité pour faire une reprise de savoirs du collège est saisie parfois, n'est jamais saisie ?

Ces questions posent plus généralement la question de l'institutionnalisation de connaissances anciennes lors des RDN et de leur disponibilité pour les élèves sous la forme de praxéologies complètes, elles renvoient à la troisième hypothèse de cette recherche.

8.3.3.3 *Implicites concernant des éléments théoriques et la nature des objets*

À un autre moment du déroulement de la technique, les éléments théoriques restent implicites et ne sont pas partagés avec les élèves. Il s'agit de ce passage :

> **Mathieu** : ils ont dit, x sur 3 appartient à l'intervalle moins deux tiers, quatre tiers ; si x sur 3 est là dedans, x tout seul il est où ?
>
> **Élèves** : entre −2 et 4
>
> Le professeur écrit : $\frac{x}{3} \in \left]-\frac{2}{3}\ ;\ \frac{4}{3}\right[$ $\quad x \in]-2\ ; 4[$

Est-ce que les élèves ont pris conscience des changements de points de vue nécessaires pour parvenir à la conclusion ? Est-ce qu'ils ont véritablement mis en œuvre la règle concernant la multiplication de chaque membre d'une inégalité par un réel positif ? Est-ce qu'ils ont fait le lien avec des activités travaillées le 23 octobre 2006 qui ont permis le travail de ce type de technique et qui concernaient le thème des intervalles (Cf. annexe 11.14) ?

En fait les passages suivants sont implicites dans le cadre numérique ainsi que l'utilisation d'objets différents comme les intervalles et les inégalités :

$$\frac{x}{3} \in \left]-\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right[\Leftrightarrow -\frac{2}{3} < \frac{x}{3} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < \frac{x}{3}\ et\ \frac{x}{3} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow -2 < x\ et\ x < 4 \Leftrightarrow x \in]-2;4[$$

Ces implicites empêchent la visibilité de la règle utilisée qui légitime le fait que les inégalités restent dans le même sens dans la multiplication par le positif 3. Contrairement au passage précédent relatif à des savoirs qui devraient être routinisés, les connaissances en jeu dans ce dernier épisode relatives aux intervalles sont nouvelles en seconde, et les éléments théoriques qui sous-tendent les techniques en cours d'apprentissage sont encore sensibles. De plus, la règle relative au produit des deux membres d'une inégalité par un même nombre est la cause bien connue de très nombreuses erreurs de la part des élèves lorsque le nombre est négatif. Le travail de cette règle de façon rigoureuse est donc un enjeu de l'enseignement. Dans l'entretien que j'ai eu avec le professeur le 16 décembre 2006, il souligne d'ailleurs cet écueil pour les élèves, encore repéré dans le devoir du 2 décembre : « Il reste les problèmes classiques du ... quand je divise une inégalité par un même nombre négatif on oublie de changer le sens de l'inégalité.» Comme précédemment, se présentait là un moment de reprise possible de connaissances déjà institutionnalisées, mais il n'a pas été saisi. Dans le cas de la somme de deux quotients il s'agissait de RDN de connaissances du collège, alors que dans le deuxième cas il s'agit de RDN de connaissances nouvelles du lycée. Comme le passage implicite signalé précédemment avait fait l'objet d'un travail avec les élèves le 23 octobre 2006, le professeur aurait pu s'appuyer sur la *mémoire didactique* de sa classe. En effet le type de tâches suivant a été proposé : « sachant que $x \in [a; b]$ à quel intervalle appartient $\alpha x + \beta$; ou inversement ». Six spécimens ont été traités qui mettaient bien en évidence le passage par les inégalités et le rôle de la règle de multiplication des inégalités par un même nombre.

Si le professeur sait reconnaître les lacunes de ses élèves comme il le dit le 16 décembre : « ils ne possèdent pas encore les notions... ils possèdent pas ce qu'ils ont vu en collège, ils ont pas tout assimilé », en revanche il ne semble pas profiter de moments de reprise de connaissances du collège ou du lycée qui s'offrent dans le processus de chronogenèse.

8.3.3.4 La technique la plus efficace selon le professeur

La deuxième technique, utilisée par certains élèves, correspond à la technique τ_2 explicitée dans l'analyse *a priori* de l'organisation mathématique. Le professeur la développe à la demande d'élèves qui l'ont utilisée, mais la technique qu'il a privilégiée est la première. Lors d'un entretien le 16 décembre 2006, il explicite cette préférence.

> **Chercheur :** J'ai vu que tu as privilégié une méthode de résolution en t'appuyant sur la droite graduée et la distance de deux nombres, est-ce que tu peux expliquer pourquoi tu privilégies cette méthode ?
>
> **Mathieu :** Oui parce que je trouve qu'elle est lisible, on l'appréhende mieux en faisant le schéma et en plaçant les nombres, qu'en disant arbitrairement la valeur absolue de 6-x est ... ça peut être x-6 ou 6-x suivant la position de ... je trouve que c'est trop abstrait le fait de l'écrire littéralement sans utiliser de schéma .... et ça reste encore en terminale S, on oublie encore que la valeur absolue de x ça peut être x ou -x et que ça repose le problème du − du +, du −x, ça introduit plein de parasites. Le -x pour certains ça peut pas être un nombre positif, ça reste un nombre négatif, en terminale. Oui oui, ça introduit de nouveaux problèmes. Tandis que le fait de le poser, de faire le schéma, une distance est positive des deux côtés, ça, je trouve que c'est plus gérable.
>
> **Chercheur :** c'est ton expérience en fait qui te fait choisir cette méthode
>
> **Mathieu :** Oui, et puis j'ai de vieux souvenirs quand on travaillait sur… on a travaillé sur des trucs comme ça là, ... et puis il fallait faire un tableau, et c'était très technique et ça n'apportait pas grand chose quoi, et ça m'a marqué des trucs comme ça, si t'es pas matheux c'est bon tu passes à côté du truc quoi … Sur le devoir j'étais très content, je leur ai dit du coup tellement j'étais content du truc. En fait ça se passe bien avec cette classe là, non c'était bien, c'était bien.

Le professeur justifie le changement de cadre et le passage au cadre géométrique par plusieurs arguments :

- un argument didactique : le registre graphique offre une meilleure lisibilité et une plus grande facilité de conversion entre des inégalités et des intervalles : « je trouve qu'elle est lisible, on l'appréhende mieux en faisant le schéma » ;
- un argument personnel venant de son expérience d'élève : « ça m'a marqué des trucs comme ça, si t'es pas matheux c'est bon tu passes à côté du truc quoi » ;
- un argument épistémologique relatif à l'articulation numérique/algébrique à travers le fait que la technique algébrique nécessite de dépasser certaines conceptions erronées comme la perception d'un nombre qui s'écrit *-x* perçu par les élèves en tant que nombre négatif.

8.3.3.5 Une tâche exigible en seconde selon Mathieu

Je note que Mathieu aurait pu utiliser un autre argument pour le choix du travail de T_{a3}, c'est la conformité au programme qui préconise de relier la notion de valeur absolue avec celle de distance de points, même si ce type de tâches semble bien être hors programme. Cependant Mathieu justifie son choix lors de ce même entretien du 16 décembre 2006 et des éléments du bloc technologico-théorique du geste professionnel de conception de la séquence sur la valeur absolue sont ainsi révélés.

> **Chercheur** : La résolution des systèmes, bon là ça fait partie de ce chapitre, mais sinon est-ce que cela a un usage ?
>
> **Mathieu** : non c'est technique
>
> **Chercheur** : et tu donnerais des arguments pour que les élèves connaissent cette technique ?
>
> **Mathieu** : il y a quand même un intérêt à ça, c'est que derrière ça il y a tout ce qui est inégalités et intervalles, ça c'est important, vu sous cet angle c'est important, mais le fait de parler de valeurs absolues ça introduit de nouvelles difficultés, on pourrait simplement travailler sur des systèmes avec des inéquations et en rester là.

Le professeur justifie le choix de faire rencontrer aux élèves le type de tâches T_{a3}, il trouve là un prétexte pour travailler avec des objets nécessaires pour l'activité mathématique comme les inégalités et les intervalles : *« derrière ça il y a tout ce qui est inégalités et intervalles »*.

8.3.4 Les reprises du collège dans la séquence sur la valeur absolue

8.3.4.1 La valeur absolue et les reprises de connaissances du collège chez Mathieu

Je vais revenir sur une question que j'ai posée précédemment concernant les reprises des connaissances du collège en lien avec la valeur absolue, il s'agit en particulier de la notion de *distance à zéro* et de distance de deux points sur la droite graduée (Cf. p. 139). Ces notions ont été abordées en classe de cinquième et le concept de valeur absolue a été travaillé en acte (Vergnaud, 1990), c'est ce que j'ai développé dans la section 5.6.1.2 (p. 73). En analysant l'introduction du cours de Mathieu l'appui sur ces connaissances du collège est visible : la valeur absolue d'un réel est reliée à la distance de deux points de la droite graduée qui peut également être appelée en seconde « droite des réels ».

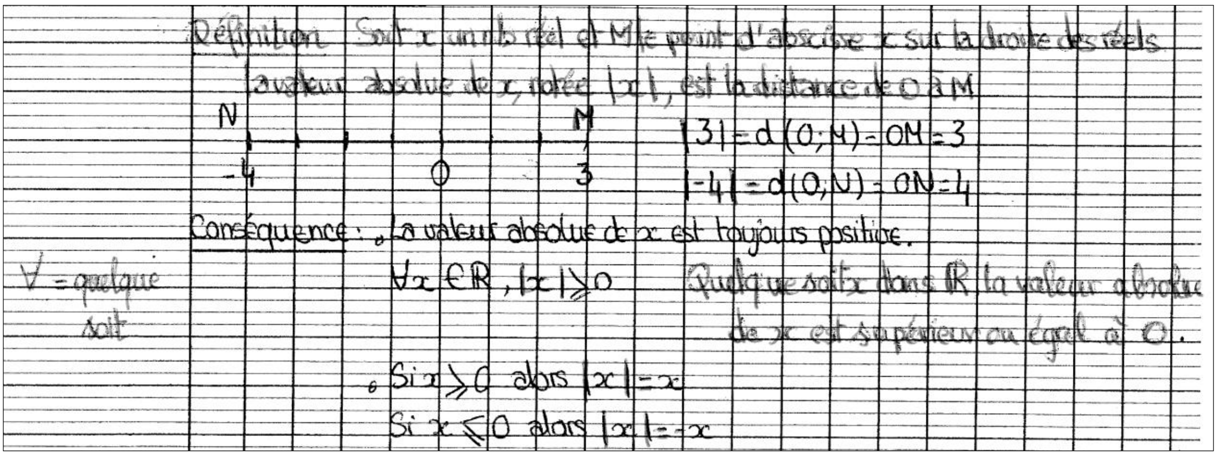


Figure 29 : introduction du cours de Mathieu sur la valeur absolue

Je m'intéresse à la cohérence de l'organisation mathématique proposée par Mathieu dans son cours (Cf. Figure 29). La définition donnée entraîne des conséquences et je note des manques pour assurer les liens mathématiquement nécessaires dans le raisonnement.

Au collège la connaissance suivante : « la distance de deux points est un nombre positif » est un implicite qui fonctionne comme un théorème en acte et qui ne peut être démontré. La conséquence « la valeur absolue de x est toujours positive » résulte de ce théorème en acte et de cette connaissance naturalisée. En revanche comment démontrer à partir de la définition donnée que :

si $x \geq 0$ alors $|x| = x$ et si $x \leq 0$ alors $|x| = -x$?

Il est nécessaire d'avoir recours au théorème qui permet de « déterminer la distance de deux points d'abscisses données » (expression du programme de cinquième) et dont une première forme partielle a été rencontrée en classe de cinquième pour les nombres connus à ce niveau là[1]. Une démonstration possible est alors la suivante :

- Si $x \geq 0$ alors le plus grand des deux nombres x et 0 est x et par conséquent : $OM = x - 0$ d'après le théorème précédent et donc $|x| = \mathrm{x}$
- Si $x \leq 0$ alors le plus grand des deux nombres x et 0 est 0 et par conséquent : $OM = 0 - x$ d'après le théorème précédent, et donc $|x| = -\mathrm{x}$

Est-ce que le discours technologique a été réalisé oralement ? Je ne peux pas le savoir, je n'ai que les traces écrites de cette séance. Cependant ce qui est écrit dans le cahier de cours n'est pas démontré. Au vu des écrits du cahier, deux exemples apparaissent et semblent permettre d'énoncer des conclusions générales.

Je perçois dans l'architecture de la séquence de Mathieu sur la valeur absolue la volonté de relier cette notion à des connaissances du collège. Les reprises des notions de distance de deux points sur une droite graduée, et en particulier de distance d'un point à l'origine du repère, sont explicitement présentes. Mathieu semble asseoir son projet d'enseignement sur le fait que les élèves ont des connaissances naturalisées concernant la droite graduée et qu'il n'est pas nécessaire de les reprendre explicitement. Cette interprétation correspond à ce qui a été constaté par Matheron (2000) en l'absence de *mémoire didactique* et que j'ai déjà cité (Cf. section 2.5.1.2 p. 21) : « Le passage de l'élève dans la classe supérieure garantit qu'il se souviendra des notions et techniques enseignées dans la classe de niveau inférieur, et que le professeur sera en droit de lui demander de les mobiliser. » Les reprises organisées par Mathieu se font donc apparemment sans modification des anciennes connaissances du collège qui doivent être mobilisées en lien avec la valeur absolue, en tablant sur les souvenirs des élèves.

---

[1] Voici un énoncé possible en classe de cinquième : « la distance de deux points d'une droite graduée est égale à la différence entre la plus grande abscisse et la plus petite ». Implicitement les abscisses ne peuvent être que dans l'espace numérique construit à ce niveau, et ce n'est pas l'ensemble des réels.

8.3.4.2 Une alternative pour un geste de reprise des connaissances du collège

Mathieu néglige deux facteurs qui risquent de fragiliser son enseignement de la valeur absolue :

- les souvenirs des élèves sont certainement flous, ce qui est normal dans les mécanismes de la mémoire d'autant plus que la distance de deux points est travaillée dans le plan euclidien en troisième mais n'est pas reprise dans le curriculum officiel de troisième ;
- l'énoncé théorique nécessaire pour démontrer les conséquences de la définition n'a pas été institutionnalisé dans sa forme générale puisque les nombres réels n'étaient pas encore connus en cinquième. Cet énoncé pourrait être : « si M et P sont deux points quelconques d'une droite graduée et si ces deux points ont pour abscisses respectives les réels x_M et x_P alors la distance MP est égale à la différence entre la plus grande abscisse et la plus petite. »

J'appelle le théorème précédent : *théorème de l'isomorphisme* entre la droite graduée et l'ensemble des nombres réels. Cet énoncé théorique n'a peut-être d'ailleurs pas été institué au collège, où il pu être simplement travaillé comme connaissance implicite et au mieux sous la forme d'une connaissance formulée pour les nombres connus à ce niveau. Je propose une reprise explicite en seconde de ce type de connaissance certainement très contextualisée pour les élèves dans des savoir-faire, alors que la décontextualisation et la généralisation de cette connaissance pour la désigner comme savoir de référence est possible et même nécessaire. Je note que dans le cas du *théorème de l'isomorphisme*, la reprise de cet élément théorique correspond à un remaniement de l'ancien. Il s'agit donc d'une reprise de connaissances du collège en lien avec du nouveau dans un processus d'institutionnalisation après coup[1].

8.3.4.3 La reprise de la droite graduée

La place de la droite graduée avant la séquence sur la valeur absolue

Je vais rechercher l'apparition de la droite graduée dans la progression organisée par Mathieu avant l'introduction de la valeur absolue. La droite graduée est totalement absente du premier chapitre que ce soit dans le cours ou dans les exercices. Mathieu ne respecte donc pas la demande des programmes concernant l'utilisation de la droite graduée en lien avec le domaine numérique. Cette droite graduée apparaît dans le deuxième chapitre le 21 octobre 2006 en lien

[1] La reprise du théorème enseigné en troisième, qui permet le calcul de la distance de deux points en fonction de leurs coordonnées dans un repère orthonormé, peut permettre de retrouver le *théorème de l'isomorphisme*. Dans le cas où ces points sont sur l'axe des abscisses, cela conduit à la rencontre avec la racine carrée d'un carré, et donne l'occasion d'utiliser une expression avec valeur absolue et de retrouver ainsi ce *théorème de l'isomorphisme*.

avec la résolution des inéquations et pour introduire la notion d'intervalles comme on peut le voir dans le cours de Mathieu sur la Figure 30.

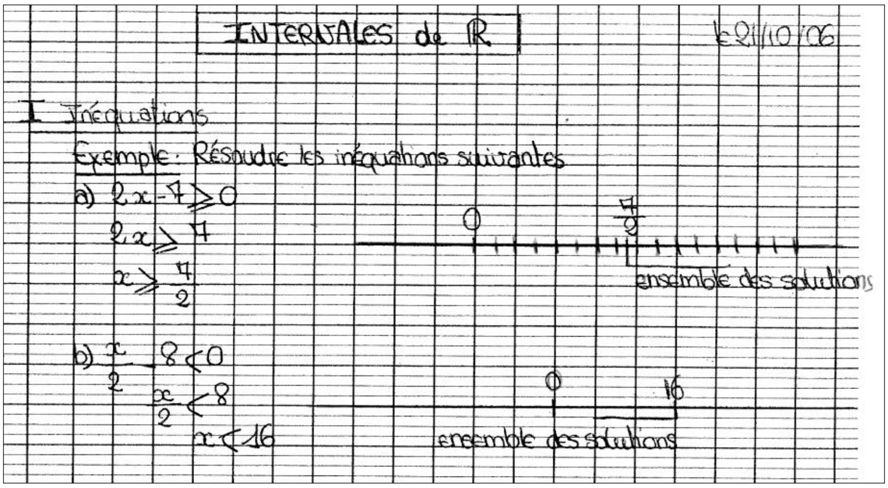
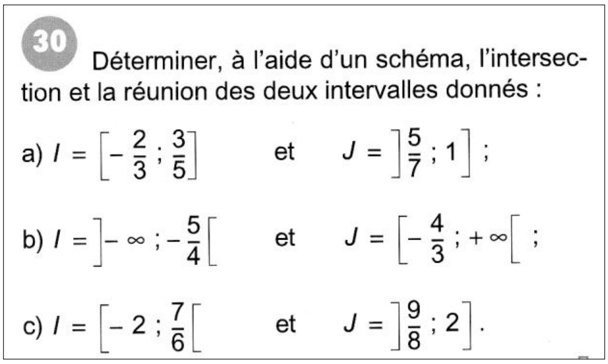


Figure 30 : cours de Mathieu, introduction du deuxième chapitre

L'ensemble des solutions n'est pas véritablement explicité, il faut savoir décoder le registre graphique qui n'est d'ailleurs pas très clair puisqu'il semblerait que le carreau représente une unité, et dans ces conditions le nombre $\frac{7}{2}$ est mal placé. Je remarque l'utilisation d'un codage original et personnel pour repérer les intervalles, mais il faut dire que le codage des intervalles sur la droite graduée offre une très grande variété, et qu'il n'y a pas de savoir de référence unique à ce sujet (Bellard et al. 1998). Il suffit de consulter quelques manuels pour en avoir la preuve, il suffit également de consulter le cahier d'exercices des élèves pour voir apparaître un codage plus habituel (Cf. Figure 33).

Le même jour les élèves ont fait plusieurs exercices concernant les intervalles et en particulier l'exercice numéro 30 de la page 44 (Cf. Figure 31).



30 Déterminer, à l'aide d'un schéma, l'intersection et la réunion des deux intervalles donnés :

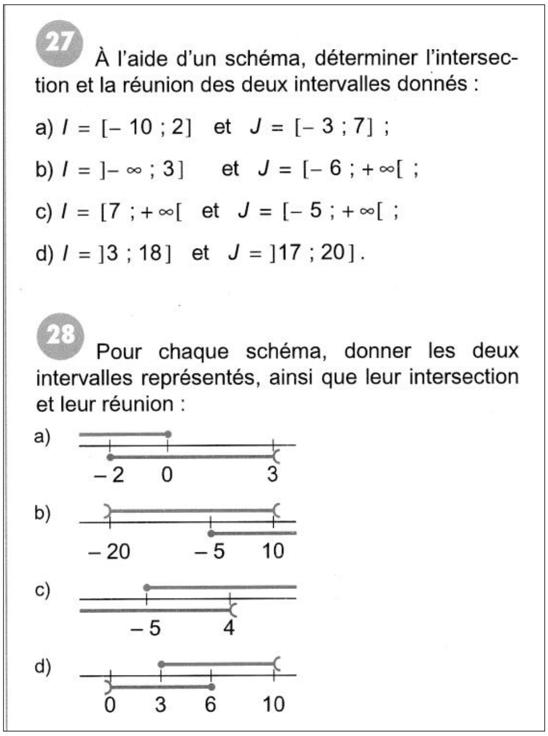
a) $I = \left[-\frac{2}{3} ; \frac{3}{5}\right]$ et $J = \left]\frac{5}{7} ; 1\right]$;

b) $I = \left]-\infty ; -\frac{5}{4}\right[$ et $J = \left[-\frac{4}{3} ; +\infty\right[$;

c) $I = \left[-2 ; \frac{7}{6}\right[$ et $J = \left]\frac{9}{8} ; 2\right]$.

Figure 31 : exercice n°30 p.44

Avant d'avoir fait cet exercice les élèves ont fait les exercices du manuel, les numéros 27 et 28 de la page 44 (Cf. Figure 32). Il s'agit de faire des conversions de registres entre des intervalles et leur représentation à l'aide de la droite graduée. Ces conversions nécessitent évidemment également un changement de cadre entre le cadre numérique et le cadre géométrique.



27 À l'aide d'un schéma, déterminer l'intersection et la réunion des deux intervalles donnés :

a) $I = [-10\ ;\ 2]$ et $J = [-3\ ;\ 7]$;

b) $I =]-\infty\ ;\ 3]$ et $J = [-6\ ;\ +\infty[$;

c) $I = [7\ ;\ +\infty[$ et $J = [-5\ ;\ +\infty[$;

d) $I =]3\ ;\ 18]$ et $J =]17\ ;\ 20]$.

28 Pour chaque schéma, donner les deux intervalles représentés, ainsi que leur intersection et leur réunion :

Figure 32 : exercices 27 et 28 p. 208

L'exercice 27 relève du même type de tâches que le numéro 30, mais les nombres des bornes des intervalles ne sont que des entiers. L'élève dont j'ai photocopié le cahier n'a pas fait les schémas demandés dans le numéro 27 et a su déterminer l'intersection et la réunion des deux intervalles. Voici en revanche dans la Figure 33 la réponse du a) de l'exercice 30

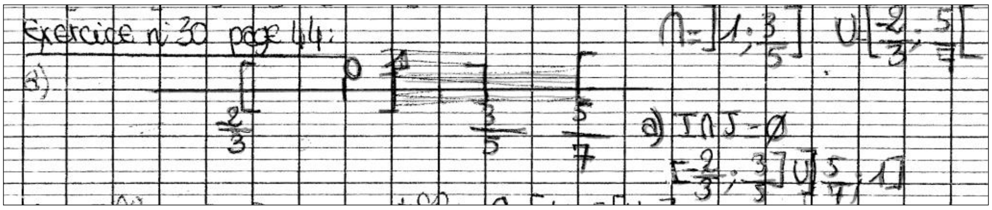


Figure 33 : exercice n°30 p. 44, question a)

Il semblerait que les réponses personnelles de l'élève soient en haut à droite, et que la correction soit prise au dessous, mais les réponses erronées ne sont pas signalées. Les nombres sont placés sur la droite graduée sans aucun souci de l'unité : les deux tiers de l'unité font plus de deux fois la longueur de l'unité ! L'ordre des nombres positifs n'est pas respecté, à moins qu'ils ne soient rangés dans le même ordre que leurs numérateurs, règle-élève qui se retrouve alors « vérifiée » dans la question c) pour cette même élève (Cf. Figure 34).

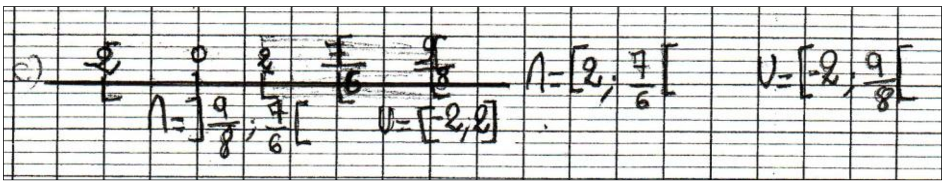


Figure 34 : exercice n° 30 p. 44, question c)

Dans cette question c) les réponses fausses ne sont pas barrées, alors que la correction a été prise. Je remarque que l'ordre des bornes des intervalles donnés dans le livre sont inversées sur la droite graduée, c'est le cas pour $\left]\frac{5}{7}\,;1\right]$ dans la question a), et pour $\left]\frac{9}{8}\,;2\right]$ dans la question b). L'élève n'a pas repéré une règle d'écriture pourtant essentielle dans la notation symbolique des intervalles. Quel sens est donné par l'élève à tous ces signes ? Est-ce que l'intervalle représente bien un ensemble infini de nombres satisfaisant certaines conditions ? Est-ce que le segment correspondant représente un ensemble infini de points ? L'élève a pris la correction et a inscrit les réponses attendues mais n'a pas refait la droite graduée en positionnant correctement les points. Quelle est la compréhension de cette activité ? En l'absence totale d'explications en langage naturel dans ces exercices et en l'absence de raisons d'être pour faire fonctionner ces techniques, il est possible qu'il n'y ait dans ce travail que des manipulations de signes de façon mimétique calquées sur les exemples donnés par le professeur.

La droite graduée en lien avec la notion de valeur absolue

La droite des réels contribue à la définition numérico-géométrique de la valeur absolue que Mathieu a donnée. Elle apparaît sous la forme de deux registres : langage naturel et dessin. J'ai analysé le rôle joué par la droite graduée pour le domaine numérique dans la section 5.5.3 (Cf. p. 71) et j'ai montré comment cet objet est présent depuis la classe de sixième et comment il se développe en même temps que les connaissances numériques des élèves au fil des reprises jusqu'au lycée. L'aboutissement de cette évolution est précisé ainsi dans le programme de seconde : « On admettra que l'ensemble des réels est l'ensemble des abscisses des points d'une droite. »

Après avoir donné la définition de la valeur absolue et en avoir déduit des conséquences, notamment sur l'expression de la valeur absolue d'un nombre en fonction de son signe, Mathieu a continué le cours par un moment d'élaboration des techniques relatives à la résolution d'équations et d'inéquations comportant des valeurs absolues (Cf. Tableau 28 p. 138). Il donne ensuite une définition de la distance de deux points d'une droite graduée en fonction de leurs abscisses (Cf. Figure 35).

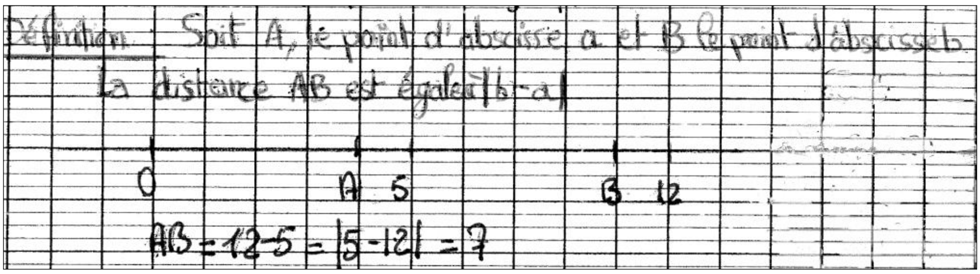


Figure 35 : cours de Mathieu sur la valeur absolue

L'architecture de la séquence de la valeur absolue échafaudée par Mathieu n'est pas cohérente mathématiquement. La valeur absolue a été définie en lien avec la distance de deux points d'une droite graduée, un point quelconque et l'origine du repère de la droite graduée. Maintenant la distance de deux points est définie grâce à la valeur absolue. On a affaire ici à deux définitions circulaires. L'organisation mathématique ainsi échafaudée globalement n'est pas valide. Je retrouve le constat réalisé entre autres par Artaud et Menotti (2006) qui ont mis en évidence une juxtaposition d'organisations mathématiques ponctuelles sans articulation entre elles (Cf. p. 85). Un geste professionnel du professeur en position P+1 (au sens de Margolinas, 2004) devrait être de se soucier de bâtir une armature sous-jacente de son enseignement cohérente sur le plan des liens logiques entre les différents sujets, secteurs et thèmes de chaque domaine mathématique, ainsi qu'entre les domaines eux-mêmes.

8.3.5 La place de la valeur absolue pour Mathieu dans le programme de seconde

J'ai étudié la séquence sur la valeur absolue à partir de mon observation personnelle le 2 décembre, de deux cahiers d'une élève (cahier de cours et d'exercices) et de tous les devoirs donnés dans l'année. Je ne peux pas savoir si les traces trouvées dans ces deux cahiers représentent la totalité de ce qui a été travaillé en classe. L'élève a été choisie par le professeur comme étant une bonne élève sérieuse, qui prend bien note de ce qui se fait en classe et qui n'est jamais absente. Mais j'ai la preuve que son cahier ne reflète pas tout le travail réalisé. En effet, à la date du 2 décembre, je peux témoigner du fait que l'élève a utilisé la technique τ_2 et n'a pas pris note de la correction du professeur au tableau qui a utilisé la technique τ_1. Comme je l'avais anticipé, j'ai la preuve que les traces dans le cahier d'un élève ne permettent pas de savoir avec certitude ce qui a été véritablement travaillé dans la classe (Cf. annexe 11.16).

J'ai déjà souligné l'importance donnée aux résolutions d'équations et d'inéquations comportant des valeurs absolues. Pour Mathieu le concept de valeur absolue est essentiellement mobilisé dans ces activités algébriques. Il est intéressant de se poser la question de l'avenir de la valeur absolue dans l'enseignement de seconde et au-delà jusqu'en terminale. Ces questions ont été posées au professeur lors de l'interview du 16 décembre 2006 :

> **Chercheur** : Et qu'est-ce que tu en penses de ce point du programme en seconde ? Si tu étais concepteur des programmes qu'est-ce que tu en ferais ?
>
> **Mathieu** : Qu'est ce que j'en ferais ? Je le mettrais peut être… ça serait pas un point important, ça serait pas le point le plus important du programme
>
> **Chercheur** : Mais tu le laisserais en seconde ? Il te parait nécessaire ?
>
> **Mathieu** : Non pas spécialement nécessaire, si je devais le mettre je le mettrais à la fin, je ne le traiterais pas nécessairement non, je ne trouve pas que ce soit nécessaire. […] le côté valeur absolue ça introduit des difficultés qui n'aident pas à comprendre mieux des notions qui existent déjà, c'est une notion pour elle-même et voilà.
>
> **Chercheur** : et cette notion pour elle-même est-ce que par contre elle a des usages importants nécessaires en première S ou en terminale ? Quand est-ce qu'elle trouve sa vraie utilité en fait ?
>
> <Long silence>

> **Mathieu** : Non … une vraie utilité je sais pas moi… en terminale, il y a que l'extraction de racines carrées … quand on cherche une limite ; ouais… faites attention si le nombre est négatif, si je le sors de là c'est une valeur absolue, mais sinon … ça reste valable quand on retravaille sur les écart-types, puisqu'on le travaille en première et en terminale aussi, sinon non quoi, il n'y a pas de vraie utilité.

Finalement pour le professeur la valeur absolue n'a pas beaucoup d'avenir dans le curriculum du lycée jusqu'en terminale. La vraie raison d'être est dans le domaine des statistiques, sinon dans le domaine du numérique c'est une occasion de faire travailler d'autres objets du numérique (les intervalles, les transformations d'écritures …) et surtout de l'algébrique (les inéquations, les équations).

8.3.6 Les apprentissages des élèves de Mathieu concernant la valeur absolue

Deux sources d'informations ont été utilisées pour analyser les apprentissages des élèves : les traces écrites dans les cahiers et dans les devoirs ainsi que les entretiens. Je vais en particulier analyser des réponses d'élèves au devoir donné dans la classe de Mathieu le 2 décembre 2006, après la séance de révision faite à la demande des élèves (l'énoncé du devoir est en annexe 11.11). En me référant au tTableau 29 (p. 140), les types de tâches donnés dans ce devoir sont répertoriés ci-dessous.

Numéro de la question	1°)	2°)	3°)	4°)	5°)
Type de tâches	T_{n3} Exprimer sans valeur absolue une expression numérique comportant des valeurs absolues	T_{a1} résoudre l'équation |ax-b|=c	T_{a2} résoudre l'inéquation $\|ax+b\| * c$ (où $*$ est l'un des signes d'inégalité)	T_{a4} Trouver une inéquation avec une valeur absolue dont l'ensemble des solutions est donné sous la forme d'intervalles	T_{a3} Résoudre un système de deux inéquations du type $\|ax+b\| * c$ (où $*$ est l'un des signes d'inégalité)
Nombre de spécimens	2	4	4	3	2
Nombre de points sur 20	2	4	6	4	4

Tableau 31 : types de tâches du devoir du 2 décembre 2006

Le type de tâches T_{a4} est nouveau par rapport au travail réalisé dans la classe de Mathieu, j'ai déjà mentionné cette question atypique précédemment (Cf. 8.2.4 p. 142) et je vais l'analyser. Alors que les autres questions sont traitées sans autre raison d'être que l'entrainement systématique de savoir-faire, le quatrième exercice demande davantage de réflexion et la mobilisation de connaissances qui ne sont pas routinisées. La seule activité trouvée dans le cahier d'exercices qui mette en jeu des techniques proches de celles relatives à T_{a4} est l'exercice du livre n°67 page 48 qui est reproduit dans la Figure 36. J'ai déjà évoqué cet exercice et j'ai explicité les raisons pour lesquelles j'ai appelé T_{n4} le type de tâches qu'il met en scène bien qu'il soit prototypique du domaine du NAA. Les types de tâches T_{n4} et T_{a4} sont à rapprocher mais ne peuvent être confondus. Par exemple dans l'exercice 67, pour la ligne c) il faut partir d'un intervalle représenté graphiquement et trouver entre autres une inégalité, objet du cadre numérique, exprimée avec une valeur absolue. Dans le devoir ce qui est demandé est de trouver une inéquation, objet du cadre algébrique, qui corresponde à un intervalle qui est son ensemble de solutions. Cela peut augmenter la difficulté pour les élèves de Mathieu qui n'ont rencontré les inéquations que comme objets déclenchant une technique de résolution.

67 Recopier le tableau et le compléter.

	intervalle(s)	inégalité(s)	représentation	valeur absolue
a)	$]-\infty\,;3[\ \cup\ ]5\,;+\infty[$	$x<3$ ou $x>5$	3 5	$\lvert x-4\rvert \ldots 1$
b)		$-2 \leqslant x \leqslant 2$		
c)			−2,7 −1,3	
d)				$\lvert x+3\rvert < 0,01$
e)		$x \leqslant -\frac{1}{3}$ ou $x \geqslant \frac{4}{7}$		

Figure 36 : numéro 67 page 48 du manuel Déclic

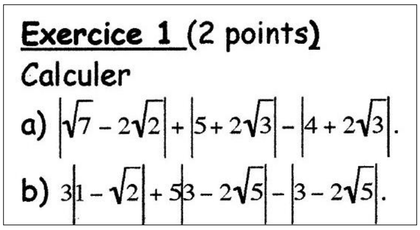
Des difficultés sont donc prévisibles avec T_{n4} qui est mobilisé dans l'exercice numéro 67. Cependant la *flexibilité* nécessaire, pour réussir ce type de tâches et pour réussir des activités comme dans cet exercice, est intéressante à travailler pour exercer les élèves à changer de point de vue, ce qui est une compétence fondamentale en mathématiques. J'avais souligné l'importance de ces changements de regard dans l'analyse d'une *véritable activité mathématique* (Cf. section 5.3.4 p. 60).

8.3.7 Analyse de devoirs d'élèves de Mathieu

Olivier est un élève présenté par le professeur, lors de l'entretien du 16 décembre 2006, comme un élève qui connaît beaucoup de choses mais qui fait des erreurs importantes. C'est un élève volontaire qui vient spontanément en aide individualisée. Il a eu 12 sur 20 au devoir en classe du 2 décembre 2006 portant sur les intervalles et les valeurs absolues (Cf. annexe 11.11). Je vais analyser des réponses d'Olivier à ce devoir du 2 décembre. Elles seront complétées par l'étude des devoirs de deux autres élèves de la classe : Victor et Célia. Victor est un élève qui a deux ans d'avance, très vif, qui comprend très vite et qui ne prend pas la peine en général de donner des explications qu'il juge superflues. Célia est une élève très sérieuse et très attentive, évaluée comme étant une bonne élève. Je vais présenter l'analyse de certaines questions du devoir prises dans l'ordre de l'énoncé.

8.3.7.1 La première question du devoir du 2 décembre 2006

Le devoir commence par une question qui ne compte que pour 2 points sur 20 et qui est la seule question qui corresponde à un type de tâches numérique. Je la reproduis ci-dessous.



Exercice 1 (2 points)

Calculer

a) $\left|\sqrt{7}-2\sqrt{2}\right|+\left|5+2\sqrt{3}\right|-\left|4+2\sqrt{3}\right|$.

b) $3\left|1-\sqrt{2}\right|+5\left|3-2\sqrt{5}\right|-\left|3-2\sqrt{5}\right|$.

J'ai déjà décrit ce geste de détournement du numérique vers l'algébrique à propos de la valeur absolue. Les choix des questions du contrôle qui clôture la séquence sur la valeur absolue confirment encore ce geste.

En analysant les réponses des trois élèves précédents, je remarque qu'aucun d'entre eux n'utilise de signe égal entre les différentes expressions numériques qui dénotent le même nombre. Est-ce que les élèves ont bien conscience de faire des transformations qui garantissent que le nombre est toujours le même indépendamment de sa forme variable ? Le professeur ne prend pas en compte cet oubli, il ne le signale pas et ne le pénalise pas. Le rapport personnel des élèves avec le concept de nombre risque de se construire sans prendre en compte cet aspect fondamental de l'invariance du nombre à travers ses multiples transformations de signes. Je repère des différences dans les réponses des élèves, je vais les expliciter pour le deuxième spécimen (Cf. Figure 37, Figure 38 et Figure 39).

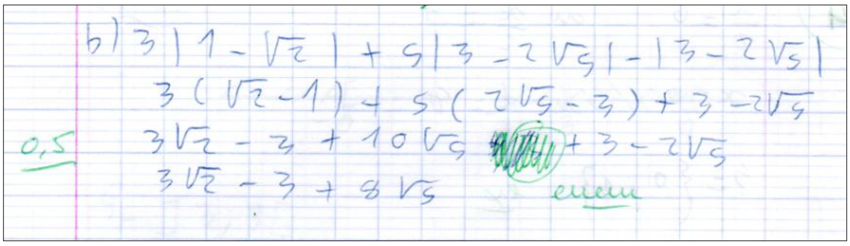


Figure 37 : Devoir du 2 décembre. Victor. Ex.1. b)

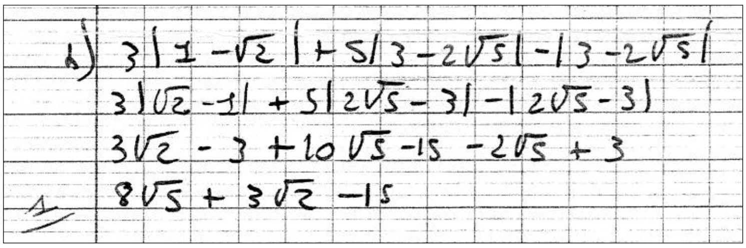


Figure 38 : Devoir du 2 décembre. Olivier. Ex.1. b)

Olivier transforme systématiquement $|p-q|$ lorsque $p-q$ est négatif en $|q-p|$, il continue ensuite son calcul comme si les deux barres étaient des parenthèses. Ce n'est évidemment pas faux mais cette façon de faire laisse penser qu'Olivier utilise une technique peu fiable dans la mesure où elle ne semble pas étayée de façon solide par des raisons mathématiques bien identifiées. Cette technique le conduit à remplacer par exemple $-\left|2\sqrt{5}-3\right|$ par $-2\sqrt{5}+3$ ce qui est là encore formellement juste si l'on imagine un intermédiaire resté implicite. Mais si l'élève avait formulé la justification de cette écriture est-ce que la règle invoquée aurait été juste ? Le travail d'Olivier révèle des connaissances mathématiques trop gouvernées par une volonté de mimétisme sans véritable compréhension ou même prise de conscience des raisons mathématiques sous-jacentes.

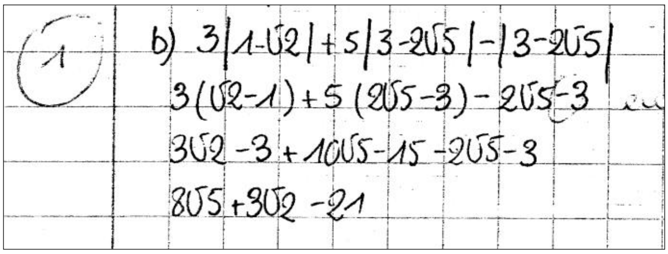


Figure 39 : Devoir du 2 décembre. Célia.. Ex.1. b)

Célia utilise une technique plus fiable dans le premier exercice pour remplacer $|p-q|$ lorsque $p-q$ est négatif en $q-p$, mais elle rencontre un problème (très classique) pour gérer un signe moins devant une valeur absolue. Elle fait alors les deux erreurs suivantes : $-|p-q|=q-p$ lorsque $p-q$ est négatif et $-|p+q|=-p+q$ lorsque $p+q$ est positif (erreur visible pour le spécimen du a).

Victor utilise une variante pour $|\sqrt{7}-2\sqrt{2}|$ qu'il remplace par $-\sqrt{7}+2\sqrt{2}$. Est-ce qu'il met en œuvre la règle de l'opposé d'une somme qui est égale à la somme des opposés ? Cela pourrait laisser croire qu'il sait étayer les techniques employées sur des éléments technologiques solides. Par ailleurs il sait ajouter des parenthèses là où elles sont utiles pour que la technique soit plus fiable, ce qui ne lui permet pas d'éviter une erreur dans le développement de $5(2\sqrt{5}-3)$ malgré tout.

8.3.7.2 La troisième question du devoir et le type de tâches T_{a2}

Le devoir d'Olivier

Pour résoudre des inéquations comportant des valeurs absolues, spécimens du type de tâches T_{a2}, Olivier utilise la *technique géométrique* privilégiée par le professeur pour les trois premiers spécimens, et il utilise la *technique algébrique* pour le quatrième. Les extraits de sa copie sont dans la Figure 40.

Olivier semble avoir retenu l'ostensif graphique de la *technique géométrique* associé à T_{a2}. Il a retenu que sur ce dessin on met la valeur moyenne, on fait plus d'un côté et moins de l'autre, et cela donne la réponse recherchée pour encadrer le nombre *ax*. Apparemment ce qui a été compris de la technique est l'utilisation d'un signifiant graphique associé au signifiant inéquation avec valeur absolue. Le lien entre ces deux objets dans deux cadres et deux registres différents est réalisé. Tout repose alors sur le choix de la valeur moyenne : Olivier choisit deux fois b et une fois c de l'inéquation $|ax+b|*c$ au lieu du nombre $-b$. Je peux presque affirmer que le sens de la technique, c'est à dire sa justification ou autrement dit sa technologie, échappe à Olivier. Aucun élément technologique n'est exprimé ni pour justifier, ni pour guider le changement de cadre et les changements de registre. Est-ce qu'Olivier a pensé au changement de point de vue nécessaire sur $ax+b$ pour considérer cette expression comme la distance des réels ax et $-b$? Est-ce qu'il avait pour but de retrouver l'un des deux cas de référence qui ont été travaillés dans le cours de Mathieu (Cf. section 8.2.2 p. 138) à travers deux exemples à savoir : « Trouver les réels tels que $|x| \leq \alpha$ ou bien trouver les réels x tels que $|x| \geq \alpha$ » ? Est-ce qu'il a bien compris les équivalences de points de vue possibles à partir de ces inéquations dans différents cadres et registres ? Le doute exprimé précédemment concernant la véritable compréhension d'Olivier est encore présent.

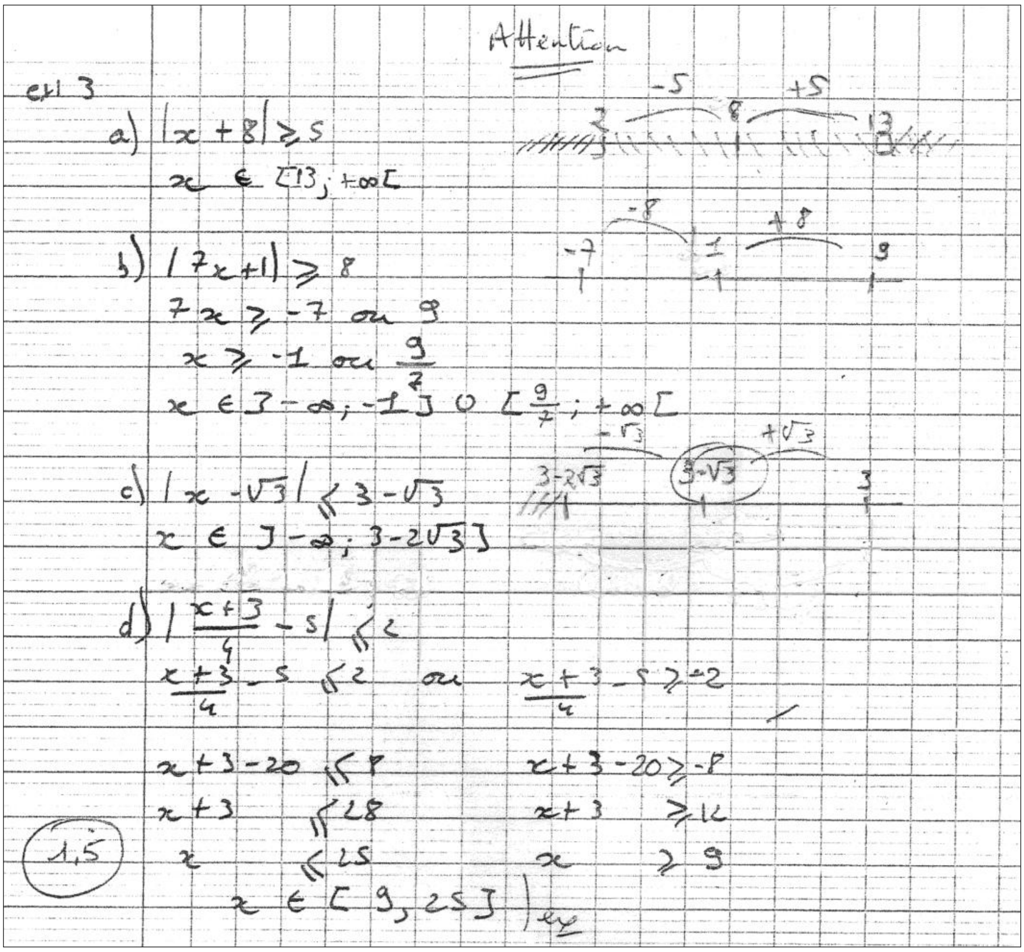


Figure 40 : devoir d'Olivier du 2 décembre 2006 dans la classe de Mathieu

Dans la Figure 40 je constate qu'Olivier est capable de changer de technique pour le dernier spécimen. Pourquoi opère-t-il ce changement ? Est-ce qu'il s'est rendu compte qu'il avait une technique trop peu maitrisée ? Est-ce que l'expression $\frac{x+3}{4}$-5 introduit des complications pour utiliser cette technique géométrique parce qu'elle ne se présente pas sous la forme $ax + b$?

Le tableau suivant met en relation les écrits d'Olivier avec la praxéologie développée dans l'analyse *a priori* correspondant à la *technique géométrique* employée par cet élève pour le deuxième spécimen.

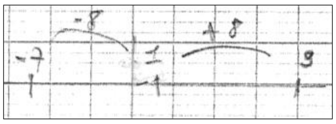
Ecrits de l'élève	Technologie développée dans l'analyse *a priori*	Interprétation d'après l'écrit de l'élève
$\lvert 7x+1 \rvert \geq 8$	le nombre $7x+1$ est la différence de deux nombres $7x$ et -1, ce qui nécessite un changement de point de vue sur la somme $7x+1$	Pas de changement de point de vue explicite
	7x+1 est la différence de deux abscisses de deux points de la droite réelle, ce qui nécessite un changement de cadre, du cadre algébrique au cadre géométrique de la droite graduée	Le changement de cadre est réalisé, mais sans cohérence avec le cadre algébrique
$7x \geq -7$ ou 9	trouver grâce au registre graphique les intervalles de réels qui correspondent à l'ensemble des points M d'abscisse $7x$ et exprimer cela sous la forme d'inéquations	Le nouveau changement de cadre vers le cadre algébrique est opéré, mais les inégalités ne sont pas cohérentes avec le registre graphique, de plus les écritures sont incorrectes d'un point de vue syntaxique
$x \geq -1$ ou $\dfrac{9}{7}$ $x \in \left]-\infty;-1\right[\cup \left]\dfrac{9}{7};+\infty\right[$	déduire de l'étude précédente les réels x solutions des inéquations en opérant sur les inégalités qui traduisent la représentation graphique précédente	La recherche de l'ensemble des réels x est visible sous la forme d'intervalles, mais sans cohérence entre les inégalités et les intervalles.

Tableau 32 : analyse des réponses d'Olivier d'une tâche de type T_{a2}

Les devoirs de Victor et de Célia

Victor et Célia ont réussi complètement la troisième question et ont eu 6 points chacun pour cette question. Victor utilise la *technique géométrique* et il fait référence explicitement au sens en précisant qu'il s'intéresse à la distance de deux nombres, ce qu'il traduit ensuite par la distance de points sur la droite graduée. La technique est visiblement bien rodée ce qui se traduit par les mêmes étapes respectées pour les quatre spécimens comme on peut le voir pour le dernier cas (Cf. Figure 41).

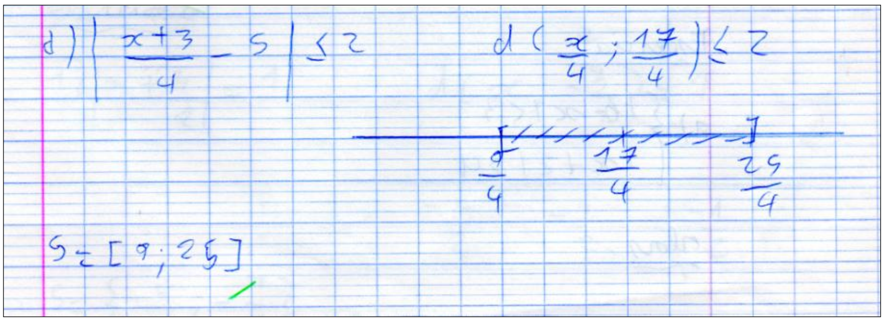


Figure 41 : devoir du 2 décembre 2006 de Victor dans la classe de Mathieu

Est-ce que Victor effectue des calculs intermédiaires au brouillon, est-ce qu'il les fait de tête ? Il n'a pas besoin d'écrire, comme le fait habituellement le professeur, les deux arcs pour montrer qu'on ajoute 2 d'un côté à droite et qu'on retranche 2 de l'autre côté à gauche à la valeur moyenne. Il est vraisemblable que Victor a effectué tous les calculs intermédiaires de tête.

Célia opte pour la technique algébrique qu'elle maîtrise bien également et qui semble bien routinisée. Elle utilise le registre graphique pour représenter les solutions des deux inéquations avant d'interpréter la réponse sous la forme d'un intervalle. Je remarque que Célia n'a pas utilisé la *technique géométrique*, et je mets cela en rapport avec le fait qu'elle n'a pas réussi la quatrième question. Est-ce qu'elle a compris le changement de cadre et les conversions de registre nécessaires pour utiliser la représentation graphique sur la droite des réels ?

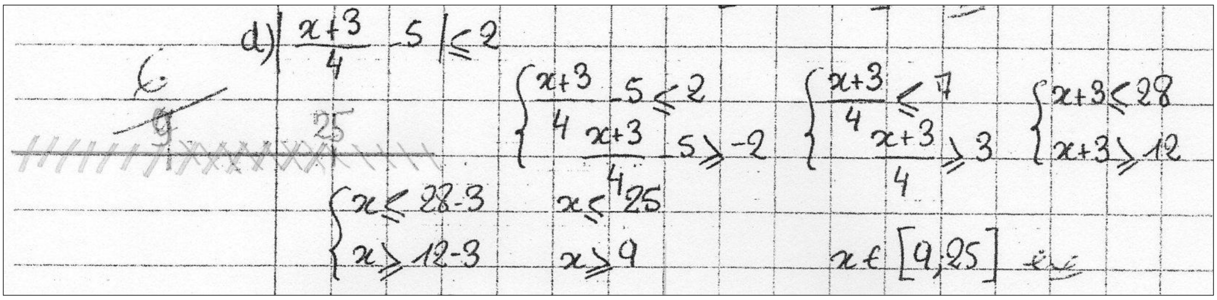


Figure 42 : devoir du 2 décembre 2006 de Célia dans la classe de Mathieu

Sur la copie de Célia on voit des annotations du professeur, en particulier le 6 qui est la note de la question. La représentation graphique a été faite apparemment dans un coin libre de la feuille, est-ce qu'elle a été réalisée après coup ? Pour les questions précédentes cette représentation est bien réalisée à la suite des développements algébriques.

8.3.7.3 La quatrième question du devoir et le type de tâches T_{a4}

Je rappelle la quatrième question de ce devoir relative au type de tâches T_{a4} :

« Déterminer une inéquation, comportant une valeur absolue, dont l'ensemble des solutions est : a) $]-\infty;-7[\ \cup]5;+\infty[$; b) $[-12;5]$; c) $]6{,}5;18{,}5[$ »

Voilà ci-dessous la réponse d'Olivier avec les marques de la correction du professeur :

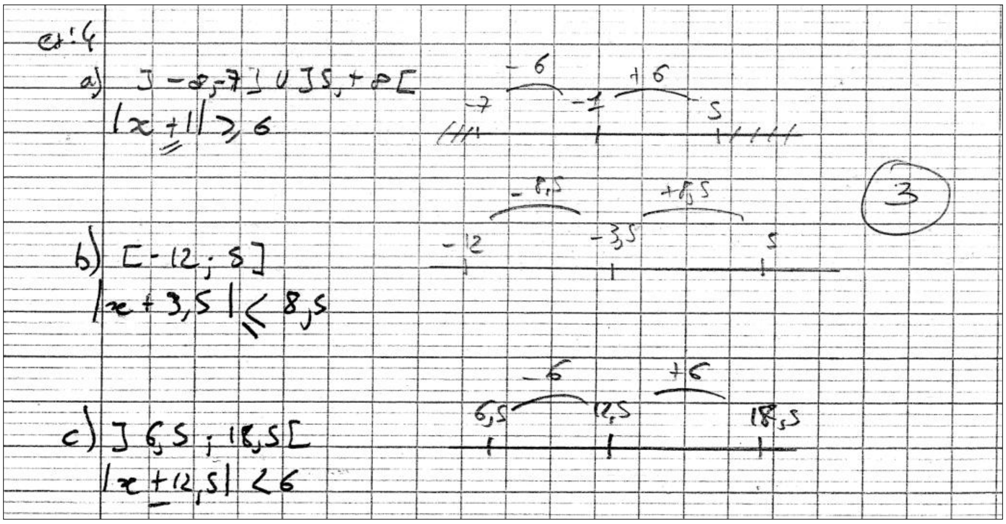


Figure 43 : devoir du 2 décembre 2006 d'Olivier dans la classe de Mathieu

La technique mise en œuvre est *géométrique*, Olivier n'est pas dérouté par la question et il convertit les données connues sous la forme d'intervalles en segments de la droite réelle puis sous la forme d'une inéquation. Une erreur de signe intervient pour le troisième spécimen, il est évidemment difficile de l'interpréter. Olivier a-t-il vraiment compris comment cette technique est justifiée, c'est à dire ce qui lui donne sens ? Au vu des autres réponses d'Olivier il est possible d'en douter.

Victor utilise la même technique, et il fait une seule erreur pour le b) en calculant la moyenne de -12 et de 5 (il trouve -7). Quant à Célia, elle n'a pas recours au cadre géométrique, la technique n'est pas du tout comprise et ses erreurs sont incompréhensibles (Cf. Figure 44).

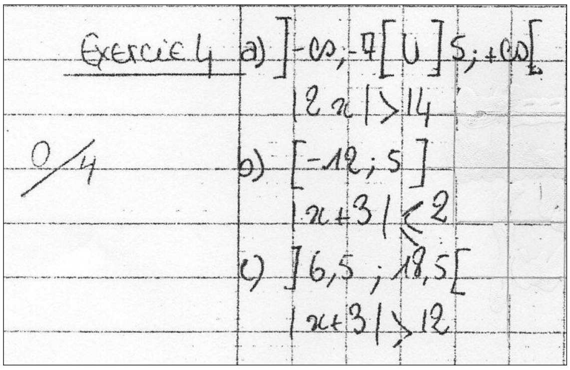


Figure 44 : devoir du 2 décembre 2006
de Célia dans la classe de Mathieu

Je note que certains élèves comme Olivier ou Victor ont compris l'intérêt du changement de cadre, la question est posée dans le cadre numérique et ils transforment les données dans le cadre géométrique, même si ce jeu de cadres est certainement implicite ou en acte. Célia en revanche qui n'a pas recours à la *technique géométrique* semble répondre en donnant une inéquation au hasard, elle montre cependant qu'elle connait la forme algébrique de la réponse attendue.

8.3.7.4 Conclusion

Conformément au curriculum officiel, Mathieu privilégie des praxéologies que j'ai étiquetées comme étant *géométriques*. Elles semblent permettre aux élèves un changement de point de vue qui rend leurs techniques plus fiables grâce au registre graphique. Mais des élèves peuvent ne retenir que quelques traits de la technique qu'ils reproduisent alors par mimétisme. Les praxéologies mathématiques ponctuelles ne sont alors pas complètes et les élèves n'ont pas les moyens de contrôler eux-mêmes la validité de leur activité mathématique. Je relie ce constat à la troisième hypothèse (Cf. section 3.3 p. 35).

L'étude de ces devoirs m'amène à poser des questions à propos de l'enseignement des valeurs absolues, qui sont aussi à considérer comme des questions plus générales :

- comment enseigner des praxéologies mathématiques pour que l'élève ait conscience des éléments technologico-théoriques qui légitiment ses actions sur les objets mathématiques ?

- quelles seraient des organisations mathématiques et didactiques possibles pour atteindre l'objectif précédent ?
  - quels types de tâches viser dans le curriculum de la classe de seconde ?
  - quels sont les problèmes qui peuvent motiver le développement de ces types de tâches ?

La première question est également en lien avec la troisième hypothèse relative à la complétude des praxéologies, elle se posera toujours quelles que soient les réponses à la deuxième question. Elle est à relier aux *contrôles* que le professeur élabore pour évaluer les apprentissages. En effet il est frappant de voir que les réponses d'un élève de seconde au contrôle du 2 décembre ne comprennent pratiquement aucun mot du registre de la langue naturelle. Ainsi on trouve dans le devoir de Victor ces mots : « ou » cinq fois ; « et » , « donc » et « alors » deux fois chacun, et Victor a eu la note de 17,5 sur 20. Par une règle du contrat didactique construit dans la classe de Mathieu un élève comprend que pour réussir il faut « savoir faire » certaines tâches en reproduisant des techniques déjà rencontrées, mais qu'il n'y a rien à expliquer.

Pourquoi ne pas imaginer dans ce type d'évaluation sommative une question de ce type :

« Dire si chacune des égalités suivantes est juste ou fausse, expliquez pourquoi :

$$\left|\sqrt{7}-2\sqrt{2}\right| = -\sqrt{7}+2\sqrt{2}$$

$$-\left|3-2\sqrt{5}\right| = -2\sqrt{5}-3 \text{ »}$$

8.4 La valeur absolue chez Clotilde

La séquence sur la valeur absolue est intégrée dans le deuxième chapitre de la progression annuelle chez Clotilde. La trame de cette séquence est décrite dans le Tableau 28 (p. 138). J'ai pu assister directement à deux séances du début de la séquence que je vais décrire et analyser, la première le lundi 22 octobre 2007 et la deuxième le mercredi 24 octobre 2007. En suivant le protocole décrit dans la méthodologie de cette recherche, je présenterai pour la séance du 22 octobre qui a été filmée, l'analyse *a priori* à partir de la trame de la séance puis l'analyse *a posteriori* relative à la réalisation effective. La description et l'analyse de la séance du 24 octobre ne suivra pas strictement ce schéma de présentation. Pour cette deuxième séance à laquelle j'ai assisté, mais qui n'a pas été filmée, l'analyse *a posteriori* sera éclairée par des éléments de l'analyse *a priori*. Ces données seront complétées par l'analyse des productions des élèves, que ce soit dans des exercices ou dans des devoirs ; et par des entretiens avec le professeur et avec des élèves. Conformément à la méthodologie qui guide ce travail, les gestes professionnels d'enseignement du côté du professeur vont être analysés et croisés avec les apprentissages et les conceptions développés du côté des élèves.

8.4.1 Curriculum réel chez Clotilde le 22 octobre 2007

8.4.1.1 Présentation de la première séance observée chez Clotilde le 22 octobre

Le 22 octobre 2007 de 13 h 30 à 14 h 25 a eu lieu la troisième observation d'une séance dans la classe de Clotilde. Cette séance s'insère dans le troisième chapitre de la progression suivie par Clotilde. Je rappelle le début de cette progression décrite à la section 7.2.1 (p. 86) :

> **Chapitre I -** Calcul numérique et algébrique
>
> **Chapitre II –** Géométrie plane
>
> **Chapitre III –** Intervalles et valeur absolue
>
> I – Intervalles de $\mathbb{R}$
>
> II – Application des intervalles aux inéquations
>
> III – Valeurs absolues

Je présente le déroulement de la séance selon la fonction des différentes phases : correction des exercices donnés au cours précédent, activité d'introduction de la valeur absolue insérée dans la partie exercices, début du cours relatif à la valeur absolue.

La séance commence par la correction d'un exercice qui devait être fait à la maison, c'est l'exercice du livre n° 43 page 45.

43 Résoudre chaque inéquation, puis le système proposé en s'aidant d'un schéma :

a) $\begin{cases} 2x-3 \geqslant 0 \\ 5-x \geqslant 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+1>0 \\ -3x>0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+4 \geqslant 0 \\ 2-5x>0 \end{cases}$

Figure 45 : exercice n°43 page 45

Clotilde annonce cette phase par « Sortez vos affaires, on corrige les exercices ». Pour faire la correction au tableau de chacun des trois spécimens Clotilde demande successivement à trois élèves de venir écrire leurs réponses au tableau. Les élèves écrivent en silence, Clotilde commente en précisant à la place des élèves les règles utilisées.

À 13 h 50 Clotilde distribue une photocopie[1] (Cf. annexe 11.19) et annonce en même temps la deuxième phase du travail : « Vous passez à la suite, on passe à la fiche, aux activités préparatoires aux valeurs absolues. On va parler de quelque chose de nouveau que sont les valeurs absolues. » Les élèves remplissent la fiche en travaillant seul ou en se concertant avec leur voisin. Après un temps de recherche le professeur assis à son bureau interroge tour à tour des élèves pour faire une correction orale.

---

[1] La fiche en annexe est celle qui a été photocopiée dans le cahier d'une élève appelée Zoé, cette fiche sera analysée plus loin.

À 14 h 05 Clotilde distribue une deuxième fiche (Cf. annexe 11.20) en disant : « Prenez votre cours dans la partie leçon ». Les élèves collent la feuille dans leur cahier de cours, l'étude de cette fiche est ensuite organisée de la même façon, les élèves cherchent, le professeur circule, vérifie les écrits et donne des aides éventuelles. À la fin de la séance au moment de la sonnerie, vingt minutes plus tard, la première partie de la fiche insérée dans le cours a été travaillée mais incomplètement corrigée.

Le verbatim de la partie de la séance consacrée au travail de la valeur absolue figure en annexe 11.18.

8.4.2 Analyse *a priori* de l'organisation mathématique de la séance du 22 octobre

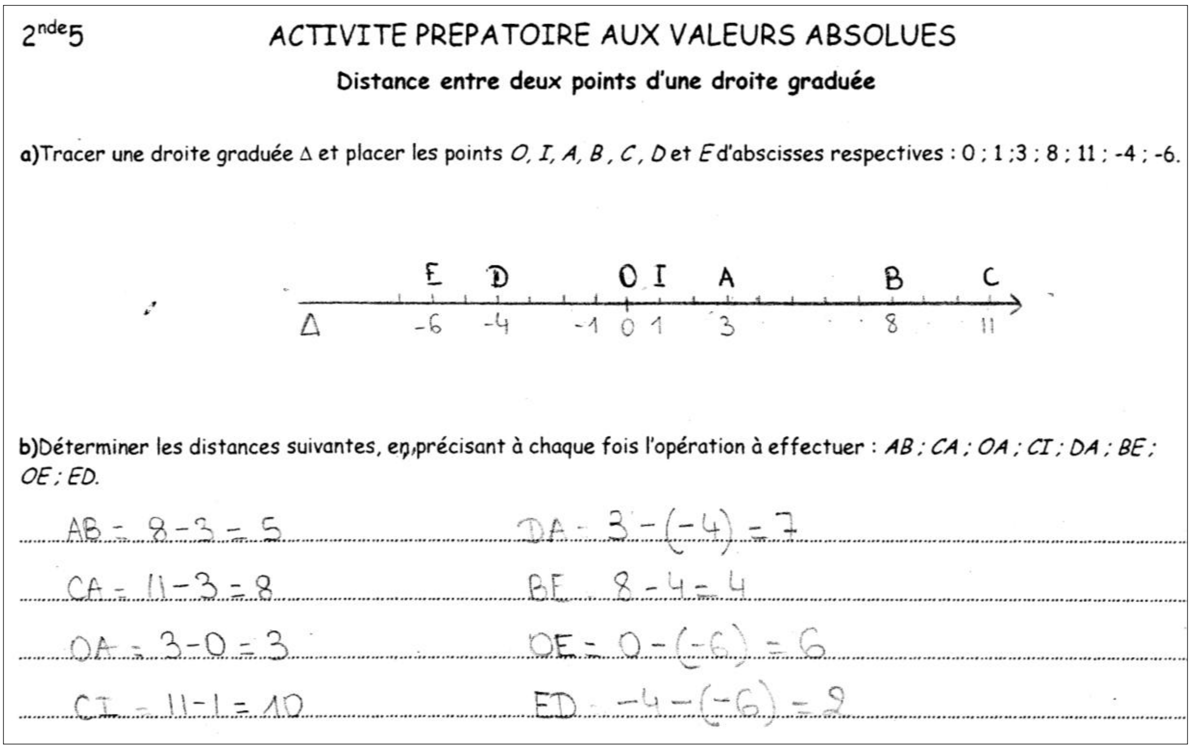
8.4.2.1 Analyse de l'organisation mathématique de l'activité préparatoire

Dans cette partie je vais analyser *a priori* les possibles au niveau de l'organisation mathématique en me basant uniquement sur le texte de la fiche préparatoire (Cf. annexe 11.19) et non pas sur le déroulement effectif pendant la séance observée.

A. Les questions a) et b)

Les deux premières questions de la fiche préparatoire sont reproduites dans la Figure 46, les réponses sont celle d'une autre élève, Mathilde, dont j'avais photocopié le cahier.

La fiche intitulée « Activité préparatoire aux valeurs absolues » avec comme sous-titre « Distance entre deux points d'une droite graduée » commence par ce type de tâches : « placer des points sur une droite graduée en fonction de leurs abscisses », tâches certainement routinières pour les élèves, d'autant plus que toutes les abscisses données sont des nombres entiers relatifs.



$2^{nde}5$

ACTIVITE PREPATOIRE AUX VALEURS ABSOLUES

Distance entre deux points d'une droite graduée

a)Tracer une droite graduée Δ et placer les points *O, I, A, B, C, D* et *E* d'abscisses respectives : 0 ; 1 ;3 ; 8 ; 11 ; -4 ; -6.

b)Déterminer les distances suivantes, en précisant à chaque fois l'opération à effectuer : *AB ; CA ; OA ; CI ; DA ; BE ; OE ; ED.*

AB = 8 − 3 = 5 DA = 3 − (−4) = 7
CA = 11 − 3 = 8 BE 8 − 4 = 4
OA = 3 − 0 = 3 OE = 0 − (−6) = 6
CI = 11 − 1 = 10 ED = −4 − (−6) = 2

Figure 46 : premières questions de l'activité préparatoire aux valeurs absolues

La deuxième question (b) présente encore un type de tâches travaillé en collège depuis la classe de cinquième et inscrit dans le thème *Repérage sur une droite graduée* : « déterminer la distance de deux points d'une droite graduée connaissant les abscisses de ces points ».

J'ai analysé la première rencontre implicite avec la valeur absolue dans l'étude du curriculum officiel (Cf. section 5.6.1.2 p. 73). Je rappelle les instructions du programme de cinquième en lien direct avec la question b) :

> **Compétence exigible**
>
> - déterminer la distance de deux points d'abscisses données.
>
> **Commentaire**
>
> Les activités graphiques conduiront :
>
> - à interpréter l'abscisse d'un point d'une droite graduée en termes de distance et de position par rapport à l'origine ;
>
> - à relier la distance de deux points sur un axe et la soustraction des nombres relatifs.

Les techniques et les praxéologies

Pour répondre à la question b) deux techniques sont possibles, l'une empirique en s'appuyant sur le dessin, l'autre est fondée sur un théorème qui a pu être rencontré en classe de cinquième :

- la technique empirique consiste à compter le nombre d'unités qui sépare les deux points. Comme les abscisses sont des nombres entiers ce dénombrement est aisé ;
- la deuxième technique repose sur le théorème suivant déjà énoncé : « si M et P sont deux points quelconques d'une droite graduée et si ces deux points ont pour abscisses respectives les réels x_M et x_P alors la distance MP est égale à la différence entre la plus grande abscisse et la plus petite. »

Je rappelle que le théorème cité précédemment a été intitulé le *théorème d'isomorphisme* (Cf. p. 157). En classe de cinquième ce théorème a été rencontré au moins comme *connaissance formulée* conformément au curriculum officiel, et il a pu être institutionnalisé. Voici par exemple l'énoncé donné dans le livre de 5^{e} de la collection Triangle[1] :

> Sur une droite graduée, la distance entre deux points A et B s'obtient en calculant la différence entre la plus grande abscisse et la plus petite abscisse.

Dans la question posée par le professeur, il est demandé de préciser « à chaque fois l'opération à effectuer ». Pour les élèves qui utiliseront la première technique – *a priori* la majorité en raison du choix des nombres – cette demande risque d'être perturbante puisqu'ils n'auront pas de calcul à faire. Des réponses comme par exemple : ED = 2 = 6 – 4 sont

[1] Ce manuel paru en 2001 correspond au programme de cinquième des classes suivies par les élèves de Mathieu et de Clotilde, programme paru au BO n°01 hors série du 13/02/97.

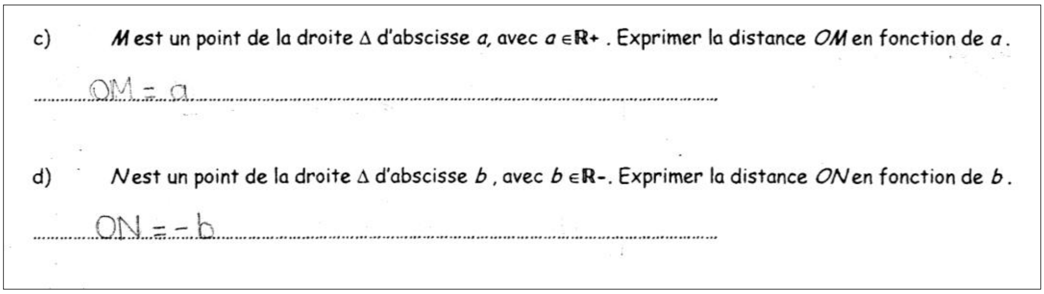
probables en vertu d'une règle du contrat didactique de cette classe qui conduit les élèves à suivre les exigences du professeur. Ce type de calcul ne sera pas facilement identifiable avec la réponse que le professeur attend vraisemblablement : ED = – 4 – (– 6) = – 4 + 6 = 2. Le professeur a prévu de rendre disponible dans le milieu didactique le théorème énoncé précédemment au moins en tant que *connaissance implicite*, et vraisemblablement en tant que *connaissance formulée*. Il est prévisible que cette tentative risque d'échouer pour de nombreux élèves.

Reprise d'une notion du collège : le repérage sur une droite graduée

Le titre de l'activité « Activité préparatoire aux valeurs absolues » affiche clairement que du nouveau est annoncé sous le nom de « valeurs absolues », mais les premiers types de tâches rencontrés représentent une reprise sous la forme d'une révision de connaissances anciennes du collège sans aucun lien avec du nouveau, même la nature des nombres est choisie pour faciliter l'entrée des élèves dans ce moment de première rencontre. Le sous-titre de la fiche « Distance entre deux points d'une droite graduée » souligne bien le rôle essentiel de cette droite graduée qui est en fond de décor. Est-ce que le professeur va rendre explicite ce *tissage* avec ces connaissances du collège ? Est-ce qu'il va par exemple demander aux élèves si ces deux questions évoquent des apprentissages du collège ? Est-ce qu'il va faire une *institutionnalisation après-coup* du *théorème d'isomorphisme* nécessaire pour assurer les liens entre les cadres numérique et géométrique ?

B. Les questions c) et d)

Si les questions a) et b) sont des reprises du collège sans aucune nouveauté, en revanche les questions c) et d) n'auraient pas pu être posées en collège à cause de la forme des énoncés où figurent $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$ (Cf. Figure 47).


c) *M* est un point de la droite Δ d'abscisse *a*, avec $a \in \mathbf{R}+$. Exprimer la distance *OM* en fonction de *a* .

OM = a

d) *N* est un point de la droite Δ d'abscisse *b* , avec $b \in \mathbf{R}-$. Exprimer la distance *ON* en fonction de *b* .

ON = - b

Figure 47 : questions c) et d) de la fiche préparatoire aux valeurs absolues

Par ailleurs un saut conceptuel est visible entre les deux premières questions et les trois suivantes en raison des nombres en jeu qui deviennent indéterminés. Le travail numérique fait alors place à un travail algébrique où la lettre a un rôle de généralisation. En classe de seconde ce passage reste un obstacle qui est d'ailleurs d'origine épistémologique (Bachelard, 1938, Brousseau, 1983). Il renvoie aux professeurs le repérage d'un indice d'un problème de la profession, à savoir l'articulation entre le numérique et l'algébrique, indice qui risque de ne pas être perçu.

Le registre du dessin disparait de la fiche à partir de la question e), cependant le lien des questions e) et f) avec le cadre géométrique est encore explicite puisque M et N sont deux points de la droite Δ. Est-ce que les élèves sauront s'appuyer sur la question précédente pour utiliser les exemples et conjecturer les réponses demandées ? Mais en fait un seul exemple correspond à chacune des questions e) et f), respectivement le calcul des distances OA et OE.

Clotilde a choisi des signes différents (M et N) pour identifier les points d'abscisses positive et négative mais un autre choix aurait été possible :

- M est un point de Δ d'abscisse a :
    - Si $a \geq 0$ exprimer la distance OM en fonction de a ;
    - Si $a \leq 0$ exprimer la distance OM en fonction de a.

Cette variante pour poser les questions e) et f) aurait pour intérêt de ne pas dissocier les positifs et les négatifs mais au contraire d'unifier le concept de nombre. Un des obstacles identifié par Duroux (1983) inhérent au concept de valeur absolue est précisément une conception-élève qui est de percevoir des nombres de natures différentes : d'une part les positifs et d'autre part les négatifs. Le choix de séparation de Clotilde peut être alors considéré comme un obstacle didactique.

C. La question e)

Dans la question e) le registre du dessin est convoqué pour visualiser les positions relatives du point P (d'abscisse *p*) et du point Q (d'abscisse *q*) sur l'axe Δ (seule l'orientation est codée) en lien avec l'ordre des nombres *p* et *q* (Cf. Figure 48).

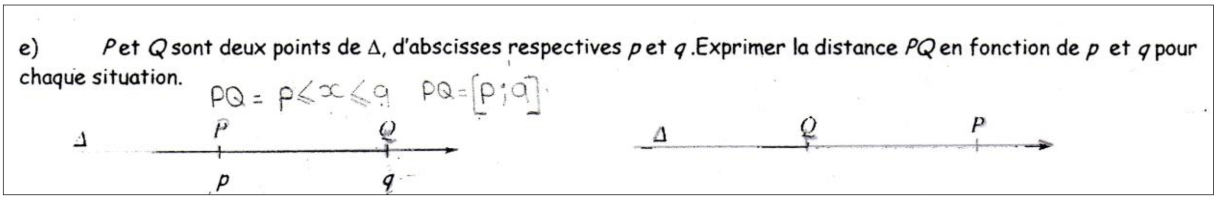


Figure 48 : question e) de la fiche préparatoire aux valeurs absolues

Plusieurs implicites sont à ajouter pour comprendre la présence des deux dessins, ce qui les différencie et pour connaître les données :

- avec celui de gauche la donnée suivante est à ajouter : $p \leq q$;
- avec celui de droite la donnée suivante est à ajouter : $q \leq p$ (bien que les inégalités au sens large ne soient pas décodées aisément avec ces dessins).

Sans ces données, les règles de codage dans le registre du dessin permettent seulement d'exprimer que les points P et Q d'abscisses respectives *p* et *q* appartiennent à la droite Δ (Bellard & al. , 1998). En prenant en compte ces implicites une technique se dégage :

- si *p* est plus petit que *q*, ce qui revient à dire si P « est avant » Q sur la droite graduée, alors la distance PQ est égale à *q* - *p* ;
- si *q* est plus petit que *p*, ce qui revient à dire si Q « est avant » P sur la droite graduée, alors la distance PQ est égale à *p* – *q*.

Le registre graphique très prégnant donne davantage d'importance aux positions relatives des points dans le cadre géométrique plutôt qu'à l'ordre des nombres dans le cadre numérique. Cette question correspond à la généralisation des cas étudiés auparavant. Elle pourrait se conclure par l'institutionnalisation du *théorème de l'isomorphisme* travaillé en acte dans les questions b), c) et d). Mais la forme de la question n'incite pas à reconnaître le statut du théorème sous-jacent, ni même son énoncé général. Une *institutionnalisation après coup* pourrait pourtant se réaliser en transformant la réponse de cet exercice en un énoncé à faire figurer dans les éléments théoriques de l'édifice mathématique constitué en seconde. Ce théorème qui articule les domaines numérique et géométrique est important pour travailler l'isomorphisme entre les réels et la droite. Il est même essentiel dans ce contexte du travail relatif à la valeur absolue conformément au curriculum officiel.

Cette question pourrait ainsi permettre d'introduire une forme générale pour déterminer la distance de deux points qui correspond à ce *théorème de l'isomorphisme* sous une forme un peu différente de celle énoncée en page 157 : « P et Q étant deux points quelconques d'une droite graduée d'abscisses respectives les réels p et q :

- si $p \leq q$ alors $PQ = q - p$
- si $q \leq p$ alors $PQ = p - q$ »

D. La question f)

La fiche se termine avec un travail qui est dans le cadre numérique (Cf. Figure 49).

f) Compléter le tableau ci-dessous. Que remarque-t-on concernant la distance entre deux nombres ?

p	q	$p-q$	$q-p$	distance de p à q
5	3	$5-3=2$	$3-5=-2$	2
15	11	$15-11=4$	$11-15=-4$	4
-4	2	$-4-2=-6$	$2-(-4)=6$	6
-7	-3	$-7-(-3)=-4$	$-3-(-7)=4$	4
-8	$\sqrt{63}$	$-8-3\sqrt{7}$	$3\sqrt{7}+8$	$3\sqrt{7}+8$
3,14	π	$3{,}14-\pi$	$\pi-3{,}14$	$\pi-3{,}14$

Figure 49 : question f) de la fiche préparatoire aux valeurs absolues

Plusieurs ruptures apparaissent avec les questions précédentes :

- les nombres p et q ne sont plus considérés comme étant les abscisses de points de la droite graduée ;
- le cadre géométrique n'est plus présent de façon explicite ;
- la distance de deux nombres apparaît tout d'un coup sans aucune définition ;
- le recours aux connaissances anciennes du collège n'est plus possible.

Comment dans ces conditions remplir la dernière colonne ? Ce sont des raisons mathématiquement contingentes qui peuvent permettre aux élèves de produire une réponse juste :

- un lien sémantique avec le travail précédent est assuré par la présence des mêmes nombres p et q ;
- cette continuité apparaît comme un signal : il faut utiliser ce qui a été élaboré précédemment et considérer p et q comme les abscisses de points en vertu du contrat didactique ;
- en l'absence de définition pour la distance de deux nombres, un autre lien de type sémantique peut être réalisé pour comprendre que la distance de deux nombres dans l'espace numérique correspond à la distance de deux points de la droite graduée dans l'espace géométrique.

Mais quelle technique peut s'élaborer dans cette question f) ? C'est une nouvelle technique différente de celle qui est apparue dans les questions précédentes : au lieu de comparer p et q pour calculer la différence du plus grand et du plus petit, il faut calculer les deux différences $p - q$ et $q - p$, l'une est négative et l'autre positive, celle qui est positive est la distance des deux nombres.

Pour que la cohérence de cette fiche préparatoire soit assurée par des raisons mathématiquement nécessaires il aurait fallu expliciter tout ce qui est resté flou ou dans l'ombre, et en particulier les liens entre les cadres numérique et géométrique de la question f) de manière à pouvoir utiliser le *théorème de l'isomorphisme*. Ce théorème apparaîtrait alors véritablement comme un élément technologique essentiel pour justifier les techniques permettant le calcul de la distance de deux nombres.

La fiche s'achève avec cette question : « Que remarque-t-on concernant la distance entre deux nombres ? ». Dans la logique de la fiche les réponses possibles sont :

- la distance de deux nombres est comme la distance de deux points, c'est un nombre positif ;
- pour calculer la distance de deux nombres on calcule la différence entre le plus grand et le plus petit nombre ;
- la distance de deux nombres p et q c'est le nombre positif des deux nombres $p - q$ et $q - p$.

E. La nature des nombres choisis dans la fiche préparatoire

Voici dans le tableau suivant un récapitulatif présentant la nature des nombres ainsi que leur statut en fonction de chacune des questions.

		Question a	Question b	Question c	Question d	Question e	Question f
	Statut des nombres	Valeurs numériques	Valeurs numériques	Indéterminé	Indéterminé	Indéterminé	Valeurs numériques
Nature des nombres[1]	$\mathbb{N}$	☒	☒				☒
	$\mathbb{Z}$	☒	☒				☒
	$\mathbb{D}$						☒
	$\mathbb{Q}$						
	$\mathbb{R}$			☒	☒		☒
	Pas précisée					☒	

Tableau 33 : nature des nombres de la fiche préparatoire aux valeurs absolues chez Clotilde

Les nombres choisis dans les questions a) et b) sont des entiers, en revanche dans les questions c) et d) ce sont des réels respectivement positifs et négatifs. Est-ce que les élèves vont véritablement considérer les nombres indéterminés a et b comme pouvant être respectivement n'importe quel réel positif et n'importe quel réel négatif ? J'avais déjà mentionné que le choix d'abscisses entières allait faciliter une technique empirique de comptage, cela risque également de restreindre la perception des nombres a et b aux entiers. La même remarque est valable pour la question e) avec une différence importante cependant, la nature des nombres n'est même pas mentionnée.

Les dénominations des ensembles $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$, qui avaient été rencontrées pour la première fois dans le premier chapitre, sont reprises dans la fiche pour les questions c) et d). Ainsi je remarque une RDN de connaissances dont la première rencontre a eu lieu en seconde. Mais dans la question e) la nature des nombres p et q reste dans l'implicite alors qu'il apparaît nécessaire de la préciser. Les rationnels, ainsi que le registre des fractions, sont absents. En revanche deux irrationnels figurent dans la dernière question.

Analyse des spécimens de la question f) pour calculer la distance de deux réels

Six couples de réels (p ; q) sont donnés dans le tableau. Les quatre premiers couples ne comprennent que des nombres entiers relatifs et le calcul des nombres $p - q$ et $q - p$ ne devrait pas être problématique même si des erreurs risquent d'apparaître avec les différences $-7-(-3)$ et $-3-(-7)$. En revanche les deux derniers couples comprennent les irrationnels π et $\sqrt{63}$ et il est possible d'anticiper des difficultés puisque les écritures canoniques des différences $p-q$ et $q-p$ sont plus complexes. Pour le couple (-8 ; $\sqrt{63}$), la différence $-8-\sqrt{63}$ est un nombre négatif, alors que la différence $\sqrt{63}-(-8)$ est égale au nombre positif $\sqrt{63}+8$; la distance cherchée est donc égale à $\sqrt{63}+8$. Le couple (8 ; $\sqrt{63}$)

[1] La nature des nombres est prise au sens du plus petit ensemble auquel appartient le nombre

aurait été plus pertinent, $\sqrt{63}$ étant inférieur à $\sqrt{64}$, c'est-à-dire 8, le plus grand nombre est alors 8 et la distance aurait été la différence $8 - \sqrt{63}$. Pour le couple (3,14 ; π), le nombre π étant égal à 3,141… il est donc plus grand que 3,14 et en conséquence la distance des deux nombres est égale à π – 3,14. Les élèves du collège confondent souvent π avec 3,14 et cette erreur persiste parfois jusqu'en classe de 3^{e}, le travail relatif à ce spécimen est une occasion pour travailler cette erreur.

Le choix des nombres du tableau montre de façon ostensive que *p* et *q* peuvent être entiers comme irrationnels. Le jeu sur la nature des nombres a pour but d'ouvrir la voie vers la généralisation des techniques en cours d'élaboration à partir d'exemples. Pour mieux atteindre cet objectif des couples comportant le nombre zéro auraient été intéressants à ajouter dans le tableau pour préparer la conception de la valeur absolue d'un nombre comme étant sa distance à zéro.

F. Synthèse a priori possible au terme du travail de la fiche préparatoire aux valeurs absolues

L'étude de cette fiche préparatoire correspond au niveau de l'organisation didactique au moment de première rencontre avec la notion de valeur absolue, c'est également un moment qui permet d'amorcer l'élaboration de techniques relatives au travail de cet objet.

Je me suis posé la question de savoir ce qui pouvait être institutionnalisé au terme de ce moment de première rencontre avec l'objet valeur absolue, bien qu'il soit resté dans l'ombre malgré son annonce dans le titre de la fiche. Cette question est en adéquation avec les principes méthodologiques suivis dans cette recherche. La proposition de synthèse qui suit fait encore partie de l'analyse *a priori* réalisée à partir de la fiche préparatoire. Elle pourra être mise en parallèle avec les choix effectifs de Clotilde concernant les connaissances à retenir une fois que les éléments de *l'échafaudage* (Cf. p. 26) auront été retirés.

Cette synthèse reprend les connaissances mobilisées dans l'étude de la fiche qui n'apparaissent qu'au *niveau U* (*usage implicite* de la notion) au sens de Brousseau (2002), elle reprend également la logique de la fiche dans laquelle la distance de deux points est première. Elle a pour objectif d'énumérer les apprentissages possibles ainsi que les énoncés de savoir qui pourraient être institutionnalisés comme éléments nécessaires pour assurer la complétude des praxéologies mathématiques enseignées. Je fais l'hypothèse dans cette analyse *a priori* que le professeur aurait pu la prévoir à la suite de ce moment de première rencontre.

Cette synthèse comporte une reprise du ***théorème de l'isomorphisme*** dans sa forme générale ainsi que **la définition de la distance de deux réels** : « la distance de deux réels *p* et *q* est égale à la distance des points P et Q qui ont pour abscisses respectives *p* et *q* par rapport à un repère normé d'une droite graduée. Cette distance des réels *p* et *q* se note d (*p* ; *q*) ». Elle comporte également **un type de tâches noté T_{nd}** dans le cadre numérique : « déterminer la distance de deux réels ». Deux praxéologies ponctuelles en lien avec T_{nd} peuvent apparaître à partir des activités de la fiche.

- **Une praxéologie *géométrique* :**
  - technique τ_1 : placer les points P et Q sur la droite graduée
    - si P « est avant » Q alors la distance de *p* et de *q* est égale à la différence des nombres *q* et *p* donc :

      $$d(p\ ;\ q) = q - p$$

    - si Q « est avant » P alors la distance de *p* et de *q* est égale à la différence des nombres *p* et *q* donc :

      $$d(p\ ;\ q) = p - q$$

  - technologie θ_1 :
    - la distance des réels *p* et *q* est égale à la distance des points P et Q ;
    - et la distance PQ est égale à la différence entre la plus grande abscisse et la plus petite ;
    - le *théorème de l'isomorphisme*.
  - théorie Θ_1 : isomorphisme entre l'ensemble des réels et la droite affine et euclidienne.
- **Une praxéologie *numérique* :**
  - technique τ_2 (dite *technique de la différence positive*) : calculer les différences $p - q$ et $q - p$, celui des deux nombres qui est positif est la distance des réels *p* et *q* ;
  - technique τ'_2 (dite *technique de l'échange*) :
    - calculer la différence des nombres $p - q$
      - si ce nombre est positif c'est la distance des réels *p* et *q* ;
      - si ce nombre est négatif échanger les places de *p* et de *q* et alors la distance des réels est la différence $q - p$
  - technique τ''_2 (dite *technique de l'opposé*) :
    - calculer la différence $p - q$
      - si ce nombre est positif c'est la distance des réels *p* et *q* ;
      - si ce nombre est négatif la distance des réels *p* et *q* est l'opposé de $p - q$ qui est noté opp $(p - q)$.
  - Technique τ'''_2 (dite *technique de la comparaison*) :
    - Comparer p et q, $d(p;q) = \max(p;q) - \min(p;q)$
  - technologie θ_2 :
    - si $p - q \geq 0$ alors d $(p\ ;\ q) = p - q$
    - si $p - q \leq 0$ alors d $(p\ ;\ q)$ est égale à l'opposé de $p - q$
  - théorie Θ_2 :

- par définition la distance de deux nombres p et q est le plus grand des deux nombres $p - q$ et $q - p$;
- structure de $(\mathbb{R}, +)$.

Cette synthèse comporte enfin la rencontre avec le nouvel objet valeur absolue sous la forme de **la définition de la valeur absolue de la différence de deux nombres** : « la distance de deux nombres est également la valeur absolue de leur différence. » Les praxéologies précédentes relatives au type de tâches T_{nd} (déterminer la distance de deux réels), peuvent être alors transposées pour le nouveau type de tâches T'_{nd} : « déterminer la valeur absolue de la différence de deux réels ».

8.4.2.2 Analyse a priori de l'organisation mathématique de la fiche de cours

Comme je l'ai fait précédemment pour l'analyse *a priori* de la fiche préparatoire, je vais maintenant réaliser l'analyse *a priori* des possibles au niveau de l'organisation mathématique en me basant uniquement sur le texte de la fiche de cours (Cf. annexe 11.20) donnée dans la dernière partie de la séance du 22 octobre 2007. Je vais décrire dans un premier temps l'architecture globale de cette fiche de cours pour la comparer à la synthèse précédente qui ne prenait en compte que la fiche préparatoire. Dans un deuxième temps j'analyserai plus précisément le contenu de cette fiche pour anticiper les possibles du déroulement effectif de ce moment de la séance. Mais auparavant je vais reprendre des idées déjà développées et qui vont guider mon analyse.

A. Deux principes suivis dans cette analyse a priori

La fiche préparatoire était le préambule de cette deuxième fiche (Cf. annexe 11.20) que les élèves ont insérée dans leur cahier de cours et qu'ils ont complétée en partie. La phase de travail pendant l'étude de cette deuxième fiche est essentiellement un moment d'institutionnalisation mais aussi un moment d'élaboration de la technique. L'objectif essentiel est d'énoncer les éléments théoriques sous leur forme de savoirs de référence alors qu'ils viennent d'être travaillés sous la forme de connaissances contextualisées. Dans cette analyse *a priori* je vais examiner la cohérence épistémologique de l'ensemble des savoirs enseignés en me basant sur deux principes. En premier lieu celui énoncé par Brousseau (2002) que j'ai déjà cité (Cf. section 2.5.2 p. 25) et qui souligne comment une connaissance peut prendre le statut de savoir :

> Pour intégrer cette connaissance comme savoir, l'élève doit la placer par rapport à son système propre de savoir (qui est peut être conforme à la culture) et par rapport aux savoirs institutionnalisés. Il lui faut donc la traduction d'une filiation ou d'une genèse légitime de ce savoir. Il doit donc identifier des " raisons" (par exemple une démonstration…) pour accepter cette connaissance qui va se substituer aux causes.

Dans l'épisode d'enseignement que j'analyse les situations didactiques sont pauvres, dans le sens où les connaissances sont désignées par l'enseignant et où elles ne sont pas des outils de résolution de problèmes. Les causes sont pratiquement réduites aux exigences du professeur qui dirige l'étude des objets énoncés par le programme. Cependant même dans ce contexte des raisons mathématiques peuvent être données pour que l'initiation des élèves aux règles du jeu mathématique se poursuive. C'est d'ailleurs l'un des deux principes annoncés, qui est de continuer à initier les élèves à la pratique de la démonstration dans tous les domaines des mathématiques et non pas uniquement en géométrie. J'ai déjà développé cette idée dans la section 5.3.2 (p. 58) en me référant au curriculum officiel.

Je peux exprimer ces deux principes de la manière suivante :

- identifier et analyser les processus de transformations des connaissances qui doivent permettre aux élèves de repérer les éléments théoriques à retenir comme savoirs de référence ;
- analyser comment les savoirs de référence s'articulent par des liens de nécessité dans l'édifice des acquis antérieurs des élèves pour former une construction théorique épistémologiquement solide validée par la démonstration.

B. Analyse de l'architecture de la fiche

Voici les éléments constitutifs de l'architecture de cette fiche :

- moment d'élaboration du bloc technologico-théorique : un même énoncé pour deux définitions, la définition de la distance de deux réels qui est aussi la valeur absolue de leur différence ;
- moment d'élaboration de la technique relative au type de tâches noté T_{nd} (déterminer la distance de deux réels) pour différents spécimens comprenant tous les types de nombres (entiers, décimaux, rationnels, irrationnels) ;
- moment d'élaboration technologique : des propriétés admises concernant la valeur absolue d'un réel x ;
- première rencontre avec des équations du type $|x - a| = b$ et moment d'élaboration de la technique de résolution[1].

Deux objets nouveaux sont présentés en même temps : la distance de deux nombres et la valeur absolue de leur différence. Une question se pose : est-ce que cela ne va pas développer une conception de la valeur absolue comme étant restreinte à la valeur absolue d'une différence ? C'est une première conception, est-ce que les élèves auront les moyens de la faire évoluer ? Est-ce pris en charge par le professeur ?

Je remarque que le cadre géométrique est absent de cette fiche et que toutes les définitions et propriétés données sont inscrites dans le cadre numérique. Le cadre géométrique apparaît uniquement comme illustration, mais il n'est pas mathématiquement relié aux énoncés théoriques. Je remarque notamment que le *théorème de l'isomorphisme* est absent alors qu'il a été constamment convoqué dans le travail proposé précédemment en lien avec la fiche préparatoire (même si c'était de façon implicite).

[1] Je n'analyserai pas cette partie de la fiche qui ne sera pas étudiée ni le 22 octobre ni le 24 octobre.

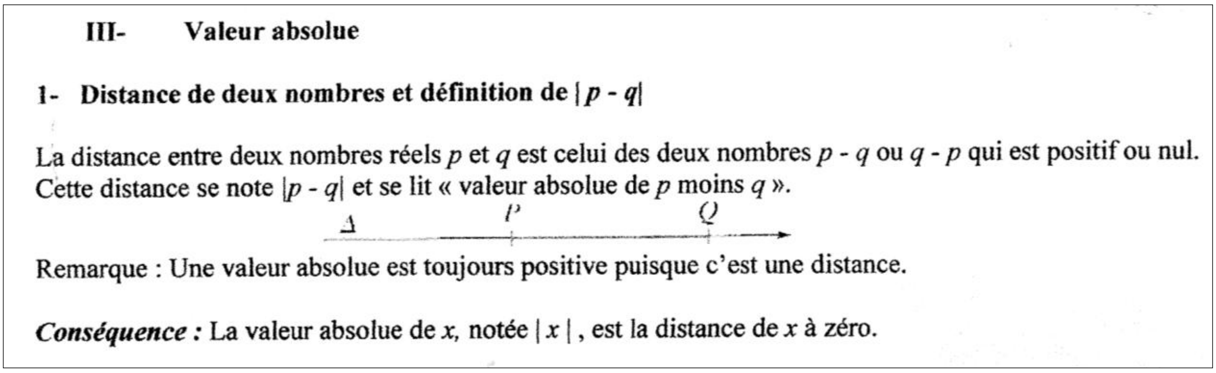
Dans le choix de cette architecture, la définition de la valeur absolue de la différence de deux nombres est première ; la caractérisation de la valeur absolue d'un nombre comme étant ce nombre s'il est positif, et l'opposé de ce nombre s'il est négatif, est alors une propriété conséquence de la définition initiale.

Un autre choix d'architecture est possible en inversant l'ordre logique entre les deux énoncés précédents, c'est le choix réalisé par Mathieu (Cf. Tableau 28 p. 138). La question est de savoir si un choix est plus pertinent que l'autre, je tenterai de répondre à cette question plus tard.

C. Analyse de la fiche de cours

Analyse de la définition de la valeur absolue d'une différence de deux nombres

La fiche de cours commence par la définition de la valeur absolue de la différence de deux nombres en lien avec la distance de deux nombres (Cf. figure ci-dessous).



III- Valeur absolue

1- Distance de deux nombres et définition de $|p - q|$

La distance entre deux nombres réels p et q est celui des deux nombres $p - q$ ou $q - p$ qui est positif ou nul.
Cette distance se note $|p - q|$ et se lit « valeur absolue de p moins q ».

Remarque : Une valeur absolue est toujours positive puisque c'est une distance.

Conséquence : La valeur absolue de x, notée $|x|$, est la distance de x à zéro.

Figure 50 : extrait de la première fiche de cours donnée par Clotilde

La conformité est assurée avec le curriculum officiel qui insiste sur ce lien de la notion de valeur absolue avec la distance de deux nombres (Cf. 5.6.1.1 p. 72). Je rappelle cette indication du programme : « La valeur absolue d'un nombre permet de parler facilement de la distance entre deux nombres », elle donne ainsi une fonction à la valeur absolue. J'ai déjà analysé l'énoncé de la définition donnée par Clotilde en le comparant à celui donné par Mathieu, ce développement est dans la section 8.2.2 (p. 138) et je vais reprendre certains éléments.

L'accent est mis dans ce cours sur la distance de deux nombres qui est reliée au signe de leur différence. Il est ainsi nécessaire dans le travail relatif à la valeur absolue pour le fonder sur cet élément théorique de repérer une différence dont on cherche la valeur absolue. Les changements de points de vue sont alors les suivants dans la recherche de la valeur absolue d'un nombre v conformément à la définition précédente :

- ce nombre v est considéré comme la **différence** de deux autres nombres a et b ;
- la valeur absolue de cette différence est vue comme la **distance de ces deux nombres** a et b ;
- dans le cadre géométrique ces deux nombres a et b sont associés à deux points K et L d'une droite graduée dont ils sont respectivement les **abscisses** ;

- la distance des nombres a et b est égale à la **distance des points** K et L ;
- ou encore dans le cadre numérique la distance des nombres a et b est **celui des deux nombres *a* – *b* ou *b* – *a* qui est positif ou nul**.

J'ai introduit également le point de vue qui est de considérer le plus grand des deux nombres $a - b \; ou \; b - a$ au lieu de celui des deux nombres $a - b$ ou $b - a$ qui est positif ou nul.

Je peux résumer ces changements de points de vue de la façon suivante dans le registre des écritures symboliques et en utilisant les notations précédentes :

$$|v| = |a - b| = d(a\,;\, b) = KL = \sup(a - b\,;\, b - a)$$

La remarque insérée à la suite de la définition est la suivante : « une valeur absolue est toujours positive puisque c'est une distance. » Ce raisonnement est basé sur une analogie avec la distance de deux points connue depuis le collège et reprise dans la fiche préparatoire. Mais en mathématiques ce type de raisonnement n'est pas valide. Il aurait fallu justifier que la valeur absolue de $p - q$ est toujours positive puisque par définition c'est « celui des deux nombres $p - q$ ou $q - p$ qui est positif ou nul. »

La notion implicite de différence

Un élément est essentiel dans cette définition, c'est le fait de considérer *une différence* dont on cherche la valeur absolue. Or cet élément n'apparaît qu'à travers son écriture symbolique « $p - q$ » (ou « $q - p$ ») alors que cette écriture peut traduire également la somme des termes p et $(-q)$. La présence du terme "différence'' en langage naturel dans la définition aurait l'avantage de faciliter sa compréhension et de la rendre plus fonctionnelle dans le cas où des transformations d'écritures sont nécessaires pour faire apparaître une différence (deux exemples sont détaillés plus loin avec 7,58+0,5 et $5 + \sqrt{3}$).

La relation entre les nombres $p - q$ et $q - p$

Dans la définition donnée dans cette fiche une autre vision des nombres $p - q$ et $q - p$ est absente, elle est pourtant nécessaire comme élément du bloc technologico-théorique pour le travail avec les valeurs absolues ou plus largement encore pour travailler le numérique. C'est l'appréhension de ces deux nombres comme étant opposés l'un de l'autre, ce qui peut s'écrire :

$$\text{Opp}\,(p - q) = -\,(p - q) = -\,p + q = q - p$$

L'opérateur « prendre l'opposé d'un nombre » est véritablement signifié par le symbole Opp qui est ainsi bien différencié du signe prédicatoire « moins » dont le sens n'est pas toujours associé à celui d'opposé.

Conclusion intermédiaire

Je viens d'expliciter comment la multiplicité des points de vue, en faisant intervenir des notions, des symboles et des cadres différents, rend le travail relatif à la valeur absolue complexe. Une grande *flexibilité* dans la conception de l'objet valeur absolue est nécessaire pour choisir la meilleure vision en fonction d'un contexte donné.

Je vais poursuivre l'analyse *a priori* de cette séance en ne discutant pas le choix de la définition initiale de la valeur absolue de la différence de deux nombres. Au contraire en prenant cette définition comme élément pilier de l'édifice mathématique conçu par Clotilde, je vais analyser la cohérence mathématique globale de l'ensemble de cette structure. Le professeur en position P+1 (Margolinas, 2004) a fait le projet d'articuler précisément les deux fiches (fiche préparatoire et fiche de cours) pour que le milieu de la situation didactique soit propice à développer les connaissances relatives à la valeur absolue. C'est cette construction que j'analyse avec ses possibles et ses contraintes en décrivant *a priori* une organisation mathématique qui pourrait être issue de ce projet de Clotilde.

Analyse des calculs numériques faisant intervenir la valeur absolue : première série

Je reprends les notations du Tableau 29 de la page 140 pour décrire les exemples qui suivent la définition de la valeur absolue de la différence de deux nombres donnée dans la fiche du cours. Une première série de calculs correspond au type de tâches Tn2 : « Calculer $|p - q|$, p et q réels donnés », elle comporte six spécimens (Cf. figure ci-dessous). Quatre d'entre eux sont des reprises de la colonne p – q du tableau de la fiche préparatoire (question f).

Exemples : Calculer :
$|5-3|=$; $|15-11|=$; $|-4-2|=$; $|7-(-3)|=$; $|-8-8|=$; $|3{,}14-\pi|=$

Figure 51 : première série de calculs de la fiche de cours chez Clotilde

Plusieurs techniques sont envisageables en fonction du milieu élaboré dans la classe, pour les identifier je reprends les notations utilisées page 180 dans la synthèse réalisée à l'issue de l'analyse de la fiche préparatoire :

- utiliser la réponse de la colonne $p-q$ du tableau de la fiche préparatoire lorsque c'est possible et prendre le résultat de la dernière colonne de cette fiche (c'est possible pour quatre spécimens sur les six). Cette technique correspond à la technique de *la différence positive* ;
- technique numérique τ_2 : calculer $p-q$ et $q-p$ et la réponse est celui des deux nombres qui est positif ;
- technique géométrique τ_1 : représenter les points sur une droite graduée qui ont pour abscisses respectives ces deux nombres et chercher la distance des deux points comme cela a été fait dans la fiche préparatoire, c'est la différence entre la plus grande abscisse et la plus petite.

Pour un spécimen comme $|7-(-3)|$, la technique numérique τ_2 induite dans la fiche de cours par la définition de la valeur absolue d'une différence, conduit à calculer $7-(-3)$ et $(-3-7)$ qui sont respectivement égaux à 10 et à –10, puis à prendre le nombre positif 10 comme réponse. Cependant une autre technique numérique aurait également été possible, c'est la suivante : $|7-(-3)| = |10| = 10$

Cette dernière technique notée τ_0 , certainement la plus simple pour ce spécimen, permet davantage de faire une reprise des connaissances rencontrées en cinquième, elle offre également une meilleure représentation mentale des nombres manipulés, alors que la technique précédente est plus « algébrique » dans la mesure où son déroulement est réalisé davantage en *aveugle*. J'appelle cette technique τ_0, la *technique du calcul direct*.

Cette technique numérique consiste à calculer le nombre à l'intérieur de la valeur absolue sous une forme canonique et à étudier ensuite le signe de ce nombre :

- s'il est positif sa valeur absolue est lui-même ;
- s'il est négatif sa valeur absolue est son opposé.

Elle est à relier aux questions c) et d) de la fiche préparatoire. Les spécimens donnés, dans cette première série de calculs, peuvent être l'occasion d'élaborer cette technique numérique τ_0 et de conjecturer la propriété correspondante de la valeur absolue, propriété qui est institutionnalisée dans la fiche de cours après l'étude des deux séries de spécimens. Cette technique τ_0 donne également l'occasion de faire une *reprise* des différentes écritures des nombres en fonction de leur nature et de rechercher l'écriture la plus pertinente pour répondre à la question posée.

D'autres techniques sont possibles mais moins cohérentes avec les connaissances disponibles dans le milieu didactique :

- une deuxième technique numérique sans aucune référence avec le cadre géométrique résulte de la transformation de la recherche de $|p-q|$ en la distance des nombres p et q qui est égale à la différence entre le plus grand et le plus petit des deux nombres. C'est la technique repérée sous la notation τ'''_2 ;

- une technique géométrique consiste à transformer le nombre à l'intérieur de la valeur absolue sous une forme canonique, puis de représenter le point de la droite graduée qui a pour abscisse ce nombre, la réponse recherchée est alors la distance de ce point à l'origine du repère.

Analyse des calculs numériques faisant intervenir la valeur absolue : deuxième série

Une deuxième série d'exemples est constituée par trois spécimens du type de tâches T_{n3} : « Exprimer sans valeur absolue une expression numérique comportant plusieurs valeurs absolues » (Cf. Tableau 29 p. 140). Voici ces spécimens A, B et C tels qu'ils sont présentés dans la fiche du cours :

- **Calculer, en donnant leur valeur exacte les nombres A, B et C:**

$A = |2,8 - 0,4| + |7,58 + 0,5| + |1,2 - 7,08|$

$B = \left|\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right| - \left|\frac{2}{3} - 1\right| + \left|\frac{4}{3} - 1\right|$

$C = \left|\sqrt{3} - 2\right| + \left|3 - 2\sqrt{3}\right| - \left|5 + \sqrt{3}\right|$

Figure 52 : cours de Clotilde sur la valeur absolue

Les expressions numériques à l'intérieur de la valeur absolue sont sous la forme $p - q$. Dans deux cas le nombre q risque de poser des problèmes aux élèves s'ils veulent utiliser le point de vue privilégié dans le contexte de cette séance : la reconnaissance d'une différence dont on cherche la valeur absolue. Il s'agit des nombres 7,58+0,5 et $5+\sqrt{3}$ qui doivent être transformés en $7{,}58 - (-0{,}5)$ et en $5 - (-\sqrt{3})$ ce qui nécessite de considérer le nombre *q* comme un réel quelconque positif ou négatif et non pas comme un réel uniquement positif.

La technique τ_0, *la technique du calcul direct,* peut être travaillée avec ces trois spécimens, elle a été détaillée précédemment (Cf. p. 186).

J'explicite les raisons pour lesquelles j'appelle cette technique τ_0 la *technique du calcul direct* et pourquoi je la considère comme étant dans certains contextes la plus simple. Dans le cas de nombres entiers, décimaux ou rationnels, l'écriture canonique du nombre s'exprime sans opérateurs, et le signe du nombre est évident. Dans le cas de nombres irrationnels qui s'expriment avec au moins un opérateur, il n'est pas nécessaire d'interpréter le nombre comme une différence, ce qui facilite le travail de la technique. Il suffit alors de rechercher le signe du nombre, ce qui n'est pas toujours évident, cette technique peut donc également faire rencontrer des difficultés, mais des difficultés similaires se rencontreraient avec les autres techniques.

Je reviens à l'étude des spécimens de la deuxième série et à l'élaboration de la *technique du calcul direct*. Pour les deux premiers spécimens les nombres à l'intérieur des valeurs absolues ont une écriture canonique possible sous la forme d'une écriture décimale pour le premier et sous la forme d'une écriture fractionnaire pour le second. Ces écritures permettent de trouver aisément la valeur absolue.

Pour le troisième spécimen les nombres sont déjà écrits sous une forme canonique. Il s'agit des nombres $\sqrt{3} - 2$; $3 - 2\sqrt{3}$ et $5 + \sqrt{3}$. La détermination de leur signe est plus complexe. Pour le troisième la réponse est triviale, la somme de deux positifs est un positif. Pour le premier on sait que deux nombres positifs sont dans le même ordre que leurs racines carrées :

$3<4 \Leftrightarrow \sqrt{3} < \sqrt{4} \Leftrightarrow \sqrt{3} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{3} - 2 < 0$

Ou bien on sait que $\sqrt{3} = 1{,}7\ldots$ alors $\sqrt{3} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{3} - 2 < 0$

Alors $|\sqrt{3} - 2|=\text{opp}(\sqrt{3} - 2) = 2 - \sqrt{3}$ selon la *technique de l'opposé* (ou bien $|\sqrt{3} - 2|=2 - \sqrt{3}$ selon *la technique de l'échange*)

Le même type de travail est possible avec $3 - 2\sqrt{3}$:

$2\sqrt{3} = \sqrt{12}$ et $9 < 12 \Rightarrow \sqrt{9} < \sqrt{12} \Leftrightarrow 3 < \sqrt{12} \Leftrightarrow 3 - \sqrt{12} < 0 \Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{3} < 0$

Alors $|3 - 2\sqrt{3}|=\text{opp}\ (3 - 2\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 3$ selon la *technique de l'opposé* (ou bien $|3 - 2\sqrt{3}|=2\sqrt{3} - 3$ selon *la technique de l'échange*).

La *technique du calcul direct* n'est pas directe pour les deux derniers spécimens ! Mais elle offre l'avantage de ne pas nécessiter un changement de point de vue sur le nombre dont on cherche la valeur absolue, pour pouvoir le considérer comme une différence.

Dans cette deuxième série d'exemples les nombres à l'intérieur des valeurs absolues ont pu être choisis par Clotilde selon les caractéristiques suivantes :

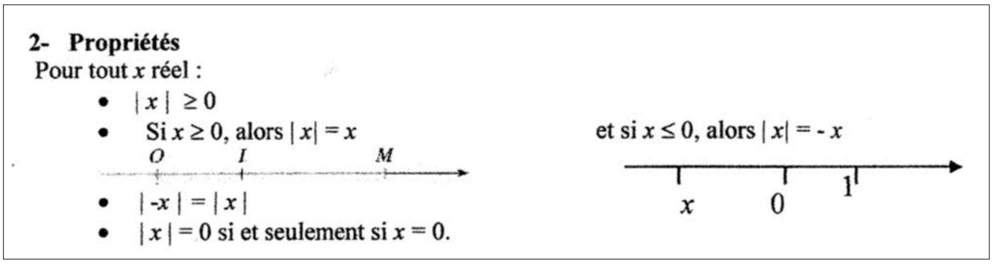
- pour A les nombres sont décimaux non entiers ;
- pour B ils sont rationnels idécimaux ;
- pour C ils sont irrationnels et écrits avec des radicaux.

La nature des nombres est une variable didactique pour laquelle on peut vérifier le changement dans la technique relative à T_{n3}. Le choix des nombres est dans le topos du professeur pour amener les élèves à se poser la question du signe d'un nombre dans le cas où cette question n'est pas triviale. Les irrationnels sous la forme $+b\sqrt{c}$, avec a et b qui sont des entiers relatifs (ou des rationnels) et c qui est un entier qui n'est pas un carré parfait, sont de bons candidats pour servir cette recherche du signe du nombre. Bronner (1997) les appelle des *nombres de service* qu'il oppose à des *nombres produits*[1].

Valeur absolue d'un nombre et reprise de connaissances du collège

La valeur absolue d'un nombre réel x apparaît dans la première partie du cours comme conséquence de la définition de la valeur absolue de la différence de deux nombres. C'est aussi la distance de deux nombres, et c'est « la distance de x à zéro ». Mais le changement de point de vue pour « voir » le nombre x comme la différence de x et de zéro, ou comme distance entre les nombres x et 0 n'est pas explicité alors qu'il devrait l'être. Une reprise de connaissances numériques de la classe de cinquième est possible puisque c'est cette expression « distance à zéro » qui a été le plus souvent utilisée en classe de cinquième lors de la première rencontre implicite avec la valeur absolue (Cf. section 5.6.1.2).

Dans la deuxième partie de ce cours des propriétés de la valeur absolue d'un réel sont données comme conséquences de la définition de la valeur absolue de la différence de deux nombres.



2- Propriétés

Pour tout x réel :

- $|x| \geq 0$
- Si $x \geq 0$, alors $|x| = x$ et si $x \leq 0$, alors $|x| = -x$
- $|-x| = |x|$
- $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

En classe de seconde la démonstration de ces propriétés pourrait se faire en particulier pour démontrer que la valeur absolue d'un nombre positif est lui-même, et la valeur absolue d'un négatif est son opposé. Cet énoncé a un statut de propriété dans l'édifice mathématique composé par Clotilde, mais le plus souvent il apparaît sous un statut de définition dans l'exposé de la théorie mathématique. Son expression en langage naturel, en parallèle de son expression en langage symbolique, renforcerait sa compréhension. L'intérêt du registre du langage naturel est de ne pas donner trop d'importance à l'ostensif « – » et de mettre l'accent explicitement sur la notion d'opposé.

[1] J'analyserai plus loin des nombres irrationnels produits dans le cadre de la trigonométrie.

Le lien avec le cadre géométrique et la référence à la fiche préparatoire sont encore présents avec les dessins associés aux deux cas : x positif et x négatif. La relation entre le nombre x et le point M reste implicite : sur un dessin figure le nombre x, sur l'autre le point M. Les dessins sont présents en tant qu'évocation, ou en tant qu'illustration, et apportent des aides mnémotechniques, mais ils ne peuvent remplacer une démonstration que j'explicite ci-dessous.

Dans le cadre de la séance de Clotilde, si x est un réel alors $|x| = |x - 0| = d(x\,;0)$ et les deux nombres $x - 0$ et $0 - x$ sont respectivement égaux à x et à $-x$.

- Si x est positif, des deux nombres x et $-x$ celui qui est positif est x, alors $|x| = x$
- Si x est négatif, des deux nombres x et $-x$ celui qui est positif est $-x$, alors $|x| = -x = \text{opp}x$

8.4.3 Analyse *a posteriori* de la séance du 22 octobre de Clotilde[1]

8.4.3.1 Geste de tissage pour introduire la deuxième phase de la séance

Je rappelle le déroulement de la séance : la première phase du cours de Clotilde du 22 octobre 2007 consiste à faire pendant 18 minutes la correction de trois systèmes d'inéquations du premier degré à une inconnue. La seconde phase dure 14 minutes, elle correspond à la correction du travail sur la fiche appelée *Activité préparatoire aux valeurs absolues* (Cf. 11.19). La fin de la séance est consacrée à l'étude d'une deuxième fiche à insérer dans le cahier de cours et qui doit être complétée par les élèves.

Je ne vais analyser que les deux dernières phases en lien avec la notion de valeur absolue. Après la correction des exercices, pour introduire la deuxième phase, Clotilde annonce aux élèves qu'il va y avoir du nouveau à découvrir dans un *geste pédagogique de pilotage*, mais aussi de *tissage*, (au sens de Bucheton) qui est intégré à la panoplie des normes du métier :

> On passe à la suite vous ressortez la fiche <silence> vous sortez la fiche d'activité préparatoire aux valeurs absolues (elle s'assied à son bureau) ; donc on va parler de quelque chose de nouveau qui sont les valeurs absolues, pour ça on va faire d'abord cette activité, il fallait tracer une droite graduée et placer les points, ça allait ça ? Après il fallait déterminer certaines distances.

Cette fiche a déjà été donnée pour être complétée, vraisemblablement pendant le cours précédent, et c'est alors un deuxième moment de correction collective qui s'amorce dans cette séance et qui doit déboucher sur du nouveau dont la désignation est déjà annoncée comme une promesse que le temps didactique va avancer.

[1] Je rappelle que le verbatim de la séance est en annexe 11.18.

8.4.3.2 L'étude de la fiche préparatoire aux valeurs absolues

Détermination des distances de deux points donnés de la droite graduée

Le professeur assis à son bureau désigne tour à tour des élèves pour donner une réponse et valide tout aussitôt. Pour la distance CA égale à $11 - 3$ c'est-à-dire 8, un élève dit que c'est -8. Le professeur répond : « **une distance on a dit que c'est comment d'habitude c'est toujours positif,** la distance entre Paris et Montpellier, on peut pas l'exprimer par un nombre négatif, d'accord ? C'est toujours positif une distance, donc c'est 8. » Le professeur utilise une analogie avec les distances de villes et une connaissance pragmatique, mais quels éléments technologico-théoriques étayent la validité de la réponse dans le cadre des mathématiques ? L'un de ces éléments est de savoir que « quels que soient les points A et B leur distance notée AB est un nombre réel positif ». Ainsi un raisonnement possible aurait pu être : « on sait que la distance de deux points est toujours positive[1], donc la réponse -8 est fausse ». Un autre élément du bloc technologico-théorique est contextualisé dans l'explicitation demandée à Bérangère :

> **Clotilde :** je ne vous l'ai pas demandée à chaque fois l'opération que vous avez effectuée, on va demander à Bérangère, comment tu as fait pour trouver ED ?
>
> **Bérangère :** moins 4 moins moins 6

Est-ce que cette réponse résume bien les réponses de tous les élèves de la classe ? Est-ce qu'ils n'ont pas tout simplement compté les unités entre deux points de la droite comme je l'avais anticipé dans l'analyse *a priori* ? Est-ce que la connaissance que Clotilde cherche à faire émerger est utilisée de façon consciente par les élèves ? C'est vraisemblablement le *théorème de l'isomorphisme* énoncé dans l'analyse *a priori* et qui est contextualisé dans l'opération demandée par Clotilde. Mais cette connaissance ne reste-t-elle pas au niveau d'un *décor didactique* pour de nombreux élèves ? Je constate en tout cas que la formulation du théorème n'apparaît pas du tout dans la correction des questions a) et b) et que des élèves peuvent croire que des constatations sur un dessin sont suffisantes pour répondre en l'absence des véritables raisons qui fondent les réponses. Je relie ce phénomène à la troisième hypothèse sur l'incomplétude des praxéologies (Cf. section 3.3 p. 35).

Si des nombres non entiers avaient également été donnés en tant qu'abscisses, une RDN de connaissances nouvelles en lycée aurait pu avoir lieu. En effet l'isomorphisme entre les réels et la droite graduée, travaillé dans une dynamique numérico-géométrique, a été institué en acte dans le premier chapitre et peut être repris pour continuer le travail à son propos. Je rappelle ce commentaire du programme cité à la section 5.4.1 : « On admettra que l'ensemble des réels est l'ensemble des abscisses des points d'une droite ». Par ailleurs le choix de

[1] C'est une connaissance admise en lien avec le travail réalisé au collège dans le domaine de la géométrie euclidienne.

nombres non entiers nécessite l'application du théorème visé, même si sa connaissance ne reste qu'à un niveau implicite.

Le moment de travail pour cette première partie de la fiche, les questions a) et b), peut être considéré comme étant une *situation nildidactique* au sens de Margolinas (2004) dans la mesure où toutes les connaissances nécessaires sont normalement routinières (elles correspondent au programme de cinquième), et où aucune connaissance nouvelle n'est concernée. Cette *situation de reprise sans lien avec du nouveau* pourrait cependant permettre une avancée de la chronogenèse si le théorème cité précédemment, qui apparaît au mieux comme connaissance implicite, avait été formulé puis institutionnalisé sous sa forme générale avec des abscisses x_M et x_P réelles. La connaissance rencontrée de façon contextualisée en cinquième pour des nombres décimaux (voire rationnels), pourrait alors être reconnue comme un savoir de référence avec un domaine de validité qui est l'ensemble des réels.

Détermination des distances dans le cas où les points ont des abscisses indéterminées

J'avais anticipé la présence d'un saut conceptuel entre les questions a) et b) d'une part et c), d) et e) d'autre part. Ce problème se situe dans le NAA (articulation entre le numérique et l'algébrique nommée ainsi par Bronner). Clotilde sait également que le passage des nombres donnés – qui plus est des entiers relatifs – à des nombres indéterminés est une difficulté récurrente pour les élèves et elle accompagne ce moment d'un discours explicatif, elle se lève de son bureau et elle fait un dessin au tableau.

> **Clotilde :** donc là on a calculé des distances, d'accord, entre deux points, maintenant on a placé des points d'une certaine abscisse, maintenant on vous dit on prend un point et l'abscisse au lieu de lui donner un chiffre précis on va l'appeler petit a, d'accord, quel est… si petit a il est positif quelle est sa distance OM en fonction de a ?
>
> (Clotilde se lève, efface le tableau et trace à main levée une droite graduée)
>
> **Clotilde :** on dit qu'on prend a positif donc a il va être obligatoirement à droite de zéro, d'accord, donc si le point M il a son abscisse a on vous dit qu'elle va être cette distance (elle montre au tableau le segment de l'origine à M) et Anaïs nous a dit que tu avais mis…
>
> **Anaïs :** a
>
> **Clotilde :** d'accord, ça vous va ?
>
> (Clotilde remplace a par le nombre 3 et M par F)
>
> **Clotilde :** le point F, le point F d'abscisse 3, d'abscisse plus 3, là on est chez … on est dans les nombres positifs, quelle va être sa distance par rapport au point O d'abscisse 0 (elle ajoute le point O sur la droite) ?
>
> **Des élèves :** 3
>
> **Clotilde :** donc ça va être 3, donc si maintenant si on l'appelle M et si on lui donne comme abscisse a (elle remet M et a à la place de F et de 3) et que a est strictement positif, enfin positif ou nul, a, d'accord ?
>
> **Élève :** oui mais « R plus » ?
>
> **Clotilde :** de quoi … la distance ?

Élève : ouais

Clotilde : parce que tu veux dire que ça dépend si a est positif ?

Élève : non il y a… sur quelle… sur quelle… à quelle place il est placé sur la droite ? 23 min

Clotilde : voilà la place où il est placé sur la droite comme tu dis on l'appelle petit a, d'accord, son abscisse, donc la distance c'est petit a.

La question qui se pose pour les élèves est de se représenter, et de représenter sur la droite graduée, un point dont l'abscisse est n'importe quel réel positif. Clotilde tente d'aider les élèves ainsi : « on prend un point et l'abscisse au lieu de lui donner un "chiffre" précis on va l'appeler petit *a* […] à quelle place il est placé sur la droite ? ». La conversion entre l'ensemble des réels et l'ensemble des points de la droite n'est plus *congruente* (Duval, 1995). Avec une abscisse qui est un nombre déterminé (« précis » dit Clotilde) il y a un seul point qui lui corresponde ; avec un réel positif quelconque, ce qui représente une infinité de nombres et d'abscisses possibles, comment représenter un seul point ? C'est le problème du dessin, objet concret, qui n'est qu'une représentation graphique d'une figure, objet mathématique idéal, qui se pose ici comme il se pose de façon générale dans le cadre de la géométrie.

L'obstacle est perçu par Clotilde qui se lève de sa chaise pour expliciter, dessiner, questionner, mais sans permettre aux élèves de s'approprier la question. La question reste dans le topos du professeur, les rôles restent figés : le professeur explique, donne des exemples, les élèves écoutent et posent des questions, mais les élèves peuvent aussi ne pas écouter et ne pas chercher à comprendre. L'autonomie des élèves est totalement réduite, pourtant Clotilde aurait pu leur demander de rechercher une dizaine de points correspondant à la question du c) puis de conjecturer quel était l'ensemble des points caractérisés par une abscisse positive.

Le même scénario pour la distribution des rôles du professeur et des élèves se reproduit pour la question d) quand le point N a une abscisse négative :

Clotilde : On essaie de trouver cette distance ON.

Élève : c'est pareil

Élève : b

Clotilde : alors pour en être convaincu essayez avec des exemples précis, si c'est −2 son abscisse … OG si G a pour abscisse −2 ça va être quoi comme distance

Des élèves : 2

Clotilde : d'accord ? Si G a l'abscisse -3 ça va être quoi comme distance

Des élèves : 3 24 min

Clotilde : si G a pour abscisse petit b ça va être quoi la distance

Loïc : b

Clotilde : tu es sûr ? Quand c'est -2 tu as trouvé combien ?

Loïc : 2

> **Clotilde :** donc quand c'est b tu vas trouver quoi, à chaque fois tu trouves quoi ?
>
> **Des élèves :** moins b
>
> **Loïc :** mais une distance ça peut pas être négatif ?

Clotilde semble vouloir lancer les élèves dans une recherche autonome en les incitant à revenir au numérique comme moyen d'expérimentation : « alors pour en être convaincu essayez avec des exemples précis », mais aussitôt elle enchaîne en prenant elle-même les exemples. L'incompréhension classique s'exprime grâce à Loïc : la réponse "$-b$" ne peut être perçue comme un nombre positif. Encore une fois Clotilde reste dans son rôle qui est d'expliquer, de prendre en compte les erreurs et les incompréhensions et d'y répondre sur un mode unique celui de l'explicitation :

> **Clotilde :** mais b il est comment là s'il est là ? Il est négatif, d'accord ? Donc la distance entre O et mon point N qui est quelque part par là, mon petit b c'est déjà négatif, c'est un nombre négatif, on est sur qu'il est négatif, donc comme une distance c'est positif, la distance ON c'est moins b, c'est l'opposé de b, d'accord ?

Le même raisonnement qui avait été fait dans la question b) revient : « on est sûr qu'il est négatif [le nombre b], donc comme une distance c'est positif, la distance ON c'est moins b ». La distance ON est un nombre positif, elle ne peut donc pas être égale à b puisque b est donné comme étant un réel négatif, cette connaissance est un moyen pour contrôler une réponse, mais cela ne prouve pas que cette distance soit égale à $-b$. Encore une fois le théorème qui relie la distance de deux nombres avec la différence de la plus grande et de la plus petite abscisse n'est pas mis en œuvre comme étant la véritable justification de la réponse. Un élément nouveau est cependant apporté dans le milieu de la situation didactique par Clotilde, c'est la notion d'opposé « c'est moins b, c'est l'opposé de b ». J'avais souligné dans l'analyse *a priori* l'intérêt de cette désignation en langage naturel par rapport au signe « – » qui renvoie à différents sens. Mais ce point de vue est inséré dans un flot de paroles et peut passer inaperçu pour l'ensemble des élèves.

La question e) n'est pas corrigée. Est-ce volontaire pour pouvoir avancer plus vite, pour ne pas avoir à affronter les difficultés des élèves dans le travail avec des nombres indéterminés ? Une élève signale cet oubli mais Clotilde ne parait pas l'avoir entendue.

La distance de deux nombres donnés

La fiche se termine par le tableau où figurent les colonnes suivantes : p, q, $p-q$, $q-p$, distance de p à q avec 6 couples (p ; q) qui sont donnés. Les échanges oraux entre le professeur et les élèves interrogés tour à tour par Clotilde suivent toujours le même protocole :

> **Clotilde :** Lorna quand p valait 5 et q valait 3 tu as trouvé quoi comme valeur de $\mathrm{p}-\mathrm{q}$?
>
> **Lorna :** 2
>
> **Clotilde :** $\mathrm{q}-\mathrm{p}$?
>
> **Lorna :** -2
>
> **Clotilde :** et la distance entre p et q ?
>
> **Lorna :** 2

Comme je l'avais anticipé dans l'analyse *a priori*, les élèves doivent intuitivement calquer la recherche de la distance de deux nombres sur la recherche de la distance de deux points en reproduisant pour les deux nombres dont on cherche la distance la technique utilisée à propos des abscisses des points. La définition de la distance de deux nombres p et q n'est pas donnée explicitement, et la technique qui est travaillée dans ce moment est bien celle que j'avais décrite : « calculer $p - q$ et $q - p$, l'un est négatif et l'autre positif, celui qui est positif est la distance des deux nombres ». Mais elle n'est explicitée qu'à la fin de la correction du tableau, et auparavant le leitmotiv de Clotilde depuis le début de ce travail c'est ce qu'elle répète très souvent : « la distance de p à q est quelque chose qui est toujours positif » ou « on a dit qu'une distance c'était tout le temps comment ? et Claire répond : positif » ou encore « pourquoi tu as pris celui là plutôt que celui là ? et Julien répond : parce que c'est une valeur positive, et le professeur ajoute : d'accord ; on prend celui des deux qui est positif, d'accord ? »

Dans ce moment de la correction du tableau des indications sont données sur *le contrat institutionnel de calcul* (élément du *filtre du numérique*). Ce que j'avais anticipé comme RDN à propos de π se produit au moins pour un élève de la classe, Julien. Voici cet épisode :

> **Clotilde :** On continue Julien pour le dernier 3,14 et π , p moins q ?
>
> **Julien :** environ 0,00 euh moins 0,00
>
> **Clotilde :** mais pourquoi environ, donne-nous une valeur exacte plutôt
>
> **Julien :** mais c'est infini 30 min <silence> ah 3,14- π
>
> **Clotilde :** d'accord, on vous dit pas de donner des valeurs approchées pour l'instant on ne donne que des valeurs exactes
>
> **Julien** : $3{,}14 - \pi$ et $\pi - 3{,}14$

Le travail dans le domaine numérique devrait supposer que les élèves choisissent de manière autonome le contrat adéquat de calcul. Mais cette question est dans le topos du professeur et non pas dans celui des élèves. Julien fait bien la différence entre valeur approchée et valeur exacte, mais il faut lui donner la consigne de calcul qui correspond à une exigence du professeur, et non pas à une nécessité mathématique en fonction du problème posé.

Dans la synthèse à faire au lycée à propos des nombres cette question du type de contrat de calcul à mener et de la forme des réponses à donner pourrait être sous la responsabilité des élèves et devrait être étayée par des raisons mathématiques.

La fin de la fiche préparatoire

Après avoir installé dans le milieu didactique de la situation les éléments qui vont lui permettre de continuer à élaborer son échafaudage pour l'enseignement de la valeur absolue, Clotilde parvient enfin au terme de cette fiche préparatoire et dévoile la nouveauté annoncée au début :

> En fait la distance de p à q, entre l'abscisse p et l'abscisse q, nous on appelle ça la valeur absolue, on va travailler… ça s'appelle la valeur absolue et on le note comme ça (elle écrit |p - q| au tableau), valeur absolue de ce nombre p − q, 31 min donc la valeur absolue de

> p - q c'est celui entre ces deux nombres là (elle montre les colonnes p - q et q - p écrites au tableau) qui sera positif, c'est la … c'est comme la distance entre ces deux abscisses, donc vous regardez celui de ces deux nombres qui est positif, c'est la valeur absolue, on va le … on va le noter (grand soupir) valeur absolue. Vous prenez votre cours dans la partie leçon.

C'est par un grand soupir qu'elle clôture cette deuxième phase de la séance. Je rappelle que ma présence et celle du cameraman qui la filme pour la première fois doivent certainement rendre l'enseignement de ce thème de la valeur absolue encore plus difficile.

8.4.3.3 Regard global sur l'activité préparatoire aux valeurs absolues

La prise en compte des ensembles de nombres

Je note que la nature des nombres a et b des questions c) et d) est bien précisée grâce à la reprise des dénominations $\mathbb{R}^-$ et $\mathbb{R}^+$rencontrées dans le premier chapitre. Mais ce souci de précision se perd dès la question suivante e). Ainsi le domaine de validité des énoncés n'est pas toujours donné, et je note une variabilité à ce sujet pour Clotilde qui se constate ici dans la conception d'une même fiche de travail.

Une rupture apparaît entre l'enseignement au collège et celui du lycée : pour formuler des énoncés dont la validité est l'ensemble des réels le collège ne disposait au mieux que d'expressions comme « pour tous les nombres connus » quand au lycée il est possible de préciser « pour tous les nombres réels ». Mais les professeurs ne semblent pas saisir là un moyen de préciser de nombreux énoncés théoriques restés flous ou contextualisés seulement sur une partie des réels. C'est le cas, déjà cité, du théorème reliant la distance de deux points et la différence de leurs abscisses rencontré en cinquième pour les décimaux relatifs puis implicitement étendu à tous les nombres rencontrés en quatrième et troisième. Les processus de chronogénèse et d'élaboration d'un socle d'élément théoriques nécessaires à l'activité mathématique pourraient être beaucoup plus développés en lien avec des raisons épistémologiques.

La cohérence de la fiche préparatoire

Cette fiche élaborée en position P+1 par le professeur qui prépare son cours est planifiée méthodiquement pour relier des connaissances anciennes sur les distances de points connus par leurs abscisses à du nouveau qui est la notion de valeur absolue. Un glissement sémantique s'opère de la notion de distance de deux points dans le cadre géométrique, qui est connue comme étant toujours positive ; en passant par le calcul de cette distance directement avec les abscisses des points dans une dynamique numérico-géométrique ; pour finir par l'abandon du contexte géométrique qui débouche par analogie sur la distance de deux réels. La cohérence de l'ensemble est assurée par la « reprise » de termes de langage et de notations communs : distance, toujours positive, les nombres p et q. La volonté de tissage entre les différentes parties de la fiche préparatoire est manifeste.

Cependant j'ai montré que la cohérence mathématique de l'ensemble était faible notamment en l'absence des véritables raisons mathématiques qui justifient les résultats et qui sont nécessaires au regard de la rationalité mathématique. Ce constat rejoint la première hypothèse qui postule que le geste de reprise est très délicat, ainsi que la troisième relative à la complétude des praxéologies.

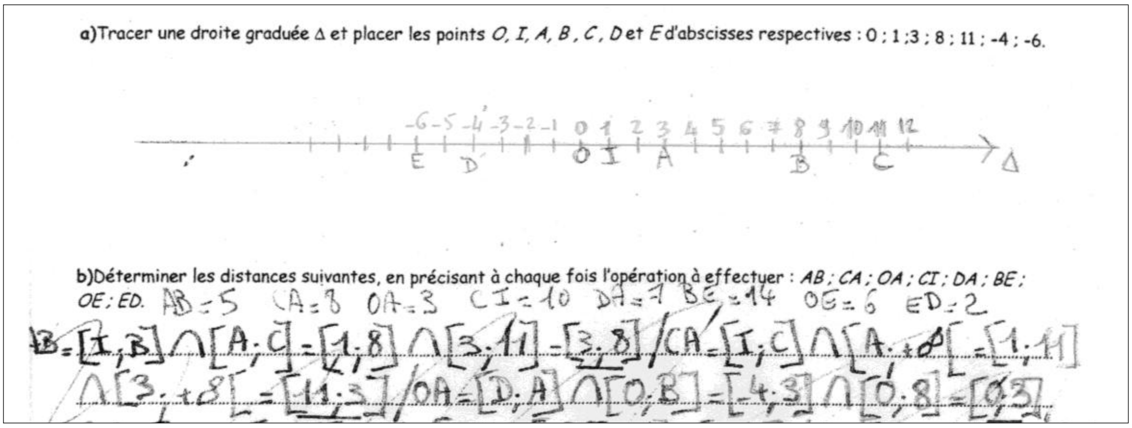
8.4.3.4 Analyse des réponses d'une élève pour la fiche préparatoire

Description des réponses d'une élève

Je vais analyser les réponses personnelles de l'élève dont j'ai photocopié le cahier d'exercices, la fiche qu'elle a complétée se trouve en annexe 11.19. Cette élève, appelée Zoé, avait été choisie par le professeur pour qu'elle me confie son cahier car elle était reconnue comme une bonne élève, très sérieuse dans son travail et sa prise de notes.

On voit sur la fiche préparatoire aux valeurs absolues que la plupart des réponses produites par l'élève ont été barrées[1] et que des réponses prises lors de la correction ont été ajoutées. Pour la question b) Zoé n'a pas noté « l'opération à effectuer », mais Clotilde ne l'a fait préciser que pour le dernier spécimen, la distance ED. Le professeur n'a donc pas donné à ce point de vue toute son importance.

En analysant l'ensemble des réponses de Zoé j'ai repéré des régularités dans ses réponses, comme l'extrait de la fiche donnée dans la figure suivante l'illustre.



a)Tracer une droite graduée Δ et placer les points *O, I, A, B, C, D* et *E* d'abscisses respectives : 0 ; 1 ;3 ; 8 ; 11 ; -4 ; -6.

b)Déterminer les distances suivantes, en précisant à chaque fois l'opération à effectuer : *AB ; CA ; OA ; CI ; DA ; BE ; OE ; ED.*

Figure 53 : extrait de la fiche préparatoire aux valeurs absolues

Une *technique-élève* à peu près stable semble se dégager du travail de Zoé pour le type de tâches « chercher la distance » :

- la recherche d'une distance, que ce soit la distance de deux points ou de deux nombres, se traduit par l'écriture d'un intervalle ;
- dans le cas de la distance de deux points, pour trouver les bornes de cet intervalle la technique consiste à faire les transformations suivantes :

[1] La photocopie que j'avais réalisée de cette page de cahier est de mauvaise qualité et je ne peux donc pas améliorer la visibilité des réponses.

- si I, J, K et L ont pour abscisses respectives a, b, c et d avec $a < b < c < d$ alors :

  JK= [I ; K]∩[J ; L] = [a ; c]∩[b ; d] = [b ; c] ;

- dans le cas où l'un des deux points dont on cherche la distance est celui qui a la plus grande ou la plus petite abscisse, alors il faut faire intervenir des intervalles semi-ouverts comprenant une borne qui est $+\infty$ ou $-\infty$.

Il aurait été intéressant d'interroger Zoé pour savoir quel discours elle aurait eu pour accompagner cette « technique ». Est-ce que la consigne « montrer l'opération » a favorisé ce type de réponse ? Mais peut-être que Zoé n'aurait pas de mots pour traduire tous ces signes écrits ? Cette élève crée des objets mathématiques comme des « intervalles » dont les bornes sont des points. Il est vrai que l'analogie utilisée par Clotilde pour faire glisser la notion de distance du domaine géométrique vers le domaine numérique peut bien être effectuée dans l'autre sens : un intervalle borné par des nombres (ou l'infini) peut bien être borné par des points (ou l'infini), c'est somme toute très cohérent. Zoé ne reconnait pas non plus la notion de distance entre deux points pourtant travaillée dans le cadre de la géométrie depuis la classe de sixième avec notamment la propriété caractéristique des points de la médiatrice d'un segment. Je vais regarder et analyser ce qui s'est passé dans le déroulement de l'enseignement avant cette séance du 22 octobre pour tenter de comprendre comment Zoé a pu développer ces conceptions pour le moins originales.

La reprise de la notion de distance entre deux points

Je vais m'éloigner du numérique en faisant un détour dans le domaine géométrique pour rechercher des éléments qui me permettront de comprendre le *milieu de la situation objective* (Margolinas, 2004) qui a conduit Zoé à développer les conceptions erronées décrites précédemment.

Je m'intéresse à la reprise d'un savoir ancien du collège : la notion de distance de deux points qui n'a pas été reconnue par Zoé dans les questions b), c), d) et e) de la fiche préparatoire, ni à travers le terme « distance », ni à travers les notations AB, CA etc. Pourtant cette notion de distance de deux points a été rencontrée de nouveau dans le deuxième chapitre traité par Clotilde qui était intitulé *Géométrie plane*. La majorité des théorèmes du collège ont été révisés, en particulier les théorèmes de Pythagore et de Thalès ainsi que leurs réciproques. Ils font bien évidemment intervenir des distances de deux points dans le cadre de la géométrie euclidienne. Clotilde a commencé le chapitre en donnant une fiche récapitulative des connaissances géométriques principales du collège (Cf. annexe 11.29). Je note au passage une technique du geste professionnel de reprise de connaissances du collège : elle consiste à donner des rappels de connaissances déjà institutionnalisées au collège sous la forme de photocopies à insérer dans le cahier de cours. Cette technique, utilisée ici dans le cadre géométrique, était déjà la même pour faire certains rappels des domaines numérique et algébrique dans le premier chapitre.

Je présente ci-dessous un extrait de cette fiche de rappel qui est collée au début du deuxième chapitre qui précède le chapitre intitulé *Intervalles et valeurs absolues* (Cf. section 7.1.2 p. 82).

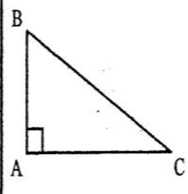
THÉORÈME DE PYTHAGORE		... calculer une longueur.	... avoir un triangle rectangle dont on connaît 2 longueurs.	Puisque le triangle ABC est rectangle en A, alors d'après le théorème de Pythagore $AB^2 + AC^2 = BC^2$ *[On remplace les longueurs connues par leur valeur et on résout alors une équation]*
RECIPROQUE DE PYTHAGORE		... démontrer qu'un triangle est rectangle.	... avoir un triangle dont on connaît les 3 longueurs.	Vérifions si : $AB^2 + AC^2 = BC^2$ D'une part : $AB^2 + AC^2 =$ *[On remplace par les valeurs et on calcule]* D'autre part : $BC^2 =$ *[On remplace par la valeur et on calcule]* Puisque $AB^2 + AC^2 = BC^2$, alors d'après la réciproque de Pythagore, ABC est rectangle en A.

Figure 54 : extrait du cours de Clotilde du deuxième chapitre

Comme dans cet extrait, en parcourant les cahiers de cours et d'exercice qui concernent ce chapitre de géométrie, la seule dénomination en langage naturel qui accompagne la notation AB est le terme de *longueur*. La notation AB est utilisée de différentes façons :

- sans désignation explicite ;
- avec le sens de la grandeur *longueur* d'un segment ;
- en référence à une mesure (cas du théorème de Pythagore).

Voici un deuxième exemple qui illustre l'emploi des notations comme AB. C'est un des exercices donnés par Clotilde qui faisait partie d'un ensemble d'activités géométriques travaillées au mois d'octobre dans le deuxième chapitre. Il s'agit du numéro 13, la notation AB a clairement le sens de la longueur considérée comme une grandeur alors que les objets mathématiques désignés par BC et AC ne sont pas explicités.

12 Pour le texte d'exercice suivant, indiquer quelles sont :
– les notations (*A* désigne un point, etc.) ;
– les hypothèses (ce que l'on sait) ;
– les conclusions (ce qui doit être démontré).
« ABC et BCD sont des triangles isocèles respectivement en A et D, et AB = BD. Démontrer que ABCD est un losange lorsque A et D sont de part et d'autre de (BC). »

13 Reprendre l'exercice 12 avec le texte d'exercice suivant :
« ABC est un triangle rectangle en B. Calculer la longueur AB sachant que BC = 7 cm et AC = 9 cm. »

Figure 55 : exercices du chapitre 2 donnés par Clotilde

Ainsi le *signe* AB, où A et B sont des points, a pour *sens* soit la longueur du segment [AB] en tant que grandeur, soit la mesure de cette longueur, soit la distance des points A et B, et sa *référence* ou sa *dénotation*[1] est un nombre réel positif pour les deux derniers cas et c'est un objet du domaine des grandeurs dans le premier cas.

Je vais m'intéresser à l'exercice numéro 12 dans lequel une question porte sur les notations (dans l'énoncé ABCD est entouré car une erreur est présente dans l'exercice, il faut corriger en ABDC). Les réponses attendues *a priori* sont répertoriées dans le tableau suivant.

	ABC (et BCD)	A (et D)	AB (et BD)	ABDC	(BC)
Réponse suggérée dans l'exercice	triangles	points	Longueurs ou leurs mesures ou des distances entre deux points	quadrilatère	droite
Réponse plus développée	ABC est le triangle défini par 3 sommets A, B et C		AB est la longueur du segment [AB] ou AB est la distance des points A et B	ABDC est le quadrilatère défini par les quatre sommets A, B, D et C pris dans cet ordre	(BC) est la droite définie par les points B et C

Figure 56 : réponse a priori d'un exercice du chapitre 2 chez Clotilde

J'étais présente dans la classe le 3 octobre 2007 quand Clotilde a proposé ces exercices aux élèves. Je vais analyser la compréhension de Clotilde concernant la question « indiquer quelles sont les notations ». Clotilde explique aux élèves ce qui est attendu en disant : « c'est qu'on donne un nom », un peu plus tard à un élève qui n'a pas compris elle répond : « bon ça va, fais les hypothèses », devant l'incompréhension insistante des élèves elle donne une partie de réponse : « A, B, C, D sont quatre points ou ABC et BCD sont deux triangles, c'est juste donner un nom aux droites ou aux points » et au moment de la correction la question n'est pas traitée et Clotilde ajoute : « la notation c'est juste on donne un nom à trois points, et comme ils sont distincts on a un triangle ».

Clotilde n'a pas perçu l'intérêt de faire expliciter le sens caché derrière une notation qui n'est qu'un signe et qui peut être confondu avec l'objet pour certains élèves, ce qui entraîne beaucoup de malentendus, d'incompréhensions et d'erreurs. De nombreuses recherches ont révélé depuis longtemps ce type d'erreurs.

En conclusion Zoé a bien rencontré des distances de points, mais dans un autre chapitre et avec le sens privilégié de longueur ou de mesure de longueur, et son professeur n'a pas eu le souci de faire expliciter les objets manipulés derrière les notations. Clotilde voit à travers la

[1] Les termes signe, sens, référence et dénotation sont utilisés au sens de Frege (1892) (Cf. Frege, *Sens et dénotation*, in *Écrits logiques et philosophiques*, trad., Seuil, 1971, p. 102-126).

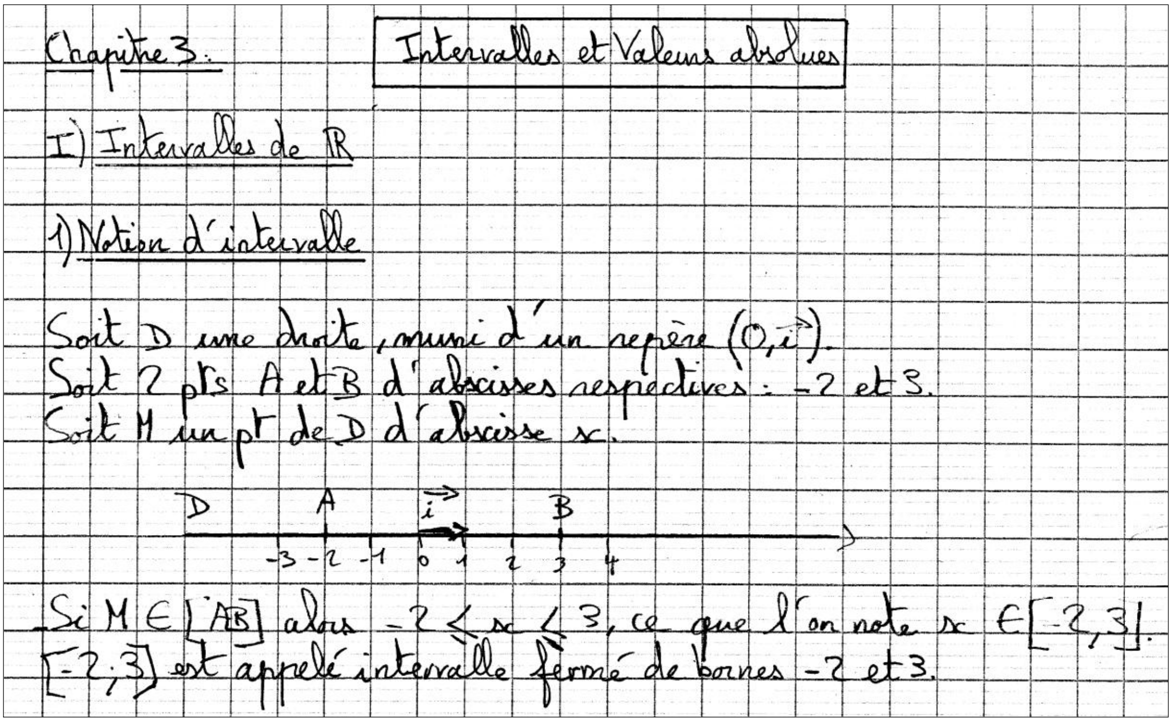
surface de la notation, qui n’est qu’un signe, le sens et la référence nécessaires pour le travail mathématique. Clotilde ne voit pas que ce type de connaissances manque aux élèves. Je compare ce point de vue particulier sur les ostensifs manipulés à une *appréhension discursive* des signes sémiotiques, par extension de cette notion utilisée par Duval (1995) pour l’appréhension des dessins géométriques. Je décèle là encore un *problème de la profession* : comment les professeurs peuvent-ils prendre conscience de cet obstacle épistémologique qui peut se résumer par la « distance » entre les ostensifs manipulés et les objets mathématiques véritablement travaillés ? Et ensuite comment les professeurs peuvent-ils bâtir un enseignement qui permette aux élèves d’élaborer les connaissances nécessaires pour passer d’une *appréhension perceptive* des signes à une *appréhension discursive* des objets représentés par ces signes ?

Je rapproche cette conclusion de la quatrième hypothèse que j’avais formulée (Cf. section 3.4 p. 36) qui postulait que « l’enseignement du numérique en classe de seconde doit être considéré comme un problème posé à la profession de professeur de mathématiques ». Le domaine géométrique permet aussi un travail sur les nombres qui sont produits dans une dynamique numérico-géométrique, en particulier les réels positifs sont des outils nécessaires pour exprimer les distances entre deux points. Une articulation est alors à faire avec les notions d’intervalles et de valeurs absolues, le lien se réalisant grâce à la droite graduée et à l’étude de la distance de deux points de cette droite graduée également appelée droite réelle ce qui exprime bien la liaison intime entre nombre réel et point d’une droite. Mais la connaissance de cette intimité et sa maitrise est un long chemin d’apprentissage pour l’élève et un long chemin d’enseignement pour le professeur.

Le travail relatif à un objet nouveau du numérique : la notion d’intervalle

Je reviens dans le domaine numérique avec la notion d’intervalle. Le deuxième chapitre de géométrie étant clos, la notion d’intervalle est présentée au début du chapitre suivant qui est de nouveau un chapitre du domaine numérique. Cette notion est un objet nouveau qui vient enrichir l’espace numérique construit en classe de seconde. Je rappelle ce qui est dit à ce propos dans le programme : « Caractériser les éléments d’un intervalle et le représenter » (Cf. section 5.4.1 p. 60).

Dans la figure suivante je donne la reproduction de la « définition » donnée par Clotilde pour introduire la notion d’intervalle fermé (le paragraphe intitulé « Notion d’intervalle » est reproduit en entier en annexe 11.21). En fait il n’y a pas de définition mais des exemples qui représentent des intervalles de différentes natures (fermé, ouvert, semi-fermé avec une borne infinie), je m’intéresse au premier exemple.



Chapitre 3. Intervalles et Valeurs absolues

I) Intervalles de $\mathbb{R}$

1) Notion d'intervalle

Soit D une droite, muni d'un repère $(O,\vec{i})$.
Soit 2 pts A et B d'abscisses respectives : -2 et 3.
Soit M un pt de D d'abscisse x.

Si $M \in [AB]$ alors $-2 \leq x \leq 3$, ce que l'on note $x \in [-2,3]$.
$[-2;3]$ est appelé intervalle fermé de bornes -2 et 3.

Figure 57 : cours de Clotilde, début du chapitre 3

Je remarque que la droite graduée est définie par un repère $(O,\vec{\imath})$ alors que la notion de vecteur n'a pas encore été abordée et que la notation $\vec{\imath}$ n'a pas été enseignée au collège. Mais Clotilde a vraisemblablement expliqué cette introduction aux élèves en anticipant ce qui sera travaillé plus tard. Je note cependant que l'ajout de ces nouveaux éléments dans un énoncé qui comporte déjà plusieurs représentations sémiotiques (je les détaillerai plus loin), ne peut que compliquer la compréhension de la notion d'intervalle.

Il n'y a donc pas de définition mais des équivalents langagiers qui se correspondent et dont je fais l'inventaire dans le tableau ci-dessous.

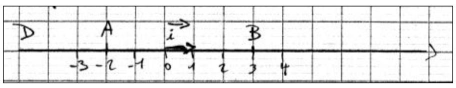
Nature de la représentation sémiotique	Représentation sémiotique (ou signe)	référence
langage naturel	Intervalle fermé de bornes -2 et 3	Discipline du français
dessin		Domaines numérique et géométrique
notation symbolique du segment	[AB]	Géométrie
encadrement	$-2 \leq x \leq 3$	Domaines numérique et algébrique
notation d'un intervalle	$[-2\,;3]$	Domaine numérique

Tableau 34

La formulation choisie par Clotilde n'assure pas les équivalences puisqu'elle a formulé l'énoncé donné sous la forme d'une implication. L'accent est mis sur les notations et le passage d’un registre d’écriture à un autre, et l’essentiel reste implicite, à savoir que l’intervalle est constitué de tous les réels (ou de l’ensemble des réels, ensemble pris dans le sens commun) compris entre -2 et 3. Ce qui reste implicite également c’est la nature du nombre x, Clotilde n’exploite pas la connaissance récente de l’ensemble des réels.

Je remarque également le lien très fort établi entre un intervalle, objet du numérique, avec un segment, objet de la géométrie ; ces deux objets ayant le même ostensif pour les représenter, des crochets […].

Le choix de Mathieu comparé à celui de Clotilde pour définir et travailler la notion d’intervalle

Je vais comparer les choix de Clotilde et de Mathieu pour introduire cette notion d’intervalle. Voici comment Mathieu a présenté dans le deuxième chapitre la notion d’intervalle :

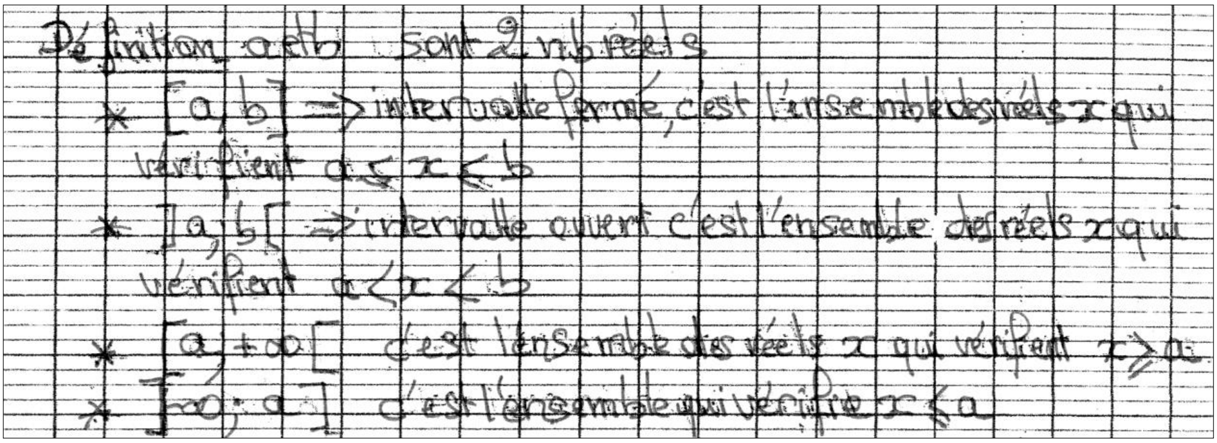

Définition a et b sont 2 nb réels
* $[a , b]$ => intervalle fermé, c'est l'ensemble des réels x qui vérifient $a \leq x \leq b$
* $]a , b[$ => intervalle ouvert c'est l'ensemble des réels x qui vérifient $a < x < b$
* $[a , +\infty[$ c'est l'ensemble des réels x qui vérifient $x \geq a$
* $]-\infty ; a]$ c'est l'ensemble qui vérifie $x \leq a$

Figure 58 : définition d’un intervalle dans le cours de Mathieu

Mathieu donne une définition générale qui est inscrite dans le cadre numérique et qui précise bien qu’un intervalle est un ensemble de réels satisfaisant certaines conditions. Les choix de Clotilde et de Mathieu sont donc différents pour caractériser un intervalle. Leurs choix sont également différents dans l’organisation de leur chapitre comme on peut le vérifier dans le tableau suivant.

Les inéquations sont travaillées avant la notion d’intervalle chez Mathieu et les solutions sont représentées graphiquement, alors que Clotilde les introduit après avoir travaillé la notion d’intervalle qu’elle met en œuvre pour exprimer les solutions des inéquations sans associer de représentation graphique.

	Mathieu	Clotilde
Numéro et titre du chapitre	Chapitre 2 Intervalles de ℝ	Chapitre 3 Intervalles et valeurs absolues
Organisation globale du chapitre	I – Inéquations (3 exemples, les solutions sont données sous la forme géométrique) II – Intervalles Définition Intersection de deux intervalles (2 exemples) Réunion de deux intervalles (1 exemple) III – Valeur absolue	I – Intervalles de ℝ Notion d'intervalle Intersection de deux intervalles (4 exemples) Réunion de deux intervalles (4 exemples) II – Application es intervalles aux inéquations Rappel des définitions et des règles Applications (4 inéquations, 4 systèmes de 2 inéquations, les solutions sont données sous la forme d'intervalles)
Nombre de spécimens de recherche de la réunion ou de l'intersection de deux intervalles dans la partie exercice	22	16

Tableau 35 : déroulement du chapitre contenant la notion d'intervalle chez Mathieu et Clotilde

Chez les deux professeurs un travail assez important est réalisé sur la notion d'intervalle en tant qu'objet, sans assujettir ce travail à un objectif de résolution de problème. Les effectifs respectifs de 22 et de 16 spécimens pour Mathieu et Clotilde pour des types de tâches comme trouver l'intersection ou la réunion de deux intervalles donnés étayent ce constat. C'est l'objectif de travail des exercices 27 et 28 de la page 44 du manuel présentés dans l'annexe 11.15 que les deux professeurs ont choisi de faire faire à leurs élèves. Là où Mathieu se singularise c'est en proposant également l'exercice numéro 32 de la page 44 (Cf. en annexe 11.15 également) qui est un type de tâches qui consiste à faire une conversion du langage naturel vers le langage symbolique en utilisant le symbole représentant les intervalles. Ce *genre de tâches* « faire des conversions entre le registre du langage naturel et un autre registre », est trop peu travaillé par Mathieu et Clotilde, et par les professeurs en général[1], alors qu'il favorise la prise de conscience du sens caché derrière les notations symboliques. Clotilde travaille aussi les conversions entre registres mais sans convoquer le langage naturel, c'est par exemple l'objectif d'un exercice qu'elle a donné sur une feuille polycopiée (Cf. Figure 59).

[1] C'est le constat que l'on peut faire dans le savoir à enseigner d'après les propositions de manuels et d'après les observations dans des classes.

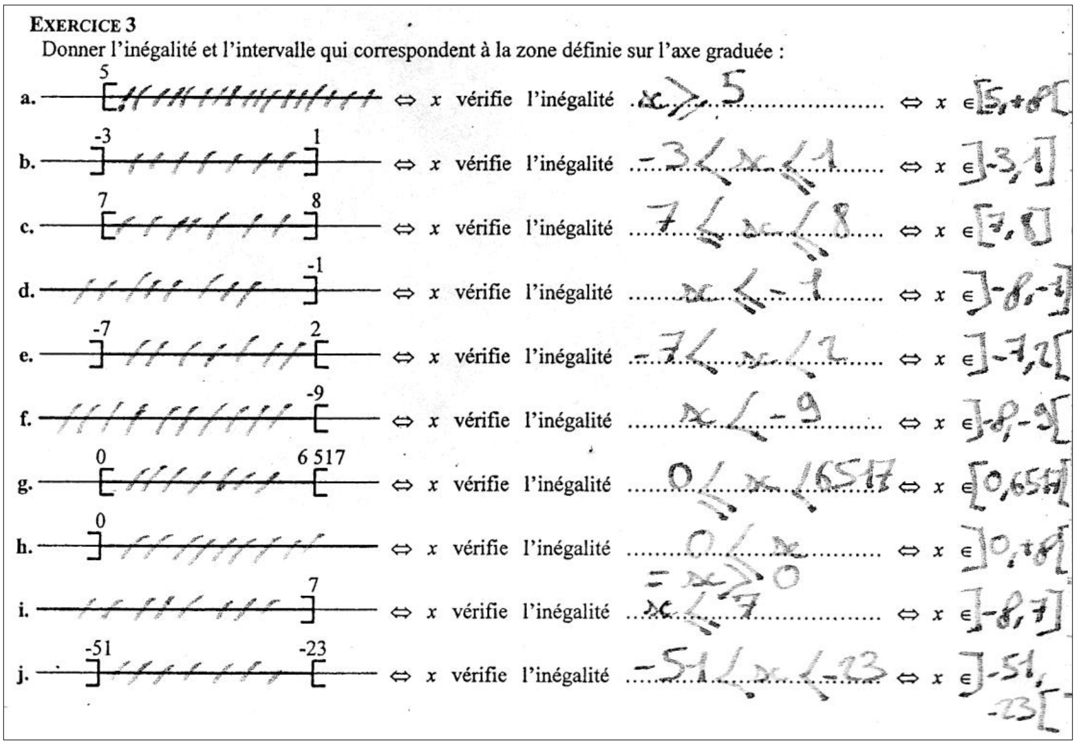


Figure 59 : exercice donné par Clotilde dans le deuxième chapitre, réponses de Zoé

Reprise du cas de Zoé

Je reprends l'analyse des conceptions développées par Zoé. Si j'imagine Zoé seule face à la fiche préparatoire qu'elle doit compléter, je peux l'assimiler à un sujet agissant qui a un milieu objectif dans lequel il y a les éléments mis en lumière précédemment :

- une rupture entre les chapitres et en particulier le domaine géométrique et le domaine numérique. Dans le premier il était question de longueurs, alors que le second est associé à une représentation géométrique (la droite graduée) pour laquelle l'intérêt est porté sur des distances de points ;
- des éléments théoriques qui mettent l'accent sur la connaissance de notations très diverses dont la maîtrise apparaît comme le nouveau à conquérir mais qui n'explicitent pas les objets mathématiques sous-jacents ;
- un déficit en langage naturel ;
- de nombreux spécimens de changements de registre entre les diverses représentions sémiotiques des intervalles mais qui se réduisent trop souvent à des manipulations de signes sans nécessité de faire référence aux véritables objets mathématiques véhiculés derrière les signes.

Ces éléments du milieu peuvent expliquer comment la bonne élève Zoé a pu construire les techniques que j'ai exposées précédemment. J'ajoute à ces conditions une absence de possibilité de validation par l'élève dans les questions posées, ce qui est renforcé par une règle du contrat didactique qui laisse dans le topos du professeur l'entière responsabilité de la validation des réponses.

8.4.3.5 Analyse a posteriori du moment d'institutionnalisation

***A - L'articulation entre les deux dernières phases de la séance* du 22 octobre**

Je reprends le déroulement global de la séance qui a déjà été décrit. À la 31^{e} minute, Clotilde arrête la deuxième phase de correction de la fiche préparatoire qui a joué le rôle de moment de première rencontre, pour aborder la fiche de cours. Je rappelle ses paroles qui traduisent un geste de tissage avec la dernière phase de la fin de la séance :

> En fait la distance de p à q, entre l'abscisse p et l'abscisse q, nous on appelle ça la valeur absolue, on va travailler… ça s'appelle la valeur absolue et on le note comme ça (elle écrit au tableau |p - q|), valeur absolue de ce nombre p − q, 31 min donc la valeur absolue de p - q c'est celui entre ces deux nombres là (elle montre les colonnes p - q et q - p écrites au tableau) qui sera positif, c'est la … c'est comme la distance entre ces deux abscisses, donc vous regardez celui de ces deux nombres qui est positif, c'est la valeur absolue, on va le … on va le noter (grand soupir) valeur absolue. Vous prenez votre cours dans la partie leçon.

La synthèse de la fiche préparatoire est dans cette déclaration de Clotilde qui annonce par cette forme langagière « **nous** on appelle ça la valeur absolue », le nouveau à apprendre qui est dans le curriculum officiel et qui va être institutionnalisé. Ce « nous » évoque les mathématiciens, ou les professeurs de mathématiques, ceux qui ont une culture dans cette discipline. Il exprime également le passage des connaissances contextualisées dans la fiche, et qui au mieux ont été travaillées comme connaissances implicites, en savoirs de référence. Cette transformation est également signifiée par le changement de cahier.

Clotilde institutionnalise à la fois deux définitions, des notations et une technique qui seront reprises ensuite dans *le cours* qui va suivre.

- Les définitions : **la distance de deux nombres** appelée également **valeur absolue de leur différence**, c'est le nombre positif égal soit à p - q soit à $q - p$;
- La technique pour trouver la distance de deux nombres p et q : on calcule les deux différences $p - q$ et $q - p$ et on prend celui de ces deux nombres qui est positif. C'est la technique que j'avais anticipée dans l'analyse *a priori* comme étant la plus probable au vu de la fiche préparatoire.

La technologie de cette praxéologie ponctuelle pour le type de tâches « trouver la distance de deux nombres réels » (que j'ai dénommée T_{nd} dans l'analyse *a priori*) n'apparaît pas. Elle reste implicite, je la rappelle : les nombres p et q sont considérés comme étant les abscisses de deux points P et Q d'une droite graduée, la distance des nombres p et q dans le cadre numérique est égale à la distance PQ des deux points dans le cadre géométrique. La théorie sous-jacente pourrait encore être l'isomorphisme entre l'ensemble des réels et la droite.

Je note que la praxéologie que j'ai reconstituée avec ses parties explicites, et ses zones d'ombre, est dans la réalité de la classe incomplète puisque l'articulation entre les cadres numérique et géométrique fonctionne sur le mode de l'analogie (« c'est comme la distance entre ces deux abscisses ») et du raisonnement intuitif, et non pas sur une véritable dynamique numérico-géométrique. Cette conclusion est à relier à la troisième hypothèse sur l'incomplétude des praxéologies (Cf. section 3.3) qui risque de construire chez les élèves un rapport au raisonnement mathématique non conforme à l'épistémologie de la discipline.

Dans l'analyse *a priori* j'avais proposé une synthèse, à l'issue de l'étude de la fiche préparatoire (Cf. p. 179), dans laquelle figurait explicitement une définition de la distance de deux réels en relation avec des points dont ils étaient les abscisses. Ainsi ce qui est travaillé de façon implicite et par analogie dans la séance de Clotilde aurait pu apparaître explicitement en tant que relation mathématique.

B - La phase d'étude de la fiche de cours : moment d'institutionnalisation et d'élaboration de la technique

Je reproduis ci-dessous la partie de la fiche de cours travaillée dans la troisième phase de la séance du 22 octobre 2007 et complétée par l'élève Zoé dont j'avais photocopié le cahier. La séance s'est arrêtée pendant l'étude du calcul C, le professeur avait juste écrit la première ligne de ce calcul et avait dit aux élèves « on finira de le corriger demain ou plutôt mercredi ».

III- Valeur absolue

1- Distance de deux nombres et définition de $|p - q|$

La distance entre deux nombres réels p et q est celui des deux nombres $p - q$ ou $q - p$ qui est positif ou nul.
Cette distance se note $|p - q|$ et se lit « valeur absolue de p moins q ».

Δ P Q

Remarque : Une valeur absolue est toujours positive puisque c'est une distance.

Conséquence : La valeur absolue de x, notée $|x|$, est la distance de x à zéro.

Exemples : Calculer :
$|5-3| = |2|$; $|15-11| = |4|$; $|-4-2| = |6|$; $|7-(-3)| = |10|$; $|-8-8| = |16|$; $|3{,}14-\pi| = |\pi-3{,}14|$

- Calculer, en donnant leur valeur exacte les nombres A, B et C:

A$= |2{,}8 - 0{,}4| + |7{,}58 + 0{,}5| + |1{,}2 - 7{,}08| \rightarrow 2{,}4 + 8{,}08 + 5{,}88 = \boxed{16{,}36}$

B$= \left|\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right| - \left|\frac{2}{3}-1\right| + \left|\frac{4}{3}-1\right| \rightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$

C$= |\sqrt{3}-2| + |3-2\sqrt{3}| - |5+\sqrt{3}| \rightarrow = 2-\sqrt{3} + 3-2\sqrt{3} - (5+\sqrt{3})$
$= 2-\sqrt{3} + 3 - 2\sqrt{3} - 5 + \sqrt{3}$
$= \boxed{-6}$

Figure 60 : fiche de cours de Zoé de la classe de Clotilde

C – Rappel de l'analyse a priori et premiers résultats

En faisant l'analyse *a priori* à partir de l'écrit de cette fiche de cours j'ai largement anticipé les éléments significatifs de cette analyse *a posteriori*. Je rappelle les éléments principaux que j'avais identifiés :

- la fiche préparatoire et la fiche de cours sont étroitement liées, la première porte bien son nom puisque la fiche de cours reprend les mêmes notions et les mêmes notations (p, q, P, Q) ; mais le lien est davantage assuré par des filiations sémantiques ou métaphoriques plutôt que par une cohérence épistémologique rigoureuse ;

- une analogie forte est utilisée entre la distance de deux points et la distance de deux nombres considérés comme leurs abscisses par rapport à une droite graduée. Cependant cette analogie reste dans l'implicite et la droite graduée est davantage présente comme illustration ou représentation mentale ;
- la conformité avec le curriculum officiel est forte en ce qui concerne le lien entre la valeur absolue et la distance de deux nombres ;
- une technique est recommandée dans la recherche de la valeur absolue d'une expression numérique, elle consiste à se ramener à la distance de deux nombres et en conséquence d'identifier une différence dont on cherche la valeur absolue, mais le terme en langage naturel de *différence* est très peu employé et c'est le signe « – » qui est l'ostensif essentiel de ces différences ;
- une insistance très appuyée sur cette caractéristique d'une distance qui est d'être toujours positive, mais en basant cette propriété relative à la distance de deux nombres sur une analogie avec la distance de deux points au lieu de la baser sur une démonstration ;
- les nombres $p - q$ et $q - p$ ne sont pas reconnus comme étant deux nombres opposés ;
- plusieurs techniques sont possibles pour le type de tâches T_{nd} et elles mobilisent des points de vue différents qui font travailler la flexibilité du regard sur un même objet mathématique ;
- une technique est privilégiée pour calculer la distance des réels p et q : calculer $p - q$ et $q - p$ et la réponse est celui des deux nombres qui est positif (technique dite de la *différence positive*, p. 180) ;
- dans certains cas cette dernière technique n'est pas celle dite du *calcul direct* (Cf ;
p. 186).
Exemple : $\left|7 - (-3)\right| = |10| = 10$ la *technique du calcul direct* est plus simple que la mise en œuvre de celle de la *différence positive* :
$7 - \left(-3\right) = 7 + 3 = 10$ et $-3 - 7 = -10$ le nombre positif entre -10 et 10 est 10
donc : $\left|7 - (-3)\right| = 10$

Conformément à la méthodologie, je vais poursuivre cette analyse *a posteriori* en exploitant à la fois le verbatim et les écrits du cahier de cours de Zoé relatifs à cette fin de séance consacrée à l'étude d'une partie de la fiche de cours.

D - Un geste professionnel du professeur pour organiser la première rencontre des élèves avec un nouvel objet du numérique

Les deux fiches consacrées à l'avènement de la valeur absolue dans l'espace numérique à construire en seconde témoignent du soin apporté par le professeur en position de préparer ce cours sur la valeur absolue. La fiche de cours est le récapitulatif de ce qui a été préparé dans la fiche précédente. Clotilde peut donc se contenter de faire lire le cours qui résume le travail antérieur. Je note que la synthèse du travail préparatoire n'est pas dans le topos de l'élève, mais exclusivement dans celui du professeur. J'ai déjà souligné qu'une *situation de synthèse* est l’une des formes que peut prendre une *reprise*. Un travail de formulation aurait pourtant pu être de la responsabilité des élèves, mais le contrat didactique établi dans cette classe ne prévoit pas ce rôle pour l’élève. La reprise des connaissances travaillées dans la deuxième phase de la séance se fait sous la conduite du professeur qui souligne bien la nouveauté du programme : « notre nouveau mot là, valeur absolue, notre nouvelle distance, on la note avec deux barres, et donc quand il y a une valeur entre deux barres, on dit valeur absolue de ce qu’il y a à l’intérieur, donc valeur absolue de p moins q ». Dans l’espace numérique de seconde la valeur absolue est certainement l’objet nouveau le plus spectaculaire avec à la fois une dénomination et une notation complètement inconnues jusque là, et de plus elle fonctionne comme un nouvel opérateur ouvrant la voie à des types de tâches très spécifiques.

E – Les éléments saillants du moment d’institutionnalisation

J’ai fait un inventaire d’extraits du verbatim de la troisième phase de la séance en les organisant selon différents critères pour souligner des aspects importants de ce moment de classe. J’indique avant chaque citation entre parenthèses la minute dans laquelle se situe l’intervention orale.[1] Je rappelle que le verbatim complet est dans l’annexe 11.18.

E.1. Les connaissances essentielles d’après Clotilde

Clotilde insiste sur les ostensifs comme l’expression en langage naturel « valeur absolue » et le symbole des « deux barres » comme pour bien montrer la dynamique de la chronogenèse. Par ailleurs elle répète presque comme un leitmotiv : « **retenez surtout que c’est une distance donc que c’est tout le temps positif** » (35 min). Le caractère positif de la valeur absolue est martelé pour être inscrit comme un pilier dans le milieu, Clotilde contrôle ainsi le processus de mesogenèse. J’ai repéré d’autres rappels de ce type dans les citations ci-dessous :

(36 min)

> **Clotilde :** C’est la distance qu’il y a entre – 4 et 2 donc ça fait 6. Qui c’est qui a dit on prend quoi ? Parce qu’on a dit que c’était une distance entre deux abscisses, donc c’est un nombre positif, voilà.

Elle insiste sur ce raisonnement que j’ai déjà analysé comme étant erroné :

(37 min)

> **Élève :** valeur absolue de $-4-2$ c’est – 6 ?
>
> **Clotilde :** Qu’est-ce qu’on a dit, que c’était comment une valeur absolue ? Comme une distance, alors c’est toujours ?
>
> **Élève :** Positif

[1] L’inscription (35 min) signifie que l’intervention a lieu entre la minute 35 et la minute 36.

> **Clotilde :** Donc ça peut pas être –6,
>
> **Élève :** mais c'est quoi ?
>
> **Clotilde :** c'est 6

(49min)

> **Clotilde :** ouais, d'accord la distance entre ces deux nombres, c'est un nombre qui est comment ? Positif ou négatif ?
>
> **Élève :** Négatif
>
> **Clotilde :** la distance…
>
> **Élève :** ah oui !
>
> **Clotilde :** la distance elle sera toujours positive

Ces extraits étayent encore l'analyse que j'avais développée en disant que la connaissance mathématique de la distance de deux points et la connaissance pragmatique du quotidien sur la notion de distance, fondent les raisonnements de Clotilde avec des failles dans la validité du raisonnement mathématique.

E. 2. Les raisons d'être de l'étude de la valeur absolue

Un élève se pose la question des raisons d'être de ce nouvel objet et joue ainsi un rôle actif dans le processus de topogenèse.

(36 min)

> **Élève :** mais ça va nous servir à quoi ça madame ?
>
> **Clotilde** : ça va nous servir après à, à …
>
> **Élève :** je sais quoi
>
> **Clotilde** : et bien tant mieux, profitons en, et bien voilà, à comprendre ce que c'est une valeur absolue

Un peu plus tard son voisin intervient lui aussi :

(44 min)

> **Élève :** c'est trop facile
>
> **Clotilde** : et oui c'est trop facile, c'est trop facile mais c'est nouveau donc on va le … (et elle ne finit pas sa phrase)

Clotilde ne parvient pas à répondre de façon impromptue à cette question sur l'utilité de cette notion qui figure dans le curriculum officiel, il est probable qu'elle n'a pas ce genre d'interrogation. Je note que cette question fait partie des préoccupations de certains élèves qui ont la curiosité de savoir sur quoi vont déboucher de nouvelles connaissances. Clotilde ne fait qu'accomplir au niveau du savoir enseigné les demandes figurant dans les contenus du programme. Elle néglige cependant ce qui figure aussi de façon insistante comme l'utilisation des notions comme outils de résolution de problèmes. C'est un symptôme d'un problème plus général de la profession sur lequel je reviendrai dans la conclusion.

E. 3. Les techniques privilégiées par Clotilde pour Tnd

Je reprends les notations données dans l'analyse *a priori* dans laquelle j'avais repéré, pour le type de tâches T_{nd} (déterminer la distance de deux réels), différentes praxéologies possibles (Cf. p. 179), l'une géométrique (les deux réels étant considérés comme des abscisses de points), l'autre numérique (fondée sur la différence des deux nombres avec trois variantes). J'avais également décrit une technique que j'avais appelée *la technique du calcul direct*, la plus simple dans le cas de la recherche de la valeur absolue d'un nombre dont la forme canonique ne comporte pas d'opérateurs (Cf. p. 186).

La technique $\boldsymbol{\tau_2}$ (dite *technique de la différence positive*)

Clotilde fait appliquer la définition donnée dans la fiche de la distance de deux nombres (« La distance entre deux nombres réels p et q est celui des deux nombres $p - q$ et $q - p$ qui est positif ou nul »), cette distance étant égale à $|p - q|$, sans interroger sa pertinence pour les spécimens proposés. Cependant la cohérence entre le travail de la technique et l'énoncé théorique qui le justifie est assurée.

(35 min)

> Clotilde se lève et va vers une élève qui a posé une question à propos de $|5 - 3|$
>
> **Clotilde :** tu calcules entre ces deux nombres, la différence de ces deux nombres, et tu prends la différence qui est positive, là on va trouver 2 ou −2, on prend lequel ?
>
> **Élève :** on prend 2

Dans le contexte précédent l'expression « **la** différence de ces deux nombres » désigne $5 - 3$, et elle désigne également $3 - 5$. Clotilde insiste sur les calculs à faire, c'est-à-dire les deux différences, mais la formulation utilisée est maladroite. Elle laisse entendre que la différence de deux nombres a et b est soit $a - b$ soit $b - a$. Dans les deux séances que j'ai suivies ce flou sera toujours présent et la non commutativité de la soustraction ne sera pas formulée.

Dans l'extrait suivant Clotilde fait le lien entre la réponse de l'élève et l'élément technologique :

(40 min)

> **Clotilde** : très bien c'est π -3,14, d'accord, c'est le nombre positif entre $p - q$ et $q - p$.

Dans la citation suivante une grande importance est donnée aux calculs mais ce qui est à calculer est encore flou, il semblerait encore qu'un seul calcul donne deux résultats :

(44 min)

> **Clotilde :** alors c'est quoi le problème ? Tu vas calculer cette valeur absolue là, ça fait quoi la distance entre ces deux points, calcule la, tape sur ta machine
>
> **Élève :** 2,4
>
> **Clotilde :** ouais, et tu prends entre 2,4 et −2,4 tu prends le positif des deux

La technique $\boldsymbol{\tau'_2}$ (dite technique de l'*échange)*

Clotilde répète plusieurs fois qu'il faut échanger p et q pour que $p - q$ devienne positif :

(46 min)

> **Clotilde :** Alors si c'est négatif il faut échanger p et q pour que ça devienne positif, puisqu'on a $\mathrm{p}-\mathrm{q}$, si vous trouvez que $\mathrm{p}-\mathrm{q}$ c'est négatif quand vous enlevez la valeur absolue ça deviendra $\mathrm{q}-\mathrm{p}$, pour donner le nombre positif entre $\mathrm{p}-\mathrm{q}$ et $\mathrm{q}-\mathrm{p}$.

(49 min)

> **Clotilde :** à l'intérieur de votre valeur absolue, vous avez votre abscisse p moins votre abscisse q là (elle écrit p et q respectivement sous $\sqrt{3}$ et sous 2), vous regardez la soustraction $\mathrm{p}-\mathrm{q}$, si $\mathrm{p}-\mathrm{q}$ est positif, vous pouvez enlever les valeurs absolues, c'est la bonne distance, si $\mathrm{p}-\mathrm{q}$ est négatif, il faut que vous calculiez… que quand vous enlevez la valeur absolue ça devienne $\mathrm{q}-\mathrm{p}$.

(51 min)

> **Clotilde :** Clément celui là (elle montre $\sqrt{3}-2$), tu avais trouvé quelque chose de positif ou de négatif quand tu as calculé ?
>
> **Clément :** négatif
>
> **Clotilde :** négatif, donc on inverse p et q, ça fait quoi ?
>
> **Clément :** $2\ -\sqrt{3}$

Le discours qui justifie la technique *échanger p et q* est complètement ergonomique. Je veux dire par là que ce qui est manipulé ce sont des signes dont on échange les places mais que les raisons mathématiques sont dans l'ombre et certainement bien obscures pour les élèves.

La technique τ''_2 *(dite technique de l'opposé)*

La *technique de l'opposé* est implicitement mise en œuvre quand un calcul négatif est remplacé par son opposé positif sans que la notion d'opposé ne soit exprimée, c'est le cas dans les trois épisodes suivants où le négatif devient positif :

(45 min)

> **Élève :** oui mais lui il était négatif je l'ai mis positif
>
> **Clotilde :** très bien

(45 min)

> **Clotilde :** mais après si tu trouves quelques chose de négatif on est d'accord comme c'est une distance ça devient positif

(42 min)

> **Clotilde :** c'est comme une parenthèse vous la calculez et vous prenez sa valeur positive, si vous trouvez -6 ça devient 6

À la cinquantième minute le terme d'opposé apparaît et un lien est exprimé entre la *technique de l'échange* et la *technique de l'opposé* sans que le raisonnement mathématique ne soit complètement dévoilé. Les citations suivantes sont les seules où le nombre $q-p$ est explicitement appréhendé comme l'opposé de $p-q$:

(50 min)

> **Clotilde :** donc là je cherche la distance, donc si je cherche la distance je trouve $-5{,}88$ c'est pas bon c'est pas la distance, du coup la distance je fais $\mathrm{q} - \mathrm{p}$ c'est pile l'opposé, il suffit de prendre l'opposé

(51 min)

> **Sami :** En fait il faut inverser, il faut inverser les symboles les plus, c'est ça ? (Sami pense qu'il faut modifier $\mathrm{p} - \mathrm{q}$ en $\mathrm{p} + \mathrm{q}$)
>
> **Clotilde :** Non on inverse les deux, on prend l'opposé de ce nombre.
>
> [...]
>
> **Clotilde :** Clément celui là (elle montre $\sqrt{3} - 2$ écrit au tableau), tu avais trouvé quelque chose de positif ou de négatif quand tu as calculé
>
> **Clément :** négatif
>
> **Clotilde :** négatif, donc on inverse p et q, ça fait quoi ?
>
> **Clément :** $2 - \sqrt{3}$
>
> **Clotilde :** d'accord. Sami on ne met pas un plus là, ce qu'il nous faut c'est l'opposé de ce nombre, l'opposé de ce nombre il ne suffit pas de changer le plus au milieu, oui ?

À la fin de cette dernière remarque adressée à l'ensemble de la classe et plus particulièrement à Sami, Clotilde enchaîne sur la suite de la correction et ne fait pas travailler davantage le lien entre $p - q$ et $q - p$. J'avais repéré ce vide à propos de la relation entre ces nombres dans l'analyse *a priori* et j'avais également souligné l'intérêt d'utiliser un ostensif particulier pour signifier que l'on prend l'opposé d'une expression numérique.

Je mets ce constat que je viens de faire en rapport avec la troisième hypothèse sur l'incomplétude des praxéologies (Cf. section 3.3 p. 35). Je postule encore une fois que des discours technologiques qui ne permettent pas aux élèves de percevoir les liens entre les savoir-faire et les raisons mathématiques qui les justifient, ne vont pas favoriser chez les élèves un rapport personnel leur ouvrant accès à la culture mathématique.

E.4. La différence cachée

J'avais souligné les changements de points de vue à opérer pour considérer l'expression dont on cherche la valeur absolue comme une différence, surtout dans le cas où le signe « – » n'est pas apparent. C'est ce qui se passe pour l'élève qui ne comprend pas qu'il puisse y avoir un signe « + » au lieu du signe « – » :

(43 min)

> **Élève :** pourquoi entre $\mathrm{p} - \mathrm{q}$ là il y a un plus ?
>
> **Clotilde :** parce que q il est peut-être positif ou négatif, si c'est p là regarde on avait $7 - (-3)$ donc c'est bien $\mathrm{p} - \mathrm{q}$ mais c'est… c'est… tu aurais pu l'écrire $7 + 3$, d'accord ?

Cette difficulté est du même ordre que la difficulté précédente pour percevoir l'opposé d'une différence. L'usage du langage naturel et du terme de différence pourrait permettre de dépasser cet obstacle.

E. 5. L'analogie entre distance de deux nombres et distance de deux points

Dans les explications données par Clotilde l'analogie entre la distance de deux nombres et la distance de deux points est souvent présente, c'est d'ailleurs elle qui sous-tend l'idée qu'une distance est toujours positive. C'est dans un jeu langagier de reformulation que les termes du contexte de la droite graduée apparaissent :

(44 min)

> **Clotilde :** alors c'est quoi le problème ? Tu vas calculer cette valeur absolue là, ça fait quoi la distance entre ces deux points [...]

(38 min)

> **Clotilde :** c'est $-4\ -2$ (elle représente au tableau à main levée une droite graduée avec les points P et Q d'abscisses respectives -4 et 2 et marque les 6 unités entre les deux points) c'est la distance entre deux points [...] c'est la distance entre deux points il y en a un qui a comme abscisse $-\ 4$ l'autre qui a pour abscisse 2, la distance c'est 6.

(39 min)

> **Clotilde :** la valeur absolue de 7 moins moins 3, Adrien
>
> **Adrien :** 10
>
> **Clotilde :** comment ?
>
> **Adrien :** 10
>
> **Clotilde :** d'accord, la distance entre le point d'abscisse 7 et celui d'abscisse −3, c'est 10

(49 min)

> **Clotilde :** à l'intérieur de votre valeur absolue, vous avez votre abscisse p moins votre abscisse q là (elle écrit p et q respectivement sous $\sqrt{3}$ et sous 2), [...]

L'analogie avec les points est convoquée comme une représentation visuelle dans le registre graphique, et par moment seulement mentale le registre graphique étant seulement suggéré. Mais le *théorème de l'isomorphisme* qui relie les réels et les points d'une droite et qui permet de déterminer la distance de deux points grâce à leurs abscisses n'est jamais évoqué. Et il ne sera pas du tout évoqué pendant toute cette séance alors qu'il est l'élément nécessaire pour que l'édifice mathématique élaboré par Clotilde soit valide.

E.6. Le problème des deux barres

Une question des élèves est récurrente quand Clotilde passe à proximité d'eux : que deviennent les deux barres des valeurs absolues ?

(39 min)

> **Élève :** où c'est qu'il faut mettre les deux barres ?
>
> **Clotilde :** dans la réponse ?
>
> **Élève :** dans la réponse

> **Clotilde :** (elle s'adresse à toute la classe) Non alors, vous calculez votre euh … on a dit que c'était 7 moins moins 3 par exemple (elle écrit au tableau en même temps |7-(-3)|) on veut la valeur absolue c'est comme si on vous demandait la distance entre ces deux points, vous donnez votre réponse, la distance entre mes deux points, la valeur absolue c'est 10, et là il n'y a plus de barre à mettre (elle complète au tableau l'égalité |7-(-3)|=10). D'accord ?

(43 min)

> **Clotilde :** (en aparté) oui mais là tu mets encore valeur absolue (elle fait le signe des deux barres avec ses mains) ça veut dire que tu ne l'as pas calculée ta valeur absolue tu as gardé tes deux barres, il faut l'enlever.

(44 min)

> **Clotilde :** (en aparté) OK alors ça c'est comme une distance on a vu d'accord ? Alors une fois que tu as calculé ta distance tu donnes sa valeur tu mets plus les valeurs absolues.

Dans ces explications Clotilde veut faire comprendre que l'opérateur valeur absolue ne doit pas être conservé une fois qu'il a été « appliqué » sur le nombre. La question est dans le topos des élèves, Clotilde n'avait apparemment pas anticipé ce type de difficulté.

En revanche Clotilde est consciente d'un passage délicat qui provoque de nombreuses erreurs, c'est la disparition des deux barres et l'apparition de parenthèses dans certains calculs :

(52 min)

> **Clotilde :** (à toute la classe) Le dernier alors faites attention le dernier on calcule $5+\sqrt{3}$ on trouve quelque chose de positif donc on dit hop on peut enlever les valeurs absolues, oui mais il faut faire attention au signe qu'il y a devant la valeur absolue quand on enlève la valeur absolue s'il y a un moins devant on met des parenthèses.

Dans les échanges précédents, Clotilde et les élèves s'accordent pour mettre au point un savoir-faire relatif au maniement de calculs comprenant des valeurs absolues. L'objectif est finalement de produire un nombre débarrassé des « deux barres » et de parvenir au moment où « on dit hop on peut enlever les valeurs absolues » sachant que parfois on les remplace par des parenthèses. La valeur absolue est considérée comme un opérateur qui produit un nombre qui ne contient plus les deux barres. La dynamique inter-numérique ainsi enclenchée se passe dans le sens unique des nombres contenant des valeurs absolues vers des nombres n'en contenant pas. Le processus inverse n'apparaît pas dans les types de tâches proposées par Clotilde. Une notion mathématique sous-jacente est absente du discours du professeur c'est la notion d'égalité entre les nombres ainsi transformés. Clotilde insiste sur les calculs à faire qui produisent un résultat, et non pas sur une transformation d'écriture d'un nombre qui conserve la même dénotation.

E. 7. Contrat institutionnel de calcul

La consigne donnée sur la fiche de cours, relative à des nombres s'exprimant avec des valeurs absolues, est « Calculer ». Elle cache évidemment un implicite qui devrait être connu par des élèves de seconde selon le contrat usuel du lycée et conformément aux nécessités mathématiques : les réponses attendues sont des valeurs exactes, sauf indication contraire. Cette précision dans la consigne écrite et relue par Clotilde à la 40^{e} minute est donc inutile :

« Donc en dessous on vous dit calculer en donnant leur valeur exacte les nombres A, B, C. » La question du calcul exact aurait du être dans le topos de l'élève.

Une autre question est posée par les élèves au sujet de l'utilisation de la calculette :

(41 min)

> **Élève :** avec la calculette ?
>
> **Clotilde :** comme tu veux

(44 min)

> **Clotilde :** Tu vas calculer cette valeur absolue là, ça fait quoi la distance entre ces deux points, calcule la, tape sur ta machine
>
> **Élève :** 2,4

(49 min)

> **Clotilde :** vous le faites à la calculatrice [$\sqrt{3}-2$], si vous trouvez quelque chose de positif vous touchez à rien, si vous trouvez quelque chose de négatif vous inversez vos deux… votre p et votre q

Dans cette séance Clotilde a laissé l'usage de la calculette libre, par moments elle incite les élèves à l'utiliser. Pourtant la maîtrise des calculs élémentaires est une compétence importante pour conduire un calcul numérique ou algébrique et alléger la charge de travail. Pour la séance observée l'interdiction de la calculette aurait renforcé les connaissances numériques et le concept de valeur absolue en engageant les élèves à traiter l'expression numérique pour en chercher le signe. C'est ce qui a été développé par exemple dans l'analyse *a priori* en montrant comment les connaissances de valeurs approchées décimales, ou encore de propriétés concernant les inégalités, pouvaient être des outils pertinents pour comparer certains nombres. Dans cette séance encore, les nombres choisis pour les spécimens A et B permettaient la reprise des calculs de base en écriture décimale et en écriture fractionnaire. Pour le spécimen C, des propriétés du numérique pouvaient être mobilisées pour trouver le signe des nombres dont on cherchait les valeurs absolues comme je l'ai détaillé auparavant (Cf. p. 187).

Dans la classe de Clotilde la calculette est un usage privé des élèves qui est laissé à leur initiative. C'est ce que j'ai observé dans cette séance, mais aussi dans toutes les autres où j'étais présente.

8.4.3.6 Les apprentissages des élèves vus à travers les traces écrites

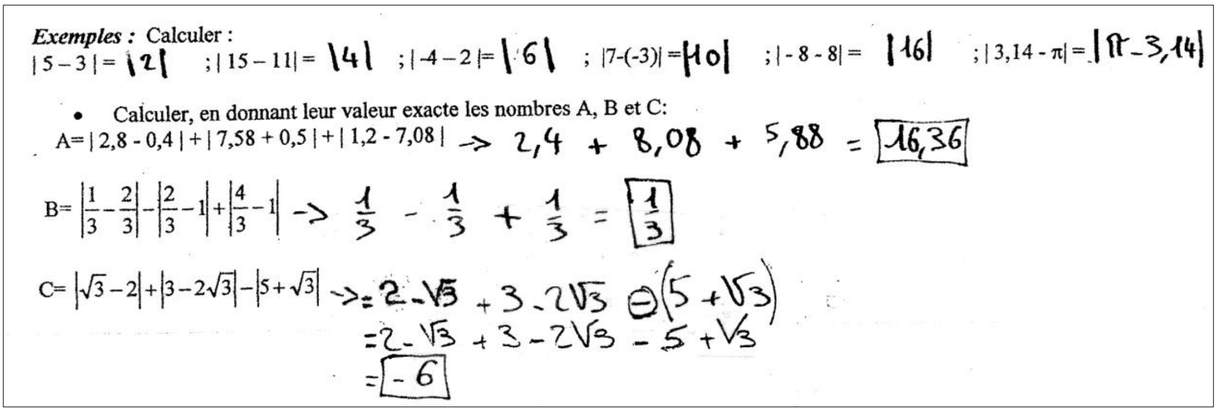
Dans cette recherche un principe méthodologique est de croiser l'analyse des gestes professionnels des enseignants avec l'analyse des apprentissages du côté des élèves. Les gestes d'étude des élèves peuvent être captés à travers des traces statiques comme les productions écrites : cahiers de cours et d'exercices, devoirs. Dans cette section je m'intéresse aux cahiers de cours de deux élèves que je peux comparer à ce qui a été effectivement enseigné dans la classe puisque j'étais présente en tant que témoin. J'ai pu faire les photocopies de deux cahiers de cours d'élèves, Zoé et une autre élève que j'appelle Charlotte. Je répète que les élèves dont j'ai photocopié les cahiers dans les classes de Mathieu et de

Clotilde, ont été choisis par les professeurs comme étant des élèves sérieux, attentifs et jamais absents.

Je rappelle l'organisation didactique choisie par Clotilde pour l'étude de la fiche de cours. Il semblerait d'ailleurs, au vu des nombreuses fiches insérées dans le cours des élèves, que ce soit pour Clotilde une technique professorale habituelle pour gérer un moment d'institutionnalisation. Clotilde assise à son bureau fait lire les énoncés théoriques puis elle laisse les élèves chercher pendant deux minutes la première série de calculs avant de la corriger oralement en interrogeant les élèves. Les élèves cherchent ensuite la deuxième série de calculs pendant dix minutes alors que Clotilde circule dans les rangs, aide des élèves ou encore valide leurs réponses. La séance se termine alors que Clotilde est au tableau et donne des explications pour le début du calcul de C.

Les traces dans le cahier de cours de Zoé

Je vais m'intéresser aux réponses inscrites sur les fiches de cours de Zoé et de Charlotte pour les deux séries de calculs. Le problème des deux barres signalé précédemment (Cf. E.6 p. 213) est resté un problème pour Zoé malgré les explications du professeur et malgré la correction comme on le voit dans la figure ci-dessous.



Exemples : Calculer :

$|5-3| = |2|$; $|15-11| = |4|$; $|-4-2| = |6|$; $|7-(-3)| = |10|$; $|-8-8| = |16|$; $|3{,}14-\pi| = |\pi-3{,}14|$

- Calculer, en donnant leur valeur exacte les nombres A, B et C:

$A = |2{,}8-0{,}4| + |7{,}58+0{,}5| + |1{,}2-7{,}08| \to 2{,}4 + 8{,}08 + 5{,}88 = \boxed{16{,}36}$

$B = \left|\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right| - \left|\frac{2}{3}-1\right| + \left|\frac{4}{3}-1\right| \to \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$

$C = |\sqrt{3}-2| + |3-2\sqrt{3}| - |5+\sqrt{3}| \to = 2-\sqrt{3} + 3-2\sqrt{3} - (5+\sqrt{3})$

$= 2-\sqrt{3} + 3-2\sqrt{3} - 5+\sqrt{3}$

$= \boxed{-6}$

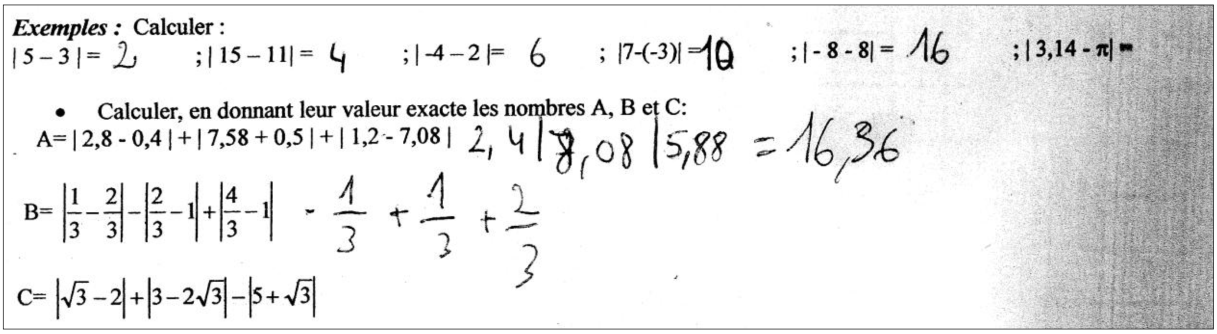
Figure 61 : cahier de cours de Zoé

Pourtant Clotilde avait bien écrit au tableau $|7-(-3)| = 10$, mais cela n'a pas été entendu (compris ?) par Zoé. Je note également l'aspect opérateur qui se traduit par une flèche qui annonce l'écriture « débarrassée des deux barres », alors que les calculs qui suivent sont bien articulés avec le signe d'égalité. Pour la première série de calculs le signe égal étant déjà écrit, la responsabilité d'écrire le signe adéquat n'était pas du côté des élèves.

Pour le nombre C, Zoé a bien entendu en revanche la mise en garde suivante de Clotilde : « il faut faire attention au signe qu'il y a devant la valeur absolue quand on enlève la valeur absolue s'il y a un moins devant on met des parenthèses. » Zoé a même entouré le signe moins pour signaler la difficulté, mais elle a fait deux erreurs l'une à la première ligne pour $|3-2\sqrt{3}|$ et l'autre à la deuxième ligne pour écrire l'opposé de la somme $5+\sqrt{3}$. Pourtant la première ligne avait été écrite au tableau le 22 octobre, et le calcul complet avait été corrigé au tableau la séance suivante le 24 octobre. Je peux en témoigner puisque j'étais également présente à cette séance.

Les traces dans le cahier de cours de Charlotte

Dans le cahier de Charlotte, je ne trouve pas non plus ce qui a été effectivement réalisé en classe : le dernier spécimen de chacune des deux séries de calcul n'est pas traité et le calcul de B est faux et non achevé. Par ailleurs l'écriture du calcul du nombre A est syntaxiquement erronée.


Exemples : Calculer :

$|5-3| = 2$; $|15-11| = 4$; $|-4-2| = 6$; $|7-(-3)| = 10$; $|-8-8| = 16$; $|3,14-\pi| =$

- Calculer, en donnant leur valeur exacte les nombres A, B et C:

A= $|2,8 - 0,4| + |7,58 + 0,5| + |1,2 - 7,08|$ 2,4 | 8,08 | 5,88 = 16,36

B= $\left|\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right| - \left|\frac{2}{3}-1\right| + \left|\frac{4}{3}-1\right|$ $-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$

C= $|\sqrt{3}-2| + |3-2\sqrt{3}| - |5+\sqrt{3}|$

Figure 62 : cahier de cours de Charlotte

Le calcul de $|3,14 - \pi|$ a été corrigé oralement et Clotilde a rappelé que ce nombre a déjà été rencontré dans le tableau de la fiche préparatoire :

> **Clotilde :** le dernier la valeur absolue de 3,14 − π, il était dans notre petit tableau, chut, on n'a pas entendu
>
> **Cécile :** π -3,14
>
> **Clotilde :** très bien c'est π -3,14, d'accord, c'est le nombre positif entre p − q et q − p

Malgré cela Charlotte n'a pas complété ce calcul. La transformation du nombre A est intéressante : Charlotte ne marque pas le signe d'égalité (pour B non plus), est-ce parce qu'elle perçoit davantage la valeur absolue comme un opérateur qui transforme les nombres sans nécessairement garantir l'égalité ? Elle obtient trois nombres séparés par des barres et dont elle donne la somme. Les barres semblent devenir des séparateurs entre les nombres qui sont ensuite additionnés.

Conclusion

Au vu de ces cahiers de deux élèves choisies par Clotilde pour leur sérieux je formule les interrogations suivantes :

- est-ce que la majorité des élèves ont des traces écrites aussi peu fiables ?
- le cahier de cours capitalise les savoirs de référence ainsi que certaines techniques données comme modèles pour des types de tâches repérés comme faisant partie des apprentissages. Comment les élèves peuvent-ils assoir leurs activités mathématiques sur des savoirs de référence avec ces traces écrites ?
- quelle est la place du cahier de cours dans le travail personnel des élèves ? Est-ce qu'ils font des reprises de ces écrits ?

Il est clair que ni l'organisation mathématique, ni l'organisation didactique choisies par Clotilde dans cette séance ne peuvent favoriser un processus de dévolution. La motivation de l'élève est essentiellement liée à son projet personnel pour réussir en mathématiques, elle n'est pas la conséquence d'une situation didactique qui amène l'élève à s'approprier une véritable question à résoudre. Dans ces conditions des élèves attentifs pour jouer leur métier d'élève peuvent capter des éléments du discours du professeur et passer complètement à côté d'autres pourtant tout aussi importants. D'un point de vue méthodologique je retiens l'importance de recueillir les traces des cahiers de plusieurs élèves.

Du côté du professeur je me pose d'autres questions pour lesquelles j'aurai des réponses en assistant au cours suivant du 24 octobre :

- est-ce que Clotilde est consciente des difficultés des élèves, des obstacles rencontrés, des zones d'ombre autour de l'objet valeur absolue ?
- elle a circulé dans la classe, regardé à peu près tous les cahiers des élèves, répondu à de multiples questions, elle a donc pu évaluer le processus d'apprentissage en cours. Est-ce que les informations ainsi recueillies vont influencer le déroulement de son enseignement de la valeur absolue ?

8.4.4 Description et analyse de la deuxième séance observée le 24 octobre

Comme je l'avais annoncé précédemment, je ne vais pas séparer strictement l'analyse *a priori* et l'analyse *a posteriori* dans cette section relative à la séance du 24 octobre 2007 qui suivait celle du 22 octobre. Cette séance n'a pas été filmée, je n'ai que les traces manuscrites prises pendant mon observation. Je vais décrire et analyser les éléments les plus intéressants dans le cadre de cette recherche, mais auparavant je vais décrire le déroulement de cette séance.

8.4.4.1 Trame de la séance du 24 octobre 2007 chez Clotilde

Phase 1 : installation et gestion des devoirs

Clotilde commence par ramasser les devoirs sur feuille faits à la maison, puis elle vérifie les signatures des parents sur le dernier devoir en classe.

Phase 2 : correction du nombre C

Une élève est envoyée au tableau pour corriger le spécimen C du type de tâches suivant : « Exprimer sans valeur absolue une expression numérique comportant plusieurs valeurs absolues » inséré dans la fiche de cours travaillée la veille ($C = |\sqrt{3} - 2| + |3 - 2\sqrt{3}| - |5 + \sqrt{3}|$). Je rappelle que le type de tâches correspondant a été désigné par T_{n3} (Cf. Tableau 29 p. 140).

Phase 3 : reprise de l'étude de la fiche de cours

Clotilde continue à faire lire la fiche de cours donnée la veille (Cf. annexe 11.20), il s'agit de la partie qu'elle a intitulée « Propriétés » (Cf. Figure 63).

2- Propriétés

Pour tout x réel :

- $|x| \geq 0$
- Si $x \geq 0$, alors $|x| = x$ et si $x \leq 0$, alors $|x| = -x$

O I M

x 0 1

- $|-x| = |x|$
- $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Figure 63 : fiche de cours du 22 octobre 2007 chez Clotilde.

Phase 4 : travail de la technique du type de tâches T_{n3}

Les élèves travaillent les deux spécimens suivants :

$$D = |5-2| + |3-4{,}5| - |2-7|$$
$$E = |\sqrt{5}-2| - |1-\sqrt{5}| - \sqrt{5}$$

Phase 5 : découverte d'une nouvelle fiche de cours[1]

Clotilde distribue une nouvelle fiche à insérer à la suite de la précédente dans le cahier de cours (Cf. annexe 11.23), alors que l'étude de la fiche donnée le 22 octobre n'est pas achevée. Le professeur fait lire le début et fait compléter les quatre égalités de la fiche (Cf. Figure 64).

Ch2 les valeurs absolues

L'expérience prouve que les élèves ont du mal à comprendre les valeurs absolues, alors qu'ils cherchent souvent des complications là où il n'y en a pas. De même que nous avons un prénom et un nom, un réel est caractérisé par deux données : son **signe** et sa **valeur absolue**.

Par exemple -5 a pour signe $-$ et pour valeur absolue 5 ; 14 a pour signe + et pour valeur absolue 14 ; $-\frac{1}{2}$ a pour signe $-$ et pour valeur absolue $\frac{1}{2}$, etc…

Pour écrire **la valeur absolue d'un réel**, on l'écrit entre deux barres verticales.

Ainsi $|x|$ se lit « valeur absolue de x ».

$|2| = 2$ $|-5| = 5$ $\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ $\left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$

Figure 64 : fiche de cours de Zoé du 24 octobre 2004. Début.

Phase 6 : travail autour d'un premier tableau portant sur les signes d'expressions

Clotilde fait lire la consigne relative au premier tableau, explicite, puis laisse les élèves chercher les réponses qui sont à compléter (Cf. Figure 65). Les élèves comme habituellement cherchent seuls ou avec leur voisin.

[1] Je présente en annexe la fiche complète vierge et dans la présentation de la séance les différentes parties de la fiche qui sont dans le cahier de Zoé.

Facile. Par contre, pour aller plus loin il est nécessaire de maîtriser certaines notions.
Répondre par « vrai » si la proposition est **toujours vraie**, par « faux » sinon.

5 est positif	✓	x^2 est positif	✓
-4 est négatif	✓	$-x^2$ est négatif	✓
x est positif	F : -2	$1+\sqrt{2}$ est positif	✓
x est négatif	F : 5	$1-\sqrt{2}$ est négatif	✓
$+x$ est positif	F : $+(-2)=-2$	$1+x$ est positif	F : $1+(-5)=-4$
$-x$ est négatif	F : $-(-2)=2$	$1-x$ est négatif	F : $1-(-7)=8$
l'opposé d'un réel négatif est positif	✓	l'opposé d'un réel est négatif	F : $-(-2)$

Figure 65 : fiche de cours de Zoé du 24 octobre 2004. Premier tableau.

Phase 7 : correction du premier tableau de la deuxième fiche de cours

Clotilde assise à son bureau organise la correction orale du premier tableau de la fiche. Elle interroge tour à tour des élèves, elle fait la validation et commente les réponses.

Phase 8 : recherche des réponses du deuxième tableau

Clotilde lit les consignes de la dernière partie de la fiche, explicite encore l'énoncé et laisse chercher les élèves qui ont à remplir le dernier tableau (Cf. Figure 66). La sonnerie interrompt ce travail.

+ peut vouloir dire « positif », « addition » ou « du même signe que ».
– peut vouloir dire « négatif », « opposé » ou « soustraction ».
C'est le contexte qui permet de faire la distinction.
Dans le tableau ci-dessous, écrire le sens du signe + ou – .

$+5$	positif	$-x$	opposé
-3	négatif	$1-x$	soustraction
$5+x$	addition	$x+y$	addition
$+x$	m̂ signe que	$\left(-\frac{1}{2}\right)^2$	négatif
$x-6$	saustraction	$-x^2$	négatif (opposé)

Figure 66 : fiche de cours de Zoé du 24 octobre 2004. Deuxième tableau.

8.4.4.2 *Analyse a posteriori de la séance du 24 octobre 2007*

A. Analyse de la phase 2

A.1. Un premier épisode et une occasion évitée de RDN

Je décris un épisode de cette phase de correction du spécimen C.

> L'élève au tableau commence à écrire :
>
> $C = |\sqrt{3} - 2| + |3 - 2\sqrt{3}| - |5 + \sqrt{3}|$
>
> $C = 1 +$
>
> Clotilde interrompt l'élève et intervient aussitôt :
>
> **Clotilde :** $\sqrt{3} - 2$ ça fait 1 ? $\sqrt{3}$ on en a parlé de ces nombres, $\sqrt{3}$ c'est un irrationnel. On veut enlever ces deux barres, faites attention quand il y a des irrationnels ce que je veux c'est une valeur exacte.
>
> **Un élève :** $\sqrt{3} - 2$ c'est négatif donc on prend $2 - \sqrt{3}$
>
> **Clotilde :** (elle s'adresse à l'élève au tableau) il faut savoir si ton nombre est positif ou négatif, vous pouvez prendre la calculette.

Des nombres irrationnels sont mis en scène comme *nombres de service* dans le spécimen C, des RDN (reprise du numérique, Cf. p. 30) sont alors possibles, Clotilde signale d'ailleurs aux élèves qu'il s'agit bien d'une reprise de connaissances rencontrées en seconde avec elle : « on en a parlé de ces nombres ». Cette reprise permet de poursuivre le travail sur la notion d'irrationnel, son écriture, sa valeur exacte nécessaire dans la tâche proposée. Mais Clotilde ne confie pas du tout ces questions aux élèves et elles restent dans son topos. Je souligne un invariant observé dans cette séance de Clotilde comme dans toutes celles auxquelles j'ai pu assister : elle prend toujours à sa charge la responsabilité de signaler des erreurs et de les expliciter. En reprenant les distinctions faites par Margolinas (1993 ; 2004), Clotilde assume les *phases de conclusion* sous la forme de *phases d'évaluation*.

Reprise du travail de la séance précédente

Cet extrait condense plusieurs reprises des éléments que j'avais mis en relief dans la séance du 22 octobre et précise le contrat didactique en vigueur dans la classe de Clotilde :

- la valeur absolue est surtout considérée comme un opérateur : « il faut enlever les deux barres » ;
- la *technique de l'échange* est privilégiée ;
- la règle du *contrat institutionnel de calcul* est le calcul exact sous l'injonction du professeur ;
- la calculette est autorisée alors que son absence obligerait les élèves à élaborer des techniques de calcul qui leur donneraient des représentations des nombres et de leurs relations.

A.2. Deuxième épisode

Le problème de la gestion des deux barres

Je décris la suite de l'épisode précédent intéressant au point de vue des reprises de la séance du 22 octobre mais aussi au point de vue de RDN de connaissances du collège.

L'élève a écrit au tableau :

$C = |\sqrt{3} - 2| + |3 - 2\sqrt{3}| - |5 + \sqrt{3}|$

$C = 2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3 - (5 + \sqrt{3})$

Clotilde : quand vous enlevez vos deux barres s'il y a un moins devant vous mettez des parenthèses

Élève : vous pouvez réexpliquer pourquoi on met des parenthèses à $5 + \sqrt{3}$?

L'élève au tableau continue à écrire en silence :

$C = 2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3 - 5 - \sqrt{3}$

Clotilde : (elle commente ce qu'écrit l'élève au tableau) moins devant une parenthèse on change tous les signes à l'intérieur.

Clotilde : (elle commente encore) alors après tu fais des paquets, tu as des racines de trois, tu les mets ensemble. On regroupe les racines de trois.

L'élève continue le calcul :

$C = -8 + 2$

$C = -6$

L'élève qui demandait une explication n'a toujours pas compris la présence de parenthèses et il insiste pour avoir une explication.

Clotilde : les valeurs absolues c'est une distance, après c'est comme si c'était entre parenthèses, quand il y a un plus, les parenthèses ce n'est pas la peine de les mettre.

L'élève montre qu'il ne comprend toujours pas.

Clotilde : on a la distance entre deux, c'est celui de $p - q$ et de $q - p$ qui est positif.

Un élève de la classe cherche les raisons pour lesquelles il faut faire la transformation suivante : $-|5 + \sqrt{3}| = -(5 + \sqrt{3})$, la réponse de Clotilde consiste à donner une règle d'écriture syntaxique et conventionnelle que j'appelle *règle ergonomique* : « quand vous enlevez vos deux barres s'il y a un moins devant vous mettez des parenthèses ». Cette règle peut s'écrire ainsi : si $a \geq 0$ alors $-|a| = -(a)$. Ce problème de la gestion des deux barres a été évoqué dans l'analyse de la séance précédente (Cf. p. 213).

Une règle essentielle du calcul numérique n'est pas présente pour étayer la transformation précédente, c'est la règle de substitution liée au statut de l'égalité. C'est la raison au sens mathématique du terme de la transformation. Puisque $|5 + \sqrt{3}| = 5 + \sqrt{3}$ alors le premier nombre peut être remplacé par le second, et l'opposé du premier peut être remplacé par l'opposé du second. Ou encore pour retrancher le nombre $|5 + \sqrt{3}|$ on peut retrancher le nombre $(5 + \sqrt{3})$. En adoptant ce point de vue l'explication de Clotilde qui est basée sur une *règle ergonomique* « moins devant une parenthèse on change tous les signes à l'intérieur », se transforme en : l'opposé d'une somme est la somme des opposés, ou encore pour retrancher une somme on retranche chacun des termes de la somme.

Des raisons mathématiques invisibles

Le passage de $C = 2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3 - 5 - \sqrt{3}$ à $C = -8 + 2$ est réglé par Clotilde par le discours technologique suivant : « après tu fais des paquets, tu as des racines de trois, tu les mets ensemble. On regroupe les racines de trois. » C'est encore une règle que j'ai appelée *ergonomique* qui légitime le fait de « faire des paquets ». Quelle est l'appréhension par les élèves d'une écriture comme $2-\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3-5-\sqrt{3}$? Ne faudrait-il pas que le professeur s'assure que les élèves ont bien compris que cette écriture est celle d'une somme algébrique de six termes et que dans ces conditions il est possible de changer la place des termes et de les associer pour calculer des sommes partielles ? Les élèves sont donc amenés à utiliser en acte les propriétés de commutativité et d'associativité de l'addition dans $\mathbb{R}$ qui justifient les transformations suivantes :

$$2-\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3-5-\sqrt{3}=$$
$$2+\left(-\sqrt{3}\right)+2\sqrt{3}+(-3)+(-5)+\left(-\sqrt{3}\right)=$$
$$2+(-3)+(-5)+\left(-\sqrt{3}\right)+2\sqrt{3}+\left(-\sqrt{3}\right)=$$
$$-6+\sqrt{3}\times(-1+2-1)=$$
$$-6$$

Pour obtenir l'avant-dernière ligne, outre la règle de l'associativité, c'est la règle de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition qui a été mise en œuvre. Les problèmes posés par le signe moins pourraient être mieux contrôlés par les élèves si un discours technologique fondé sur les véritables raisons mathématiques était travaillé avec les élèves. Les termes officiels de commutativité et d'associativité ont disparu des programmes de collège et de seconde, pourtant le langage naturel peut rendre compte de ces propriétés fondamentales pour la gestion du calcul numérique et algébrique. Mais la disparition du curriculum officiel des savoirs canoniques a entraîné avec elle la disparition de l'enseignement des connaissances correspondantes qui sont nécessaires pour travailler le numérique.

B. Analyse de la phase 3

Clotilde reprend la même organisation didactique que pour l'étude du début de la fiche, elle fait lire et elle commente. Un élève s'étonne qu'on puisse avoir « $|x|=-x$ » et fait la remarque suivante : « je croyais qu'on ne pouvait pas mettre un négatif ». Clotilde répond aussitôt sans renvoyer la question à la classe en restant dans une *phase d'évaluation* (au sens de Margolinas) et elle donne l'exemple de $|-2|$ et explique que -2 ce n'est pas une distance, alors on prend – (-2). J'ai déjà souligné dans la séance précédente ce raisonnement incorrect, s'il est vrai d'après la définition de la distance de deux nombres donnée dans le cours précédent que -2 ne peut pas être une distance, cela ne signifie pas que ce soit le nombre 2. Un raisonnement valide étayé par les éléments théoriques du cours de Clotilde serait le suivant :

$|-2|$ est la distance des nombres -2 et 0, c'est celui des deux nombres $(-2)-0$ et $0-(-2)$ qui est positif, c'est donc le nombre 2 qui est l'opposé du nombre -2. On a démontré que $|-2|=opp(-2)=2$.

Ce raisonnement développé ici pour l'exemple de -2 aurait pu être fait pour déterminer $|x|$ dans les deux cas où *x* est positif et où il est négatif.

Clotilde ne *déplie* pas le sens du signe $-x$ qui est interprété par un élève comme étant un nombre négatif. L'appréhension de ce nombre $-x$ comme étant l'opposé du nombre x n'est pas présentée par Clotilde et les élèves risquent fort de ne pas percevoir ce sens.

C. Analyse de la phase 4

Lors de la correction du calcul du nombre D un élève vient écrire sa réponse au tableau en silence :

$D = |5-2| + |3-4{,}5| + |2-7|$

$= 5-2+4{,}5-3+7-2$

$= 9{,}5$

Les élèves semblent avoir utilisé la *technique de l'échange*, Clotilde intervient pour expliquer une autre méthode, elle écrit au tableau :

$$3 + 1{,}5 + 5$$

Et elle explique : « on calcule dans la valeur absolue on trouve 3, on a vu que la valeur absolue d'un positif est lui-même, là on trouve $-1{,}5$ la valeur absolue d'un négatif est l'opposé de ce nombre on trouve 1,5. Et là on trouve -5, la valeur absolue d'un négatif est l'opposé de ce nombre, on trouve 5. » Cette technique est celle qui a été identifiée sous le nom de la technique *du calcul direct*. Les élèves ne comprennent pas. Clotilde explique de nouveau.

Le hiatus est important entre les élèves et le professeur. Les élèves ont travaillé la *technique de l'échange* (Cf. p. 180) évoquée par Clotilde dans la phase 2 : « c'est celui de $p-q$ et de $q-p$ qui est positif » et qui est déclenchée par la présence de la différence de deux nombres « dans les deux barres ». Clotilde voudrait maintenant faire travailler la *technique du calcul direct* (Cf. p. 186) en la justifiant par l'énoncé théorique qui vient d'être présenté dans la phase précédente. Mais les élèves reconnaissent-il cet énoncé maintenant que Clotilde évoque la notion d'opposé absente précédemment ? Le manque de flexibilité des élèves pour passer d'une technique à une autre est ici bien visible, mais il est peut-être aussi le révélateur d'un autre problème lié à l'ossature globale de la séquence .

La difficulté des élèves est à relier à une contrainte au niveau de la discipline. Le curriculum officiel préconise de relier la notion de valeur absolue à la distance de deux points. Clotilde s'est conformée à cette prescription en bâtissant la séquence de la valeur absolue sur ce lien. Le changement de point de vue entre la valeur absolue d'une différence de deux nombres et la valeur absolue d'un seul nombre est une difficulté pour les élèves.

D. Analyse de la phase 5

Clotilde continue le déroulement de sa séance tel qu'il avait été prévu, elle distribue une nouvelle fiche (Cf. annexe 11.23) et fait lire la première partie. Les quatre égalités sont complétées oralement par les élèves qui lisent à haute voix (cette fois-ci Zoé enlève les deux barres pour exprimer les réponses). Quelle est la raison d'être de cette nouvelle fiche qui aurait pu être une introduction de la notion de valeur absolue ? Je reviendrai sur cette question après avoir analysé toutes les phases de la séance.

E. Analyse de la phase 6 (Cf. Figure 65 p. 220)

Clotilde explicite la consigne du tableau : « si la réponse est parfois, c'est faux. Quand vous trouvez faux, trouvez un exemple, un contre-exemple ». La consigne aurait dû être : « si vous trouvez un contre-exemple alors c'est faux », l'ordre logique du raisonnement a été inversé.

Un genre de tâches important

Le genre de tâches travaillé dans ce tableau est le suivant : « dire si chacun des énoncés[1] donnés est vrai ou faux ». D'une manière générale ce genre de tâches contribue à l'apprentissage par les élèves des règles du jeu mathématique. L'IREM de Lyon a dénommé ces règles (de façon ambiguë d'ailleurs) *les règles du débat* (Arsac et al., 1992) et les élèves doivent en avoir conscience pour développer un rapport personnel aux mathématiques conforme à l'épistémologie de la discipline. Des élèves de seconde devraient être capables de savoir ce que signifie qu'un énoncé universellement quantifié est vrai ou faux dans le cadre des mathématiques, et capables également d'utiliser un contre-exemple. Clotilde aurait pu laisser aux élèves la responsabilité d'exprimer ce qu'elle explicite avant de laisser les élèves remplir le tableau. Cette préoccupation pourrait correspondre à un souci plus général du professeur lorsqu'il élabore son enseignement. Elle pourrait se traduire par la question suivante : « est-ce que les élèves ont déjà fait une première rencontre au collège avec les connaissances visées ? » Si la réponse est positive, une deuxième question est alors : « comment faire une reprise de ces connaissances anciennes ? »

Le travail du contre-exemple

En ce qui concerne la notion de contre-exemple voici ce qui est dit dans le document d'accompagnement des programmes du cycle central 5^{e} – 4^{e} qui était en vigueur au moment où ces élèves de seconde étaient au collège :

> Le calcul littéral au sens de transformation d'écritures se développe en classe de 4^{e}. Les tests proposés dans ce cadre mettent alors en jeu les notions d'exemples, de contre-exemples, de cas particulier en opposition au cas général ; ce sera l'occasion d'initier les élèves au raisonnement par contre-exemple. (p. 63)

La prise de conscience de la spécificité de la notion de vrai et faux dans la discipline des mathématiques est donc un objectif explicite dès la classe de quatrième, en particulier en lien avec le calcul littéral. Bien évidemment cette initiation concerne également le domaine géométrique. Les élèves de Clotilde ont donc très vraisemblablement rencontré le « raisonnement par contre-exemple ». La notion de contre-exemple est également citée dans le document d'accompagnement des programmes de seconde avec une ambition un peu plus large d'introduction à la logique formelle dans des contextes favorables :

[1] Énoncé est pris au sens de proposition c'est-à-dire « une entité linguistique susceptible de porter le vrai ou le faux » (Durand-Guerrier, 1992) pour être conforme à la logique des propositions.

> En classe de seconde, les problèmes de logique mathématique concernent essentiellement l'implication et l'équivalence, la manipulation du contre-exemple, le ou et le et. Il ne s'agit pas bien sûr de faire des cours de logique formelle, mais on n'hésitera pas à aborder les problèmes de logique lorsqu'ils se présentent, notamment lors du travail écrit.

Je repère ainsi une reprise de connaissances qui ne peuvent être qualifiées de numériques, mais qui surplombent toute l'activité mathématique et garantissent la spécificité de la discipline par rapport à d'autres. L'IREM de Lyon (Arsac et al. 1992) a proposé des situations didactiques dont l'objectif est de travailler avec les élèves les règles suivantes :

> Un énoncé mathématique est soit vrai, soit faux ;
>
> Un contre-exemple suffit pour invalider un énoncé ;
>
> En mathématiques, des exemples qui vérifient un énoncé ne suffisent pas à prouver qu'il est vrai.

Durand-Guerrier (1992) a attiré l'attention dans sa thèse sur l'importance d'avoir des énoncés universellement quantifiés lorsque les règles précédentes sont énoncées avec les élèves. Elle propose d'ajouter des précisions aux deux derniers énoncés pour lever les ambigüités possibles, ce qui donne pour les deux derniers :

> En mathématiques, des exemples qui vérifient un énoncé ne suffisent pas à prouver qu'il est *toujours* vrai. (p. 271)
>
> […]
>
> Un contre-exemple suffit pour prouver qu'un énoncé n'est pas *toujours* vrai. (p. 272).

Ces règles du jeu mathématiques vont de pair avec le souci que devrait avoir le professeur d'instituer de façon plus précise les règles du numérique déjà rencontrées en collège en précisant leur ensemble de référence.

Dans le cas de Clotilde et du travail qu'elle propose en lien avec le premier tableau de la fiche de cours, il est dit « Répondre par "vrai'' si la proposition est toujours vraie, par "faux'' sinon ». Elle prend soin ainsi de donner la précision du « toujours » à l'écrit mais elle ne reprend pas cela oralement pour évaluer la compréhension des élèves sur le vrai et le faux en mathématiques et pour poursuivre leur initiation aux règles du jeu spécifiques des mathématiques.

Une organisation didactique impensée

Les élèves, comme ils le font toujours dans la classe de Clotilde d'après mes observations, cherchent seuls ou avec leur voisin. Cette gestion de la classe permet aussi aux élèves de ne pas chercher, ou de faire semblant, pour ceux qui ont fait personnellement ces choix. Pourtant l'organisation didactique de ce moment aurait pu varier pour qu'un véritable débat scientifique ait lieu entre les élèves et pour que les obstacles bien repérés par Clotilde fassent l'objet d'un travail qui marque la *mémoire didactique* de la classe. Mais aurait-elle pu faire autrement ? Est-ce qu'une autre alternative serait viable sans entraîner de ruptures trop importantes ? Je propose un exemple d'une autre organisation viable dans les conditions de travail de Clotilde et qui ne demanderait pas des modifications trop déstabilisantes ni pour le professeur ni pour les élèves :

- recherche individuelle pendant quelques minutes ;
- mise en commun avec son voisin et élaboration d'une seule réponse par binôme ;
- pour chacune des cases du tableau le professeur fait le recueil de toutes les réponses vrai ou faux en obligeant tous les binômes à se prononcer ;
- le professeur organise un débat en ne prenant pas part à l'argumentation pour laisser la responsabilité de la validation aux élèves ;
- le professeur fait la synthèse.

F. Analyse de la phase 7

Clotilde organise la correction du premier tableau en interrogeant des élèves qui répondent de leur place. Voici quelques interventions :

> **Morgane :** $+x$ c'est positif
>
> **Clotilde :** si x c'est -2 alors $+(-2)$ c'est -2
>
> Julie explique avec fierté que $-x$ est négatif est faux.
>
> Clotilde explique qu'un carré est toujours positif en prenant un exemple celui de $(-2)^2$ qui est égal à $+4$.
>
> **Clotilde :** vu qu'un carré est toujours positif son opposé est toujours négatif.
>
> Des élèves donnent des contre-exemples :
>
> **Élève :** $1 + x$ est positif est faux car si on fait $1 + (-3)$ c'est faux
>
> **Élève :** $1 - x$ est négatif est faux car $1 - (-2)$ est égal à $+3$.
>
> **Élève :** (pour le dernier spécimen du tableau) on peut mettre $-(-2)$ et ben ça fait $+2$.

La référence pour x

Clotilde n'a indiqué ni la nature du nombre x ni son domaine de référence qui est $\mathbb{R}$, alors que les questions qui sont posées dans ce tableau nécessitent ces explicitations. Je souligne encore une fois l'absence de reprise de ce type de précision qui n'est pas conforme à l'initiation à la logique préconisée par le curriculum officiel. Clotilde aurait pu donner la consigne suivante pour assurer la cohérence épistémologique de l'activité proposée :

« Est-ce que chacun des énoncés suivants est vrai ou faux pour tout nombre réel x ? » La question du « toujours vrai » et du « parfois vrai » aurait pu être débattue avec les élèves en leur renvoyant cette question. Je note cependant que Clotilde a anticipé l'une des difficultés du vrai en mathématiques et qu'elle a insisté dans sa consigne sur le fait que l'énoncé vrai est toujours vrai (elle utilise l'expression "proposition'' qui risque fort de ne pas avoir de sens pour les élèves et ne transpose pas ce terme importé du savoir de référence). Je note cependant l'impact de l'étude de ces énoncés vrai ou faux pour des élèves de la classe, et j'en ai la preuve avec ma voisine Julie. Elle est à ma droite au fond de la classe, son visage s'illumine quand elle comprend que $-x$ peut être positif. Je vois sous mes yeux la joie procurée par l'expérience de la compréhension citée par le programme (Cf. p. 60) !

Les différents registres

Clotilde n'écrit pas et ne fait pas écrire des égalités comme : $+x = +(-2) = -2$ qui permettraient de mieux percevoir la substitution du nombre x par le nombre -2. L'expression en langage naturel serait également un moyen de dépasser l'obstacle de *l'appréhension perceptive* (Cf. p. 126). Ainsi dire : « $-x$ est négatif revient à dire que l'opposé d'un nombre réel est toujours un nombre négatif, c'est un énoncé faux car on a au moins un contre-exemple : si x est égal au nombre -2 son opposé est le nombre +2 qui est positif. » Il serait intéressant de demander aux élèves (dans un autre moment de la séquence) d'écrire complètement en autonomie ce type de démonstration qui pourrait également faire l'objet de questions de contrôles.

Démonstration du vrai et du faux

Clotilde fait un raisonnement qui n'est pas valide pour démontrer que quel que soit le réel x « x^2 est (toujours) positif ». Elle fonde le fait que l'énoncé est vrai sur un exemple en bafouant le troisième énoncé des règles du débat énoncées par l'IREM de Lyon (Cf. p. 226). Ce type de comportement du professeur pourrait constituer un obstacle didactique s'il devait se répéter.

Différents élèves donnent des contre-exemples tout à fait pertinents pour les trois derniers spécimens du tableau. Zoé en avait marqué d'autres sur sa fiche pour $1 + x$ et $1 - x$, ce qui montre qu'elle n'avait pas attendu la correction pour compléter la fiche.

G. Analyse de la phase 8 (Cf. Figure 66 p. 220)

Clotilde donne la justification du travail proposé dans le deuxième tableau : « les plus et les moins sont des signes différents suivant où ils sont placés ». Puis elle lit elle-même la consigne. Un élève intervient et demande : « qu'est-ce que ça veut dire du même signe que ? » Clotilde lui répond : « si on s'intéresse à $+b$ on s'intéresse au nombre du même signe que b, si on s'intéresse à $-b$ on s'intéresse au nombre de signe contraire de b. » Les élèves cherchent à remplir le tableau, et la sonnerie les arrête dans cette dernière phase de la séance.

Qu'est-ce que ça veut dire « du même signe que » ?

Je reprends à mon compte la question de l'élève, mais je commence par m'intéresser au sens du signe moins. Sur la fiche il est expliqué que :

> – peut vouloir dire « négatif », « opposé » ou « soustraction ». C'est le contexte qui permet de faire la distinction. Dans le tableau ci-dessous, écrire le sens du signe + ou –.

Je vais résumer dans le Tableau 36 (page suivante) les différents sens des signes + et – en me référant d'une part au *filtre du numérique* (Cf. section 2.1.3.1 p. 12) pour identifier les objets dont il est question, et d'autre part à la notion de signe comme élément du triplet (signe, sens, dénotation) qui caractérise un objet selon Frege. Cet inventaire ne comprend pas la signification « du même signe que » pour le signe +, cela ne se réfère à aucun objet mathématique. Il s'agit d'une création didactique élaborée dans un souci d'explicitation et d'aide pour les élèves, mais au détriment de la cohérence épistémologique ainsi construite.

Objet	Nature de l’objet	Sens de l’objet	Le signe veut dire
$+5$	nombre	Nombre positif	positif
$5+x$	somme	$(\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2)\ \exists z \in \mathbb{R}\ /$ $z = x + y$	addition
$+x$	opérateur additif	Dans un programme de calcul : ajouter *x* (*x* est positif)	ajouter
– 3	nombre	Nombre négatif	négatif
– 3 ou $-x$	opérateur prendre l’opposé	$(\forall x \in \mathbb{R})\ \exists y \in \mathbb{R}\ /$ $x + y = y + x = 0$ On note $y = oppx$	opposé
-3	opérateur soustractif	Dans un programme de calcul : retrancher *x* (*x* est positif)	retrancher
$x-6$	différence	$(\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2)\ \exists z \in \mathbb{R}\ /$ $z = x - y = x + oppy$	soustraction
$x-6$	somme	$(\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2)$ $x - y = x + (-y)$	négatif ou opposé

Tableau 36 : les différents sens des signes + et –

Les réponses du deuxième tableau par Zoé

Je suppose que le tableau a été complété par les élèves à la maison puis qu’il a du être corrigé lors de la séance suivante à laquelle je n’ai pas assisté (Cf. Figure 66 p. 220).

Une seule réponse figure dans les cases du tableau alors que plusieurs sont possibles parfois. Je ne sais évidemment pas si Zoé a bien pris en compte la correction réalisée en classe et je vais analyser ce qu’elle a écrit. Pour l’écriture -3 par exemple, le sens du signe moins peut être celui de la marque d’un nombre négatif mais aussi celui de l’opposé du nombre 3. La flexibilité de ces différentes visions est très importante et la recherche exhaustive de tous les sens possibles dans ce type de question pourrait être un type de tâches très pertinent. Par ailleurs le signe – dans $1-x$ est considéré comme l’expression d’une soustraction ce qui est évidemment juste. Cependant une autre interprétation est nécessaire parfois si l’on veut par exemple substituer au nombre $1-x$ le nombre $-x+1$. Il faut alors voir dans $1-x$ la somme des termes 1 et $-x$, c'est-à-dire la somme de 1 et de l’opposé de x. L’addition étant commutative dans $\mathbb{R}$ on a donc :

$$1 - x = 1 + (-x) = -x + 1$$

Dans cette vision le signe – a alors le sens d’« opposé ».

Le dernier spécimen $-x^2$ a apparemment été corrigé. Zoé avait répondu « opposé » et « négatif » a été ajouté à côté. Pourquoi les deux réponses ne sont-elles pas données sans hiérarchie ?

8.4.4.3 Synthèse de l'analyse de la séance du 24 octobre 2007

Je terminais l'analyse de la séance du 22 octobre en me posant des questions au sujet de la perception par Clotilde des obstacles en lien avec la valeur absolue. Je rappelle ces questions ci-dessous :

> Est-ce que Clotilde est consciente des difficultés des élèves, des obstacles rencontrés, des zones d'ombre autour de l'objet valeur absolue ?
>
> Elle a circulé dans la classe, regardé à peu près tous les cahiers des élèves, répondu à de multiples questions, elle a donc pu évaluer le processus d'apprentissage en cours. Est-ce que les informations ainsi recueillies vont influencer le déroulement de son enseignement de la valeur absolue ?

La réponse m'a été donnée dans la séance qui a suivi celle du 22 octobre. Après avoir terminé le travail engagé sur la première fiche de cours (le calcul de C et l'étude des propriétés de la valeur absolue), Clotilde a abandonné cette fiche pour en faire travailler une deuxième dans un *geste professionnel de reprise* (au sens de Bronner et Larguier, 2004) que je vais décrire à partir des analyses précédentes.

A. Un geste professionnel de reprise d'une connaissance nouvelle du lycée

Une technique en trois temps

Dans un premier temps, le professeur en position P–1 d'observateur (au sens de Margolinas, 2004) a réalisé le 22 octobre une évaluation des apprentissages des élèves. Clotilde a repéré dans la dynamique de l'action des problèmes récurrents notamment ceux qui sont relatifs aux écritures symboliques comme l'emploi des deux barres, ou encore les signes + et –. Dans le *pluri-agenda* du professeur, ce type d'évaluation invisible pour un observateur extérieur est pourtant une part qui se révèle *a posteriori* importante puisqu'elle conduit le professeur à modifier sa séquence d'enseignement. C'est ainsi que dans un deuxième temps de retour réflexif sur la séance passée, le professeur en position P+1 va concevoir la suite de la séquence pour faire une reprise des connaissances repérées comme étant des obstacles. Dans un troisième temps de nouveau dans l'action d'enseignement, en position P0, le professeur fait étudier aux élèves la fiche qui doit permettre le dépassement des obstacles.

Le bloc technologico-théorique du geste professionnel de reprise

Clotilde enseigne en seconde pour la deuxième année, auparavant elle était en collège, elle a donc une première expérience de l'enseignement de la valeur absolue, elle sait que cette notion est difficile pour les élèves. C'est d'ailleurs ainsi qu'elle commence la deuxième fiche en généralisant les difficultés relatives à la valeur absolue comme pour rassurer ses élèves.

> **Ch2 les valeurs absolues**
>
> L'expérience prouve que les élèves ont du mal à comprendre les valeurs absolues, alors qu'ils cherchent souvent des complications là où il n'y en a pas. De même que nous avons un prénom et un nom, un réel est caractérisé par deux données : son **signe** et sa **valeur absolue**.

Il apparaît qu'un des objectifs de cette reprise est le souci de réconforter ses élèves pour qu'ils ne vivent pas en échec les multiples difficultés rencontrées. Je dirai qu'il y a là un *geste d'atmosphère* au sens de Bucheton (2009).

Une deuxième raison de cette reprise résulte vraisemblablement de la formation reçue en formation initiale à l'IUFM[1]. En effet Clotilde a été stagiaire une dizaine d'années plus tôt alors que je faisais partie de l'équipe de formateurs de cet IUFM. Le travail relatif aux erreurs est important dans cette formation : repérage, compréhension, typologie des erreurs, prise en compte dans l'enseignement. Un genre de tâches est présenté et analysé, il s'agit de bâtir des activités basées directement sur les erreurs des élèves et souvent conçues comme des débats à partir d'énoncés dont il faut décider s'ils sont vrais ou faux. Les stagiaires reprennent souvent dans leurs pratiques ce type d'activités. C'est bien ce que Clotilde a mis en œuvre dans cette deuxième fiche. Est-ce que ma présence a favorisé ce choix ? Je n'ai pas de réponse.

Une troisième raison est certainement la conception personnelle de l'enseignement de Clotilde. Comme je l'ai déjà décrit Clotilde assume totalement la responsabilité d'expliquer et de répondre à toutes les questions des élèves. Il est donc inscrit dans son rôle de reprendre les connaissances qui ont posé problème et d'enlever « les complications que les élèves cherchent là où il n'y en a pas ».

B. Des éléments théoriques méconnus pour Clotilde

Clotilde n'a évidemment pas tort quand elle dit que « l'expérience prouve que les élèves ont du mal à comprendre les valeurs absolues », et des chercheurs qui ont travaillé sur ce sujet peuvent conforter cette affirmation comme le fait déjà Duroux en 1983 :

> Nous sommes donc en face d'un véritable paradoxe : un concept dont la définition prend deux lignes avec un vocabulaire élémentaire, et cependant cette notion « sème la terreur » chez la plupart des élèves et ce jusqu'a un stade avancé de leurs études.

Mais ce que Clotilde ne sait certainement pas c'est qu'il existe différents obstacles relatifs à la notion de valeur absolue. Duroux souligne en particulier le lien avec le concept de nombre relatif (Ibid.) :

> La notion de valeur absolue est considérée comme mineure dans l'enseignement et pourtant elle est au cœur de la compréhension des nombres relatifs. Elle persiste ainsi, en quelques lignes, dans les programmes, alors que l'échec sur ces questions est important. Nous pensons alors qu'il ne s'agit pas de simples difficultés, mais que la notion de valeur absolue se heurte à de véritables obstacles que sont les conceptions du nombre comme mesure et celle des nombres relatifs comme différents des « nombres du Primaire ». (p. 65)

[1] IUFM : institut universitaire de formation des maîtres où sont formés pendant une année scolaire au niveau bac+5 en tant que fonctionnaires stagiaires rémunérés les futurs professeurs des écoles, des collèges et des lycées.

Cauchy en 1821 (cité par Duroux, 1983) différencie ce qu'il appelle *nombre* d'une part et *quantité* d'autre part :

> Nous prendrons toujours la dénomination de *nombres* dans le sens où on l'emploie en Arithmétique, en faisant naître les nombres de la mesure absolue des grandeurs, et nous appliquerons uniquement la dénomination de *quantités* aux quantités *réelles positives* ou *négatives*, c'est à dire aux nombres précédés des signes + ou –. […] Nous appellerons *valeur numérique* d'une quantité le nombre qui en fait la base, quantités *égales* celles qui ont le même signe avec la même valeur numérique, et quantités *opposées* deux quantités égales quant à leurs valeurs numériques, mais affectées de signes contraires.

Clotilde a donc bien perçu une des conception-obstacles dans la perception de $-x$ comme désignant un négatif par exemple, mais il ne semble pas qu'elle interprète ce type de connaissance erronée comme un signe d'une incompréhension plus profonde sur l'objet nombre. Pour de nombreux élèves, et c'est bien apparu dans la classe de Clotilde, l'objet *nombre* est restreint à la définition précédente donnée par Cauchy, ainsi (-5) n'est pas conçu comme **un nombre** mais comme la réunion d'**un « nombre »** (5) **et d'un signe** (–). Pour les élèves le nombre 5 correspond à ce que Cauchy appelait aussi la *valeur numérique*. Duroux précise que :

> Dès lors que les nombres positifs et les nombres négatifs semblent de nature différente, il est impossible de concevoir l'existence de l'application valeur absolue, définie sur leur ensemble, et qui justement, leur donne leur unité : cette application ne pourra être définie que sur l'ensemble des nombres, sans distinction de signe.

Les recherches de Duroux comme celles de Gagatsis et Thomaidis (1993) ont mis en évidence que les difficultés des élèves sont en partie liées à des obstacles épistémologiques, si Clotilde avait eu connaissance de ces articles elle n'aurait pas affirmé que les élèves vont chercher des complications là où il n'y en a pas. Elle aurait peut-être saisi les erreurs des élèves comme étant également des symptômes d'une incompréhension plus générale de la notion de nombre.

C. L'enseignement de la valeur absolue : un problème de la profession

Ces obstacles repérés par les chercheurs en didactique des mathématiques, inhérents à la notion de valeur absolue, nous alertent sur un problème de la profession : comment enseigner la notion de valeur absolue en seconde conformément aux programmes de 2000 ? Un élément de réponse est que la rencontre avec la valeur absolue est l'occasion d'une reprise d'étude du concept de nombre. La mise au jour des erreurs des élèves peut devenir le point de départ pour continuer le processus de conceptualisation relatif au concept de nombre. Un objectif particulier est d'unifier les notions de nombres positifs et négatifs pour aller vers une plus grande cohérence. Un deuxième objectif est de faire travailler les élèves autour de la question « qu'est-ce que c'est ? » plutôt que de la question « qu'est-ce qu'on fait avec ? ». Un troisième objectif est de mettre en travail la notion de valeur absolue dans des situations pertinentes pour motiver son emploi. Je ne fais qu'ouvrir une piste de travail, cet enseignement reste à construire !

8.4.5 Conclusion concernant les séances des 22 et 24 octobre 2007 chez Clotilde

La méthode du carottage

Je rappelle qu'en vertu d'un principe méthodologique, Clotilde ne savait pas que je m'intéressais à l'enseignement du numérique et au rôle particulier des RDN. Elle ne savait qu'une seule chose : je voulais observer et analyser l'enseignement des mathématiques tout au long de l'année scolaire en n'intervenant pas du tout pour ne pas influencer le projet d'un professeur « ordinaire ». Le 22 octobre je ne savais pas à l'avance que j'allais assister à une séance sur la valeur absolue, en revanche je me suis organisée pour être présente le 24 octobre mais sans exprimer mon intérêt pourtant très vif !

Lors de ces deux séances successives j'ai pu observer « à chaud » un *geste professionnel de reprise* que j'ai décrit précédemment. Ainsi j'ai assisté à la façon dont Clotilde a réellement pris en compte les incompréhensions des élèves lors d'une évaluation invisible pendant la séance du 22 octobre.

La méthode du carottage m'a permis de découvrir un filon très intéressant dans le cadre de cette recherche, d'autant plus que j'avais déjà eu l'occasion d'être présente lorsque Mathieu avait lui aussi enseigné la valeur absolue.

La construction élaborée par Clotilde concernant la valeur absolue

Je vais regarder globalement les deux séances de Clotilde des 22 et 24 octobre en adoptant le point de vue développé par Chevallard (1999b) lorsqu'il évoque un chantier de construction qui aboutit au moment de l'institutionnalisation à un édifice débarrassé de ses échafaudages (Cf. p. 26).

Dans la fiche préparatoire l'échafaudage est organisé de façon linéaire de la façon suivante :

- le point de départ est l'isomorphisme entre la droite et l'ensemble des réels, il est travaillé en acte ce qui se traduit pour les élèves par la correspondance entre les points de la droite graduée et les nombres réels. Le registre graphique est alors pertinent pour rendre compte de ce lien entre les cadres géométrique et numérique ;
- la droite graduée permet de donner du sens à la notion de distance entre deux points qui est vue comme la longueur d'un segment et qui est par ailleurs reliée à la différence entre la plus grande et la plus petite abscisse, ce théorème étant uniquement contextualisé et utilisé somme connaissance implicite ;
- le cadre géométrique n'est plus convoqué explicitement et dans le cadre numérique la distance de deux nombres se calcule par analogie avec le travail précédent concernant la distance de deux points de la droite graduée.

La fiche de cours est une reprise des connaissances travaillées dans la fiche préparatoire mais le professeur n'a conservé que les savoirs canoniques qui sont les suivants :

- la distance entre deux réels p et q est définie comme le nombre positif entre $p - q$ et $q - p$ dans le cadre numérique. La valeur absolue de la différence de deux nombres est définie comme étant sa valeur absolue, et la notation avec les deux barres est donnée ;

- le cadre géométrique est présent comme illustration mais sans raison d'être mathématique. Le *théorème de l'isomorphisme* contextualisé dans la fiche préparatoire n'est pas formulé ;
- les définitions précédentes permettent d'établir les propriétés suivantes sans qu'elles soient démontrées :
    - La valeur absolue d'un nombre réel x est alors la distance de x à zéro.
    - Si $x \geq 0$, alors $|x| = x$ Si $x \leq 0$, alors $|x| = -x$ (*)

      Le cadre graphique est encore donné comme illustration avec des implicites sur le lien entre le point M et le nombre x.

J'ai déjà souligné le fait que la logique de la construction échafaudée par Clotilde était davantage fondée sur des liens sémantiques et analogiques que sur des liens mathématiques. L'échafaudage semble être élaboré pour que chaque élément puisse éclairer le suivant par des procédés d'analogie et non par des articulations fondées sur des éléments théoriques mathématiques. Ce constat est à mettre en relation avec la troisième hypothèse sur l'incomplétude des praxéologies. C'est ainsi que l'illustration par la droite graduée est utilisée plutôt comme représentation mentale sans assurer un lien de nécessité entre distance de points et distance de nombres. Par la suite dans la séance du 24 octobre c'est la notion de distance de deux nombres qui est oubliée comme étant dépassée et remplacée par la propriété de la ligne ci-dessus signalée par * (Si $x \geq 0$, alors $|x| = x$ Si $x \leq 0$, alors $|x| = -x$). Cette nouvelle conception de la valeur absolue est davantage utilisée dans les activités de la deuxième fiche de cours et elle apparaît comme l'aboutissement de l'étude de la valeur absolue.

Clotilde semble vouloir construire son cours par un enchainement d'idées qui permettent l'abandon de ce qui a précédé, cet enchainement n'étant pas toujours assuré au point de vue mathématique. Ainsi la notion de droite graduée qui a servi d'introduction s'efface pratiquement complètement pour laisser place à un travail beaucoup plus formel dans le cadre numérique. C'est un processus de chronogenèse qui permet une avancée en oubliant une partie pourtant nécessaire des éléments qui ont permis d'arriver au point présent. Cela ressemble à une avancée sans mémoire qui met en avant le nouveau qui se détache de l'ancien qui devient dépassé.

Clotilde donne la vision linéaire de connaissances qui s'enchainent au lieu d'une autre vision plus pertinente pour développer les apprentissages et qui est celle d'un agrégat de connaissances plus proche de la notion de champ conceptuel au sens de Vergnaud (1994).

8.5 Apprentissages des élèves de Clotilde relatifs à la valeur absolue

En poursuivant la méthodologie de cette recherche, je vais maintenant m'intéresser à l'efficacité des apprentissages du côté des élèves. Je vais principalement analyser ces apprentissages grâce au devoir de contrôle portant sur le troisième chapitre qui a eu lieu le 16 novembre 2007. Ces données seront complétées par l'étude des cahiers d'exercices ainsi que par un entretien avec des élèves.

Je vais faire l'inventaire des types de tâches donnés dans ce devoir surveillé dont les textes sont en annexe à la section 11.12 et à la section 11.13. Clotilde donne toujours deux textes de devoirs surveillés pour éviter les tentations de copiage, le sujet n°1 et le sujet n°2, c'est pourquoi il y a deux annexes.

Nature du type de tâches	Type de tâches du devoir du 16 novembre 2007	Nombre de spécimens	Nombre de points sur 20
algébrique	Résoudre une équation du premier degré à une inconnue	1	Exercice 1 6
algébrique	Résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue	1	
algébrique	Résoudre un système de deux inéquations du premier degré à une inconnue	2	
numérique	T_{n3} Exprimer sans valeur absolue une expression numérique comportant des valeurs absolues	2	Exercice 2 2,5
algébrique	T_{a1} résoudre l'équation $\|ax-b\|=c$	1	Exercice 3 6,5
algébrique	T_{a2} résoudre l'inéquation $\|ax+b\| * c$ (où $*$ est l'un des signes d'inégalité)	2	
algébrique	T_{a3} Résoudre un système de deux inéquations du type $\|ax+b\| * c$ (où $*$ est l'un des signes d'inégalité)	1	
NAA[1]	Trouver une équation dont l'ensemble des solutions est un couple de nombres	1	
NAA	T_{n4} Trouver une inéquation avec une valeur absolue dont l'ensemble des solutions est donné sous la forme d'intervalles	1	
algébrique	Modéliser un problème posé dans le cadre géométrique à modéliser par une inéquation	1	Exercice 4 5
NAA	Déterminer l'incertitude dans le cadre géométrique du calcul d'une grandeur	1	

Tableau 37 : types de tâches du devoir du 16 novembre 2007 chez Clotilde

En comparant les devoirs de contrôle de Mathieu et de Clotilde deux différences apparaissent :

[1] NAA : articulation des domaines numérique et algébrique

- Mathieu n'a cherché à contrôler que des connaissances en lien avec la valeur absolue, alors que Clotilde vérifie en même temps des connaissances relatives aux résolutions d'équations et d'inéquations du premier degré à une inconnue ;
- Clotilde propose deux questions dans l'exercice 4 qui permettent de contextualiser la notion de valeur absolue en faisant une reprise pratiquement à l'identique d'un exercice travaillé en classe.

En revanche Clotilde comme Mathieu donnent peu d'importance aux types de tâches complètement numériques avec 2,5 points sur 20 pour Clotilde et 2 points sur 20 pour Mathieu. De la même manière les deux professeurs ne posent pas de questions qui nécessiteraient de la part des élèves un travail de formulation. Ce constat est d'ailleurs cohérent avec l'absence presque totale de type de tâches mobilisant le registre du langage naturel dans un domaine autre que le géométrique chez Mathieu et chez Clotilde mais aussi dans le manuel de la classe.

8.5.1 Analyse de devoirs d'élèves de Clotilde

Je vais analyser les réponses de quelques élèves pour certaines questions de ce devoir qui ont été choisies en fonction de leur intérêt pour éclairer les processus d'apprentissages des élèves relatifs au thème de la valeur absolue. Les élèves dont j'ai les copies s'appellent Diego, Julien Pauline et Lucas. Ils ont été choisis parce qu'ils avaient avec eux leurs devoirs le jour où j'ai demandé de pouvoir les photocopier ! Leurs notes respectives sont 17 ; 14 ; 10 et 9,5 . Pauline est une élève sérieuse qui est avec sa sœur jumelle dans la classe, elle est considérée comme étant une bonne élève par Clotilde. Je n'ai pas de renseignements particuliers sur les autres élèves.

8.5.1.1 L'exercice 2 du devoir du 16 novembre 2007

Je rappelle que cet exercice qui compte pour 2,5 points sur 20 est le seul qui soit inscrit exclusivement dans le domaine numérique.

Exercice 2 (2,5 points) Calculer :

$$A = |5,2-7,3| + 2|5,4-7,2| - 3|1,9+3,1|$$

$$C = 2\left|2\sqrt{3}-3\right| - \left|5-2\sqrt{3}\right| + 2\left|4-3\sqrt{3}\right|$$

Figure 67 : exercice 2 du devoir du 16 novembre 2007 chez Clotilde

La copie de Diego (Cf. Figure 68 p. 237).

Pour la première expression, dans un calcul du type $|p-q|$ avec $p-q$ négatif, Diego remplace $p-q$ par $q-p$ mais il conserve le symbole des valeurs absolues comme on l'observe dans la Figure 68.

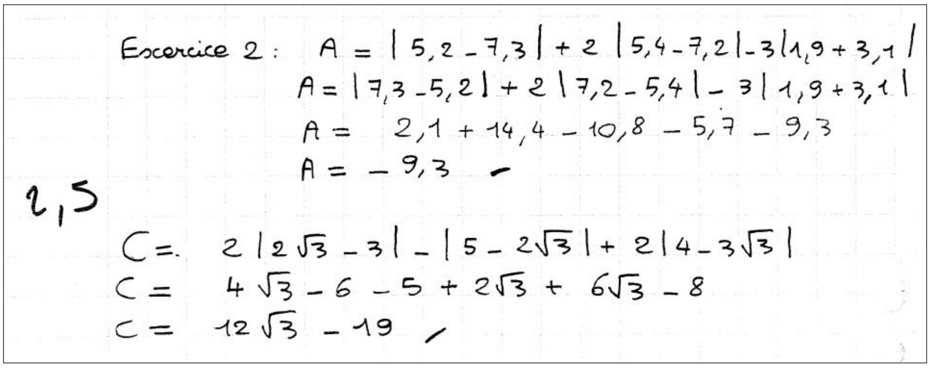

Excercice 2 : $A = |5,2 - 7,3| + 2\,|5,4 - 7,2| - 3\,|1,9 + 3,1|$
$A = |7,3 - 5,2| + 2\,|7,2 - 5,4| - 3\,|1,9 + 3,1|$
$A = 2,1 + 14,4 - 10,8 - 5,7 - 9,3$
$A = -9,3$
2,5
$C = 2\,|2\sqrt{3} - 3| - |5 - 2\sqrt{3}| + 2\,|4 - 3\sqrt{3}|$
$C = 4\sqrt{3} - 6 - 5 + 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 8$
$C = 12\sqrt{3} - 19$

Figure 68 : Copie de Diego du 16 novembre 2007. Exercice 2.

Les deux barres fonctionnent alors comme des parenthèses. Les égalités produites ne sont donc pas fausses mais Diego comprend-il bien le sens de la technique utilisée ? Pour passer de la deuxième ligne à la troisième, Diego ne met pas tous les nombres dont il cherche la valeur absolue sous la forme canonique, il ne le fait que pour le premier. Est-ce que l'écriture de la forme $a|b+c|$ proche de $a(b+c)$ déclenche chez lui automatiquement la mise en œuvre d'une technique de développement ? Cela l'amène apparemment à utiliser la « distributivité » de la multiplication par rapport à l'addition dans le cas suivant :

$$a \times |b+c| = a \times b + a \times c \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$$

Cette règle étant erronée puisque l'égalité est fausse dans le cas où $b+c$ est strictement négatif. Diego ne fait cependant pas d'erreur puisque le nombre b+c est positif dans le contexte où il utilise cette *règle-élève*.

Pour le calcul du nombre C, les intermédiaires n'étant pas écrits, il est difficile de savoir exactement ce qui a été fait. C'est la technique dite *de l'échange* qui semble avoir été mise en œuvre. Je note que Diego semble avoir une bonne maîtrise des techniques de calcul qui paraissent fiables, mais il est difficile de savoir sur quels éléments technologiques et théoriques il étaye ces techniques.

Peut-être qu'il a appris une technique entre les spécimens A et C et qu'il l'applique avec davantage de maîtrise dans le C ?

La copie de Pauline

Je m'intéresse au devoir de Pauline qui n'a pas utilisé la même technique que Diego pour le A et n'a pas su répondre pour le C (Cf. figure ci-dessous).

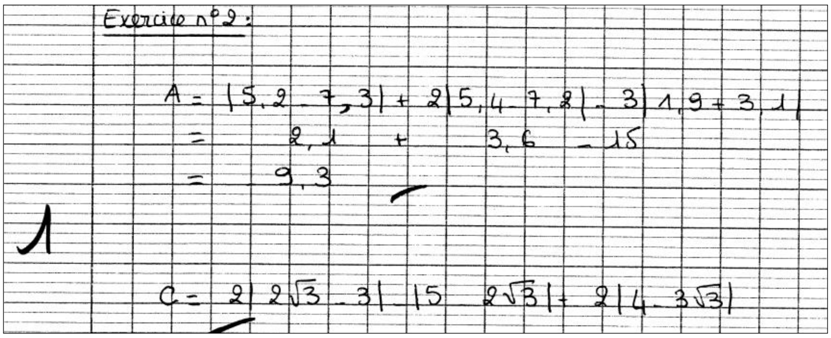

Exercice n°2 :
$A = |5,2 - 7,3| + 2|5,4 - 7,2| - 3|1,9 + 3,1|$
$= 2,1 + 3,6 - 15$
$= -9,3$
1
$C = 2|2\sqrt{3} - 3| - |5 - 2\sqrt{3}| + 2|4 - 3\sqrt{3}|$

Figure 69 : Copie de Pauline du 16 novembre 2007. Exercice 2.

Pauline a utilisé la technique que j'avais appelée *la technique du calcul direct*. Pour des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'une écriture décimale elle sait trouver la valeur absolue, mais avec les nombres irrationnels du C cette technique ne fonctionne plus et Pauline ne sait pas répondre.

Les copies de Julien et de Lucas

Julien, comme Pauline, écrit très peu d'intermédiaires pour le premier calcul et se trompe uniquement dans le résultat final, mais il semble utiliser la même technique que Pauline. Pour le calcul du C il écrit très exactement la même chose que Diego.

Quant à Lucas (Cf. Figure 70 et Figure 71), ses deux calculs sont faux avec de nombreuses erreurs, et il traite les « deux barres » comme si c'étaient des parenthèses, en particulier en utilisant la règle de la « fausse distributivité » signalée dans le cas de Diego.

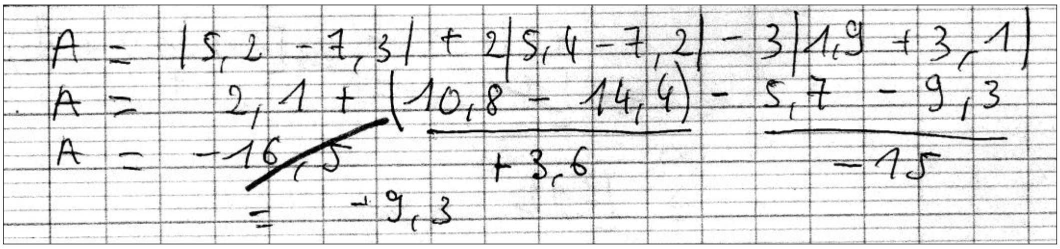

$A = |5,2 - 7,3| + 2|5,4 - 7,2| - 3|1,9 + 3,1|$
$A = 2,1 + (10,8 - 14,4) - 5,7 - 9,3$
$A = \cancel{-16,5}$ $+3,6$ -15
$= -9,3$

Figure 70 : Copie de Lucas du 16 novembre 2007. Exercice 2.

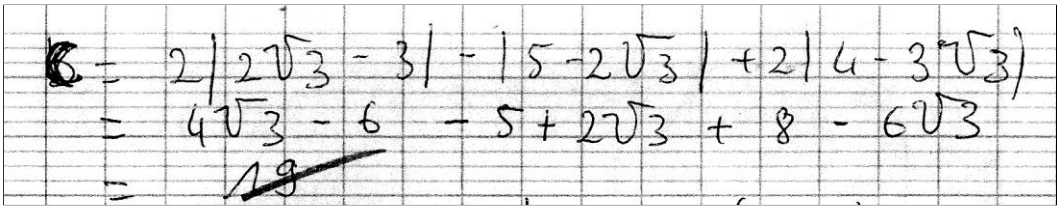

$C = 2|2\sqrt{3} - 3| - |5 - 2\sqrt{3}| + 2|4 - 3\sqrt{3}|$
$= 4\sqrt{3} - 6 - 5 + 2\sqrt{3} + 8 - 6\sqrt{3}$
$= \cancel{19}$
$=$

Figure 71 : Copie de Lucas du 16 novembre 2007. Exercice 2.

Cette extension de la distributivité est bien visible dans la deuxième ligne du calcul des spécimens A et C

Conclusion

Les techniques de calcul sur ce type d'expression numérique de l'exercice 2 ne sont pas encore bien assurées. La technique *du calcul direct* n'est pas choisie quand elle serait la plus pertinente. De plus quand les élèves l'utilisent, n'ont-ils pas fait les calculs avec la machine ce qui expliquerait qu'il y ait peu d'intermédiaires ?

La gestion de l'écriture symbolique avec la présence des « deux barres » reste une difficulté pour les élèves, mais est-ce qu'elle ne révèle pas un manque de connaissances des éléments du bloc technologico-théorique des praxéologies mises en œuvre ?

Les nombres irrationnels du type $a + b\sqrt{c}$ (a et b étant des rationnels et c un entier qui n'est pas un carré parfait) sont au service de la valeur absolue pour rendre plus problématique l'identification du signe du nombre dont on cherche la valeur absolue et ils favorisent certaines techniques. Ils jouent ainsi le rôle de variables didactiques.

Je remarque que ces quatre élèves de Clotilde utilisent bien le signe d'égalité contrairement à ce que j'avais repéré chez les élèves de Mathieu. Est-ce que le sens qu'ils donnent à ce signe est conforme à l'épistémologie des mathématiques ? Je ne peux pas le savoir.

8.5.1.2 La première question de l'exercice 3 du devoir du 16 novembre 2007

Je vais examiner les réponses des quatre élèves aux trois questions de l'exercice 3 que je reproduis ci-dessous (sujet n°2).

Exercice 3 (6,5 points)

1. Résoudre les équations et les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$
   a. $|5 + x| = 8$
   b. $|4 - 2x| \geq 3$
   c. $|-x - \pi| \leqslant - 3$

Figure 72 : exercice 3 du devoir du 16 novembre 2007chez Clotilde

Je vais me référer d'une part au Tableau 29 (Cf. p. 140), pour reprendre les notations utilisées qui identifient les différents types de tâches, et d'autre part aux praxéologies ponctuelles relatives à ces types de tâches qui ont été développées dans la section 8.3.2 (p. 147). J'avais décrit dans cette section une *technique géométrique* et une *technique algébrique* pour résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue comportant une valeur absolue (T_{a2}). Je vais de la même manière différencier une technique géométrique (abrégée en techn. géo.) et une technique algébrique (abrégé en techn. alg.) pour la résolution d'équations du premier degré à une inconnue comportant une valeur absolue (T_{a1}). Le tableau suivant reprend les notations précédentes et indique aussi si l'élève est parvenu à répondre à la question de façon juste ou fausse (abrégés en J ou F). Je signale également les élèves qui ont donné la réponse en utilisant le registre du dessin représentant la droite graduée avant de donner l'ensemble des solutions à l'aide d'intervalles ou d'ensembles (sous la forme $S = \{\ldots\}$ ou S=∅).

Type de tâches	T_{a1}		T_{a2}		T_{a2}	
Spécimen du sujet n°2	a. $\lvert 5 + x\rvert = 8$		b. $\lvert 4 - 2x\rvert \geq 3$		c. $\lvert -x - \pi\rvert \leqslant - 3$	
Diego Sujet n°2	Techn. alg.	J	Techn. alg. et droite graduée	J Int.	Techn. alg. et droite graduée	J
Julien Sujet n°1	Techn. alg.	J	Techn. alg.	J	Techn. alg.	F
Pauline Sujet n°2	Techn. alg.	J	Techn. alg. et droite graduée	F	Techn. alg. et droite graduée	F
Lucas Sujet n°2		F	Techn. alg.	J	Techn. alg.	F

Tableau 38 : réponses d'élèves à l'exercice 3 du devoir du 16 novembre 2007

La résolution de l'équation du a.

Pour le premier spécimen, tous les élèves utilisent une technique algébrique fondée sur l'énoncé théorique suivant tel qu'il est inscrit dans le cahier de cours chez Clotilde :

> Pour tout x réel :
>
> Si $x \geq 0$, alors $|x| = x$ et si $x \leq 0$, alors $|x| = -x$

J'ai déjà souligné que le déficit de langage naturel ne favorisait pas la compréhension de cette propriété (cet énoncé a ce statut dans l'élaboration de la logique du cours de Clotilde). Dans les écrits de Lucas (Cf. Figure 73) on peut voir les conséquences du manque de compréhension de l'objet valeur absolue.

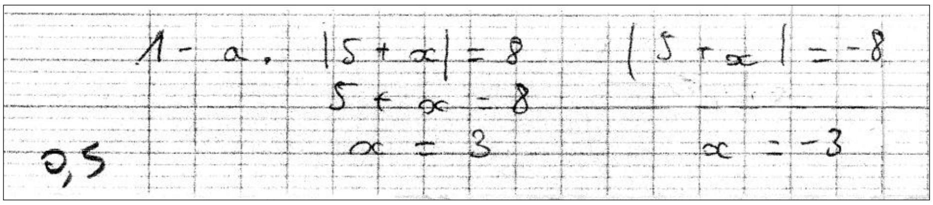


Figure 73 : copie de Lucas. Devoir du 16 novembre 2007. Exercice 3.

Pourtant Clotilde a martelé qu'une valeur absolue est toujours positive, ce qui n'empêche pas Lucas d'écrire qu'une valeur absolue est égale au nombre -8. Cependant ce type d'erreur n'est pas répété par Lucas pour les questions suivantes. Une autre erreur apparaît dans le travail de Lucas, il semblerait qu'un raisonnement implicite soit le suivant : puisque la solution de l'équation $|5 + x| = 8$ est le nombre 3, alors la solution de $|5 + x| = -8$ est -3. Pour Lucas le domaine numérique n'est pas articulé avec le domaine algébrique et il se prive d'une vérification rapide qui aurait prouvé que $|5 + (-3)| = 2$ et n'est pas égal à -8. Mais le numérique n'est pas convoqué comme outil de vérification des procédures algébriques.

Les trois autres élèves résolvent l'équation en utilisant la technique algébrique et aucun d'entre eux n'utilise le registre graphique.

J'ajoute une autre technique possible pour la tâche de résolution de l'équation qui pourrait être dénommée *technique arithmétique* : il faut trouver tous les réels tels qu'en ajoutant 5 au nombre cherché on obtienne une somme dont la valeur absolue est égale à 8. Il y a deux possibilités :

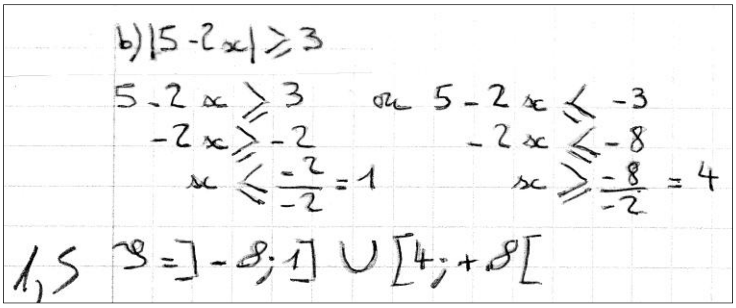
- soit la somme vaut 8 et une solution est la différence de 8 et de 5 c'est donc $8 - 5$ c'est à dire 3 ;
- soit la somme vaut -8 et une solution est la différence de -8 et de 5 c'est donc $-8 - 5$ c'est-à-dire -13.

Les solutions sont donc 3 et à -13.

Cette technique arithmétique est fort peu probable dans la classe de Clotilde où les nombres ne sont pas *réifiés* et où des techniques standardisées sont travaillées de façon formelle. Cette technique arithmétique serait pourtant pertinente pour ce spécimen et permettrait d'articuler des connaissances anciennes sur les opérations avec des connaissances nouvelles comme la notion de valeur absolue. Ce type de raisonnement favoriserait la solidité des apprentissages des élèves. Ce serait une occasion de *reprise en lien avec du nouveau* et également une occasion de travailler le NAA.

La résolution de l'inéquation du b.

Les quatre élèves ont utilisé une technique algébrique comme on peut le voir dans la réponse de Julien (Cf. Figure 74).


b) $|5-2x| \geq 3$

$5-2x \geq 3$ ou $5-2x \leq -3$

$-2x \geq -2$ $\quad$ $-2x \leq -8$

$x \leq \frac{-2}{-2} = 1$ $\quad$ $x \geq \frac{-8}{-2} = 4$

1,5 $\quad$ $S =]-\infty;1] \cup [4;+\infty[$

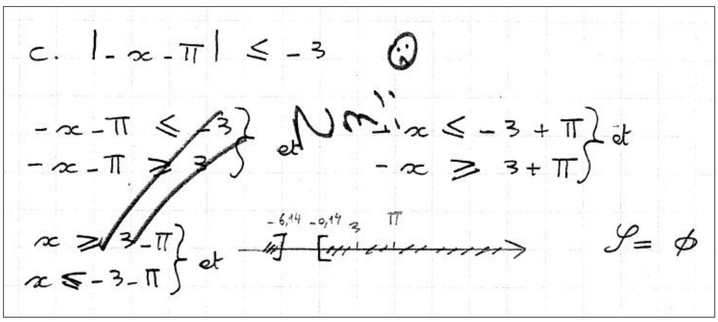
Figure 74 : Julien. Devoir du 16 novembre 2007. Ex. 2.

Seule Pauline n'a pas abouti à la réponse juste en faisant des erreurs liées aux transformations des inéquations. Diego représente les solutions sur la droite graduée avant de donner la réponse à l'aide d'intervalles. Pauline utilise la droite graduée apparemment comme outil d'aide mais elle la laisse en marge de sa réponse. Elle semble avoir compris l'utilité du registre graphique pour visualiser les solutions sur la droite et elle en a fait un outil d'aide personnel.

Je remarque que la technique géométrique n'a pas été travaillée par Clotilde et n'apparaît pas dans les réponses, ce qui est cohérent. J'avais montré comment Mathieu avait privilégié cette technique et comment ses élèves utilisaient soit la technique géométrique, soit la technique algébrique, même si ce n'était pas toujours de façon rigoureuse.

La résolution de l'inéquation du c.

Les réponses des quatre élèves correspondent à la même praxéologie : celle qui a été mise en œuvre pour le spécimen précédent. Les élèves se comportent en parfaits calculateurs aveugles et Diego réussit même à résoudre l'inéquation en utilisant sans erreur la technique algébrique (Cf. Figure 75).


c. $|-x-\pi| \leq -3$

$-x-\pi \leq 3$ et $-x-\pi \geq 3$ $\quad$ $x \leq -3+\pi$ et $-x \geq 3+\pi$

$x \geq 3-\pi$ et $x \leq -3-\pi$ $\quad$ $-6{,}14$ $\quad$ $-0{,}14$ $\quad$ 3 $\quad$ π $\quad$ $S = \emptyset$

Figure 75 Diego. Devoir du 16 novembre 2007. Ex. 3.

Pourquoi Clotilde barre-t-elle cette réponse et pourquoi ne met-elle aucun point à Diego[1] ? Le raisonnement est valide, même si une technique arithmétique aurait été évidemment beaucoup plus rapide et efficace ! On voit que Diego sait utiliser des valeurs approchées décimales pour placer des points de coordonnées irrationnelles sur la droite graduée, mais en faisant cela il remplace les valeurs exactes des bornes par ces valeurs approchées.

Pauline, comme Julien et Lucas, a bien commencé la mise en œuvre de la technique algébrique, mais, comme les deux autres élèves, elle fait des erreurs par la suite (Cf. Figure 76). Elle divise chaque membre de l'inéquation par le nombre -1 ce qui l'amène ensuite à faire cette transformation erronée : $\frac{-3+\pi}{-1} = \frac{3+\pi}{1}$, le discours technologique de Pauline était peut-être de se dire que les deux signes moins se barraient ! Cette procédure est fréquente chez les élèves et révèle le plus souvent un manque de connaissances des conditions d'application des énoncés théoriques dans le domaine numérique (Bellard & al. 2005). Je note également que Pauline conserve les écritures sous la forme de quotients avec un dénominateur égal à -1 pour l'un et 1 pour l'autre sans rechercher une écriture canonique plus simple à manipuler et à appréhender. Cette façon de faire montre que cette élève ne cherche pas à réifier le nombre, elle est uniquement dans la manipulation formelle de signes en suivant des savoir-faire stéréotypés. Dans la marge de la copie de Pauline on peut voir le dessin qu'elle a fait apparemment comme outil pour visualiser les intervalles de la réponse.

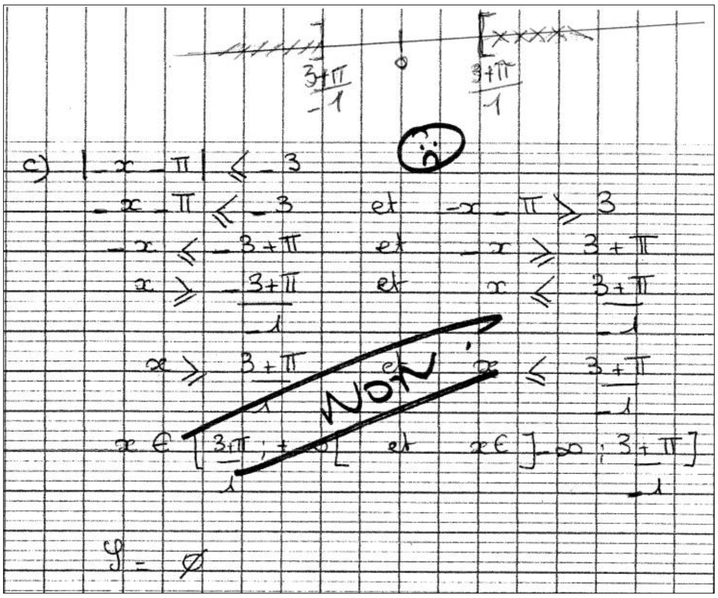


Figure 76 : Pauline. Devoir du 16 novembre 2007. Ex.3.

[1] Je remarque avec amusement le côté moderne de Clotilde qui s'exprime comme ses élèves avec des « smilies » ! Les annotations des professeurs sur les devoirs changent et marquent une époque !

J'ai déjà souligné la rupture opérée avec le spécimen c. (Cf. section 8.2.4.2 p. 143) alors que ce cas n'avait pas été rencontré dans le travail de la classe. Ce spécimen est intéressant dans la mesure où il peut permettre de vérifier si les élèves utilisent des techniques en aveugle ou s'ils cherchent en priorité à adapter la technique la plus pertinente par rapport à la tâche donnée. Mais dans la classe de Clotilde le travail habituel vise à répéter des techniques pour qu'elles deviennent routinières. Les nombres rencontrés dans les activités mathématiques dans cette classe ne sont pas appréhendés en tant qu'objets numériques pouvant être évoqués par une valeur exacte ou approchée. Même les calculs les plus simples sont faits avec la calculatrice à la demande même du professeur. Dans ces conditions la rupture est très forte entre les domaines numérique et algébrique et ce n'est pas étonnant que les élèves se lancent dans l'utilisation de certaines techniques mémorisées en fonction de types de questions qui déclenchent de façon réflexe la mise en œuvre de réponses stéréotypées. Ce constat me permet de plaider encore une fois pour développer des problèmes qui sollicitent le travail du NAA.

8.5.1.3 La deuxième question de l'exercice 3 du devoir du 16 novembre 2007

Je rappelle la deuxième question de l'exercice 3 (pour le sujet n°2) que j'avais déjà mentionnée comme étant une question particulière dans la section 8.2.4.1 (p. 142).

2. Déterminer une équation ou une inéquation ayant pour ensemble de solutions :
   a. L'ensemble des solutions est –1 et 5.
   b. $S = [\ 3-\sqrt{2}\ ;3+\sqrt{2}\ ]$

Figure 77 : exercice 3 du devoir du 16 novembre 2007 chez Clotilde

C'est un exercice dans lequel il faut produire une valeur absolue, il appartient à un genre de tâches très rare de façon générale.

Une question en rupture avec les connaissances construites chez les élèves

Dans le devoir donné par Mathieu le 2 décembre 2006 figurait une question du même type (Cf. section 8.3.7.3 p. 168). Les remarques que j'avais faites lorsque j'ai analysé le devoir donné par Mathieu sont encore valables pour les élèves de la classe de Clotilde, cette question du devoir est certainement déroutante et problématique pour les élèves.

J'ai recherché dans les cahiers des élèves des exercices travaillés en classe qui pouvaient nécessiter la production d'une valeur absolue. J'ai trouvé un exercice qui avait été travaillé dans les classes de Mathieu comme de Clotilde. C'est l'exercice numéro 67 de la page 48 (Cf. p. 163), que je reproduis de nouveau page suivante.

67 Recopier le tableau et le compléter.

	intervalle(s)	inégalité(s)	représentation	valeur absolue
a)	$]-\infty\,;3[\ \cup\ ]5\,;+\infty[$	$x<3$ ou $x>5$	3 5	$\lvert x-4\rvert \ldots 1$
b)		$-2 \leqslant x \leqslant 2$		
c)			$-2{,}7$ $-1{,}3$	
d)				$\lvert x+3\rvert < 0{,}01$
e)		$x \leqslant -\frac{1}{3}$ ou $x \geqslant \frac{4}{7}$		

Figure 78 : exercice n°67 page 48 travaillé dans les classes de Mathieu et de Clotilde

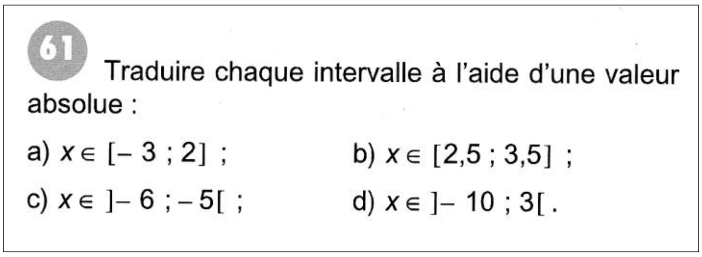
L'exercice n°67 et la question posée dans le devoir semblent mettre en œuvre le même type de tâches à première vue. En particulier la question b) du devoir nécessite de produire une inéquation comportant une valeur absolue. De la même façon dans cet exercice n° 67 du livre, il faut trouver une expression contenant une valeur absolue, qui traduise une donnée présentée sous la forme d'intervalles, d'inégalités, ou d'un dessin utilisant la droite graduée. Dans l'exercice du livre, il s'agit en fait d'opérer des conversions de registres appartenant à deux cadres différents : d'une part le cadre numérique pour les intervalles, les inégalités et les valeurs absolues, et d'autre part le cadre géométrique pour la droite graduée. En revanche dans la question posée dans le devoir de Clotilde il faut relier un ensemble de solutions à une équation ou une inéquation. La nature de la question n'est plus la même que celle de l'exercice 67. Ce n'est plus une conversion qu'il faut opérer. Par exemple pour la question b. du devoir, il faut partir de la donnée d'un intervalle qui représente les solutions, pour parvenir à trouver un objet du cadre algébrique : une inéquation. Dans l'exercice n° 67, le signe « $|x+3| < 0{,}01$ » a pour sens une « inégalité où figure une valeur absolue », alors que dans le devoir ce même signe a un autre sens qui est celui d'une « inéquation ». Les élèves sauront-ils rapprocher ces deux types de tâches ? Les éléments de comparaison précédents sont repris dans le tableau suivant.

	Exercice n° 67 p. 48 3e ligne	Question 2 b) du devoir
Présentation des données	$-2{,}7$ $-1{,}3$	**b.** $S = [\ 3-\sqrt{2}\ ;3+\sqrt{2}\ ]$
Objectif : il faut produire	une « valeur absolue »	une inéquation
Nature de la tâche	Conversion de registres	Trouver une inéquation dont on connait les solutions
Nature de la praxéologie	numérique	algébrique
Nature des nombres en jeu	décimaux	irrationnels

Tableau 39 ; comparaison de l'exercice n°67 et de la question 2 b) du devoir de Clotilde

Le travail d'une technique pour répondre à la question 2.b. dans la classe de Clotilde

Dans la classe de Clotilde j'ai trouvé un autre exercice qui nécessitait la production d'une valeur absolue. Je m'arrête sur l'analyse de cet exercice proche de l'exercice 67 et qui n'avait pas été travaillé dans la classe de Mathieu, c'est l'exercice 61 de la page 47 (Cf. Figure 79).


61 Traduire chaque intervalle à l'aide d'une valeur absolue :

a) $x \in [-3 ; 2]$; b) $x \in [2,5 ; 3,5]$;

c) $x \in]-6 ; -5[$; d) $x \in]-10 ; 3[$.

Figure 79 : exercice n°61 p.47

Dans le cahier d'exercices de Zoé cet exercice se trouve à deux endroits. Une première fois avec les réponses personnelles de Zoé qui n'ont pas été corrigées (Cf. Figure 80), et une deuxième fois un peu plus loin avec vraisemblablement une correction faite en classe.

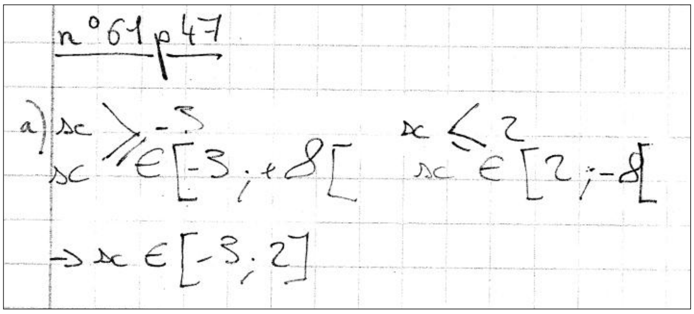


Figure 80 : Zoé, ex. n°61 p. 47, réponse personnelle

Je n'ai reproduit que la réponse du cas a) de l'exercice numéro 61 du cahier de Zoé, mais les quatre réponses suivent la même « logique ». Zoé effectue des conversions qui sont presque toutes justes mais qui ne répondent pas à la question posée. Zoé n'a visiblement pas compris le but à atteindre, il semblerait qu'elle veuille justifier l'écriture de l'intervalle donné dans l'exercice. Quelques pages plus loin se trouve la correction de cet exercice et une technique est explicitée (Cf. Figure 81 page suivante).

Une erreur réside dans l'écriture de l'intervalle $[2 ; -\infty[$ dont les bornes sont inversées. Le non respect de la règle d'écriture des bornes dans la notation des intervalles avait déjà été repéré dans le cahier d'exercices de Zoé. Est-ce que cette règle de formation a été explicitée dans la classe ? Est-ce que le professeur l'a identifiée comme faisant partie des savoirs à enseigner ?

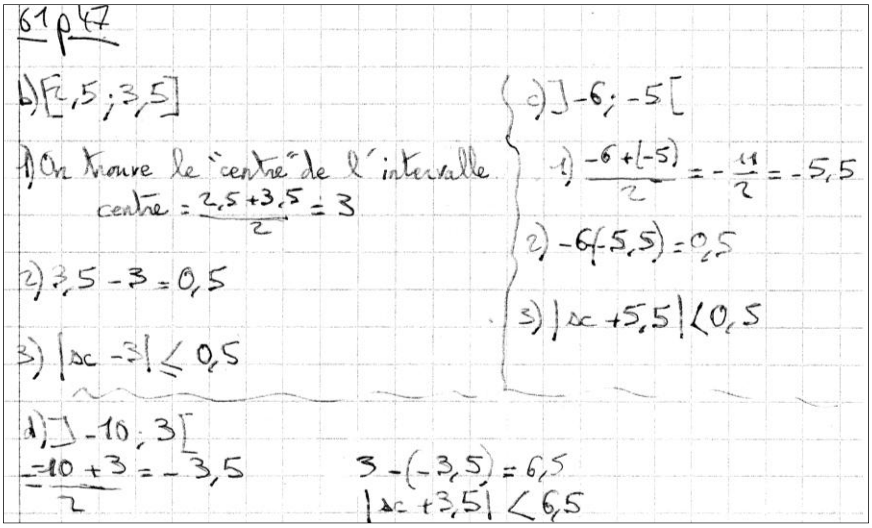


Figure 81 : correction de l'exercice n° 61 dans le cahier de Zoé

La technique est détaillée en trois étapes[1] pour le type de tâches : « convertir un intervalle en utilisant une valeur absolue ». Je souligne que la technique repose sur des procédures de calculs qui peuvent ne pas avoir d'autre raison d'être pour les élèves que « il faut faire çà, le professeur l'a dit ». La technologie pourrait être seulement le programme de calcul suivant dans le cas de la conversion d'un intervalle fermé :

1°) calculer la demi-somme des bornes de l'intervalle, on trouve un nombre c ;

2°) calculer la différence entre la plus grande borne et le nombre c, on trouve un nombre d ;

3°) la réponse cherchée est $|x - c| \leq d$.

Je ne connais pas le discours technologique de Clotilde pendant qu'elle a fait écrire ces trois étapes, mais ce qui reste comme traces écrites dans le cahier de Zoé ne permet pas de garder la mémoire de cette technologie, sauf à paraphraser comme je l'ai fait précédemment des étapes de calculs.

Pourtant cette technique, dite *technique des trois étapes*, pourrait être justifiée par le recours au registre graphique et à la notion de distance entre points d'une part et entre nombres d'autre part. Ainsi pour le spécimen du b) par exemple, on obtiendrait la conclusion que l'intervalle [2,5 ; 3,5] correspond à l'ensemble des nombres dont la distance au nombre 3 est inférieure à 0,5 et la représentation sur une droite graduée donnerait certainement plus de solidité et de sens à la technique explicitée par Clotilde.

Est-ce que les élèves de Clotilde vont avoir recours à cette technique pour la deuxième question de l'exercice 3 du devoir ? Les considérations qui précèdent permettent d'anticiper que les élèves vont être en difficulté pour cette question.

[1] Une erreur figure dans le cahier de Zoé dans la deuxième étape du spécimen c). Est-ce une erreur produite en copiant le tableau ?

Analyse des réponses des élèves à la question 2.

Pour cette question 2 de l'exercice 3, les énoncés des deux sujets sont identiques. Les réponses des quatre élèves sont répertoriées dans le Tableau 40. La technique en trois temps qui avait été travaillée dans l'exercice numéro 61 n'est pas reprise. Les réponses sont en général données sans explication.

Type de tâches	2. Déterminer une équation ou une inéquation ayant pour ensemble de solutions :			
	a. L'ensemble des solutions est -1 et 5.		b. $S = [\ 3-\sqrt{2}\ ; 3+\sqrt{2}\ ]$	
Diego Sujet n°2	$\lvert -2+x \rvert = 3$	J	Utilisation du registre graphique $\lvert -3+x \rvert = \sqrt{2}$	F
Julien Sujet n°1	Réponse donnée sans explication $\lvert 2-x \rvert\ 3$ (signe égal non marqué)	F	Réponse donnée sans explication $\lvert -3+x \rvert = \sqrt{2}$	F
Pauline Sujet n°2	Pas de réponse		Pas de réponse	
Lucas Sujet n°2	Réponse donnée sans explication $\lvert x-2 \rvert = 3$	J	Réponse donnée sans explication $\lvert x-6 \rvert \leq \sqrt{2}$	F

Tableau 40 : réponses des élèves à la question 2 du devoir du 16 novembre chez Clotilde

Les réponses de Diego montrent qu'il a été dérouté par la question comme on peut le voir dans la Figure 82.

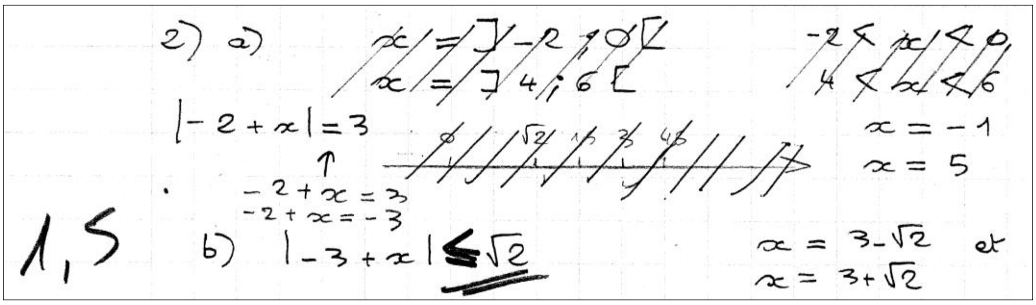


Figure 82 : devoir de Diego. Exercice 3 ; 2°)

Pour la recherche dans le cas a) d'une équation ou d'une inéquation ayant pour solutions -1 et 5 Diego part sur l'idée de deux intervalles de centres respectifs -1 et 5. L'écriture $x =]-2\,;0[$ est incorrecte. Quel est le sens que lui donne Diego ? Pour le cas du b), Diego a recours à la droite graduée où apparaissent les nombres 0, $\sqrt{2}$ et 3 ainsi que les valeurs approchées 1,5 et 4,5 des nombres $3-\sqrt{2}$ et $3+\sqrt{2}$. La question est problématique pour Diego ce qui se traduit par des essais infructueux, alors que le reste du devoir ne présente aucune rature. Diego n'a pas su réinvestir la *technique des trois étapes*.

Une réponse possible mais hors contrat pour le 2°) a.

Clotilde contrairement à Mathieu n'a pas précisé que l'équation ou l'inéquation cherchées comportaient des valeurs absolues. Une réponse possible comme équation ayant pour solutions les nombres -1 et 5 est aussi : $(x-5)(x+1) = 0$. Les élèves de seconde ont déjà rencontré ce type d'équation en troisième et auraient pu produire cette réponse. Cependant cette connaissance n'a pas été réactivée (aucune équation de ce type ne figure dans le cahier d'exercice des élèves avant la date du devoir) et n'est pas disponible dans le milieu. Il aurait été intéressant que Clotilde rompe avec la règle du contrat didactique « il faut se servir des connaissances de la séquence en cours » pour proposer dans la correction plusieurs réponses possibles et notamment une équation produit. Or dans la feuille de correction donnée par Clotilde, il ne figure que l'équation $|x-2|=3$ donnée sans explication.

Analyse de l'exercice 4

Je rappelle l'énoncé de l'exercice 4 dans la Figure 83 (pour la première question il faut lire « Soit » à la place de « Sit », aucun des quatre élèves n'a corrigé cette coquille sur son énoncé de devoir).

Exercice 4 (5 points)

1. Sit x un réel supérieur à 3.
L'aire du rectangle de côtés $x+1$ et $x-3$ est inférieure à l'aire du carré de côté $x-2$.
Déterminer l'ensemble solution pour x.

2. On connaît l'imprécision de la mesure en cm, des côtés x et y d'un parallélogramme :
$|x-3{,}2| \leqslant 0{,}2$ et $|y-25{,}3| \leqslant 0{,}1$.
a) Déterminer un encadrement de x , de y et du périmètre P de ce parallélogramme
b) Etablir une inégalité sous la forme $|P-c| \leqslant r$.

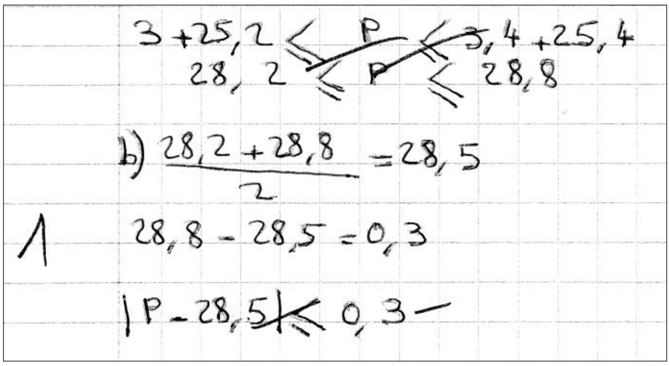
Figure 83 : exercice 4 du devoir du 16 novembre chez Clotilde

Je vais m'intéresser dans cet exercice à deux points particuliers : la tâche de développement nécessaire comme outil de résolution dans la première question d'une part, et la tâche de conversion dans la question b) de la deuxième question d'autre part.

Type de tâches	Développement du 1°) et recours à la double distributivité et à l'identité remarquable $(a-b)^2$		Passage de $a \leq P \leq b$ à $|P-c| \leq r$	
Diego Sujet n°2	oui	J	$56{,}4 \leq P \leq 57{,}6$ $|P-57| \leq 0{,}6$ Passage sans aucune explication	J
Julien Sujet n°1	Non $(x+1)(x-3) < (x-2)^2$ $2x-3 < 2x-4$	F	$28{,}2 \leq P \leq 28{,}8$ $|P-28{,}5| \leq 0{,}3$ Technique du n°61 (Cf. Figure 84)	J
Pauline Sujet n°2	recours uniquement à la double distributivité	J	Pas traité	
Lucas Sujet n°2	oui	J	$50{,}4 \leq P \leq 50{,}8$ $|P-c| \leq r$ $|P-(-0{,}1)| \leq 50{,}6$	F

Tableau 41 : comparaison des réponses de 4 élèves pour l'exercice4 du devoir

Julien utilise la *technique des trois étapes* de façon correcte (même s'il part d'un encadrement qui n'est pas juste dans le contexte de l'exercice). La technique est bien reprise conformément aux trois étapes du cahier d'exercices (Cf. p. Figure 81 p. 246).



$3 + 25{,}2 \leq P \leq 3{,}4 + 25{,}4$

$28{,}2 \leq P \leq 28{,}8$

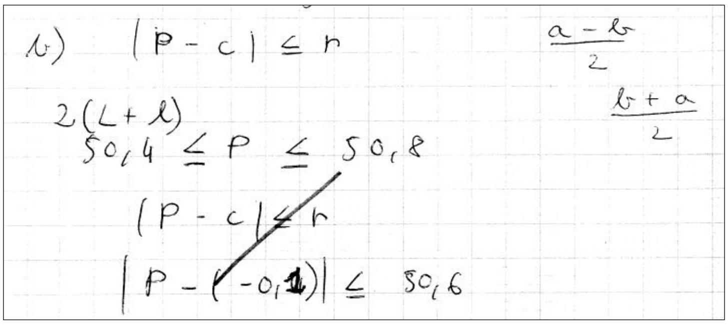
b) $\dfrac{28{,}2 + 28{,}8}{2} = 28{,}5$

1 $28{,}8 - 28{,}5 = 0{,}3$

$|P - 28{,}5| \leq 0{,}3$

Figure 84 : Julien. Devoir du 16 novembre. Ex. 4. 2°)

Lucas (Cf. Figure 85) semble chercher à se remémorer la formule donnant le centre *c* de l'intervalle et il trouve bien le nombre 50,6. Est-ce que le quotient $\frac{a-b}{2}$ montre une hésitation ou bien est-ce l'expression du calcul du rayon de l'intervalle ?



b) $|P - c| \leq r$ $\qquad \dfrac{a-b}{2}$

$2(L + l)$ $\qquad \dfrac{b+a}{2}$

$50{,}4 \leq P \leq 50{,}8$

$\cancel{|P - c| \leq r}$

$|P - (-0{,}1)| \leq 50{,}6$

Figure 85 : Lucas. Devoir du 16 novembre. Ex. 4. 2°)

Mais la *technique des trois étapes* est suivie approximativement et Lucas hésite sur le nombre *d* (Cf. p. 246). Est-il égal à 0,4 qui a été barré ou bien à 0,1 (à moins que ce ne soit 0,2 qui est écrit) ? De plus Lucas se trompe pour placer les nombres *c* et *d*, ce qui étaye le manque de moyens de vérification pour l'élève sur le déroulement de la technique. Des éléments technologiques manquent certainement à Lucas pour être capable de contrôler son travail mathématique autrement qu'en refaisant pas à pas le déroulement de sa technique.

Un nouveau point de vue sur la reprise

La *reprise* est également une notion personnelle : comment reprendre une démarche mathématique autrement qu'en invoquant des qualités d'attention et de persévérance et autrement qu'en refaisant méthodiquement le parcours déjà réalisé ? Cette question rejoint la question insistante que Chevallard pose depuis longtemps aux professeurs : comment dépasser cette conception de l'enseignement qui se réduit à l'enseignement de réponses estampillées par les coutumes scolaires ? Un genre de tâches pourrait être intégré dans les activités à faire travailler aux élèves : « vérifier une démarche sans la refaire à l'identique ». Dans le cas présent, un changement de cadre pour considérer les nombres donnés comme étant les abscisses de points et un changement de point de vue pour appréhender l'inégalité recherchée comme exprimant la distance du nombre P à un autre nombre, seraient une réponse pour ce genre de tâches.

8.5.1.4 Conclusion

Ce qui apparaît le plus fortement dans les copies des élèves de Clotilde c'est le manque de flexibilité pour changer de point de vue ou pour changer de cadre. Des techniques semblent reproduites en confiant l'essentiel du contrôle à l'attention portée sur la reproduction par mimétisme. En particulier les techniques sont essentiellement numériques et sont peu contrôlées par le registre graphique du cadre géométrique de la droite graduée. Les nombres sont travaillés en tant que signes, ainsi un travail formel relatif à des valeurs absolues négatives peuvent fort bien se dérouler. Je mets ce constat en rapport avec la troisième hypothèse relative à l'incomplétude des praxéologies (Cf. section 3.3 p. 35). Les élèves semblent être privés des raisons mathématiques qui justifient pourtant les techniques mises en œuvre, et qui plus est, les éclaire.

J'avais souligné chez les élèves de Mathieu l'absence presque totale du langage naturel. Le même phénomène se produit pour les élèves de Clotilde. Dans la copie de Diego, j'ai dénombré : quatre fois « soit », six fois « ou », quatre fois « et », et enfin deux fois « admet deux solutions ». La réhabilitation du registre du langage naturel dans tous les domaines des mathématiques est certainement une cause à défendre comme condition nécessaire du processus de conceptualisation.

Je note que trois de ces élèves sur les quatre sont capables de faire deux développements de façon correcte alors qu'ils sont rencontrés en tant qu'outils de résolution de problème. L'entraînement systématique au calcul algébrique organisé par Clotilde semble porter ses fruits. Mais est-ce représentatif de l'ensemble de la classe et comment concilier ce type d'entraînement avec des résolutions de véritables problèmes ?

8.6 Analyse des apprentissages des élèves à la lumière des entretiens

8.6.1 Entretien avec des élèves de Mathieu

Charly, Anissa et Maël, des élèves de la classe de Mathieu, ont accepté de répondre à mes questions lors d'un entretien en dehors de la classe le 6 février 2007. Ce sont trois élèves avec des niveaux différents (respectivement en difficulté, moyen, très bon), mais tous les trois sont volontaires et ont le projet de réussir des études scientifiques et d'avoir le bac S. Ces trois élèves sont évalués ainsi par leur professeur : Charly est un élève travailleur mais qui rencontre des difficultés ; Anissa est très volontaire, elle est très active à l'oral en classe, elle est sérieuse et a des résultats moyens ; Maël est un très bon élève qui aime les mathématiques et qui aime se confronter à la difficulté. Voici des extraits du récit de cet entretien.

> Je pose la question suivante : « qu'est-ce que vous diriez à un élève qui sort de troisième pour expliquer ce que veut dire la valeur absolue d'un nombre ? »
>
> Charly commence et explique « je mets le nombre, je fais plus d'un côté et moins de l'autre et ça donne le nombre. »

Je demande un exemple :

Il répond : « x+3=5 » ; je précise qu'il doit sûrement vouloir dire valeur absolue de x+3, il acquiesce. Il reprend alors l'explication : « je mets –3 ; et +5 d'un côté et –5 de l'autre. »

Je lui dis qu'il est en train de résoudre une équation ou une inéquation mais qu'il ne répond pas à ma question que je répète.

Anissa prend alors la parole pour expliquer ce qu'est la valeur absolue de x et elle fait un schéma en même temps d'une droite graduée où figurent 0 ; -5 et 5. Elle dit c'est 5 entre –5 et 5. Je précise qu'elle veut peut-être dire x, elle reprend donc et dit que x est entre –5 et 5. Je lui demande alors de prendre le nombre +1, alors elle corrige et me dit que valeur absolue de x c'est 5 ou –5.

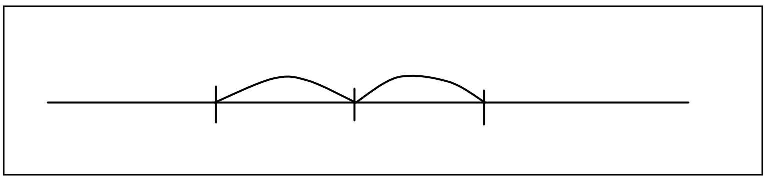
Je leur demande ce que vaut valeur absolue de 4. Maël répond : « c'est 4 ou –4 ». Anissa corrige et dit « c'est la distance de x à... », et elle ne parvient pas à terminer sa phrase.

Je demande encore ce qu'est valeur absolue de x. Maël se lance dans une réponse qu'il ne parvient pas non plus à achever : « c'est la distance de x à ... ». Aucun des trois ne parvient à répondre.

Je finis l'entretien en leur donnant l'explication et les réponses aux questions précédentes, je fais le lien avec ce qu'ils ont rencontré en cinquième qui s'appelait la distance à zéro. Cela ne semble pas les aider, le lien n'est pas visible pour eux.

Paradoxalement, les connaissances les plus élémentaires concernant l'objet valeur absolue ne sont pas maîtrisées par les élèves. Toutes les interprétations en lien avec la valeur absolue apparaissent : le lien avec des tâches algébriques, la relation avec la droite graduée, la définition à partir du signe du nombre, le choix entre le nombre et son opposé, le rapport entre valeur absolue et distance. Mais il ne s'agit que de bribes et aucune de ces conceptions n'est correctement exprimée. Cet entretien confirme les interprétations précédentes sur le manque de sens que les élèves donnent aux techniques employées et aux objets manipulés. Il confirme également l'influence du travail de types de tâches algébriques ainsi que l'impact très grand de la *technique géométrique* de résolution des inéquations comportant une valeur absolue dans la classe de Mathieu. La force de cette technique réside peut être dans un schème (Vergnaud, 1990) qui résulte de l'association entre :

- une représentation sémiotique visuelle sous la forme d'une icône, dessinée d'ailleurs par Anissa :



- un accompagnement oral : on fait plus d'un côté et moins de l'autre ;
- un geste physique de la main pour montrer les deux déplacements de part et d'autre de la valeur moyenne, geste réalisé par Charly lorsqu'il a commencé à expliquer cette technique.

Voilà ce qui peut rester comme apprentissage après enseignement d'une praxéologie mathématique ponctuelle. Evidemment, il doit rester également des techniques solides et bien maîtrisées. L'étude précédente n'est pas exhaustive, mais indicative. Elle permet de repérer des possibles des apprentissages.

Une autre remarque est intéressante, c'est la prégnance des types de tâches que j'ai appelés algébriques concernant le thème de la valeur absolue. Le concept lui-même ne semble pas construit, mais il évoque des situations où il apparaît, à partir d'un ostensif sonore « valeur absolue », ou à partir d'un ostensif visuel « les deux barres ». A la question « qu'est-ce que c'est ? » des élèves apportent la réponse « voilà ce que nous faisons d'habitude avec ».

8.6.2 Entretien avec des élèves de Clotilde

J'ai rencontré trois élèves de la classe de Clotilde, Morgane, Clémentine et Lucas. Voilà comment Clotilde les décrit (ces propos ont été recueillis lors de l'entretien du 10 avril 2008 avec Clotilde) :

- Morgane double la classe de seconde, elle n'est pas sure d'elle, elle est « toujours sur le fil du rasoir », elle est sérieuse mais elle manque de confiance en elle. Le jour d'un contrôle elle baisse les bras tout de suite ;
- Clémentine est très sérieuse, très volontaire, mais elle a des difficultés de compréhension. Elle est avec sa sœur jumelle dans la classe ;
- Lucas c'est solide, il n'a pas beaucoup travaillé en début d'année, mais il s'y est mis et pour l'instant ça reste très solide et très brillant.

L'entretien avec ces trois élèves volontaires a eu lieu le 10 avril 2008. Voici un extrait du récit de cet entretien que j'ai mené de façon analogue à celui de l'année précédente avec les élèves de Mathieu. Les élèves ont chacun une feuille et un stylo pour pouvoir écrire éventuellement s'ils en ont besoin.

> Je demande à Morgane, Clémentine et Lucas de me dire comment ils expliqueraient à un élève qui rentre en seconde ce que c'est que la valeur absolue d'un nombre. Après des rires et des soupirs et un temps de réflexion, Clémentine s'exprime : « je me souviens que des deux barres verticales », Morgane confirme : « oui ». Clémentine complète : « non je me souviens des exos, il y avait ça et ça là et quand il y avait plus et quand celui là il était inférieur… » elle écrit en même temps et montre des éléments de ce qu'elle a écrit (Cf. Figure 86, première ligne). Morgane intervient alors : « non quand il y avait un moins on changeait à l'intérieur je crois ». Lucas précise : « c'est jamais négatif … je crois que c'est une distance en fait » je lui demande de préciser et il ajoute, pas sûr de lui : « c'est une distance, non ? ». J'insiste encore pour savoir ce qu'ils diraient à cet élève, Morgane reprend : « moi je dirais comme elle a dit, je me souviens de deux barres comme ça, je me souviens j'étais passée au tableau c'était sur un exercice comme ça (elle montre la première ligne) et elle m'avait dit qu'il fallait… que c'était jamais négatif, il fallait que j'inverse ». Clémentine réagit alors : « ah oui par exemple quand on a une racine de 3 moins 1 si la racine de 3 était inférieure à 1 (elle l'écrit, voir deuxième ligne), il fallait inverser pour que le plus grand soit ici ». Un peu plus tard je leur demande ce qu'est valeur absolue de 3, Lucas répond c'est 3 ou -3. Ils auront alors envie de faire la droite graduée

(voir la dernière ligne) et d'utiliser le cadre géométrique pour répondre, ce qui ne les aide guère.

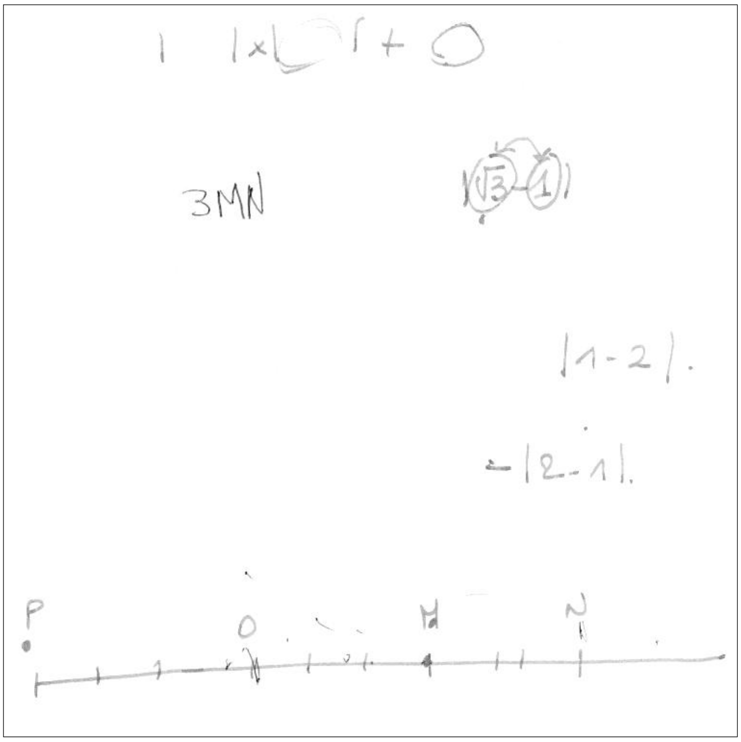


Figure 86 : brouillon de Clémentine le 10 avril 2008

Pour ces trois élèves de Clotilde ce qui reste de l'enseignement de la valeur absolue c'est avant tout une notation : les deux barres. C'est aussi une caractéristique « c'est jamais négatif » et des vestiges de *la technique de l'échange* ainsi que des souvenirs de changements de signes. Mais, comme pour les élèves de Mathieu, la valeur de x est égale à x ou à $-x$. En revanche les types de tâches algébriques ne sont pas évoqués par les élèves, ce qui est cohérent avec les différences observées chez les deux professeurs. La notion de distance si importante dans l'enseignement de Clotilde est présente en écho pour Lucas, mais cela ne l'aide guère, sauf pour justifier que la valeur absolue est positive, mais cela ne l'empêche pas de proposer -3 pour valeur absolue de 3.

8.6.3 Analyse des entretiens avec les élèves de Mathieu et de Clotilde

Je remarque que ni ces trois élèves de Mathieu ni les trois de Clotilde ne parviennent à donner les réponses à mes questions et que les mêmes types de confusion ont été observés. Aucun de ces six élèves n'a réussi à construire de façon solide du sens pour la notion de valeur absolue, ce nouvel objet de l'espace numérique de seconde. Des techniques et des éléments technologiques présents dans les organisations mathématiques viennent envahir l'espace de compréhension des élèves. Il est possible que se révèle ainsi un manque dans l'enseignement des mathématiques, voire des sciences en général, à savoir le manque de questionnement du type « qu'est-ce que c'est ? ». Pour ces professeurs, le problème de l'enseignement serait d'apprendre aux élèves à faire des choses avec un objet mathématique, et non pas apprendre à se représenter cet objet, à le *réifier*.

Est-ce qu'une visée de l'enseignement, à côté du développement de connaissances utiles à la société, ne serait-pas de développer chez les élèves des conceptions idoines des notions rencontrées ? C'est le sens de cette citation de l'introduction des programmes de seconde de 2001 :

> L'utilité et la pérennité des mathématiques ne sont pas à prouver. Néanmoins, il faut que chaque élève, à son niveau, puisse faire l'expérience personnelle de l'efficacité des concepts mathématiques et de la simplification que permet la maîtrise de l'abstraction. Il doit, pour cela, pouvoir prendre le temps de faire des mathématiques, de bâtir un ensemble cohérent de connaissances et d'accéder au plaisir de la découverte et à l'expérience de la compréhension.

L'expérience de la compréhension pourrait certainement être enrichie, et c'est là aussi un problème de la profession qui pose la question de savoir quelles sont les expériences à faire vivre aux élèves pour qu'ils comprennent véritablement le concept de valeur absolue.

8.7 Synthèse concernant la valeur absolue

8.7.1 La valeur absolue vue à travers le *filtre du numérique*

Le *filtre du numérique* (Bronner, 2007) est un outil dont je rappelle la fonction, il permet d'identifier les éléments constitutifs des espaces numériques construits dans une classe, de les décrire, de les analyser et d'en percevoir la dynamique comme les manques ou les vides didactiques. Il donne également la possibilité d'évaluer la conformité avec le curriculum officiel. Je présente ci-dessous des résultats obtenus en utilisant ce filtre à propos de la valeur absolue (Cf. section 2.1.3.1 p. 12).

L'espace numérique en seconde est enrichi dans les classes de Mathieu et de Clotilde par rapport au collège grâce à l'apparition de nouveaux éléments appartenant aux catégories suivantes du filtre : des objets, des dynamiques et des raisons d'être.

8.7.1.1 Les objets

Des objets numériques nouveaux

Par rapport au collège, et en conformité avec les programmes, des objets nouveaux apparaissent dans l'espace numérique de seconde : les ensembles de nombres, les intervalles de réels, les notions d'infini ($+\infty$ et $-\infty$), la distance de deux nombres réels, la valeur absolue d'un nombre réel.

Le rôle joué par les irrationnels

J'ai mis en évidence que les nombres irrationnels servent la cause de la valeur absolue dans des tâches comme : « Exprimer sans valeur absolue $\left|\sqrt{3}-1\right|+\left|\sqrt{2}-3\right|$». Ainsi des irrationnels sont actualisés à l'occasion du travail sur ce thème par les deux professeurs. Mais ils apparaissent sans autre motivation et sans être questionnés. La tâche emblématique que j'ai définie dans le chapitre précédent (T : « *reconnaître à quels ensembles appartiennent les nombres rencontrés* », Cf. p. 92) aurait pu être réinvestie dans ce contexte, une reprise sur la nature des nombres en jeu aurait alors été possible. La question de la valeur exacte aurait pu être sous la responsabilité des élèves en lien avec la détermination de la nature des nombres.

Un nouvel opérateur

Des types de tâches comme « trouver la valeur absolue d'un nombre donné, d'une expression numérique ou d'une expression algébrique » font fonctionner la valeur absolue comme un opérateur semblable à l'opérateur racine carrée introduit en quatrième.

8.7.1.2 Les dynamiques avec le numérique

Une dynamique numérico-algébrique

Le nouvel opérateur devient la motivation pour générer des types de tâches qui ne sont plus officiellement au programme, et qui sont « immotivés ». Il s'agit des types de tâches algébriques signalés auparavant comme non proposés par le programme, mais auxquels les deux professeurs donnent une grande place que ce soit dans ce qu'ils appellent communément le cours, les exercices, les devoirs à la maison et en classe. Gagatsis (1993) a fait le même constat en Grèce et il fait l'hypothèse que ces types de tâches algébriques sont utilisés avec un objectif élitiste pour sélectionner les meilleurs élèves.

Une dynamique numérico-géométrique

L'articulation entre les cadres numérique et géométrique est posée d'emblée pour Mathieu, elle est le point de départ chez Clotilde, et puis elle devient implicite. En effet si la définition de la valeur absolue d'un réel donnée par Clotilde dans le cours est interne au domaine numérique, le discours technologique tenu pour expliciter certaines techniques exprime un changement de point de vue sur les nombres en jeu : ce sont des abscisses (« vous avez votre abscisse p moins votre abscisse q »). Ainsi la praxéologie relative au type de tâches T_{nd} élaborée dans ce travail de la technique chez Clotilde est incohérente puisque l'élément théorique du cours n'est pas en adéquation avec les éléments technologiques (T_{nd} est la détermination de la distance de deux réels, Cf. p. 179). Ce geste professionnel d'explicitation donne à voir tout le travail qui reste à la charge de l'élève pour construire un rapport personnel aux mathématiques qui soit épistémologiquement solide.

La dynamique numérico-fonctionnelle

Dans les progressions annuelles de Mathieu et de Clotilde la valeur absolue n'apparaît jamais comme une fonction alors que cette nouvelle conception pourrait être travaillée en conformité avec les programmes. Il est vrai cependant que la fonction valeur absolue n'est présente que comme option : « D'autres fonctions telles que : $x \to \sqrt{x}$, $x \to x^3$, $x \to |x|$, etc., pourront être découvertes à l'occasion de problèmes » (Cf. page 73).

8.7.1.3 Contrat institutionnel de calcul

Les types de tâches proposés comportant des valeurs absolues consistent à supprimer la valeur absolue. Ainsi Clotilde donne cette explication en classe au cours d'une correction d'un exercice qu'elle réalise au tableau dans la séance filmée du 22 octobre 2007 (extrait déjà cité dans l'analyse de la séance) :

> Le professeur corrige au tableau. Elle écrit l'expression $\left|\sqrt{3}-2\right|+\left|3-2\sqrt{3}\right|-\left|5+\sqrt{3}\right|$. Elle dit : « à l'intérieur de votre valeur absolue, vous avez votre abscisse p moins votre abscisse q là (elle écrit p et q respectivement sous $\sqrt{3}$ et sous 2), vous regardez votre soustraction

> $p - q$, si $p - q$ est positif, vous pouvez enlever les valeurs absolues, c'est la bonne distance, si $p - q$ est négatif, il faut que vous calculiez, quand vous enlevez la valeur absolue ça devienne $q - p$, d'accord ? Quand vous le faites, vous le faites à la calculatrice, si vous trouvez quelque chose de positif vous touchez à rien, si vous trouvez quelque chose de négatif vous inversez votre p et votre q, d'accord ?

Dans ce discours se trouvent les éléments technologiques et les types de nombres que les élèves de Clotilde reprennent dans l'entretien. J'observe que la praxéologie développée est incomplète, en effet l'élément théorique qui sous-tend la technique est la définition donnée dans le cours, mais elle n'est pas citée, elle reste implicite et semble être remplacée par cet autre énoncé : « vous regardez votre soustraction $p - q$ [...] si vous trouvez quelque chose de positif vous touchez à rien, si vous trouvez quelque chose de négatif vous inversez votre p et votre q ». Une autre règle du *contrat institutionnel de calcul* se dégage : les tâches de calcul numérique engendrées par le travail de la technique sont confiées à la calculatrice (« vous le faites à la calculatrice »).

8.7.1.4 Des raisons d'être pour faire vivre la valeur absolue

J'ai montré que Clotilde, contrairement à Mathieu, insère, dans les situations qui font vivre la valeur absolue, des questions relatives aux problèmes d'approximation de mesures. Deux questions de ce type étaient d'ailleurs dans le devoir de contrôle du 16 novembre 2007. C'est effectivement un champ de problèmes intéressant pour motiver le travail de la valeur absolue. La question générique est la suivante : « quand la valeur exacte d'un nombre ne peut être connue, quelle valeur approchée peut en être donnée et avec quelle marge d'erreur ou incertitude ? » La réponse à ce type de question peut s'exprimer de plusieurs manières différentes et en particulier les quatre suivantes :

- le nombre *n* a pour valeur approchée le nombre *a* avec une marge d'erreur absolue de α ;
- $|\boldsymbol{n} - \boldsymbol{a}| \leq \boldsymbol{\alpha}$;
- la distance du nombre *n* et du nombre *a* est au plus égale à $\boldsymbol{\alpha}$;
- le nombre *a* est une valeur approchée du nombre *n* à $\boldsymbol{\alpha}$ près.

Lorsque cela est possible, ce type de tâches peut aussi se présenter : « déterminer une valeur approchée à $\boldsymbol{\alpha}$ près. **»**

En lien avec une composante du *filtre du numérique*, je souligne que la dimension du *contrat institutionnel de calcul* est dans un grand état d'abandon depuis la généralisation des calculatrices et après la réforme des mathématiques modernes. En conséquence les éléments théoriques qui régissent le travail du calcul approché ont disparu du curriculum du collège et du lycée. Je propose leur réhabilitation, et dans le même mouvement le travail de la valeur absolue comme outil dans des problèmes d'approximation. Ce thème d'étude pourrait se faire en lien avec la physique.

En fait, le cadre du curriculum officiel en vigueur dans le contexte de cette recherche, donne la possibilité d'aborder la question des valeurs approchées. D'ailleurs, un manuel de seconde, le manuel des éditions Bréal de 2004, pose la question de la raison d'être de la notion de valeur absolue, et sa réponse est identique à celle que je viens de formuler (Cf. Figure 87).

À quoi sert... *la valeur absolue ?*

- **À exprimer des résultats concernant des valeurs approchées.**

Dire que $a - \alpha \leqslant x \leqslant a + \alpha$ *signifie que* a est une valeur approchée de x à α près ;
donc : $|x - a| \leqslant \alpha$ équivaut à : **a est une valeur approchée de x à α près.**
Par exemple :

$$\left|\pi - \frac{22}{7}\right| \leqslant 0{,}01 \text{ équivaut à : } \frac{22}{7} \textbf{ est une valeur approchée de } \pi \textbf{ à 0,01 près.}$$

➜ *Voir exercice 39*

Figure 87 : manuel Bréal de seconde. p.33.

8.7.2 Conditions et contraintes relatives à l'objet valeur absolue

L'enseignement de la valeur absolue est évidemment soumis à un ensemble de conditions, appuis ou contraintes dont je résume les effets ci-dessous :

- un curriculum officiel qui donne peu d'avenir à la notion de valeur absolue en seconde ;
- un curriculum réel focalisé sur la résolution d'équations et d'inéquations comportant des valeurs absolues et négligeant les aspects numériques les plus élémentaires déjà rencontrés en collège ;
- conformément au programme officiel, des techniques « géométriques » privilégiées mais qui restent trop dans l'implicite chez Clotilde ;
- des savoir-faire travaillés de façon routinière au détriment des éléments technologico-théoriques, mais aussi du sens de la notion ;
- très peu de problèmes nécessitant une mathématisation contrairement aux demandes exprimées dans le curriculum officiel.

Ainsi cette analyse met au jour des contraintes à différents niveaux de codétermination didactique (Chevallard, 1999) :

- Au niveau de la société : ces tâches algébriques complexes mettant en œuvre les valeurs absolues, sont des outils de détection et de sélection des « matheux ». Un même constat a été fait en Grèce : « les concepteurs des examens visaient, avec ces exercices [avec valeur absolue] à la fois difficiles et originaux, à maintenir un haut niveau chez les candidats, notamment pour ceux qui préparaient l'école polytechnique[1] » (Gagatsis et Thomaidis, 1993)

- Au niveau de la discipline : il existe avec la valeur absolue un obstacle épistémologique, dans la mesure où le concept de valeur absolue nécessite de dépasser au moins quatre obstacles, au sens de Brousseau (1983) et de Duroux (1983). Par ailleurs, la valeur absolue, comme toutes les autres notions abordées par les deux professeurs dans les domaines numérique et algébrique, sont travaillées en tant qu'objets et pratiquement jamais comme outils de résolution de problème, contrairement à ce qui est demandé de façon générique par les programmes de mathématiques.

8.7.3 Retour sur les hypothèses de la recherche

Je vais reprendre chacune des hypothèses de la recherche pour regarder l'enseignement de la valeur absolue selon cette optique (Cf. section 3.5. p. 37).

8.7.3.1 Première hypothèse : le geste de reprise, un geste très délicat

Reprise de connaissances du collège

Je constate que Mathieu et Clotilde font un lien entre la notion de valeur absolue et la distance de deux points de la droite graduée, notamment quand l'un des deux points est l'origine, rencontrée en cinquième. Mais ces connaissances sont utilisées de façon naturalisée et ne sont pas développées avec les nouveaux outils de la classe de seconde, en particulier la notion de nombre réel. Par ailleurs la première rencontre avec la valeur absolue sous la forme de la *distance à zéro*, ou de *la valeur numérique* (selon les manuels) ne semble pas être évoquée par les professeurs. Pourtant une reprise de ces connaissances anciennes dans la situation de la somme de deux nombres pourrait donner du sens à l'objet valeur absolue et permettre une meilleure compréhension de la règle d'addition.

Dans la classe de Clotilde, la reprise explicite du calcul de la distance de deux points de la droite graduée qui est au programme de cinquième n'est pas réalisée sous la forme d'un savoir canonique (le *théorème de l'isomorphisme*), pourtant essentiel dans l'organisation mathématique élaborée par Clotilde. Ce savoir est institutionnalisé dans l'organisation mathématique de la séquence de Mathieu, mais la cohérence épistémologique de l'édifice mathématique n'est pas assurée.

En l'absence d'un vécu commun avec les élèves à ce sujet, c'est-à-dire en l'absence de *mémoire didactique*, les professeurs prennent difficilement appui sur les connaissances déjà là des élèves. Pourtant une reprise des situations qui ont permis la rencontre avec le concept de valeur absolue, ainsi que la reprise des règles de calcul de la somme et de la différence des nombres réels relatifs en fonction de leur signe, seraient intéressantes à reprendre pour asseoir

---

[1] .

de façon plus solide ces connaissances sous la forme de savoirs canoniques. De même une reprise de la notion d'opposé d'un réel en utilisant la notion de valeur absolue serait pertinente.

Reprise de connaissances rencontrées pour la première fois en seconde

J'ai assisté chez Clotilde à un geste de reprise de connaissances nouvelles de seconde entre deux séances de cours. C'est la preuve qu'un processus d'évaluation silencieux et imperceptible s'opère et amène des modifications dans le projet initial du professeur. Il me semble également que Clotilde a réalisé une reprise d'éléments de la formation initiale en faisant travailler les élèves à partir de leurs propres erreurs. Il est dommage que l'organisation didactique de ce genre de tâches n'ait pas été organisée sous la forme d'un véritable débat entre les élèves, c'est pourtant ce que Clotilde aurait également pu retenir de la formation initiale pour en faire une reprise.

8.7.3.2 Deuxième hypothèse : la variabilité des gestes de reprise

Deux styles différents

Mathieu et Clotilde amorcent la séquence relative à la valeur absolue en faisant appel à la distance de deux points sur la droite graduée. Mais une différence importante apparaît dans ces moments de première rencontre :

- Clotilde commence par faire travailler une fiche préparatoire dans laquelle les élèves doivent d'abord mobiliser des connaissances du collège. Ce moment d'étude de la fiche correspond à l'activité préparatoire qui s'est répandue actuellement chez les professeurs selon une norme du métier ;
- Mathieu choisit la forme du cours magistral qui débute par la définition de la valeur absolue en lien avec des connaissances anciennes du collège qui sont supposées être mobilisables.

L'analyse des cahiers de cours des deux professeurs confirme que cette différence est générale sur toute l'année scolaire. Mathieu n'a eu recours à la photocopie qu'une seule fois dans le troisième chapitre de géométrie pour faire des rappels sur les droites remarquables du triangle. Dans le cahier d'exercices aucune feuille photocopiée ne figure. Les exercices sont choisis dans le manuel de la classe ou bien sont donnés par le professeur. Clotilde en revanche utilise de nombreuses fiches photocopiées qui semblent répondre à plusieurs objectifs identifiés ci-dessous :

- Dans le cahier de cours :
    - faire des rappels sous la forme de révisions de connaissances du collège ;
    - donner des explications, des tableaux qui exigent trop de temps de recopie, ou bien des schémas, des graphiques difficiles à reproduire (dans le domaine des fonctions en particulier) ;
    - travailler avec les élèves des notions délicates, c'est le cas de la valeur absolue, la fiche est alors à compléter dans un travail de coopération entre le professeur et les élèves.

- Dans le cahier d'exercices :
    - importer d'autres exercices que ceux proposés par le livre (fiches appelées TD) ;
    - faire travailler une activité préparatoire pour introduire une notion nouvelle, c'est le cas pour la valeur absolue et aussi pour les généralités sur les fonctions.
- Dans le cahier de cours ou d'exercices :
    - faire une reprise de connaissances qui ont posé problème, c'est le cas pour la deuxième fiche de cours de la valeur absolue, c'est le cas également pour une fiche insérée dans la partie exercice intitulée : « Fonctions : Reprise des notions d'image et d'antécédent » (Cf. annexe 11.24). La fonction de reprise est très clairement affichée ici.

8.7.3.3 Troisième hypothèse : l'incomplétude des praxéologies

Certains énoncés théoriques ou notions semblent être considérés par les professeurs comme étant acquis et familiers pour les élèves alors qu'ils n'ont été rencontrés que sous des formes partielles. C'est le cas déjà cité pour le *théorème de l'isomorphisme* dans la classe de Clotilde. Des éléments théoriques des praxéologies ponctuelles sont alors absents alors qu'ils sont nécessaires. C'est également le cas pour la droite des réels, parfois utilisée aussi bien chez Clotilde que chez Mathieu, pour expérimenter sur des exemples des résultats qui sont ensuite généralisés. Cela pourrait évidemment encourager les élèves à faire une *reprise* de ce type de raisonnement non valide.

Au-delà de la complétude des praxéologies ponctuelles c'est la question de la cohérence mathématique d'un projet global d'enseignement qui est posée. J'ai souligné les insuffisances au niveau épistémologique des édifices mathématiques élaborés par Mathieu et par Clotilde dans la séquence sur la valeur absolue. La question de l'incomplétude peut être élargie au-delà des praxéologies ponctuelles, à l'organisation mathématique globale d'une séquence. Actuellement la majorité des énoncés institutionnalisés sont admis, mais l'architecture mathématique doit pourtant être épistémologiquement solide même si cette ossature interne n'est pas visible aux yeux des élèves. Cependant l'un des aspects des mathématiques est aussi « étudier une démonstration qu'on n'aurait pas trouvée soi-même » (Cf. p. 61). Ne faudrait-il pas dévoiler pour les élèves une partie de cette ossature pour continuer leur initiation aux règles du jeu mathématique ?

8.7.3.4 Quatrième hypothèse : un problème de la profession

Le domaine numérique est naturalisé pour les enseignants qui ne soupçonnent vraisemblablement pas les difficultés du savoir à enseigner et qui manquent de connaissances pour cet enseignement. En lien avec les obstacles inhérents à la notion de valeur absolue, ce sont les obstacles épistémologiques du concept de nombre négatif qui se manifestent à travers les erreurs des élèves (Duroux, 1983). Il ne suffit évidemment pas de rassurer les élèves comme le fait Clotilde en introduction de la deuxième fiche de cours, pour dépasser ces obstacles. Mais pour pouvoir appréhender les difficultés des élèves comme des symptômes d'un problème du côté du professeur, il faut des connaissances que n'ont pas en général les enseignants.

Des occasions de reprise de connaissances anciennes du collège ou de la *reprise scolaire* sont possibles en lien avec la valeur absolue. En particulier la reprise de la question de la nature des nombres est possible, mais cette question n'est pas dans le topos des élèves. Des nombres de natures diverses sont mis en scène sans poser explicitement la question ni de leur nature, ni du *contrat institutionnel de calcul* à leur propos. La calculette est en usage libre et ne permet pas une « bonne fréquentation » des nombres et de leurs relations les uns avec les autres. Charnay parle de la « cimentation » des nombres qui résulte de pratiques régulières de calcul mental. Des compétences en calcul mental développent la représentation mentale des nombres et pourraient certainement contribuer à ce que des élèves sachent répondre à la question : « quelle est la valeur absolue du nombre 5 ? ».

9 Dynamique numérico-géométrique

J'ai montré comment les irrationnels sont des nombres « de service » pour le travail relatif à la valeur absolue dans les types de tâches numériques présents dans les organisations mathématiques de Mathieu et de Clotilde. Je rappelle à titre d'exemple l'un des spécimens donné par Mathieu dans le devoir du 2 décembre 2006 (Cf. section 8.3.7.1 p. 163) :

$$\text{Calculer } \left|\sqrt{7}-2\sqrt{2}\right| + \left|5+2\sqrt{3}\right| - \left|4+2\sqrt{3}\right|$$

Dans cette partie je vais montrer au contraire comment des irrationnels sont « produits » dans le cadre géométrique et plus précisément dans la séquence relative à la trigonométrie dans une *dynamique numérico-géométrique* (Cf. le *filtre du numérique* en annexe 11). J'utilise le terme « produire » dans le sens suivant (Bronner, 2007) :

> En géométrie l'utilisation du théorème de Pythagore « produit » des nombres irrationnels ; les équations du second degré font surgir des racines carrées irrationnelles ; en trigonométrie, on a affaire à des nombres transcendants, bien que ce soit transparent ; en analyse on travaille implicitement sur des intervalles de $\mathbb{R}$; et en statistiques et probabilités certains modèles font intervenir des irrationnels.

Un peu plus loin il précise l'opposition entre les nombres *de service* et les nombres *produits* :

> […] soit les tâches et les techniques portent directement sur les irrationnels (calculs d'approximations de π par exemple), soit les tâches et les techniques font intervenir inévitablement des irrationnels (calcul de la longueur de la diagonale du carré de côté unité).

Dans le cas des irrationnels présents comme nombres de service, les professeurs les utilisent pour travailler la technique d'un type de tâches en faisant varier la nature des nombres qui peut alors devenir une variable didactique. Ils les utilisent également pour contribuer à développer la maîtrise des règles spécifiques des différentes écritures des nombres caractéristiques de la nature de ces nombres. Dans d'autres situations les nombres irrationnels ne peuvent être évités. C'est une difficulté qui apparaît lorsque les élèves doivent interpréter une égalité comme $AB^2 = a$ (avec $a \geq 0$) alors que le concept de racine carrée n'a pas encore été travaillé et ne fait pas partie du curriculum officiel. Cette situation, difficile pour les élèves mais aussi du côté de l'enseignement pour les professeurs, se produit fréquemment en quatrième.

Dans les classes de Mathieu et de Clotilde, le chapitre sur la trigonométrie a été abordé en fin d'année, chez Mathieu à partir du 23 mai 2007 et chez Clotilde à partir du 30 avril 2008. Pour Mathieu c'est le dernier chapitre de la progression annuelle et il ne fera pas l'objet d'une évaluation sommative, chez Clotilde c'est l'avant dernier chapitre avant celui consacré à la géométrie dans l'espace. Un contrôle portera sur ces deux derniers chapitres et aura lieu avant le conseil de classe. Des séances de cette séquence sur la trigonométrie ont pu être observées et certaines ont été filmées chez les deux professeurs. En utilisant la méthodologie (Cf. section 4.3 p. 45), un travail d'analyse comparative analogue à celui concernant la valeur absolue a pu être mené. J'ai observé ce nouvel habitat qui s'est présenté au cours des observations dans les classes, habitat propice à une reprise du travail sur la nature et l'écriture des nombres. En effet je vais décrire et analyser comment une nouvelle rencontre avec des entiers, des décimaux, des irrationnels est offerte dans ce cadre ; mais sans reprise de la tâche emblématique du numérique ni chez Mathieu, ni chez Clotilde.

9.1 La trigonométrie dans le curriculum officiel

Pour comprendre l'analyse du curriculum réel, je présente la place de la trigonométrie dans le curriculum officiel de la classe de seconde. Au collège[1], la trigonométrie est intégrée dans un secteur du domaine de la géométrie euclidienne et ne concerne que les angles aigus d'un triangle rectangle dont les mesures sont exprimées en degrés. Plus précisément, la trigonométrie apparaît dans le domaine « Travaux géométriques » et dans le secteur : « Triangle rectangle : relations trigonométriques, distance de deux points dans un repère orthonormé du plan ». Voici ce qui est précisé dans les contenus du programme de troisième relatifs à la trigonométrie : « Connaître et utiliser dans le triangle rectangle les relations entre le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle aigu et les longueurs de deux côtés du triangle ». Au lycée en seconde, c'est cette conception dans le cadre de la géométrie euclidienne qui est reprise, elle est ensuite complétée par une nouvelle conception dans le cadre des fonctions (Cf. Tableau 4 p. 65). En classe de première et de terminale, la trigonométrie interviendra également dans le cadre de l'analyse.

Je précise les prescriptions exprimées dans le programme de seconde. La trigonométrie est située dans le domaine « Calcul et fonctions » et le secteur « Premières fonctions de référence ». C'est uniquement la capacité suivante qui est attendue : « Connaître la

[1] Je me réfère toujours aux programmes en vigueur jusqu'en 2006-2007 et qui ont été ceux des classes de collège des élèves de Mathieu et de Clotilde.

représentation graphique de $x \longrightarrow sinx$ et de $x \rightarrow cosx$. » Les commentaires en regard des capacités précisent : « La définition de $sin\,x$ et $cos\,x$ pour un réel x quelconque se fera en « enroulant ℝ » sur le cercle trigonométrique. On fera le lien avec les sinus et cosinus de 30°, 45° et 60°. »

Dans le document d'accompagnement du programme de seconde se trouve ce commentaire :

> Les élèves sortant du collège disposent des connaissances de base de la trigonométrie dans un triangle rectangle ; ces connaissances seront entretenues en géométrie, lors de la résolution de problèmes relatifs à diverses configurations du plan. La notion d'angle orienté est introduite en géométrie […]. La notion de cercle trigonométrique sera introduite ici. Un logiciel de géométrie dynamique sera alors particulièrement utile pour bien montrer comment l'ensemble des nombres réels s'enroule sur le cercle et comment varient les projections de l'extrémité d'un arc $\overset{\frown}{AM}$ en fonction de la longueur de cet arc […]. Pour faire le lien avec les valeurs des sinus et des cosinus de 30°, 45° et 60°, on déterminera, sur le cercle trigonométrique, la longueur des arcs interceptés par ces angles remarquables et on établira les valeurs exactes des sinus et cosinus correspondants ; on introduira ici le radian pour mesurer l'angle au centre interceptant un arc du cercle trigonométrique avec le même nombre que la longueur de cet arc : on en restera à des mesures d'angles en radian comprises entre - π et π ou entre 0 et 2π.

Je repère dans le curriculum officiel plusieurs ruptures pour la trigonométrie entre les conceptions construites au collège et en seconde. Elles concernent :

- le cercle trigonométrique et une nouvelle représentation graphique de la droite des réels qui « s'enroule » autour du cercle ;
- l'angle n'est plus seulement un angle aigu qui peut être pensé comme un angle dans un triangle rectangle, il devient orienté et prend toutes les valeurs réelles ;
- la mesure de l'angle peut être exprimée par un négatif. Elle est exprimée en radians, variable réelle pour la fonction trigonométrique ;
- la notion de projection est utilisée alors qu'elle est absente des programmes du collège ;
- le cosinus et le sinus, qui peuvent être considérés comme des opérateurs, changent de statut et deviennent des fonctions dans ℝ (et même des fonctions de référence dans le programme) pour lesquelles la variable ne réfère plus à une mesure d'angle mais à un réel.

Je vais suivre le *fil numérique* dans le cadre de la trigonométrie, son évolution est complexe. Je prends par exemple l'objet « $\cos x°$ » :

- en collège $x°$ est la mesure en degré d'un angle aigu, c'est donc un angle compris entre 0° et 90° et la mesure est en général exprimée par nombre entier ou décimal. Le curriculum n'interdit pas de considérer des nombres comme $\cos\sqrt{79}^{\circ}$ ou $\cos\frac{\pi}{4}^{\circ}$ ou encore $\cos\frac{79}{3}^{\circ}$ mais ils n'apparaissent pas dans le contexte de la géométrie telle qu'elle est travaillée en collège ;
- au collège on ne parle pas d'un opérateur sur les nombres mais sur les angles exprimés en degré ;

- en seconde x est la mesure en radian d'un angle, les valeurs de ce nombre sont fixées par le programme : « on en restera à des mesures d'angles en radian comprises entre $-\pi$ et π ou entre 0 et 2π », l'ensemble de référence du nombre x est maintenant l'intervalle de réels $[-\pi; 2\pi]$;
- en seconde encore, x devient un nombre qui prend également le statut de variable pour la fonction cosinus et l'ensemble sur lequel cette fonction est définie est $\mathbb{R}$. Les nombres comme $\cos\sqrt{29}$ ou $\cos(-\frac{\pi}{4})$ ou encore $\cos\frac{7}{3}$ vont pouvoir être rencontrés, mais $\sqrt{29}$, $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{7}{3}$ correspondent dans ce contexte à des mesures d'angles orientés mesurés en radian ;
- une dernière évolution permet de considérer les fonctions trigonométriques définies sur $\mathbb{R}$ sans faire référence aux angles orientés mesurés en radians, cette référence disparait, même si implicitement elle reste valide.

Je vais m'intéresser prioritairement, dans le curriculum réel, à la reprise en seconde de la première conception dans le cadre géométrique sous laquelle apparaît la trigonométrie dans le curriculum officiel. C'est la raison pour laquelle j'ai placé cette étude dans une dynamique numérico-géométrique et non pas numérico-fonctionnelle. La reprise des connaissances du collège relative à la trigonométrie est explicitement demandée dans le curriculum officiel. Un moyen de la réaliser est d'ailleurs donné : « ces connaissances seront entretenues en géométrie, lors de la résolution de problèmes relatifs à diverses configurations du plan ». Une technique qui peut être généralisée est ainsi préconisée pour faire des reprises de connaissances du collège : entretenir des connaissances anciennes en proposant des problèmes qui les font utiliser en tant qu'outils de résolution.

9.2 La trigonométrie dans le curriculum réel chez Mathieu et Clotilde

Dans cette section je ne vais pas développer totalement la méthodologie suivie jusqu'ici. Elle sera pourtant présente en tant que cadre de description et d'analyse, mais les analyses *a priori* et *a posteriori* ne seront pas séparées. Mon objectif est le repérage d'éléments particuliers qui pourront alimenter les questions et les hypothèses de la recherche.

9.2.1 La reprise des connaissances du collège sur la trigonométrie

Dans cette première section je vais décrire et analyser les reprises des connaissances trigonométriques du collège qui sont apparues dans les progressions des deux professeurs avant la poursuite d'étude concernant la trigonométrie conformément au curriculum officiel.

9.2.1.1 Analyse de toutes les traces écrites avant le chapitre de trigonométrie

J'ai exploré tous les documents écrits des classes de Mathieu et de Clotilde (cahiers de cours et d'exercices, devoirs) pour voir la place des reprises de la trigonométrie enseignée au collège dans la programmation annuelle de leur enseignement. Je résume cela dans un tableau (Cf. Tableau 42).

	Reprise des connaissances du collège sur la trigonométrie			Chapitre de trigonométrie relatif au programme de seconde
	Cahier de cours	**Cahier d'exercices**	**Devoir maison ou en classe**	
Mathieu	Rappel des connaissances du collège dans le chapitre 3 intitulé *Géométrie plane* commencé fin novembre 2006	Un seul exercice nécessitant le recours à la trigonométrie	Rien	Dernier chapitre de la progression, commencé le 23 mai 2007
Clotilde	Rappel des connaissances du collège dans le chapitre 2 intitulé *Géométrie plane* commencé début octobre 2007	Rien	Une question dans un devoir en classe portant sur la mesure d'un angle	Avant dernier chapitre de la progression, commencé le 30 avril 2008

Tableau 42 : place de la trigonométrie dans la progression annuelle de Mathieu et de Clotilde

Le premier constat est la contradiction entre le fait de faire figurer les connaissances du collège relatives à la trigonométrie dans le chapitre de révision concernant la géométrie plane, et le fait de ne pas faire travailler ces connaissances. Je n'ai pas d'explication de la part des enseignants pour justifier cette absence de reprise dans les activités mathématiques proposées aux élèves. Un élément pour comprendre ces choix vient éventuellement du manuel. Dans le troisième chapitre intitulé « Bases de géométrie plane » figure une section sur la trigonométrie. Les valeurs particulières des sinus et cosinus des angles de 30°, 45° et 60° sont données comme étant de simples rappels. Mathieu et Clotilde prennent appui sur le manuel pour élaborer leur enseignement, c'est cette influence qui est peut-être visible. Par ailleurs la part consacrée aux exercices nécessitant le recours à la trigonométrie est faible, elle représente 13% des exercices. Dans le même chapitre les exercices, concernant la mesure des angles mais sans recours à la trigonométrie, représentent 19% de tous les exercices du chapitre (sans compter ceux qui mettent en jeu des angles droits).

9.2.1.2 Les reprises de la trigonométrie chez Mathieu et Clotilde

Dans les cours de Mathieu et de Clotilde, le sinus, le cosinus et la tangente d'un angle aigu d'un triangle rectangle, apparaissent comme des *opérateurs* (au sens du *filtre du numérique*, voir annexe 11), ce qui est conforme au curriculum officiel, la conception dans le cadre fonctionnel n'étant pas encore travaillée. Je vais décrire et analyser comment Mathieu et Clotilde font les reprises des connaissances anciennes du collège concernant la trigonométrie. Les deux professeurs intègrent cette reprise sans lien avec du nouveau dans le chapitre consacré à la géométrie plane, ce qui est conforme au curriculum officiel.

La reprise de la trigonométrie enseignée au collège chez Mathieu

Mathieu, au premier trimestre, fait écrire un cours complet sur la trigonométrie qui intègre déjà les valeurs particulières des lignes trigonométriques alors qu'elles ne sont officiellement au programme qu'en seconde (Cf. Figure 88). En effet au collège ne figure dans le programme que cette indication à propos du calcul d'une ligne trigonométrique : « Utiliser la calculatrice pour déterminer des valeurs approchées du sinus, du cosinus et de la tangente d'un angle aigu donné ». Dans le cahier de cours des élèves de Mathieu, aucune trace de la façon dont ces valeurs sont obtenues ne figure dans les cahiers, elles semblent apparaître avec un statut de connaissances anciennes du collège, c'est-à-dire de rappel.

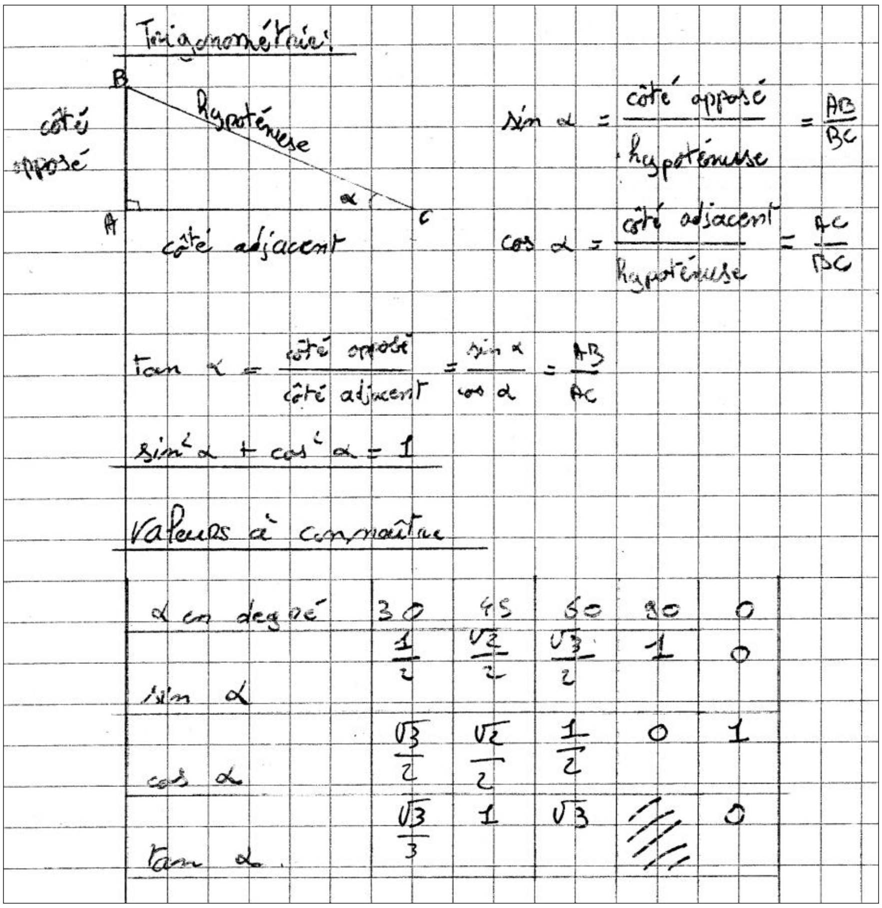


Figure 88 : rappels sur la trigonométrie dans le cours de Mathieu

Dans l'année un seul exercice de géométrie plane issu du manuel de la classe nécessite le recours à la trigonométrie. J'analyserai plus loin les réponses d'une élève à cet exercice.

La reprise de la trigonométrie enseignée au collège chez Clotilde

Clotilde utilise la technique qui a déjà été décrite pour faire des révisions de connaissances du collège (Cf. p. 259) : elle donne une fiche photocopiée aux élèves qui doit être insérée dans le cahier de cours. La fiche complète est donnée en annexe 11.29 (j'ai déjà fait référence à cette fiche à la page 197). Cette fiche est une compilation des connaissances essentielles de la géométrie du collège, elle comprend une partie sur la trigonométrie (Cf. Figure 89). Avant d'analyser spécifiquement cette partie, j'analyse la composition globale de cette fiche. Elle résume les praxéologies locales en lien avec un élément théorique donné. La colonne « Cette propriété permet de » correspond aux types de tâches essentiellement rencontrés avec un énoncé théorique donné. La colonne « rédaction typique » donne un modèle de rédaction[1], et elle donne également des éléments technologiques. Cette fiche est donc une compilation des savoir-faire appris en collège dans le domaine de la géométrie. Curieusement les énoncés théoriques eux-mêmes, qui fondent les praxéologies ainsi revisitées, sont absents de ces rappels. Les savoirs canoniques ne sont donc pas rappelés, ils figurent bien dans la fiche, dans la première colonne, mais uniquement sous une dénomination parfois très vague comme « angles ».

Sur les 13 types de tâches ainsi rappelés sur cette fiche (Cf. annexe 11.29), 8 d'entre eux font intervenir nécessairement des connaissances numériques. Ils s'inscrivent donc dans une *dynamique numérico-géométrique* et les techniques mises en œuvre relativement à ces types de tâches contribuent à l'exploration, à la compréhension et à l'extension de l'espace numérique de seconde. Je rappelle que le manuel Bréal avait été cité en exemple parce qu'il utilisait cette dynamique pour introduire la synthèse sur les nombres demandée en seconde (Cf. p. 78).

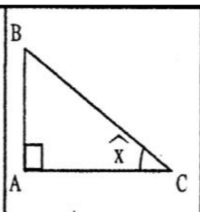
PROPRIETE	FIGURE(S) TYPIQUE(S) :	CETTE PROPRIETE PERMET DE...	POUR L'UTILISER, IL FAUT...	REDACTION TYPIQUE :
TRIGONOMETRIE		... calculer un angle	... un triangle rectangle dont on connaît 2 longueurs	Le triangle ABC est rectangle en A. *[On utilise une des 3 formules de trigonométrie]* $\cos \hat{x} = \frac{adj}{hyp} = \frac{AC}{BC}$ $\sin \hat{x} = \frac{opp}{hyp} = \frac{AB}{BC}$ $\tan \hat{x} = \frac{opp}{adj} = \frac{AB}{AC}$ *[On remplace les longueurs ou angles connus par leur valeur et on résout alors une équation]*
		... calculer une longueur	... un triangle rectangle dont on connaît un côté et un angle.	

Figure 89 : rappels sur la trigonométrie dans le cours de Clotilde

Dans la partie consacrée à la trigonométrie, Clotilde privilégie des types de tâches algébriques qui conduisent à des résolutions d'équations. Elle aurait pu ajouter un type de tâches qui ne fait pas appel à l'algèbre mais uniquement à des connaissances numériques relatives aux quotients : « calculer le sinus, le cosinus ou la tangente d'un angle ».

Un implicite important dans ce rappel concerne la nature de $\hat{x}$. Il faut savoir que c'est l'angle mesuré en degrés (ou en grades). L'aspect opérateur du sinus, du cosinus et de la tangente, est renforcé par le terme de « formule » et par le mélange des deux registres : écriture mathématique et langage naturel. Ce mélange est non conforme aux règles d'écriture de ces

[1] Les travaux de Duval (1995), notamment, ont montré que le fait de donner un modèle de rédaction pouvait être un handicap pour initier les élèves à la démonstration.

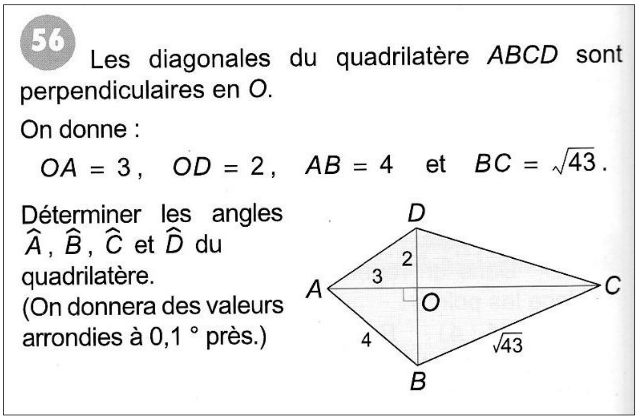
deux registres, mais très souvent utilisé comme moyen mnémotechnique. Cette conception en tant qu'opérateurs est une étape vers la notion de fonction rencontrée pour la première fois en seconde pour les fonctions sinus et cosinus.

9.2.1.3 Analyse d'un exercice donné par Mathieu au cours du troisième chapitre

Je vais analyser le seul exercice donné par Mathieu qui nécessitait la mise en œuvre de connaissances relatives à la trigonométrie ainsi que les réponses d'une élève Anissa. Elle fait partie du groupe des trois élèves que j'ai interrogés à plusieurs reprises dans l'année.

Analyse a priori de l'exercice

L'exercice est le numéro 56 de la page 70 du manuel de la classe (Cf. Figure 90).



56 Les diagonales du quadrilatère *ABCD* sont perpendiculaires en *O*.

On donne :

$OA = 3$, $OD = 2$, $AB = 4$ et $BC = \sqrt{43}$.

Déterminer les angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ et $\widehat{D}$ du quadrilatère.
(On donnera des valeurs arrondies à 0,1 ° près.)

Figure 90 : exercice n° 56 p. 70 donné par Mathieu

Je détaille une procédure *a priori* possible pour déterminer l'angle $\hat{A}$ et je l'analyserai en détails ensuite. Les nombres obtenus dans les calculs sont arrondis avec des décimaux d'ordre 1 comme il est précisé dans l'énoncé.

Dans le triangle OAD rectangle en O, $\tan \widehat{DAO} = \frac{2}{3}$ alors : $\widehat{DAO} = \arctan\frac{2}{3} \simeq 33{,}7°$ (1)

Dans le triangle OAB rectangle en O, $\cos \widehat{OAB} = \frac{3}{4}$ alors : $\widehat{OAB} = \arccos\frac{3}{4} \simeq 41{,}4°$ (2)

$$\hat{A} = \widehat{DAO} + \widehat{OAB} \simeq 33{,}7 + 41{,}4 \qquad (3)$$

$$\hat{A} \simeq 75{,}1° \qquad (4)$$

Dans la première ligne l'angle $\widehat{DAO}$ est obtenu avec la calculatrice après avoir introduit le nombre $\frac{2}{3}$ qui est nécessairement une valeur approchée donnée par la machine puisque c'est un nombre idécimal, ce n'est pas un nombre machine. En conséquence la machine calcule non pas l'angle dont la tangente est égale à $\frac{2}{3}$, mais l'angle dont la tangente est égale à une valeur approchée de $\frac{2}{3}$ ce qui introduit une première erreur pour le calcul du quotient qui est répercutée pour le calcul de l'angle.

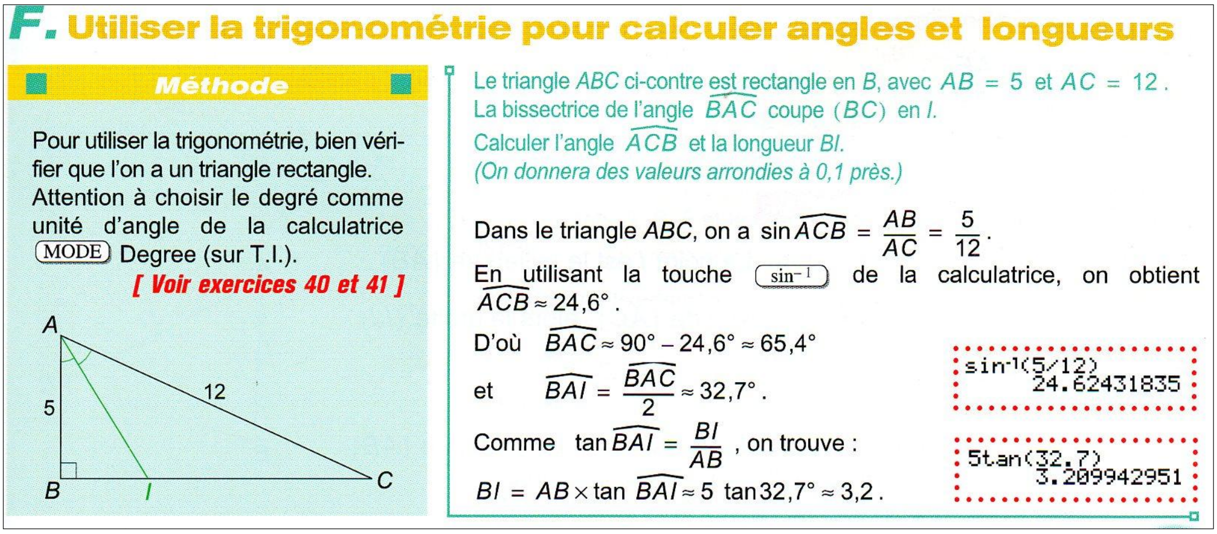
Je précise que les fonctions inverses des fonctions trigonométriques sont utilisées ici par commodité, mais ne sont pas connues par les élèves. Cependant de nombreux élèves reproduisent les symboles des touches des calculatrices et utilisent ce type de notation : $\tan^{-1} \widehat{DAO}$.

La réponse intermédiaire de 33,7° obtenue à la ligne (1) est un arrondi au dixième près du nombre affiché par la calculatrice. Mais est-ce véritablement un arrondi au dixième près du nombre $\arctan\frac{2}{3}$? La précision des machines de niveau collège permet de penser que oui, mais sans démonstration rigoureuse cela n'est qu'une conjecture.

Une autre question aurait pu se poser et être de la responsabilité de l'élève : quel arrondi donner de la mesure de l'angle ? Une calculatrice scientifique qui a un affichage de 10 chiffres donne cette valeur approchée : 33,69006753. La réflexion concernant la valeur approchée à choisir dans le contexte de la situation est inhérente à ce type de problèmes, mais les connaissances des élèves conformes au curriculum officiel sont-elles suffisantes sur ce sujet ? Est-ce qu'ils ont les moyens de répondre de façon autonome ?

Pour la ligne (2), la machine donne la valeur arrondie d'un angle dont le cosinus est égal à 0,75, cette fois-ci ce nombre est un nombre machine qui n'est pas remplacé par une valeur approchée. La calculatrice précédente affiche pour le calcul de l'angle $\widehat{OAB}$ le nombre : 41,40962211. La même question au sujet de l'arrondi aurait là aussi pu être dans le topos de l'élève, à savoir comment traiter ce nombre qui est affiché pour donner une valeur approchée de l'angle cohérente avec les données du problème.

À la quatrième ligne une réponse est trouvée pour la mesure de l'angle, mais quelle est l'erreur possible entre cette valeur approchée et le nombre cherché (autrement dit sa valeur exacte) ? La réponse est une valeur approchée décimale d'ordre 1, ou avec un chiffre après la virgule, mais est-ce un arrondi de la mesure de l'angle au dixième près ? Cette question est celle qui était posée dans l'exercice : « on donnera des valeurs arrondies à 0,1° près », mais ensuite le contrat est transformé et ce sont seulement les nombres affichés par la machine qui sont arrondis au dixième près. En se référant à l'exemple qui figure dans le manuel (Cf. Figure 91 p. 270) pour montrer comment « utiliser la trigonométrie pour calculer angles et longueurs » le contrat précédent est clairement celui d'un *contrat institutionnel de calcul approximatif* (au sens du *filtre du numérique*). Les nombres obtenus avec la machine sont systématiquement arrondis au dixième près. L'usage de la machine donné en exemple dans cette méthode est pourtant dans ce cas le moins fiable et il est regrettable qu'une technique plus performante pour minimiser les erreurs ne soit pas proposée. Un objectif du programme de seconde est pourtant très explicite à ce sujet : « Utiliser de façon raisonnée et efficace la calculatrice pour les calculs et pour les graphiques. » Une technique efficace consiste notamment à conserver le plus possible de chiffres des valeurs approchées intermédiaires avant le résultat final, l'utilisation des mémoires est un moyen pour atteindre cet objectif. Dans le cas de l'exercice du livre, l'utilisation de la mémoire n'est même pas nécessaire.



F. Utiliser la trigonométrie pour calculer angles et longueurs

Méthode

Pour utiliser la trigonométrie, bien vérifier que l'on a un triangle rectangle.
Attention à choisir le degré comme unité d'angle de la calculatrice MODE Degree (sur T.I.).

[Voir exercices 40 et 41]

Le triangle *ABC* ci-contre est rectangle en *B*, avec $AB = 5$ et $AC = 12$.
La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe (BC) en *I*.
Calculer l'angle $\widehat{ACB}$ et la longueur *BI*.
(On donnera des valeurs arrondies à 0,1 près.)

Dans le triangle *ABC*, on a $\sin\widehat{ACB} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{12}$.

En utilisant la touche $\sin^{-1}$ de la calculatrice, on obtient $\widehat{ACB} \approx 24{,}6°$.

D'où $\widehat{BAC} \approx 90° - 24{,}6° \approx 65{,}4°$

et $\widehat{BAI} = \frac{\widehat{BAC}}{2} \approx 32{,}7°$.

Comme $\tan\widehat{BAI} = \frac{BI}{AB}$, on trouve :

$BI = AB \times \tan\widehat{BAI} \approx 5\ \tan 32{,}7° \approx 3{,}2$.

```
sin⁻¹(5/12)
     24.62431835
```

```
5tan(32.7)
     3.209942951
```

Figure 91 : méthode donnée dans le manuel de la classe pour utiliser la trigonométrie, p. 57

Pour revenir à l'exercice donné par Mathieu et au calcul final qui donne la mesure de l'angle $\hat{A}$, je donne le contre-exemple suivant qui suffit pour prouver que la somme des arrondis au dixième près de deux nombres n'est pas un arrondi au dixième près de la somme de ces nombres :

33,7 est l'arrondi au dixième près de 33,65000000001 ; 41,4 est l'arrondi au dixième près de 41,35000000001 ; la somme de ces deux nombres est égale à 75,00000000002 qui a pour arrondi au dixième près 75,0 alors que la somme des deux arrondis est égale à 75,1.

Les données de l'exercice sont bien choisies pour faire utiliser comme outils de résolution de problème le sinus, le cosinus et la tangente si on se contente d'utiliser les longueurs données. Une autre procédure peut permettre de ne mettre en œuvre qu'une seule fonction trigonométrique sur les trois (voire deux sur les trois). Il suffit de rechercher les longueurs des côtés qui manquent en utilisant le théorème de Pythagore puis de calculer tous les angles uniquement en utilisant le cosinus par exemple. Dans cette variante un autre problème va certainement se poser pour les élèves : faut-il conserver une mesure exprimée par un irrationnel ou faut-il la remplacer par une valeur décimale arrondie ? Le problème va apparaître pour OB et CD qui mesurent respectivement $\sqrt{7}$ et $\sqrt{40}$. Il peut évidemment se poser également pour CD qui mesure $\sqrt{43}$.

Une variante existe de façon évidente pour la mesure du quatrième angle, soit continuer à mettre en œuvre la même procédure, soit utiliser le fait que la somme des quatre angles est de 360°.

9.2.1.4 Le curriculum officiel sur la question des valeurs exactes et approchées

En conclusion, l'exercice précédent est choisi pour mobiliser les connaissances anciennes du collège sur la trigonométrie, mais il fait rencontrer également des problèmes liés aux calculs exacts et approchés. Dans la section 5.4.1 (p. 63) j'ai détaillé les différents thèmes du domaine *Calcul et fonctions*. Je reprends un extrait du tableau de synthèse qui récapitulait pour chacun des thèmes les différents sujets à aborder pour cibler les notions de valeur exacte et de valeur approchée. Je signale à ce propos que Bronner (1999) souligne que la distinction est à faire entre *calcul exact* et *calcul approché* plutôt que entre *valeur exacte* et *valeur approchée*, la valeur exacte étant de fait le nombre lui-même.

Thèmes	**Reprises de connaissances du collège**	**Nouveautés du programme de seconde**
Représentation des nombres dans une calculatrice	Usage d'une calculatrice de type scientifique (modèle collège) Interpréter un résultat donné par la machine (souvent une valeur approchée décimale)	Limites d'utilisation d'une calculatrice
Ordre de grandeur et écriture scientifique	Valeur exacte et valeur approchée Ordre de grandeur d'un résultat Ecriture scientifique Puissances	Lien avec un TP de physique
Calcul à la main et à la machine	Distinguer un nombre d'une de ses valeurs approchées Conventions de priorité Comparer des résultats obtenus à la main et à la machine	

Tableau 43 : extrait du Tableau 4 de la page 65

Les expressions valeur exacte et valeur approchée interviennent plusieurs fois dans le curriculum officiel de seconde, en général pour opposer l'une à l'autre. Il s'agit essentiellement de « Distinguer un nombre d'une de ses valeurs approchées » (programme de seconde). Voici une autre citation du document d'accompagnement qui précise le statut des nombres d'une calculatrice :

> Sans entrer dans des détails techniques souvent difficilement accessibles et sujets à une constante évolution, un élève doit avoir pris conscience qu'une calculatrice de type scientifique opère essentiellement sur un nombre fini de chiffres et que le plus souvent, elle ne donne qu'une valeur approchée décimale d'un résultat.

Le *contrat institutionnel de calcul* (au sens du *filtre du numérique*), décrit dans le curriculum officiel depuis la classe de sixième jusqu'à la classe de seconde, est un contrat de *calcul approximatif* (Bronner, 1999) :

> il s'agit d'obtenir des valeurs "proches" sans plus, sans différencier clairement les nombres et leurs valeurs approchées, en remplaçant certains nombres par des valeurs approchées prises dans le système de nombres, sans se soucier de la qualité de l'approximation et de l'erreur commise. (p. 2)

Bronner (Ibid.) différencie le contrat de *calcul approximatif* du contrat de *calcul d'approximation* qu'il définit ainsi :

> on considère ici les algorithmes convergents dont on peut contrôler la précision obtenue (par exemple à l'aide d'une majoration de l'erreur). Ces algorithmes permettent, en théorie - sans tenir compte des problèmes d'arrondi sur machine -, d'obtenir des approximations à des précisions quelconques […]. (p. 3)

Le contrat de calcul d'approximation n'est plus viable sous la contrainte du programme de seconde en vigueur pour les classes observées (programme en vigueur depuis la rentrée 2000).

Pourtant les programmes précédents parus au BO du 16 mai 1996 avaient préconisé cette approche en donnant une définition de la notion de valeur approchée :

> Lorsque $|a' - a| \leq k.10^{-p}$, où $1 \leq k < 10$, on dit que a' est une approximation (ou une valeur approchée) de a à la précision $k.10^{-p}$.

Il est intéressant de voir que cette définition est donnée dans un thème qui est intitulé : « Valeurs absolues, intervalles, approximations » dans lequel la valeur absolue est un outil pour travailler les questions d'approximation qui apparaissent alors comme une raison d'être du travail relatif à la valeur absolue.

Pour revenir au contrat de calcul approximatif du programme de seconde régissant les enseignements dans les classes de Mathieu et de Clotilde, il est par exemple possible de parler d'une valeur approchée décimale d'ordre 3, ou encore décimale avec trois chiffres après la virgule, mais non pas d'une valeur approchée au millième près. La question de la précision, ou de la marge d'erreur absolue, n'a pas à être abordée pour rester dans la conformité du programme officiel.

Le *contrat institutionnel de calcul* décrit précédemment pour la classe de seconde est une reprise de ce qui a été installé au collège. En classe de sixième les contenus suivants sont présents dans le domaine *Travaux numériques* : « Procédés de calcul approché : troncature et arrondi ; ordre de grandeur d'un résultat ». La recommandation suivante apparaît en troisième : « La pratique du calcul exact ou approché sous différentes formes complémentaires (calcul mental, calcul à la machine ou avec un ordinateur) a les mêmes objectifs que dans les classes antérieures ». Elle résume bien ce qui est prescrit dans le curriculum officiel et elle préfigure ce qui sera travaillé en classe de seconde. Le *contrat institutionnel de calcul* préconisé en seconde est donc une reprise des mêmes règles concernant le calcul, la nouveauté réside dans l'extension des contextes d'utilisation de ces deux modes de calcul (exemple : rechercher la mesure d'un angle exprimée en radian). Cette pratique relève d'un contrat de calcul approximatif.

9.2.1.5 Règles possibles du contrat de calcul approximatif dans le curriculum réel

La demande de l'exercice précédent : « on donnera des valeurs arrondies à 0,1° près » n'a donc pas de sens dans le contexte du curriculum officiel. Une modification de l'énoncé pourrait être : « exprimer les mesures des angles avec des valeurs décimales arrondies en gardant un chiffre après la virgule ». Quelles techniques de calcul pourraient être élaborées dans la classe pour répondre à ce type de question ? Un commentaire du document d'accompagnement des programmes donne des éléments de réponse :

> - Calcul à la main et à la machine
>
> Quelques exemples bien choisis de calcul élémentaire permettront :
>
> - […]
>
> - de développer une utilisation réfléchie et efficace des machines, en particulier une pratique tenant compte des priorités propres aux machines, évitant la recopie d'un résultat partiel s'appuyant sur l'utilisation éventuelle d'une mémoire, etc.

> Il s'agit d'intégrer véritablement les calculatrices dans le cadre de la classe de mathématiques, d'en démystifier certains aspects et de mieux situer la spécificité de cet outil, tout en gardant à l'esprit qu'étant donné une valeur exacte, on peut toujours donner une valeur approchée mais que réciproquement, il n'est guère souvent possible de dégager la valeur exacte d'un résultat approché ; on peut par contre en donner un encadrement.

Je reprends les calculs de l'exercice 56 proposés précédemment :

- $\tan \widehat{DAO} = \frac{2}{3}$; la calculatrice donne l'arrondi 33,69006753 pour la mesure en degré de l'angle $\widehat{DAO}$ qui peut être gardé en mémoire ;
- $\cos \widehat{OAB} = \frac{3}{4}$; la calculatrice affiche le nombre 41,40962211 pour la mesure en degré de l'angle $\widehat{OAB}$ auquel on ajoute le nombre gardé en mémoire, ce résultat est alors arrondi au dixième près;
- Le résultat est alors : $\hat{A} = \widehat{DAO} + \widehat{OAB} \simeq 75{,}09968964 \simeq 75{,}1°$

Mais il n'est pas démontré que le nombre 75,1 est la mesure en degré arrondie au dixième près de la mesure de l'angle. Rien ne permet de connaître la précision de ce résultat dans le contexte de la classe de seconde, mais la technique d'utilisation de la calculatrice permet d'avoir la meilleure précision possible.

9.2.1.6 Analyse de l'exercice de trigonométrie dans le cahier d'Anissa

Les réponses d'Anissa pour cet exercice sont reproduites complètement en annexe 11.25. Aucune correction n'apparaît sur le cahier de cette élève pour le calcul de la mesure de $\hat{A}$, mais pour les questions suivantes des réponses sont raturées. L'exercice a-t-il été corrigé ? S'il l'a été, est-ce que la correction a été correctement prise ? Je ne peux pas répondre à ces questions. Les réponses données permettent cependant de constater certaines pratiques de calcul.

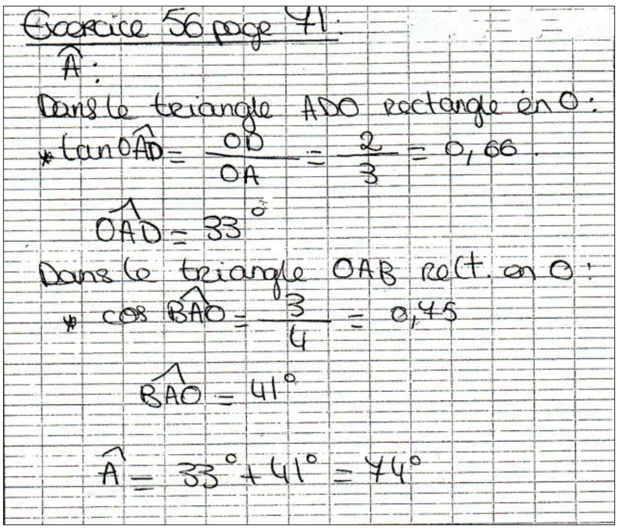


Figure 92 : début de l'exercice n° 56 dans le cahier d'Anissa

Les trois nombres idécimaux sont confondus avec leurs valeurs approchées qui sont des troncatures pour deux d'entre eux (0,66 et 33) et non pas des arrondis. La tangente et le cosinus sont exprimés par des décimaux d'ordre 2 alors que les angles le sont par des entiers.

Le rapport personnel de cette élève au calcul numérique se perçoit à travers ses réponses et il se confirme dans les réponses suivantes de l'exercice n° 56. Un profil se dessine relativement à la « typologie des rapports personnels d'élèves aux objets racine carrée et nombre réel » (Bronner, 1997) élaborée par Bronner dans sa thèse. Les réponses dans le cahier d'Anissa pour le calcul de l'angle $\hat{B}$ sont dans la Figure 93. L'expression « à 0,1 cm près » apparaît dans cette question et concerne toutes les grandeurs que ce soit des longueurs ou des angles. Ces confusions montrent le manque de sens de cette expression pour Anissa.

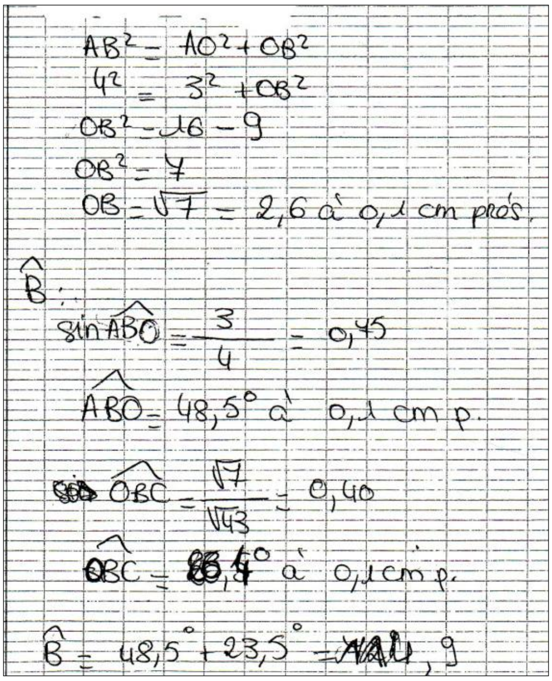

$AB^2 = AO^2 + OB^2$
$4^2 = 3^2 + OB^2$
$OB^2 = 16 - 9$
$OB^2 = 7$
$OB = \sqrt{7} = 2{,}6$ à $0{,}1$ cm près.
$\hat{B}$:
$\sin \widehat{ABO} = \frac{3}{4} = 0{,}45$
$\widehat{ABO} = 48{,}5°$ à $0{,}1$ cm p.
$\widehat{OBC} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{43}} = 0{,}40$
$\widehat{OBC} = 66{,}4°$ à $0{,}1$ cm p.
$\hat{B} = 48{,}5° + 23{,}5° = \ldots,9$

Figure 93 : suite de l'exercice n° 56 dans le cahier d'Anissa

Les nombres pour lesquels Anissa donne une valeur approchée sont répertoriés dans le tableau ci-dessous.

Étapes du calcul utilisées par Anissa	$\sqrt{7}$	$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{43}}$	$\widehat{ABO} = \sin^{-1} 0{,}45$	$\widehat{OBC} = \cos^{-1} 0{,}4$
Arrondi donné par une calculatrice	2.645751311	0.403473292	48.59037789	66.42182152
Réponse arrondie donnée par Anissa	2,6	0,40	48,5	66,4

Si Anissa avait utilisé une technique plus fiable de sa machine elle aurait pu trouver cet affichage sur l'écran comme valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{OBC}$: 66.20450889 ce qui donne un arrondi décimal d'ordre 2 égal à 66,2, et non pas à 66,4.

Les nombres sont remplacés par des valeurs approchées décimales d'ordre 2 ou d'ordre 1. Les techniques de calcul spécifiques de l'emploi de la calculatrice ne sont pas mises en œuvre. Est-ce que Anissa les a déjà apprises ? Les nombres rencontrés sont remplacés par des décimaux. Je remarque aussi l'apparition de l'expression « à 0,1 cm p. » utilisée pour les valeurs approchées, qu'elles désignent des longueurs ou des mesures d'angles. L'unité de mesure des longueurs n'est pas donnée dans l'exercice, il ne s'agit donc pas obligatoirement du cm. Anissa semble ajouter cette expression en vertu d'une règle du contrat didactique mais sans en percevoir le sens.

Anissa offre un portrait qui entre dans la catégorie du modèle CA (conception approximation) décrit par Bronner (1997). Dans cette conception la notion de quotient est considérée comme « un opérateur à deux variables qui, à un couple de nombres décimaux (a,b) avec b non nul, associe un nombre décimal c s'écrivant avec un certain nombre de chiffres. » (Ibid. p. 170). Bronner adopte cette notation pour résumer ce qui précède :

$$\div\ (cal) : a\ \rightarrow c \text{ où } c \text{ est une valeur approchée lue à la calculatrice}$$

Le même type de conception concerne les fonctions comme la racine carrée, le cosinus, le sinus ou la tangente qui fonctionnent comme des *opérateurs-algorithmes* (Ibid.). Un autre profil d'élève est proche de celui-ci mais il est pourtant différent, c'est la conception CA≈ (Ibid.) : les élèves utilisent les mêmes opérateur-algorithmes mais ne confondent pas le nombre et une de ses valeurs approchées, ils utilisent donc le signe « à peu près égal à ».

Un paradoxe est visible dans la classe de Mathieu : les élèves utilisent constamment leur machine mais ne semblent pas connaître leur maniement. Dans la classe de Mathieu je n'ai trouvé aucune trace d'un travail spécifique sur l'usage de la calculatrice pour des tâches numériques.

9.2.1.7 Analyse d'une question de trigonométrie dans un devoir de Clotilde

Présentation des exercices 3 et 4 du devoir

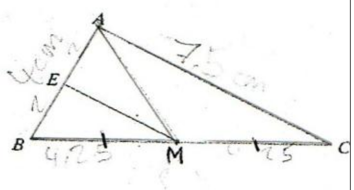
Dans le devoir en classe du 17 octobre 2007 qui était l'évaluation sommative à l'issue du chapitre 2 sur la géométrie plane, une question portait sur la trigonométrie (Cf. Figure 94 page suivante). Avant de revenir spécifiquement à l'étude de cette question, je vais analyser rapidement les exercices 3 et 4 visibles sur l'extrait présenté.

L'exercice 3 est typique du travail dans une dynamique numérico-géométrique où des nombres irrationnels sont des *nombres de service* (et non pas *produits* par le problème posé). Le théorème de Pythagore est ici un bon prétexte pour faire travailler des calculs avec des nombres irrationnels comportant des racines carrées.

Exercice 3 (2,5 points)

On considère le triangle ABC rectangle en A tel que $AC = 3\sqrt{2} - 1$ et $BC = 3 + \sqrt{18}$

3. Calculer la valeur exacte de AB^2 et en donner la forme la plus simple possible
4. Donner la valeur arrondie de AB à 10^{-1} prés



Exercice 4*(6 points)*

On donne le triangle ABC tel que AC=7,5 cm et AB = 4 cm.
[AM] est la médiane issue de A, BM = 4,25 cm et (EM) //(AC).

1)a. Parmi les propriétés citées ci-dessous, quelles sont celles qui sont utilisables en partant des données ?
b. Parmi les propriétés citées ci-dessous, quelles sont celles qui sont utilisables pour démontrer que E est le milieu de [AB].
c. Calculer BE.

2) a. Parmi les propriétés citées ci-dessous, quelles sont celles qui sont utilisables pour trouver la nature de ABC ?
b. Quelle est la nature du triangle *ABC ?(justifier la réponse)*

3) a. Parmi les propriétés citées ci-dessous, quelles sont celles qui sont utilisables pour trouver la valeur d'un angle ?
b. Donner une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{ABC}$.

Liste des propriétés

a) Si un triangle est rectangle, alors on peut calculer le sinus, le cosinus et la tangente d'un de ses angles aigus.
b) Si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.
c) Si, dans un triangle, le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.
d) Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté.
e) Si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un autre côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu.

Figure 94 : extrait du devoir en classe n°2 dans la classe de Clotilde

L'exercice 4 est atypique dans les pratiques enseignantes, il fait travailler les savoirs de référence en géométrie en tant qu'objets avant d'être les outils pour répondre aux questions posées. Dans la classe de Clotilde il marque une rupture du contrat didactique par rapport aux attentes des élèves sur la forme des énoncés de géométrie. Cela peut expliquer que des élèves ont préféré faire l'exercice 5 avant l'exercice 4 (voir plus loin). C'est la seule occurrence de ce type de travail trouvé dans les traces écrites de toute l'année scolaire. Le genre de tâches qui est contextualisé dans cet exercice 4 est le suivant : un ensemble d'énoncés théoriques étant proposé (définitions, théorèmes, propriétés), et une tâche étant donnée, trouver l'énoncé théorique qui permet de justifier la technique mise en œuvre pour accomplir la tâche. L'intérêt majeur réside dans le fait que les éléments théoriques des praxéologies mathématiques ponctuelles mises en œuvre dans la résolution de l'exercice doivent être explicitement désignés dans ce genre d'activité. Mais pourquoi ne pas proposer des types de tâches analogues dans d'autres domaines et dans le domaine numérique en particulier ?

Analyse a priori de la question de trigonométrie

Dans l'exercice 4 il est tout d'abord demandé de démontrer que le triangle ABC est rectangle en A, c'est l'objectif de la deuxième question. Dans la troisième question le recours à la trigonométrie est nécessaire pour déterminer une valeur approchée de l'angle $\widehat{ABC}$. Je présente l'analyse *a priori* de cette dernière question et les différentes manières de trouver la mesure de l'angle. Je ne m'intéresse qu'aux nombres et non pas au raisonnement.

L'angle $\widehat{ABC}$ peut être trouvé grâce à l'une des égalités suivantes :
$\sin\widehat{ABC} = \frac{7,5}{8,5}$ ou $\cos\widehat{ABC} = \frac{4}{8,5}$ ou encore $\tan\widehat{ABC} = \frac{7,5}{4}$

Parmi les trois nombres rationnels $\frac{7,5}{8,5}$, $\frac{4}{8,5}$ et $\frac{7,5}{4}$ les deux premiers sont idécimaux et le troisième est décimal. Le calcul de l'angle est *a priori* plus précis en utilisant la troisième égalité puisqu'une marge d'erreur va être introduite pour le calcul des deux premiers quotients avant même le calcul de l'angle. En fait une calculatrice scientifique donne la même valeur arrondie en partant de chacune des égalités précédentes, c'est le nombre : 61,92751306. Une valeur approchée du nombre affiché par la machine est soit 61 soit 62 au degré près. Mais une valeur approchée entière de l'angle est soit 61°, soit 62°. Ce sont les valeurs entières dont la distance au nombre recherché est la plus petite. Mais rien ne permet d'affirmer que ces valeurs approchées sont au degré près, même si on peut penser qu'il en est bien ainsi en raison de la puissance de calcul des calculatrices. Pour parvenir à cette conclusion il faudrait démontrer que :
$\left|\widehat{ABC} - 61°\right| \leq 1°$ ou que $\left|\widehat{ABC} - 62°\right| \leq 1°$.

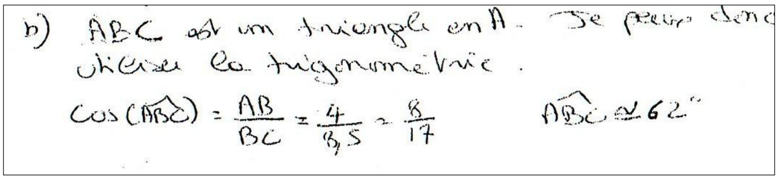
La question posée par Clotilde devrait donc être modifiée. Voici une autre proposition : « donner une valeur approchée entière de l'angle $\widehat{ABC}$ ». Cette consigne comporte un implicite : cette valeur approchée est une valeur approchée à l'unité près du nombre affiché par la machine. Cet implicite peut être partagé avec les élèves à condition de prendre en charge dans l'enseignement l'utilisation des calculatrices.

Je souligne une difficulté dans ce genre de tâches où interviennent des fonctions trigonométriques car les nombres ont des statuts bien différents. Soit ils réfèrent à des mesures d'angles (ici en degrés), soit ils réfèrent à des rapports de mesures, c'est-à-dire des quotients, qui sont des nombres sans unité qui caractérisent un angle. Manipuler ces nombres, c'est aussi manipuler les concepts d'angle, de mesure d'angle, de sinus, de cosinus, de tangente. La dynamique numérico-géométrique qui permet la reprise de la trigonométrie en classe de seconde, est peut-être une *dynamique numérico-géométrico-fonctionnelle* ! Le cadre des fonctions est ici dans son état d'ébauche plus proche de la notion embryonnaire d'opérateur.

Les attentes de Clotilde pour cette question

Clotilde donne presque toujours une correction des devoirs faits en classe ou à la maison. C'est le cas pour ce deuxième contrôle en classe, on peut voir page suivante sa réponse[1] pour la question que je suis en train d'étudier.

[1] Clotilde a certainement écrit cette correction très rapidement et elle a oublié le mot « rectangle » dans sa phrase.



b) ABC est un triangle en A. Je peux donc utiliser la trigonométrie.

$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{8,5} = \frac{8}{17}$ $\widehat{ABC} \simeq 62°$

Figure 95 : correction de Clotilde pour la question 3) b. de l'exercice 4.

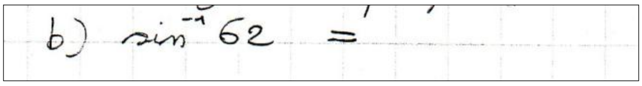
Je constate qu'elle transforme l'écriture du nombre rationnel $\frac{4}{8,5}$ pour l'écrire sous une écriture canonique d'un rationnel, à savoir un quotient de deux entiers, mais cette transformation n'a aucune raison d'être dans ce contexte. Je suppose qu'elle agit ainsi sous l'influence de sa *mémoire pratique* (au sens de Matheron, 2000) d'élève et d'étudiante. La valeur approchée attendue est égale à 62°, c'est donc la valeur arrondie entière du nombre affiché par la machine, mais comme déjà indiqué, on ne peut être certain que l'on a une valeur approchée au degré près de l'angle, ce qui était demandé dans la question. Par ailleurs 61° est également une valeur approchée qui répond à la question.

Les réponses d'élèves de Clotilde à cette question du devoir du 17 octobre 2007

Je m'intéresse aux réponses de quatre élèves à la question 3) b : Diego, Julien, Lucas et Pauline dont je dispose des devoirs. Je présente dans le tableau ci-dessous la façon dont ces élèves ont géré la suite des exercices du devoir et je donne leurs notes en repérant la place de l'exercice 4 que je vais analyser (mis en gras).

	Note sur 20	**Ordre de traitement des exercices**	**Place de la question 3) b. de l'exercice 4**
Diego	15	1-2-3-5-**4**	Dernière question traitée dans le devoir
Lucas	12	1-2-3-**4**-5	Question non traitée
Pauline	11,5	1-2-3-**4**	Dernière question traitée dans le devoir
Julien	11,5	1-2-3-**4**-5-suite du 1	Question traitée avant l'exercice 5 et la suite du 1

Les précisions précédentes peuvent faire comprendre la précipitation des élèves pour écrire leurs réponses à une question qui ne devait pas « rapporter beaucoup ». Je m'intéresse pourtant aux écrits des élèves qui révèlent des difficultés pour présenter les résultats trouvés, difficultés en lien avec le sens à donner aux nombres qui représentent des objets mathématiques très différents.



b) $\sin^{-1} 62 =$

Figure 96 : devoir de Diego

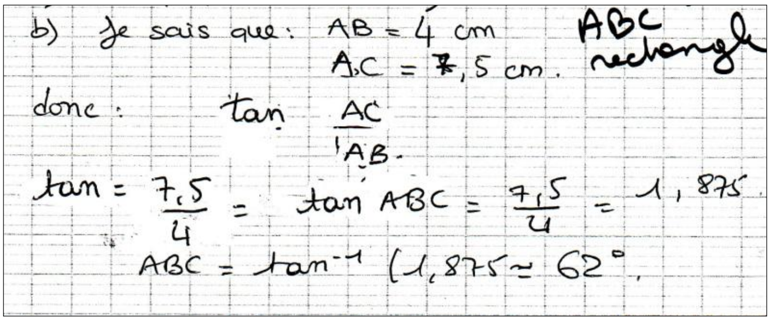


Figure 97 : devoir de Pauline

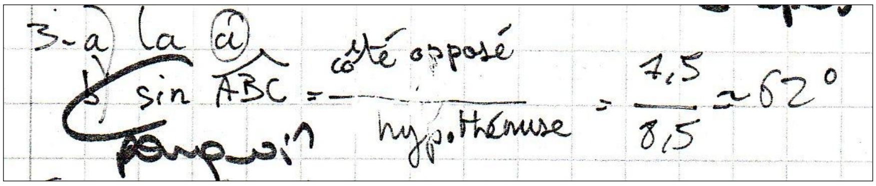


Figure 98 : devoir de Julien

Les trois élèves ont trouvé le nombre 62 attendu par Clotilde, mais seul l'écrit de Pauline est correct. Elle semble bien comprendre le statut des nombres qu'elle manipule. En revanche Diego et Julien font des erreurs dans la formulation en langage mathématique. Diego confond l'antécédent et l'image de la fonction $\sin^{-1}$ (je précise que Diego n'a rien écrit de plus comme réponse à la question). Il utilise la notation $\sin^{-1}$ alors que Clotilde ne l'utilise pas en classe, vraisemblablement en recopiant l'inscription sur la touche de la calculatrice. Julien confond le quotient qui exprime le sinus de l'angle et la valeur de l'angle. Il est possible qu'il utilise le signe égal (et le signe à peu près égal) comme synonyme de « ça fait » (ou de « ça fait à peu près »). C'est une erreur classique qui dénote un problème de compréhension de l'égalité mathématique. Clotilde n'a pas signalé cette erreur à l'élève.

Pour ces élèves de seconde, cette question portant sur la trigonométrie pendant la période de la *reprise scolaire* est une *reprise sans lien avec du nouveau* des connaissances relatives à la trigonométrie étudiées en collège. Ils savent manipuler les nombres avec leur calculatrice pour répondre à la question posée et trouver le résultat attendu cohérent avec le *contrat institutionnel de calcul* instauré dans la classe. Mais je constate des déficits dans la formulation de la réponse qui traduisent probablement des connaissances peu solides sur les objets mathématiques en jeu. Les fonctions trigonométriques mettent en relation des nombres qui sont d'une part des mesures d'angles et d'autre part des nombres exprimant des rapports de longueur. Elles introduisent ainsi une difficulté particulière par rapport aux autres fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ rencontrées en seconde, ces dernières faisant correspondre des nombres réels entre eux sans référence à d'autres objets mathématiques. Cette difficulté va encore s'accroitre avec l'introduction du radian qui est une nouvelle unité d'angle déroutante par rapport au degré devenu familier pour les élèves de collège.

9.2.1.8 Conclusion sur la reprise par Mathieu et Clotilde de la trigonométrie

J'ai constaté le peu de place donné par Mathieu et Clotilde dans leur progression annuelle pour la reprise des connaissances du collège concernant la trigonométrie. Pourtant ces deux professeurs savent que ce domaine est important pour la suite des études. Le document d'accompagnement de seconde préconise des reprises des connaissances du collège pour les « entretenir », ce qui est une fonction importante des reprises : « Les élèves sortant du collège disposent des connaissances de base de la trigonométrie dans un triangle rectangle ; ces connaissances seront entretenues en géométrie, lors de la résolution de problèmes relatifs à diverses configurations du plan » (extrait déjà cité en page 263). Je mets en parallèle l'importance excessive donnée aux résolutions d'équations et d'inéquations comportant des valeurs absolues avec l'absence presque totale de la reprise de la trigonométrie, et je perçois un grand déséquilibre dans la répartition annuelle des thèmes de travail proposés aux élèves. Je vais m'intéresser dans la section suivante au chapitre de trigonométrie qui introduit des nouveautés par rapport au collège conformément au curriculum officiel.

9.2.2 Analyse du chapitre sur la trigonométrie

Après avoir étudié les RDN lors des occurrences de la trigonométrie en tant que reprises des connaissances du collège, je vais explorer maintenant les nouveautés de ce domaine introduites en seconde. Dans cette section je vais décrire et analyser des éléments saillants du chapitre consacré à la trigonométrie, dernier chapitre de la progression dans la classe de Mathieu et avant-dernier chapitre (ou avant avant-dernier ?) dans celle de Clotilde (le chapitre suivant concerne la géométrie dans l'espace mais il semble avoir été suivi d'un chapitre de statistique[1]).

Je commence par décrire l'organisation globale des différents sujets du chapitre chez les deux professeurs (Cf. Tableau 44) pour mieux situer les éléments en lien avec le numérique que j'analyserai plus loin. Ce tableau donne à voir des choix très différents dans l'architecture de la séquence pour les deux professeurs. Clotilde commence d'emblée par présenter une nouveauté dans le programme de seconde, le cercle trigonométrique, alors que Mathieu reprend des connaissances sans lien avec du nouveau du programme de collège. Cela entraine Mathieu à définir le radian pour les angles géométriques, et Clotilde l'introduit en lien avec les angles orientés. Quant aux valeurs particulières des lignes trigonométriques pour les angles remarquables, elles apparaissent dès le début de la séquence chez Mathieu (même s'il

[1] Je ne sais pas exactement ce qui a été enseigné en fin d'année après le chapitre de trigonométrie. Le 9 mai, alors que j'étais présente, Clotilde a annoncé aux élèves qu'il y aurait un dernier contrôle portant sur la trigonométrie et la géométrie dans l'espace juste avant le conseil de classe. Le 10 avril lors d'un entretien, Clotilde m'a dit qu'elle enseignerait la statistique puisque le programme le demandait. Je ne peux que supposer que ce domaine a été enseigné en fin d'année (Cf. p. 85).

les reprend et les complète ensuite avec le radian) et elles se trouvent à la fin de la séquence chez Clotilde.

Comme je l'avais annoncé précédemment, certaines phases de la séquence intéressantes au point de vue du numérique seront analysées et l'analyse *a posteriori* sera présentée avec des éclairages éventuels d'analyse *a priori* sans séparer strictement ces deux points de vue.

	Mathieu	**Clotilde**
Commencé le	23 mai 2007	28 avril 2008
Titre du chapitre	CH9 Trigonométrie	CH9 Fonctions trigonométriques
Organisation du chapitre	I – Introduction 1°) Valeurs particulières (du sinus et du cosinus des angles de 30°, 45° et 60°) 2°) Définition du radian (à partir d'un cercle de rayon 1) II – 1°) Définition du cercle trigonométrique 2°) Définition du sinus et du cosinus (considérés comme abscisse et ordonnée d'un point du cercle trigonométrique) 3°) Propriétés du sinus et du cosinus 4°) Valeurs particulières (du sinus et du cosinus des angles de 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$ radians) 5°) Les fonctions sinus et cosinus	I – Le cercle trigonométrique a) Repérage d'un point sur le cercle trigonométrique b) Le radian c) Cosinus et sinus (considérés comme abscisse et ordonnée d'un point du cercle trigonométrique) Propriétés du sinus et du cosinus. d) Quelques valeurs remarquables (du sinus du cosinus et de la tangente des angles de 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$ radians). II – Les fonctions sinus et cosinus

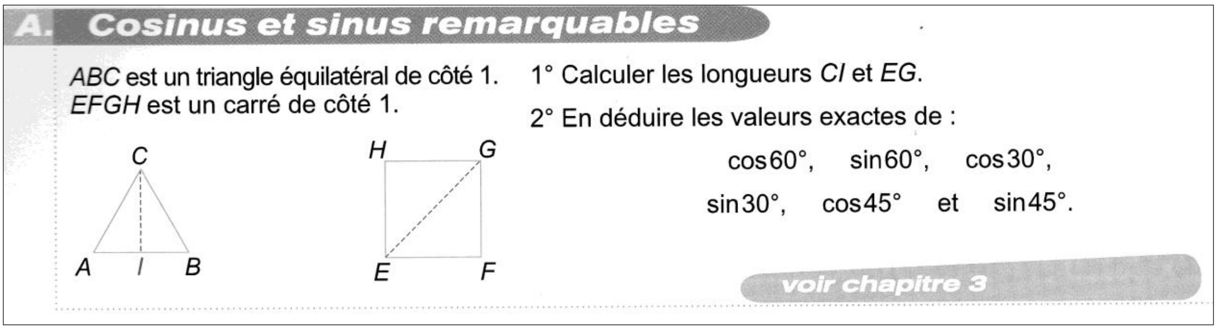
Tableau 44 : organisation du chapitre sur la trigonométrie dans les classes de Mathieu et de Clotilde

9.2.2.1 La séquence relative à la trigonométrie chez Mathieu

Dans cette section je vais analyser quatre temps intéressants du point de vue des RDN dans la séquence sur la trigonométrie de Mathieu. La séquence commence par la détermination du sinus et du cosinus des angles de 30°, 45° et 60°, et c'est une reprise sans nouveauté de ce qui avait été déjà inscrit dans le chapitre 3 de géométrie plane. Je décris et j'analyse ensuite comment Mathieu introduit les mesures d'angles en radian, et comment il gère la reprise d'une situation de proportionnalité dans des problèmes de conversion de mesures d'angles géométriques en degrés et en radians. Le dernier temps est celui de la constitution d'un tableau de nombres, très intéressant au point de vue des RDN, qui préfigure la première rencontre avec la fonction cosinus et la fonction sinus.

A. Reprise sans nouveauté des connaissances du collège et arrêt de la chronogenèse

Mathieu commence le chapitre de trigonométrie le 23 mai 2005. Je suis présente ce jour là et la séance est filmée (Cf. verbatim en annexe 11.27). Mathieu introduit cette séquence en faisant une reprise des connaissances relatives à la trigonométrie sous la forme de révisions sans lien avec du nouveau et dans le même contexte que celles du collège. Il fait calculer aux élèves le sinus et le cosinus des angles de 30°, 45° et 60° à partir d'un triangle équilatéral et d'un carré (Cf. Figure 99). Des élèves remarquent de façon pertinente que rien n'est dit pour le point I, Mathieu leur dit de considérer que (CI) est la médiane issue de C.



A. Cosinus et sinus remarquables

ABC est un triangle équilatéral de côté 1.
EFGH est un carré de côté 1.

1° Calculer les longueurs *CI* et *EG*.

2° En déduire les valeurs exactes de :

cos60°, sin60°, cos30°,
sin30°, cos45° et sin45°.

Figure 99 : activité du début de la séquence sur la trigonométrie chez Mathieu

Ces valeurs particulières ont déjà été données dans le troisième chapitre et inscrites dans le cahier de cours (Cf. Figure 88 p. 266). Des élèves ne comprennent pas l'objectif du travail :

(7 min)

> Un élève, Valentin, signale au professeur que ce travail a déjà été fait, Mathieu lui répond qu'il a raison et « qu'on a déjà fait des trucs comme ça[1] ». L'élève insiste pour savoir pourquoi on le refait, Mathieu répond évasivement et conclut en s'éloignant : « non tu as raison de poser la question ».

Mathieu revient sur cette question de cet élève plus tard dans la séance :

(29 min)

> **Mathieu :** Voilà et comme l'a si bien dit Valentin tout à l'heure « eh Monsieur on l'a déjà fait ça » c'est vrai on l'a déjà fait … il y en a qu'un qui l'a vu… on avait fait un petit tableau on avait rangé les valeurs des angles et les sinus et les cosinus
>
> **Élève :** on l'a fait en troisième
>
> **Mathieu :** et aussi vous l'aviez fait l'année dernière oui
>
> **Mathieu :** allez on continue.

Ces questions des élèves montrent que certains s'interrogent sur le recommencement du temps didactique, que ce soit pour refaire des enseignements qui ont déjà eu lieu en troisième, ou plus tôt dans l'année de seconde. Valentin rappelle au professeur que les connaissances qui sont travaillées à ce moment de l'année font déjà partie de la *mémoire didactique* de la classe, un autre élève rappelle même implicitement que ces connaissances font partie de la mémoire

[1] Dans le cahier de cours des élèves figure un tableau avec les valeurs particulières des lignes trigonométriques des angles de 30°, 60°, 90° et 0° inséré dans le chapitre de révision sur la géométrie du collège.

institutionnelle. Mathieu apparaît sensible à cette question à laquelle il revient une vingtaine de minutes plus tard.

De nombreux élèves ont utilisé les valeurs particulières demandées dans la deuxième question pour calculer CI et EG. Mathieu, qui circule dans les rangs et intervient en aparté auprès des élèves, va répéter plusieurs fois de ne pas utiliser ces valeurs particulières comme il le dit dans cet extrait à deux élèves :

(11 min)

> **Mathieu :** Pourquoi vous ne répondez pas aux choses qui sont demandées là, pourquoi chercher la tangente ? (inaudible) en déduire ça veut dire que tu vas chercher CI et GE sans … à la deuxième question il y a écrit en déduire les valeurs exactes ça veut dire qu'à la première question tu ne les as pas utilisées … donc il faut que tu t'en sortes autrement pour chercher CI et GE que tu utilises autre chose que les angles (inaudible) à part ces sinus là qu'est-ce que vous pourriez utiliser
>
> **Élève :** Pythagore
>
> **Mathieu :** … ben voilà c'est beaucoup plus simple il n'y a pas de problème de côté adjacent.

Je note que malgré des reprises très réduites en cours d'année de la trigonométrie du collège, plusieurs élèves mobilisent malgré tout ces connaissances. Il est vrai que le livre donne une indication « voir chapitre 3 » et c'est dans ce chapitre que se trouvent les révisions de trigonométrie. Les élèves ont donc pu se référer à ce chapitre. L'objectif de cette première activité est donc la production des valeurs trigonométriques particulières.

J'ai déjà souligné que ces nombres, notamment des irrationnels, vont être produits dans une dynamique numérico-géométrique. Le *contrat institutionnel de calcul* est dans ce contexte la pratique de calcul exact, demande qui est d'ailleurs explicite dans l'énoncé. Mathieu le rappelle à plusieurs reprises à différents élèves pour la première question :

(15 min)

> **Mathieu :** (il s'adresse à toute la classe) Et travaillez avec des fractions ne travaillez pas avec des racines carrées… euh avec des nombres à virgule
>
> **Mathieu :** (à deux élèves) c'est pas bon ça, j'aimerais que vous l'ayez sous forme de valeur exacte.

Pour la deuxième question de nombreux élèves cherchent les résultats avec leur machine, là aussi Mathieu intervient à plusieurs reprises :

(22 min)

> **Mathieu :** N'utilisez pas la machine, vous utilisez juste la figure

(24 min)

> **Mathieu :** Je voudrais que vous fassiez le calcul sans la machine …

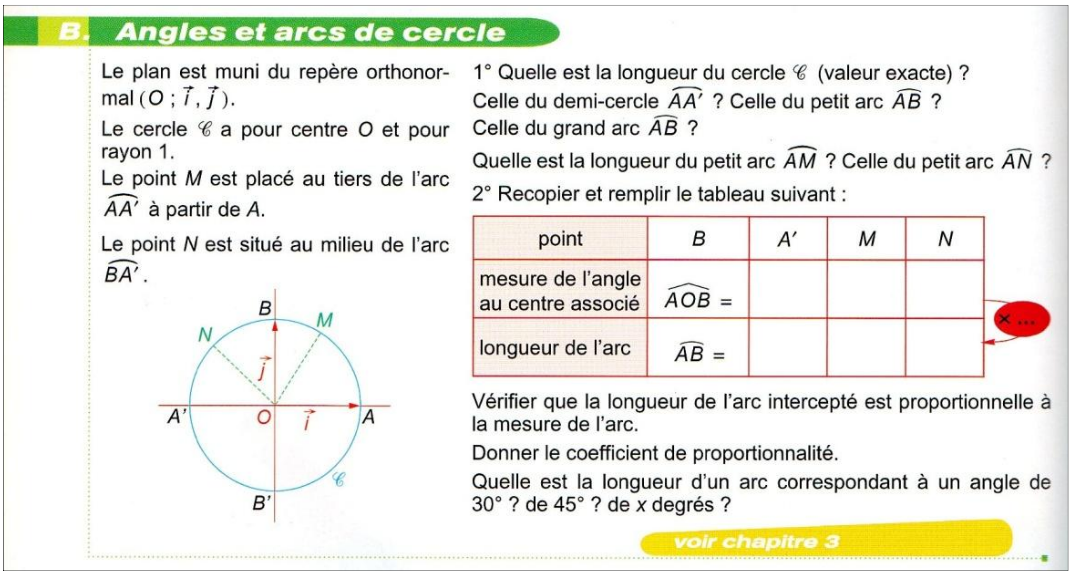
(25 min)

> **Mathieu :** Laissez tomber la calculette vous n'en avez pas besoin de la calculette, et oui ça ne sert à rien, en déduire ça veut dire qu'il faut utiliser ce que vous avez fait.

Les interventions répétées de Mathieu au sujet de l'utilisation de la calculatrice, montrent que la plupart des élèves a recours spontanément à la machine pour répondre à une question du type « calculer ». C'est également ce que j'ai toujours observé dans la classe de Mathieu, en me demandant souvent ce qu'ils pouvaient bien chercher avec leur machine. Le *contrat institutionnel de calcul* est régulé par le professeur qui est le prescripteur et qui ne renvoie pas du tout la question du contrat de calcul aux élèves. En fin d'année scolaire, les élèves ne sont toujours pas autonomes pour savoir déterminer la pratique de calcul attendue en fonction de la tâche mathématique. La question n'est pas dans le topos de l'élève et elle apparaît régie par la volonté du professeur : « j'aimerais », « je voudrais ». Les raisons mathématiques ne sont pas partagées avec les élèves, elles ne sont pas considérées comme des connaissances faisant partie des apprentissages nécessaires pour l'activité mathématique.

B. Relation de la longueur d'un arc de cercle avec l'angle au centre qui l'intercepte

Après la première phase de la séance du 23 mai 2007 qui a permis d'établir les valeurs particulières des sinus et des cosinus des angles de 30°, 60° et 45°, Mathieu demande aux élèves de faire l'activité suivante du livre, l'activité B à la page 276 (Cf. Figure 100).



B. Angles et arcs de cercle

Le plan est muni du repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Le cercle $\mathscr{C}$ a pour centre O et pour rayon 1.

Le point M est placé au tiers de l'arc $\overset{\frown}{AA'}$ à partir de A.

Le point N est situé au milieu de l'arc $\overset{\frown}{BA'}$.

1° Quelle est la longueur du cercle $\mathscr{C}$ (valeur exacte) ? Celle du demi-cercle $\overset{\frown}{AA'}$? Celle du petit arc $\overset{\frown}{AB}$? Celle du grand arc $\overset{\frown}{AB}$?

Quelle est la longueur du petit arc $\overset{\frown}{AM}$? Celle du petit arc $\overset{\frown}{AN}$?

2° Recopier et remplir le tableau suivant :

point	B	A'	M	N
mesure de l'angle au centre associé	$\widehat{AOB}$ =			
longueur de l'arc	$\overset{\frown}{AB}$ =			

× ...

Vérifier que la longueur de l'arc intercepté est proportionnelle à la mesure de l'arc.

Donner le coefficient de proportionnalité.

Quelle est la longueur d'un arc correspondant à un angle de 30° ? de 45° ? de x degrés ?

voir chapitre 3

Figure 100 : deuxième activité de la séance du 23 mai 2007 chez Mathieu

Je donne un extrait du verbatim de la séance du 23 mai qui permet l'avènement de π dans le milieu de la situation didactique. Mathieu a lu l'énoncé du début de l'activité et il sollicite la coopération des élèves pour répondre à la première question.

(31 min)

> **Mathieu :** Alors la première question c'est quelle est la longueur du cercle C en valeur exacte. Oui Valentin ?
>
> **Valentin :** l'arc $\overset{\frown}{AA'}$ c'est celui du haut ou celui du bas ?
>
> **Mathieu :** ben on pourrait se poser la question tu as raison mais la manière dont le schéma est fait c'est plutôt celui du haut…. Puisqu'on a placé M et N dessus. D'accord ? Alors quelle est la longueur du cercle C ? … en valeur exacte…

Élève : 2π

Mathieu : 2π … tout le monde est d'accord avec ça ?

Mathieu écrit au tableau : « 1°) La longueur du cercle C est 2π »

Mathieu : ça vient de quelle formule ce truc là ?

Élève : $2\pi r$

Mathieu : $2\pi r$, quelle est celle du demi-cercle $\widehat{AA'}$?

Élève : inaudible

Mathieu : oui, donc ça fait ?

Élève : π

Mathieu : OK

Il écrit au tableau : « La longueur du demi-cercle $\widehat{AA'}$ est π »

Dans cet extrait, l'élève Valentin joue encore le rôle de celui qui pose les questions qu'il faudrait nécessairement se poser, le professeur accepte complètement ce type de remarques et lui donne encore raison. Ainsi Valentin a choisi une posture qui lui donne un rôle actif dans le processus de topogenèse.

Je m'intéresse au nombre π, il est tout à fait essentiel dans cette séquence et il est introduit au cours de la deuxième activité. Il va devenir omniprésent dans toute la suite de la séquence. Mais que représente-t-il pour les élèves ? Est-ce simplement un signe qui pourrait être remplacé par un autre ? Est-ce analogue à une lettre dont le statut est une indéterminée ? Est-ce juste le nombre 3,14 ? Une reprise de la nature des nombres et de l'explicitation de la référence de cette lettre grecque apparaissent nécessaires pour enlever toute équivoque sur ce nombre et pour continuer le processus de conceptualisation sur les nombres réels. Le nombre π est dans le milieu, mais si *l'élève a un milieu*, comme le dit Margolinas (2004), ils risquent d'être bien différents selon leur conception de cet étrange nombre π. Pendant cette séance et les deux suivantes auxquelles j'ai assisté, π restera derrière son masque de lettre grecque et rien de plus ne sera dévoilé sur lui.

La fin de la séance du 23 octobre se termine avec le début de l'étude de l'activité B. Elle sera corrigée à la séance suivante du 26 mai 2007 à laquelle j'ai également assisté, mais qui n'a pas été filmée. Elle prépare l'introduction de la notion de radian et du cercle trigonométrique. Le tableau suivant a été complété, Mathieu ayant ajouté trois colonnes par rapport à l'énoncé du livre (Cf. Tableau 45 page suivante). Les points d'interrogation signalent les nombres qui étaient à compléter. La consigne de Mathieu avait été : « vous placez les points P, Q et R et vous me dites ce qu'il y a à la place des points d'interrogation ».

Ce tableau donne une vision intéressante de la correspondance entre des nombres entiers et des nombres irrationnels, bien que l'irrationalité des nombres de la deuxième ligne ne soit pas explicitée, et vraisemblablement pas perçue par de nombreux élèves. En effet, comme je l'ai déjà signalé précédemment au moment de l'avènement de π, Mathieu ne saisit pas l'occasion qui se présente de faire une reprise sur la nature des nombres pour justifier leur écriture.

point	B	A’	M	N	P	Q	R
mesure de l’angle au centre associé	90°	180°	60°	135°	? 30°	45°	? 210°
longueur de l’arc	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	? $\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{6}$

Tableau 45 : tableau rempli le 26 mai 2007 chez Mathieu.

Je m’intéresse à la question posée dans la deuxième question de l’activité du livre : « Vérifier que la longueur de l’arc intercepté est proportionnelle à la mesure de l’angle en degré ». Cette question semble sous-entendre que la proportionnalité entre la mesure d’un angle au centre et la longueur de l’arc de cercle intercepté peut être conjecturée grâce aux nombres du tableau. Auparavant je reviens à la fin de la correction de la première question à travers l’extrait suivant du verbatim de la séance (je rappelle que le point M est placé au tiers de l’arc $\overset{\frown}{AA'}$ à partir de A) :

(36 min)

> **Mathieu :** alors attention quelle est la longueur du petit arc $\overset{\frown}{AM}$? Alors là on vous dit que M c’était au tiers de l’arc $\overset{\frown}{AA'}$ (Mathieu place à main levée le point M sur le dessin réalisé au tableau).
>
> **Élèves :** plusieurs réponses inaudibles, on entend deux tiers
>
> **Mathieu :** ça ça fait π (il montre le demi-cercle) ici c’est au tiers donc π sur 3
>
> Mathieu écrit : « La longueur du petit arc $\overset{\frown}{AM}$ est $\frac{\pi}{3}$ »

Plus tard, pendant la correction de la deuxième question relative aux nombres à compléter dans le tableau, Anissa demande : « Pourquoi M c’est 60 degrés ? » et Mathieu lui répond : « parce qu’il est placé au tiers ». La réponse de Mathieu à Anissa est la suite logique de ce raisonnement :

- le demi cercle a une longueur égale à π, le petit arc de cercle $\overset{\frown}{AM}$ de longueur le tiers du demi-cercle a donc une longueur égale à $\frac{\pi}{3}$;
- l’angle au centre qui intercepte le demi-cercle a une mesure de 180 degrés, l’angle au centre qui intercepte le petit arc $\overset{\frown}{AM}$ a une mesure égale au tiers de 180 degrés, c'est-à-dire 60 degrés.

Ce raisonnement repose nécessairement sur un implicite : la proportionnalité des longueurs des arcs et des angles au centre pour un même cercle. Le théorème qui établit le lien de proportionnalité entre angle au centre et arc intercepté est donc nécessaire pour remplir le tableau. En conséquence la proportionnalité ne se déduit pas des nombres inscrits dans le tableau, au contraire c’est cette proportionnalité qui a permis de remplir le tableau ! Le théorème suivant est utilisé en acte : « pour tout cercle, l’angle plein de 360° correspond à la circonférence du cercle et la mesure d’un angle au centre et la longueur de l’arc intercepté par cet angle sont proportionnelles ». Ce théorème n’est jamais institutionnalisé et pourtant c’est un savoir de référence indispensable, notamment dans cette séquence.

C. La reprise de la proportionnalité

Après avoir rempli le Tableau 45, Mathieu traite la question de la proportionnalité en coopération avec les élèves. Je transcris ce moment d'après les notes que j'ai prises pendant la séance :

> **Mathieu :** quel est le rapport de proportionnalité ? Pour passer de la première à la deuxième ligne je multiplie par quoi ?
>
> **Élève :** ou dans l'autre sens
>
> **Mathieu :** c'est pareil, si pour passer de la première à la deuxième je multiplie par a ; pour passe de la deuxième à la première je multiplie par quoi ?
>
> **Élève :** 1 sur a
>
> **Mathieu :** pour passer de 180 je multiplie par quelque chose je trouve π, quel est le coefficient multiplicatif ? …. π sur 180
>
> **Élève :** pourquoi ?
>
> Mathieu répète son explication avant d'interroger Anissa.
>
> **Mathieu :** Anissa pour passer de la deuxième à la première ligne je multiplie par quoi ?
>
> **Anissa :** par 180 sur π.
>
> **Mathieu :** pour simplifier mes calculs je voudrais que ma longueur d'arc soit égale à l'angle, je voudrais pour π sur 3 que j'ai un angle de π sur 3. Je voudrais faire correspondre la valeur de l'angle à la valeur de l'arc.
>
> […]
>
> Cette nouvelle mesure qui fait correspondre la mesure de l'angle et la mesure de l'arc s'appelle le radian. On vient de dire que 180 degrés ça valait π radians, donc 1 radian ça correspond à quoi ?
>
> **Élève :** π sur 180 degrés (Mathieu n'entend pas cette réponse erronée)

Pendant ces explications Mathieu n'a pas rappelé que le rayon du cercle est d'une unité, ce qui est bien le cas dans le contexte de l'activité, mais qui pourrait être oublié par les élèves dans le discours précédent.

Mathieu demande aux élèves de copier ce qui suit sur leur cahier de cours :

> Définition :
> Le radian est une mesure d'angle.
> La correspondance entre les degrés et les radians est donnée par :
>
> $$\pi \text{ radians} = 180 \text{ degrés}$$
>
> Ou
>
> $$1 \text{ radian} = \frac{180}{\pi} \text{ degrés}$$
>
> Remarques :
>
> - 1 radian $\simeq$57,3 degré
> - Sur un cercle de rayon 1 :
>   Si l'angle $\widehat{AOB}$ mesure x radians, l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ intercepté par cet angle mesure aussi x unités de longueur

Je note que la définition du radian donnée par Mathieu est conditionnée par la connaissance du degré, et qu'elle s'exprime par une relation numérique entre la mesure en degré et la mesure en radian. Une autre définition pourrait être plus pertinente pour comprendre le concept de radian. En particulier concevoir le radian comme un angle au centre (non orienté) qui intercepte un arc qui a pour longueur celle du rayon. Je note également que, dans cette définition donnée par Mathieu, la relation de proportionnalité entre les mesures des angles en degré et en radian n'est pas explicite. Les deux égalités données ne sont évidemment pas suffisantes pour en déduire cette proportionnalité. Même si les correspondances entre les unités pour une même grandeur sont en général sur le modèle de la proportionnalité, le seul contre-exemple des degrés Celsius et Fahrenheit suffit pour savoir que ce n'est pas toujours vrai.

Je précise que Mathieu n'a pas encore introduit les angles orientés, et que les angles dont il est question sont les angles rencontrés jusque là dans le curriculum dont les mesures sont positives, comprises entre 0° et 360° ou entre 0 rad et 2π rad.

D. Conclusion intermédiaire relative à la proportionnalité

Dans le *filtre du numérique* (Cf. annexe 11), figurent les *situations du numérique*, la proportionnalité est l'une de ces situations très riche au point de vue des nombreux éléments du numérique qui y sont mis en œuvre. Par ailleurs une situation de proportionnalité peut être étudiée dans le cadre numérique mais aussi dans le cadre fonctionnel dans une dynamique numérico-fonctionnelle. Mathieu, comme dans le manuel, fait le choix de n'aborder que le cadre numérique en utilisant un opérateur multiplicatif et ne fait pas de lien avec la fonction linéaire. Pourtant la fonction linéaire est au programme de seconde après avoir été déjà étudiée en classe de troisième. Le document d'accompagnement de la classe de seconde recommande de saisir les occasions de la mettre en œuvre : « La notion de fonction est une notion difficile à appréhender ; elle est déjà présente au collège, mais elle n'y a été explicitée que dans le cas particulier des fonctions linéaires et affines : on pourra revenir sur celles-ci à l'occasion de travaux ou d'un bilan sur les pourcentages ou la proportionnalité. »

Dans la séance de Mathieu, la reprise du modèle de la proportionnalité se fait de façon très guidée, à la fois par la contrainte de l'énoncé de l'activité qui annihile toute initiative, et également par l'organisation didactique du professeur qui fait avancer son cours sur le mode de l'explicitation magistrale. Les ostensifs traditionnels de la proportionnalité travaillée dans le cadre numérique sont présents : le tableau et l'opérateur multiplicatif, les élèves ne peuvent pas ne pas reconnaître cette situation de proportionnalité, tout le décor est présent. Mais les connaissances relatives à la proportionnalité véritablement mobilisées par les élèves apparaissent très pauvres.

Je reprends le *fil du numérique* (Cf. p. 263) pour signaler que le point de vue fonctionnel sur la relation entre la mesure en degré de l'angle au centre et la longueur de l'arc intercepté par l'angle aurait permis d'amorcer le changement de point de vue vers les fonctions cosinus et sinus. Mathieu semble implicitement suggérer ce changement de cadre en parlant d'un angle de x radians. Le point de vue fonctionnel et la situation de proportionnalité auraient pu être exprimés de cette façon :

> x est la mesure en radian d'un angle comprise entre 0 et 2π, la mesure en degré de cet angle est donnée par la fonction f telle que :
> $$f(x) = \frac{180}{\pi}x$$

E. Fin de la séance et reprise de la somme de quotients

À la fin de cette séance Mathieu définit le cercle trigonométrique et les angles orientés, puis il demande aux élèves de placer des points sur ce cercle qui correspondent à des angles orientés donnés en radians. Lors de la correction d'un exercice, Mathieu explique comment trouver le point qui correspond à l'angle $-\frac{5\pi}{6}$. Il écrit : $-\frac{5\pi}{6} = -\pi + \frac{\pi}{6}$ les élèves manifestent leur incompréhension. Mathieu reprend et écrit :

$$2 + \frac{1}{6} = \frac{12}{6} + \frac{1}{6} = \frac{13}{6}$$
$$x - \frac{1}{6} = \frac{6x}{6} - \frac{1}{6} = \frac{6x - 1}{6}$$
$$x - \frac{x}{6} = \frac{6x}{6} - \frac{x}{6} = \frac{5x}{6}$$

Il énonce les calculs en même temps qu'il les écrit, puis il conclut :

« je vous dis (il écrit en même temps) $-\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{-6\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$, celui là je le mets sur 6 ça fait $\frac{-6\pi}{6}$ et plus $\frac{\pi}{6}$ ça fait $-\frac{5\pi}{6}$ »

Le type de tâches qui consiste à repérer un point sur le cercle trigonométrique correspondant à un angle donné en radian fait rencontrer, avec la technique utilisée par Mathieu, des calculs comme celui qui précède concernant $-\frac{5\pi}{6}$. Plusieurs difficultés apparaissent concernant le numérique :

- la somme n'est pas donnée, il faut transformer le quotient $-\frac{5\pi}{6}$ en une somme dans laquelle apparaît une mesure en radian comprise entre 0 et 2π ou bien entre $-\pi$ et π. Il faut donc être capable d'anticiper cette transformation ;
- il faut maitriser la technique d'addition des quotients.

Le geste professionnel de Mathieu pour cette reprise des connaissances du collège sur la somme de deux quotients consiste à donner plusieurs exemples de la forme $+\frac{b}{c}$. L'objectif est de donner à voir des invariants dans la technique : « celui là (le premier) je le mets sur 6 ». Le nombre π est traité comme le nombre indéterminé x. Il semblerait que Mathieu veuille éveiller les souvenirs des élèves relatifs à des acquis anciens à propos du type de calcul précédent avec a, b et c entiers, pour ensuite les amener par mimétisme à traiter des exemples plus complexes. Le discours technologique se compose donc d'un ensemble d'exemples donnés comme modèles. Les règles mathématiques sous-jacentes, qui justifient véritablement les calculs ne sont pas du tout évoquées. La praxéologie ponctuelle revisitée à l'occasion de ce calcul est incomplète. La technologie se réduit à « il faut reproduire le modèle » dégagé sur des exemples.

F. Fin de la séquence sur la trigonométrie : vers les fonctions trigonométriques

Le 2 juin Mathieu termine ce chapitre de trigonométrie et c'est également le dernier cours de l'année avec sa classe. Sur un effectif total de 32 élèves, 23 sont encore présents. J'assiste à cette séance pour la dernière fois dans la classe de Mathieu. Cette séance est consacrée à la définition du cosinus et du sinus d'un nombre réel comme étant les coordonnées d'un point sur le cercle trigonométrique. Après avoir fait écrire les propriétés du sinus et du cosinus, Mathieu fait faire des exercices de recherche du sinus quand on connait le cosinus, et inversement. Des nombres irrationnels comme $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ apparaissent dans ces exercices. Je ne sais pas comment les élèves ont traité ce type de nombre, je n'ai pu voir que la correction de Mathieu au tableau. Mathieu fait faire le tableau suivant :

Angle	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Tableau 46 : la première vitrine des nombres

Je reviendrai plus loin sur ce tableau que j'appelle la *vitrine des nombres*. Mathieu termine la séance en faisant apparaître le cosinus et le sinus en tant que fonctions. Il demande aux élèves de prendre leur machine pour faire apparaître la courbe représentative des fonctions cosinus et sinus. Après avoir complété avec les élèves le tableau de valeurs précédent, il enchaîne : « si on considère les fonctions, pour cosinus *x* c'est la correspondance entre le réel *x* et le nombre cosinus *x* comme dans le tableau. Prenez votre machine… ». Mathieu explique alors aux élèves comment paramétrer la machine pour faire apparaître les courbes. Des élèves s'exclament : « Oh ça fait des vagues ! ». Mathieu organise ainsi le changement de cadre et accompagne le changement de point de vue entre les valeurs obtenues dans le tableau grâce à des opérateurs, et la fonction trigonométrique dont la courbe représentative permet de percevoir intuitivement la continuité.

9.2.2.2 La séquence relative à la trigonométrie chez Clotilde

Dans cette séquence je vais, comme pour celle de Mathieu, mettre en relief certains temps qui sont riches au point de vue des RDN. Dès le début de la séquence, Clotilde présente des notions nouvelles, et en particulier le cercle trigonométrique et une nouvelle représentation sémiotique des réels grâce à ce cercle. Elle introduit ensuite les angles orientés et les mesures d'angles en radian, et fait travailler la relation de proportionnalité entre les mesures en radians et en degrés de ces angles orientés. Elle termine cette séquence comme Mathieu par l'établissement d'un tableau de nombres que j'ai dénommé la *vitrine des nombres*.

A. Présentation de la séquence

L'architecture de la séquence de Clotilde sur la trigonométrie a été présentée dans le tableau 44 à la page 281. Je vais m'intéresser à certaines phases de la séquence qui participent du travail sur le numérique et contribuent à développer l'espace numérique à construire en seconde.

Le chapitre relatif à la trigonométrie a débuté le 28 avril 2008. J'ai assisté à plusieurs séances de la séquence dans la classe de Clotilde. Contrairement à Mathieu, Clotilde aborde dès le début de la séquence l'étude du cercle trigonométrique, bien que cela reste implicite. Elle fait étudier aux élèves une première activité du livre dont l'objectif est de déterminer les coordonnées de points particuliers d'un cercle de rayon 1, points qui correspondront plus tard aux angles « remarquables » (Cf. annexe 11.28). Un autre objectif de l'activité est d'utiliser les transformations géométriques pour identifier les relations numériques entre les coordonnées des points de la figure.

La deuxième activité du livre, travaillée à la suite de la précédente, a pour objectif de faire comprendre aux élèves « l'enroulement » de la droite des réels sur le cercle trigonométrique (Cf. annexe 11.28). La comparaison avec l'enroulement d'un fil sur une bobine est proposée comme représentation mentale, conformément au curriculum officiel[1], et Clotilde va insister tout au long du chapitre sur le rôle de cette analogie en disant à maintes reprises « n'oubliez pas votre bobine de fil ». Cette image mentale sera utilisée pour faire comprendre en fin de séquence comment il est possible de faire correspondre à tout réel un point sur le cercle et en conséquence le sinus et le cosinus de ce réel. C'est la conception de ce réel comme variable de la fonction trigonométrique qui est visée dans cette mise en scène virtuelle.

Ces deux activités ont pour objectif de préparer les éléments nécessaires dans le milieu pour les problèmes à venir, mais dans une logique d'exposition et de préparation du milieu qui ne peut avoir de sens pour les élèves. Le processus de mesogenèse est à la main du professeur qui le façonne et qui va indiquer plus tard aux élèves le rôle des objets ainsi introduits.

Dans cette séquence, je focaliserai précisément mon intérêt en particulier sur deux aspects : la reprise d'une situation de proportionnalité et la production de nombres irrationnels écrits avec des racines carrées ou avec π.

B . Le rôle central du cercle trigonométrique dans la séquence sur la trigonométrie

La première rencontre avec le cercle trigonométrique dans la première activité

J'étais présente lors de la séance du 30 avril, la séance a commencé par la correction de la première activité donnée à la séance précédente et que les élèves avaient dû terminer chez eux (Cf. annexe 11.28). Je reproduis la figure de cette activité (Cf. figure 101).

---

[1] Il est recommandé à ce sujet d'utiliser un logiciel de géométrie dynamique.

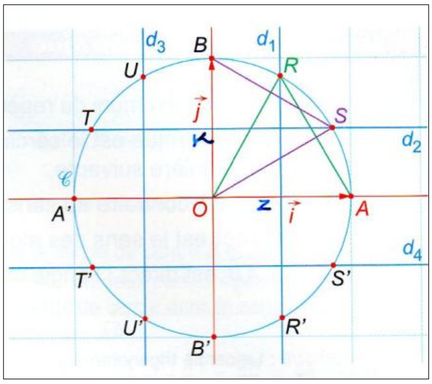


Figure 101 : figure extraite de l'activité 1 du chapitre sur la trigonométrie

Les élèves devaient trouver les coordonnées des points situés sur le cercle. Les points K et Z ont été ajoutés par le professeur sur le dessin. Je donne ci-dessous la réponse d'un élève pour les coordonnées du point R. Le professeur a écrit au tableau ce qui a été dicté par cet élève :

$$\text{OR=OA=1}$$

$$\overrightarrow{OR}\,(0{,}5\,;y)$$

$$OR=\sqrt{0{,}5^2+y^2}$$

$$OR=\sqrt{\frac{1}{4}+y^2=1}$$

$$\frac{1}{4}+y^2=1$$

$$y^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad \text{ou}\quad y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{mais } y_{\mathrm{R}}>0\ \text{ donc }\ \mathrm{R}(0{,}5\,;\frac{\sqrt{3}}{2})$$

En fin d'année scolaire cet élève reprend des connaissances dans différents cadres, et il met en œuvre de nombreuses connaissances numériques et algébriques. Il convoque notamment le cadre vectoriel qui a été travaillé dans le chapitre 7 (la trigonométrie c'est le chapitre 9).

Auparavant un autre élève avait donné sa solution, il avait utilisé la notion de cosinus et avait donné cette réponse : R(0,5 ; cos 30°). Comme dans la classe de Mathieu, des élèves ont mobilisé des connaissances sur la trigonométrie alors qu'elles n'ont pratiquement pas été « entretenues » pendant l'année. Il est vrai que l'activité est dans le chapitre intitulé « Trigonométrie » ! L'enjeu d'apprentissage n'est pas du tout caché !

Clotilde, après les deux réponses proposées pour les coordonnées du point R, avait alors conclu :

> Donc on a trouvé les coordonnées par deux méthodes différentes. On aurait pu trouver aussi par le théorème de Pythagore, du coup on a trouvé que $\cos 30=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (elle n'écrit pas l'unité d'angle). Voilà pour les coordonnées de R.

La reprise possible des valeurs absolues dans la première activité

Je m'intéresse à la sixième question de la première activité (Cf. Figure 102).

6° Soit $M(x\ ;\ y)$ un point qui parcourt le cercle $\mathscr{C}$.

a) Trouver dans quel intervalle varie son abscisse x et son ordonnée y.

b) Quels sont les signes de x et de y lorsque M est situé :

• sur le petit arc $\widehat{AB}$? • sur le petit arc $\widehat{BA'}$? • sur le petit arc $\widehat{A'B'}$?

c) Montrer que $x^2 + y^2 = 1$.

Figure 102 : extrait de l'activité 1 du chapitre sur la trigonométrie

Lors de la correction Clotilde montre sur le dessin à main levée réalisé au tableau le déplacement du point M. Elle marque le point N, projection orthogonale[1] de M sur (OA). Elle écrit sous la dictée d'un élève :

$$6°)\ \text{a)}\ -1 \leq x \leq 1 \ \text{ et }\ -1 \leq y \leq 1$$

Puis elle enchaîne sur la suite de la correction. Une occasion de reprise de la notion de valeur absolue n'est pas saisie ici par Clotilde. Elle aurait pu demander aux élèves d'exprimer chacun des encadrements précédents sous un autre point de vue en n'utilisant qu'une seule inégalité. Contrairement à la majorité des types de tâches rencontrés dans le chapitre sur la valeur absolue qui consistaient à supprimer les deux barres, ici une occasion se présentait pour convoquer la notion de valeur absolue et mettre des barres !

Pour terminer la correction de l'activité, alors que les élèves montrent de plus en plus leur manque d'intérêt dans une activité immotivée, Clotilde rédige la correction de la question c). Elle écrit au tableau :

$$ON = |x| \ \text{ et } NM = |y|$$

Des élèves près du tableau manifestent leur incompréhension, Clotilde leur explique en aparté (inaudible du fond de la classe), et puis reprend la rédaction de la correction. Elle écrit :

> On applique le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ONM :
>
> $$OM^2 = ON^2 + NM^2$$
> $$1 = |x|^2 + |y|^2$$
> $$1 = x^2 + y^2$$

Clotilde s'aperçoit du désintérêt grandissant mais continue cependant à alimenter le processus de chronogenèse sans tenir compte (en apparence) de la passivité des élèves.

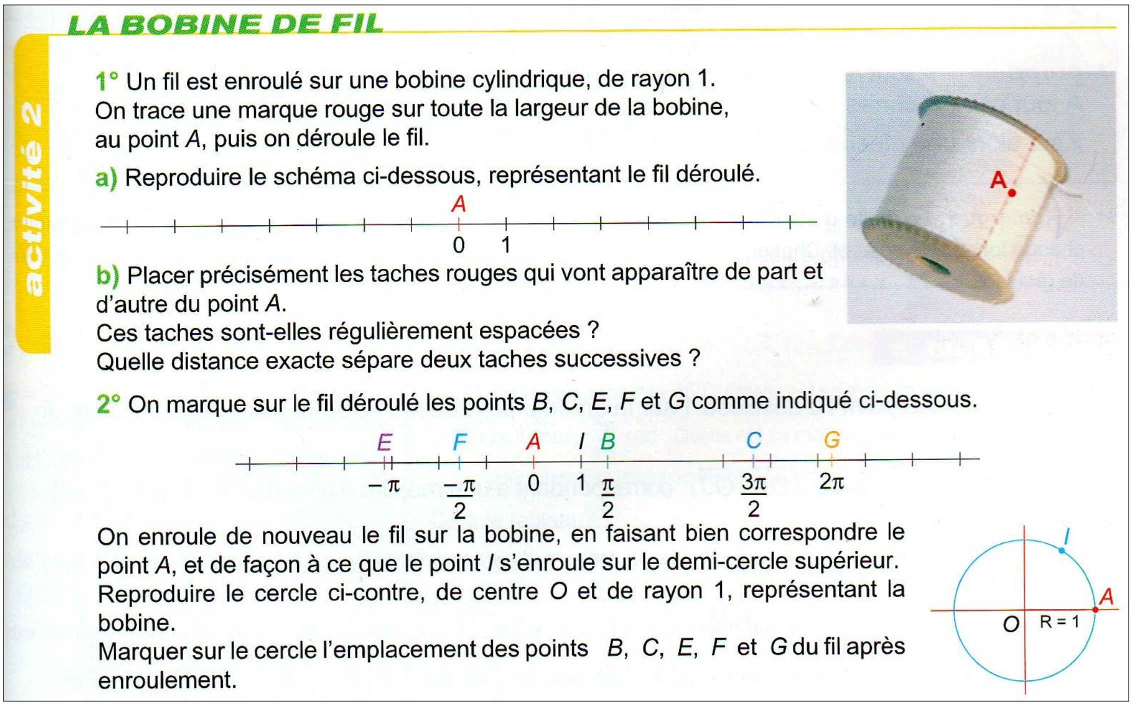
Je reviens sur la démonstration précédente qui est une occasion de reprise de connaissances rencontrées pour la première fois en seconde, à savoir les connaissances en lien avec la valeur absolue. Cette reprise n'est pas nécessaire, la détermination de la distance de deux points dont on connait les coordonnées dans un repère orthonormé aurait pu permettre de démontrer

[1] La projection orthogonale n'est plus étudiée ni au collège ni au lycée conformément au curriculum officiel.

l'égalité. Cependant la reprise de la valeur absolue dans ce contexte est tout à fait pertinente et en étroite cohérence avec les choix d'enseignement de Clotilde. Son insistance pour développer la vision de la valeur absolue comme étant l'expression de la distance de deux points trouve là une très bonne occasion de reprise. La notion de valeur absolue avait été travaillée dans le troisième chapitre au premier trimestre. Depuis (d'après les écrits des cahiers de cours, d'exercices et les devoirs) elle n'a été reprise qu'une seule fois dans un devoir à faire à la maison et à rendre le 16 janvier. Il s'agit donc d'une reprise de connaissances qui avaient été rencontrées pour la première fois en seconde. Comme je le signalais précédemment (Cf. p. 293), une raison d'être aurait pu être donnée pour la notion de valeur absolue comme traduction des encadrements des nombres x et y dans la sixième question de l'activité. Une deuxième raison d'être est effectivement intéressante pour démontrer que $x^2 + y^2 = 1$, mais Clotilde ne fait pas appel à la *mémoire didactique* constituée avec sa classe. C'est elle qui conduit les raisonnements, le rôle de l'élève est de suivre et d'être attentif aux explications. Une situation de rappel au sens de Perrin-Glorian (1992) aurait pu vivre à ce moment de la séance, mais le contrat établi dans la classe ne permet pas cette sollicitation des élèves. L'activation de la *mémoire didactique* construite dans la classe n'est pas dans le topos de l'élève. Pourtant la mobilisation des connaissances en dehors de leur contexte premier d'enseignement est un critère d'efficacité des apprentissages.

La deuxième activité du début de la séquence de trigonométrie et première rencontre avec une droite qui s'enroule

La deuxième activité prépare une nouvelle représentation mentale de la droite des réels qui prépare elle-même un nouveau statut du réel : statut de variable pour une fonction trigonométrique (Cf. Figure 103).


LA BOBINE DE FIL

activité 2

1° Un fil est enroulé sur une bobine cylindrique, de rayon 1. On trace une marque rouge sur toute la largeur de la bobine, au point A, puis on déroule le fil.

a) Reproduire le schéma ci-dessous, représentant le fil déroulé.

b) Placer précisément les taches rouges qui vont apparaître de part et d'autre du point A.
Ces taches sont-elles régulièrement espacées ?
Quelle distance exacte sépare deux taches successives ?

2° On marque sur le fil déroulé les points B, C, E, F et G comme indiqué ci-dessous.

On enroule de nouveau le fil sur la bobine, en faisant bien correspondre le point A, et de façon à ce que le point I s'enroule sur le demi-cercle supérieur.
Reproduire le cercle ci-contre, de centre O et de rayon 1, représentant la bobine.
Marquer sur le cercle l'emplacement des points B, C, E, F et G du fil après enroulement.

Figure 103 : deuxième activité du chapitre de trigonométrie chez Clotilde

Je reproduis la réponse d'une élève pour la première question de la deuxième activité (Cf. Figure 104).

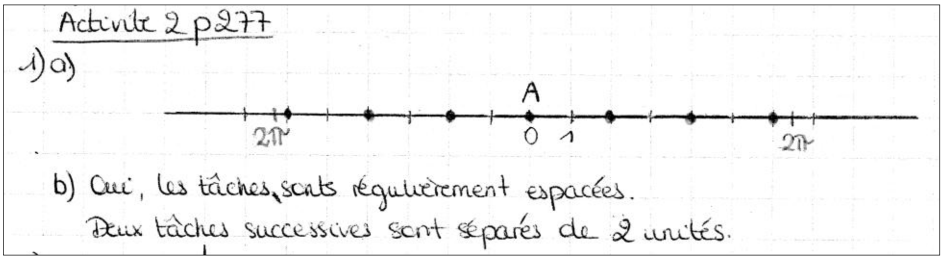


Figure 104 : réponse d'une élève à l'activité 2 p. 277 chez Clotilde

L'image de la bobine a permis de faire comprendre à l'élève que les points sont régulièrement espacés, mais la distance de deux points n'a pas été comprise comme correspondant à la circonférence de la bobine (ce qui est évidemment une modélisation qui fait abstraction du décalage du fil qui ne s'enroule pas sur lui-même dans une vraie bobine). Une expérience avec du vrai matériel, une vraie bobine et du vrai fil, aurait pu être réalisée avec les élèves, cela n'a pas été le cas dans la classe de Clotilde. Elle n'a pas non plus utilisé de logiciel de géométrie dynamique, puisqu'elle n'utilise jamais les outils informatiques en classe. Quelle est la portée de cette mise en scène sophistiquée mais qui ne permet pas du tout à l'élève d'expérimenter, de chercher, de prendre tout simplement une place dans une situation didactique et dans les processus de topogenèse et de chronogenèse ?

La reprise et la métamorphose de la droite graduée dans l'activité 2

Jusque là, comme le dit le programme de seconde, « L'ensemble des réels est l'ensemble des abscisses des points d'une droite ». Maintenant une autre conception est travaillée : l'ensemble des réels est l'ensemble des mesures des arcs orientés $\widehat{OM}$ sur un cercle de rayon une unité, O étant un point donné de ce cercle et M appartenant au cercle. J'ai évoqué le rôle joué par la droite graduée depuis le collège pour la compréhension des nombres (Cf. section 5.5.3 p. 71). Comment une droite aurait-elle le pouvoir de s'enrouler ? Puisqu'il faut convoquer le pouvoir d'imagination, il faut peut-être dépasser une contrainte au niveau de la civilisation pour concevoir cet enroulement et dépasser une « rigidité » conceptuelle. Cauty (1993) fait le récit de rencontres avec des indiens de Colombie qui ne pouvaient concevoir la droite comme représentation des réels :

> La droite « réelle » est le modèle occidental le plus courant de cette structure […]. C'est évidemment ce modèle qui guidait mes questions et mes suggestions. Une grave difficulté ne tarda pas à se présenter. Un mama [savant des peuples autochtones] me dit que cette image de la droite ne pouvait pas être retenue parce qu'elle heurtait l'image indigène du temps. […] La situation aurait pu en rester là. Autant que je m'en souvienne, elle fut débloquée par une remarque du mama. « Une droite est comme cette corde. Tendue ou détendue, déroulée ou enroulée, c'est toujours une corde. » […] L'indien qui refusait l'image de la droite réelle des Blancs proposait celle d'une droite enroulée sur un cône. Le mathématicien n'y trouvait rien à redire.

Cet enroulement de la droite des réels constitue un franchissement de limites au niveau de la civilisation, mais aussi un franchissement de limites au niveau de la discipline. Pour des élèves de seconde le modèle de la droite est celui de la géométrie plane et sa représentation est un trait droit. Pourquoi ne pas dire qu'on adopte un nouveau modèle de représentation des réels qui est un cercle de rayon une unité, et qu'on utilise pour cela une représentation mentale en imaginant la droite comme étant une corde qu'on enroule autour du cercle ?

Le changement de point de vue concernant la trigonométrie, du cadre géométrique vers le cadre fonctionnel, est ainsi amorcé dès le début de la séquence par Clotilde. Le fait d'avoir présenté « l'enroulement de la droite » des réels sur un cercle de rayon une unité, permet de considérer que tout réel peut être associé à un point du cercle. Comme je l'ai déjà dit précédemment, cette étape prépare le point de vue fonctionnel en faisant de ce réel la variable des fonctions trigonométriques déjà annoncées dans le titre du chapitre.

La première fiche de cours dans le chapitre de trigonométrie

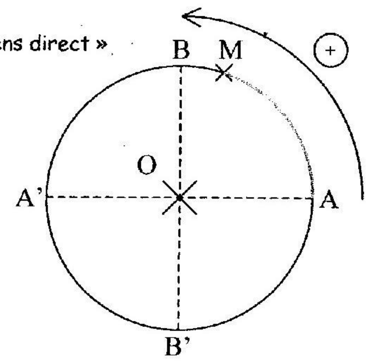
Après l'étude des deux activités précédentes, Clotilde a distribué une feuille photocopiée à insérer dans le cours (Cf. Figure 105).

2NDE5 CH9 FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

I. LE CERCLE TRIGONOMETRIQUE

a. Repérage d'un point sur le cercle trigonométrique

On appelle *cercle trigonométrique* un cercle de rayon 1 muni d'un sens appelé « sens direct ».



La longueur totale du cercle est : $2 \times \pi \times R = 2 \times \pi \times 1 = 2\pi$

A tout réel x, on peut associer un point M sur le cercle et un seul :

- si $x \geqslant 0$, on parcourt la distance x sur le cercle en partant du point A dans le sens direct(quitte à faire plusieurs tours). Le point M associé à x est le point où ce chemin s'arrête.

  Ex : Le point B est repéré par le nombre : $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ (un quart de tour dans le sens direct)

- si $x \leqslant 0$, on parcourt la distance x sur le cercle en partant du point A dans le sens indirect.

La longueur de l'arc $\widehat{AM}$ est alors $|x|$.

Ex :Le point B' est repéré par le nombre : $-\frac{\pi}{2}$ (un quart de tour dans le sens indirect) ou $\frac{3\pi}{2}$ (trois quarts de tour dans le sens direct)

Remarque :

Tout point peut être repéré par une infinité de nombres. Par exemple A est associé aux nombres 0 (aucun tour), 2π (un tour), 4π (deux tours...), -2π...

Figure 105 : début du cours de Clotilde sur la trigonométrie

La fiche de cours est étudiée le vendredi 2 mai (sur un effectif de 32 élèves, 28 sont présents). J'ai assisté également à cette séance. Le geste professionnel pour faire étudier une fiche de cours suit toujours la même technique : Clotilde assise à son bureau lit, ou fait lire par un élève, explicite, et interroge tour à tour des élèves. Après avoir lu « La longueur de l'arc $\widehat{AM}$ est alors $|x|$ » elle s'adresse à la classe : « d'accord pour la production de valeur absolue tout d'un coup ? » un long silence lui répond. Clotilde reprend « pour E c'est $-\pi$ [elle fait référence à l'activité 2 qui vient d'être corrigée (Cf. Figure 103, p. 294)], la longueur de l'arc vaut π mais correspond au point E », c'est un grand silence général qui fait écho à ces explicitations. Et Clotilde poursuit l'étude de la fiche.

Une erreur s'est glissée dans la fiche de Clotilde qui a écrit : « si $x \leq 0$, on parcourt la distance x sur le cercle », il aurait fallu dire « si $x \leq 0$, on parcourt la distance $|x|$ sur le cercle » ou encore « la distance égale à l'opposé de x ».

La valeur absolue trouve donc un nouvel habitat dans le programme de seconde pour une reprise qui lui donne du sens et une raison d'être. L'expression de Clotilde est intéressante, elle parle de la « production » de la valeur absolue, ce qui est effectivement le cas et contraste avec ce que les élèves ont déjà rencontré : la « chasse » aux valeurs absolues. Cependant l'organisation didactique choisie cantonne les élèves dans une posture où ils n'ont qu'à réceptionner ce parachutage inattendu de la valeur absolue, sachant qu'ils peuvent également faire semblant d'être dans cette posture.

Un changement de point de vue délicat sur les angles au centre du cercle trigonométrique

Après les explicitations concernant la fiche de cours (Cf. Figure 105), Clotilde donne la définition des angles orientés et du radian. Voici comment elle introduit cette nouvelle phase de la séance :

> **Clotilde :** maintenant on va introduire une nouvelle unité pour les angles. Les angles on les exprime dans quelle unité ?
>
> **Élève :** le degré
>
> **Clotilde :** maintenant on va utiliser une nouvelle unité, au lieu de calculer les angles en degré on va les calculer avec une autre unité. Maintenant les angles vont aussi avoir un sens, l'angle AOH n'est pas le même que l'angle HOA puisque je suis dans le cercle trigonométrique qui est orienté. Cet angle là je vais lui donner la longueur de l'arc, cette unité est le radian (elle montre en même temps sur un dessin au tableau où elle a représenté un cercle trigonométrique de rayon [OA], et un point H sur le cercle).

Ensuite elle fait écrire la définition du radian qui est très différente de celle donnée par Mathieu. Cette définition ne fait pas référence au degré ni à une relation numérique et elle est définie pour les angles orientés. Je la reproduis ci-dessous :

« Le radian est une unité de mesure angulaire, elle correspond à la longueur de l'arc intercepté par un angle au centre du cercle trigonométrique. C'est un angle orienté c'est-à-dire qu'il est positif ou négatif suivant le sens dans lequel on tourne. »

Le verbe « correspondre » est flou, s'il est employé comme synonyme de « être égal » c'est faux car une mesure d'angle orienté négative ne peut pas être égale à la mesure d'une longueur. Si le verbe « correspondre » ne signifie pas « être égal à » alors il peut évoquer le sens fonctionnel, mais l'énoncé manque de précision. La reprise de la valeur absolue réintroduite précédemment dans la fiche de cours aurait été pertinente. Voici une modification possible de la définition :

« Le radian est une unité de mesure angulaire des angles. La mesure en radian d'un angle orienté est positive si l'angle est orienté dans le sens direct, négative sinon. La valeur absolue de la mesure en radian de l'angle orienté est égale à la mesure de l'arc intercepté par cet angle sur le cercle trigonométrique de centre le sommet de l'angle. »

C . Nouvelle rencontre avec une situation de proportionnalité

La reprise de la proportionnalité

Après avoir défini le radian, le moment qui suit est un moment d'exploration du type de tâches suivant : « un angle étant connu par sa mesure en degré et son orientation sur le cercle trigonométrique, déterminer la mesure en radian de l'angle orienté correspondant (ou inversement convertir des radians en degrés) ». J'appelle T_c ce type de tâches.

Clotilde a réalisé un dessin à main levée au tableau, elle demande aux élèves de le faire avec les instruments (Cf. Figure 106). Dans le cahier que j'ai photocopié les angles sont représentés de façon approximative, seul celui de 45° est correct (sûrement parce qu'il est construit grâce aux diagonales des carreaux). Les angles de 30°, 60° et 120° font respectivement sur le dessin environ 20°, 65° et 125°. Je suppose que dans la majorité des cahiers le même constat pourrait être fait. En regardant faire les élèves autour de moi, je vois qu'ils représentent les angles de manière très approximative. Mon voisin trace les traits en se servant de sa calculatrice comme règle. Il sera difficile de vérifier sur ce genre de dessin pour le moins approximatif que par exemple $\cos 60° = \frac{1}{2}$!

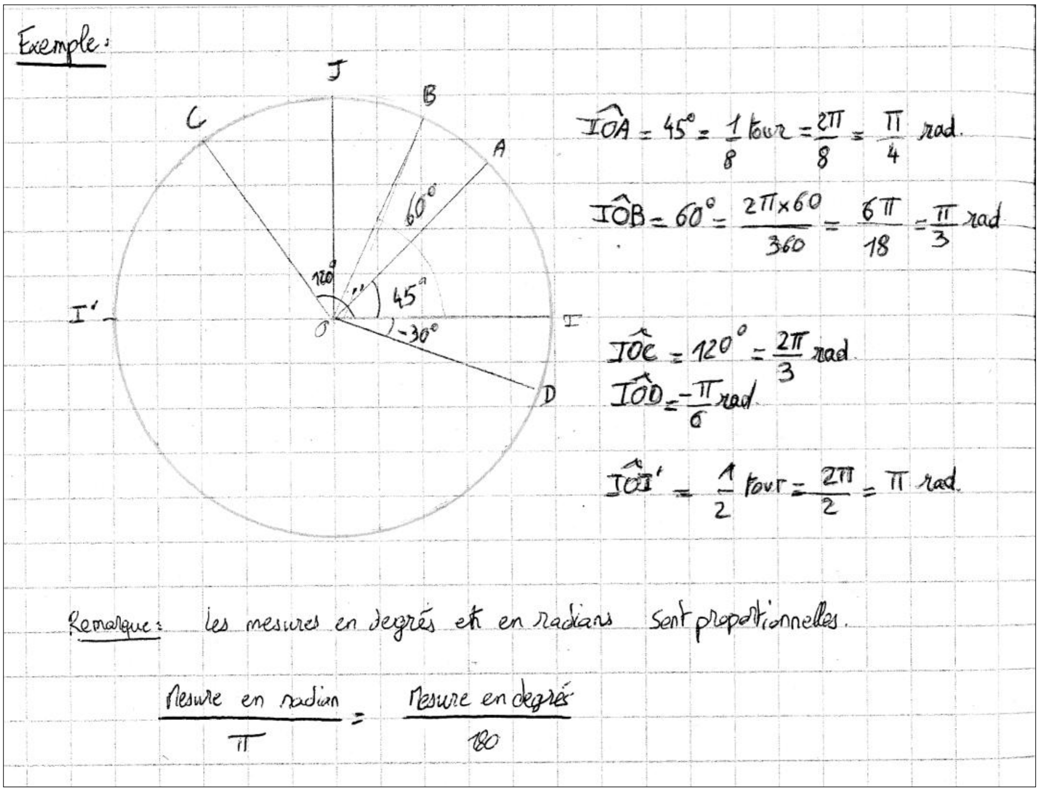


Figure 106 : cours de Clotilde sur la trigonométrie

Clotilde explique pour l'angle $\widehat{IOA}$ qu'il correspond à un huitième de tour, c'est-à-dire à un arc de longueur le huitième de 2π, c'est-à-dire $\frac{\pi}{4}$ radians. Et elle écrit au tableau la première ligne reproduite à droite du dessin (Cf. Figure 106). Pour l'angle de 60° je transcris d'après mes notes les explications de Clotilde.

> Elle énonce ce qu'elle écrit : $\widehat{IOB}$ = 60° = …… de tour = … puis elle ajoute : quelle fraction de tour ça fait ?
>
> **Élève : :** pourquoi ça fait 2π (l'élève fait référence à ce qui est écrit pour $\widehat{IOA}$) ?
>
> **Clotilde :** (elle n'a pas entendu la question précédente) il faut trouver 60°, combien ça fait de tour ?
>
> Clotilde fait compléter la « phrase à trous » écrite au tableau ce qui donne :
>
> $\widehat{IOB}$ = 60° $= \frac{1}{6}$ de tour $= \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ rad
>
> Clotilde devant l'incompréhension des élèves écrit ce qui suit au tableau :
>
> 1 tour $\longrightarrow$ 360°
>
> …… tour $\longrightarrow$ 60°
>
> **Clotilde :** 1 tour ça fait 360°, on voudrait savoir 60° quelle fraction de 360° ça fait …. 60° ça correspond à un sixième de tour, on fait ça fois ça (elle montre 1 et 60) divisé par ça (elle montre 360).

Ce que j'ai copié au tableau dans mes notes personnelles ne correspond pas exactement à ce qui est écrit sur le cahier de l'élève. Apparemment cette élève a mis correctement en œuvre la proportionnalité sans utiliser la notion de « tour ».

Pour l'angle $\widehat{IOD}$ Clotilde fait écrire les égalités suivantes :

$\widehat{IOD}$ = 30° = $\frac{1}{12}$ de tour (sens indirect) = $-\frac{2\pi}{12} = -\frac{\pi}{6} rad$

Dans les égalités écrites par Clotilde, un angle non orienté mesuré en degré devient un angle orienté mesuré en radian. Par ailleurs une mesure positive en degrés devient une « mesure négative » en radians. Là encore c'est la valeur absolue qui aurait été pertinente pour exprimer que la valeur absolue de la mesure en radian de l'angle orienté est mise en correspondance avec la mesure en degré de l'angle non orienté. Une autre solution serait de dire que la mesure de l'angle orienté est négative et qu'elle est égale à $-30°$, ce qui apparaît comme une pratique vraiment trop éloignée des normes du métier.

Je note un problème de notation : deux objets mathématiques différents sont représentés par le même signe. Il s'agit de l'angle géométrique $\widehat{IOD}$ (qui peut être noté indifféremment $\widehat{DOI}$), et de l'angle orienté (OI ; OD) qui n'est pas égal à l'angle orienté (OD ; OI).

On a alors : $\widehat{IOD} = \widehat{DOI} = 30° = \frac{\pi}{6} rad$

et $\left(\mathrm{OI}\,;\ \mathrm{OD}\right) = -30° = -\frac{\pi}{6} rad$

Implicitement c'est la mesure principale de l'angle orienté qui est donnée conformément à une demande du document d'accompagnement du programme de seconde : « on en restera à des mesures d'angles en radian comprises entre - π et π ou entre 0 et 2π ».

La notation rigoureuse serait celle de l'angle orienté défini comme angle de deux vecteurs, mais elle n'est peut-être pas nécessaire dans le cadre du programme de seconde. Mathieu après avoir défini le cercle trigonométrique de centre O et un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, avait introduit les angles orientés ainsi que la notation en usage dans le savoir de référence : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.

Moment d'institutionnalisation de la proportionnalité des mesures en radians et en degrés

Après le moment exploratoire précédent, Clotilde conclut ainsi :

> On a vu que un tour entier c'est 2π et en degré c'est 360°, il y a proportionnalité entre la mesure en degré et la mesure en radians. Donc chaque fois grâce à un petit tableau de proportionnalité vous pouvez transformer la mesure en degrés en radians. On s'en est servi là.

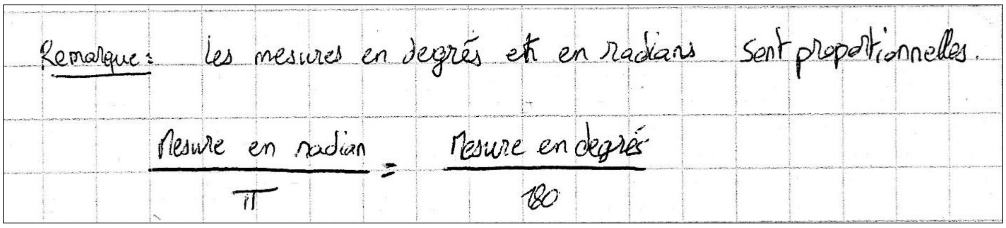
Clotilde confirme que le modèle de la proportionnalité a été mis en œuvre comme technique pour répondre aux questions de conversions d'unités entre les degrés et les radians. L'élément théorique est bien identifié : c'est la proportionnalité, mais le discours technologique s'est résumé à « faire un petit tableau » et « on fait ça fois ça divisé par ça ». Le théorème suivant reste dans l'implicite alors qu'il est essentiel pour justifier la technique :

a, *b*, *c* et *d* étant des réels avec *c* et *d* non nuls

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

Clotilde ne saisit pas cette occasion de nouvelle rencontre avec le modèle de la proportionnalité pour s'assurer que les élèves savent justifier leurs procédures par les véritables raisons mathématiques qui sont sous-jacentes. Je repère un manque dans la praxéologie développée que je mets en relation avec la troisième hypothèse sur l'incomplétude des praxéologies.

Après ce moment d'exploration de la technique Clotilde institutionnalise la proportionnalité entre les mesures en radians et en degrés des angles (Cf. Figure 107).


Remarque : les mesures en degrés et en radians sont proportionnelles.

$$\frac{\text{Mesure en radian}}{\pi} = \frac{\text{Mesure en degrés}}{180}$$

Figure 107 : cours de Clotilde sur la trigonométrie

Cette remarque est inscrite après le travail exploratoire précédent, et on peut se demander ce qui est mesuré en degrés et radians :

- est-ce que ce sont les angles orientés ? À ce moment là il faudrait considérer que par exemple : $-\frac{\pi}{6} rad = -30°$, ce qui correspond bien à l'égalité donnée par Clotilde :

$$\frac{-\frac{\pi}{6}}{\pi} = -\frac{30}{180}$$

- ou bien est-ce que ce sont les angles non orientés ? À ce moment là les mesures ne sont que des nombres positifs dans l'égalité donnée par Clotilde.

L'égalité donnée par Clotilde dans le cours apparaît stéréotypée et non opérationnelle par rapport à la richesse de traitements numériques possibles offerts par la situation de proportionnalité. Un tableau de proportionnalité aurait mieux rendu compte de la situation et aurait laissé davantage de possibilités d'adaptations au problème posé. C'est d'ailleurs un tableau qui va être donné dans le moment suivant de travail de la technique, et l'égalité inscrite dans le cours ne sera pas utilisée. Je note le décalage entre un énoncé de savoir et sa « non application ». Ce phénomène participe de la fragilité épistémologique des praxéologies mathématiques.

Le point de vue fonctionnel aurait pu également offrir cette diversité de traitements en définissant une fonction linéaire g telle que :

Si x est un nombre réel et si x est la mesure en degré d'un angle orienté, alors sa mesure en radian est le nombre $g(x)$ tel que : $g(x) = \frac{\pi}{180}x$

La fonction linéaire g permettrait de mettre en évidence que :

$$g(x + n \times 360) = g(x) + n \times g(360) = g(x) + n \times 2\pi$$

Moment de travail de la technique de conversion des mesures en radians et en degrés

La séance du 2 mai se termine par un moment de travail de la technique relative au même type de tâches T_c : une mesure d'angle étant exprimée en degrés, l'exprimer en radians ou inversement. Les élèves doivent compléter le tableau suivant :

Mesure en degré	180°		150°	40°
Mesure en radian		$\frac{3\pi}{2}$		

De nombreux élèves ne comprennent pas et ne voient pas le lien avec ce qui a été fait précédemment. L'épisode suivant rend compte de l'incompréhension de certains élèves :

> **Élève :** madame si on n'a pas le truc du tour comment on fait ?
>
> **Clotilde :** 180° ça correspond à combien en radian ?
>
> **Élève :** π (Clotilde ajoute alors π dans le tableau au dessous de 180°).

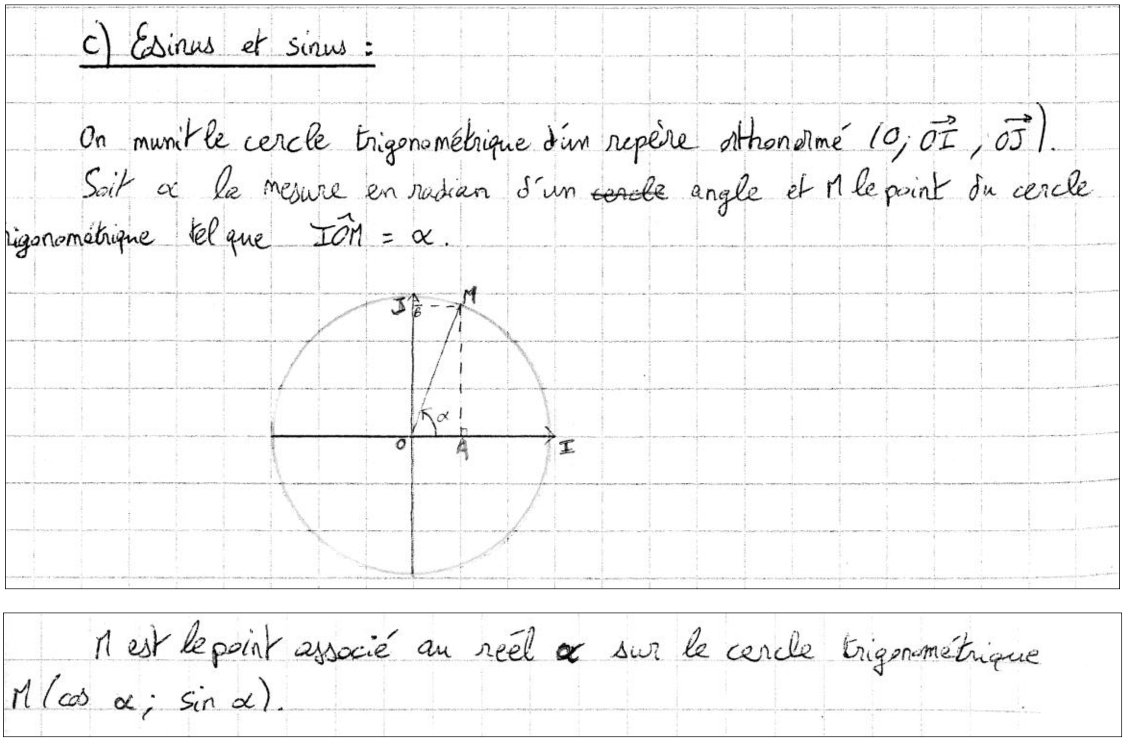
Clotilde circule dans la classe, elle aide de nombreux élèves qui ne savent pas compléter le tableau en utilisant la proportionnalité. Je l'entends expliquer en aparté à un élève : « on remplit avec la diagonale au dessus du trait, on divise par ça en dessous du trait » (celui du quotient). Voilà un discours technologique bien éloigné des raisons mathématiques qui régulent les calculs liés à la proportionnalité !

Je remarque dans l'enchaînement de ces différents moments un manque de tissage. Le cercle trigonométrique qui apparaissait nécessaire pour visualiser les angles, les tours, le sens choisi sur le cercle, n'est plus présent pour réifier les objets. L'égalité donnée dans le cours pour traduire la proportionnalité n'est pas opérationnelle dans le tableau précédent. Et pour finir les nombres du tableau ne peuvent pas être traités « en aveugle » comme dans tout tableau de proportionnalité puisqu'il manque une correspondance entre au moins deux nombres de la première ligne et de la deuxième ligne. En ajoutant le nombre π dans le tableau Clotilde permet aux élèves de s'engager dans le travail demandé. Mais qu'en est-il des concepts sur les mesures des angles en radians en train de s'élaborer ? Que représentent ces nombres produits pour compléter le tableau pour les élèves ? La *dynamique numérico-géométrique* mise en œuvre ne se réduit-elle pas à du travail numérique réduit lui-même à des savoir-faire ?

D. Des nombres produits dans une dynamique numérico-géométrico-fonctionnelle

Un opérateur qui se transforme insensiblement en fonction

Pendant la séance suivante du 9 mai, Clotilde a donné la définition du cosinus et du sinus d'un angle mesuré en radians en lien avec le cercle trigonométrique (Cf. Figure 108).



c) Cosinus et sinus :

On munit le cercle trigonométrique d'un repère orthonormé $(O; \vec{OI}, \vec{OJ})$.
Soit α la mesure en radian d'un ~~cercle~~ angle et M le point du cercle trigonométrique tel que $\widehat{IOM} = \alpha$.

M est le point associé au réel α sur le cercle trigonométrique
$M(\cos \alpha ; \sin \alpha)$.

Figure 108 : cours de Clotilde, chapitre de trigonométrie

Je remarque que la notation de l'angle est encore celle d'un angle géométrique et non pas celle d'un angle orienté. Le nombre α est un réel quelconque, mais ce n'est pas précisé. L'image mentale de l' « enroulement de la droite » des réels sur le cercle n'est plus présente dans le milieu. Pourtant elle pourrait permettre de prendre conscience que tout réel correspond à un point M sur le cercle et à une mesure en radians d'un angle.

Le statut du nombre α est très complexe : c'est n'importe quel réel, et c'est aussi la mesure en radians d'un angle orienté. Ce réel va devenir la variable des fonctions trigonométriques. Insensiblement la référence explicite à l'angle va disparaître.

Concernant l'oubli de l'enroulement de la droite des réels sur le cercle, je perçois dans l'élaboration de la séquence de Clotilde, un phénomène que j'avais déjà observé pour le chapitre sur la valeur absolue. Clotilde fait avancer le temps didactique dans un processus de chronogenèse et installe des objets dans le milieu qui sont aussitôt abandonnés dans le passé de la vie de la classe. La dynamique du processus de mesogenèse est enclenchée mais elle ne produit pas les effets attendus car elle n'est pas entretenue.

Des nombres qu'il faut remarquer et mettre en vitrine

À la fin de la séance du 9 mai, Clotilde a fait remplir un tableau où figurent les valeurs particulières du sinus et du cosinus des nombres 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$. Le tableau est corrigé lors de la séance du 16 mai, Clotilde donne ensuite un nouveau tableau qui intègre les valeurs précédentes et que les élèves doivent compléter (Cf. Figure 109).

Exercice : On a donné les valeurs exactes du sinus et cosinus de quelques angles remarquables entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Point								I	A	B	C	J				
x	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$								1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0				
$\sin x$								0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1				

a. Retrouver le point qui correspond à chaque angle.
b. En déduire les valeurs exactes des cosinus et sinus de tous les angles du tableau.

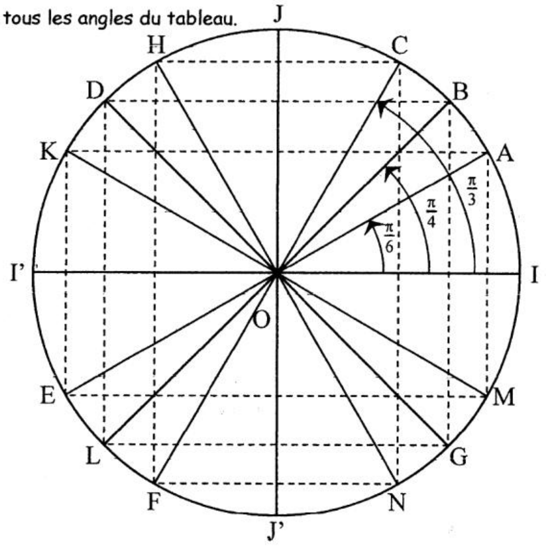


Figure 109 : cours de Clotilde du 16 mai 2008, la deuxième vitrine des nombres.

Dans ce nouveau tableau x est maintenant implicitement un nombre réel. La référence à la mesure en radian d'un angle n'est plus présente. La nouvelle conception du cosinus, vue comme une fonction qui à tout réel fait correspondre le nombre $\cos x$, peut maintenant être présentée. Un lien du nombre x avec la notion d'angle orienté est cependant évoqué par la flèche à l'intérieur du cercle.

Ce document présente une extraordinaire *vitrine de nombres* qui émergent dans l'espace numérique de seconde et qui sont *produits* dans une *dynamique numérico-géométrico-fonctionnelle*. Dans cette vitrine se côtoient des entiers relatifs, des décimaux écrits sous forme fractionnaire, des irrationnels formés avec les exemples typiques que sont les nombres π, $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

La reprise manquée du type de tâches emblématique du numérique

J'ai observé qu'il n'est pas de la responsabilité de l'élève de savoir pourquoi il est nécessaire de conserver des écritures complexes de ces nombres comme $\frac{\sqrt{2}}{2}$ par exemple. Pendant la correction du premier tableau, Clotilde a écrit cette égalité : $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Elle a ajouté aussitôt ce commentaire : « comme on a dit qu'on n'aimait pas les racines de 2 sous le trait de fraction on l'écrit comme ça » et elle a transformé l'écriture en $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Si le professeur avait renvoyé cette question dans le topos des élèves, il aurait alors réalisé une reprise du type de tâches emblématique T (déterminer la nature d'un nombre, au sens du plus petit ensemble auquel il appartient. Cf. section 8.1.1 p. 92) étudié dans le premier chapitre. Cette reprise de T aurait permis de justifier le choix d'une écriture canonique des nombres du tableau en fonction de leur nature. Mais la prise de conscience de la nature des nombres est absolument absente de toute cette séquence pourtant très riche au point de vue des reprises du travail sur le numérique. Les seules justifications données sont sous la forme de règles conventionnelles non référées à des nécessités de la discipline. Ainsi Clotilde n'accepte pas la réponse $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et la transforme en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ en argumentant par des raisons subjectives et même affectives citées précédemment : « comme on a dit qu'on n'aimait pas … ». Cette injonction du professeur est vraisemblablement étayée par des habitudes personnelles et cautionnée par la *mémoire pratique* de l'étudiante Clotilde.

L'année précédente, Mathieu dans le même contexte avait précisé aux élèves : « si je veux enlever la racine au dénominateur qu'est-ce qu'on fait ? » Des élèves avaient répondu : « on multiplie » ; le professeur avait demandé : « on multiplie par quoi ? » et les élèves avaient ajouté : « par racine de 2 ». Un moment avant pendant la recherche des élèves tout en circulant dans la classe pour regarder leur travail, il avait annoncé : « travaillez avec des fractions, ne travaillez pas avec des nombres à virgule ».

Ainsi les professeurs habituent les élèves à des pratiques de calcul exact qui sont régies par des règles conventionnelles décidées par le professeur alors que des raisons épistémologiques les étayent. Le *contrat institutionnel de calcul* (Cf. le *filtre du numérique* en annexe 11) est dans ce contexte de la trigonométrie sous l'entière responsabilité du professeur, pourtant les questions sous-jacentes pourraient être dévolues à l'élève comme faisant partie des aspects du travail mathématique sous sa responsabilité.

Une autre vitrine de nombres

Voici une autre vitrine de nombres :

$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

Tableau 47 : troisième vitrine des nombres

À partir des nombres $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$ qui apparaissaient dans le tableau de la Figure 109 (p. 303), une autre vitrine peut être construite qui offre une intéressante régularité (Cf. Tableau 47).

Mais que représentent ces nombres ? Comment sont-ils construits ? La question pourrait être posée à des élèves[1]. Voici maintenant le même tableau en le complétant avec ses marges (Cf. Tableau 48). Le jeu sur les écritures des nombres offre ici une très élégante vitrine !

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
$\sin x$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

Tableau 48 : deuxième vitrine des nombres complète

9.3 Synthèse concernant la trigonométrie

9.3.1 La trigonométrie vue à travers le *filtre du numérique*

Je vais reprendre les analyses précédentes en faisant émerger les principaux éléments regardés à travers le prisme du *filtre du numérique* (Cf. annexe 11).

9.3.1.1 Des objets qui se métamorphosent

Les nombres en jeu dans la trigonométrie

En suivant le *fil numérique* (Cf. p. 263) j'ai montré comment l'objet dont on cherche le cosinus (idem pour sinus ou tangente) se modifie à travers l'évolution des programmes successifs et en particulier entre le collège et la seconde. Cet objet est tout d'abord un angle, c'est $\cos x°$, le nombre x est dans ce cas la mesure (positive) en degrés d'un angle aigu. L'objet dont on cherche le cosinus est ensuite un nombre réel auquel on peut associer la mesure (positive ou négative) en radian d'un angle orienté, sans même avoir besoin d'expliciter cette relation.

Les types de nombres convoqués au collège sont ceux qui expriment de façon pragmatique des mesures d'angles, ce sont des nombres décimaux positifs. Ces nombres sont en lien avec une géométrie de type G1 au sens de Houdement et Kuzniak (2006). Avec les angles orientés et la mesure des angles en radians ils deviennent des nombres réels, qui plus est très fréquemment irrationnels de la forme $k \times \pi$ où k est un nombre rationnel.

Une autre difficulté est le changement de statut de ce nombre, il était une mesure d'angle comprise entre 0° et 360° pouvant se représenter mentalement par le résultat d'une mesure effective avec un rapporteur dans le paradigme de la géométrie G1 (au sens de Houdement et

[1] Je l'ai posée en dehors de tout contexte à un groupe de chercheurs en didactique des mathématiques, personne n'a su répondre tout de suite.

Kuzniak, 2006), il va devenir une variable qui est un nombre réel quelconque pour une fonction trigonométrique dans la géométrie G2 (Ibid.). Pour qu'une représentation mentale soit encore possible, une création didactique consiste à faire imaginer l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique. Cette analogie pourrait être perfectionnée en faisant imaginer l'enroulement d'un fil à partir d'une marque sur le fil, d'un côté de la marque on enroulerait la partie correspondant aux nombres positifs et de l'autre côté celle correspondant aux négatifs. L'expérimentation physique dans une volonté assumée d'apprentissage par ostension pourrait venir soutenir cette analogie.

Pour revenir au changement de point de vue sur l'angle, je cite ce commentaire du document d'accompagnement de seconde :

> Aucun développement n'est demandé en 2^{nde} sur les notions d'orientation d'une figure : l'observation et les mots pour la dire suffiront. Pour les angles, on partira du point de vue intuitif adopté au collège et les angles géométriques seront mesurés en degré ou en radian. A propos des rotations, il sera commode, en liaison avec la notion de cercle trigonométrique, de mesurer les angles entre -180° et 180° (ou entre $-\pi$ et π) et d'introduire alors le terme d'angle orienté.

Les *angles géométriques* et les *angles orientés* sont bien distingués. Ces derniers auraient pu être introduits avec la reprise de la rotation en seconde. Mais ni Mathieu, ni Clotilde n'ont fait ce choix. Mathieu n'a pas du tout repris les transformations dans les rappels de géométrie plane, Clotilde a fait ces rappels en intégrant en particulier la rotation mais sans lien avec du nouveau par rapport au collège.

De l'opérateur à la fonction pour les lignes trigonométriques

Un autre objet se métamorphose, c'est le concept de cosinus (idem pour sinus et tangente). Pour les élèves arrivant du collège, cet objet est considéré comme un opérateur, en seconde cette conception va évoluer vers le statut de fonction.

L'espace numérique élaboré en seconde est enrichi par de nouveaux éléments qui sont des opérateurs, à savoir les opérateurs cosinus et sinus, générateurs de tableaux de nombres réels contenant de nombreux irrationnels. Ces opérateurs permettent de produire des nombres réels, en général sous la forme de valeurs approchées à partir des nombres affichés par une calculatrice. Les opérateurs inverses sont travaillés en acte et complètent également cet espace numérique. Grâce à ces opérateurs, dans les séquences de Mathieu et de Clotilde, l'intérêt est centré sur la façon d'obtenir les valeurs numériques, et non pas sur la nature des objets numériques produits. Comment les élèves ont-ils élaboré le concept de cosinus, de sinus, de radian, comment perçoivent-ils que l'ensemble des réels peut être représenté grâce au cercle trigonométrique ? Par ailleurs le changement de statut des lignes trigonométriques qui étaient des opérateurs et qui deviennent des fonctions, est-il véritablement perçu ? La question « qu'est-ce que c'est ? » n'est pas actualisée, elle est masquée par la question « comment on fait ? ». L'accent étant mis sur quelques valeurs particulières des angles, le changement de statut de l'opérateur vers la fonction est difficile à faire percevoir aux élèves, même de façon intuitive. La proposition des programmes est de conjuguer les cadres numériques et géométriques pour commencer à travailler le concept de fonction trigonométrique, c'est ce que commence à mettre en place Clotilde mais l'importance donnée aux calculs des valeurs particulières de façon statique occulte la fonction, alors même que le but visé en seconde est de dévoiler la fonction.

Dans la classe de Mathieu, le changement de point de vue sur le cosinus a été abordé grâce à la calculatrice graphique, ainsi le passage du cadre numérique au cadre fonctionnel a été illustré par l'obtention d'une courbe, signifiant implicite de la fonction sous-jacente et de sa continuité qui est perceptible intuitivement.

Un problème du professeur est de construire son enseignement pour prendre en compte ces évolutions et faire évoluer les conceptions des élèves. C'est un véritable problème de la profession.

Les ostensifs et les registres de représentation sémiotique

Dans les objets identifiés dans le *filtre du numérique*, se trouvent également les registres de représentation sémiotique (au sens de Duval, 1995) et plus généralement les ostensifs (Bosch & Chevallard, 1999).

Le langage symbolique est particulièrement difficile à utiliser dans le domaine de la trigonométrie. Dès le collège des confusions apparaissent pour les élèves entre la mesure d'un angle et son cosinus (ou sinus ou tangente). Des erreurs concernant les règles d'écriture en langage symbolique comme celle de Diego et de Julien sont très fréquentes (Cf. p. 278). L'introduction du radian et des fonctions trigonométriques ne vont faire que compliquer encore le travail langagier. Je remarque dans ce domaine encore la pauvreté du langage naturel qui pourrait être utilisé davantage avec deux objectifs :

- faciliter l'expression qui n'est pas contrainte par des règles très strictes comme le langage symbolique, et également diversifier les expressions langagières ;
- permettre conjointement le développement en langage naturel et le processus de conceptualisation dans une dialectique évolutive.

Le registre du dessin est important dans le domaine de la trigonométrie. Le cercle trigonométrique est un objet théorique qui intervient dans la définition du cosinus et du sinus d'un réel, mais il est également un outil de compréhension pour visualiser les liens entre ce réel, le point sur le cercle et ses coordonnées. Les dessins approximatifs qui ont été réalisés sous mes yeux par les élèves de Clotilde ne peuvent pas remplir ces objectifs. L'exigence de précision est ici une nécessité mathématique pour que le dessin soit véritablement une représentation fiable et un outil pour comprendre, comme un outil heuristique.

9.3.1.2 Les dynamiques mises en œuvre en lien avec le numérique

La dynamique mise en œuvre par les deux professeurs est une dynamique numérico-géométrique. Ainsi des nombres de différentes natures sont engendrés par l'opérateur cosinus à partir du cercle trigonométrique et du triangle rectangle. Cependant une autre dynamique reste implicite, c'est une dynamique inter-numérique qui pourrait vivre grâce à la reprise du travail numérique du début de l'année en lien avec la tâche emblématique et l'écriture canonique[1] des nombres en fonction de leur nature. Mais il semblerait que cette tâche emblématique ne soit pas exportable en dehors du secteur « Nombres » du domaine « Calcul et fonctions ». Ce lieu de la trigonométrie en seconde permettrait de retravailler le numérique, puisque des irrationnels arrivent « naturellement ». Mais la prise de conscience de la nature et de l'écriture de ces nombres n'est pas de la responsabilité de l'élève. Pourtant il serait intéressant de poser la question de la valeur exacte d'un nombre comme $\cos 6$ qui pose des problèmes du même type que celle d'un nombre comme $\sqrt{34}$. Ces exemples pourraient enrichir les prototypes habituels utilisés comme irrationnels. Il est intéressant de noter que sur six manuels de seconde édités en 2004 et 2005, un seul[2] donne dans le résumé du cours un exemple d'irrationnel comme étant un cosinus ($\cos 23\,°$). Pourtant en faisant la synthèse des nombres rencontrés dans le grand fourre-tout du collège, ce type de nombres a été fréquenté et peut être réinvesti dans un rôle d'exemple.

Une autre dynamique reste implicite, c'est la dynamique numérico-fonctionnelle. J'ai souligné dans les ruptures entre collège et lycée, la conception fonctionnelle nouvelle en seconde pour le cosinus et le sinus. Or le travail proposé aux élèves reste dans le cadre numérique avec un tableau de valeurs et un dessin statique qui focalise l'intérêt pour des angles très particuliers. Pour que les élèves prennent conscience du changement de cadre il faudrait qu'ils résolvent des problèmes qui nécessitent ce changement de point de vue, mais ces problèmes sont absents de l'organisation mathématique. Ainsi la continuité de la fonction cosinus est assurée implicitement par le cercle trigonométrique mais il n'existe pas de tâche dans cette dynamique dans les classes de Mathieu et de Clotilde.

J'ai montré comment la trigonométrie est un domaine qui amène à faire franchir constamment différentes frontières entre numérique, géométrique et fonctionnel. J'ai même évoqué une *dynamique numérico-géométrico-fonctionnelle* pour rendre compte des articulations entre ces trois domaines (Cf. p. 277). La métamorphose des objets évoquée précédemment va de pair avec les changements de cadres qui obligent à une grande vigilance épistémologique de la part du professeur. J'ai analysé par exemple comment la relation de proportionnalité entre la mesure en degrés et la mesure en radians des angles était modifiée en fonction de l'objet angle : angle orienté ou non (Cf. dans la classe de Clotilde, p. 300).

Le passage vers le concept de fonction apparaît très délicat comme je le soulignais précédemment en parlant du statut du nombre qui devient une variable. C'est l'articulation entre le domaine numérique, dans lequel un opérateur permet de répondre à la question « quel

[1] Cette dénomination n'a pas à être connue des élèves explicitement mais en actes

[2] Hyperbole, chez Nathan, 2004

est le cosinus de cet angle ? », et le domaine fonctionnel pour lequel existe un nouvel objet la *fonction-cosinus*. Quels types de tâches et de problèmes, quelles situations didactiques permettent aux élèves de prendre conscience de ces différentes conceptions ? C'est encore une question difficile posée à la profession.

9.3.1.3 Le contrat institutionnel de calcul

Le traitement des calculs numériques dans le domaine de la trigonométrie est particulièrement délicat comme je l'ai montré en analysant les productions des élèves. C'est un domaine où se concentrent plusieurs difficultés :

- travailler avec des nombres irrationnels qui sont exprimés avec des racines carrées ou le nombre π, certains étant des nombres transcendants comme π ou certains cosinus, sinus et tangentes ;
- savoir choisir entre le calcul exact et le calcul approximatif ;
- savoir utiliser la calculatrice de manière efficace alors que les nombres sont en général idécimaux.

Le contrat de calcul au niveau de la seconde ne peut être la plupart du temps qu'un contrat de calcul approximatif, mais même dans ce contrat des règles sont à connaître. Dans certains cas une pratique de calcul approché est possible.

9.3.1.4 Des raisons d'être pour l'étude de la trigonométrie

Les contextes de problèmes réels pour lesquels la trigonométrie est un outil de modélisation et de résolution de problème sont très nombreux. Je peux citer l'astronomie, la cartographie, l'optique, l'architecture, etc. Ces domaines alimentent des dynamiques mathématique-extra mathématiques. Mais cela ne justifie pas l'introduction des connaissances nouvelles de seconde, qui sont motivées par le rôle des fonctions trigonométriques dans l'analyse et la physique, mais cela les élèves ne peuvent pas encore le savoir. C'est ce qui est explicitement précisé parmi les objectifs du domaine *Calcul et fonctions* du programme : « Étudier quelques fonctions de référence préparant à l'analyse ».

Lors de la séance du 16 mai 2008, après avoir donné aux élèves la vitrine des nombres à compléter (Cf. Figure 109), un élève demande « mais madame à quoi ça sert ? ». Clotilde répond en expliquant qu'il faut retenir les valeurs particulières du tableau. La raison donnée par Clotilde est une raison institutionnelle, et non pas une raison qui corresponde aux nécessités mathématiques pour résoudre des problèmes.

Je reprends la question de cet élève : pourquoi les valeurs du sinus et du cosinus des angles de 30°, 45° et 60° sont à connaître ? Il est vraisemblable que le professeur ne se la pose même pas : c'est au programme et c'est ancré dans la mémoire pratique des professeurs en général. La question pourrait être transformée en : pourquoi les équerres ont des angles aigus de 30° et 60° ou bien 45° ? Et pourquoi ne pas s'intéresser à des angles de 10°, 20°, 40° ? Il y a là des questions qui ne sont probablement jamais abordées avec les élèves. Une réponse simple est l'importance dans les figures de base de la géométrie du triangle équilatéral et du carré, ainsi que de façon plus générale des polygones réguliers.

9.3.2 Retour sur les hypothèses de la recherche

9.3.2.1 Première hypothèse : le geste de reprise, un geste très délicat

Gestes à l'échelle de l'année scolaire

En regardant le curriculum officiel de seconde sur l'année scolaire entière, la trigonométrie devrait être abordée sous deux formes :

- sous la forme de reprises sans lien avec du nouveau des anciennes connaissances du collège. Je rappelle encore une fois à ce propos la recommandation du document d'accompagnement du programme de seconde : « Les élèves sortant du collège disposent des connaissances de base de la trigonométrie dans un triangle rectangle ; ces connaissances seront entretenues en géométrie, lors de la résolution de problèmes relatifs à diverses configurations du plan » ;
- sous la forme d'une reprise qui est une poursuite d'étude complètement nouvelle par rapport au collège.

Le domaine de la trigonométrie convoque des connaissances numériques très diverses et très nombreuses que j'ai explorées notamment en utilisant le *filtre du numérique*. Les RDN en lien avec ce domaine sont donc importantes. Le regard porté sur la programmation à l'échelle de l'année scolaire, dans le cas de Mathieu et de Clotilde, permet de se rendre compte des occasions manquées des reprises sous la première forme.

Gestes à l'échelle de la séance

En prenant un autre point de vue à l'échelle de la séance, je repère d'une part des RDN qui révèlent l'expertise des élèves en calcul numérique (Cf. p. 292), et d'autre part des connaissances numériques anciennes du collège qui ne sont pas mobilisables. C'est le cas, par exemple, pour la mise en œuvre de la proportionnalité dans la classe de Clotilde lorsque les élèves ont eu à faire des conversions de mesures d'angles donnés soit en degrés soit en radians (Cf. p. 301). Du côté des élèves je mets en rapport ces situations de proportionnalité que j'ai analysées avec des situations de *création d'ignorance* (Mercier, 1996). Du côté du professeur je perçois la prise en compte des difficultés des élèves, ce qui incite Clotilde à aider individuellement, mais sans assurer une reprise complète de ces connaissances anciennes. Les véritables raisons mathématiques, c'est-à-dire les éléments théoriques qui fondent les savoir-faire pour gérer les situations de proportionnalité, ne sont pas exprimées. Mercier (Ibid.) décrit ainsi la situation de l'élève :

> […] la présence des objets que l'élève doit manipuler pour faire les exercices rend nécessaire la présence de savoirs – insensibles, mais pertinents – pour la manipulation des objets enseignés. Ces objets pertinents, l'élève est presque toujours censé les connaître d'une manière idoine à leur usage alors que, le plus souvent, il n'en est rien : l'élève ignore en fait le geste mathématique que l'on attend de lui, mais ce geste est tel que, s'il cherche à se l'enseigner, il peut l'apprendre.

Clotilde ne saisit pas l'opportunité d'une institutionnalisation après coup des savoirs canoniques en jeu dans la praxéologie mathématique liée à la situation de proportionnalité.

9.3.2.2 Deuxième hypothèse : *la variabilité des gestes de reprise*

Le contrat institutionnel de calcul

Le domaine de la trigonométrie nécessite une gestion difficile des calculs numériques. Cela nécessite de savoir quand il faut remplacer les nombres par des valeurs approchées, et lorsque c'est le cas il faut connaître et maîtriser les techniques du calcul approximatif, voire approché lorsque c'est possible. Dans les deux classes observées, les professeurs ont gardé dans leur topos la responsabilité des décisions à prendre concernant le calcul numérique. De leur côté les élèves ont une apparente autonomie dans la mesure où ils utilisent leur calculatrice en « libre service ». Mais en fait le contrat didactique est le même dans les deux classes pour ce qui concerne la conduite d'un calcul : si le professeur n'intervient pas, les élèves peuvent utiliser à leur guise la calculatrice ; sinon ils suivent les instructions du professeur.

Pourtant des connaissances relatives à la gestion d'un calcul numérique sont déjà là depuis le collège, il s'agit donc bien d'une reprise de connaissances anciennes, mais elle est à relier à du nouveau dans la mesure où les expressions numériques deviennent plus complexes, et où les calculatrices collège et lycée sont différentes. Par ailleurs la prise de conscience du statut du nombre affiché par la machine par rapport au nombre cherché est à poursuivre comme le demande d'ailleurs le programme de seconde (Cf. Figure 4 ; p. 63).

Une différence est toutefois visible entre Mathieu et Clotilde. Dans le premier chapitre de sa progression, Clotilde a intégré des rappels sur les notions de valeur approchée et d'arrondi (Cf. Figure 16, p. 110) alors que Mathieu n'a rien fait écrire à ce sujet. Au cours du premier trimestre, Clotilde a consacré une séance à la maîtrise du calcul instrumenté et au registre du « langage machine » (Cf. annexe 11.30), en revanche je n'ai rien trouvé dans les cahiers des élèves de Mathieu. Clotilde a donc fait une reprise explicite des connaissances relatives au calcul instrumenté, mais dans des situations où ces connaissances auraient été des outils nécessaires à mettre en œuvre, la reprise n'a pas eu lieu.

Les nombres produits dans le domaine de la trigonométrie

Mathieu comme Clotilde, n'ont pas saisi l'occasion qui se présentait de reprendre la question de la nature des nombres *produits* dans le domaine de la trigonométrie. Les nombres irrationnels qui apparaissent sont exposés dans une *vitrine*, vitrine d'un musée dirait Chevallard (2000). Le type de tâches T, emblématique du numérique, semble ne pas pouvoir être exporté en dehors du chapitre consacré aux nombres. Le même geste d'évitement est visible chez les deux professeurs.

Le processus de chronogenèse

Une différence apparaît clairement entre les deux professeurs, Mathieu immobilise le temps didactique pour faire des rappels du collège avant d'aborder les nouveautés du programme. Clotilde, en revanche, prend soin de suivre les prescriptions du programme et aborde dès le début de la séquence les nouveautés de seconde sans laisser s'arrêter le processus de chronogenèse. Comme dans la séquence relative à la valeur absolue, la conformité au curriculum officiel fait rencontrer à Clotilde des difficultés pour bâtir l'ossature de la séquence. C'est le hiatus entre les angles géométriques et les angles orientés que j'ai repéré dans les analyses précédentes.

9.3.2.3 Troisième hypothèse : l'incomplétude des praxéologies

À l'échelle de la séance

Des savoirs insensibles (au sens de Mercier, 1996) posent des problèmes aux élèves. J'ai cité le traitement d'un tableau de proportionnalité chez Clotilde, ou encore la transformation d'un nombre sous la forme d'une somme de quotients chez Mathieu (Cf. p. 289 ; l'épisode relatif à $-\frac{5\pi}{6} = -\pi + \frac{\pi}{6}$). Voici décrit ci-dessous un autre exemple dans la séance du 23 mai 2007 chez Mathieu. Il a écrit au tableau $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$. Des élèves manifestent leur incompréhension. Mathieu écrit alors : $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ et il déclare en même temps : « j'écris les dénominateurs, n'oubliez pas tout ce que vous savez faire depuis le début de l'année ».

Les savoirs canoniques qui sont les éléments technologiques des praxéologies ponctuelles développées dans ces exemples ne sont pas exprimés. Les praxéologies sont réduites au bloc pratique et des occasions d'institutionnalisation après-coup de savoirs mathématiques nécessaires à toute l'activité mathématique ne sont pas saisies.

Ces exemples reflètent en fait un geste professionnel générique chez Mathieu et Clotilde que j'ai observé tout au long de l'année : les occasions de reprise des savoirs canoniques qui régissent le travail dans l'espace numérique ne sont jamais saisies.

À l'échelle de la séquence

J'ai mis au jour des manques dans la séquence de Mathieu concernant le théorème de proportionnalité entre l'angle au centre et l'arc qu'il intercepte. J'ai également souligné le flou existant dans la séquence de Clotilde à propos des angles géométriques et orientés. Ainsi ce qui apparaît, dans l'étude des organisations mathématiques globales échafaudées par les deux professeurs, ce sont des défauts dans le soubassement théorique qui doit assurer la solidité épistémologique de l'ensemble de la séquence d'enseignement. Le professeur en position P+1 élabore une séquence dans un processus de transposition didactique en conformité avec le curriculum officiel, et de plus cette séquence doit être cohérente au niveau épistémologique avec le savoir de référence. C'est évidement pour le professeur un type de tâches et une contrainte bien difficiles !

9.3.2.4 Quatrième hypothèse : un problème de la profession

Dans les hypothèses précédentes j'ai déjà souligné des difficultés spécifiques du domaine numérique en liaison avec la trigonométrie. Ce sont autant de problèmes qui sont posés à la profession.

Je voudrais soulever une autre question problématique, elle concerne le changement de statut de l'objet dont on cherche le cosinus (ou le sinus ou la tangente). Cette question ne correspond pas strictement aux occasions manquées avec des RDN possibles, mais elle concerne une difficulté rencontrée par les professeurs pour permettre aux élèves d'élaborer le concept de fonction trigonométrique. Cette conception nouvelle sur les objets de la trigonométrie va de pair avec la mutation du nombre dont on cherche le cosinus (ou une autre ligne trigonométrique). C'est donc bien un problème de la profession que je veux évoquer dans ce paragraphe.

Au collège le nombre x, de l'angle de $x°$, est un nombre décimal positif exprimant une mesure d'angle géométrique. Ce nombre x se transforme pour devenir tout nombre réel qui a un statut de variable pour une fonction trigonométrique. Comment enseigner cette mutation qui accompagne le passage de l'opérateur à la fonction trigonométrique ?

Le curriculum officiel de seconde donne des éléments de réponse à cette question en insistant sur deux aspects :

- les différents registres de représentation sémiotique sous lesquels le concept de fonction peut être appréhendé ;
- l'usage de logiciels comme les tableurs et les logiciels de géométrie dynamique.

Concernant le premier aspect le programme affiche parmi les objectifs généraux du domaine *Calcul et fonctions* : « Expliciter, sous différents aspects (graphique, calcul, étude qualitative), la notion de fonction. ». Le document d'accompagnement insiste encore sur la même idée : « Au sujet des fonctions, l'accent est mis sur les différents aspects sous lesquels apparaît la notion de fonction : graphiques, numériques, qualitatifs. ».

Pour le deuxième aspect lié aux TIC, le document d'accompagnement souligne l'intérêt des calculatrices graphiques :

> L'usage de calculatrices graphiques permet de relier très facilement et de façon quasi instantanée, les domaines numérique et graphique, et d'enrichir ainsi considérablement l'approche des fonctions.

Il souligne également l'intérêt du tableur :

> Pour la 2$^{\text{nde}}$, cet usage [du tableur] apporte un éclairage complémentaire de la notion de variable et de fonction et facilite la mise en œuvre de différentes activités numériques riches d'enseignement en particulier sur les différentes formes possibles d'une même expression.

De façon plus précise une indication est donnée dans le document d'accompagnement pour développer une représentation visuelle de l'enroulement de la droite des réels et préparer ainsi la conception de ce réel comme étant la variable de la fonction trigonométrique :

> Un logiciel de géométrie dynamique sera alors particulièrement utile pour bien montrer comment l'ensemble des nombres réels s'enroule sur le cercle et comment varient les projections de l'extrémité d'un arc AM en fonction de la longueur de cet arc […].

Mathieu a effectivement fait utiliser la calculatrice graphique pour que les élèves visualisent la courbe représentative de la fonction cosinus. Cela a d'ailleurs provoqué l'étonnement admiratif de certains élèves. À cette occasion Mathieu a rappelé aux élèves comment paramétrer les fenêtres, ce qui avait déjà été travaillé dans le chapitre relatif aux fonctions. Je ne sais pas si Clotilde a fait faire le même travail, je n'ai pas assisté à la fin de la séquence et je n'ai pas récupéré les traces écrites de la fin du chapitre. En revanche Mathieu et Clotilde n'utilisent jamais de logiciels en classe, bien que toutes les salles soient équipées de vidéoprojecteurs dans leur lycée.

Mais confier totalement aux outils « numériques » le pouvoir de faire comprendre la transformation de l'opérateur vers la fonction c'est penser qu'un ostensif spectaculaire, presque magique, va résoudre l'obstacle épistémologique. Je reviens aux programmes qui décrivent ce qu'est une « véritable activité mathématique » (Cf. section 5.3.4 p. 60) et qui soulignent cette dimension de l'activité mathématique pour l'élève : « accéder au plaisir de la découverte et à l'expérience de la compréhension ». Je prends comme exemple la fonction cosinus, une expérience que je qualifie de cruciale pour les élèves, est de représenter sur un papier millimétré un nombre important de points de coordonnées $(x, \cos x)$ sur l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$ jusqu'à ce que ces points soient visuellement assez rapprochés pour pouvoir conjecturer l'allure d'une courbe. Evidemment le dessin pourra être facilité par le repérage des symétries possibles à partir des points trouvés sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$. Clotilde a fait faire au moins une fois dans l'année ce type de travail dans un devoir maison (Cf. annexe 11.31). Ce type de tâches nécessite en général de chercher des valeurs approchées sous la forme de décimaux d'ordre 1 (avec une unité de l'ordre du cm) et permet de mettre en relation un tableau fini de nombres avec un ensemble de points dont on conjecture l'infinité.

Ce que je viens de développer et qui concerne l'usage des TIC est un problème plus large que celui de l'enseignement de la trigonométrie, mais en le contextualisant dans ce domaine les obstacles apparaissent avec une grande acuité.

10 Conclusion

Dans cette partie je vais dans un premier temps mettre en relief les résultats les plus significatifs de cette recherche, je décrirai ensuite les objectifs que je souhaitais atteindre sans y parvenir. Je terminerai en décrivant des chemins que j'entrevois à l'issue de ce travail pour continuer à apporter ma contribution à *l'observatoire des pratiques sur le numérique* (Bronner, 2007). Mais auparavant je vais consacrer une section particulière au type de tâches emblématique du numérique.

10.1 Les reprises possibles de la tâche emblématique du numérique

Je rappelle ce que j'ai défini comme étant le type de tâches emblématique du numérique (noté T) : déterminer la nature d'un nombre, c'est-à-dire « le plus petit ensemble » auquel il appartient (Cf. 8.1.1 p. 92). Ce type de tâches est également emblématique des reprises :

- reprises de connaissances du collège : les praxéologies ponctuelles en lien avec T contiennent de nombreuses connaissances du collège comme savoir réduire une fraction sous la forme d'une fraction irréductible ;
- reprises tout au long de l'année de seconde : savoir choisir l'écriture des nombres la plus adaptée en fonction du contexte donné et en fonction de la nature du nombre dans différents domaines.

Je consacre donc cette section à ce type de tâches que je choisis comme emblème du numérique et également des reprises.

En utilisant le *filtre du numérique* j'ai analysé les éléments de l'espace numérique construit en seconde. J'ai identifié cette tâche dite *emblématique du numérique* qui est le repérage de la nature des nombres rencontrés dans l'activité mathématique afin de déterminer la forme d'écriture la plus adaptée par rapport au contexte dans lequel le nombre apparaît. J'ai alors recherché des lieux du programme de seconde où cette tâche pouvait être reprise. C'est ainsi que les thèmes de la valeur absolue et de la trigonométrie ont été analysés comme étant des habitats possibles, mais ce ne sont évidement pas les seuls. Le tableau ci-dessous (Cf. Tableau 49) répertorie des habitats possibles pour T ainsi que des reprises en lien avec des connaissances du collège, ou en lien avec des connaissances rencontrées pour la première fois en seconde et qui font appel à la *mémoire didactique*.

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Collège</td><td colspan="4">Lycée : classe de seconde</td></tr>
<tr><td>Début d'année : nature des nombres et calcul</td><td>Début d'année (suite) : valeur absolue</td><td>Fin premier trimestre : fonctions</td><td>Fin d'année : trigonométrie</td></tr>
<tr><td>Observation dans les classes</td><td>Fourre-tout des nombres et première synthèse</td><td>Travail avec T</td><td>Intervention d'irrationnels « de service »</td><td>Reprise du calcul numérique nécessaire dans ce cadre</td><td>Production de différents types de nombres réels mis en vitrine</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Reprises possibles</td><td colspan="2">tissage : reprise du collège en lien avec du nouveau</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">tissage : reprise de T</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="4">Tissage : reprise dans différentes niches de T en s'appuyant sur la mémoire didactique construite dans la classe</td></tr>
<tr><td>Questions vives</td><td>Comment travailler la première synthèse sur les nombres ?</td><td>Comment relier collège et lycée sans révisions systémati-
-ques ?</td><td>Quelle conception de la valeur absolue est visée ?</td><td>Comment continuer le travail sur le numérique en lien avec les fonctions ?</td><td>Comment reprendre le travail sur la nature des nombres avec les fonctions trigonométriques ?</td></tr>
</table>

Tableau 49 : des reprises de T dans le programme de seconde

Ce repérage des reprises pour T n'est certainement pas exhaustif, mais il permet de visualiser en partie le réseau de connaissances en lien avec T. Il permet également de mieux comprendre les difficultés des professeurs pour organiser ces reprises. En effet cela nécessite chez eux une vigilance constamment éveillée pour ne pas manquer une occasion de reprise et la poursuite de la chronogenèse alors que leur préoccupation première est dirigée en priorité vers les *connaissances sensibles* (au sens de Mercier, 1996). Cela nécessite également une perception de l'enseignement sur toute l'année scolaire, alliée avec des préoccupations multiples de chaque instant.

10.2 Résultats de la recherche

10.2.1 Conditions et contraintes sur l'enseignement du numérique

Des conditions et des contraintes pèsent sur les choix didactiques des professeurs à propos de la construction du numérique à différents niveaux de codétermination didactique :

- ***Au niveau de la civilisation***, la représentation des réels sous la forme d'une droite touche la représentation symbolique du monde, et des civilisations différentes peuvent ne pas partager la même représentation. Ce type de remise en question de représentations vécues comme universelles pousse inlassablement à interroger les évidences ;
- ***au niveau de la société***, la réussite en mathématiques est très souvent la clé pour s'orienter vers des études supérieures. Ainsi la demande sociale pèse sur les professeurs de lycée, et en particulier sur les professeurs enseignant en première S et terminale S. J'ai montré, par exemple, comment des types de tâches algébriques comportant des valeurs absolues pouvaient être des éléments de sélection des bons élèves demandés par la société ;
- ***au niveau pédagogique***, des habitudes de techniques professorales comme les révisions sont considérées comme nécessaires avant d'aborder de nouvelles notions. Cette conception semble résulter d'un lointain héritage d'une époque où les révisions étaient inscrites comme parties intégrantes des programmes. Est-ce que cette pratique des révisions comme parties explicites d'un programme d'enseignement a duré longtemps ? Est-ce qu'il y aurait encore actuellement un héritage de ces pratiques ancrées dans la conviction de nombreux professeurs qui commencent leur progression par des révisions systématiques ? Ces questions sont simplement ouvertes dans le cadre de cette recherche.

  Une autre contrainte pédagogique est le nombre élevé d'élèves par classe en lycée, en général entre 30 et 40 élèves. Dans les classes de Mathieu et de Clotilde ils étaient respectivement 36 et 32. Mathieu lors d'un entretien le 5 juin 2007 dit être d'accord pour faire davantage de résolution de problèmes en seconde, et il ajoute : « mais comment faire avancer 36 élèves en même temps et s'assurer qu'ils ne décrochent pas ? » Un peu plus tard il exprime sa colère :

  > Les concepteurs de programme ne voient qu'un seul paramètre sur lequel jouer, c'est le professeur, alors que tous les autres paramètres possibles comme le nombre d'élèves par classe, ne sont pas appréhendés comme paramètres possibles à modifier. Cela me met en colère.

- ***au niveau de l'école***, la place de la classe de seconde est particulière, comme charnière entre collège et lycée, et de plus c'est un passage obligé vers la classe de première S où les difficultés en mathématiques concernant le calcul numérique et algébrique deviennent des handicaps pour les élèves et pour le professeur. Ces difficultés connues par les professeurs de seconde qui enseignent également en première S, les incitent à multiplier les exercices d'entraînement systématique. Par ailleurs les professeurs de seconde ont une vision de leurs élèves qui les amènent à diminuer les nécessités de rigueur de la discipline. C'est ainsi que Mathieu n'ose pas demander à ses élèves de citer une règle qui permet de faire un calcul numérique de peur de les infantiliser, ou que Rosalie la débutante ne veut pas dégouter les élèves des mathématiques en leur demandant de faire des démonstrations trop compliquées ;
- ***au niveau de la discipline***, l'écriture linéaire des programmes comme leur présentation avec un découpage particulier des notions, semble influencer les progressions suivies par les professeurs et par les auteurs des manuels. Un autre facteur augmente cette influence, c'est la difficulté d'appréhender le programme en unités plus grandes que celles des sujets et des thèmes. Elle se conjugue avec la difficulté d'avoir une vision globale de la programmation annuelle.

  Une autre contrainte à ce niveau est la qualité du manuel choisi dans l'établissement. Les activités en lien avec le numérique du manuel utilisé par Mathieu et Clotilde que j'ai analysées sont très guidées et ne permettent pas la dévolution d'un problème aux élèves. L'exemple des activités préparatoires pour introduire la trigonométrie est représentative de ce constat. À ce niveau de la discipline je retrouve des phénomènes qui viennent encore conforter ce que Cirade (2006) a montré dans sa thèse : « la matière mathématique, puisque c'est cela qui nous importe, est presque toujours mal définie, insuffisamment travaillée, et indéfiniment problématique ». La fragilité épistémologique de la séquence sur la valeur absolue pour Mathieu et Clotilde est un exemple de cette matière mathématique qui pose problème aux professeurs. Je fais un parallèle entre deux postures du professeur :

  - le professeur en position P+1 (au sens de Margolinas) qui ne retravaille pas les mathématiques apprises pour les transformer en mathématiques à enseigner ;
  - le professeur en position P0 qui ne fait pas retravailler des connaissances anciennes des élèves dans le but de les faire évoluer grâce aux outils conceptuels acquis par les élèves depuis leur première rencontre avec ces connaissances.

  Dans un cas comme dans l'autre la mémoire est perçue comme une qualité personnelle (Matheron, 2000) et il s'agit simplement de se rappeler, et non pas de poursuivre l'étude en faisant avancer la chronogenèse. J'ai ainsi souligné que Mathieu et Clotilde ont fait des rappels des règles de calcul numérique telles qu'elles étaient enseignées au collège, sans profiter de la nouvelle connaissance des réels pour institutionnaliser ces règles en précisant leur domaine de référence ;

- ***au niveau du domaine***, des manques apparaissent qui provoquent chez les enseignants des discours technologiques qui véhiculent des règles ergonomiques au lieu d'étayer les techniques sur des énoncés mathématiques. Ainsi la disparition des termes officiels de commutativité et d'associativité dans les programmes, a entraîné des vides didactiques et une surabondance d'images analogiques pour traiter un calcul numérique (faire des paquets de racine de 3 comme demande Clotilde par exemple) ;
- ***au niveau du secteur, thème et sujet,*** des appuis donnés dans le programme peuvent devenir des contraintes qui freinent le processus de chronogenèse. Je citerai ici seulement le cas de la définition de la valeur absolue qui est à relier à la notion de distance de deux réels. J'ai montré comment Clotilde suit cette recommandation, ce qui fait obstacle ensuite à la compréhension de la valeur absolue d'un réel et à la difficulté de calculer $|x|$ même quand x est un nombre entier relatif.

10.2.2 Éléments technologiques des gestes professionnels de reprises

Les représentations des enseignants, leurs *logiques profondes* (Bucheton, 2009), influencent évidemment leurs décisions didactiques et peuvent éclairer les techniques professorales. Chevallard parlerait de l'équipement praxéologique du professeur. Ces logiques profondes peuvent concerner le rapport personnel du professeur à l'activité mathématique (l'épistémologie du professeur), la perception de l'élève de seconde, la conception des processus d'apprentissage ou encore la façon d'expliciter les difficultés des élèves (Larguier, 2005). Je cite à ce propos un extrait d'un entretien avec Mathieu le 26 mai 2007. Cet entretien, prévu dans le protocole méthodologique, avait pour objectif de dévoiler à Mathieu mes objectifs précis de recherche, d'échanger avec lui sur ses pratiques et de répondre à ses questions, alors que ce type d'échanges avait été évité pendant toute l'année d'observation. Dans cet extrait je demande à Mathieu pourquoi il n'y a jamais de recours aux éléments théoriques en lien avec le travail de techniques. L'entretien a lieu après l'observation de la séance dans laquelle il a expliqué le calcul de la somme de deux quotients par analogie avec des calculs plus simples (Cf. p. 289). Je suggère que les élèves pourraient avoir une fiche récapitulative numérotée des savoirs de référence appris au collège sur le numérique et l'algébrique. Mathieu me dit que c'est trop tard dans l'année.

> **Mathieu** : Je pourrais prendre ce travail effectivement. J'ai, ça m'a pas paru, sur le moment là quand je l'ai fait ça m'a pas paru nécessaire, ça me paraissait hors de propos… On s'échappe trop de ce qu'on est en train de faire
>
> **Chercheur** : Oui
>
> **Mathieu** : Je vais leur demander de réfléchir encore une fois sur une chose qu'on a déjà vue, qu'on a répétée et on va s'investir sur autre chose et puis on va laisser tomber, moi ce que, ce que je voulais c'était moins 5 π sur 6.
>
> **Chercheur** : et puis en plus on est en fin d'année mais imagine que ça tu le fasses dès le début de l'année peut-être que ça construirait chez les élèves… peut-être même spontanément ils diraient mais oui c'est avec la règle numéro 7 enfin y aurait, il me semble un autre rapport aux mathématiques peut-être
>
> **Mathieu** : Là, là aussi pour moi ça a un côté infantilisant et trop scolaire

> **Chercheur** : Ah ouais
>
> **Mathieu** : Et quelle règle, à quelle règle ça fait penser monsieur ? Moi c'est la règle… ça me , ça va à l'encontre de l'autonomie, de vous êtes grands, faut bosser tout ça
>
> **Chercheur** : Ah ouais
>
> **Mathieu** : Et à quelle règle ça vous fait penser ça me gêne

Mathieu confie de nombreux éléments qui montrent son rapport personnel à l'activité mathématique, sa vision des élèves et sa conception de l'autonomie. Le recours à la règle est vécu sur le mode subjectif et sensible au lieu d'être conçu comme une nécessité de la discipline.

Le déficit technologique et théorique observé dans les classes de Mathieu et de Clotilde se conjugue avec le fait que l'activité proposée aux élèves se présente presque toujours sous la forme de notions travaillées en tant qu'objets et pratiquement jamais comme outils de résolution de problème (Douady, 1986). En conséquence, dans le cadre numérique, les objets sont identifiés par des ostensifs, les tâches sont souvent réduites à des manipulations physiques de ces ostensifs (« tu mets les racines de trois ensembles » ; « tu remontes tout en haut » ; « tu enlèves les petites barres » éléments technologiques entendus chez Clotilde). Ces mathématiques sont non seulement coupées des éléments technologico-théoriques, mais également coupées de leurs raisons d'être, elles sont travaillées de façon immotivée.

10.2.3 Reprise des hypothèses (Cf. p. 37)

10.2.3.1 Première hypothèse : le geste professionnel de reprise, un geste très délicat

A. La programmation annuelle

Je rappelle une demande très claire des programmes que j'avais inscrite dans l'introduction de ce texte : « Le calcul numérique et le calcul algébrique ne doivent pas constituer un chapitre de révision systématique, mais se retrouvent au travers des différents chapitres.» (Cf. p. 5). Dans les classes de Mathieu et de Clotilde, les reprises du calcul numérique ont nécessairement lieu dans pratiquement tous les chapitres, mais les savoirs canoniques qui régissent ces calculs ont été révisés dans un premier chapitre, et ne sont pratiquement plus mobilisés ensuite. Des règles, que j'ai appelées ergonomiques, servent de discours technologiques. La logique des concepteurs de programme et la logique des professeurs dans ces deux classes réelles sont ainsi bien différentes. Je cite un autre extrait de l'entretien avec Mathieu du 26 mai 2007 ; il s'interroge sur le bien fondé de refaire les bases du numérique et de l'algébrique au début de la progression :

> **Mathieu :** je me le demande chaque année hein. Est-ce que ça vaut le coup de reprendre, de tout reprendre ? Parce que c'est dit une fois de plus… une fois de plus, est-ce que c'est… est-ce que ça peut-être performant … Est-ce que ça peut-être réparateur mais j'en doute quoi, bien des fois j'en ai douté…Et je me dis à chaque fois est-ce qu'il vaudrait pas mieux commencer sur quelque chose de nouveau et puis quand il faut faire ces petits rappels
>
> **Chercheur :** Faire des reprises
>
> **Mathieu :** Ouais ouais. Ouais parce que pfff c'est lourd quoi, puis ils, ils se retrouvent devant les mêmes difficultés. Et je sais pas si … s'ils avancent sur quelque chose. J'ai l'impression

> qu'ils avancent… qu'ils sont capables de… de revenir sur leur erreur qu'à la pratique, que sur des choses nouvelles et quand on leur demande de réinvestir.

Mathieu fait part de ses doutes sur l'efficacité des reprises du numérique à la *reprise scolaire*, et formule clairement qu'il est plus pertinent de reprendre des connaissances dont le besoin est avéré dans l'activité mathématique. Est-ce que cette prise de conscience l'a amené à changer sa programmation annuelle ? Je ne le sais pas, mais je fais l'hypothèse que ce type de retour réflexif est un moteur de changement. Cette hypothèse est partagée par les chercheurs qui pratiquent l'auto-confrontation (Clot & al., 2000).

B. Le rôle de la mémoire didactique

Les professeurs de seconde sont coupés de ce qui s'est véritablement enseigné en collège, mais ils sont les témoins privilégiés de la chronogenèse de leurs propres classes. Pourtant lorsque des possibilités de RDN de connaissances rencontrées pour la première fois en seconde sont possibles, les deux professeurs ne renvoient pas dans le topos des élèves la responsabilité de mobiliser ces connaissances. Mathieu comme Clotilde sont les moteurs sans partage véritable de l'avancée du temps didactique. Ces observations génériques tout au long de l'année confirment ce que disaient Brousseau et Centeno (1991) : « Utiliser un système coûteux en mémoire demande aux enseignants des efforts considérables […] » (Cf. 20)

Ce phénomène a été particulièrement sensible chez Clotilde qui a cherché à échafauder des séquences de façon plus personnelle que Mathieu qui a en général suivi les propositions du manuel. Une difficulté a été repérée, il s'agit de maintenir dans le milieu tous les éléments qui ont été élaborés pour que les élèves puissent acquérir la flexibilité nécessaire dans l'activité mathématique. Je reprends l'exemple de l'ossature de la séquence sur la valeur absolue : une première conception nécessitait la perception d'une différence $(p - q)$, une deuxième vision est venue se substituer à la première, la perception d'un nombre x dont on cherche la valeur absolue. La mesogenèse progresse ainsi par étapes successives qui apparaissent séparées. Le milieu du moment de la première rencontre apparaît comme un décor, alors que des éléments considérés comme contingents devraient être conservés comme étant nécessaires. C'est le cas de la droite graduée dans la séquence sur la valeur absolue qui n'apparaît que comme illustration dans les savoirs canoniques.

C. Des visions nouvelles pour la reprise

J'ai donné au début de cet écrit une définition de la *reprise* dans le cadre de ce travail (Cf. p. 31). J'ai identifié des reprises qui ont des fonctions différentes. Dans certains cas je reprends des catégories déjà définies par d'autres chercheurs et que j'ai retrouvées dans cette recherche.

C.1. Entretenir les connaissances

La programmation annuelle de l'enseignement devrait inclure des connaissances qu'il faut « entretenir » toute l'année. Les RDN en font partie, mais aussi les connaissances du collège relatives à la trigonométrie qui embarquent de nombreuses RDN. Ce geste professionnel de reprise au niveau d'un domaine n'est pas visible chez Mathieu et Clotilde. Deux autres domaines auraient également pu être entretenus et auraient permis des RDN, c'est la statistique et la géométrie dans l'espace pour toutes les propriétés métriques. Une technique peut être généralisée pour faire des reprises de connaissances du collège : entretenir des connaissances anciennes en proposant des problèmes qui les font utiliser en tant qu'outils de résolution.

C.2. Faire la synthèse

La synthèse apparaît comme une reprise particulière. Elle est en lien avec de l'ancien, puisqu'elle n'a pas pour fonction d'introduire du nouveau, et en même temps elle permet un recul, une réorganisation des connaissances, une mise en ordre qui ne sont pas des notions nouvelles, mais amènent une modification du rapport personnel à des objets pourtant déjà connus. Établir des catégories parmi tous les nombres rencontrés au collège, c'est les appréhender différemment, et c'est bien plus que leur donner des noms. Catégoriser, faire des collections, des ensembles, c'est le point de départ de la logique depuis Aristote, et ce n'est pas qu'une question de vocabulaire.

C.3. Activer la mémoire des élèves

Le professeur peut élaborer des situations d'enseignement sachant que dans le milieu existent des connaissances anciennes des élèves. Certaines reprises pourraient être ainsi presque complètement dans le topos de l'élève. C'est ce que fait Clotilde dans la fiche préparatoire aux valeurs absolues en basant la séquence sur la distance de deux points d'une droite graduée, mais les connaissances du collège ainsi mobilisées restent trop dans l'implicite. Un autre exemple est celui évoqué au dessus, la synthèse sur les nombres pourrait être en grande partie élaborée par les élèves à partir de leurs connaissances grâce à des situations didactiques qui nécessitent la mise en œuvre de plusieurs types de nombres (comme on l'a vu avec la vitrine des nombres en trigonométrie par exemple). Matheron (2000) décrit ainsi ce type de situation :

> Il s'agit donc de donner aux élèves des moyens personnels d'étude les rendant aptes à ouvrir leur avenir à l'irruption du nouveau, en leur donnant une certaine maîtrise de leur passé, c'est-à-dire en leur faisant retravailler leur mémoire pratique, travail mené collectivement, sous la direction de l'enseignant. (p. 311)

C.4. Institutionnaliser après coup

J'ai repéré des énoncés de savoir déjà rencontrés en collège dans un contexte plus restreint que celui autorisé en seconde avec la connaissance de l'ensemble des réels. C'est le cas par exemple du *théorème de l'isomorphisme*, ou encore des règles du calcul numérique. La reprise de ces connaissances sous la forme de savoirs canoniques et avec un domaine de référence élargi, représente une institutionnalisation après coup intéressante et nécessaire pour justifier les techniques numériques (cela est aussi en lien avec la troisième hypothèse). Ce type de reprise est alors en lien avec du nouveau alors que le rappel n'est que la répétition de l'ancien. J'ai montré comment Mathieu et Clotilde reprennent les connaissances du numérique du collège sous la forme de rappels sans lien avec du nouveau.

C.5. La reprise comme moyen personnel de contrôle

La *reprise* est également une notion personnelle pour un élève qui veut contrôler une démarche. Elle répond alors à la question suivante : comment reprendre une démarche mathématique autrement qu'en refaisant méthodiquement et de façon identique le même raisonnement ? Ce type de contrôle met en jeu la capacité de l'élève à changer de registre ou de cadre, ce que j'ai appelé en référence à Bosch et al. (2004) la flexibilité. C'est alors cette qualité nécessaire pour l'activité mathématique qui est sollicitée, et non pas uniquement les qualités de vigilance et d'attention. Ce type de reprise peut être un moyen de lutter contre le caractère *auto-technologique* des techniques, en reprenant une expression de Bosch et al. (Ibid.).

10.2.3.2 Deuxième hypothèse : la variabilité relative à l'enseignement du numérique

Mathieu et Clotilde organisent leur enseignement avec beaucoup de ressemblances dont je rappelle les caractéristiques :

- les notions du numérique sont essentiellement travaillées comme objets et non pas comme outils de résolution de problèmes ;
- les élèves ont une grande place en apparence mais les situations didactiques leur laissent en fait un topos très réduit ;
- les connaissances appartiennent à des chapitres très cloisonnés et des occasions de RDN ne sont pas saisies ;
- l'usage de la calculatrice n'est pas réglé par des règles d'usage qui s'enseignent (pas du tout chez Mathieu, un peu chez Clotilde) ;
- l'organisation didactique chez Mathieu et Clotilde est un impensé. Elle résulte d'un choix pédagogique et non pas didactique. Ces deux professeurs ont une technique unique pour mettre en scène chacun des moments d'une séance que ce soit en classe entière, en module ou en aide individualisée.

Cependant l'analyse plus fine des choix didactiques de ces deux professeurs fait apparaître des différences importantes. Clotilde introduit une plus grande variété de types de tâches, c'est ainsi que pour la valeur absolue des problèmes d'approximation sont posés. Elle fait travailler davantage de types de tâches numériques, alors que Mathieu privilégie essentiellement des types de tâches algébriques. Pour les deux professeurs le manuel est un outil important qui sert de guide que ce soit pour le cours ou pour les exercices. Cependant Clotilde diversifie les supports de travail donnés aux élèves. Ce sont des activités prises dans d'autres manuels de classe, des fiches qu'elle a élaborées ou que des collègues lui ont données. Est-ce l'influence de la formation à l'IUFM qui est perceptible chez Clotilde ? Je remarque notamment comme indices de cette influence l'élaboration personnelle de la séquence sur les valeurs absolues avec une activité préparatoire (bien loin des AER travaillées en formation cependant), ou encore les questions du type vrai/faux, ainsi qu'une plus grande diversité des types de tâches travaillés.

10.2.3.3 *Troisième hypothèse : l'incomplétude des praxéologies*

J'ai constaté dans les séances observées des « lacunes » dans le développement de praxéologies ponctuelles mais aussi locales ou globales. Elles semblent pouvoir construire chez les élèves une représentation de l'activité mathématique qui n'est pas en adéquation avec ce que le curriculum officiel désigne par « véritable activité mathématique ». Les organisations mathématiques construites localement ne permettent pas d'institutionnaliser clairement des énoncés théoriques conformes aux savoirs de référence.

Un exemple concernant une praxéologie ponctuelle est celui de la reprise de la proportionnalité dans le cadre de la trigonométrie. J'ai montré que le discours technologique du professeur ne permettait pas de repérer les éléments théoriques nécessaires pour mettre en œuvre la technique de calcul. D'après mes observations et les traces écrites dans les cahiers, le théorème qui permet de trouver le quatrième terme d'une proportion n'apparaît jamais au cours de l'année ni chez Mathieu ni chez Clotilde. En particulier, dans le travail en lien avec le théorème de Thalès la propriété n'est pas explicitée. Un autre exemple concerne la somme de deux quotients, la règle d'addition des quotients est rappelée dans le premier chapitre, mais elle n'est jamais citée explicitement lorsqu'elle est mise en œuvre.

L'incomplétude est repérable également au niveau de l'ossature globale d'une séquence. J'ai montré comment l'explicitation du *théorème de l'isomorphisme* manquait dans la séquence de Clotilde sur la valeur absolue, ou encore comment Mathieu déduit la proportionnalité des mesures des angles et des arcs aux centres qui les interceptent, alors que cette proportionnalité était une donnée et non pas une conclusion. La cohérence épistémologique d'une séquence de cours s'avère être une question délicate et une difficulté pour le professeur. Ce constat rejoint le faible degré de complétude des organisations mathématiques locales dans l'enseignement secondaire en Espagne étudié par Bosch et al. (2004).

Un autre aspect de cette question d'incomplétude est la place extrêmement réduite donnée à la démonstration dans le domaine numérique. Un thème du numérique est d'ailleurs très peu travaillé, c'est l'arithmétique. Les deux professeurs intègrent cette partie du programme dans le premier chapitre, mais lui donnent très peu de place dans la progression annuelle. Pourtant ce thème, notamment, pourrait-être exploité pour poser des problèmes nécessitant des démonstrations. Ce constat peut être interprété comme une volonté peut-être inconsciente des professeurs de perpétuer au lycée le *contrat didactique institutionnel*[1], au sens de Chevallard (1992), qui prévaut selon eux au collège. Ainsi il ne faudrait pas trop de démonstrations ni d'énoncés trop formalisés pour ne pas effrayer les élèves (Rosalie avait cette crainte, Cf. p. 19) ou parce qu'ils n'en sont pas encore capables (c'est ce que pense Mathieu).

[1] Le contrat didactique institutionnel est l'ensemble des règles qui existent pour répartir les responsabilités entre les professeurs, les élèves, et les institutions.

10.2.3.4 *Quatrième hypothèse : un problème de la profession*

Je cite Chevallard (2006) au sujet du concept de « problème de la profession » :

> – L'attitude spontanée devant une difficulté surgissant lorsqu'on tente d'exercer le métier de professeur est d'y voir une difficulté personnelle, propre, et qui appelle une réponse propre.
>
> – Cette illusion est l'expression de l'inexistence et même du déni d'existence d'une profession dont la création n'en finit pas d'être différée.
>
> – Contre ce fait massif, le travail accompli porte à poser le postulat suivant : toute difficulté surgissant lorsqu'une personne tente d'exercer le métier de professeur doit être regardée comme exprimant d'une certaine manière un ou plusieurs problèmes de la profession – problèmes qui n'assaillent pas cette personne en particulier mais bien la profession de professeur (de mathématiques, etc.).
>
> – La formation initiale des professeurs doit travailler à identifier les problèmes de la profession et à y apporter des solutions toujours partielles et provisoires.
>
> – Ces solutions vont alors « percoler » dans la profession à travers les formés […].

La citation précédente est exprimée dans le contexte de la formation initiale, mais l'identification des difficultés des professeurs comme indicateurs de problèmes de la profession dépasse évidemment ce cadre. L'un des résultats de la thèse qui m'apparaît le plus significatif est ainsi le repérage de symptômes révélant un problème de la profession qui est sous-estimé : l'enseignement du numérique en seconde. Effectivement, une étude méticuleuse de données a permis l'identification de difficultés des professeurs ou des élèves relatives à la construction de l'espace numérique en seconde. Je vais reprendre l'exemple du thème « Nature et écriture des nombres ». Pour Mathieu et Clotilde l'essentiel de ce thème est de donner les noms des ensembles de nombres ainsi qu'une caractérisation de chacun des ensembles. Mais une reprise des connaissances du collège sur ce thème et une poursuite d'étude avec les nouveautés de la classe de seconde pourrait aboutir à une synthèse complète des écritures des nombres et au repérage des écritures canoniques en fonction de la nature des nombres comme je l'ai fait dans le Tableau 5 p. 68. La technologie liée à la détermination de l'écriture d'un nombre par rapport à sa nature et par rapport au problème posé peut engendrer cette organisation mathématique locale. Cette technologie est nécessaire pour déterminer le contrat de calcul le plus adéquat pour un problème donné. Ce problème rejoint la proposition de Bronner (1997) qui est de remplacer la problématique rationnel/irrationnel par la problématique décimal/idécimal. Le problème perçu par le chercheur des manques dans l'enseignement de ce thème est certainement complètement invisible pour le professeur.

Un deuxième symptôme du problème de l'enseignement du numérique, qui n'est certainement pas perçu par les professeurs, est la non reprise de connaissances antérieures de seconde alors qu'elles seraient pertinentes, voire nécessaires. C'est le cas pour l'apparition de la vitrine des nombres dans le domaine de la trigonométrie (Cf. Figure 109 p. 303). Les élèves respectent les consignes du professeur qui ne veut pas de nombres à virgule, et cette règle du contrat remplace des raisons d'être mathématiques.

Je signale un autre symptôme du problème de l'enseignement du numérique, et qui est général pour tous les domaines autres que ceux de la géométrie : c'est le déficit du travail de formulation écrite de la part des élèves. Deux éléments sont révélateurs de ce constat : l'absence presque totale du langage naturel dans les écrits des élèves en lien avec le numérique, et les difficultés des élèves que j'ai interrogés à l'oral ou à l'écrit pour expliciter un concept mathématique. J'ai décrit à propos de la valeur absolue un exemple de ces difficultés des élèves. Les recherches en didactique des mathématiques comme du français ont souligné le rôle du langage dans la construction des apprentissages. Ainsi les situations de formulation de Brousseau sont des phases nécessaires dans la TSD (1998b), ou encore le registre du langage naturel est essentiel pour Duval (1995) ; par ailleurs le concept de *secondarisation des genres* (Jaubert, M. et Rebière, M., 2005) modélise la façon dont l'évolution langagière va de pair avec le processus de conceptualisation. Mais dans les classes de Mathieu et de Clotilde le langage naturel n'a pas sa place en lien avec le numérique. Le rapport personnel des professeurs avec le travail dans le numérique transparait certainement dans ce constat. Le travail du numérique est le maniement des signes, et il est régi par des règles *ergonomiques*. Comment et pourquoi réhabiliter le langage naturel comme registre possible à côté des autres registres dans le domaine numérique ? C'est un autre aspect du problème de l'enseignement du numérique en classe de seconde qui est posé à la profession.

10.3 Conditions, contraintes et limites de ce type de travail

10.3.1.1 La place très particulière du chercheur

Je voudrais souligner que la place prise par le chercheur, observateur de la vie d'une classe, lui permet de repérer des éléments invisibles pour le professeur qui a un pluri-agenda très chargé. L'identification de nombreuses difficultés peut paraître sévère, mais elle n'est en rien une évaluation. Elle résulte d'un regard outillé par le cadre théorique et le protocole méthodologique, et d'une position à l'abri des phénomènes dynamiques de la classe. Par ailleurs ces difficultés ne sont pas personnelles comme le souligne Chevallard, mais elles parlent de toute une profession. Cependant il est important pour le chercheur de ne pas oublier qu'il est un élément perturbateur dans la classe, comme tout observateur qui modifie le milieu observé, c'est ce qu'exprime Mathieu dans cet autre extrait de l'entretien déjà cité :

> **Mathieu** : le fait que tu sois là tout le temps, comme quoi pas tout le temps, que tu sois là, ou que tu regardes, que tu participes… ça reste quand même perturbant. … Parce que bon elle m'a dit qu'elle me regardait fonctionner ok. Mais derrière ça t'as un avis… t'as une méthode, t'es prof donc tu…T'as aussi une pratique, et forcément elle vient en accord ou en désaccord avec ce que je fais…donc y a un jugement qui est porté…Et ça c'est, c'est gênant
>
> **Chercheur** : Et oui
>
> **Mathieu** : C'est gênant d'autant plus que tu me donnes pas ton avis… donc ça fait que moi je le porte, j'essaie de ne pas en tenir, de me dire que c'est pas grave ou j'en tiens pas compte ; mais il est là quand même.

Ce qui est explicité là par Mathieu montre l'extrême discrétion que doit respecter l'observateur dans ce choix méthodologique de non-échange avec le professeur.

10.3.1.2 Volume des données

Le recueil des données a été très ambitieux. Cependant la méthode du carottage a permis le repérage de thèmes travaillés à la fois par les deux professeurs et pour lesquels les données statiques et/ou dynamiques étaient nombreuses. Il reste des gisements à exploiter ! En particulier une dynamique n'a pas été explorée, c'est la dynamique numérico-fonctionnelle. Le cadre des fonctions est particulièrement important dans le programme de seconde et les occurrences du numérique y sont évidemment très nombreuses.

J'aurais souhaité développer davantage le recueil de données auprès des élèves grâce à des rencontres avec quelque élèves représentatifs de différents niveaux de la classe pour :

- réaliser des entretiens plus réguliers tout au long de l'année ;
- pour leur demander de répondre par écrit à des questions et de résoudre des problèmes avec un enregistrement vidéo de ces moments.

10.3.1.3 Analyse du nouveau programme

Cette thèse se termine au moment où un nouveau programme est mis en place. Que devient cette recherche dans ce contexte ? La synthèse sur les nombres et la valeur absolue ont disparu de ce programme qui se met en place en septembre 2009. Je pense à l'issue de ce travail que la synthèse sur les nombres notamment est nécessaire, elle est beaucoup plus difficile à faire qu'il n'y paraît de prime abord. Est-ce une raison pour la faire disparaître ?

10.4 Reprises possibles des résultats de cette recherche

10.4.1 Méthodologie

Dans l'entretien avec Mathieu du 26 mai 2007, voilà comment j'ai dévoilé les objectifs de la recherche et comment je lui ai expliqué ma méthode de travail :

> **Chercheur** : jusqu'à présent là y a deux objets que j'ai particulièrement bien travaillés surtout un c'est la valeur absolue… Parce que, alors ça ça faisait partie de la méthode aussi, parce qu'en venant comme ça par hasard, bah je suis tombée sur la valeur absolue j'aurai pu tomber sur autre chose hein**…** Je suis tombée là-dessus et alors ce qui a été intéressant dans le travail que j'ai fait là-dessus c'est que j'ai assisté un jour où les élèves ont demandé de réviser pour le devoir
>
> **Mathieu** : Oui
>
> **Chercheur** : Donc j'ai, je suis tombée là-dessus après quand dans un des interviews là tu m'en as parlé … bon donc tu m'as parlé des techniques géométriques avec la droite graduée … pourquoi tu faisais ça… Quand j'ai interviewé les élèves là, Anissa et les deux autres, ils m'en ont parlé aussi… donc j'ai pu voir ton enseignement, les raisons pour lesquelles tu faisais certains choix et les impacts sur les élèves **[…]** voilà alors ça c'était, et c'est assez exemplaire du travail que je fais parce que j'ai pu croiser ce que j'ai vu avec ce que tu as dit, avec ce qu'on dit les élèves **e**t avec les cahiers des élèves
>
> **Mathieu** : Hum
>
> **Chercheur** : du coup j'ai cherché dans les cahiers que je photocopie là toutes les tâches que tu as données sur valeur absolue, pour voir le type de travail qui était demandé... y avait le devoir

> commun aussi donc j'ai photocopié des choses et un devoir, donc j'ai des photocopies d'élèves, donc là j'ai tout un croisement d'informations sur valeur absolue et qui parlent de valeur absolue mais qui parlent aussi plus généralement de ce que j'appelle tes gestes professionnels.

La méthodologie suivie est caractérisée par l'étude croisée des gestes professionnels des enseignants et des apprentissages des élèves tout au long d'une année scolaire et sans aucune intervention auprès des professeurs. C'est un réseau d'analyses et d'interprétations qui a été développé pour permettre de s'approcher au plus près du curriculum réel. Ce réseau est vu comme un système qui rend compte des effets de l'enseignement sur les apprentissages.

Cette méthodologie a été basée sur les principes suivants :

- éviter au maximum d'influencer les choix de l'enseignant ;
- recueillir des données dynamiques (ou à défaut statiques) ;
- faire l'analyse *a priori* à partir de ces données ;
- faire l'analyse *a posteriori* de la réalisation effective à partir des données ;
- analyser toutes les productions des élèves en lien avec les données ;
- croiser les analyses avec les entretiens avec le professeur ou avec les élèves.

Ce cadre méthodologique s'est avéré pertinent et il représente un résultat important de cette recherche. Il pourra être repris dans d'autres travaux de recherche qui visent à restituer, au plus près de la réalité, l'enseignement des mathématiques.

Dans les principes méthodologiques, il faut préciser qu'il est nécessaire de recueillir plusieurs cahiers d'élèves car ils ne restituent pas fidèlement les écrits du cours ou des corrections. De plus ces cahiers permettent l'accès à des conceptions individuelles qui montrent parfois les écarts considérables entre le travail collectif apparent réalisé en classe, tel que j'ai pu l'observer, et le travail effectif d'un élève particulier.

10.4.2 Nouvelle visée de recherche

En fin d'année scolaire, le 5 juin 2007, j'ai eu un dernier entretien avec Mathieu pour lui faire part des entretiens avec les élèves, et des difficultés des élèves par rapport à la question « qu'est-ce que c'est que la valeur absolue ? » Je rappelle que j'avais demandé au préalable aux élèves s'ils étaient d'accord pour cette communication à leur professeur. En effet je leur avais dit que je ne communiquerai rien de ce qu'ils me confiaient à leur professeur, sauf dans le cas où ils me l'autoriseraient. J'ai montré également à Mathieu l'importance quantitative des types de tâches algébriques dans la séquence sur la valeur absolue. Il a été étonné et intéressé par ce retour, il a souhaité échanger davantage avec moi. Ce type d'intervention auprès d'un professeur dans une recherche-action m'intéresse. Les problèmes de la profession qui ont été identifiés pourraient être des sujets d'échange entre professeur et chercheur selon une méthodologie à construire. Une « reprise » de la coopération avec Mathieu et Clotilde est même envisageable. Je donne un dernier extrait de l'entretien avec Mathieu du 26 mai 2007 qui montre son intérêt pour ce projet :

> **Chercheur** : tu as des questions.
>
> **Mathieu** : Non, non non. Je reste un peu sur ma faim en fait parce que…
>
> **Chercheur** : Ouais
>
> **Mathieu** : Bon ça, ça me donne envie de faire des choses, ça me donne envie d'en parler, ça me donne envie d'aller, d'approfondir mais bon…ça va s'arrêter là
>
> **Chercheur** : Oui et oui il aurait fallu le faire à chaud quoi
>
> **Mathieu** : Ouais à chaud ou revenir dessus et réfléchir
>
> **Chercheur** : Revenir dessus mais pas trois mois après
>
> **Mathieu** : Ouais, voilà ouais… ce qui est dommage, c'est, le lien IUFM enseignant, bon vous formez les nouveaux profs mais…
>
> **Chercheur** : Oui oui
>
> **Mathieu** : Voilà quoi les anciens les former c'est bon débrouillez vous

Voilà un autre résultat de la recherche, la seule présence régulière du chercheur, le fait qu'il ait accès à tous les écrits produits dans la classe, a modifié le rapport personnel de Mathieu à son enseignement. C'est un professeur expérimenté qui est depuis plus de 10 ans enseignant de lycée et qui n'a rien à prouver dans son lycée où des classes de terminale S lui sont confiées. Mais mon seul regard l'a poussé à se poser des questions et à formuler des besoins de formation. Peut-être que Mathieu a également fait part implicitement de la solitude du professeur qui ferme la porte derrière lui dès qu'il est avec ses élèves.

10.4.3 Utilisation des résultats de la recherche

10.4.3.1 La question de la formation des professeurs

Les études réalisées tout au long de cette recherche ont été en partie réinvesties en formation initiale et continue des professeurs de mathématiques. Comme les données analysées avec les stagiaires proviennent de classes « ordinaires » de seconde, les situations d'enseignement du numérique et de ses reprises sont des exemples de pratiques qui ne semblent pas inaccessibles comme les ingénieries conçues par des chercheurs. Cette proximité est utilisée pour faciliter une posture réflexive chez les stagiaires. Les analyses *a priori* et *a posteriori* développées à partir de ces situations constituent une très grande richesse pour alimenter ces formations. Mais un problème de la profession de formateurs est toujours une question vive : quelle sont les situations de formation qui permettent aux professeurs de reconnaître leur ignorance ? Mercier (1996) parle des élèves dans la citation suivante :

> Comment peut-on avoir besoin de chercher ce que l'on croit déjà connaître? Par le fait qu'une institution parvient à nous persuader qu'on ne le connaît que très mal en nous faisant rencontrer notre ignorance et en nous offrant de la combler. (p. 360)

Je détourne cette citation pour l'appliquer aux professeurs. L'institution de formation des professeurs, qu'elle soit initiale ou continue, doit relever ce défi. Un laboratoire comme le LIRDEF de l'IUFM de Montpellier (université Montpellier 2) se consacre en grande partie à ce problème de formation.

Pour l'enseignement du numérique en seconde, un problème particulier se pose, c'est l'assurance des professeurs concernant leurs compétences pour enseigner ce domaine. Pourtant des obstacles sont méconnus (je donne comme exemple la conception des nombres négatifs), l'inventaire des types de tâches en lien avec une notion est pauvre (les types de tâches en lien avec la valeur absolue par exemple consistent surtout à supprimer les « deux barres »), les raisons d'être de certains points du programme sont ignorées (pourquoi apprendre par cœur les lignes trigonométriques de certains angles ?). La question relative à la formation des professeurs peut encore se formuler ainsi : comment placer les professeurs dans une situation qui les amène à prendre conscience de ce qu'ils ont besoin de savoir et qu'ils ne savent pas, et pour qu'ils différencient savoir de référence et savoir à enseigner ?

10.4.3.2 Quelles connaissances pour le professeur ?

J'énumère des connaissances que les professeurs devraient pouvoir mettre en œuvre pour ne pas passer à côté des rencontres possibles concernant le numérique. J'identifie des connaissances épistémologiques spécifiques des mathématiques enseignées, ce que Yves Chevallard appelle épistémologie scolaire (Chevallard, 2004). Je peux formuler cela également en disant que ce sont des connaissances liées à la prise de conscience du processus de transposition didactique entre le savoir de référence et le savoir à enseigner.

Voici quelques exemples de ces connaissances du professeur :

- La prise de conscience des cadres implicites travaillés à travers les différents points de vue d'une notion. Pour les thèmes de la valeur absolue et du cosinus, j'ai montré comment le flou du professeur sur les changements de cadres ne permet pas aux élèves de dépasser les obstacles inhérents aux notions étudiées. Cette identification entraîne alors une question plus didactique : comment faire prendre conscience aux élèves des changements de cadre, autrement dit à travers quelles situations ? Les professeurs devraient connaître des exemples de ces situations.

- Les raisons d'être mathématiques de certaines exigences ou traditions. Par exemple pourquoi s'intéresser à des valeurs particulières d'angles, pourquoi celles là, pourquoi pas 10° ou 100° ? Pourquoi vouloir des valeurs exactes pour exprimer leurs lignes trigonométriques ? Quels sont les problèmes qui nécessitent ces apprentissages ? Ces raisons sont souvent perdues, elles doivent être recherchées pour motiver la nécessité de certains savoirs.

- La compréhension de l'organisation globale des programmes du collège au lycée. Je repère également une difficulté pour le professeur au niveau de la discipline. Elle consiste à percevoir le programme comme un ensemble cohérent en lien avec les programmes des autres classes, au moins celle qui précède et celle qui suit. La vision d'ensemble devrait permettre de mieux anticiper les reprises des connaissances antérieures pour les consolider et permettre les apprentissages sur le long terme. Je donne l'exemple de la synthèse sur les nombres qui supposerait une véritable reprise des différents types de nombres rencontrés au collège en lien avec des situations qui les produisent, avant de définir les ensembles de nombres et de donner leur nom.

- **Des connaissances sur les processus de conceptualisation des notions enseignées.** Les professeurs devraient savoir anticiper les conceptions des élèves qui vont se développer en lien avec les organisations mathématiques choisies. Nous avons vu par exemple comment le concept de valeur absolue n'est pas construit chez les élèves qui n'ont retenu que des bribes de praxéologies mises en place. Cela suppose que les professeurs connaissent également l'existence d'obstacles épistémologiques et didactiques qui ont été repérés dans les recherches. Un exemple concerne la valeur absolue, l'appropriation de ce concept par les élèves nécessite de dépasser au moins 4 obstacles (Brousseau, 1983; Duroux, 1983). Si les professeurs repèrent bien la difficulté d'apprentissage de la notion, ils n'ont en général pas pris conscience de la nature des difficultés. Mais comment pourraient-ils acquérir ces connaissances produites par les recherches en didactique, sans une formation initiale et continue plus conséquentes ? J'identifie encore des conditions au niveau de la société.

10.4.3.3 Une proposition pour les prochains programmes de seconde

Si les connaissances précédentes étaient davantage partagées dans la profession et en particulier par les auteurs de programmes, peut-être que la synthèse sur les nombres n'aurait pas disparu des nouveaux programmes de seconde mis en œuvre à la rentrée 2009. De même le thème de « la représentation des nombres sur une calculatrice » présent dans les programmes de 2000 aurait été conservé dans le programme de 2009.

À l'appui de ce souhait je laisse la parole à Alain Bronner (1998) pour conclure sur une proposition pour le curriculum du collège au lycée :

> Dans le cadre d'un travail sur le développement des différentes pratiques de calcul, et notamment celles intégrant les calculatrices, les remarques précédentes [développées dans l'article] suggèrent l'hypothèse suivante : la reprise du rapport au nombre des élèves dès la fin du collège. Ce travail pourrait porter sur la nature des nombres, les nombres décimaux, les problèmes d'écritures des nombres, et l'écriture dans la numération décimale de position. Cette reprise devrait s'appuyer sur des connaissances arithmétiques dans un processus continué jusqu'à la terminale. L'enjeu est de donner aux élèves les connaissances nécessaires permettant de s'approprier les différentes pratiques de calcul et de les différencier.

Bibliographie

Arsac G., Germain G. & Mante M. (1988). *Problème ouvert et situation-problème.* IREM de Lyon : PUL.

Arsac, G., Chapiron, G., Colonna, A., Germain, G., Guichard, Y. & Mante M. (1992). *Initiation au raisonnement déductif au collège*, IREM de Lyon : PUL

Artaud M. & Menotti G., (2008). *Enseigner les fonctions en seconde. Fabriquer et faire vivre une organisation mathématique régionale*, Actes du XV^{e} colloque CORFEM, IUFM de l'académie de Versailles, site d'Antony-Val-de-Bièvre, pages 147-162

Assude, T. & Mercier, A. (2007). L'action conjointe professeur-élèves dans un système didactique orienté vers les mathématiques. *In G. Sensevy & A. Mercier (Éds), Agir ensemble* (pp. 153-185). Rennes : Presses universitaires de Rennes.

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*, p 14-19, Vrin, 1938

Balacheff, N., (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics 18*, pp. 147-176.

Bellard N. & al. (1998). *Le codage, quand, comment, pourquoi ?* IREM de Montpellier

Bellard N. & al. (2005). *La règle dans tous ses états*, IREM de Montpellier et APMEP, Brochure APMEP n° 165

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l'activité mathématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(1), 77-124.

Bosch, M., Fonseca, C. & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 24*(2-3), 205-250.

Bronner, A. (1997). *Etude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée*. Thèse de doctorat non publiée, Université J. Fourier de Grenoble.

Bronner, A. (1999). Pratiques de calcul : des Egyptiens à la TI 92. *Actes de colloque Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques.* IREM de Montpellier.

Bronner A. (2001). Les nombres réels dans la transition collège-lycée : rapports institutionnels et milieux pour l'apprentissage. *Actes du séminaire national de didactique, IREM de Paris 7*

Bronner, A. (2007). *La question du numérique : le numérique en question ?* Habilitation à diriger des recherches, Université Montpellier 2

Bronner, A. & Larguier, M. (2004). Analyse didactique de la séance « carte de géographie », *in La réflexivité des langages, instruments de travail du professeur et des élèves, symposium coordonné par D. Bucheton, Colloque international de l'AIRDF,* Québec

Bronner A., Broussal D., Bucheton D., Jorro A. & Larguier M. (2005). Les pratiques langagières des enseignants : des savoirs professionnels inédits en formation, *Publication INRP, revue Repères n°30*

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 4(2),* 165-198.

Brousseau G. (1998a). La théorie des situations didactiques, *Cours donné lors de l'attribution du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal* http://pagesperso-orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/TDS_Montreal.pdf

Brousseau G. (1998b). *Théorie des situations didactiques,* Grenoble : La pensée sauvage.

Brousseau, G. (2002). Commentaires sur les résultats d'une leçon, *séminaire IUFM de Montpellier*

Brousseau, G. & Centeno, J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques, Vol 11, n°23*

Bucheton, D. (2009). Le modèle de « l'agir enseignant et ses ajustements », in Bucheton & al. (Éds.), *L'agir enseignant : des gestes professionnels ajustés*. Sous la direction de Bucheton (pp. 25-68). Toulouse : Octarès.

Cauty, A. (1995). Regards échangés avec les naturels de Colombie. *Actes de la première université d'été européenne, Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique, 1993,* 535-548, IREM de Montpellier.

Chevallard, Y., (1984). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie : l'évolution de la transposition didactique. *Petit x. n° 5,* 51-94.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique – Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée sauvage. Deuxième édition augmentée : 1991.

Chevallard, Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12(1)* pp. 73-112

Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. *Actes de l'université d'été, 1998,* 91-118, IREM de Clermont-Ferrand

Chevallard, Y. (1999a). Organiser l'étude. Cours 3. Écologie & régulation, *Actes de la Xème École de didactique des mathématiques, Corps, La Pensée Sauvage.*

Chevallard, Y. (1999b). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-265.

Chevallard. Y, (2000). Enseignement insensé, enseignement raisonné et créativité sociale. Actes du colloque *Mathématiques sans frontières, Marseille,* pp. 39-51. *http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/YC_2000_-_Maths_sans_frontieres.pdf*

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & Ruhal Floris (Éds), *Actes de la 11e École d'été de didactique des mathématiques* (pp. 3-22, 41-56). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2004). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire*, actes de la 3e université d'été Animath, Saint-Flour, adresse Internet* www.animath.fr

Chevallard, Y. (2005). Didactique et formation des enseignants. B. David (Éd.). Impulsions 4, 215-231. Lyon : INRP.

Chevallard, Y. (2006). Journées scientifiques sur la formation des enseignants du secondaire. *Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation – Section des sciences de l'éducation 17 mai 2006* *http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Former_des_professeurs_construire_la_profession.pdf*

Chevallard, Y, (2008a). *Journal du séminaire TAD/IDD. Théorie anthropologique du didactique & ingénierie didactique du développement.* http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/data/fdf/2008-2009/journal-tad-idd-2008-2009-8.pdf

Chevallard. Y. (2008b). Qu'est-ce qu'une formation professionnelle universitaire non indigne ? *Former des maîtres, 570*, 10-12.

Chevallard, Y. & Cirade, G. (2006). Organisation et techniques de formation des enseignants de mathématiques, *actes des journées CORFEM de Toulouse*

Cirade, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel* (Thèse de doctorat, Université de Provence, 2006).

Clot, Y., Faïta, D., Fernandez, G. & Scheller L. (2000). Entretiens en autoconfrontation croisée: une méthode en clinique de l'activité, *Pistes, volume 2 n°1*

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et Dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques, Vol, 7/2,* 5-31.

Douady, R. (1994). Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. *Repères IREM, n°15,* 37-61.

Drouhard, J.P., Sackur, C., Maurel, M. & Pécal, M. (1997). Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire ?, *Repères n°28 p. 37-68* http://irh.unice.fr/IMG/pdf/Reperes_no28-2.pdf

Duroux, A. (1983). *La valeur absolue. Difficultés majeures pour une notion mineure*. Petit x, 3, 43-67.

Duval, R. & Egret, M-A. (1993). Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif. Repères. n° 12. pp. 114-140

Duval, R. (1993). Registres de Représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives, IREM de Strasbourg*

Duval, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine.* Paris : Peter Lang.

Frege, G. (1892). *Sens et dénotation,* in *Écrits logiques et philosophiques*, trad., Seuil, 1971, pp. 102-126.

Gagatsis, A. & Thomaidis, I. (1993). Mathématiques passé,...futur... Le concept de valeur absolue, une étude multidimensionnelle. *PLOT. n° 67.* 12-16.

Grugeon, B. (1995). *Étude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et première G.* Thèse de doctorat, université Paris 7.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*11.175-195.

Jorro, A. (2002). Professionnaliser le métier d'enseignant, *ESF éditeur, collection pratiques & enjeux pédagogiques*

Larguier, M. (1998). Les curricula, problématique générale en mathématiques, le cas du collège, *Actes de la coopération IREM/IREMPT,1999 à 2001, IREM de Montpellier.*

Larguier, M. (2005). *Les reprises des domaines numérique et algébrique en classe de seconde.* Mémoire de Master de recherche 2, Université Montpellier 2.

Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*, ed. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Margolinas, C. (2004). *Points de vue de l'élève et du professeur. Essai de développement de la théorie des situations didactiques.* Habilitation à diriger des recherches, université de Provence.

Matheron, Y. (2000). *Une étude didactique de la mémoire dans l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée, quelques exemples*. Thèse de doctorat, université Aix-Marseille I, université de Provence

Mercier, A. (1996) La création d'ignorance, condition de l'apprentissage. *Revue des sciences de l'éducation, Volume 22, Number 2,* 345-363 URI: http://id.erudit.org/iderudit/031884ar

Mercier, A. (1999). *Sur l'espace-temps didactique. Etudes du didactique*. Habilitation à diriger des recherches, université de Provence

Ministère de l'Éducation nationale, (1999). Enseigner au collège, Mathématiques, *Programmes et accompagnement.* Paris : CNDP.

Ministère de l'Éducation nationale, (2000). *Documents d'accompagnement des programmes. Mathématiques. Classe de seconde*. Paris : CNDP. http://www.cndp.fr/archivage/valid/14963/14963-8208-9261.pdf

Ministère de l'Éducation nationale, (2001). Programme de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique. *BOEN, HS2*. Paris : CNDP. ftp://trf.education.gouv.fr/pub/edutel/bo/2001/hs2/mathematiques.pdf

Perrin-Glorian, M.-J. (1992). *Aires et surfaces planes et nombres décimaux.* Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6e. Thèse de doctorat d'État, université de Paris-VII.

Robert, A. (2000). Recherches sur les pratiques des enseignants de mathématiques du secondaire : imbrication du point de vue de l'apprentissage des élèves et du point de vue de l'exercice du métier d'enseignant. A*ctes du séminaire national de didactique des mathématiques, Paris, ARDM.*

Roditi, E. (2005). *Les pratiques enseignantes en mathématiques*, L'Harmattan

Sensevy, G. (2007). Des catégories pour décrire et comprendre l'action didactique. In G. Sensevy & A. Mercier (Éds), Agir ensemble (pp. 13-49). Rennes : Presses universitaires de Rennes.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(2-3), 133-170

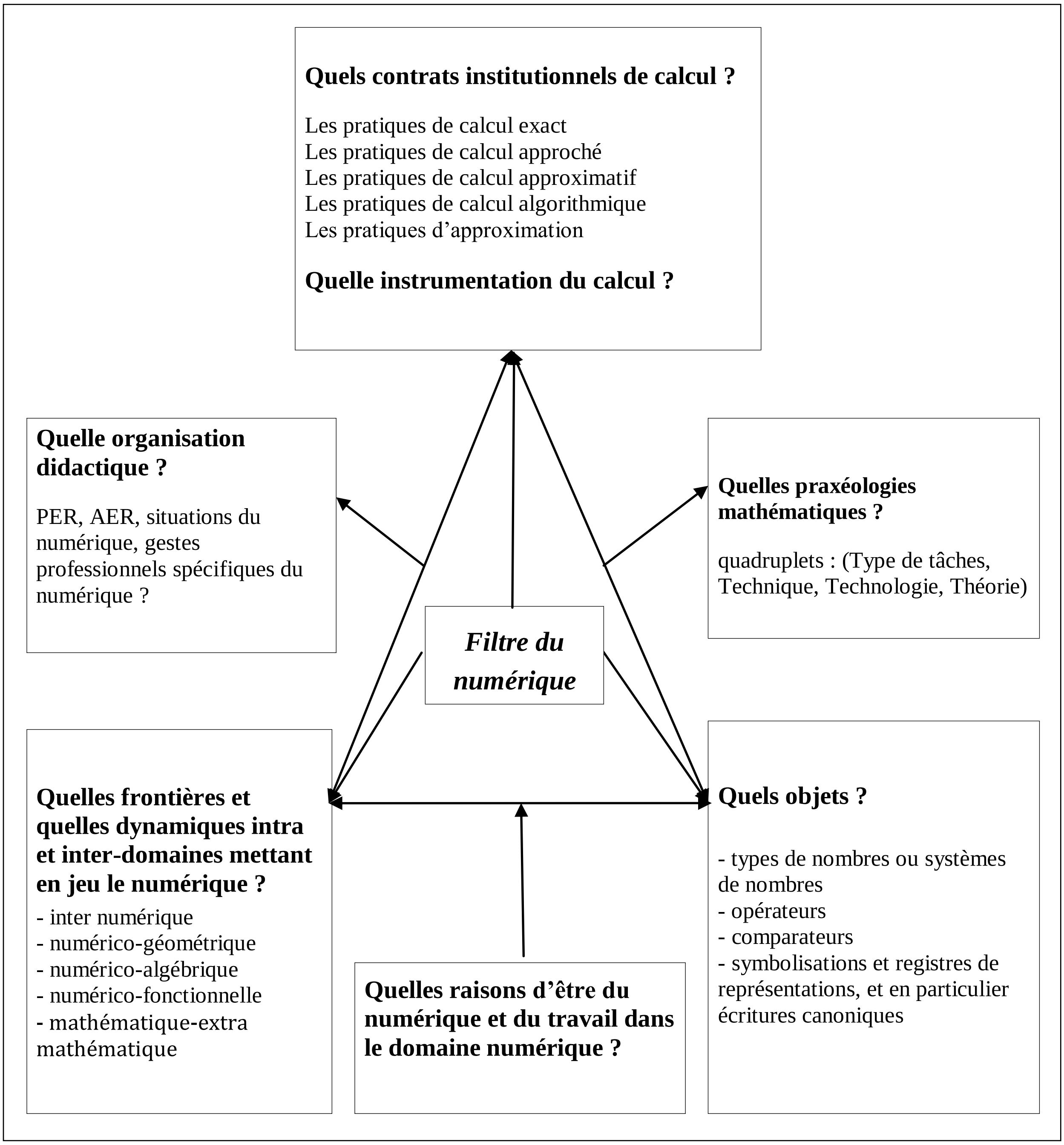
Vergnaud, G. (1994). Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel, *in vingt ans de didactique des mathématiques, Grenoble : la pensée sauvage.*

Vermersch, P. (1994). *L'entretien d'explicitation.* Paris : ESF.

Table des matières

11 Annexes

11.1 *Filtre du numérique* en 3D



11.2 Niveaux de codétermination didactique

Chevallard (2008)[1] définit par le schéma ci-dessous ce qu'il appelle « l'échelle des niveaux de codétermination didactique ».

…

↓

Société

↓

École

↓

Pédagogie

↓

Discipline

↑↓

Domaine → Secteur → Thème → Sujet

[1] Extrait de l'enseignement donné en licence de sciences de l'éducation en 2008-2009 à l'université de Provence par Yves Chevallard.
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=136

11.3 Demande adressée aux professeurs

Mirène Larguier
IUFM de Montpellier
Tél : 06 84 09 10 04
mail : mirene.larguier@montpellier.iufm.fr

Le 8 septembre 2006

Je m'adresse à vous en tant que professeur enseignant en classe de seconde. Je vous prie de bien vouloir prendre le temps de réfléchir à une proposition que je désire vous faire.

Je suis professeur de mathématiques mais c'est dans le cadre d'un travail de recherche au niveau d'une thèse en didactique des mathématiques que je vous contacte. Je m'intéresse à l'enseignement des mathématiques en classe de seconde et je voudrais pouvoir suivre aussi bien l'enseignement par le professeur, que les apprentissages du côté des élèves.

Si vous désirez répondre favorablement à ma demande ou si vous désirez des renseignements supplémentaires, je vous propose de me contacter par mail ou par téléphone.

Dans le cas où vous accepteriez ma demande, nous pourrons déterminer ensemble des modalités de rencontres qui pourraient prendre des formes diverses en accord avec vous (entretien, visite dans des séances de seconde enregistrées au magnétophone ou en vidéo, interview des élèves…).

Je vous prie de bien vouloir diffuser cette proposition auprès d'autres collègues enseignant en seconde de détermination.

Merci par avance pour l'attention portée à ce message.

Mirène Larguier.

11.4 Autorisation concernant les élèves

AUTORISATION DE PRISE DE VUE ACCORDÉE POUR UN MINEUR

Je soussigné(e) .... (père, mère, représentant légal)

domicilié(e)..

tél : .... AUTORISE ……………………………………..

A EFFECTUER DES PRISES DE VUES ET DE SON DE MON FILS / MA FILLE

(nom, prénom) ……………………………………………………………………………….

né(e) le ....……dans le cadre d'une recherche en éducation

A DIFFUSER TOUT OU PARTIE DES ENREGISTREMENTS VIDÉO ET SONORES RÉALISÉS ainsi que le film, vidéogramme, ou produit multimédia qui en seraient issus, dans le cadre de la formation des enseignants, ou dans le cadre de la recherche.

Fait à …………………………………… Le ………………………………………….

signature (précédée de la mention manuscrite "Lu et approuvé").

11.5 Programme des écoles normales en 1866

Tableau de la répartition des matières d'enseignement
(Tableau annexé à la circulaire du 2 juillet 1866.)

N° d'ordre	Matières	Première année	Leçons par semaine	Deuxième année	Leçons par semaine	Troisième année	Leçons par semaine
1	*Instruction religieuse*	Instruction religieuse	2	Instruction religieuse	2	Instruction religieuse	2
2	*Pédagogie*					Exposé des meilleurs procédés - Education physique, intellectuelle et morale - Organisation des écoles	1
3	*Ecriture*	Cursive	3	Cursive - Ronde - Bâtarde	2	Cursive - Ronde - Bâtarde - Gothique	2
4	*Lecture* *Récitation*	Français - Manuscrit - Latin Textes choisis	5	Français - Manuscrit - Latin Textes choisis	4	Français - Manuscrit - Latin Textes choisis	3
5	*Langue française*	Dictées - Analyses Exercices de style et de composition	5	Dictées - Analyses Exercices de style et de composition	5	Dictées - Exercices de style et de composition Notions historiques sur nos grandes écrivains et leurs œuvres principales	3
6	*Calcul : système légal des poids et mesure* *Arithmétique appliquée aux opérations pratiques* *Tenue des livres*	Nombres entiers - Fractions Système métrique	5	Révision du système métrique et des fractions Applications aux questions d'intérêt, d'escompte, d'annuité, de banque, de société de crédit, de change, etc.	4	Révision et compléments du cours d'arithmétique appliquée Tenue des livres	3
7	*Eléments de géométrie* *Arpentage et nivellement*	Géométrie plane	1	Suite et fin de la géométrie plane Arpentage et nivellement	1	Révision et fin du cours - Applications de la géométrie dans l'espace	2
8	*Dessin linéaire* *Dessin d'ornement et d'imitation*	Dessin à main levée - Ornement	2	Dessin graphique - Etude des projections - Dessin d'ornement et d'imitation	2	Applications diverses du dessin graphique - Perspective - Ombres. Lavis - Suite du dessin d'ornement et d'imitation	2
9	*Eléments d'histoire et de géographie*	Notions très sommaires d'histoire ancienne - Histoire de France jusqu'à la fin du X^{e} siècle (avènement des Capétiens) Descriptions générale des cinq parties du monde	3	Histoire de France (de la fin du X^{e} siècle à la Révolution française, 1789) Géographie particulière de l'Europe	3	Histoire de France (depuis la Révolution française jusqu'à nos jours) Géographie de la France et surtout du département	3
10	*Chant et orgue*		3		3		3
11	*Notions de physique, de chimie et d'histoire naturelle applicable aux usages de la vie*	Zoologie (1er semestre) et botanique (2^{e} semestre)	2	Physique Chimie (métalloïdes)	2 1	Physique Chimie (métaux) - Chimie organique	1 2
12	*Agriculture et horticulture* *Instructions élémentaires sur l'industrie*	Culture générale	2	Horticulture	3	Révision des cours de première et de seconde année Instructions élémentaires sur l'industrie	1 2
13	*Hygiène*					Hygiène	1
14	*Actes de l'état civil et administration communale*					Actes de l'état civil et administration communale	1
15	*Gymnastique*						
		Total des leçons par semaine	33		32		32

Tous les devoirs qui exigent la remise d'une copie ou la présentation d'un cahier doivent être considérés comme étant en même temps des exercices de *calligraphie* et d'*orthographe*.

11.6 Programme de seconde du secteur « Calcul et fonctions »

Objectifs

– Approfondir la connaissance des différents types de nombres.
– Expliciter, sous différents aspects (graphique, calcul, étude qualitative), la notion de fonction.
– Étudier quelques fonctions de référence préparant à l'analyse.
– Progresser dans la maîtrise du calcul algébrique, sans recherche de technicité, toujours dans la perspective de résolution de problèmes ou de démonstration.
– Utiliser de façon raisonnée et efficace la calculatrice pour les calculs et pour les graphiques.

La plupart de ces objectifs concernent les trois années de lycée.

Le calcul numérique et le calcul algébrique ne doivent pas constituer un chapitre de révision systématique, mais se retrouvent au travers des différents chapitres. En particulier, ils seront traités en relation étroite avec l'étude des fonctions. Comme la géométrie, les activités de calcul doivent être l'occasion de développer le raisonnement et l'activité de démonstration.

Lors de la résolution de problèmes, on dégagera, pour certains exemples étudiés, les différentes phases du traitement : mathématisation et mise en équation, résolution, contrôle de la cohérence des résultats et exploitation.

On exploitera les possibilités offertes par les tableurs, par les grapheurs et par les logiciels de géométrie.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Nature et écriture des nombres. Notations N, Z, D, Q, R. Représentation des nombres dans une calculatrice. Nombres premiers.	Distinguer un nombre d'une de ses valeurs approchées. Interpréter un résultat donné par une calculatrice. Organiser un calcul à la main ou à la machine. Décomposer un entier en produit de nombres premiers.	On admettra que l'ensemble des réels est l'ensemble des abscisses des points d'une droite. On travaillera sur les ordres de grandeur. On donnera un ou deux exemples de limites d'utilisation d'une calculatrice. On fera quelques manipulations de nombres en écriture scientifique. On se limitera à des exemples (du type 56 x 67) pour lesquels la connaissance des tables de multiplication suffit.
Ordre des nombres. Valeur absolue d'un nombre.	Choisir un critère adapté pour comparer des nombres. Comparer a, a^2 et a^3 lorsque a est positif. Caractériser les éléments d'un intervalle et le représenter.	La valeur absolue d'un nombre permet de parler facilement de la distance entre deux nombres.
Fonctions.	Identifier la variable et son ensemble de définition pour une fonction définie par une courbe, un tableau de données ou une formule. Déterminer, dans chacun des cas, l'image d'un nombre.	On étudiera des situations issues, entre autres, de la géométrie, de la physique, de l'actualité ou de problèmes historiques. On réfléchira sur les expressions *être fonction de* et *dépendre de* dans le langage courant et en mathématiques. On donnera des exemples de dépendance non fonctionnelle (poids et taille, note au bac et moyenne de l'année). Les fonctions abordées ici sont généralement des « fonctions numériques d'une variable réelle » pour lesquelles l'ensemble de définition est donné. On pourra voir quelques exemples de fonctions définies sur un ensemble fini ou même de fonctions à deux variables (aire en fonction des dimensions). L'utilisation de calculatrice ou d'ordinateur amènera à considérer une fonction comme un dispositif capable de produire une valeur numérique quand on introduit un nombre (c'est-à-dire comme une « boîte noire »). Les notations $f(x)$ et f, déjà introduites au collège, seront systématiquement utilisées. Il importe d'être progressif dans l'utilisation de ces écritures : le passage du nombre $f(x)$ à l'objet mathématique « fonction » noté f est difficile et demande un temps de maturation individuelle qui peut dépasser la classe de seconde.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Étude qualitative de fonctions. Fonction croissante, fonction décroissante ; maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.	Décrire, avec un vocabulaire adapté ou un tableau de variations, le comportement d'une fonction définie par une courbe. Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variation.	S'il s'agit des courbes, on distinguera celles pour lesquelles, par convention, l'information sur les variations est exhaustive, de celles obtenues sur un écran graphique. La perception sur un graphique de symétries ou de périodicité pourra conduire à une formulation analytique de ces propriétés. On soulignera le fait qu'une fonction croissante conserve l'ordre, tandis qu'une fonction décroissante renverse l'ordre ; une définition formelle est ici attendue.
Premières fonctions de référence. Fonctions linéaires et fonctions affines.	Établir le sens de variation et représenter graphiquement les fonctions $x \to x^2, x \to \frac{1}{x}$. Connaître la représentation graphique de $x \to \sin x$ et de $x \to \cos x$. Caractériser les fonctions affines par le fait que l'accroissement de la fonction est proportionnel à l'accroissement de la variable.	D'autres fonctions telles que : $x \to \sqrt{x}, x \to x^3, x \to \|x\|$, etc., pourront être découvertes à l'occasion de problèmes. Les résultats les coneernant pourront être admis. Les positions relatives des diverses courbes ainsi découvertes seront observées et admises. La définition de *sin x* et *cos x* pour un réel x quelconque se fera en « enroulant $\mathbb{R}$ » sur le cercle trigonométrique. On fera le lien avec les sinus et cosinus de 30°, 45° et 60°. Exemples de non-linéairité. En particulier, on fera remarquer que les fonctions carré, inverse, etc., ne sont pas linéaires.
Fonctions et formules algébriques.	Reconnaître la forme d'une expression algébrique (somme, produit, carré, différence de deux carrés). Identifier l'enchaînement des fonctions conduisant de x à $f(x)$ quand f est donnée par une formule. Reconnaître différentes écritures d'une même expression et choisir la forme la plus adaptée au travail demandé (forme réduite, factorisée, etc.). Modifier une expression ; la développer ; la réduire selon l'objectif poursuivi.	Les activités de calcul doivent être l'occasion de raisonner et de démontrer. On évitera une activité trop mécanique et on s'efforcera de développer, avec des expressions littérales faisant intervenir une seule lettre, deux plus rarement, des stratégies s'appuyant sur l'observation, l'anticipation et l'intelligence du calcul. On multipliera les approches et on explicitera quelques procédures simples permettant d'infirmer ou de confirmer une formule. À l'occasion de certains travaux sur tableur, on distinguera la recherche et l'observation d'une loi empirique de la démonstration d'une formule. Des activités liées aux fonctions, aux équations ou aux inéquations mettront en valeur l'information donnée par la forme d'une expression et motiveront la recherche d'une écriture adaptée.
Mise en équation ; résolution algébrique, résolution graphique d'équations et inéquations.	Résoudre une équation ou une inéquation se ramenant au premier degré. Utiliser un tableau de signes pour résoudre une inéquation ou déterminer le signe d'une fonction. Résoudre graphiquement des équations ou inéquations du type : $f(x)=k$; $f(x) < k$; $f(x)=g(x)$; $f(x)<g(x)$; etc.	Pour un même problème, on combinera les apports des modes de résolution graphique et algébrique. On précisera les avantages et les limites de ces différents modes de résolution. On pourra utiliser les graphiques des fonctions de référence et leurs positions relatives. On ne s'interdira pas de donner un ou deux exemples de problèmes conduisant à une équation qu'on ne sait pas résoudre algébriquement et dont on cherchera des solutions approchées.

11.7 Le manuel Bréal

Activités

Vu au collège

1) Écrire les diviseurs de 119 et de 221. En déduire le PGCD de ces deux nombres.

2) Donner une autre méthode pour calculer le PGCD de 119 et de 221.

3) Les fractions $\frac{126}{55}$ et $\frac{693}{105}$ sont-elles irréductibles ? Sinon les simplifier.

1 Générer les entiers naturels

Les nombres considérés dans cette activité sont des entiers naturels différents de 1.

$40 = 8 \times 5$: on dit que 40 est généré par multiplication avec les entiers 8 et 5.

On a aussi : $40 = 2 \times 4 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$; donc 40 est généré par multiplication avec les entiers 2, 4 et 5, mais 2 et 5 suffisent.

1) Dresser la liste des entiers naturels différents de 1 qui **suffisent** à générer par multiplication tous les entiers de 2 à 50.

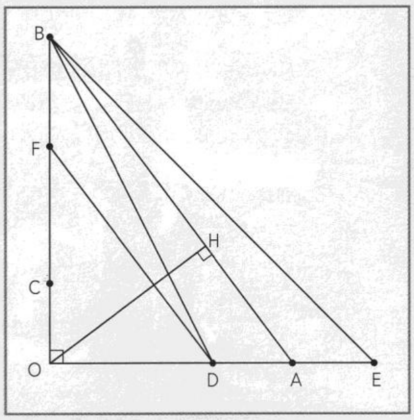
2) On appelle **nombres composés** les nombres qui s'écrivent sous forme de produits d'entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.

Considérer un nombre composé entre 2 et 50 : écrire ce nombre sous la forme d'un produit d'entiers naturels différents de 1 et qui comporte le plus grand nombre de facteurs possibles. Que constate-t-on ?

3) Caractériser tous les nombres de la liste établie à la première question.

2 Les nombres et la mesure

Historiquement, les nombres ont servi à compter puis à mesurer. Mesurer a conduit les hommes à élaborer au fil du temps différents types de nombres : nombres entiers , nombres rationnels (quotients de deux entiers), nombres décimaux, nombres irrationnels…



Repérer, au fur et à mesure des questions de cette activité :
- les différents types de nombres rencontrés ;
- les théorèmes de géométrie utilisés pour déterminer des mesures.

On considère la figure ci-contre. Une unité de longueur étant choisie, on suppose que :

$OA = 6, \quad OB = OE = 8, \quad OC = 2 \quad$ et $\quad OD = 4$.

1) Calculer la valeur exacte de AB.

2) La parallèle à (AB) passant par D coupe (OB) en F. Calculer la valeur exacte de OF et celle de DF.

6 **Chapitre 1** ■ Les nombres

11.8 Copie du manuel de Mathieu et de Clotilde

Ch1

EXERCICES

LA PAGE DE CALCUL

1. Avec des fractions

Fractions

① Règles des signes :

$$\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} \quad \text{et} \quad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}.$$

② Pour simplifier ou réduire au même dénominateur :

$$\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad \frac{a \div k}{b \div k} = \frac{a}{b}.$$

③ Addition de fractions ayant même dénominateur (sinon, on réduit au même dénominateur) :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}.$$

④ Multiplication :

$$k \times \frac{a}{b} = \frac{ka}{b} = \frac{a}{b} \times k \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}.$$

⑤ Division : $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

1 Effectuer et donner le résultat sous forme de fraction irréductible :

1° a) $\frac{2}{3}+\frac{3}{2}-\frac{1}{6}$; b) $4-\frac{1}{2}-\frac{7}{4}$; c) $2-\frac{3}{2}+\frac{1}{4}$;

2° a) $\frac{2}{15}-\frac{1}{3}+\frac{3}{5}$; b) $1-\frac{3}{4}+\frac{1}{3}$; c) $2-\frac{4}{9}+\frac{2}{3}$.

2 Effectuer, en simplifiant au maximum, sans calculatrice :

a) $\frac{5}{4}\times\frac{12}{35}$; b) $\frac{4}{49}\times\frac{56}{3}\times\frac{1}{8}$; c) $\frac{10}{33}\times\frac{55}{4}\times\frac{1}{25}$;

d) $2\times\frac{7}{6}$; e) $-3\times\frac{-2}{9}$; f) $4\times\frac{15}{8}\times\frac{32}{5}$.

3 Effectuer, sans distribuer, mais en calculant dans les parenthèses :

a) $4\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)$; b) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)$; c) $-2\left(1-\frac{5}{4}\right)$;

d) $\left(\frac{5}{7}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)$; e) $6\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)$.

4 Effectuer :

a) $\left(1+\frac{2}{5}\right)\left(1-\frac{7}{2}\right)$; b) $\left(2-\frac{1}{3}\right)\div\left(\frac{2}{5}-1\right)$; c) $-6\div\frac{18}{5}$;

d) $3-\frac{2}{3}\times\frac{5-2}{8-2}$; e) $\left(3-\frac{2}{3}\right)\times\frac{8-2}{5+2}$; f) $1-2\times\frac{3-4}{7-3}$.

2. Avec des radicaux

Racine carrée

Définition : a étant un nombre positif (ou nul), $\sqrt{a}$ est le nombre positif (ou nul), qui élevé au carré donne a :

$$\sqrt{a}\times\sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a, \text{ avec } a \geqslant 0.$$

Règles

① $\sqrt{a}$ n'est définie que si a est un nombre positif (ou nul).

② a étant un nombre positif, il existe deux nombres, $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$, qui élevés au carré donnent a.

③ a et b étant des nombres positifs et $b \neq 0$:

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b} = \sqrt{ab} \;;\; \sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b} \;;\; \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Exemples : $\sqrt{3}\times\sqrt{2} = \sqrt{6}$;

$\sqrt{9\times 2} = \sqrt{3^2\times 2} = 3\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{10}{2}} = \sqrt{5}$.

④ Il faut calculer le nombre sous le radical $\sqrt{\ }$ **avant** de calculer la racine carrée !
$\sqrt{4+1}$ signifie « racine carrée de la somme $4+1$ ».

5 Écrire les nombres suivants sous forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont entiers et b le plus petit possible :

a) $\sqrt{27}$; b) $\sqrt{200}$; c) $\sqrt{8}$; d) $\sqrt{75}$; e) $\sqrt{18}$.

6 Simplifier, en utilisant les règles de calcul :

a) $\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}$; b) $5\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}$; c) $(3\sqrt{3})^2$; d) $(2\sqrt{6})^2$;
e) $2\sqrt{5}\times\sqrt{15}$; f) $3\sqrt{3}\times 2\sqrt{6}$; g) $4\sqrt{5}\times 3\sqrt{45}$.

7 Réduire au maximum les nombres suivants :

a) $2\sqrt{3}-4\sqrt{3}+\sqrt{27}$; b) $\sqrt{45}+3\sqrt{5}-3\sqrt{20}$;

c) $\sqrt{8}-5\sqrt{2}+\sqrt{12}$; d) $\frac{3\sqrt{5}}{2}\times\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{15}}$;

e) $(\sqrt{3})^2-\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2$; f) $(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^3$.

8 Développer chaque nombre :

a) $(4-3\sqrt{2})^2$; b) $(3\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$; c) $(1-2\sqrt{3})^2$;
d) $(-\sqrt{5}+2)^2$; e) $(5+\sqrt{3})(5-\sqrt{3})-(2\sqrt{5})^2$;
f) $(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})+(1-\sqrt{2})^2$.

11.9 Trame commentée du premier entretien

Questions de l'interview	Commentaires
Je vous remercie d'avoir accepté ma demande. Ce qui m'intéresse c'est l'enseignement des mathématiques dans une classe de seconde tout au long de l'année scolaire.	L'objectif annoncé est volontairement très vague et n'induit aucune réponse en lien avec les domaines numérique et algébrique
Vous êtes toujours d'accord pour cette collaboration et pour cet interview ?	Conformément au protocole d'interview élaboré par Vermersch (1994), l'accord de la personne est demandé explicitement.
Est-ce que vous pouvez me dire comment vous avez réalisé votre enseignement en seconde entre le 1er septembre et le 30 novembre?	La question est la plus neutre possible. Certains mots sont volontairement évités dans le souci de repérer les mots spontanément utilisés par la personne interrogée. Ces mots sont pour la *reprise scolaire* : reprise, révision, numérique, algébrique, chapitre, démarrage, progression…
Quel est le premier chapitre que vous avez choisi d'enseigner ?	Le terme chapitre pourra être remplacé par le terme correspondant utilisé par l'enseignant
Comment avez-vous fait le choix de ce premier chapitre ? Qu'en pensez-vous *a posteriori* ?	Les questions posées utilisent le plus souvent possible la forme avec « comment » plutôt qu'avec « pourquoi », en suivant en cela le protocole établi par Vermesch. Il sera intéressant de chercher à savoir si le choix est personnel, ou résulte du choix d'une équipe, s'il est habituel et s'il est satisfaisant.
Quels sont les apprentissages essentiels que vous avez voulu construire ?	Cette question vise à capter des renseignements relatifs au NA, et si l'essentiel réside dans des révisions ou dans d'autres acquisitions spécifiques de la classe de seconde. Elle vise aussi à repérer si l'essentiel est plutôt dans l'apprentissage de techniques automatisées, de savoirs théoriques, ou encore dans l'apprentissage de praxéologies complètes, au sens de Chevallard.
Quels sont les chapitres suivants traités jusqu'aux vacances de Toussaint ?	
Est-ce que vous pourriez me parler de la façon dont vous percevez un élève qui arrive dans la	L'objectif est de recueillir la perception par l'enseignant de cet élève qui franchit le seuil

classe de mathématique en début de lycée, mais de façon générique, l'élève de début de seconde, peut-être même en dépassant le cadre des mathématiques ?	collège/lycée, pour repérer si cette représentation peut influencer les choix de l'enseignant.
Quels sont les chapitres traités après les vacances, et quels sont les apprentissages en cours ?	
Quelles sont vos impressions sur les élèves de votre classe ?	

11.10 Les questions posées aux élèves lors du premier entretien

Cadre du premier entretien avec des élèves

I – Contrat de participation

Expliciter mon intérêt pour suivre les apprentissages de quelques élèves.

Expliciter ce travail de recherche :

- pour comprendre comment se fait l'enseignement des mathématiques tout au long de l'année de seconde ;
- pour comprendre comment les élèves comprennent cet enseignement, ce qu'ils en retiennent, ce qu'ils ne comprennent pas ;
- pour pouvoir avoir des propositions pour les auteurs de programme, les auteurs de manuels, la formation des enseignants…

Expliciter ce qui sera demandé aux élèves :

- les voir régulièrement pour leur poser des questions oralement ou par écrit ;
- avoir accès à tous leurs documents écrits : cours, devoirs, recherches…

Préciser la règle de confidentialité :

- aucune déclaration des élèves ne sera utilisée en conseil de classe, et ne sera répétée aux parents ;
- certaines informations données par les élèves pourront être communiquées à leur professeur, uniquement si les élèves concernés sont d'accord (des réponses à des exercices par exemple).

II – Questions aux élèves :

Fiche de renseignements à faire remplir

Niveau de la société :

- Est-ce que vous avez besoin de faire des mathématiques pour le métier que vous pensez faire plus tard ?
- Que pensent vos parents de cette question ?

Niveau de l'école :

- Est-ce que vous trouvez que l'enseignement des mathématiques au lycée est différent de celui du collège ?
- Comparez les contenus, les façons d'enseigner, l'organisation des horaires… Explicitez, donnez des exemples.

Niveau de la discipline :

- Comment avez-vous trouvé le premier chapitre de seconde ? Je vous rappelle le contenu (lire les titres) ;
- Est-ce que cela ressemble à ce que vous aviez imaginé ?

- Dans ce premier chapitre il y avait beaucoup de choses déjà apprises en collège, est-ce que vous trouvez que cela vous a permis de progresser sur certaines choses ? Si oui, donner un exemple.
- Que pensez-vous des notions que vous apprenez en seconde, est-ce facile, intéressant ? Donnez des exemples.

III – A propos de la valeur absolue

- Qu'est-ce que vous diriez à un élève qui sort de troisième pour lui expliquer ce que veut dire la valeur absolue d'un nombre ?

- Est-ce que vous savez ce qu'est la distance à zéro d'un nombre que vous avez rencontrée en cinquième ?

11.11 Devoir du 2 décembre 2006 chez Mathieu

Seconde 7 devoir n°4
2/12/2006

Exercice 1 (2 points)

Calculer

a) $\left|\sqrt{7}-2\sqrt{2}\right|+\left|5+2\sqrt{3}\right|-\left|4+2\sqrt{3}\right|$.

b) $3\left|1-\sqrt{2}\right|+5\left|3-2\sqrt{5}\right|-\left|3-2\sqrt{5}\right|$.

Exercice 2 (4 points)

Résoudre les équations suivantes. Justifier la démarche.

1) $\left|x+\dfrac{3}{2}\right|=1$. 2) $\left|2x-7\right|=3$. 3) $\left|\dfrac{x}{2}-2\right|=2$ 4) $\left|3x+1\right|=\dfrac{1}{2}$

Exercice 3 (6 points)

Résoudre les inéquations suivantes. Donner la réponse sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles. Justifier la démarche.

a) $\left|x+8\right|\geq 5$ b) $\left|7x+1\right|\geq 8$

c) $\left|x-\sqrt{3}\right|\leq 3-\sqrt{3}$ d) $\left|\dfrac{x+3}{4}-5\right|\leq 2$

Exercice 4 (4 points)

Déterminer une inéquation, comportant une valeur absolue, dont l'ensemble des solutions est :

a) $\left]-\infty;-7\right[\cup\left]5;+\infty\right[$ b) $\left[-12;5\right]$ c) $\left]6,5;18,5\right[$;

Exercice 5 (4 points)

Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases}\left|6-x\right|<3\\ \text{et}\\ \left|x+2\right|>4\end{cases}$ $\begin{cases}\left|3x-1\right|>3\\ \text{et}\\ \left|x+2\right|<4\end{cases}$

11.12 Devoir en classe chez Clotilde le 16 novembre 2007. Sujet n°1

2nde 5 CONTROLE N°2 Vendredi 16 novembre 2007

Sujet1

Exercice 1 (6 points)

1. Résoudre l' équation suivante dans $\mathbb{R}$: 5 - 4x - 3 (4 - x) = 5x - 49

2. Résoudre l' inéquation suivante dans $\mathbb{R}$ et donner la réponse sous forme d'intervalle(s):
5 - 4x - 3 (4 - x) ≤ 5x - 49

3. Résoudre le système d'inéquations suivant dans $\mathbb{R}$ et donner la réponse sous forme d'intervalle(s):
$$\begin{cases} 3x-4 \leq 8+4x \\ 3-2x < -8x-3 \end{cases}$$

4. a) Dans $\mathbb{R}$, résoudre $0 < \frac{-2x+3}{2} \leq 7$

   b) En déduire les valeurs de n ,entier naturel, qui vérifie : $0 < \frac{-2n+3}{2} \leq 7$

Exercice 2 (2,5 points) Calculer :

$$A = |\,5{,}1-7{,}3\,| + 2|\,5{,}6-7{,}2\,| - 3|\,1{,}9+2{,}1|$$
$$C = 2\left|\,2\sqrt{3}-3\,\right| - \left|\,5-2\sqrt{3}\,\right| + 2\left|\,4-3\sqrt{3}\,\right|$$

Exercice 3 (6,5 points)

1. Résoudre les équations et les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$
   a. $|\,4+x\,| = 7$
   b. $|\,5-2x\,| \geq 3$
   c. $|-x-\pi| \leqslant -2$

2. Déterminer une équation ou une inéquation ayant pour ensemble de solutions :
   a. L'ensemble des solutions est –1 et 5.
   b. $S = [\,3-\sqrt{2}\,;3+\sqrt{2}\,]$

3. Résoudre le système d'inéquations suivant dans $\mathbb{R}$: $\begin{cases} |\,x-3\,| \leq 7 \\ |\,x+3\,| \geq 7 \end{cases}$

Exercice 4 (5 points)

1. Soit x un réel supérieur à 3.
L'aire du rectangle de côtés $x+1$ et $x-3$ est inférieure à l'aire du carré de côté $x-2$.
Déterminer l'ensemble solution pour x.

2. *On connaît l'imprécision de la mesure en cm, des côtés x et y d'un parallélogramme :*
$|x-3{,}2\,| \leqslant 0{,}2$ et $|y-25{,}3\,| \leqslant 0{,}1$.
a)Déterminer un encadrement de x , de y et du périmètre P de ce parallélogramme
b)Etablir une inégalité sous la forme $|P-c\,| \leqslant r$.

11.13 Devoir en classe chez Clotilde le 16 novembre 2007. Sujet n°2

2nde 5 — CONTROLE N°2 Sujet2 — Vendredi 16 Novembre 2007

Exercice 1 (6 points)

1. Résoudre l' équation suivante dans ℝ : 5 - 5x - 3 (4 - x) = 5x - 49

2. Résoudre l' inéquation suivante dans ℝ et donner la réponse sous forme d'intervalle(s):
5 - 5x - 3 (4 - x) ≤ 5x - 49

3. Résoudre le système d'inéquations suivant dans ℝ et donner la réponse sous forme d'intervalle(s): $\begin{cases} 3x-4 \leq 8+4x \\ 3-2x < -8x-3 \end{cases}$

4. a) Dans ℝ, résoudre $0 < \dfrac{-2x+3}{2} \leq 7$

   b) En déduire les valeurs de n, entier naturel, qui vérifie : $0 < \dfrac{-2n+3}{2} \leq 7$

Exercice 2 (2,5 points) Calculer :

$$A = |5{,}2-7{,}3| + 2|5{,}4-7{,}2| - 3|1{,}9+3{,}1|$$

$$C = 2\left|\ 2\sqrt{3}-3\ \right| - \left|\ 5-2\sqrt{3}\ \right| + 2\left|\ 4-3\sqrt{3}\ \right|$$

Exercice 3 (6,5 points)

1. Résoudre les équations et les inéquations suivantes dans ℝ
   a. $|5+x| = 8$
   b. $|4-2x| \geq 3$
   c. $|-x-\pi| \leqslant -3$

2. Déterminer une équation ou une inéquation ayant pour ensemble de solutions :
   a. L'ensemble des solutions est –1 et 5.
   b. $S = [\ 3-\sqrt{2}\ ;\ 3+\sqrt{2}\ ]$

3. Résoudre le système d'inéquations suivant dans ℝ : $\begin{cases} |\ x-3\ | \leq 7 \\ |\ x+3\ | \geq 7 \end{cases}$

Exercice 4 (5 points)

1.Sit x un réel supérieur à 3.
L'aire du rectangle de côtés $x+1$ et $x-3$ est inférieure à l'aire du carré de côté $x-2$.
Déterminer l'ensemble solution pour x.

2.On connaît l'imprécision de la mesure en cm, des côtés x et y d'un parallélogramme :
$|x-3{,}2| \leqslant 0{,}2$ et $|y-25{,}3| \leqslant 0{,}1$.
a)Déterminer un encadrement de x , de y et du périmètre P de ce parallélogramme
b)Etablir une inégalité sous la forme $|P-c| \leqslant r$.

11.14 Exercice dans la classe de Mathieu du 23 octobre 2006

le 23/10/06 Exercice : Sachant que $x \in [-7;2]$

A quel intervalle appartient

* $\frac{1}{2}x+3$
* $4-2x$
* $2(1-x)$
* $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}x$

$-7 \leqslant x \leqslant 2$

* $14 \geqslant -2x \geqslant -4$

$18 \geqslant 4-2x \geqslant 0$

$-7 \leqslant x \leqslant 2$

* $-\frac{7}{2} \leqslant \frac{1}{2}x \leqslant 1$

$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}x+3 \leqslant 4$

$-7 \leqslant x \leqslant 2$

* $7 \geqslant -x \geqslant -2$

$8 \geqslant 1-x \geqslant -1$

$16 \geqslant 2(1-x) \geqslant -2$

$-7 \leqslant x \leqslant 2$

* $\frac{7}{4} \geqslant -\frac{1}{4}x \geqslant -\frac{1}{2}$

$\frac{7}{4}+\frac{1}{3} \geqslant \frac{1}{3}-\frac{1}{4}x \geqslant -\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$; $\frac{25}{12} \geqslant \frac{1}{3}-\frac{1}{4}x \geqslant -\frac{1}{6}$

Exercice : Sachant que $2x+1 \in [17,21[$

A quel intervalle appartient x ?

$17 \leqslant 2x+1 < 21$

$16 \leqslant 2x < 20$

$8 \leqslant x < 10$

Sachant que $-3-3x \in [-7,8]$

A quel intervalle appartient x ?

$-7 \leqslant -3-3x \leqslant 8$

$-4 \leqslant -3x \leqslant 11$

$\frac{-4}{-3} \geqslant x \geqslant \frac{11}{-3}$

$\frac{4}{3} \geqslant x \geqslant \frac{11}{-3}$

11.15 Exercices 27, 28 et 32 de la page 44 du manuel

[méthode C page 37, exercices 27 à 30]

27 À l'aide d'un schéma, déterminer l'intersection et la réunion des deux intervalles donnés :

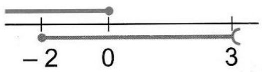
a) $I = [-10 ; 2]$ et $J = [-3 ; 7]$;

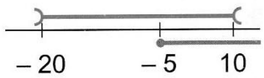
b) $I =]-\infty ; 3]$ et $J = [-6 ; +\infty[$;

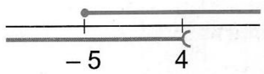
c) $I = [7 ; +\infty[$ et $J = [-5 ; +\infty[$;

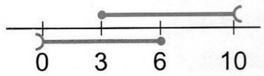
d) $I =]3 ; 18]$ et $J =]17 ; 20]$.

28 Pour chaque schéma, donner les deux intervalles représentés, ainsi que leur intersection et leur réunion :

a)


b)


c)


d)


32 Déterminer les ensembles suivants, et les écrire à l'aide d'intervalles :

a) les réels supérieurs à 10 ou inférieurs ou égal à 12 ;

b) les réels compris entre -5 et 7, bornes exclues, ou supérieurs ou égal à 3 ;

c) les réels positifs ou nul **et** inférieurs ou égal à 25 ;

d) les réels négatifs ou nul **ou** supérieurs à 6.

11.16 Cahier d'un élève : traces écrites de la séance du 2 décembre 2006 chez Mathieu

$$\begin{cases} 1)\ \left|\dfrac{x-1}{3}\right| < 1 \\ 2)\ \left|\dfrac{x+1}{4}\right| > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$1)\ \begin{cases} \dfrac{x-1}{3} < 1 \\ \dfrac{x-1}{3} > -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x-1 < 3 \\ x-1 > -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 4 \\ x > -2 \end{cases}$$

$$x \in \left]-2;4\right[$$

$$2)\ \begin{cases} \dfrac{x+1}{4} > \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x+1}{4} < -\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x+1 > \dfrac{1}{2}\times 4 \\ x+1 < -\dfrac{1}{2}\times 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2-1 \\ x < -2-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x < -3 \\ x > 1 \end{cases}$$

$$x \in \left]-\infty;-3\right[\cup \left]1;+\infty\right[$$

0

-3 -2 -1 1 2 3 4

$$x \in \left]1;4\right[$$

$$\begin{cases} 1)\ \left|\dfrac{2x-1}{3}\right| > 2 \\ 2)\ \left|\dfrac{1-3x}{2}\right| < 1 \end{cases}$$

$$1)\ \begin{cases} \dfrac{2x-1}{3} > 2 \\ \dfrac{2x-1}{3} < -2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-1 > 6 \\ 2x-1 < -6 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x > 7 \\ 2x < -5 \end{cases} \quad \begin{cases} x > \dfrac{7}{2} \\ x < -\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

$$x \in \left]-\infty;-\frac{5}{2}\right[\cup \left]\frac{7}{2};+\infty\right[$$

$$2)\ \begin{cases} \dfrac{1-3x}{2} < 1 \\ \dfrac{1-3x}{2} > -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 1-3x < 2 \\ 1-3x > -2 \end{cases} \quad \begin{cases} -3x < 1 \\ -3x > -3 \end{cases} \quad \begin{cases} -x < \dfrac{1}{3} \\ -x > -\dfrac{3}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x > -\dfrac{1}{3} \\ x < 1 \end{cases}$$

$$x \in \left]-\frac{1}{3};1\right[$$

$-\frac{5}{2}$ $-\frac{1}{3}$ 1 $\frac{7}{2}$

11.17 Extrait du verbatim de la séance du 2 décembre 2006 chez Mathieu

Comme exercice de révision, Mathieu propose de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} |2x-1| > 2 \\ |x-\sqrt{3}| > \sqrt{2} \end{cases}$$

Le professeur laisse les élèves chercher pendant un certain temps, il circule, répond à des questions d'élèves.

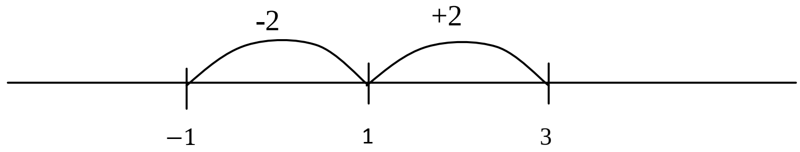
Les élèves ayant terminé leur recherche pour la plupart, le professeur fait lui même la correction au tableau en sollicitant les élèves pour qu'ils donnent des réponses.

Mathieu : En terme de distance la valeur absolue de $2x-1$ c'est la distance entre quoi et quoi ?

Élève : 1 et $2x$

Mathieu : ça se traduit par la distance de $2x$ et de 1 est plus grande que 2

Il écrit en même temps : $d(2x\,;1) > 2$ et il fait un dessin à main levée au tableau :



Mathieu écrit et dit ce qu'il écrit :

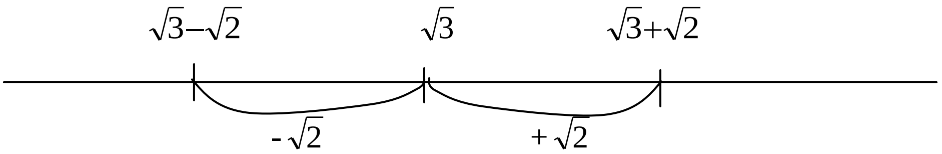
$$2x \in]-\infty;-1[\cup]3;+\infty[\qquad x \in \left]-\infty;-\tfrac{1}{2}\right[\cup\left]\tfrac{3}{2};+\infty\right[$$

Des élèves montrent qu'ils ne comprennent pas.

Mathieu : puisque $2x$ appartient à l'intervalle $]-\infty;-1[$ donc le nombre $2x$ est plus petit que -1, donc que x est plus petit que quoi ?

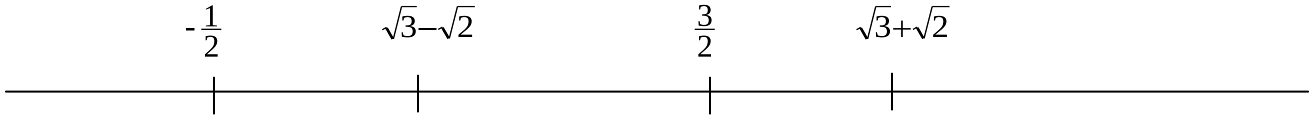
Ainsi le professeur justifie l'appartenance de x à l'intervalle $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$

Le professeur utilise la même technique pour la résolution de la deuxième inéquation, et il commente la représentation graphique suivante réalisée à main levée :



Mathieu : j'ai racine de 3 ; de ce côté là j'ai racine de 3 plus racine de 2, et de ce côté là j'ai racine de 3 moins racine de 2, donc x appartient à l'intervalle racine de 3 moins racine de 2 et racine de 3 plus racine de 2. Résoudre le système c'est trouver les x qui vérifient la première inégalité et la deuxième. Qu'est-ce que vous avez ? Je les range dans l'ordre.

Le professeur fait le dessin suivant :



et il ajoute :

Mathieu : moralité, ceux qui vérifient les deux en même temps où sont-ils ?

Des élèves répondent, c'est inaudible.

Mathieu : l'ensemble des réels qui vérifient le système est l'intervalle trois demi, racine de 3 plus racine de 2 (et il écrit $]\frac{3}{2};\sqrt{3}+\sqrt{2}[$). Je vous en donne un autre.

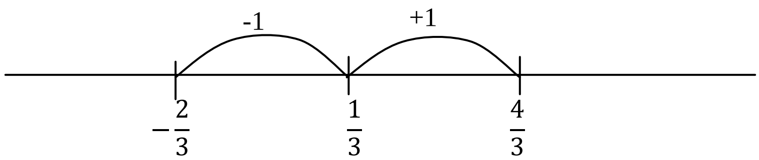
Mathieu écrit au tableau :

$$\begin{cases} \left|\frac{x-1}{3}\right| < 1 \\ \left|\frac{x+1}{4}\right| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Après avoir laissé du temps aux élèves pour résoudre le système, le même scénario est repris : le professeur va au tableau pour faire la correction en faisant intervenir des élèves pour donner des réponses personnelles.

Mathieu : j'ai vu plusieurs techniques, la première méthode j'ai vu ça, c'est valeur absolue de x sur 3 moins un tiers inférieur à 1. En fait x-1 sur 3 je vais le séparer en deux, ils ont dit c'est la distance entre x sur 3 et un tiers, et ils ont fait un schéma.
Le professeur écrit en même temps qu'il parle :

$$\left|\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\right| < 1$$



Il commente le schéma en le réalisant.

Mathieu : J'ai un tiers plus un, ça fait quoi ?

Élève : quatre tiers

Mathieu : ils ont dit, x sur 3 appartient à l'intervalle moins deux tiers, quatre tiers, si x sur 3 est là dedans, x tout seul il est où ?

Élève : entre –2 et 4

Le professeur a écrit :

$$\frac{x}{3} \in \left]-\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right[$$

$x \in \left]-2;4\right[$

Mathieu : je garde cela en mémoire. Ensuite j'ai valeur absolue de x plus 1 sur 4 supérieure à un demi, c'est la distance entre quoi et quoi ?

Des élèves répondent.

Mathieu : c'est la distance entre x sur 4 et moins un quart.

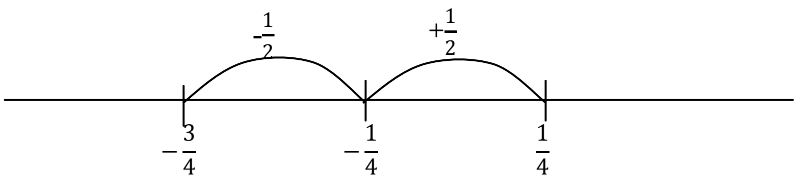
Le professeur a écrit :

$\left|\frac{x+1}{4}\right| > \frac{1}{2}$ c'est $d(\frac{x}{4};-\frac{1}{4}) > \frac{1}{2}$

il rappelle qu'il a été dit que : $d(a;b) = |a-b|$

Mathieu : la distance entre a et b c'est une soustraction comme j'ai plus, c'est moins par moins.

Il continue en faisant un schéma pour représenter les nombres $\frac{x}{4}$.



$$\frac{x}{4} \in \left]-\infty;-\frac{3}{4}\right[\cup \left]\frac{1}{4};+\infty\right[$$

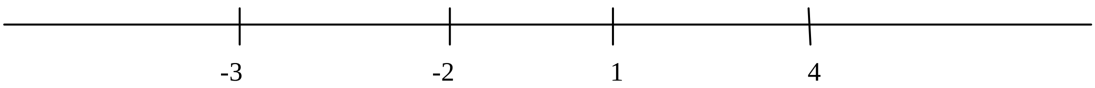
Mathieu : ils se sont retrouvés avec x qui est dans quel intervalle ?

Des élèves répondent, le professeur écrit :

$$x \in \left]-\infty;-3\right[\cup \left]1;+\infty\right[$$

Mathieu : après je n'ai plus qu'à placer les nombres, j'ai -3, après j'ai -2, après j'ai 1 et après j'ai 4.

Le professeur représente à main levée les 4 nombres ordonnés sur une droite graduée, hachure les ensembles de solutions des deux inéquations.



Mathieu : qu'est-ce que vous en concluez, l'ensemble des solutions ?

Des élèves répondent. Le professeur écrit : S=]1;4[

Mathieu : ceux qui ont fait autrement ? J'ai parlé de la méthode 1, je vais parler de la méthode 2.

Une élève donne cette méthode. Le professeur écrit sous la dictée :

$$\left|\frac{x-1}{3}\right| < 1 \quad \begin{cases} x-1<3 \\ ou \\ x-1>-3 \end{cases} \quad (1)$$

Mathieu : c'est plus des écarts, c'est basé sur ce système là : que dire d'un nombre dont la valeur absolue est plus grande que 1 ? Si la valeur absolue de x est plus grande que 1 on a :

$$|x| > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ ou \\ x < -1 \end{cases}$$

Le professeur montre ce qui est écrit en (1) et commente :

Mathieu : avant d'écrire ça qu'est-ce qu'elle aurait pu écrire ?

Le professeur continue d'écrire au tableau avec la participation orale des élèves :

$$\left|\frac{x-1}{3}\right| < 1$$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{3} < 1 \\ ou \\ \frac{x-1}{3} > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 < 3 \\ ou \\ x-1 > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ ou \\ x > -2 \end{cases}$$

Le professeur reprend la même méthode pour la deuxième inéquation en commençant par dire :

Mathieu : dire que la valeur absolue de x+1 sur 4 est plus grande que un demi, ça veut dire quoi ?

Il écrit ensuite au tableau avec la coopération des élèves :

$$\begin{cases} \frac{x+1}{4} > \frac{1}{2} \\ ou \\ \frac{x+1}{4} < -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 2 \\ ou \\ x+1 < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ ou \\ x < -3 \end{cases}$$

Mathieu : et on termine comme tout à l'heure.

11.18 Verbatim de la séance du 22 octobre 2007 chez Clotilde

0 min Le professeur debout derrière son bureau accueille les élèves, elle attend leur installation en souriant.

Clotilde : sortez vos affaires on corrige les exercices. 1 min On corrige d'abord le 43.

Des élèves arrivent en retard. Le professeur attend qu'ils s'installent.

Clotilde : Diégo le 43 s'il te plait < silence > 2 min il fallait résoudre des inéquations.

Diego va au tableau, écrit sans rien dire en copiant les réponses de son cahier. Le professeur circule dans la classe et vérifie si le travail a été fait tout en faisant des remarques sur ce qui est écrit au tableau ou sur les cahiers des élèves.

Clotilde (s'adresse à un élève) : tu n'as pas fait de représentation

Clotilde : Lucas tes exercices

Lucas : j'ai oublié mon cahier madame

Clotilde : OK, donc il y a deux inéquations

3 min **Lucas** : j'ai oublié ma feuille, c'est pas grave

Clotilde : mais si c'est grave

Lucas : mais je l'avais fait

Clotilde : bien mais prend la correction, si vous avez oublié vos affaires vous prenez la correction intégralement, même si vous l'avez fait chez vous

Clotilde : (en s'adressant à Diégo) ah qu'est-ce que tu fais là ? tu résous séparément chaque inéquation (elle s'adresse à un autre élève) tu n'as pas fait un schéma ?

Élève : ah non

Clotilde :et ça t'allait sans schéma ?

Élève : ben je sais pas

Voici les écrits de Diego au tableau :

$$\begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ 5 - x \geq 0 \end{cases}$$

$$2x - 3 \geq 0$$
$$2x \geq 3$$
$$x \gg \frac{3}{2}$$
$$x = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$$

Clotilde : Diego *x* égal tu es sur là ? Diego ? La solution de ça c'est quoi ?

Diego : euh… compris entre trois demi et…

Clotilde : d'accord alors il appartient à l'intervalle il n'est pas égal, c'est S égal ou *x* appartient, OK

Clotilde (s'adresse à un élève) : 1,5 c'est trois demi hein c'est pareil c'est bon

Diego continue ses écrits et ajoute à droite du tableau :

$$5 - x \geq 0$$

$$x \geq 5$$

$$x \in [5; +\infty[$$

Clotilde : stop après tu vas faire quoi ?

Diego : regrouper

Clotilde : Regrouper ça veut dire quoi, tu vas représenter tes intervalles sur une droite graduée

5 min **Clotilde** : 5 moins x supérieur ou égal à 0, comment tu passes, tu as utilisé quoi comme propriété ?

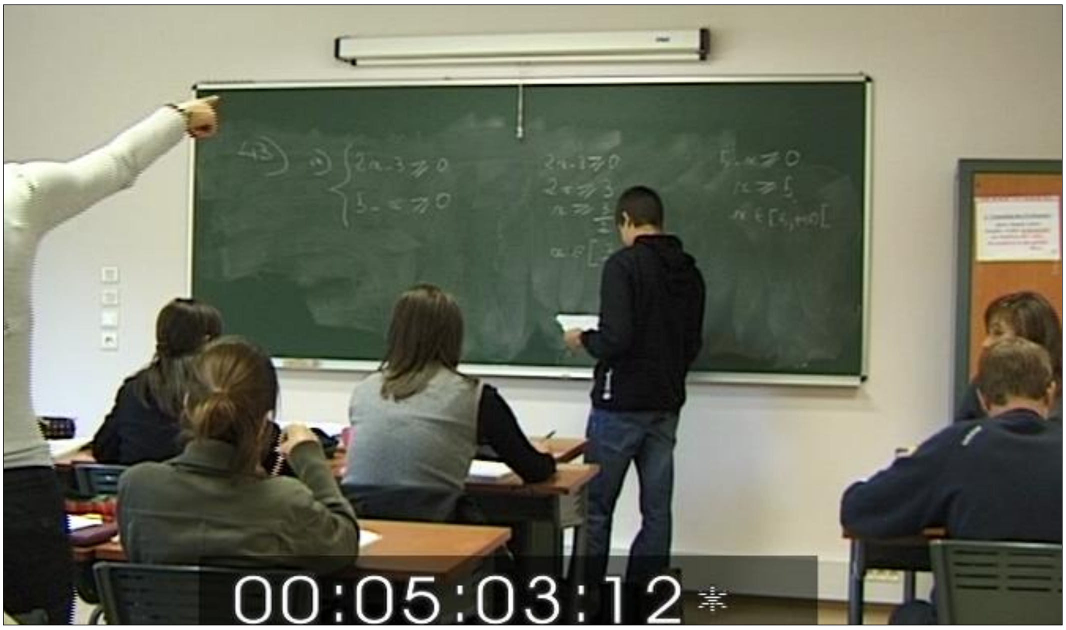


Figure 110 : question de Clotilde : « 5-x supérieur à zéro, comment tu passes… ? »

Clotilde : Vous vous rappelez hier, la dernière fois on a numéroté propriété un, propriété deux, propriété trois, explique moi la deuxième inéquation comment tu fais

Élève : inaudible

Clotilde : peut-être il va nous l'expliquer

Clotilde : Diego juste tu fais comment pour passer de la première ligne à la deuxième ligne, là vas y, pose ton cahier tu n'as plus besoin de ton cahier, de là à là (elle montre la ligne $5 - x \geq 0$ puis $x \geq 0$).

Diego : inaudible

Diego corrige son erreur et remplace $x \geq 5$ par $-x \geq -5$, Clotilde vient effacer la dernière ligne

Clotilde : tu soustrais 5 des deux côtés, et après comment tu vas faire pour enlever ce moins qui te dérange ?

Diego : inaudible

Clotilde : ça veut dire qu'on fait quoi, nous on a appris que pour les inéquations on multiplie, on divise, on soustrait, on ajoute un nombre, là tu fais quoi ?

Diego hésite, réfléchit

Diego : là je divise

Clotilde : par ?

6 min **Clotilde :** comment on fait là la dernière fois on l'avait vu, on a le moins et quand le moins est tout seul on n'y arrive plus

Élève : on divise par moins 1

Clotilde : on divise par -1 donc on utilise la règle numéro 3 et on va faire quoi ? On change le sens, vas y. On divise par -1 ou on multiplie par -1 et si on multiplie ou si on divise par -1 il faut qu'on change le sens de l'inégalité,

Diego continue d'écrire :

$$x \leq 5$$
$$x \in]-\infty; 5]$$

Clotilde : d'accord <silence> donc maintenant pour résoudre notre système on représente les deux intervalles et on va chercher leur intersection <silence> tu les représentes chacun d'une couleur, t'as des craies de chaque couleur 6 min

Diego représente les solutions sur une droite graduée à main levée

Élève : à la fin on met *x* appartient oui la solution est…

7 min **Clotilde** : alors ça c'est pas la solution encore de notre système donc après si tu as plein de solutions intermédiaires tu peux pas mettre S égal S égal S égal, d'accord là tu mets juste… tu peux l'appeler S_1 S_2 et S final c'est comme tu veux là. Donc on représente trois demi plus l'infini, tu barres ce que tu gardes c'est ce que tu as fait là ? Tu devrais le colorier ce que tu gardes plutôt que de le barrer

Donc on a colorié en bleu un intervalle en rouge l'autre la solution de notre système c'est quoi ?

Diego écrit : $S = \left[\frac{3}{2}; 5\right]$ et quitte le tableau.

8 min **Clotilde** : Lucas la correction intégralement prise on va effacer le tableau. Dépêche toi là on passe à la suite <silence> Donc Diego il s'est rappelé qu'il y avait un système ça voulait dire qu'on avait $2x - 3$ qui était supérieur ou égal à 0 et $5 - x$ qui était supérieur ou égal à 0, donc la solution du système c'est l'intersection des deux intervalles, OK ? (elle montre au tableau la représentation graphique

Clotilde : on va corriger le deuxième système, qui va venir au tableau, à toi, vas y, le deuxième.

L'élève désigné se lève et va au tableau

Clotilde : n'efface peut-être pas tout pour l'instant.

9 min L'élève commence à écrire en silence en copiant son cahier

Clotilde : $3x - 1$ strictement positif et $-3x$ positif, strictement

L'élève continue à écrire, Clotilde circule, vérifie

Clotilde : alors dans un premier temps on résout séparément les deux inéquations, on utilise la règle numéro 3 pour la deuxième <silence> 10 min tu as mis x égal <silence>

Clotilde (s'adresse à une élève) : et tu oublies la solution finale, c'est où la réponse de ça ?

Clotilde : ça c'est la droite graduée ça ? Oui ?

Élève : Oui

Clotilde : donc si c'est ton axe il faut l'orienter, S c'est pas égal à un axe, après tu vas donner la solution sous forme d'un intervalle <silence> représente ton axe, représente nous les deux intervalles de différentes couleurs 11 min

Clotilde : Lucas ! Lucas je veux voir l'intégralité de la correction

Lucas : je l'ai fait

Clotilde : mais Lucas il n'y a pas la moitié de ce qu'on a écrit <silence> donc après on regarde l'intersection des deux intervalles, c'est là où l'on a colorié des deux couleurs et tu trouves <silence> c'est bon pour tout le monde ?

Figure 111 : Clotilde : « c'est bon pour tout le monde ? »

12 min **Élève :** <inaudible> j'ai trouvé x plus grand que 3

Clotilde : là !(elle montre la première inéquation) $-3x$ positif après t'as fait quoi là ?

Élève : j'ai passé le 3 à droite

Clotilde : on ne peut pas passer à droite ou à gauche, comment on fait pour l'enlever, il faut qu'on multiplie ou qu'on divise par le même chiffre des deux côtés, on ne passe pas ! D'accord, on divise, on multiplie, on additionne, on soustrait mais on ne passe pas, donc là le seul moyen de l'enlever c'est de diviser par -3 des deux côtés, d'accord ? Merci (elle s'adresse à l'élève qui était resté au tableau et qui retourne à sa place).

Élève : il faut le dire x appartient parce qu'il l'a pas fait là

Clotilde : non non, là on vous demande la solution du système, d'accord ? donc à cette étape là (elle montre $x > -\frac{1}{3}$ et $x < 0$) vous n'êtes pas obligés de mettre ce résultat là sous forme d'intervalle, il faut que vous mettiez le résultat final sous forme d'un intervalle, ce qu'il a fait là ça suffit vous n'êtes pas obligés de passer par cette étape là, c'est comme vous voulez, d'accord ?

13 min Clotilde vérifie la présence des élèves, elle demande où est Gabriella puis lui demande de venir au tableau.

Clotilde : au tableau pour le dernier s'il te plait

Clotilde : on va le corriger un peu plus rapidement parce qu'apparemment vous êtes tous arrivés. Tu effaces le premier.

Gabriella efface la résolution du premier système et commence à écrire en silence, Clotilde commente en même temps.

Clotilde : $1 - 4x$ strictement positif, $x + 4$ positif ou nul pardon, et $2 - 5x$ strictement positif, 14 min donc on veut les solutions de ce système

Gabriella résout la première inéquation et écrit :

$$x + 4 \geq 0$$
$$x + 4 - 4 \geq 0 - 4$$
$$x \geq -4$$

Clotilde : donc tu enlèves 4 des deux côtés oui

Élève : pourquoi elle l'a pas fait passer de l'autre côté le 4 ?

Clotilde : tu peux sauter autant d'étapes que tu veux si tu arrives au résultat final juste, d'accord ? <silence> sauf que si tu sautes trop vite trop d'étapes après tu te trompes mais… 15 min

Gabriella continue à écrire en silence, Clotilde fait une remarque à un élève.

Clotilde : tu as oublié de faire les graphiques, la droite graduée tu as oublié de la représenter.

Clotilde : il faut parler un peu pour dire ce que tu fais, d'accord alors on divise par -5 des deux côtés, on change le sens de l'inégalité parfait,

Élève : je fais là à droite <inaudible>

Clotilde : si tu veux, on peut effacer là

Élève : je vais mettre les solutions de chaque membre

Clotilde : tu n'as qu'à nous mettre directement ton intervalle de solutions, S égal … 16 min C'est bon ? Impeccable, impeccable, enfin si c'est juste impeccable

Clotilde : (à un élève en aparté) On te demandait la réunion aussi ?

Élève : non…

Clotilde : non non là c'était la solution là c'est pas réunion de deux intervalles et intersection, là on te demandait la solution du système, si c'est un système c'est qu'il y a un **et** donc c'est obligatoirement intersection, d'accord ?

Élève : d'accord

Clotilde : là si tu donnes ça comme réponse on te dira que c'est faux, la réponse c'est que ça, d'accord ?

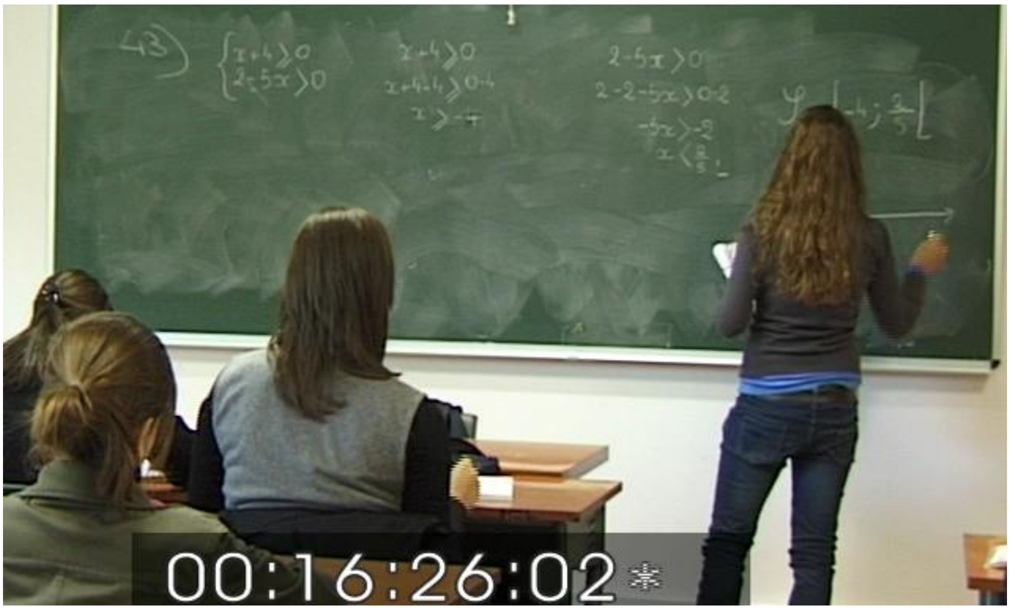


Figure 112 : fin de la correction du troisième système

Sami : Madame

Clotilde : oui

Sami : il n'y a pas de moins l'infini

Clotilde : là ? x supérieur ou égale à -4 et x strictement plus petit que deux cinquième, tu l'as représenté ? Tu vas voir elle va le représenter, tu as trouvé quoi comme solution ? <silence> tu as trouvé quoi comme solution ?

Sami : euh ça fait un quart moins l'infini deux cinquième, 17 min en fait j'ai pas fait la solution des deux

Clotilde : toi tu as fait la solution séparée de tes deux inéquations, d'accord ? Après nous ce qu'on veut c'est la solution du système donc il faut faire quoi après pour avoir la solution du système ?

Sami : les mettre ensemble

Clotilde : mais les mettre ensemble comment ? <silence> On a dit que ça voulait dire quoi quand on y avait … sur une frise si tu veux … sur un graphique ça veut dire quoi quand on a une accolade ?

Clotilde s'éloigne de l'élève, retourne près du tableau, l'élève qui corrigeait va s'assoir, le professeur lui dit merci.

Clotilde : ce qu'on veut là c'est que x il vérifie à la fois, Sami ! On veut que x il vérifie à la fois cela et à la fois celle là, d'accord ? Donc là c'est comme s'il y avait un et qui est entre les deux, donc si on veut qu'il vérifie à la fois celle là et à la fois ça il faut que x il vérifie ces deux inéquations là. Oui ? Donc il faut que x … il est dans l'intersection de ces deux intervalles oui ? 18 min donc il faut que tu trouves cet intervalle comme tu as fait tu trouves celui là tu les représentes et après tu trouves leur intersection et x il appartient à l'intersection mais il faut qu'il soit à la fois dans l'un et dans l'autre. Oui ? Donc il te manque l'intersection ce que tu as fait c'est juste pour chacun séparément et après tu fais l'intersection, d'accord ? C'est bon ?

Clotilde (s'adresse à la classe, appuyée sur son bureau) : on passe à la suite vous ressortez la fiche <silence> vous sortez la fiche d'activité préparatoire aux valeurs absolues.

Clotilde (elle s'assied à son bureau) : donc on va parler de quelques chose de nouveau qui sont les valeurs absolues, pour ça on va faire d'abord cette activité, Sami ! (Clotilde reprend cet élève qui se dissipe) Il fallait tracer une droite graduée et placer les points, ça allait ça ? 19 min Après il fallait déterminer certaines distances. Sami tu as trouvé quoi pour la distance AB ?

Sami : euh 5

Clotilde : d'accord, Chloé distance CA

Chloé : 8

Clotilde : 8 d'accord

Une élève n'est pas d'accord et dit que c'est -8, un autre élève dit que non c'est bon et que $11 - 3$ ça fait 8

Clotilde : tu as trouvé quoi ?

Élève : -8

Clotilde : une distance on a dit que c'est comment d'habitude (brouhaha) c'est toujours positif, la distance entre Paris et Montpellier, on peut pas l'exprimer par un nombre négatif, d'accord ? c'est toujours positif une distance, donc c'et 8, oui ? Laura la distance OA ?

Laura : 3 20 min

Clotilde : d'accord, la distance BE pour Paul… j'ai pas entendu

Paul : 14

Clotilde : d'accord. C'est bon pour tout le monde ?

Clotilde : Théo OE ?

Théo : 6

Clotilde :OK, et Bérangère la distance ED

Bérangère : 2

Clotilde : d'accord, je ne vous l'ai pas demandée à chaque fois l'opération que vous avez effectuée, **Clotilde :** on va demander à Bérangère comment tu as fait pour trouver ED ?

Bérangère : moins 4 moins moins 6

Clotilde : d'accord, donc vous êtes tous arrivés à chaque fois à trouver ces distances là, après si M est un point de notre droite Δ que vous avez tracée au début, d'abscisse *a* avec *a* qui est un réel positif on vous demande d'exprimer la distance OM en fonction de *a*, on en était à Anaïs tu as compris la question ? 21 min

Anaïs : moi j'ai mis que OM est égal à *a*

Clotilde : et ça te parait euh…

Anaïs : (inaudible)

Clotilde : donc là on a calculé des distances, d'accord ? Entre deux points, maintenant on a placé des points d'une certaine abscisse, maintenant on vous dit on prend un point et l'abscisse au lieu de lui donner un chiffre précis on va l'appeler petit *a*, d'accord, quel est… si petit a il est positif quelle est sa distance OM en fonction de *a*

Clotilde se lève, efface le tableau et trace à main levée une droite graduée

Clotilde : on dit qu'on prend *a* positif donc *a* il va être obligatoirement à droite de zéro, d'accord, donc si le point M il a son abscisse *a* on vous dit qu'elle va être cette distance 22 min et Anaïs nous a dit que tu avais mis

Anaïs : *a*

Clotilde : d'accord, ça vous va ?

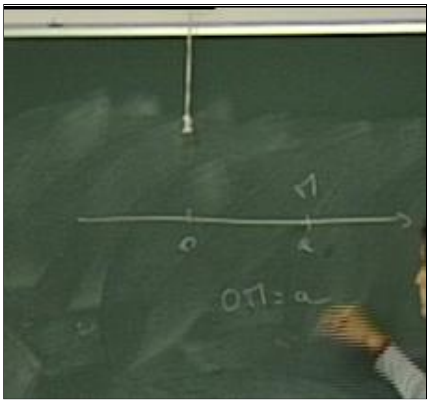


Figure 113 : réponse d'Anaïs à la 22^e minute

Clotilde remplace *a* par le nombre 3 et M par F.

Clotilde : le point F, le point F d'abscisse 3, d'abscisse plus 3, là on est chez, on est dans les nombres positifs quelle va être sa distance par rapport au point O d'abscisse 0 (elle ajoute le point O sur la droite) ?

Des élèves : 3

Clotilde :donc ça va être 3, donc si maintenant si on l'appelle M et si on lui donne comme abscisse a (elle remet M et a à la place de F et 3) et que a est strictement positif, enfin positif ou nul, a, d'accord ?

Élève : oui mais « R plus » ?

Clotilde : de quoi … la distance ?

Élève : ouais

Clotilde : parce que tu veux dire que ça dépend si *a* est positif ?

Élève : non il y a… sur quelle… sur quelle… à quelle place il est placé sur la droite ? 23 min

Clotilde : voilà la place où il est placé sur la droite comme tu dis on l'appelle petit *a*, d'accord, son abscisse, donc la distance c'est petit *a*

Clotilde s'assied de nouveau à son bureau.

Clotilde : Chut ! On continue avec Loïc. Maintenant le point N, t'as pas trouvé ? Le point N il a comme abscisse b et c'est de l'autre côté (Clotilde se lève pour placer le point N à gauche de O sur la droite graduée). On essaie de trouver cette distance ON.

Élève : c'est pareil

Élève : *b*

Clotilde : alors pour en être convaincu essayez avec des exemples précis, si c'est -2 son abscisse … OG si G a pour abscisse -2 ça va être quoi comme distance

Des élèves : 2

Clotilde : d'accord ? Si G a l'abscisse -3 ça va être quoi comme distance

Des élèves : 3 24 min

Clotilde : si G a pour abscisse petit b ça va être quoi la distance

Loïc : b

Clotilde : tu es sur ? Quand c'est -2 tu as trouvé combien ?

Loïc : 2

Clotilde : donc quand c'est b tu vas trouver quoi, à chaque fois tu trouves quoi ?

Des élèves : moins b

Loïc : mais une distance ça peut pas être négatif ?

Clotilde : mais b il est comment là s'il est là ? Il est négatif, d'accord ? Donc la distance entre O et mon point N qui est quelque part par là, mon petit b c'est déjà négatif, c'est un nombre négatif, on est sur qu'il est négatif, donc comme une distance c'est positif, la distance ON c'est moins b, c'est l'opposé de b, d'accord ? <silence> Clotilde s'assied de nouveau à son bureau. 25 min

Clotilde : bon alors après vous remplissez, vous êtes arrivés à le remplir le tableau en dessous ?

Élève : euh distance de P à Q …

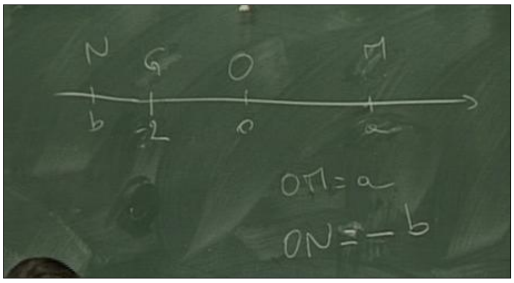


Figure 114 : 25e minute

Clotilde : on place deux points P et Q, on leur donne une abscisse précise, et on essaie de calculer p-q puis q-p et après il faut que vous trouviez la distance entre p et q, d'accord ? Lorna quand p valait 5 et q valait 3 tu as trouvé quoi comme valeur de p-q ?

Lorna : 2

Clotilde : q-p ?

Lorna : -2

Clotilde : et la distance entre p et q ?

Lorna : 2

Clotilde : Rémi tu as entendu ? Alors on va recommencer ! Si p vaut 5, l'abscisse de P c'est 5 l'abscisse de Q c'est 3, la valeur de p-q c'est ? <silence> Redis lui il n'a pas entendu, elle te le redit, q-p ?

Lorna : -2

Clotilde : et la distance ?

Lorna : 2

Clotilde : d'accord, la distance de p à q est quelque chose qui est toujours positif. 26 min On continue avec Lucas, si p vaut 15 et si q est égal à 11, p-q est égal à ?

Lucas : à 5

Clotilde : et q-p ?

Lucas : -5

Clotilde : d'accord et la distance entre *p* et *q* sera de ?

Lucas : 5

Clotilde : merci, on continue avec Tom

Tom : c'est lequel ?

Clotilde : le troisième, chut !

Tom : -4-2 p-q -6, q-p 6, distance de p à q 6

Clotilde : d'accord, le suivant Claire

Claire : distance p q -4 et distance q p 4

Clotilde : tu es sure qu'il y a écrit distance p q et distance q p ?

Claire : ben oui

Clotilde : 27 min on a dit qu'une distance c'était tout le temps comment ?

Claire : positif

Clotilde : Positif ! Distance $p\,q\ -4$ ça marche pas, c'est $p-q$ qu'on calcule, c'est une différence $p-q$ est égal à ? Claire ?

Claire : -4

Clotilde : d'accord, q-p est égal à ?

Claire : 4

Clotilde : et la distance entre p et q ? Est-ce qu'il y a une différence entre la distance entre p et q et la distance entre q et p ? Claire ?

Claire : non

Clotilde : c'est la même chose hein ? On continue avec Quentin

Quentin : $p-q\ -8-3\sqrt{7}$, q-p $3\sqrt{7}+8$

Clotilde : on l'écrit au tableau, p redis moi 28 min

Quentin : $-8-3\sqrt{7}$

Clotilde : donc là tu as trouvé $-8-3\sqrt{7}$, et donc là ?

Quentin : $3\sqrt{7}+8$

Clotilde : et donc le dernier c'est ?

Quentin : $3\sqrt{7}+8$

Clotilde : comment t'as fait pour trouver ? 29 min

Quentin : euh…

Élève : pourquoi c'est plus 8 ? (le professeur n'entend pas la question)

Clotilde : on prend p… (Clotilde s'interrompt) qui c'est qui a un problème ? Khalil il y a un problème ? Bon, pardon je t'ai coupé.

Quentin : euh… c'est la soustraction…

Clotilde : c'est celui de ces deux nombres qui va être comment ? (elle montre les colonnes p-q et q-p)

Quentin : positif

Clotilde : d'accord, c'est celui de ces deux nombres qui va être positif, j'ai choisi le positif entre les deux

Élève : madame je ne comprends pas pourquoi c'est +8 à q-p

Clotilde : parce que p c'est…

Élève : p c'est -8

Clotilde : oui mais moins moins 8 ça fait ?

Élève : +8

Clotilde : d'accord ? on l'écrit pas ?

Clotilde : On continue Julien pour le dernier 3,14 et π, p moins q ?

Julien : environ 0,00 euh moins 0,00

Clotilde : mais pourquoi environ, donne-nous une valeur exacte plutôt

Élève : mais c'est infini 30 min

Julien : ah 3,14-π

Clotilde : d'accord, on vous dit pas de donner des valeurs approchées pour l'instant on ne donne que des valeurs exactes

Julien : 3,14-π et π-3,14

Le professeur écrit ce que dicte l'élève dans les deux colonnes du tableau : p-q et q-. Elle désigne les colonnes $p - q$ et $q - p$ et demande à Julien :

Clotilde : pourquoi tu as pris celui là plutôt que celui là ?

Julien : parce que c'est une valeur positive

Clotilde : d'accord ; on prend celui des deux qui est positif, d'accord ?

Le professeur commente le nombre de la troisième colonne :

Clotilde : En fait la distance de p à q, entre l'abscisse p et l'abscisse q, nous on appelle ça la valeur absolue, on va travailler… ça s'appelle la valeur absolue et on le note comme ça (*elle écrit |p - q| au tableau*), valeur absolue de ce nombre p - q, 31 min donc la valeur absolue de p - q c'est celui entre ces deux nombres là (*elle montre les colonnes p - q et q - p du tableau*) qui sera positif, c'est la, c'est comme la distance entre ces deux abscisses, donc vous regardez celui de ces deux nombres qui est positif, c'est la valeur absolue, on va le … on va le noter (grand soupir) valeur absolue. Vous prenez votre cours dans la partie leçon.

Clotilde prend des feuilles qu'elle distribue aux élèves.

Figure 115:à la 31e minute

32 min **Clotilde** : donc la feuille que je vous distribue vous la collez à la suite dans la partie leçon.

Sami : madame j'ai une question pour le devoir

Clotilde : ah c'est pas vraiment le moment là

Sami : (il montre au professeur un énoncé du livre) mais comment on peut dire que les points sont cocycliques s'ils ne sont pas sur le même cercle

Clotilde : les points qu'on te demande de montrer qu'ils sont cocycliques ils doivent être sur le même cercle

Sami : et là ils ne le sont pas

Clotilde : mais ce n'est peut-être pas celui-là (Clotilde s'éloigne, Sami rigole avec ses voisines)

33 min **Clotilde** : donc vous prenez un stylo vert, vous soulignez grand trois valeur absolue. (Clotilde s'assied à son bureau) Donc une fois que vous avez fait votre découpage vous soulignez en vert grand trois valeur absolue. Anaïs nous t'attendons !

Sami découpe très méticuleusement sa feuille pour la coller, et chiffonne la bande de papier qu'il pose sur son bureau devant lui.

Clotilde : donc en vert grand 3 valeur absolue, petit 1 distance entre deux nombres et définition de valeur absolue de p-q

34 min **Clotilde** : Khalil tu te concentres et tu lis la leçon s'il te plait.

Khalil : Distance entre deux nombres et définition de p moins q

Clotilde : non, alors on a dit en franç… notre nouveau mot là, valeur absolue, notre nouvelle distance, on la note avec deux barres, et donc quand il y a une valeur entre deux barres, on dit valeur absolue de ce qu'il y a à l'intérieur, donc valeur absolue de p moins q, vas y tu peux y aller maintenant

Khalil : (il lit la feuille) la distance entre deux nombres réels p et q est celui des deux nombres p-s et q-p qui est positif ou nul. Cette distance se note valeur absolue de p-q et se lit valeur absolue de p-q

Clotilde : donc elle se note entre deux barres verticales et elle se lit valeur absolue de p-q, remarque vas y

Sami est complètement occupé à coller sa feuille dans son cahier

Khalil : une valeur absolue est toujours positive puisque c'et une distance, conséquence la valeur absolue de x notée deux barres x est la distance de x à zéro. 35 min

Clotilde : d'accord bon, retenez surtout que c'est une distance donc que c'est tout le temps positif. Exemples il faut calculer valeur absolue de 5-3, de 15-11, de -4-2 etc. allez y vous le mettez au crayon on le corrige ensemble, essayez de le faire tout seul et après on le corrige ensemble.

Élève : de x à zéro ?

Clotilde : c'est la distance qu'il y a entre le x et le zéro

Clotilde se lève et va vers une élève qui a posé une question à propos de $|5-3|$

Clotilde : tu calcules entre ces deux nombres, la différence de ces deux nombres, et tu prends la différence qui est positive, là on va trouver 2 ou –2, on prend lequel ?

Élève : on prend 2

Clotilde : voilà, d'accord

Élève : c'est 2 en fait

Clotilde : tout à fait

36 min Le professeur va voir Sami qui pose une question sur |-4-2|

Élève : Madame ?

Clotilde : oui

Élève : Si c'est négatif par exemple là moins 4 moins 2 ça fait moins 6, on prend 6 ?

Clotilde : voilà, on prend le nombre positif

Le professeur tout en donnant cette réponse prend le papier chiffonné de l'élève sur le bureau et part avec en continuant à le chiffonner dans ses doigts et en allant vers d'autres élèves

Élève : on prend quoi ?

Clotilde : C'est la distance qu'il y a entre moins 4 et 2 donc ça fait 6. Qui c'est qui a dit on prend quoi ? Parce qu'on a dit que c'était une distance entre deux abscisses, donc c'est un nombre positif, voilà.

Élève : mais ça va nous servir à quoi ça madame ?

Clotilde : ça va nous servir après à, à …

Élève : je sais quoi

Clotilde : et bien tant mieux, profitons en, et bien voilà, à comprendre ce que c'est une valeur absolue

Le professeur circule en triturant son bout de papier,

Clotilde : tu as un chewing-gum ?

Élève : non

Clotilde : va le cracher et tu copieras 50 fois pour la prochaine fois

37 min

Clotilde : c'est bon pour les premiers ?

La correction commence, le professeur s'assied sur son bureau et interroge à l'oral.

Élève : madame !

Clotilde : alors valeur absolue de 5 –3 tu as trouvé quoi ?

Élève : 2 mais ce n'est pas pour ça que je pose ma question

Clotilde : alors vas y, 2 c'est bon après pose ta question

Élève : Quand c'est – 4-2 égal – 6, ça veut dire quoi, moi je sais pas, on écrit quoi ?

Clotilde : égal quoi je n'ai pas compris, quand on écrit ?

Élève : moins 4 … valeur absolue de – 4 – 2 c'est – 6 ?

Clotilde : Qu'est-ce qu'on a dit, que c'était comment une valeur absolue ? Comme une distance, alors c'est toujours ?

Élève : positif

Clotilde : Donc ça peut pas être –6,

Élève : mais c'est quoi ?

Clotilde : c'est 6, c'est la distance entre … c'est $-4-2$ (elle représente au tableau à main levée une droite graduée avec les points P et Q d'abscisses respectives -4 et 2 et marque les 6 unités entre les deux points) 38 min c'est la distance entre deux points, Khalil tu poses une question tu écoutes la réponse s'il te plait, c'est la distance entre deux points il y en a un qui a comme abscisse – 4 l'autre qui a pour abscisse 2, la distance c'est 6.

Elle pose la craie, un instant de silence pendant lequel elle chiffonne encore énergiquement le bout de papier entre ses deux paumes, et elle vient reprendre la place qu'elle avait appuyée sur le bureau.

Clotilde : Lucas, 15-11, la valeur absolue de 15-11 tu as trouvé ?

Lucas : 4

Clotilde : d'accord, Adrien, la valeur absolue de -4-2

Adrien : 6

Clotilde : d'accord, on va faire l'autre parce que celle là je l'avais faite au tableau

Clotilde : la valeur absolue de 7 moins moins 3, Adrien

Adrien : 10

Clotilde : comment ?

Adrien : 10

Clotilde : d'accord, la distance entre le point d'abscisse 7 et celui d'abscisse –3, c'est 10 39 min

Élève : où c'est qu'il faut mettre les deux barres ?

Clotilde : dans la réponse ?

Élève : dans la réponse

Clotilde : Non alors, vous calculez votre euh … on a dit que c'était 7 moins moins 3 par exemple (elle écrit au tableau en même temps |7-(-3)|) on veut la valeur absolue c'est comme si on vous demandait la distance entre ces deux points, vous donnez votre réponse, la distance entre mes deux points, la valeur absolue c'est 10, et là il n'y a plus de barre à mettre (elle complète au tableau l'égalité |7-(-3)|=10). D'accord ? on continue la valeur absolue de -8-8 (Clotilde s'assied de nouveau sur le bureau), Cécile

Cécile : 16

Clotilde : d'accord 16, et puis le dernier la valeur absolue de 3,14-π, 40 min il était dans notre petit tableau, chut, on n'a pas entendu

Cécile : π -3,14

Clotilde : très bien c'est π -3,14, d'accord, c'est le nombre positif entre p-q et q-p. (Clotilde s'assied sur la chaise de sn bureau) Donc en dessous on vous dit calculer en donnant leur valeur exacte les nombres A, B, C. Donc maintenant on a une nouvelle, une nouvelle notion qui est la valeur absolue, donc avant de faire vos … vos additions vous calculez d'abord les valeurs absolues, donc allez y calculez A B et C. <silence> Il faut calculer dans la leçon là où vous avez A B et C, trois nombres qu'il vous faut calculer 41min

Élève : avec la calculette ?

Clotilde : comme tu veux

Élève : on commence à calculer entre les…

Clotilde : entre les quoi ? entre les petites barres ? On commence par calculer les valeurs absolues les valeurs absolues sont prioritaires par rapport à l'addition, d'accord, donc on commence par calculer les valeurs absolues, une fois qu'on a calculé les valeurs absolues on calcule les additions.

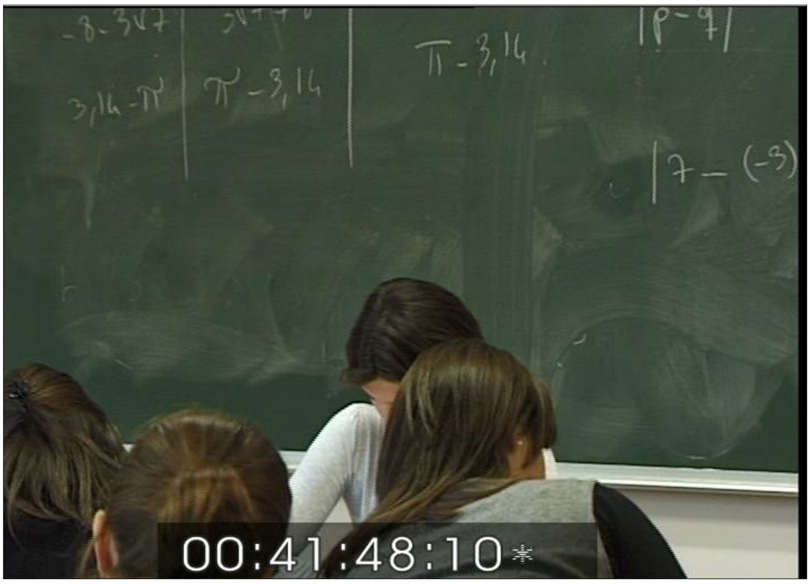


Figure 116 : calcul des nombres A, B et C

Clotilde se lève et va voir ce qu'écrivent des élèves. 42 min Elle fait un commentaire en passant.

Clotilde : et après il faut un résultat final d'accord.

En s'arrêtant devant une autre élève.

Clotilde : OK on calcule ça, on donne sa valeur absolue, vas y égal, donc la valeur absolue c'est quoi ? voilà ! et après celui là celui là et après vous faites l'addition.

Clotilde se dirige vers un autre élève qui pose une question :

Élève : il peut y avoir un plus dans les…

Clotilde : il peut y avoir un plus un moins un multiplié il y a ce qu'on veut, en fait c'est comme une parenthèse vous la calculez et vous prenez sa valeur positive, si vous trouvez -6 ça devient 6 si vous prenez … d'accord ?

Clotilde à un autre élève :

Clotilde : d'accord et la valeur absolue de 2,4 c'est quoi ?

Élève : <silence> je ne sais pas

Clotilde : on a dit que c'était quoi, la valeur absolue d'un nombre c'était quoi ? <silence> La distance entre ces deux tu as trouvé 2,4 43 min

Élève : oui

Clotilde : donc tu prends 2,4 comme valeur absolue d'accord et si tu avais trouvé moins…

Élève : c'est ce que j'ai fait

Clotilde : oui mais là tu mets encore valeur absolue (elle fait le signe des deux barres avec ses mains) ça veut dire que tu ne l'as pas calculée ta valeur absolue tu as gardé tes deux barres, il faut l'enlever, c'est comme si tu me disais que … c'est comme quand tu me parles d'une distance, une fois que tu l'as trouvée ta distance, c'et plus la peine de mettre tes valeurs absolues d'accord ?

Élève : pourquoi entre p-q là il y a un plus ?

Clotilde : parce que q il est peut-être positif ou négatif, si c'est p là regarde on avait 7-(-3) donc c'est bien p-q mais c'est… c'est… tu aurais pu l'écrire 7+3, d'accord ?

Clotilde s'éloigne et va observer d'autres élèves

Clotilde : OK il n'y a que des positifs, hein ? <silence> il faut faire étape par étape hein !

Clotilde (à un élève) : OK alors ça c'est comme une distance on a vu d'accord ? 44 min Alors une fois que tu as calculé ta distance tu donnes sa valeur tu mets plus les valeurs absolues, tu as trouvé que c'est 2,4 une fois que tu dis que la distance entre Paris et Montpellier c'est 750 km, tu dis pas distance sept cent… tu dis voilà je l'ai trouvé donc c'est ça

Un élève demande de l'aide, le professeur s'approche :

Clotilde : alors c'est quoi le problème ? Tu vas calculer cette valeur absolue là, ça fait quoi la distance entre ces deux points, calcule la, tape sur ta machine,

Élève : 2,4

Clotilde : ouais, et tu prends entre 2,4 et –2,4 tu prends le positif des deux

Élève : en fait je fais que additionner à chaque fois les deux

Clotilde : non, tu fais que faire l'opération qu'ils donnent tu regardes ton résultat et tu donneras le résultat positif

Élève : c'est trop facile

Clotilde : et oui c'est trop facile, c'est trop facile mais c'est nouveau donc on va le … c'est bon ? D'accord…

Une élève appelle le professeur : inaudible

Clotilde : maintenant c'est fini là tu as ton addition tu les ajoutes

Élève : oui mais lui il était négatif je l'ai mis positif

Clotilde : très bien 45 min

Élève : ah bon

Un élève pose une question : inaudible

Clotilde : ah on a vu que c'était quoi ça, tu trouves ? Tu trouves moins 6,12,

Élève : ah oui c'est moins

Clotilde : tu aurais du faire quoi ?

Élève : j'aurais du faire… j'aurais du faire c'est peut-être 7,08-1,2

Clotilde : voilà et donc tu trouverais 6,12, d'accord ?

Clotilde se déplace vers un autre élève :

Clotilde : pareil c'était pour le 6 euh…

Élève : non parce que là je m'étais trompé

Clotilde : tu avais trouvé quoi toi ?

élève : moi j'avais trouvé 8,28 j'avais additionné en fait

Clotilde : d'accord oui non faut… ouais… mais après si tu trouves quelques chose de négatif on est d'accord comme c'est une distance ça devient positif

Élève : j'y arrive pas au C

Clotilde : ah le C c'est difficile ! 46 min Le C pour pouvoir enlever vos valeurs absolues il faut qu'à l'intérieur de chaque valeur absolue vous regardiez si ce qu'il y a dedans c'est positif ou négatif

Élève : C'est négatif

Clotilde : Alors si c'est négatif il faut échanger p et q pour que ça devienne positif, puisqu'on a p-q, si vous trouvez que p-q c'est négatif quand vous enlevez la valeur absolue ça deviendra q-p, pour donner le nombre positif entre p-q et q-p, ça c'est positif ou pas ? Non ça c'est négatif, donc c'est 2-$\sqrt{3}$.

Clotilde : et au premier vous n'avez pas tous trouvé pareil, ça va pas là, combien tu as trouvé ?

Clotilde vérifie les résultats des calculs du nombre A avec deux élèves puis conclue pour toute la classe 47 min

Clotilde : donc au premier apparemment …

Clotilde circule de nouveau dans les rangs et s'adresse à un élève

Clotilde : et tu n'as pas perdu des virgules, tu as arrondi ?

Élève : non

Clotilde : et pourquoi tu as 10 ?... Refais moi cette soustraction là 1,2-7,08

A un autre élève

Clotilde : et tu trouves quelques chose de positif ou de négatif quand tu fais ça ? Attends je vais le marquer au tableau par ce qu'apparemment

Elève ça fait 16,36

Clotilde : 16 36 un tiers

48 min Clotilde écrit au tableau : $A = 16{,}36 \; B = \frac{1}{3}$

Clotilde : *a priori* vous avez tous trouvé ça aux deux premiers, après vous avez des problèmes pour le C

Clotilde recopie l'expression du C au tableau. Elle écrit :

$$C = \left|\sqrt{3}-2\right| + \left|3-2\sqrt{3}\right| - \left|5+\sqrt{3}\right|.$$

Clotilde : alors on va le faire étape par étape, on va reprendre ; à l'intérieur de votre valeur absolue, vous avez votre abscisse p moins votre abscisse q là (*elle écrit p et q respectivement sous* $\sqrt{3}$ *et sous 2*), 49 min vous regardez la soustraction p-q, si p-q est positif, vous pouvez enlever les valeurs absolues, c'est la bonne distance, si p-q est négatif, il faut que vous calculiez… que quand vous enlevez la valeur absolue ça devienne q-p, d'accord ? Donc comment vous faites, quand vous le faites, vous le faites à la calculatrice, si vous trouvez quelque chose de positif vous touchez à rien, si vous trouvez quelque chose de négatif vous inversez vos deux… votre p et votre q, d'accord ? Alors qui c'est qui n'était pas d'accord il parait que je me suis trompée dans un calcul

Élève : moi

Clotilde : tu es sur ? peut-être !

Clotilde va voir l'élève qui pense qu'il y a une erreur

Clotilde : mais qu'est-ce que t'as fait ? vas-y

Elève : ben je sais pas

Clotilde : ouais, impeccable, OK, et là on trouve combien ?

Élève : là ?

Clotilde : ouais, d'accord la distance entre ces deux nombres, c'est un nombre qui est comment ? positif ou négatif ?

Élève : Négatif

Clotilde : la distance…

Élève : ah oui !

Clotilde : la distance elle sera toujours positive, le calcul il est peut–être négatif 50 min, d'accord, donc là je cherche la distance, donc si je cherche la distance je trouve -5,88 c'est pas bon c'est pas la distance, du coup la distance je fais q-p c'est pile l'opposé, il suffit de prendre l'opposé et après tu ajoutes tout ça, d'accord ? Tu as trouvé comme lui Rémi ? C'est où ?

Rémi : là haut

Pendant ce dernier épisode Sami fait rigoler ses voisines de droite sans que le professeur ne le voit.

Clotilde : tu calcules la distance entre ça et ça, oui ? Tu trouves… toi dans ton calcul tu trouves -5,88 ça va oui ? Toi tu as trouvé quoi (Clotilde s'adresse au voisin de Rémi) ?

Élève : 16,36

Clotilde : écoute tu trouves -5,88, -5,88 c'est pas une distance ! C'est quoi la distance entre les deux, ça va être quoi ?

Rémi : plus 5,88

Clotilde : d'accord, et dans ces cas là on trouve pareil. Vous y arrivez pour les racines ?

Clotilde revient au centre vers la place de Sami qui cache un papier dans son cahier en voyant s'approcher Clotilde. 51 min Clotilde se dirige vers le tableau quand Sami l'appelle.

Clotilde : qu'est-ce qu'il y a Sami ?

Sami : En fait il faut inverser, il faut inverser les symboles les plus, c'est ça ?

Clotilde : Non on inverse les 2, on prend l'opposé de ce nombre.

Dès que Clotilde a le dos tourné Sami regarde ses voisines avec un sourire malicieux et met sa tête sur ses bras appuyés sur le bureau

Clotilde va au tableau pour corriger le C

Clotilde : Clément celui là (elle montre $\sqrt{3}-2$), tu avais trouvé quelque chose de positif ou de négatif quand tu as calculé,

Clément : négatif

Clotilde : négatif, donc on inverse p et q, ça fait quoi ?

Clément : 2 - $\sqrt{3}$

Clotilde : d'accord. Sami on ne met pas un plus là, ce qu'il nous faut c'est l'opposé de ce nombre, l'opposé de ce nombre il ne suffit pas de changer le plus au milieu, oui ? Vas-y (elle s'adresse à Clément) continue après, $3-2\sqrt{3}$, c'était positif ou négatif ?

Clément : positif 52 min

Clotilde : positif donc c'est la bonne distance on garde la même chose et pour finir

Clément : $-5-\sqrt{3}$

Clotilde écrit $-(5+\sqrt{3})$

Clotilde : c'était ça que tu voulais dire (en montrant ce qu'elle vient d'écrire). Le dernier alors faites attention le dernier on calcule $5+\sqrt{3}$ on trouve quelque chose de positif donc on dit hop on peut enlever les valeurs absolues (la sonnerie retentit) oui mais il faut faire attention au signe qu'il y a devant la valeur absolue quand on enlève la valeur absolue s'il y a un moins devant on met des parenthèses, d'accord ? On finira de le corriger demain ou plutôt mercredi. Pour mercredi vous rendez le DM.

Clotilde écrit ce rappel au tableau.

53 min Les élèves rangent leurs affaires et sortent.

Figure 117 : fin du cours de Clotilde du 22 octobre 2007

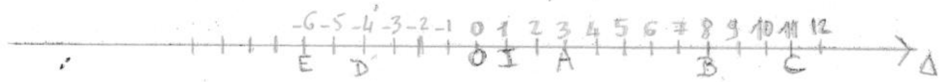
11.19 Activité préparatoire aux valeurs absolues chez Clotilde

2nde5

ACTIVITE PREPATOIRE AUX VALEURS ABSOLUES

Distance entre deux points d'une droite graduée

a) Tracer une droite graduée Δ et placer les points *O, I, A, B, C, D* et *E* d'abscisses respectives : 0 ; 1 ; 3 ; 8 ; 11 ; -4 ; -6.



b) Déterminer les distances suivantes, en précisant à chaque fois l'opération à effectuer : *AB ; CA ; OA ; CI ; DA ; BE ; OE ; ED.*

AB = 5 CA = 8 OA = 3 CI = 10 DA = 7 BE = 14 OE = 6 ED = 2

~~AB = [I ; B] ∩ [A ; C] = [1 ; 8] ∩ [3 ; 11] = [3 ; 8] / CA = [I ; C] ∩ [A ; +∞[= [1 ; 11] ∩ [3 ; +∞[= [11 ; 3] / OA = [D ; A] ∩ [O ; B] = [-4 ; 3] ∩ [0 ; 8] = [0 ; 3]~~

~~CI = [O ; +∞[∩ [C ; I] = [11 ; +∞[∩ [11 ; 1] = [11 ; 1] / DA = [E ; A] ∩ [D ; 8] = [-6 ; 3] ∩ [-4 ; 8] = [-4 ; 3] / BE = [8 ; ...~~

c) *M* est un point de la droite Δ d'abscisse *a*, avec $a \in \mathbb{R}+$. Exprimer la distance *OM* en fonction de *a*.

~~OM = [0 ; +∞[∩ [0 ; +∞[= [0 ; +∞[= ℝ+~~

OM = a

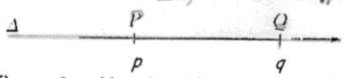
d) *N* est un point de la droite Δ d'abscisse *b* , avec $b \in \mathbb{R}-$. Exprimer la distance *ON* en fonction de *b*.

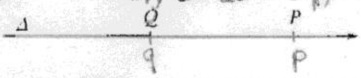
~~ON =]-∞ ; 0] ∩]-∞ ; 0] =]-∞ ; 0] = ℝ-~~

ON = b

e) *P* et *Q* sont deux points de Δ, d'abscisses respectives *p* et *q*. Exprimer la distance *PQ* en fonction de *p* et *q* pour chaque situation.

~~PQ = [p ; +∞[∩ [q ; +∞[= [p ; q]~~   ~~PQ = [p ; +∞[∩ [q ; +∞[~~ = [q ; p]





f) Compléter le tableau ci-dessous. Que remarque-t-on concernant la distance entre deux nombres ?

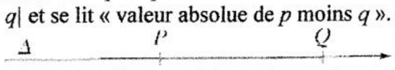
p	*q*	*p − q*	*q − p*	*distance de p à q*
5	3	2	-2	~~[-2 ; 2]~~ 2
15	11	4	-4	~~[-4 ; 4]~~ 4
-4	2	-6	6	~~[-6 ; 6]~~ 6
-7	-3	-4	4	~~[-4 ; 4]~~ 4
-8	$\sqrt{63}$	$-8-3\sqrt{7}$	$3\sqrt{7}+8$	~~[-8 ; √63] ; [√63 ; -8]~~ $3\sqrt{7}+8$
3,14	π	3,14 − π	π − 3,14	π − 3,14

11.20 La fiche de cours sur la valeur absolue chez Clotilde

III- Valeur absolue

1- Distance de deux nombres et définition de $|p - q|$

La distance entre deux nombres réels p et q est celui des deux nombres $p - q$ ou $q - p$ qui est positif ou nul.
Cette distance se note $|p - q|$ et se lit « valeur absolue de p moins q ».



Remarque : Une valeur absolue est toujours positive puisque c'est une distance.

Conséquence : La valeur absolue de x, notée $|x|$, est la distance de x à zéro.

Exemples : Calculer :
$|5 - 3| =$; $|15 - 11| =$; $|-4 - 2| =$; $|7-(-3)| =$; $|-8 - 8| =$; $|3{,}14 - \pi| =$

- Calculer, en donnant leur valeur exacte les nombres A, B et C:

A= $|2{,}8 - 0{,}4| + |7{,}58 + 0{,}5| + |1{,}2 - 7{,}08|$

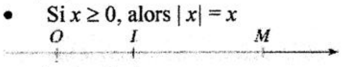
B= $\left|\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right| - \left|\frac{2}{3} - 1\right| + \left|\frac{4}{3} - 1\right|$

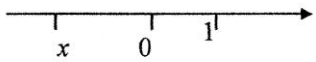
C= $\left|\sqrt{3} - 2\right| + \left|3 - 2\sqrt{3}\right| - \left|5 + \sqrt{3}\right|$

2- Propriétés

Pour tout x réel :

- $|x| \geq 0$
- Si $x \geq 0$, alors $|x| = x$ et si $x \leq 0$, alors $|x| = -x$





- $|-x| = |x|$
- $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

3- Résolution d'équations du type : $|x - a| = b$

Exemple : On cherche à résoudre l'équation : $|x - 3| = 2$.

Sur une droite graduée, on note O l'origine et A le point d'abscisse 3. Représenter cette droite.

Compléter le tableau suivant et placer chaque nombre x donné sur la droite:

x	$x - 3$	$\|x - 3\|$	$\|x - 3\| = 2$?
2	-1	1	non
4			
1			
0			
5			

En déduire une méthode graphique permettant de résoudre l'équation : $|x - 3| = 2$.

....

....

....

Résoudre, selon le même procédé, l'équation : $|x + 5| = 4$.

....

....

11.21 Début du cours de Clotilde sur les intervalles dans le chapitre 3

Chapitre 3 : **Intervalles et Valeurs absolues**

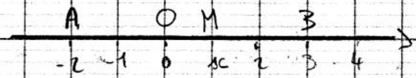
I) Intervalles de $\mathbb{R}$

1) Notion d'intervalle

Soit D une droite, muni d'un repère $(O, \vec{i})$.
Soit 2 pts A et B d'abscisses respectives : -2 et 3.
Soit M un pt de D d'abscisse x.

- Si $M \in [AB]$ alors $-2 \leq x \leq 3$, ce que l'on note $x \in [-2,3]$.
$[-2;3]$ est appelé intervalle fermé de bornes -2 et 3.

- Si $M \in [AB]$ mais $M \neq A$ et $M \neq B$ alors $-2 < x < 3$, ce que l'on note $x \in]-2,3[$.
$]-2;3[$ est appelé intervalle ouvert de bornes -2 et 3.



- Si $M \in [OB)$ demi-droite d'origine O contenant B alors $x \geq 0$.
On note $x \in [0, +\infty[$
$[0, +\infty[$ est l'intervalle semi-fermé à gauche de bornes 0 et $+\infty$.

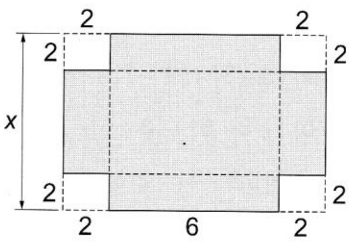
- Si $x < -2$, on note $]-\infty, -2[$.

11.22 Exercices proposés par Clotilde en lien avec la valeur absolue dans le cadre géométrique

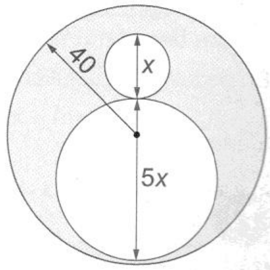
4. Encadrement

35 Une boîte a un volume compris entre 75 cm^3 et 80 cm^3. Elle est fabriquée dans un rectangle de carton de côté x cm et 10 cm dont les quatre coins sont découpés en carré de 2 cm.

Déterminer un encadrement de x.



66 La figure représente une pièce métallique percée. La somme des périmètres des deux cercles intérieurs est entre 187 mm et 190 mm.



1° a) Exprimer la somme des périmètres $P(x)$ des deux cercles en fonction de x.

b) Exprimer l'aire $A(x)$ de la pièce métallique en fonction de x.

2° a) Déterminer un encadrement de x par deux décimaux d'ordre 1.

b) Encadrer l'aire par deux entiers.

11.23 La deuxième fiche de cours de Clotilde sur la valeur absolue

Ch2 les valeurs absolues

L'expérience prouve que les élèves ont du mal à comprendre les valeurs absolues, alors qu'ils cherchent souvent des complications là où il n'y en a pas. De même que nous avons un prénom et un nom, un réel est caractérisé par deux données : son **signe** et sa **valeur absolue**.

Par exemple – 5 a pour signe – et pour valeur absolue 5 ; 14 a pour signe + et pour valeur absolue 14 ; $-\frac{1}{2}$ a pour signe – et pour valeur absolue $\frac{1}{2}$, etc...

Pour écrire **la valeur absolue d'un réel**, on l'écrit entre deux barres verticales.

Ainsi $|x|$ se lit « valeur absolue de x ».

$|2|$ = ... $|-5|$ = ... $\left|\frac{1}{2}\right|$ = ... $\left|-\frac{3}{4}\right|$ = ...

Facile. Par contre, pour aller plus loin il est nécessaire de maîtriser certaines notions.

Répondre par « vrai » si la proposition est **toujours vraie**, par « faux » sinon.

5 est positif		x^2 est positif	
- 4 est négatif		$-x^2$ est négatif	
x est positif		$1+\sqrt{2}$ est positif	
x est négatif		$1-\sqrt{2}$ est négatif	
$+x$ est positif		$1+x$ est positif	
$-x$ est négatif		$1-x$ est négatif	
l'opposé d'un réel négatif est positif		l'opposé d'un réel est négatif	

+ peut vouloir dire « positif », « addition » ou « du même signe que ».

– peut vouloir dire « négatif », « opposé » ou « soustraction ».

C'est le contexte qui permet de faire la distinction.

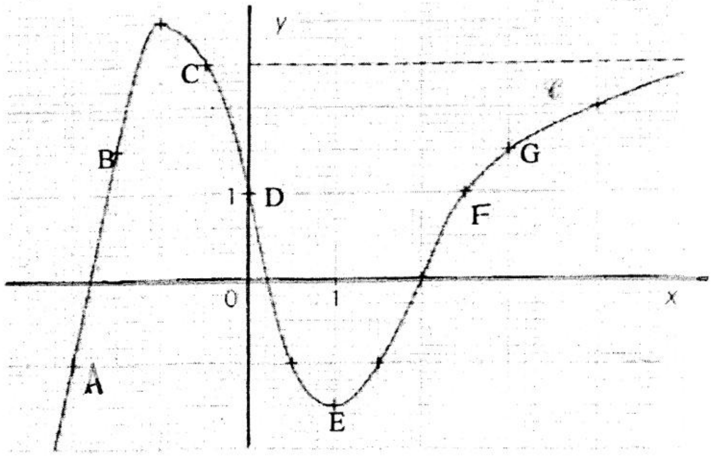
Dans le tableau ci-dessous, écrire le sens du signe + ou – .

+5		$-x$	
- 3		$1-x$	
$5+x$		$x+y$	
$+x$		$\left(-\frac{1}{2}\right)^2$	
$x-6$		$-x^2$	

11.24 Fiche de reprise des notions d'image et d'antécédent

2nde5 **Fonctions : Reprise des notions d'image et d'antécédent**

Exercice 1



On a représenté ci-contre la courbe d'une fonction *f*.

1. Représenter en **bleu** l'axe des abscisses et en **rouge** l'axe des ordonnées.
2. Pour chaque point A, B, C, D, E, F, G , écrire son abscisse en **bleu** et son ordonnée en **rouge**.
3. Schématiser la fonction par une « boîte » où l'on met en entrée les abscisses et en sortie les ordonnées , en **respectant les codes couleurs.**
4. Ecrire pour chacun des points ci-dessus la relation : $f(x) = y$.
5. Quelles sont les images par *f* de : 0 ? -2 ? 2,5 ? 3 ? -0,5 ?
6. Quels sont les antécédents par *f* de : 3,5 ? 1 ? -1 ? 0 ?
7. Combien vaut : $f(-2)$? $f(-1)$? $f(1)$? $f(2)$?
8. Quelles sont les valeurs de x vérifiant : $f(x) = -1,5$? $f(x) = 0$? $f(x) = -1,5$? $f(x) = 1,5$?

Exercice 2

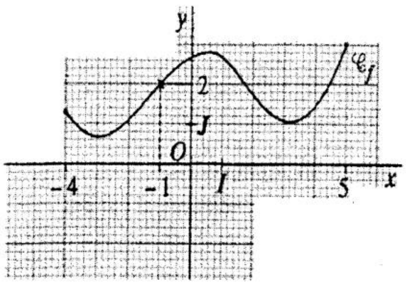
Soit une fonction *f* définie sur l'intervalle [-4 ; 5] .

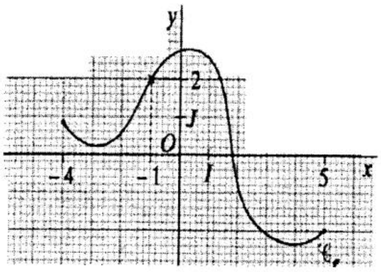
1- On considère dix affirmations relatives à la fonction *f* :

		f	g				f	g
A	-1 a pour image 2	√	√		**F**	3 a pour antécédent 5	√	F
B	2 est l'image de -1	√	√		**G**	$f(3) = 5$	F	F
C	le point de coordonnées (5 ; 3) appartient à la courbe représentative de *f*	√	F		**H**	le point de la courbe d'abscisse -1 a pour ordonnée 2	F	F
D	5 a pour image 3	√	F		**I**	le point de la courbe d'abscisse -1 a pour ordonnée $f(-1)$	F	F
E	$f(-1) = 2$	√	√		**J**	-1 est l'image de 2	√	√

Regrouper les affirmations qui signifient exactement la même chose.

2- Pour chacune des fonctions *f* et *g* représentées graphiquement ci-dessous, indiquer si chacune des dix affirmations du 1 est vraie ou fausse.





Exercice 3

Soit *f* une fonction définie sur l'intervalle] -∞ ; 5] et vérifiant toutes les conditions ci-dessous :

- 0 possède trois antécédents : -4 ; 0 et 2.
- L'image de -5 est -3 et l'image de 1 est 2
- La plus grande image de *f* est 3
- Si $x \leq -5$ alors $f(x) > -3$

Représenter une courbe possible pour la fonction *f*.

11.25 Exercice n° 56 p. 70 dans la classe de Mathieu

Exercice 56 page 71 :

$\widehat{A}$:

Dans le triangle ADO rectangle en O :

* $\tan \widehat{OAD} = \frac{OD}{OA} = \frac{2}{3} = 0,66$.

$\widehat{OAD} = 33°$

Dans le triangle OAB rect. en O :

* $\cos \widehat{BAO} = \frac{3}{4} = 0,75$

$\widehat{BAO} = 41°$

$\widehat{A} = 33° + 41° = 74°$

$AB^2 = AO^2 + OB^2$
$4^2 = 3^2 + OB^2$
$OB^2 = 16 - 9$
$OB^2 = 7$
$OB = \sqrt{7} = 2,6$ à 0,1 cm près.

$\widehat{B}$:

$\sin \widehat{ABO} = \frac{3}{4} = 0,75$

$\widehat{ABO} = 48,5°$ à 0,1 cm p.

~~sin~~ $\widehat{OBC} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{43}} = 0,40$

$\widehat{OBC} = 66,4°$ à 0,1 cm p.

$\widehat{B} = 48,5° + 23,5° =$ ~~[illegible]~~,9

Dans le triangle OBC rectangle en O :

* $\sin \widehat{OCB} = \frac{OB}{BC} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{43}} = 0,40$

$\widehat{OCB} = 23,5°$ à 0,1 cm p

on applique le théorème de Pythagore.

$BC^2 = OC^2 + OB^2$
$(\sqrt{43})^2 = OC^2 + (\sqrt{7})^2$
$OC^2 = 43 - 7$
$= 36$
$OC = 6$ cm.

Dans le triangle OCD rect. en O :

$\tan \widehat{OCD} = \frac{2}{6} = 0,33$.

$\widehat{OCD} = 19,2°$

$\widehat{C} = \widehat{OCB} + \widehat{OCD} = 23,5° + 19,2° = 42,7°$

$\widehat{D} = 360° - \widehat{C} - \widehat{B} - \widehat{A}$
$= 360° - 42,7 - 119,9 - 74°$
$= 128,6°$

11.26 Sujet du devoir n°2 de Clotilde donné le 17 octobre 2007

2^{nde} 5 — CONTROLE N°2 — Mercredi 17 octobre 2007

Calculatrice autorisée

Liste des propriétés de $3^{ème}$ autorisée.

SUJET 2

Exercice 1 *(4 points)*

Soit C un cercle de diamètre [AB]

M et N sont deux points du cercle C situés sur un même arc $\overset{\frown}{AB}$.

Les droites (AM) et (BN) sont sécantes en un point P.

Les droites (AN) et (BM) sont sécantes en un point R.

1. Faire une figure.
2. Montrer que (BM) et (AN) sont des hauteurs du triangle ABP.
3. En déduire que (PR) et (AB) sont perpendiculaires.

Exercice 2 *(3 points)*

L'énoncé « si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales se coupent en leur milieu » est vrai.

a. Ecrire l'énoncé réciproque.

b. L'énoncé réciproque est-il vrai ?

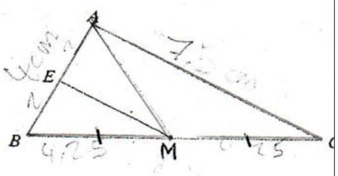
c. Ecrire l'énoncé contraposé.

Exercice 3 (2,5 points)

On considère le triangle ABC rectangle en A tel que $AC = 3\sqrt{2} - 1$ et $BC = 3 + \sqrt{18}$

3. Calculer la valeur exacte de AB^2 et en donner la forme la plus simple possible
4. Donner la valeur arrondie de AB à 10^{-1} prés

Exercice 4 *(6 points)*



On donne le triangle ABC tel que AC=7,5 cm et AB = 4 cm.

[AM] est la médiane issue de A, BM = 4,25 cm et (EM) //(AC).

1) a. Parmi les propriétés citées ci-dessous, quelles sont celles qui sont utilisables en partant des données ?

b. Parmi les propriétés citées ci-dessous, quelles sont celles qui sont utilisables pour démontrer que E est le milieu de [AB].

c. Calculer BE.

2) a. Parmi les propriétés citées ci-dessous, quelles sont celles qui sont utilisables pour trouver la nature de ABC ?

b. Quelle est la nature du triangle *ABC ?(justifier la réponse)*

3) a. Parmi les propriétés citées ci-dessous, quelles sont celles qui sont utilisables pour trouver la valeur d'un angle ?

b. Donner une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{ABC}$.

Liste des propriétés

a) Si un triangle est rectangle, alors on peut calculer le sinus, le cosinus et la tangente d'un de ses angles aigus.

b) Si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

c) Si, dans un triangle, le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

d) Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté.

e) Si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un autre côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu.

Exercice 5 *(4,5 points)*

1. Ecrire ces nombres sans racine au dénominateur $C = \frac{5}{1+\sqrt{2}}$; $D = \frac{1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$

2. Développer puis résoudre l'équation A=0.

$A = x(x-4) - (x+2)(-5+x)$

3. Factoriser :

$B = (x+1) - 3(x^2-1)$

$E = 16x^2 + 1 + 8x$

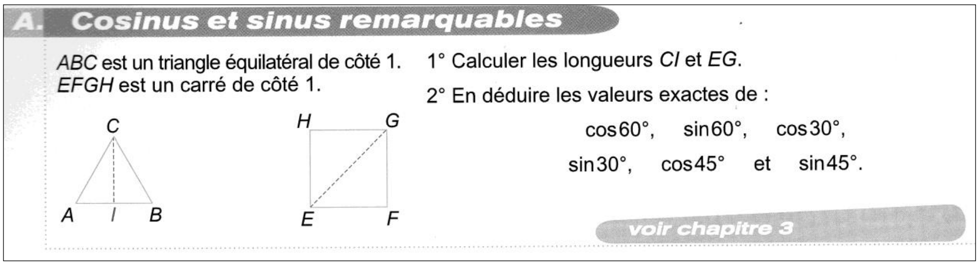
11.27 Verbatim de la séance du 23 mai 2007 chez Mathieu

Mathieu a écrit au tableau en titre Trigonométrie et en première section : I – Introduction.

0 min **Mathieu** : alors c'est la page… et vous prenez votre livre à la page 276… allez 1 min

Mathieu attend que les élèves soient prêts pour se mettre au travail

Mathieu : allez votre livre page 276 et vous allez faire l'activité 1…. Alors je vous laisse un peu chercher et puis après on voit ensemble


A. Cosinus et sinus remarquables

ABC est un triangle équilatéral de côté 1.
EFGH est un carré de côté 1.

1° Calculer les longueurs *CI* et *EG*.

2° En déduire les valeurs exactes de : cos60°, sin60°, cos30°, sin30°, cos45° et sin45°.

voir chapitre 3

2 min Mathieu circule dans la classe

Élève : Monsieur on n'a pas de livre

3 min **Mathieu** : je sais il y en a plein qui n'ont pas de livre…Bon pour le premier je peux écrire l'énoncé… (Mathieu fait les dessins à main levée et écrit les consignes) on vous dit que ABC est un triangle équilatéral, on vous dit que le côté vaut a… ensuite on vous donne un carré aussi… 4 min voilà la première chose qu'on vous demande c'est de calculer AI, on vous demande de calculer cette longueur là et on vous demande de calculer ici FH

5 min **Élève** : I il est au milieu ?

Mathieu : C'est à vous de voir, c'est vrai que là c'est perpendiculaire oui

Élève : c'est le milieu ou pas ?

Mathieu : En fait dans le bouquin c'est vrai que c'est pas précisé mais c'est le milieu oui c'est le milieu c'est un triangle équilatéral et la droite (AI) c'est la médiane 6 min

Mathieu finit d'écrire les questions en silence, les élèves cherchent

Mathieu : allez au travail 7 min

Un élève signale au professeur que ce travail a déjà été fait, Mathieu lui répond qu'il a raison et « qu'on a déjà fait des trucs comme ça[1] ». L'élève insiste pour savoir pourquoi on le refait, Mathieu répond évasivement et conclut en s'éloignant : « non tu as raison de poser la question ».

Mathieu circule en silence et laisse les élèves chercher. 8 min Il s'arrête devant le bureau d'une élève.

[1] Dans le cahier de cours des élèves figure un tableau avec les valeurs particulières des lignes trigonométriques des angles de 30°, 60°, 90° et 0° inséré dans le chapitre de révision sur la géométrie du collège.

Mathieu : et CI vous l'avez calculé ? (inaudible) ah je ne l'aurai pas vu comme ça

Des élèves ont commencé par utiliser les lignes trigonométriques, Mathieu intervient : « dans l'ordre des questions le cosinus 60 tu le calcules après alors que toi tu vas t'en servir pour faire tes…

Élève : et parce que pour calculer CI j'ai utilisé le sinus

Mathieu : Oui ta remarque revient au même, dans l'ordre des questions on te demande d'en déduire le sinus après avoir calculé CI et GE 9 min (inaudible)

Élève : mais on a besoin du sinus

Mathieu : mais non tu peux faire autrement puisque là vous avez un angle droit.

Mathieu : (il montre les côtés du triangle) là vous avez 1, simplement c'est pour respecter l'ordre des questions, sinon c'était bon oui tu pouvais t'en sortir comme ça

10 min **Mathieu** : allez dépêchez vous

Mathieu explique en aparté à des élèves. De nombreux élèves utilisent leur calculatrice.

11 min **Mathieu** : Pourquoi vous ne répondez pas aux choses qui sont demandées là, pourquoi chercher la tangente ? (inaudible) en déduire ça veut dire que tu vas chercher CI et GE sans … à la deuxième question il y a écrit en déduire les valeurs exactes ça veut dire qu'à la première question tu ne les as pas utilisées … donc il faut que tu t'en sortes autrement pour chercher CI et GE que tu utilises autre chose que les angles (inaudible) à part ces sinus là qu'est-ce que vous pourriez utiliser

Élève : Pythagore

Mathieu : … ben voilà c'est beaucoup plus simple il n'y a pas de problème de côté adjacent, il faut chercher à partir d'ici le cosinus et le sinus de 60°,

Élève : inaudible

Mathieu : il faut utiliser le théorème de Pythagore parce que la deuxième question sous-entend que vous n'allez pas utiliser les lignes trigonométriques.

Mathieu : (en aparté avec une élève) donne moi ton stylo, là, jusque là je suis d'accord, donc tu as mis racine de 1 au carré moins 0,5 au carré, sauf que t'as pas … on a jamais vu que ça là … la racine carrée de $a^2 - b^2$ c'est pas la racine carrée de a^2 moins la racine carrée de b^2, ça c'est faux. 14 min

Élève : ah

Mathieu : à la limite tu pourrais faire ton calcul, ça te donne un résultat et après pour avoir le résultat CI …

Élève : ah oui mais ça le résultat…

Mathieu : Et travaillez avec des fractions ne travaillez pas avec des racines carrées… euh avec des nombres à virgule 15 min

Mathieu : (à deux élèves) c'est pas bon ça, j'aimerais que vous l'ayez sous forme de valeur exacte

16 min **Mathieu** : allez on avance un peu sinon on risque d'y passer beaucoup de temps

Mathieu : (au tableau s'adresse à toute la classe) est-ce que vous avez vu là que dans le triangle CIB l'hypoténuse là c'est CB c'est pas CI, donc si vous appliquez le théorème de Pythagore

Mathieu écrit en silence :

17 min on applique le théorème de Pythagore dans le triangle CIB, rectangle en I

$$CB^2 = IB^2 + CI^2$$

d'où $CI^2 = CB^2 - IB^2$

Mathieu : vous êtes d'accord jusque là ?

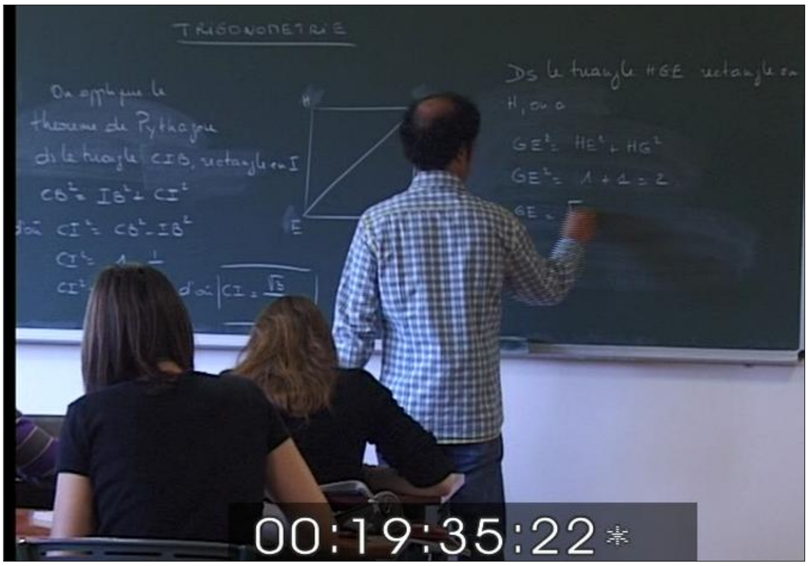
Mathieu : est-ce qu'on a besoin de justifier que le triangle CIB est rectangle en I ou est-ce que vous le voyez tout seul ? … vous l'avez vu ? On pourrait l'écrire mais… ça va ?... Pourquoi il est rectangle en I ? … parce que dans un triangle équilatéral les hauteurs les médianes et les médiatrices tout est confondu 18 min. Donc vous avez CI au carré qui est égal à 1 moins $\frac{1}{4}$ (il écrit en même temps) donc CI au carré vaut $\frac{3}{4}$ d'où CI égale racine de 3 sur 2.

Mathieu : vous devriez aller vite à écrire ça non ?

Mathieu : bon maintenant si je veux calculer GE je me place dans quel triangle ?

Élève : HGE 19 min

Mathieu : HGE donc dans le triangle (il écrit au tableau en même temps) HGE rectangle en H, on a GE carré qui est égal à HE au carré plus HG au carré, donc GE au carré est égal à 1 plus 1 égal 2, jusque là tout va bien, donc GE égal racine de 2. Vous aviez trouvé ça ?



Mathieu : alors dans la deuxième question on vous demande d'en déduire les sinus et les cosinus, donc 60° vous l'avez où dans ces deux figures ?

Élève : inaudible

Mathieu : vous l'avez là par exemple 20 min, vous l'avez où aussi ?

Élève : à HEG

Mathieu : il y a 60° là ?

Élève : non 45

Mathieu : il y a 45° pourquoi, là c'est 90 et là vous avez la diagonale, donc dans un carré ici vous avez 45° (il marque 45° pour l'angle $\widehat{HEG}$), et où avez-vous 30° ?

Élève : inaudible

Mathieu : vous l'avez là (il marque 30° pour l'angle $\widehat{ICB}$) alors je vous laisse faire maintenant sinus cosinus des trois angles…. C'est les vieux trucs de troisième ça côté opposé sur hypoténuse ou côté adjacent sur hypoténuse 21 min

Les élèves cherchent, beaucoup d'entre eux utilisent leur machine, Mathieu circule

22 min **Mathieu** : N'utilisez pas la machine, vous utilisez juste la figure

Mathieu : (en aparté à un élève) tu es d'accord que là il y a un angle de 60° ?

Élève : oui

Mathieu : et il est quelque part dans tes connaissances c'est noté que le cosinus d'un angle c'est le côté adjacent sur l'hypoténuse

Élève : oui

Mathieu : donc si 60° est ici, là tu as un angle de 60°, le côté adjacent c'est lequel ?

Élève : euh…

Mathieu : l'hypoténuse déjà, où est l'hypoténuse dans ce triangle rectangle ACI

Élève : c'est CI 23 min

Mathieu : ACI…

Élève : c'est AC

Mathieu : c'est AC, donc côté adjacent sur hypoténuse ça va donner quoi ?

Élève : le côté adjacent sur l'hypoténuse ?

Mathieu : le côté adjacent de cet angle là où c'est ?

Élève : euh je sais pas

Mathieu : adjacent dans le sens commun qu'est-ce que ça veut dire ?... quelque chose qui est adjacent qu'est-ce que ça veut dire ?

Élève : qui touche

Mathieu ; qui touche alors l'angle de 60° il était avec AC mais AC c'est l'hypoténuse quel est l'autre côté qui forme l'angle ?

Élève : IC

Mathieu : et bien voilà !

Élève : on marque l'angle monsieur ? on marque l'angle dessus ?

Mathieu : non ! je voudrais que vous fassiez le calcul sans la machine … cosinus 60° ça vaut AI sur AC, côté adjacent sur hypoténuse et AI ça vaut combien ?

Élève : AI ?

Élève : inaudible 24 min

Mathieu ; c'est un segment c'est pas en degré c'est pas un angle, et AC ça vaut ?

Élève : 1

Mathieu : 1,moralité un demi sur un ça fait quoi ?

Élève : un demi

Mathieu : conclusion le cosinus de 60 degré c'est un demi, voilà c'est tout

Mathieu : (il repart vers le centre de la classe) laissez tomber la calculette vous n'en avez pas besoin de la calculette, et oui ça ne sert à rien, en déduire ça veut dire qu'il faut utiliser ce que vous avez fait 25 min

Mathieu : bon allez on corrige (il se dirige vers le tableau)

Élève : oh non attendez

Mathieu : j'attends depuis tout à l'heure hein !

Élève : c'est facile

Mathieu : je pensais pas que ça vous poserez autant de problèmes

Élèves : on a fini

Mathieu : oui mais pas tous

Mathieu va corriger au tableau 26 min

Mathieu : bon allez, non je n'attends pas on a passé trop de temps là-dessus

Mathieu écrit au tableau les réponses de la première question $CI = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $GE = \sqrt{2}$

Mathieu : alors le cosinus de 60° je me place dans ce triangle là, alors le cosinus de 60 ° on a dit que c'était AI sur AC mais AC ça vaut 1 donc c'est pas la peine de réécrire AC je peux écrire directement AI et AI ça vaut un demi. Conclusion le cosinus de 60° c'est un demi.

Mathieu écrit en même temps au tableau :

$$\cos 60° = \frac{AI}{AC} = AI = \frac{1}{2}$$
$$\cos 60° = \frac{1}{2}$$

27 min **Mathieu** : maintenant le sinus de 60° vous l'écrivez comment ? Alors ça donne quoi ?

Élève : CI sur AC

Mathieu : ça vaut CI sur AC oui, mais AC ça vaut 1 donc ça vaut CI et CI on a trouvé racine de 3 sur 2. Conclusion le sinus de 60° ça vaut racine de 3 sur 2.

Mathieu a écrit au tableau :

$$\sin 60° = \frac{CI}{AC} = CI = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Mathieu : après on nous demandait le sinus de 30 et les cosinus de 30, donc on a vu que 30° c'était l'angle en C ici (il montre le triangle BCI) donc le sinus de 30 qu'est-ce que vous écrivez ?

Élèves : CI sur CB

Mathieu : ça vaut CI sur CB oui, mais CB c'est 1 donc ça vaut CI ça vaut racine carrée de 3 sur 2.

28 min **Mathieu** : donc le cosinus de 30° c'est racine de 3 sur 2. Après pour le sinus

Élève : IB sur CB

Mathieu : IB sur CB oui, donc ça fait IB tout court et ça vaut un demi, donc le sinus de 30° c'est un demi. Et maintenant le cosinus et le sinus de 45°

Élève : HE sur EG

Mathieu : alors le cosinus de 45 c'est HE sur EG oui donc ça vaut 1 sur racine de 2, alors on pourrait s'arrêter là mais si je veux enlever la racine carrée au dénominateur qu'est-ce que je fais ?

Élèves : on multiplie 29 min

Mathieu : on multiplie, par quoi ?

Élève : racine de 2

Mathieu : alors ça fait racine de 2 en haut et 2 en bas, et le sinus ?

Élève : pareil

Mathieu : ça donne quoi le sinus en fait ? ça vaut HG sur EG ça fait 1 sur racine carrée de 2, et ça fait racine de 2 sur 2.

Mathieu a écrit au tableau tout en parlant :

$$\cos 45° = \frac{HE}{EG} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 45° = \frac{HG}{EG} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Mathieu : Voilà et comme l'a si bien dit Valentin tout à l'heure, Monsieur on l'a déjà fait ça, c'est vrai on l'a déjà fait … il y en a qu'un qui l'a vu… on avait fait un petit tableau on avait rangé les valeurs des angles et les sinus et les cosinus

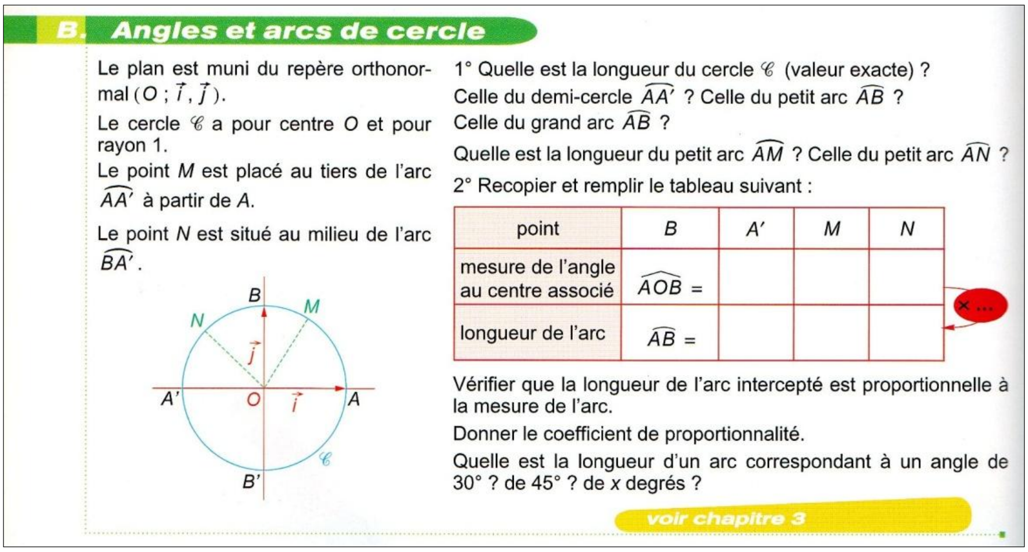
Élève : on l'a fait en troisième

Mathieu : et aussi vous l'aviez fait l'année dernière oui

Mathieu : allez on continue, ce que je vous demande c'est de retenir ces valeurs là vous verrez on en aura besoin, donc vous retenez toutes ces valeurs qu'on vient de trouver 30 min le cosinus et le sinus de 30, le cosinus et le sinus de 60 le cosinus et le sinus de 45 degrés.

Élève : il faut les savoir

Mathieu : il faut les savoir il vaut mieux oui. Alors on va faire l'activité B maintenant.



B. Angles et arcs de cercle

Le plan est muni du repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
Le cercle $\mathscr{C}$ a pour centre O et pour rayon 1.
Le point M est placé au tiers de l'arc $\overset{\frown}{AA'}$ à partir de A.
Le point N est situé au milieu de l'arc $\overset{\frown}{BA'}$.

1° Quelle est la longueur du cercle $\mathscr{C}$ (valeur exacte) ?
Celle du demi-cercle $\overset{\frown}{AA'}$? Celle du petit arc $\overset{\frown}{AB}$?
Celle du grand arc $\overset{\frown}{AB}$?
Quelle est la longueur du petit arc $\overset{\frown}{AM}$? Celle du petit arc $\overset{\frown}{AN}$?
2° Recopier et remplir le tableau suivant :

point	B	A'	M	N
mesure de l'angle au centre associé	$\widehat{AOB}$ =			
longueur de l'arc	$\overset{\frown}{AB}$ =			

Vérifier que la longueur de l'arc intercepté est proportionnelle à la mesure de l'arc.
Donner le coefficient de proportionnalité.
Quelle est la longueur d'un arc correspondant à un angle de 30° ? de 45° ? de x degrés ?

voir chapitre 3

Mathieu : 31 min alors on lit ensemble. Le plan est muni du repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$, alors c'est le repère qui est rouge là sur votre schéma. Le cercle C a pour centre O et pour rayon 1. Le point M est placé au tiers de l'arc AA', l'arc AA' c'est le demi-cercle, vous avez vu ça ? Et puis M c'est au tiers, et le point N est situé au milieu de l'arc BA'. Donc BA' c'est le quart de cercle à gauche et N est au milieu. Alors la première question c'est quelle est la longueur du cercle C en valeur exacte. Oui Valentin ?

Valentin : l'arc AA' c'est celui du haut ou celui du bas ?

Mathieu : ben on pourrait se poser la question tu as raison mais la manière dont le schéma est fait c'est plutôt celui du haut…. Puisqu'on a placé M et N dessus. D'accord ? 32 min Alors qu'elle est la longueur du cercle C ? … en valeur exacte…

Élève : 2π

Mathieu : 2π … tout le monde est d'accord avec ça ? Mathieu a écrit au tableau :

1°) La longueur du cercle C est 2π

Mathieu : ça vient de quelle formule ce truc là ?

Élève : $2\pi r$

Mathieu : $2\pi r$, quelle est celle du demi-cercle AA' ?

Élève : inaudible

Mathieu : oui, donc ça fait ?

Élève : π

Mathieu : OK

Il écrit au tableau : La longueur du demi-cercle AA' est π 33 min

Mathieu : et le petit arc AB, on vous demande le petit arc AB

Plusieurs élèves répondent : on entend $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{6}$…

Mathieu : c'est $\frac{\pi}{2}$ tout le monde voit ça ?

Élèves : attendez

Mathieu : j'attends… alors qui ne voit pas ça que ça fait $\frac{\pi}{2}$? Moi j'ai vu…il y a des gens qui ont froncé le sourcil, Héléna par exemple elle a froncé le sourcil

Mathieu refait le dessin du livre à main levée au tableau

Mathieu : aller vas y Helena

Helena : inaudible

Mathieu : alors là on vous donne … O est ici A est là B est là, 34 min on vient de vous dire que ça… on était d'accord pour dire que cet arc là (il montre le demi-cercle) mesurait π, donc si je me place là (il montre B) où est B par rapport au demi-cercle AA' ?

Élèves : à un demi de AA'

Mathieu : Le point B là il partage bien le demi-cercle AA' en deux ?

Élève : oui c'est le milieu

Mathieu : on pourrait dire ça oui on parle plutôt de milieu d'un segment là le milieu

Élève : on pouvait prendre le cercle entier et le couper en quatre

Mathieu : on pouvait faire ça aussi oui au lieu de couper le cercle en quatre je coupe le demi-cercle en deux, oui, c'et pas pareil ? Donc si ça ça fait π, ici ça fait π sur 2 ?
Mathieu écrit : la longueur du petit arc $AB \ = \frac{\pi}{2}$

Mathieu : vous êtes d'accord avec ça ? 35 min Ensuite celle du grand arc AB ?
Élève : $\frac{3\pi}{4}$

Mathieu : non pas $\frac{3\pi}{4}$

Élève : $\frac{3\pi}{2}$

Mathieu : $\frac{3\pi}{2}$ oui, ça ça fait $\frac{\pi}{2}$ (il montre le petit arc AB) le grand il fait 2π (il montre le cercle entier) donc ça fait 2π moins $\frac{\pi}{2}$, d'accord ?

Mathieu écrit : La longueur du grand arc $AB = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$

Mathieu : alors attention quelle est la longueur du petit arc AN ? 36 min alors là on vous dit que N c'était au tiers de l'arc AA' (Mathieu place à main levée le point N sur son dessin).

Élèves : plusieurs réponses inaudibles, on entend deux tiers

Mathieu : ça ça fait π (il montre le demi-cercle) ici c'est au tiers donc π sur 3
Mathieu écrit : La longueur du petit arc AM est $\frac{\pi}{3}$

Mathieu : et la longueur du petit arc AN ?

Élève : trois quarts de π

Mathieu : trois quarts de , trois π sur quatre, vous êtes d'accord avec ça ? 37 min On vous dit que c'est la moitié, on vous dit que ici le point N partage cet arc en deux, tout le monde voit que c'est trois π sur quatre ou je le détaille ? De là à là, de là à là vous avez combien ? (il montre l'arc AB)

Élève : on a π sur 2

Mathieu : π sur 2, si N partage le segment euh l'arc en deux là, de là à là (il montre de B à N)

Élève : π sur 4

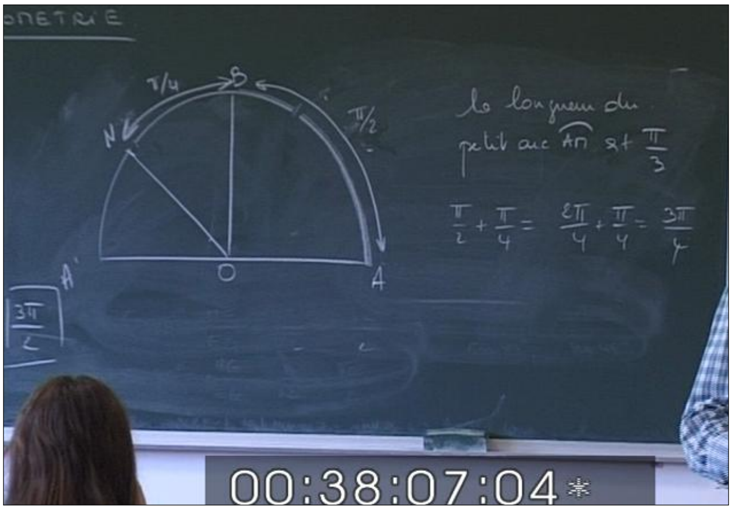
Mathieu : π sur 4, moralité pour aller de A à N, vous avez combien ? π sur 2 plus π sur 4 donc ça fait 3π sur 4.

Élève : hein ?

Mathieu : parce que π sur 2 plus π sur 4… on vous a dit un jour qu'il fallait mettre au même dénominateur donc ça fait 2π sur 4 plus π sur 4 ça fait 3π sur 4. 38 min N'oubliez pas tout ce que vous savez faire depuis le début de l'année !

Mathieu a écrit en même temps au tableau :

$$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{2\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$



Mathieu : Alors vous allez recopier le tableau qu'on vous demande de compléter en bas à la question suivante. Donc je vais l'écrire pour ceux qui ne l'auront pas, et après j'en aurai besoin.

Mathieu recopie le tableau. Les élèves commencent à chercher. La sonnerie interrompt le travail. 41 min.

11.28 Activités d'introduction à la trigonométrie chez Clotilde

ACTIVITÉS

Ch11

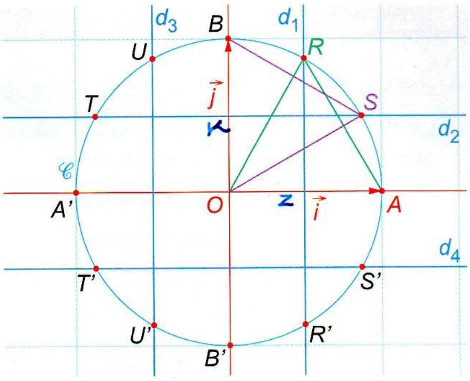
COORDONNÉES DE POINTS SUR UN CERCLE

activité 1

Le plan est muni du repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$.

Le cercle $\mathscr{C}$ a pour centre O et pour rayon 1.

d_1, d_2, d_3 et d_4 sont les médiatrices respectives des segments $[OA]$, $[OB]$, $[OA']$ et $[OB']$.



1° Quelles sont les coordonnées des points A, B, A' et B' ?

2° Montrer que le triangle ORA est équilatéral ; déterminer les coordonnées du point R.

3° De même, montrer que le triangle OSB est équilatéral, et déterminer les coordonnées du point S.

4° En déduire les coordonnées des points U, T, R', S', T' et U'.

5° Sur le cercle, combien y a-t-il de points d'abscisse $\frac{1}{2}$? de points d'ordonnée $-\frac{1}{2}$?

6° Soit $M(x\ ;\ y)$ un point qui parcourt le cercle $\mathscr{C}$.

a) Trouver dans quel intervalle varie son abscisse x et son ordonnée y.

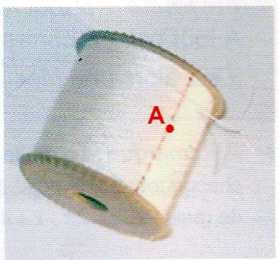
b) Quels sont les signes de x et de y lorsque M est situé :

- sur le petit arc $\widehat{AB}$?
- sur le petit arc $\widehat{BA'}$?
- sur le petit arc $\widehat{A'B'}$?

c) Montrer que $x^2 + y^2 = 1$.

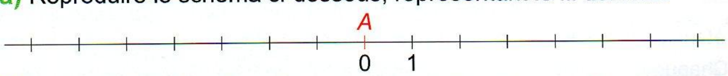
LA BOBINE DE FIL

activité 2



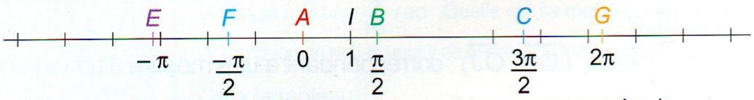
1° Un fil est enroulé sur une bobine cylindrique, de rayon 1.
On trace une marque rouge sur toute la largeur de la bobine, au point A, puis on déroule le fil.

a) Reproduire le schéma ci-dessous, représentant le fil déroulé.

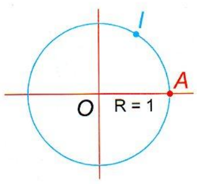


b) Placer précisément les taches rouges qui vont apparaître de part et d'autre du point A.
Ces taches sont-elles régulièrement espacées ?
Quelle distance exacte sépare deux taches successives ?

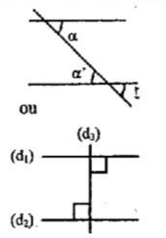
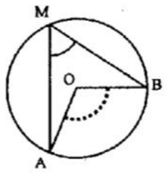
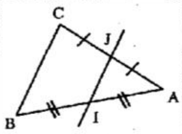
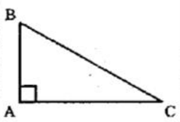
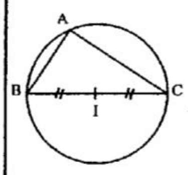
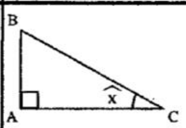
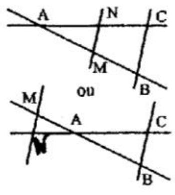
2° On marque sur le fil déroulé les points B, C, E, F et G comme indiqué ci-dessous.



On enroule de nouveau le fil sur la bobine, en faisant bien correspondre le point A, et de façon à ce que le point I s'enroule sur le demi-cercle supérieur.
Reproduire le cercle ci-contre, de centre O et de rayon 1, représentant la bobine.
Marquer sur le cercle l'emplacement des points B, C, E, F et G du fil après enroulement.



11.29 Fiche des rappels des connaissances en géométrie du collège

PROPRIETE	FIGURE(S) TYPIQUE(S) :	CETTE PROPRIETE PERMET DE…	POUR L'UTILISER, IL FAUT…	REDACTION TYPIQUE :
ANGLES		… démontrer que 2 droites sont parallèles.	… connaître 2 angles.	Puisque les angles *[correspondants α et α'] OU [alternes-internes α et α']* sont égaux, alors les droites … et … sont parallèles. ou Puisque les droites (d_1) et (d_2) sont perpendiculaires à la droite (d_3), alors les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.
		… calculer la mesure d'un angle.	… deux droites parallèles et une sécante.	Puisque les droites … et … sont parallèles, alors les angles *[correspondants α et α'] OU [alternes-internes α et α']* sont égaux ou Puisque les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles, alors la droite (d_3) qui est perpendiculaire à (d_1) est également perpendiculaire à (d_2)
ANGLE INSCRIT ET ANGLE AU CENTRE		… calculer la mesure de l'angle au centre ou … calculer la mesure d'un angle inscrit	… connaître la mesure d'un angle inscrit ou … connaître la mesure de l'angle au centre	L'angle $\widehat{AMB}$ est l'angle inscrit associé à l'angle au centre $\widehat{AOB}$ donc : $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \ldots$ ou L'angle $\widehat{AOB}$ est l'angle au centre associé à l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ donc : $\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{AMB} = \ldots$
THEOREMES DES MILIEUX		… démontrer que deux droites sont parallèles.	… un triangle et les milieux de ceux côtés.	Puisque I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [AC], Alors (IJ) est parallèle à (BC) et $IJ = \frac{1}{2}BC$
		… démontrer qu'une droite coupe un segment en son milieu.	… un triangle, une parallèle à un coté, le milieu d'un côté.	Puisque une droite passe par I est le milieu de [AB], Et puisque cette droite est parallèle à (BC), Alors cette droite coupe [AC] en son milieu J et $IJ = \frac{1}{2}BC$
THÉORÈME DE PYTHAGORE		… calculer une longueur.	… avoir un triangle rectangle dont on connaît 2 longueurs.	Puisque le triangle ABC est rectangle en A, alors d'après le théorème de Pythagore $AB^2 + AC^2 = BC^2$ *[On remplace les longueurs connues par leur valeur et on résout alors une équation]*
RECIPROQUE DE PYTHAGORE		… démontrer qu'un triangle est rectangle.	… avoir un triangle dont on connaît les 3 longueurs.	Vérifions si : $AB^2 + AC^2 = BC^2$ D'une part : $AB^2 + AC^2 =$ *[On remplace par les valeurs et on calcule]* D'autre part : $BC^2 =$ *[On remplace par la valeur et on calcule]* Puisque $AB^2 + AC^2 = BC^2$, alors d'après la réciproque de Pythagore, ABC est rectangle en A.
TRIANGLE INSCRIT DANS UN DEMI-CERCLE		… démontrer qu'un triangle est rectangle.	… un triangle inscrit dans un cercle.	Puisque le triangle ABC est inscrit dans un cercle de diamètre [BC], alors ABC est rectangle en A. ou Puisque le triangle ABC est inscrit dans un cercle de centre I milieu de [BC], alors ABC est rectangle en A.
		… démontrer qu'un point appartient à un cercle.	… un triangle rectangle.	Puisque ABC est rectangle en A, alors le point A appartient au cercle de diamètre [BC] ou Puisque ABC est rectangle en A, alors le point A appartient au cercle de centre I milieu de [BC] (et donc IA = IB = IC)
TRIGONOMETRIE		… calculer un angle	… un triangle rectangle dont on connaît 2 longueurs	Le triangle ABC est rectangle en A. *[On utilise une des 3 formules de trigonométrie]* $\cos \widehat{x} = \frac{adj}{hyp} = \frac{AC}{BC}$ $\sin \widehat{x} = \frac{opp}{hyp} = \frac{AB}{BC}$ $\tan \widehat{x} = \frac{opp}{adj} = \frac{AB}{AC}$ *[On remplace les longueurs ou angles connus par leur valeur et on résout alors une équation]*
		… calculer une longueur	… un triangle rectangle dont on connaît un côté et un angle.	
THEOREME DE THALES		… calculer une longueur.	… avoir 2 droites parallèles et connaître au moins 3 longueurs de la figure.	Les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A. Puisque les droites (MN) et (BC) sont parallèles, alors d'après le théorème de Thalès : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ *[On remplace les longueurs connues par leur valeur et on trouve la valeur recherchée en appliquant une règle de 3]*
RECIPROQUE DE THALES		… démontrer que 2 droites sont parallèles.	… au moins 4 longueurs de la figure.	Montrons que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ D'une part : $\frac{AM}{AB} =$ *[On remplace par les valeurs et on calcule]* D'autre part : $\frac{AN}{AC} =$ *[On remplace par les valeurs et on calcule]* Puisque $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ et puisque les points A, M, B et les points B, N, C sont alignés

11.30 Fiche sur l'usage de la calculatrice travaillée dans la classe de Clotilde

2^{nde} 5 **TD3** **Calculatrice et opérations élémentaires** *sept 2007*

- La touche $\boxed{\text{ANS}}$ ou $\boxed{\text{précéd}}$ (« 2^{nd} » « **ENTER** ») permet de rappeler le dernier résultat
  exemple :pour calculer $\sqrt{\frac{2}{3}}$ je tape : $\boxed{2}\boxed{/}\boxed{3}\boxed{\text{enter}}$ (0,66666…) $\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\text{ANS}}\boxed{\text{enter}}$ (0,81649…)
- Prendre l'inverse : « x^{-1} »
- Elever à une puissance : « ^ »
- Mettre en fraction un résultat : « **MATH** » ▸ Frac
- Pour entrer un nombre négatif (début de ligne) : « **(-)** » ; pour faire une soustraction (milieu de ligne) : « **-** »
- Afficher le dernier calcul pour le modifier : « 2^{nd} » « **ENTER** »
- Effacer un symbole : « **del** », insérer un symbole : **ins** (« 2^{nd} » « **DEL** »)
- **Lire un résultat à l'écran d'une calculatrice** : Le résultat d'un calcul affiché à l'écran d'une calculatrice est une valeur décimale arrondie ayant au maximum 10 chiffres significatifs. L'écriture « **2,45 E11** » se lit $2,45\times10^{11}$ et **3 E-8** se lit 3×10^{-8}.
- *ATTENTION :* Remplacer une barre de fraction à la calculatrice revient à insérer le signe de division mais aussi très souvent à rajouter des parenthèses
  exemples : $2+\frac{3}{5}-10$ *se tape* $\boxed{2}+\boxed{3}\boxed{/}\boxed{5}\boxed{-}\boxed{10}$
  $2+\frac{3}{5-10}$ *se tape* $\boxed{2}+\boxed{3}\boxed{/}\boxed{(}\boxed{5}\boxed{-}\boxed{10}\boxed{)}$
  $\frac{2+3}{5-10}$ *se tape* $\boxed{(}\boxed{2}+\boxed{3}\boxed{)}\boxed{/}\boxed{(}\boxed{5}\boxed{-}\boxed{10}\boxed{)}$

Exercice1

1. Mettre sous forme littérale les expressions suivantes, puis effectuer le calcul « à la main »et vérifier le résultat à la calculatrice.
   a) $\boxed{2}\boxed{+}\boxed{2}\boxed{/}\boxed{2}\boxed{+}\boxed{2}$ b) $\boxed{(}\boxed{2}\boxed{+}\boxed{2}\boxed{\wedge}\boxed{2}\boxed{)}\boxed{\times}\boxed{2}$ c) $\boxed{(}\boxed{(}\boxed{2}\boxed{+}\boxed{2}\boxed{)}\boxed{\times}\boxed{2}\boxed{)}\boxed{+}\boxed{2}$
2. Un couple de parenthèses est inutile : retrouver-la et réécrire l'expression sans elles.

Exercice 2

Taper sur la calculatrice les séquences et expliquer les résultats affichés

a) $\boxed{3}\ \boxed{-}\ \boxed{2}$ $\quad\boxed{3}\ \boxed{(-)}\ \boxed{2}$ b) $\boxed{(}\boxed{(-)}\boxed{2}\boxed{)}\boxed{x^2}$ $\quad\boxed{(}\boxed{-}\boxed{2}\boxed{)}\boxed{x^2}$ $\quad\boxed{(-)}\boxed{2}\boxed{x^2}$

Exercice 3

Voici une séquence de touches tapées sur la calculatrice : $\boxed{3}\boxed{(}\boxed{a}\boxed{+}\boxed{1}\boxed{)}\boxed{/}\boxed{(}\boxed{a}\boxed{+}\boxed{2}\boxed{)}$

1. Parmi les expressions suivantes, déterminer celle qui correspond à cette séquence
   a) $3a+\frac{1}{a}+2$ b) $\frac{3a+1}{a+2}$ c) $\frac{3\,(a+1)}{a}+2$ d) $3a+\frac{1}{a+2}$ e) $\frac{3\,(a+1)}{a+2}$
2. Pour toutes les autres expressions, déterminer la séquence de touches tapées qui leur correspond.
3. En utilisant la mémoire de la calculatrice, donner des valeurs approchées à 10^{-2} prés des expressions de la question 1) pour $a=\sqrt{3}+1$

(Résultats dans le désordre : 8,41 2,37 1,94 10,56 6,10)

Exercice 4 :

expression	suite des touches	résultat
$\frac{7-3^2}{4}$		
$-7+\frac{3^2}{4}$		
$7+\frac{(-3)^2}{4}$		
$\frac{7}{3^2-4}$		
$7-\left(\frac{3}{4}\right)^2$		
$\sqrt{2^3+1}$		
$\sqrt{(-3)^2-5}$		
$3\sqrt{25}-2^4$		
$3\sqrt{25-2^4}$		
$5\times10^{-4}-\frac{3}{4}\times10^{-3}$		
$18^3-\frac{20^2}{3\times5^3}$		
$\sqrt{4^3-3^3}$		

Exercice 5 :

Calculatrice et grands nombres : Calculer à la machine : $a = 345678^2$ puis $b = 345676 \times 345680$. a et b sont-ils égaux ?

Donner sans calcul le chiffre des unités de a ? de b ? Avez-vous changé d'avis sur l'égalité de a et b ?

Calculer alors a - b à la calculatrice et conclure.

11.31 Représentation d'une courbe point par point à partir des coordonnées d'une trentaine de points