Enseignement des premières notions de topologie à l'université - Une étude de cas.

Stéphanie Bridoux

Université Paris Diderot, Paris 7

École doctorale « Savoirs scientifiques : épistémologie, histoire des sciences et didactique des disciplines »

Thèse
Pour l'obtention du Diplôme de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT, PARIS 7
Spécialité : DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

Présentée et soutenue publiquement le 1er juin 2011 par
Stéphanie BRIDOUX

Enseignement des premières notions de topologie à l'université. Une étude de cas.

Directeur : Aline ROBERT
Co-directeur : Marc ROGALSKI

Membres du jury
Corine CASTELA, Université de Rouen
Jean-Luc DORIER, Université de Genève (Rapporteur)
Daniel PERRIN, Université de Cergy-Pontoise
Aline ROBERT, Université de Cergy-Pontoise (Directeur de thèse)
Marc ROGALSKI, Université de Lille (Co-directeur de thèse)
Denis TANGUAY, Université du Québec à Montréal (Rapporteur)
Fabrice VANDEBROUCK, Université Paris Diderot

Remerciements

Lorsque j'ai démarré cette thèse, j'ai pensé que lorsqu'elle serait terminée, je vivrais cette fin comme un aboutissement. Aujourd'hui, je me rends compte que c'est au contraire le commencement : le commencement d'un métier, celui de chercheur, mais aussi le commencement d'une vie... Qu'il me soit permis de remercier ici toutes les personnes qui se trouvaient à mes côtés, d'une manière ou d'une autre, dans tous les moments importants, parfois difficiles, qui ont jalonnés la réalisation de ce travail.

Il me tient à cœur de remercier Aline Robert, ma directrice de thèse. Je retiendrai notamment de nos discussions que je suis restée très souvent sans voix face à la clarté de ses raisonnements, face à sa manière d'aborder des questions de recherche, me rappelant à chaque fois que l'élève avait beaucoup à apprendre du maître. Son soutien constant, malgré la distance qui nous séparait, m'a aidée à gérer et à surmonter les difficultés qu'un didacticien peut rencontrer dans un travail de recherche tout comme celles qu'un être humain peut rencontrer dans la vie.

Je remercie également Marc Rogalski, co-directeur de la thèse. Je me réjouissais à chaque rencontre que nous organisions de toutes les idées prometteuses qui émergeraient de nos discussions. Certaines d'entre elles doivent d'ailleurs encore être explorées, preuve qu'un travail de recherche n'est jamais complètement terminé ! Tout comme Aline, Marc m'a toujours témoigné son soutien et je lui suis très reconnaissante d'avoir un jour accepté de me recevoir pour discuter de l'éventualité de faire une thèse.

Mes remerciements vont aussi à Jean-Luc Dorier et à Denis Tanguay pour avoir accepté de rapporter ce travail.

Merci à Corine Castela et à Fabrice Vandebrouck d'avoir d'accepté de faire partie du jury, ainsi qu'à Daniel Perrin pour avoir accepté de présider ce jury.

Je remercie le Laboratoire de Didactique André Revuz de m'avoir accueillie dans les locaux de Chevaleret durant la réalisation de ce travail. Tout en étant très peu présente, j'ai ressenti le soutien de nombreux membres de l'équipe.

Mes remerciements vont ensuite aux 42 personnes qui m'ont accompagnée jusqu'à Paris en ce 1er juin 2011 pour assister à la soutenance. Le retour en autocar restera à jamais gravé dans ma mémoire. La présence de Guy Noël m'a également particulièrement touchée. Après toutes ces années, il reste mon « professeur d'analyse » et je sais qu'il n'est pas étranger au poste que j'occupe à l'Université de Mons. Aujourd'hui, je saisis l'occasion de le remercier pour tout.

Mes voyages à Paris n'ont pas été consacrés qu'à la recherche. J'ai eu la chance de rencontrer des personnes formidables dont l'amitié m'est aujourd'hui très précieuse. Je tiens donc à remercier Aurélie Chesnais et Julie Horoks. Vous avez toujours pris de mes nouvelles et vous m'avez fait l'immense plaisir de participer à la soutenance. Mes remerciements vont aussi à Martine Devleeschouwer. Le hasard a fait que nous avons un jour pris le train ensemble. Je me réjouis de l'amitié qui en est née et qui dure maintenant depuis plusieurs années.

Je ne peux bien entendu pas oublier mes deux fidèles amis, Christian Michaux et Christophe Troestler. Entre déchirements et fous rires, je pense que nous formons une sacrée équipe ! Je remercie Christophe pour son aide précieuse dans la mise en page de ce document et j'espère que Christian ne regrette pas de m'avoir appelée le 31 août 1999 pour me proposer de travailler avec lui...

Je tiens à remercier maintenant mes proches. Merci du fond du cœur à mes parents et à ma grand-mère pour leur tolérance infinie envers mes choix professionnels et personnels. Merci de les avoir acceptés parce que vous avez compris que ces choix me rendaient tout simplement heureuse.

Xavier, toi qui symbolise le commencement de ma vie, merci de m'avoir épaulée dans les derniers moments de la thèse. Pas un jour ne passe sans que je ne me dise à quel point je suis heureuse à tes côtés.

Enfin, une pensée pour Justin et Chanel... Et c'est en souriant que je termine d'écrire ces quelques lignes tout en regardant mes deux fidèles petits compagnons, Anakin et Yoda, et en me disant que l'être humain dispose parfois d'une capacité impressionnante à affronter les épreuves de la vie.

Table des matières

Introduction

Notre travail de thèse trouve son origine dans un questionnement sur notre expérience d'enseignante liée à un constat d'échec ressenti durant plusieurs années d'un enseignement de topologie à l'université. L'enseignement dont il est question est intégré dans un cours d'analyse mathématique donné en première année universitaire à l'Université de Mons (Belgique) dans les filières mathématique, physique et informatique [1]. Il est important de préciser que l'enseignement universitaire belge est considéré comme le niveau d'études le plus difficile après le lycée. De plus, la majorité des étudiants (environ 90%) qui démarrent des études universitaires scientifiques bénéficient, au lycée, d'un nombre d'heures de mathématiques important (entre six et huit heures par semaine). En ce sens, le public concerné est donc homogène.

Or, de notre point de vue d'enseignante [2], nous avons été frappée de repérer, dans les évaluations proposées au terme de la première année, des erreurs récurrentes dans la résolution des exercices de topologie, et même dans la restitution des définitions. Tout se passe comme si les étudiants ne maîtrisaient pas du tout ces notions et qu'elles n'avaient aucun sens pour eux.

Nous cherchons donc, dans ce travail, à questionner ce constat d'échec généralisé, d'une part en nous donnant les moyens de mieux en comprendre les causes et d'autre part, en réfléchissant à des pistes d'enrichissement et de modification. Cependant, notre travail de chercheur doit aussi tenir compte des contraintes institutionnelles fortes qui délimitent l'enseignement visé. Celles-ci seront précisées et questionnées au fil de cette recherche.

Dans la première partie du travail, nous pointons quelques aspects frappants de cet enseignement mis en évidence par un diagnostic réalisé dans notre mémoire de DEA (Bridoux, 2005).

Cette première analyse est à l'origine de notre travail de thèse. Dans la perspective de prolonger les analyses déjà réalisées, nous avons d'abord cherché à mieux comprendre les contenus mathématiques en jeu d'un point de vue didactique. Nous précisons donc ce point de vue ainsi que nos questions de recherche. Nous présentons également quelques travaux antérieurs en lien avec nos questions et nous développons nos choix théoriques.

Conformément à ces choix, nous étudions, dans la deuxième partie, le phénomène de transposition didactique des notions de topologie au sens de Chevallard

[1] Un plan du cours est donné dans l'annexe A.

[2] Nous assurons notamment une partie des travaux dirigés du cours d'analyse.

(1991). Nous réalisons, à cette fin, une synthèse historique et épistémologique de la genèse et du développement de certaines notions de topologie. Celle-ci est complétée par une analyse de manuels. Nous montrons comment nos analyses nous poussent à accepter d'élargir notre questionnement au-delà des contraintes institutionnelles auxquelles notre travail de chercheur est soumis. Cette partie nous permet de caractériser la nature, les spécificités et la fonction des notions enseignées.

Cette étude inspire notre troisième partie dans laquelle nous avons travaillé à l'élaboration de leviers didactiques, à intégrer dans l'enseignement de topologie décrit un peu plus haut, susceptibles de favoriser l'acquisition des notions de topologie visées dans notre programme institutionnel, tout en tenant compte des contraintes.

Nos choix théoriques, pour élaborer des conditions supposées mener aux apprentissages attendus, s'inscrivent dans le cadre de la théorie de l'activité. Nous admettons donc que les apprentissages visés résultent en grande partie des activités réalisées par les étudiants. Ces choix influencent notre méthodologie. Les analyses menées mettent ainsi à la fois en jeu les contenus et les déroulements en classe pour reconstituer les activités possibles des étudiants. En ce qui concerne la fréquentation des contenus mathématiques à enseigner, nous nous centrons sur l'introduction des notions et sur la succession des tâches proposées en admettant que l'acquisition d'une notion dépend fortement du type des notions à enseigner, des points d'appui sur des connaissances anciennes et de leurs spécificités en tant qu'outil et en tant qu'objet. Concernant les déroulements en classe, il s'agit d'en étudier l'adéquation avec la nature des tâches proposées. Cette approche simultanée des contenus et des déroulements permet donc de travailler en termes de diagnostic et d'apprentissages.

La recherche de conditions favorables à l'acquisition des notions nous a amenée à élaborer un scénario (cours et exercices) susceptible de diminuer les échecs précédemment constatés et de mener, a priori, aux apprentissages attendus, notamment pour donner du sens aux notions, pour les utiliser dans les exercices et réussir à mieux adapter les connaissances mises en jeu. La conception du scénario prend en compte la proximité entre la conceptualisation visée et certains éléments du travail réalisé en amont de l'enseignement dans la partie précédente.

Cela dit, pour apprécier le scénario et ses limites, une expérience en vraie grandeur a été réalisée. En effet, tout n'est pas automatique, ni déductif, dans cette relation entre scénarios et apprentissages, marquée aussi par tout ce que les réalisations effectives peuvent modifier, et par des inconnues strictement cognitives et par des déterminants non cognitifs, et pour les étudiants, et pour les enseignants.

Nous analysons les déroulements en classe dans la quatrième partie. Nous pouvons alors caractériser, à la cinquième partie, les apprentissages en topologie effectivement réalisés par les étudiants.

Nos conclusions reviennent sur l'importance de prendre en compte les contraintes institutionnelles dans une recherche qui s'inscrit dans le domaine de la didactique. Cette question a en effet été de plus en plus questionnée à tous les stades de cette recherche. De fait, le lecteur pourrait avoir l'impression que les analyses menées en amont de l'enseignement, notamment notre synthèse historique, ouvrent la voie à l'élaboration d'un scénario plus riche que le nôtre, pouvant mener à des apprentissages différents de ceux réalisés, notamment en donnant davantage de sens aux notions à partir d'un travail simultané sur leur dimension outil et objet. Ainsi, notre scénario provoquera peut-être une première réaction de déception car ces contraintes auxquelles nous ne pouvions pas échapper et dont nous n'avions pas pleinement conscience, du point de vue de l'importance en termes d'apprentissages possibles, au moment de son élaboration, ne nous ont pas permis de dépasser les objectifs strictement institutionnels.

En revanche, ce système de contraintes a été porteur d'une réflexion importante a posteriori puisque nous dégageons également quelques idées plus générales sur l'enseignement des premières notions de topologie s'inspirant davantage de nos analyses préliminaires. Nous analysons de plus quelques alternatives pour travailler ces notions en acceptant de modifier ces contraintes.

Un dernier élément concerne l'organisation générale du texte pour lequel nous avons fait le choix de présentation suivant. De manière à assurer une forme de continuité entre les différentes parties, nous démarrons chacune d'entre elles par une introduction où nous faisons le point sur l'état d'avancement de nos recherches, quitte à répéter certains éléments décrits précédemment. Cela nous permet d'enchaîner avec la description du travail mené au sein de la partie qui débute.

Première partie

Travaux antérieurs – Cadrage théorique – Questionnement didactique

Partie 1 — Introduction

Les questions de recherche étudiées dans ce travail s'inscrivent dans la continuité d'une étude préliminaire portant sur un enseignement de topologie en première année universitaire. Cette étude est présentée dans notre mémoire de DEA (Bridoux, 2005).

Nous commençons par rappeler, au chapitre I, les principaux résultats issus de ce premier travail de manière à préciser les éléments dont nous disposons pour le prolonger. Plus précisément, nous mettons en évidence un certain nombre de spécificités relatives aux notions à enseigner. Puis, nous étudions le fonctionnement du savoir dans les exercices proposés aux étudiants. Nous évoquons alors quelques difficultés d'enseignement des notions de topologie. Nous montrons également les effets de cet enseignement sur les difficultés rencontrées par les étudiants, notamment en ce qui concerne les apprentissages mathématiques attendus et le caractère abstrait des notions enseignées.

Cette première étude présente des manques et des dysfonctionnements dans l'enseignement que nous décrivons, ce qui motive notre volonté de poursuivre le travail déjà accompli.

Dans un premier temps, ces résultats nous amènent à nous interroger sur l'enseignement de notions qualifiées d'« abstraites » par les étudiants. Nous présentons au chapitre II des travaux portant sur ce type de notions pour dégager quelques types de questionnements qu'elles suscitent, comment ceux-ci sont étudiés et quelles sont les difficultés rencontrées chez les étudiants.

Au chapitre III, nous développons notre questionnement en le situant dans le cadre théorique de la théorie de l'activité dont nous présentons les grands traits.

Nous terminons cette partie en présentant le découpage méthodologique de ce travail.

Chapitre I

Premières spécificités des notions enseignées

Nous présentons ici les principaux résultats de notre mémoire de DEA (Bridoux, 2005), de manière à définir les bases de ce travail de recherche.

1 Contexte du travail

Notre intérêt pour l'enseignement des notions de topologie est lié à notre expérience d'enseignante. En effet, nous prenons une part active dans l'enseignement d'un cours d'analyse mathématique [1] en première année universitaire. Ce cours s'adresse à des étudiants inscrits dans trois filières : mathématique, informatique et physique. Nous prenons en charge une partie des travaux dirigés tout au long de l'année.

Un chapitre du cours porte sur l'étude de quelques notions élémentaires de topologie dans l'espace $\mathbb{R}^N$. Les quatre notions suivantes sont abordées : intérieur et adhérence d'un ensemble, ensemble ouvert et ensemble fermé. Leur enseignement dans le cadre de ce cours se justifie de plusieurs manières.

Une première raison est que le cours d'analyse mathématique se poursuit, en deuxième année, dans la filière mathématique. Il y est en grande partie consacré à la topologie, démarrant avec une étude détaillée mais néanmoins rapide de la topologie de $\mathbb{R}^N$, pour passer ensuite aux espaces métriques puis topologiques. Les notions enseignées en première année sont donc l'occasion d'une première rencontre avec des notions clés qui seront approfondies par la suite.

Une seconde raison concerne les trois filières et est liée à une volonté générale des enseignants de mathématique de notre département. Un de nos objectifs d'enseignement est qu'au terme de la première année universitaire, les étudiants soient capables de manipuler le langage formel et le symbolisme associé dans les raisonnements qu'ils développent. Il s'agit de préparer les étudiants aux cours donnés dans les années ultérieures où la manipulation du registre symbolique est considérée comme un prérequis. C'est le cas, par exemple, du cours de bases de

[1] Le cours en question est donné à la Faculté des Sciences de l'Université de Mons, en Belgique.

données dans la filière informatique ou du cours de mécanique analytique dans la filière physique. Or, des notions telles que la convergence d'une suite, celles abordées en algèbre linéaire ou, précisément, les notions de topologie, sont propices à manipuler le registre symbolique.

L'enseignement des notions de topologie introduites en première année a attiré notre attention pour la raison suivante. En tant qu'enseignante, nous avons repéré, au fil des années, que les questions de topologie posées aux évaluations étaient particulièrement mal réussies, avec des erreurs fréquentes et persistantes dans la restitution des définitions.

Nous avons associé à ce constat d'échec une première explication liée à la complexité du formalisme contenu dans les définitions. En effet, les notions de topologie peuvent être définies en faisant appel à la notion de boule ou bien à celle de suite. Les deux types de définitions sont présentés dans le cours. Les définitions des notions sont énoncées de la manière suivante [2] :

Définition 1. Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$. L'intérieur de A, noté $\mathrm{int}A$, est défini par

$$\begin{aligned}\mathrm{int}A &= \{x \in A : \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A\}\\ &= \{x \in A : \forall (x_n) \subseteq \mathbb{R}^N,\ (x_n \to x) \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ x_n \in A)\}\end{aligned}$$

Définition 2. Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$. L'adhérence de A, notée $\mathrm{adh}A$, est définie par

$$\begin{aligned}\mathrm{adh}A &= \{x \in \mathbb{R}^N : \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \varnothing\}\\ &= \{x \in \mathbb{R}^N : \exists (x_n) \subseteq A,\ x_n \to x\}\end{aligned}$$

Pour chaque notion, l'équivalence entre les définitions en termes de boule et de suite est démontrée.

Définition 3. Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$. On dit que A est un ensemble ouvert si $A = \mathrm{int}A$.

Les définitions données pour la notion d'intérieur permettent de caractériser la notion d'ouvert de différentes manières :

Proposition 4. Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$. On dit que A est un ensemble ouvert
ssi $\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A$;
ssi $\forall x \in A,\ \forall (x_n) \subseteq \mathbb{R}^N,\ (x_n \to x) \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ x_n \in A)$.

Définition 5. Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$. On dit que A est un ensemble fermé si $A = \mathrm{adh}A$.

Les définitions données pour la notion d'adhérence permettent de caractériser la notion de fermé en termes de boule et de suite :

Proposition 6. Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$. On dit que A est un ensemble fermé
ssi $\forall x \in \mathbb{R}^N,\ (\forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \varnothing) \Rightarrow (x \in A)$;
ssi $\forall x \in \mathbb{R}^N,\ \forall (x_n) \subseteq A,\ (x_n \to x) \Rightarrow (x \in A)$.

[2] Une table des symboles utilisés dans ce travail est donnée dans l'annexe B.

Les étudiants doivent être capables d'utiliser chaque définition et les caractérisations associées sous la forme de propriétés dans les exercices. Les exercices de manipulation des définitions mobilisent donc une grande partie du temps consacré à l'enseignement des notions.

La présentation de ces quatre notions a également pour objectif que les étudiants comprennent la structure topologique d'ensembles classiques tel qu'un intervalle dans $\mathbb{R}$, un singleton et quelques exemples d'ensembles dans $\mathbb{R}^2$.

Nous remarquons d'emblée que les symboles apparaissant dans les définitions mettent en jeu des connaissances dans les domaines de la logique, avec la présence de quantificateurs et d'implications, et de la théorie des ensembles puisqu'il y a des intersections et des inclusions d'ensembles. Or, ces connaissances ne font pas l'objet d'un enseignement explicite au lycée, du moins en Belgique. Elles ont tout au plus été rencontrées dans des définitions mais elles n'ont jamais été explicitement travaillées par les étudiants. Des notions relativement nouvelles, telles que les suites et les boules sont également présentes dans les définitions. On peut raisonnablement supposer que celles-ci ne sont pas encore disponibles chez un certain nombre d'étudiants. La manipulation de ce formalisme laisse donc présager des difficultés dans les exercices qui seront proposés aux étudiants.

Néanmoins, la complexité du symbolisme ne peut à elle seule expliquer les difficultés observées, d'autant que la majorité des exercices proposés sont des applications immédiates des définitions. De plus, les erreurs fréquemment observées dans la restitution des définitions nous autorisent à penser que les étudiants ont des difficultés à donner du sens aux notions enseignées.

Nous appuyant sur ce constat négatif, notre travail de DEA (Bridoux, 2005), s'est fixé pour objectif d'étudier les spécificités des notions enseignées de manière à pouvoir mieux caractériser leurs difficultés d'enseignement.

Nous présentons ici les aspects les plus frappants de ce travail, point d'ancrage de notre travail de thèse.

2 Premières spécificités des notions de topologie et difficultés d'enseignement

Sur la base des premières constatations que nous venons de développer, nous avons été amenée à penser que les notions de topologie avaient des caractéristiques communes avec les notions formalisatrices, unificatrices et généralisatrices (Robert, 1998). Il s'agit de notions qui généralisent des notions antérieures tout en les unifiant grâce à un nouveau formalisme. Ces notions ont des caractéristiques épistémologiques qui tiennent à une genèse longue, le passage des notions primitives à leur généralisation étant souvent sinueux.

Les notions formalisatrices, unificatrices et généralisatrices provoquent des difficultés d'enseignement. En ce qui concerne l'introduction des notions, la distance entre l'ancien et le nouveau est souvent grande si bien qu'il n'est pas facile de s'appuyer sur les connaissances antérieures des étudiants pour concevoir un problème initial dans lequel les nouvelles notions apparaîtraient comme outil implicite de résolution adapté, en permettant à l'étudiant de les mettre en fonctionnement de manière autonome et en les généralisant. De plus, ce formalisme apparaissant dans les nouvelles définitions induit, chez les étudiants, des difficultés à donner du sens aux notions.

Pour comprendre les difficultés d'enseignement des notions de topologie et leurs conséquences sur les difficultés rencontrées par les étudiants, nous avons réalisé un diagnostic de l'enseignement visé, en étudiant le cours théorique et les exercices proposés aux étudiants, en relation avec ce qui précède.

Nous avons peu questionné le cours théorique. En effet, il s'agit d'un cours magistral. Les notions y sont introduites « brutalement » par leurs définitions, sans réelle motivation. Le chapitre sur la topologie est également isolé dans le cours puisque les notions enseignées ne sont pas réinvesties par la suite en première année.

Comme nous l'avons précédemment expliqué, la majorité des exercices proposés en travaux dirigés consistent en des applications immédiates des définitions. On pourrait penser, a priori, que ce type d'exercice est facile à résoudre. Pour décrire le travail mathématique que nécessite la manipulation des définitions des notions de topologie, nous avons utilisé les outils d'analyse des contenus développés par Robert (1998). Nous avons ainsi pu caractériser les cadres et les registres utilisés, au sens de Douady (1987) et de Duval (1995), et les adaptations [3] de connaissances à réaliser.

Avant de détailler les résultats de l'analyse du corpus d'exercices proposés aux étudiants, intéressons nous à ce qui est mis en jeu pour montrer, par exemple, qu'un intervalle de la forme $]a,b[$ est un ensemble ouvert en utilisant la définition en termes de boule.

Nous rédigeons tout d'abord une solution possible avec le niveau de rigueur attendu de la part des étudiants.

> Il s'agit de prouver que $\forall x \in]a,b[, \ \exists r > 0, B(x,r) \subseteq]a,b[$.
> Soit $x \in]a,b[$.
> Prenons $r = \min\{x-a, b-x\}$. On a bien $r > 0$ car $a < x < b$.
> Soit $y \in B(x,r)$. Montrons que $y \in]a,b[$.
> Comme $B(x,r) =]x-r, x+r[$, on a $x-r < y < x+r$.
> Si $r = x-a$, on en déduit $a < y < x+(x-a) \leqslant x+(b-x) = b$ où la dernière inégalité résulte de la définition du minimum.
> On a donc bien $a < y < b$ par transitivité.
> Si $r = b-x$, on en déduit que $a = x-(x-a) \leqslant x-(b-x) < y < b$ où la première inégalité résulte de la définition de minimum.
> On a donc, ici aussi, $a < y < b$.

Décrivons maintenant le travail mathématique qui a été réalisé. Le démarrage de l'exercice nécessite tout d'abord de reconnaître l'écriture formelle qui est

[3] On parle d'adaptation lorsque l'étudiant ne peut pas appliquer directement une connaissance du cours et qu'il doit alors reconnaître ou modifier quelque chose pour poursuivre son raisonnement.

à prouver. La structure logique à prévoir pour manipuler cette écriture est de se donner un réel quelconque x appartenant à $]a,b[$ et de trouver un rayon convenable pour la boule. Il y a alors un changement de point de vue qui consiste à remarquer que la boule $B(x,r)$ est l'intervalle $]x-r,x+r[$. Un choix convenable pour r met en jeu la distance entre deux nombres réels et la notion de minimum entre deux quantités. Prouver l'inclusion d'ensembles nécessite alors la manipulation d'inégalités et par conséquent des connaissances sur l'ordre dans $\mathbb{R}$.

Cette solution requiert donc la disponibilité de connaissances en logique et en théorie des ensembles. Le fait de travailler dans $\mathbb{R}$ mobilise des connaissances anciennes sur les inégalités. La solution comporte aussi des adaptations variées comme la reconnaissance de modalités d'application de la définition, des traductions et des changements de points de vue. La juxtaposition des connaissances à utiliser et leurs mises en fonctionnement sont telles que le travail mathématique à réaliser est complexe à ce niveau d'enseignement.

Il apparaît ainsi un décalage entre la nature de l'exercice qui est une application d'une définition et qui est donc considéré a priori comme facile à résoudre, et la nature du travail mathématique engendré, qui est quant à elle très complexe au niveau de la première année universitaire.

Les analyses qui ont été menées vont toutes dans le même sens. La manipulation d'une définition de topologie est un exercice complexe, qui induit un travail dans les cadres de la logique et de la théorie des ensembles. Elle nécessite de plus la disponibilité de connaissances en cours d'acquisition telles que les notions de boule et de suite convergente. Des connaissances anciennes sur les nombres réels sont également mises en jeu. Des techniques liées à la manipulation de ces objets sont fréquemment utilisées : nous pensons à la recherche du rayon d'une boule en s'appuyant sur le minimum entre deux quantités ou encore, la construction d'une suite de points convergente en donnant des valeurs particulières à r à partir d'une hypothèse telle que $\forall r>0,\ B(x,r)\cap A\neq\varnothing$.

Un autre aspect marquant des analyses est que la manipulation d'une définition ne met finalement pas en jeu des connaissances explicites dans le cadre de la topologie. Des exemples d'analyses a priori détaillées, montrant bien le décalage observé, sont données dans (Bridoux, 2008).

En conclusion, le diagnostic révèle que l'enseignement étudié a pour finalité de faire manipuler le formalisme contenu dans les définitions, sans revenir au sens des notions. Les premières spécificités des notions de topologie apparaissent : le travail sur les premières définitions fait essentiellement appel à des connaissances anciennes ou en cours d'acquisition qui ne sont pas de nature topologique et qui engendrent des mises en fonctionnement nécessitant de nombreuses adaptations. Or, nous avons pu observer que ces connaissances sont peu disponibles chez un certain nombre d'étudiants. Dans cet enseignement, la dynamique entre le sens et la technique n'est donc pas productive et semble ne pas mener à une bonne acquisition outil / objet des notions.

3 Difficultés des étudiants

Dans la seconde partie du travail, nous avons proposé des questionnaires aux étudiants de deuxième et troisième années, dans la filière mathématique. Ces étudiants ont suivi l'enseignement de topologie étudié ici et ont eu l'occasion d'approfondir les notions dans le cours d'analyse de deuxième année. Notre objectif était de tester leurs acquis en topologie, compte tenu des difficultés présagées dans notre diagnostic.

Le dépouillement des questionnaires montre que ces difficultés se confirment au travers des réponses des étudiants. Lorsqu'ils sont amenés à s'exprimer sur les difficultés qu'ils rencontrent en topologie, ceux-ci mentionnent l'abstraction des notions et la variété des définitions rencontrées. La topologie est perçue comme un domaine construit sur une suite de contenus entre lesquels les liens sont difficiles à établir.

Lorsqu'il s'agit de résoudre des exercices semblables à ceux proposés en première année, des erreurs sont encore observées dans la restitution des définitions. Par exemple, environ 75% des étudiants de deuxième année définissent la notion de fermé en termes de boule avec la caractérisation suivante, qui est en fait vérifiée par tous les ensembles :

$$\forall x \in A,\ \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \varnothing.$$

Un aspect frappant est qu'un nombre important d'étudiants donnent une définition erronée mais sont capables de manipuler l'écriture formelle correspondante. Par exemple, plusieurs étudiants ont tenté de montrer que l'ensemble $\{1/n : n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$ est fermé en utilisant la définition erronée ci-dessus. La définition est correctement manipulée et les enchaînements logiques sont bien expliqués, comme le montre leur réponse :

> $\{1/n : n \in \mathbb{N}_0\}$ est fermé ?
> c'est-à-dire $\forall x \in \{1/n : n \in \mathbb{N}_0\}, \forall r > 0, B(x,r) \cap \{1/n : n \in \mathbb{N}_0\} \neq \varnothing$?
> Soit $x \in \{1/n : n \in \mathbb{N}_0\}$, c'est-à-dire $x = 1/n_1, n_1 \in \mathbb{N}_0$.
> Soit $r > 0$.
> A-t-on $B(x,r) \cap \{1/n : n \in \mathbb{N}_0\} \neq \varnothing$?
> c'est-à-dire $]x-r, x+r[\cap \{1/n : n \in \mathbb{N}_0\} \neq \varnothing$?
> c'est-à-dire $]1/n_1 - r, 1/n_1 + r[\cap \{1/n : n \in \mathbb{N}_0\} \neq \varnothing$?
> Oui car $1/n_1 \in]1/n_1 - r, 1/n_1 + r[$ et $1/n_1 \in \{1/n : n \in \mathbb{N}_0\}$.
> Donc $\{1/n : n \in \mathbb{N}_0\}$ est fermé.

Ce type de réponse illustre clairement le problème de donner du sens aux notions.

Toutefois, la plupart des étudiants rencontrent des difficultés à manipuler le langage formel. Ils sont très peu nombreux à pouvoir démontrer que $\mathrm{adh}]-2,3] = [-2,3]$ ou à pouvoir comparer des ensembles tels que $\mathrm{adh}(A \cup B)$ avec $\mathrm{adh}A \cup \mathrm{adh}B$. La difficulté majeure est de parvenir à traduire l'appartenance d'un point à l'un de ces ensembles. Les analyses montrent très clairement que les connaissances en logique et en théorie des ensembles ne sont pas suffisamment disponibles chez la plupart des étudiants de deuxième et troisième années.

4 Un premier bilan du mémoire de DEA

Le travail réalisé met à jour les premières spécificités des notions de topologie et des difficultés d'enseignement qui peuvent, selon nous, être mises en lien avec la nature des notions.

En effet, le début de l'enseignement d'une notion formalisatrice, unificatrice et généralisatrice est un travail sur les définitions. Or, nous avons montré que pour les notions de topologie, il s'agit d'un travail complexe qui nécessite des adaptations nombreuses et variées, souvent implicitement cachées dans la définition. Des problèmes d'existence interviennent, des informations doivent être interprétées, faisant apparaître des quantificateurs cachés, plusieurs arguments doivent être articulés pour aboutir à ce qu'il faut prouver. Des connaissances en logique et en théorie des ensembles sont nécessaires. Or, à ce niveau d'enseignement, elles ne sont pas disponibles chez un certain nombre d'étudiants.

L'enseignement décrit ici s'appuie donc essentiellement sur le caractère formalisateur des notions et le travail technique engendré ne permet pas de revenir sur leur sens. Les étudiants ne peuvent donc miser que sur leur mémoire pour restituer les définitions puisqu'ils manipulent des notions qui ne représentent rien pour eux.

Le problème du sens s'est confirmé dans les questionnaires proposés aux étudiants des années ultérieures. Certains peuvent manipuler correctement le formalisme même si la définition avec laquelle ils travaillent est fausse. Mais globalement, les étudiants dépassent rarement le stade de la restitution des définitions puisque des erreurs liées à la non disponibilité de connaissances en logique et en théorie des ensembles sont repérées dès le début des questions proposées.

La variété des définitions et le caractère abstrait des notions sont des éléments constamment cités par les étudiants lorsqu'ils évoquent les difficultés qu'ils rencontrent pour comprendre la topologie.

En conclusion, l'enseignement décrit ici ne mène pas aux apprentissages visés. La dynamique entre les aspects formel et conceptuel ne se présente pas du tout comme étant productrice de sens chez les étudiants et la manipulation technique n'est pas du tout acquise non plus.

Ce travail présente toutefois un certain nombre de limites méthodologiques quant à la question des spécificités des notions et de leurs difficultés d'enseignement qui peut, selon nous, être clarifiée. Nous n'avons en effet que peu d'éléments sur les caractères unificateur et généralisateur des notions. Un autre aspect est que nous n'avons pas pris en compte ce qui se passe pendant le cours, et précisément en travaux dirigés, et qui pourrait également influencer les apprentissages des étudiants. Des voies restent donc à explorer pour tenter d'élaborer un enseignement permettant d'améliorer l'acquisition des notions de topologie chez les étudiants.

Chapitre II

Travaux antérieurs sur les notions « abstraites »

Comme nous l'avons souligné au chapitre I, l'étude des difficultés d'enseignement des notions de topologie mérite d'être davantage précisée.

Dans ce chapitre, nous prenons appui sur le fait que les notions de topologie sont des notions dites « abstraites » pour de nombreux étudiants, pour nous pencher sur des travaux antérieurs portant sur ce type de notions.

Nous ne visons pas du tout l'exhaustivité ; notre objectif est de présenter quelques travaux montrant comment ce type de notions est étudié, quelles sont leurs spécificités propres et les difficultés d'enseignement repérées dans la perspective de mieux les appréhender dans notre travail.

1 Notions formalisatrices, unificatrices et généralisatrices

L'enseignement d'une nouvelle notion, et plus précisément son introduction et la nature des exercices proposés aux élèves, dépend fortement du type de la notion (Robert in Vandebrouck et al., 2008). Il est notamment caractérisé par la distance entre les connaissances déjà travaillées auparavant par les étudiants et les nouvelles connaissances, tout en étant fonction des programmes scolaires et du bagage mathématique des élèves au moment où les notions sont introduites. Robert distingue trois caractères que peuvent présenter les nouvelles notions par rapport aux anciennes ; le lecteur peut se référer à (Vandebrouck et al., 2008) pour des exemples précis :

- □ le **caractère généralisateur** des notions apparaît quand le nouveau étend l'ancien, en ayant une portée plus large que ce qui était déjà à la disposition des étudiants ;
- □ le **caractère formalisateur** des notions apparaît lorsqu'un nouveau formalisme est introduit, ce formalisme n'étant pas strictement limité à l'utilisation de symboles mathématiques ;

- le **caractère unificateur** des notions apparaît lorsque la nouvelle notion remplace plusieurs éléments anciens qui étaient jusque là traités de manière isolées.

C'est la combinaison de plusieurs de ces caractères qui amène à définir différents types de notions en relation avec le paysage mathématique dans lequel elles s'insèrent. Certaines notions sont des **extensions de notions** anciennes, soit parce qu'elles possèdent un caractère généralisateur, soit parce qu'elles se traduisent dans un formalisme qui étend un formalisme antérieur. D'autres notions peuvent posséder les caractères généralisateur et unificateur ou bien unificateur et formalisateur. Ces notions, souvent objets, apparaissent comme des **réponses à un problème**. Enfin, certaines notions possèdent les trois caractères à la fois. Il s'agit des **notions formalisatrices, unificatrices et généralisatrices**, notées **notions FUG**.

Dans le chapitre I, les notions de topologie ont été interprétées en termes de notions FUG compte tenu qu'elles unifient, dans $\mathbb{R}$ des notions telles que celles d'intervalles ouverts ou fermés, et qu'elles se généralisent à $\mathbb{R}^N$ avec la notion de boule, à partir d'un formalisme associé à l'utilisation des symboles mathématiques. Le passage de $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{R}^N$ s'appuie sur une unification et une généralisation des notions complètement internes au cadre de $\mathbb{R}^N$.

Nous nous centrons donc maintenant sur ce type de notions. Nous savons qu'elles sont particulièrement difficiles à introduire, notamment parce que la distance « ancien-nouveau » est grande. Souvent, ces notions n'ont pas été rencontrées auparavant par les étudiants et ils n'ont donc pas toujours des exemples dans leur bagage mathématique auxquels ils peuvent raccrocher les nouvelles notions. Par conséquent, il n'est pas facile de trouver un problème initial dans lequel la nouvelle notion apparaît comme la réponse optimale, avec en plus un moyen de contrôle de la part des étudiants. Nous évoquons ci-dessous des travaux traitant des difficultés d'enseignement de certaines notions répertoriées comme des notions FUG.

Un premier exemple de notion FUG est la notion de convergence des suites numériques (Robert, 1982). Nous retenons que les travaux sur l'acquisition de la notion en première année d'université ont amené Robert à concevoir une séquence d'introduction « mixte », s'appuyant sur l'utilisation de dessins, en alternant les phases de recherche des étudiants avec des phases d'institutionnalisation. L'objectif n'est donc pas que l'émergence de la nouvelle notion soit à la charge de l'étudiant mais bien de lui montrer, à partir d'un certain moment, la nécessité d'une définition formelle pour justifier certains résultats. Ainsi, la première question de la séquence consiste à représenter graphiquement une liste de suites, puis à les classer en fonction de leur comportement de convergence. Ces dessins peuvent susciter une intuition graphique de la définition de convergence. L'enseignant intervient ensuite pour donner la définition formelle. Celle-ci doit alors être utilisée pour étudier la véracité de deux propositions. Il y a donc un jeu de cadres [1], au sens

[1]Un cadre désigne un domaine de travail du mathématicien dans lequel une notion fonctionne en liaison avec d'autres. L'idée de proposer des exercices dans lesquels une même notion intervient dans différents cadres, indiqués ou non, est un levier susceptible, selon Douady, de contribuer aux

de Douady (1987), puisque la séquence mélange les cadres graphique et formel.

Au delà de la distance entre ancien et nouveau, la conception d'une séquence d'introduction d'une notion FUG questionne également la distance entre les outils disponibles chez les étudiants et les outils à introduire pour mener aux apprentissages visés. Ce point de vue amène naturellement le chercheur à approfondir la notion et sa genèse, en adoptant un point de vue épistémologique permettant de dégager la fonction de la notion, les contextes dans lesquels elle est apparue et ceux dans lesquels elle s'est développée.

C'est la prise en compte de ces éléments qui a permis de préciser, dans divers travaux, la nature FUG des premiers concepts de l'algèbre linéaire (Dorier et al., 1997), leur conséquence sur les difficultés d'introduction et sur les difficultés spécifiques des étudiants. Nous présentons ci-dessous un certain nombre de résultats issus de ces travaux qui ont un lien direct avec notre travail.

L'étude historique menée par Dorier (Dorier et al., 1997 ; Dorier, 1990) met en lumière les caractéristiques épistémologiques des concepts élémentaires de l'algèbre linéaire. Il montre notamment que la théorie des espaces vectoriels, telle qu'elle est traditionnellement enseignée aujourd'hui en première année d'université, est le fruit d'un long processus. De plus, l'idée que le concept clé de la linéarité devienne celui d'espace vectoriel n'apparaît que très tardivement avec le début des théories axiomatiques, donc dans la première moitié du vingtième siècle.

La genèse historique retracée révèle aussi que, durant les 18ᵉ et 19ᵉ siècles, de nombreux problèmes relevant du linéaire sont traités dans des domaines variés. Si ceux-ci montrent des ressemblances évidentes lorsqu'on les regarde avec un point de vue actuel, le manque d'unification de la théorie, à l'époque, a fait qu'ils ont évolué en suivant des chemins parfois indépendants.

C'est durant la période qui s'étend de 1880 à 1930 que les théories axiomatiques apparaissent. L'étude de Dorier montre alors en quoi « l'enjeu de l'axiomatisation est une question de réorganisation du savoir mathématique, mais aussi une modification dans la façon d'appréhender les problèmes... C'est donc la prise en compte de la globalité des problèmes linéaires qui permet d'imposer l'approche axiomatique, qui vient fédérer, unifier en un point de vue formel. » (ibid., p. 102).

Les spécificités des notions sont alors prises en compte pour préciser la nature de certaines difficultés récurrentes observées chez des étudiants de première année universitaire.

Une majorité d'enseignants s'accorde pour dire que l'activité mathématique, et en particulier l'accès à la résolution de problèmes relevant du linéaire, nécessite de maîtriser un certain degré de formalisme (Dorier et Lavergne, 1990). Celui-ci apporte une économie d'écriture en permettant une résolution analogue d'un ensemble de problèmes.

Une première cause au constat d'échec en algèbre linéaire est liée à ce que les auteurs nomment « l'obstacle du formalisme ». Sur la base de questionnaires proposés aux étudiants de première année universitaire scientifique, les auteurs

apprentissages mathématiques des élèves.

ont montré que les erreurs liées à la manipulation du langage formel sont en relation avec l'insuffisance de connaissances en logique et en théorie des ensembles. Plus précisément, Dorier et Lavergne ont analysé jusqu'à quel point le bagage initial des étudiants dans ces deux domaines influe sur l'évolution individuelle des étudiants et sur les procédures mises en oeuvre dans la résolution des exercices d'algèbre linéaire. Pour ce faire, ils ont proposé un prétest à plusieurs sections scientifiques de Deug durant les premiers jours de l'année universitaire, avant tout enseignement spécifique de Deug. Les productions des étudiants ont été analysées en s'appuyant sur « l'hypothèse des blocs », développée par Robert et Boschet (1984). Ces deux derniers auteurs ont en effet formulé les résultats suivants concernant l'acquisition des premiers concepts d'analyse dans $\mathbb{R}$. Ils sont parvenus à corréler les résultats d'un prétest avec deux interrogations intégrées dans un cours : le fait d'avoir au moins trois blocs vides au prétest est le critère le plus significativement lié à l'échec aux tests suivants. Il semble, de plus, que la réussite soit davantage liée au fait d'avoir des connaissances minimales réparties dans plusieurs blocs plutôt que d'avoir de très bonnes connaissances dans un seul bloc. Enfin, le fait d'avoir un minimum de connaissances dans les cadres numérique et formel est une condition nécessaire de « non-échec ».

Dans le cas de l'algèbre linéaire, des blocs de questions liées à un même prérequis ont été définis pour caractériser les connaissances d'un étudiant en termes d'acquis ou, au contraire, d'insuffisances par rapport à une connaissance en logique ou en algèbre. En corrélant les résultats individuels au prétest avec la réussite dans le cours d'algèbre linéaire, le résultat suivant est énoncé : « Ainsi, plus que des connaissances précises en logique, il semble que ce soit plutôt l'absence de lacunes dans les connaissances de logique qui soit le plus important dans le transfert sur la réussite en algèbre linéaire. On peut avancer l'hypothèse qu'il existe un passage du quantitatif vers le qualitatif qui ne peut s'opérer qu'au delà d'un certain seuil. En d'autres mots, ce n'est qu'au delà d'un certain seuil global de connaissances en logique (le quantitatif), que ces connaissances sont mobilisables de façon effective et positive dans l'acquisition des concepts élémentaires d'algèbre linéaire (le qualitatif). » (Dorier et Lavergne, 1990, p. 120).

Ces résultats montrent comment la disponibilité de connaissances en logique et en théorie des ensembles intervient dans les apprentissages de certaines notions FUG. Il y a là un point commun avec les notions de topologie puisque nous avons montré, au chapitre I, l'importance des connaissances dans ces deux domaines dans la manipulation des définitions des notions enseignées.

Les contenus de l'algèbre linéaire, telle qu'elle est enseignée, ont pu ensuite être associés à des types d'exercices proposés aux étudiants. Leurs analyses montrent l'existence d'une double dichotomie dans la nature de ces exercices.

Une première dichotomie apparaît dans les résultats suivants. D'une part, on trouve des problèmes s'appliquant à des cadres extérieurs à l'algèbre linéaire tels que les fonctions, les suites, les polynômes... L'algèbre linéaire est alors un outil de résolution possible pour ces problèmes, mais pas indispensable. Cet outil peut apporter de la simplification mais pour qu'il soit perçu comme tel par les étudiants, ceux-ci doivent posséder un certain nombre de connaissances en algèbre linéaire. Ce type de tâches nécessite aussi des changements de cadres. D'autre part, un second type de problèmes se place exclusivement dans le cadre formel de l'algèbre linéaire. L'enseignement vise alors à développer des démonstrations internes à ce cadre, appelées « techniques-objets ». On constate que celles-ci peuvent provoquer des difficultés liées à l'utilisation du langage de la théorie des ensembles.

La seconde dichotomie observée porte sur la distinction entre les tâches algorithmiques et celles se plaçant à un niveau plus conceptuel. Plus on avance dans l'enseignement, plus les exercices proposés deviennent formels mais parallèlement, les exercices deviennent aussi de plus en plus calculatoires. L'idée sous-jacente est donc ici que c'est dans l'emploi répété des concepts que ceux-ci acquièrent une réelle justification.

Nous avons déjà mentionné précédemment la difficulté à trouver une « situation fondamentale » qui soit accessible aux étudiants pour introduire une notion FUG. Néanmoins, des problèmes plus partiels ont été conçus pour être proposés au début de l'enseignement. L'objectif, dans la conception de tels problèmes, reste que la connaissance visée apparaisse comme un élément de réponse à une question traitée par les étudiants. Cependant, la nature FUG de la notion est telle qu'ils ne pourront pas nécessairement ni la trouver, ni la valider seuls. Cela amène les chercheurs à intégrer dans l'enseignement des leviers pouvant contribuer aux apprentissages des élèves. Dans sa séquence d'introduction, nous avons vu que Robert s'appuie sur les changements de cadres pour faire travailler les étudiants sur la notion de convergence d'une suite numérique. Dorier (1995) fait usage de commentaires méta-mathématiques (Robert, Robinet, 1996) pour introduire la notion d'espace vectoriel, amenant ainsi les étudiants à réfléchir sur leur activité mathématique.

Mais ces leviers ne suffisent pas toujours dans le cas d'une notion FUG. La gestion prévue par l'enseignant peut elle aussi influencer le travail mathématique des étudiants. En particulier, ses interventions peuvent servir à apporter de l'aide au bon moment, après une recherche par exemple, à faire un retour sur le cours sous la forme d'un bilan, et tout ce qui peut contribuer à faire émerger la notion, même si toutes les phases de recherche ne sont pas adidactiques.

Tanguay (2002) mène une réflexion en amont de l'enseignement universitaire pour appréhender l'enseignement de notions FUG. Il étudie la possibilité de proposer des pistes d'aménagement dans l'enseignement secondaire visant à diminuer la rupture entre le lycée, où les théories abstraites ne sont pas développées, et l'université où le langage formel et les structures associées deviennent incontournables. Il revient sur l'importance d'articuler les cadres, les registres et les différents points de vue et il se centre sur l'enseignement de la géométrie vectorielle dans $\mathbb{R}^3$. Mais selon lui, ce n'est pas suffisant. Comme il l'explique, « non seulement les étudiants doivent-ils acquérir la flexibilité cognitive propre aux capacités de conversion en de multiples registres, cadres, langages, mais encore doivent-ils développer une attitude réflexive sur ces conversions, en tant qu'outil... ou en tant que motivation à la démarche axiomatique, comme moteur d'unification, de généralisation et de formalisation. » (ibid., p. 39). Il propose une série de recommandations pouvant être intégrées dans l'enseignement secondaire, visant à développer un sens géométrique des opérations sur les vecteurs. Il suggère également que le professeur intègre, dans le cours, des commentaires sur l'interprétation des concepts tels que le produit scalaire, les formules de distances... Nous retrouvons, ici aussi, l'idée d'incorporer des commentaires méta-mathématiques, au sens de Robert et Robinet (1996), pour aider à donner du sens à certaines notions.

2 D'autres approches

Après avoir abordé l'enseignement d'une notion FUG, nous nous intéressons ici à d'autres approches permettant d'étudier l'acquisition d'une notion « abstraite ».

Les travaux portant sur la transition entre l'enseignement secondaire et le supérieur mettent souvent l'accent sur les difficultés de l'apprentissage des mathématiques au niveau universitaire (voir par exemple Artigue (2006) ou Gueudet (2008) pour une revue de travaux portant sur ce thème).

Nous avons déjà souligné, pour caractériser ces spécificités, la complexité des mathématiques enseignées à ce niveau, notamment par le (nouveau) formalisme avec lequel les notions sont définies et la difficulté d'y associer du sens. Mais cette complexité se situe également dans les exigences en matière de raisonnement à produire. Robert (1998) explique que de nouveaux types de questions apparaissent à ce niveau d'enseignement et que les démonstrations peuvent devenir longues, variées et nécessitent de plus en plus de connaissances en logique élémentaire.

De nombreux étudiants perçoivent le début du parcours universitaire comme l'entrée dans un environnement composé de nouvelles lois dont l'appropriation nécessite l'acquisition d'un nouveau langage (Epp, 2003). Des changements d'attitude de la part de l'étudiant sont donc nécessaires.

Dreyfus (1999) explique que la première année universitaire requiert, chez l'étudiant, de passer d'une vision des mathématiques souvent centrée sur leurs aspects calculatoires et techniques à une vision des mathématiques fondée sur un ensemble de structures imbriquées les unes dans les autres. Tout se passe comme si l'étudiant, davantage habitué à un questionnement de type « Quel est le résultat ? », devait passer à un questionnement de la forme « Est-il vrai que ? ».

Nous présentons ci-dessous quelques travaux de recherche internationaux portant sur des notions enseignées vers la fin du secondaire ou au début du supérieur. Notre objectif est d'étudier comment la complexité des mathématiques à ces niveaux d'enseignement peut être étudiée. Nous nous appuyons, pour cela, sur deux éléments qui, selon nous, caractérisent la complexité des notions de topologie et sont donc en lien direct avec notre travail : la difficulté de leur donner du sens et la nature du travail mathématique à réaliser dans la manipulation de leur définition. Nous allons donc, sur cette base, situer notre propos suivant deux types de questionnements : d'une part ce qui touche aux modes de pensées et à la construction des connaissances mathématiques et d'autre part le raisonnement et les preuves mathématiques.

2.1 Modes de pensées et construction des connaissances mathématiques

L'apprentissage des mathématiques à l'université et la complexité qui lui est associée posent la question de l'existence d'un mode de pensée mathématique à l'entrée du supérieur qui différerait de celui adopté dans l'enseignement secondaire.

Des travaux tels que ceux de Tall notamment (1991) se sont penchés sur la question de savoir ce qui pouvait distinguer une pensée mathématique avancée d'une pensée mathématique élémentaire. Sans la définir précisément, Tall caractérise l'« advanced mathematical thinking », notée AMT, de la manière suivante : « Le passage de la pensée mathématique élémentaire à la pensée mathématique avancée implique une transition significative : celle de décrire à définir, de convaincre à prouver. C'est la transition de la cohérence des mathématiques élémentaires à la conséquence des mathématiques avancées » (ibid., p. 20).

Il est donc difficile d'affirmer que la transition évoquée par Tall est précisément la transition institutionnelle entre le secondaire et le supérieur. Mais, selon Tall, l'AMT peut être interprétée d'au moins deux manières : une pensée ayant trait aux mathématiques avancées ou des formes avancées de la pensée mathématique.

Dreyfus souligne lui aussi la difficulté de caractériser l'AMT car l'activité mathématique met en jeu, à tous les niveaux d'enseignement, des processus tels que représenter, visualiser, généraliser, conjecturer, déduire, abstraire et formaliser (ibid., p. 26).

La complexité des mathématiques enseignées à l'université est étudiée dans divers travaux en essayant de caractériser le développement cognitif des étudiants dans l'acquisition d'une notion.

Cela amène Tall et Vinner (1981) à introduire les notions de « concept definition » et de « concept image », pour distinguer les concepts mathématiques formellement définis et les processus cognitifs qu'ils engendrent, pouvant affecter le sens et l'utilisation des concepts. Selon eux, l'enseignant peut jouer un rôle important dans le développement du concept image de l'élève car il suggère intentionnellement ou involontairement des associations que les étudiants pourront s'approprier.

L'étude réalisée par Bingolbali et Monaghan (2008) montre l'influence de l'enseignement reçu dans le développement du concept image de la dérivée chez des étudiants en première année universitaire. L'observation des cours de mathématiques dans des filières mathématique et ingénierie montre que les étudiants de chaque filière ont reçu un enseignement différent, dans les cours et dans les exemples proposés notamment, qui ont pu influencer leur perception de la notion de dérivée. Ainsi, des tests réalisés au début et après l'enseignement révèlent que les étudiants de la filière ingénierie développent un concept image de la dérivée associé à l'idée de taux de variation alors que celui des étudiants d'une filière mathématique est orienté vers l'idée de pente d'une tangente.

Dans la théorie APOS, Dubinsky (1991) distingue les « processus » et les « objets » pour caractériser les constructions mentales dans l'acquisition des notions mathématiques. Cette théorie prend appui sur les idées de Piaget et sur la manière de passer d'un état de connaissance à un autre. Le travail du chercheur est alors d'identifier et de décrire ces différentes constructions pour ensuite élaborer des tâches à proposer aux élèves permettant leur mise en place et leur utilisation.

Une manière de s'assurer que les étudiants réalisent les constructions souhaitées est le recours à l'ordinateur. Les étudiants « construisent des implémentations des concepts mathématiques en écrivant des programmes » (Dubinsky, 1997). ISETL (Interactive Set Langage) est un langage de programmation dont la syntaxe est proche de la syntaxe mathématique. Il est utilisé, dans la théorie APOS, comme une aide à la construction de concepts mathématiques.

Dans un premier temps, la théorie APOS prend appui sur une analyse des concepts mathématiques à enseigner pour en réaliser une décomposition mettant en évidence les constructions qui peuvent être nécessaires à l'apprentissage des concepts. Ces constructions sont caractérisées par trois phases, le passage d'une phase à une autre n'étant pas nécessairement linéaire en ce sens qu'« un individu peut rester longtemps à des étapes intermédiaires, voire être à une étape pour certains aspects d'un concept et à une autre pour d'autres aspects du concept. » (Trigueros et Oktac, 2005, p. 3). L'action apparaît comme une transformation des objets perçue par l'individu comme quelque chose d'externe. La répétition de l'action appuyée par une réflexion sur celle-ci permet de la transformer en un processus. Ensuite, lorsque l'étudiant parvient à percevoir l'ensemble des opérations appliquées dans le processus, il en acquiert une vision globale. On dit que l'étudiant a encapsulé le processus pour en construire un objet cognitif. Enfin, le schème d'un concept désigne l'ensemble des actions, processus, objets et autres schèmes reliés entre eux qui forment chez l'étudiant un tout cohérent. Le recours à un langage informatique aide au passage de l'action au processus.

Selon Dubinsky, il ne faut pas chercher à éviter le recours au formalisme. Les approches visant à construire des notions abstraites à partir de la concrétisation à travers des applications ne sont, selon lui, pas efficaces. Il faut, au contraire, partir de la structure générale pour ensuite en venir aux exemples particuliers.

Le groupe RUMEC utilise la théorie APOS pour mener des projets de recherche. L'un d'entre eux porte sur l'enseignement de l'algèbre linéaire (Trigueros et Oktac, 2005). En accord avec ce qui vient d'être dit, l'enseignement en question démarre par l'introduction des espaces vectoriels, notion souvent identifiée comme abstraite par les étudiants. Le groupe a écrit un manuel d'algèbre linéaire comprenant des activités intégrant l'outil informatique ISETL et une partie de discussion en classe à mener par l'enseignant. L'étudiant y est invité à développer une réflexion sur son travail en laboratoire et l'enseignant présente explicitement les concepts. Enfin des exercices traditionnels sont proposés à l'étudiant.

Le concept de fonction a lui aussi été étudié dans la théorie APOS (Breidenbach et al., 1992). Les étudiants concernés par cette étude sont en cycle supérieur. Dans le but de caractériser leur conception de la notion, il leur a tout d'abord été demandé, au tout début d'un semestre de cours, de définir le concept de fonction et d'en donner quelques exemples. Une réponse attendue était d'obtenir une définition en terme de processus. Les réponses ont pu être classées en 4 catégories : préfonction [2], action, processus et une catégorie de réponses inclassables. 40% des étudiants sont dans la catégorie préfonction. Les exemples ont été classés aussi en préfonction, action et processus. Après avoir bénéficié d'un enseignement proposant des activités informatiques, les mêmes questions ont été reposées aux étudiants. L'aspect le plus frappant est la diminution significative de la catégorie préfonction, qui tombe à 17%.

D'autres travaux se sont penchés sur la question de savoir comment la compréhension de certains concepts de la théorie des groupes peut être développée (Dubinsky et al., 1994). Sur la base d'analyses d'une vingtaine de cours sur cette théorie et d'interviews d'étudiants, les auteurs montrent une progression des contenus semblable dans la plupart des cours. Leurs analyses dans le cadre de la théorie APOS semblent montrer que la compréhension d'un concept de la théorie des groupes se développe en relation avec la compréhension d'autres concepts. Plus précisément, c'est la compréhension d'un concept qui aide à la construction d'autres concepts.

2.2 Raisonnement mathématique et utilisation du langage formel

Moore (1994) identifie plusieurs sources aux difficultés rencontrées par les étudiants dans la production de démonstrations : la méconnaissance des définitions, la difficulté à élaborer des exemples, même simples, la difficulté à débuter une preuve, des difficultés relatives au langage. Ces sources sont également liées aux erreurs que nous avons identifiées dans les questions de topologie proposées aux étudiants (cf. chapitre I). Mais au-delà de la difficulté à démarrer une preuve, les étudiants sont également démunis face au travail mathématique à réaliser tout au long des exercices et ce, dès la manipulation des définitions.

Durand-Guerrier a mené un certain nombre de travaux sur la conduite du raisonnement mathématique et de la production de preuves mathématiques (Durand-Guerrier, 1996 et 2005 par exemple). En prenant appui sur une analyse épistémologique et didactique des questions de logique et de leur articulation avec le raisonnement mathématique, elle montre que les difficultés de nature logique observées chez les étudiants ne sont pas suffisamment prises en compte dans l'enseignement universitaire. Elle a notamment repéré dans les pratiques ordinaires des enseignants des éléments pouvant engendrer ou renforcer des difficultés chez

[2]Cette catégorie regroupe les étudiants qui ont une vision assez limitée de la notion. Une réponse de cette catégorie est par exemple « une fonction est une expression mathématique avec des variables ».

les étudiants au début du parcours universitaire (Durand-Guerrier, 2005). Elle en donne plusieurs exemples.

Elle cite tout d'abord l'utilisation, très répandue, de la quantification implicite des énoncés conditionnels. Ainsi, une implication qui serait énoncée sans quantificateur laisse sous-entendre que c'est une quantification universelle qui est implicitement présente. Cette pratique cache, selon Durand-Guerrier, « la distinction entre *implication entre propositions, implication universellement quantifiée et implication ouverte* et fait disparaître l'importance de l'univers du discours pour établir la vérité d'un énoncé général » (ibid., p. 1).

La quantification bornée est un autre exemple d'une telle pratique. Elle cite la définition de la continuité d'une fonction f en un point a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x,\ (|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Cette définition peut s'écrire en faisant disparaître la quantification bornée sur ε et δ, de la manière suivante :

$$\forall \varepsilon \Big(\varepsilon > 0 \Rightarrow \big(\exists \delta(\delta > 0 \wedge \forall x(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon))\Big).$$

Ce jeu de l'apparition / disparition de l'implication est, selon elle, constitutif de la compréhension de l'implication logique. La quantification bornée apparaît donc comme un élément qui tend à « occulter la structure logique profonde des énoncés que l'on manipule ».

Les deux exemples suivants touchent directement à la validité des énoncés mathématiques.

L'absence de conclusion dans les démonstrations est un élément qui ne permet pas de revenir à ce qui a été démontré. Elle cite un exemple d'énoncé de géométrie dont la démonstration prouve un résultat universel et explique, sur cette base, que « d'une part, on ne problématise pas la signification de l'implication, et d'autre part, on se prive de poser des questions mathématiques permettant d'approfondir les notions en jeu ».

Enfin, certaines interprétations de formules universellement valides peuvent mener à des raisonnements incorrects, comme le montre l'analyse d'une démonstration extraite d'un manuel.

Par conséquent, il est important de pouvoir repérer, dans un cours, les endroits susceptibles de faire travailler à la fois les aspects logiques et mathématiques des notions en jeu.

Durand-Guerrier et Arsac (2003) ont étudié la question de la validité de démonstrations dans lesquelles il s'agit de manipuler la définition de limite en $(\varepsilon - \delta)$. Les auteurs parlent d'une démonstration en $(\varepsilon - \delta)$ pour désigner une démonstration qu'on démarre par la donnée d'un ε arbitraire, suivie par la construction de δ par rapport à ce ε. Des différences sont déjà relevées dans la manière d'énoncer cette définition dans les manuels. Celle-ci peut être donnée sous la forme d'une écriture quantifiée, dans la langue naturelle, avec un usage fréquent d'une notation de la forme δ_ε pour faire apparaître que la valeur de δ dépend de celle de ε. Leur analyse de manuels montre aussi que le caractère générique de ε est traité de différentes manières. Cela amène les auteurs à utiliser le système de démonstration naturelle de Copi pour fournir des outils intermédiaires permettant de détecter des failles dans le choix des raisonnements.

Cependant, il n'y a pour les étudiants aucune pratique de référence qui serait privilégiée par rapport à une autre. Durand-Guerrier et Arsac expliquent que les professeurs d'université n'ont pas de règles fiables pour évaluer la validité d'un raisonnement ou d'une preuve. Lorsqu'ils sont amenés à se prononcer sur la production d'une preuve écrite par un étudiant, ils peuvent établir que la production est erronée en faisant appel à leurs connaissances mathématiques mais ils ne parviennent pas à identifier la source strictement logique de l'erreur de raisonnement.

Nous avons enfin retenu les travaux de Chellougui (2004) sur la manipulation d'écritures de la forme « pour tout... il existe », notées AE, et « il existe... pour tout », notées EA [3]. L'analyse des entretiens menés auprès d'étudiants en première année universitaire montre leurs difficultés à donner du sens à ce genre d'écritures, notamment parce que chez un grand nombre d'entre eux, il n'y a pas de différence ente les deux formes d'énoncés.

3 Bilan

Les notions « abstraites » étudiées dans ce chapitre relèvent souvent des domaines de l'analyse et de l'algèbre linéaire. Il semble que ces deux domaines soient majoritairement étudiés par les chercheurs.

Du côté des notions FUG, les travaux montrent la nécessité de tout d'abord étudier ce type de notions en amont de l'enseignement. Une étude historique et épistémologique permet de caractériser les spécificités des notions à enseigner en retournant à la genèse des notions. Le fait de pouvoir appréhender leur sens, leur fonction et leur développement peut, comme nous l'avons vu dans les travaux de Dorier par exemple, expliquer certaines difficultés d'enseignement. Une analyse des exercices à proposer aux étudiants permet de caractériser le travail mathématique attendu de la part de l'étudiant et de confronter les outils disponibles chez eux aux outils à introduire pour mener aux apprentissages visés.

Les travaux décrits montrent aussi la possibilité d'agir sur l'enseignement d'une notion FUG. Nous avons vu que certains leviers peuvent en effet être intégrés à l'enseignement pour concevoir des situations d'introduction aux notions, par une question accessible aux étudiants. Nous pensons ici aux changements de cadres, de registres ou encore au recours aux commentaires méta-mathématiques.

Les travaux évoqués sur les notions « abstraites » font émerger d'autres approches pour étudier ce type de notions. L'accent est davantage mis sur les cheminements cognitifs suivis par les étudiants pour acquérir une notion. Les méthodologies s'appuient souvent sur des questionnaires à proposer aux étudiants pour étudier leurs conceptions d'une notion avant et/ou après l'enseignement.

[3] Les notations AE et EA font référence à l'anglais « for All, there Exists ... » et « there Exists, for All ... ».

Le rôle de l'enseignant apparaît également comme un élément pouvant influencer les apprentissages et notamment, la conduite du raisonnement mathématiques. Nous l'avons bien observé dans les travaux de Durand-Guerrier. Ils montrent aussi que la prise en compte des questions de logique peut expliquer certaines difficultés des étudiants.

Combinés au diagnostic présenté au chapitre I, certains éléments de ce chapitre vont nous permettre de définir le travail à mener pour mieux comprendre l'enseignement des notions de topologie et les outils théoriques associés. Cela fait l'objet du chapitre suivant.

Chapitre III

Cadrage théorique et questionnement didactique

Dans cette partie, nous développons notre questionnement en le situant dans le contexte institutionnel auquel il est soumis. Nous présentons ensuite quelques éléments issus de la théorie de l'activité, qui est le cadre théorique retenu pour aborder notre problématique de recherche.

1 Délimitation de notre champ d'étude

Notre travail est initié par un questionnement d'enseignant voulant comprendre pourquoi un enseignement de topologie, dans lequel il prend une part active, ne mène pas à une bonne acquisition des notions.

Le diagnostic présenté au chapitre I révèle que cet enseignement est très centré sur le caractère formalisateur des notions de topologie, ce qui ne contribue pas à leur donner du sens, tout comme le fait d'introduire les notions par leur définition, sans réelle motivation. La majorité des exercices proposés aux étudiants porte sur la manipulation des définitions. Or, nos analyses de tâches ont montré que ce type d'exercices engendre un travail mathématique complexe à ce niveau d'enseignement qui nécessite, de plus, la disponibilité de connaissances en logique et en théorie des ensembles mais également des connaissances sur les nombres réels. Les analyses montrent également que ce type d'exercices n'apporte pas de connaissances en topologie.

La finalité de l'enseignement étudié est de faire manipuler aux étudiants un formalisme complexe à partir d'une utilisation massive du symbolisme. Ces étudiants ne parviennent ni à lui donner du sens, ni à l'utiliser correctement. Cet enseignement provoque donc des difficultés chez les étudiants tant du côté conceptuel que technique. Celles-ci ont pu être précisées par des questionnaires qui leurs ont été proposés.

En tant que didacticienne, nous sommes tout d'abord amenée à revenir sur la question des spécificités des notions de topologie, en particulier pour préciser davantage leurs caractères formalisateur, unificateur et généralisateur. Cette question nous semble pertinente pour éclairer la possibilité d'introduire les notions par des questions accessibles aux étudiants, à ce niveau d'enseignement, et pour étudier les difficultés d'enseignement que ces notions provoquent.

Cette première démarche se situe en amont de l'enseignement. Nous nous tournons ensuite vers la possibilité d'agir sur l'enseignement de ces notions en nous demandant ce qu'il est finalement possible de faire apprendre en topologie aux étudiants, compte tenu des spécificités des notions et du contexte scolaire.

Notre questionnement est soumis à des contraintes institutionnelles dont il s'agira d'évaluer les conséquences sur les apprentissages des étudiants. Nous les rappelons ci-dessous.

Comme nous l'avons mentionné au chapitre I, les notions de topologie qui nous intéressent font l'objet d'un chapitre intégré dans un cours d'analyse mathématique. Le cours est suivi par des étudiants de première année universitaire provenant des filières mathématique, informatique et physique. Jusqu'en 2004-2005, les trois filières étaient regroupées pour suivre le cours en commun. Durant l'année universitaire 2005-2006, une partie complémentaire a été intégrée au programme de cours de la filière mathématique uniquement. Cette partie a pour objectif d'approfondir les sujets enseignés dans le cours commun. Par exemple, des résultats qui ont été admis dans le cours commun sont ici démontrés. Des notions qui ont été définies dans le cours commun sont aussi approfondies dans la résolution d'exercices plus complexes.

Le programme du cours d'analyse mathématique prévoit que le chapitre portant sur la topologie démarre aux environs du mois de mars [1].

Dans le cours commun aux trois filières, les notions d'intérieur et d'adhérence d'un ensemble sont désormais présentées brièvement pour définir rigoureusement les notions de limite d'une fonction et de dérivabilité [2]. Plus aucun exercice portant « strictement » sur ces notions n'est proposé. L'enseignement visé dans ce travail ne concerne donc que la filière mathématique dans laquelle les notions font encore l'objet d'un cours théorique et d'exercices intégrés à cette partie complémentaire.

Dans le chapitre portant sur la topologie, les notions ciblées par le programme sont celles d'intérieur et d'adhérence d'un ensemble, d'ensemble ouvert et d'ensemble fermé dans l'espace $\mathbb{R}^N$, avec un travail plus spécifique dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ dans les exercices proposés en travaux dirigés.

À cette contrainte liée aux contenus à enseigner viennent s'ajouter d'autres. La manipulation des définitions, et par conséquent la manipulation du langage formel, sont un objectif de l'enseignement dont il est question. Il convient donc de proposer aux étudiants des exercices d'application des définitions. Or, nous avons montré au chapitre I que ce type d'exercices nécessite des connaissances

[1] L'année académique se répartit en deux quadrimestres. Le premier commence à la mi-septembre et se termine en décembre. Le second démarre en février, après une session d'examens qui ont lieu en janvier, et se termine à la mi-mai. Une autre session d'examens est organisée en juin.

[2] En effet, la définition de la limite d'une fonction f en un point a requiert que a appartienne à l'adhérence du domaine de f. La définition de la dérivée d'une fonction f en un point a impose quant à elle que a appartienne à l'intérieur du domaine de f.

supposées disponibles dans différents cadres, notamment en logique et en théorie des ensembles, alors qu'elles ne le sont pas. Cette difficulté d'enseignement est à prendre en compte et pose la question de savoir quels types d'aménagements peuvent être intégrés dans l'enseignement pour la surmonter. De plus, nous savons aussi que la manipulation des définitions, dans le cas des notions de topologie du moins, n'aide pas les étudiants à donner du sens aux notions. D'autres types d'exercices devraient donc s'incorporer à ceux portant sur la manipulation des définitions pour travailler à la fois sur le sens et sur la technique.

2 Théorie de l'activité

Nous choisissons d'aborder notre questionnement avec des outils issus du cadre théorique de la théorie de l'activité, telle qu'elle a été spécifiée à l'enseignement des mathématiques et à la situation scolaire dans les travaux de Vergnaud, puis dans ceux de Robert et Rogalski.

Nous présentons ici quelques éléments issus de cette théorie de manière à préciser le découpage retenu pour organiser notre travail. Pour une présentation détaillée du cadre théorique, nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage *La classe de mathématiques* (Vandebrouck et al., 2008). Nous mentionnons, au fil du texte, d'autres références bibliographiques utilisées pour illustrer notre propos.

2.1 Hypothèses sur ce qui peut favoriser la construction de connaissances

La théorie de l'activité prend appui sur des hypothèses concernant des choix d'enseignement supposées favoriser la construction de connaissances. Ces hypothèses sont issues des cadres du constructivisme de Piaget et de la théorie de l'activité développée par Vygotsky, puis par Leontiev, notamment. Nous rappelons très schématiquement quelques éléments fondateurs de chaque théorie.

Ces deux cadres théoriques ont des visées scientifiques propres à chacun : chez Piaget, les connaissances se construisent par le développement de mécanismes internes du sujet tandis qu'elles se développent, chez Vygotsky, dans l'interaction sociale et grâce à la médiation d'instruments psychologiques.

Mais comme Rogalski (Vandebrouck et al., 2008) le mentionne, ces deux théories convergent « en particulier quant aux facteurs du développement, à sa temporalité longue, à la place des instruments dans ce développement (instruments « cognitifs » chez Piaget ; instruments psychologiques chez Vygotsky). » (p. 431).

Dans la théorie du constructivisme piagétien, les connaissances sur les objets se construisent à partir des actions sur ces objets. Ces actions ne sont pas limitées aux actes physiques sur les objets. Le développement de la conceptualisation fait également intervenir des opérations mentales. L'activité du sujet est alors déterminée par sa structure de connaissance et par les propriétés des objets.

Un des apports de Piaget est de préciser les mécanismes internes qui conduisent à la restructuration des connaissances par une régulation de l'action par le sujet. Ces mécanismes sont décrits par une dialectique entre assimilation / accomodation au sein d'un processus de déséquilibre / rééquilibration. Comme Rogalski (1983) l'explique, « dès que l'action du sujet conduit à une connaissance sur l'objet, celui-ci peut se transformer : de nouvelles questions peuvent se poser à propos de cet objet et sur ses rapports avec d'autres. Des contradictions peuvent surgir aussi bien des nouvelles questions devenues possibles que de la confrontation de la nouvelle connaissance avec les anciennes » (p. 3). La connaissance évolue donc d'un état d'équilibre à un autre en passant par des phases de transition durant lesquelles les connaissances déjà acquises sont mises en défaut. Si ce moment de déséquilibre est surmonté, c'est qu'une réorganisation des connaissances s'est produite durant laquelle le nouveau s'est intégré dans l'ancien.

Chez Vygotsky, une idée centrale est que les processus mentaux sont influencés par les relations socio-culturelles entre les individus. Le processus d'apprentissage est conçu comme « un processus entre l'enfant et l'adulte agissant comme médiateur de la culture. » (Boschet, 1988, p. 2).

Vygotsky distingue deux types de concepts : les concepts quotidiens, qui se construisent dans le monde quotidien, grâce aux interactions sociales, et les concepts scientifiques, qui sont les concepts enseignés dans le contexte de l'apprentissage scolaire.

Un élément majeur, chez Vygotsky, concerne les modes de développement de ces concepts. Ceux-ci se développent en interaction dans un processus de « double germination » que nous précisons en reprenant les propos de Rogalski (Vandebrouck et al., p. 441) : « D'une part, la germination des concepts quotidiens se fait du « bas » vers le « haut », vers ce qui est « général », à partir de l'interaction avec les objets du monde de l'action (comme dans le constructivisme piagétien). D'autre part, la germination des concepts scientifiques se fait du « haut » vers le « bas », avec « les mots pour dire le général », en se concrétisant ultérieurement. Dans cette métaphore biologique de la germination, les concepts quotidiens frayent la voie à la germination des concepts scientifiques par les significations qu'ils assurent, et les concepts scientifiques préparent la voie par leur organisation et les médiations qu'ils proposent, et « tirent » vers le haut les concepts quotidiens dans leur germination. »

L'acquisition opérationnelle se produit chez l'enfant quand les deux types de concepts « se rencontrent » et que deux types de processus se sont engagés. « Le premier processus est celui d'une réorganisation des concepts quotidiens, réorganisation qui va dans le sens d'un mode d'existence davantage organisé en système. Le second est un processus de prise de signification des concepts scientifiques pour devenir des concepts pour l'action » (ibid., p. 441).

Ce processus d'interaction suppose des propriétés relatives à la dynamique du développement. Vygotsky introduit le concept de zone proximale de développement, notée ZPD, pour modéliser cette frontière située entre ce que l'enfant est capable de faire seul et ce qu'il peut faire avec l'aide d'une personne plus expérimentée (un adulte ou un enseignant). Une idée clé est alors que les apprentissages ne se produisent que si l'on propose des situations relevant de la zone proximale de développement : « si les situations sont au-delà de la ZPD, les aides ne produiront au mieux qu'un effet de copie immédiate (...), et pas un apprentissage ; si les situations sont en deçà de la ZPD l'enfant / l'élève n'a rien à apprendre : il fait fonctionner ce qu'il a déjà conçu » (ibid., p. 442).

Du point de vue de la didactique des mathématiques, le constructivisme piagétien offre donc un cadre théorique producteur pour étudier les acquisitions des élèves en mathématiques. Il montre en effet l'importance d'une construction progressive des connaissances plus ou moins autonome par l'élève. La théorie de Vygosky permet, quant à elle, de situer l'action et l'impact de l'action didactique. Il peut y avoir appropriation de connaissances mathématiques par imitation de l'enseignant lorsqu'il expose des connaissances, à condition que le nouveau soit proche des connaissances déjà là.

2.2 Un intermédiaire pour étudier les apprentissages mathématiques : les activités des élèves

Les hypothèses sur les processus d'apprentissage issues des théories de Piaget et Vygotsky ont ensuite été spécifiées et contextualisées à l'enseignement des mathématiques au sein de la théorie de l'activité.

Guidée par l'étude des liens entre enseignement et apprentissage, nous retenons tout d'abord deux notions clés, issues de la théorie de l'activité : celles de « tâche » et d'« activités ». La notion de « tâche » est tournée du côté de la situation [3]. Elle désigne un énoncé mathématique qui est proposé aux élèves. La notion d'« activités » est tournée du côté du sujet. Les activités désignent ce que la tâche déclenche et qui va permettre le développement de connaissances. En font donc partie tout ce que font les élèves, y compris quand ils écoutent, ce qu'ils pensent, ce qu'ils disent... mais aussi tout ce qu'ils ne disent pas ou ne font pas. On ne peut donc avoir accès qu'à des traces des activités. Ce sont les cours, les exercices et les conditions de travail en classe qui sont retenus ici comme pouvant contribuer aux transformations espérées en termes de connaissances. Les activités sont aussi conditionnées par de nombreux autres facteurs. Mais les facteurs liés aux aspects affectifs, socio-culturels... sont considérés dans ce cadre théorique comme des paramètres. Enfin, les activités d'un élève sont déterminées par l'élève lui-même. À ce titre, certains travaux s'appuyant sur la théorie de l'activité prennent en compte des éléments différenciateurs chez les sujets.

La théorie de l'activité, telle qu'elle est ici spécifiée aux mathématiques et au contexte scolaire, prend alors appui sur l'hypothèse suivante : les activités des élèves peuvent engendrer des connaissances mathématiques. On choisit donc, pour étudier les liens entre enseignement et apprentissage, de prendre comme intermédiaire les activités des élèves en classe. Ce sont en effet les activités que

[3] Le mot est à prendre dans son sens commun et non pas dans le sens de la théorie des situations de Brousseau.

ceux-ci développent dans la classe qui vont permettre, ou non, des apprentissages, notamment par les processus cognitifs et psychologiques décrits par Piaget et Vygotsky.

Ainsi, les apprentissages mathématiques sont décrits en termes de conceptualisation et sont étudiés via les activités des élèves. Il s'agit donc, dans un premier temps, de préciser ce que nous entendons par « conceptualisation » en mathématiques.

2.3 Conceptualisation en mathématiques

Dans la théorie des champs conceptuels, Vergnaud (1990) aborde la question de donner du sens à un concept. Il définit tout d'abord un concept C comme un triplet de trois ensembles, noté $(S, I, \mathscr{L})$, où la première composante S est l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept ; c'est le référent. La deuxième composante I est l'ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationnabilité des schèmes ; c'est le signifié. Enfin, la troisième composante $\mathscr{L}$ est l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement ; c'est le signifiant.

Le sens apparaît alors comme « une relation du sujet aux situations et aux signifiants. Plus précisément, ce sont les schèmes évoqués chez le sujet individuel par une situation ou par un signifiant qui constituent le sens de cette situation ou de ce signifiant pour cet individu » (ibid. p. 158).

Vergnaud s'intéresse toutefois à des réseaux de concepts plutôt qu'à des concepts isolés. Une première raison évoquée est qu'une situation donnée ne mobilise en général pas l'ensemble des propriétés d'un même concept. Ensuite, il est rare qu'une situation donnée mette en jeu un seul concept. Une troisième raison fournie par Vergnaud est que la formation d'un concept est un processus qui nécessite une longue période de temps.

Vergnaud introduit la notion de champ conceptuel pour désigner un réseau de concepts, c'est-à-dire un champ de connaissances mathématiques. Plus précisément, un champ conceptuel est défini comme un ensemble de situations dont la maîtrise requiert une variété de concepts, de procédures et de représentations symboliques. Vergnaud a notamment étudié le champ conceptuel des structures additives (Vergnaud, 1981).

Au delà de la question de donner du sens aux concepts topologiques, la technique joue, elle aussi, un rôle majeur, avec ses propres spécificités.

La dialectique qui peut être mise en place entre le sens et la technique est abordée par Douady (1994) en intégrant la dimension outil / objet des concepts. Elle distingue deux caractères associés à une notion. Elle parle du caractère outil d'une notion lorsque celle-ci est utilisée pour résoudre un problème ou un exercice. La dimension outil est donc associée à une certaine disponibilité fonctionnelle de la notion. Elle parle du caractère objet d'une notion lorsqu'elle est présentée de manière générale (définition-théorème-propriété). L'utilisation d'une notion comme un outil pour résoudre un problème amène une contextualisation de la notion. Inversement, lorsque la notion est dégagée du contexte du problème, elle devient un objet qui est décontextualisé et qui est susceptible d'être complété ou généralisé.

La dimension outil / objet d'une notion amène Douady à considérer que le sens revêt alors deux dimensions. Tout d'abord, le fait que les notions interviennent et évoluent dans des problèmes est producteur de sens pour les élèves, d'un point de vue qu'elle qualifie de point de vue sémantique. Mais les mises en relation entre différentes notions qui interviennent dans un problème sont elles aussi productrices de sens, d'un point de vue syntaxique.

Cependant, le sens n'est qu'une composante du processus de conceptualisation ; la technique est, elle aussi, une composante essentielle de ce processus. Douady cite l'exemple du calcul algébrique pour lequel elle pense que l'apprentissage doit être pensé « en terme d'équilibre entre la construction du sens et la familiarité avec des algorithmes » (ibid., p. 48).

Dans le cas de la topologie, nous avons montré que le travail technique de manipulation des définitions engendre de nombreuses adaptations mettant en jeu des connaissances anciennes sur les nombres réels, l'ordre sur $\mathbb{R}$, la valeur absolue... et des connaissances en cours d'acquisition sur la convergence des suites, les normes, les boules... Les travaux de Robinet (1986) sur les réels ou encore ceux de Duroux (1982) sur la valeur absolue ont montré que ce type de connaissances, pourtant anciennes, sont sources de difficultés récurrentes chez les étudiants, de première année universitaire, notamment. Ces éléments renforcent, une fois encore, la difficulté de mettre en place une dynamique productive entre sens et technique dans l'enseignement des notions de topologie.

En plus de caractériser la nature du travail mathématique à réaliser pour manipuler les notions de topologie, nos analyses de tâches ont montré que les contraintes institutionnelles concernant la manipulation du formalisme en termes de rigueur attendue renforcent les difficultés des étudiants (Bridoux, 2005). Il est donc nécessaire de prendre en compte cette dimension dans le cadre de ce travail. En effet, au niveau de l'enseignement universitaire, le rôle de la rigueur et celui de l'écrit sont des éléments omniprésents dans le fonctionnement des mathématiques.

En conclusion, la conceptualisation, en mathématiques, est, selon nous, associée à la prise de sens des notions en tant qu'objet et en tant qu'outil. Cela implique d'avoir accès aux notions pour les mettre correctement en fonctionnement dans les exercices proposés, même quand les notions à utiliser ne sont pas indiquées dans l'énoncé. Les entraînements techniques et les « gammes » participent également à cette prise de sens. La flexibilité entre les diverses représentations des notions en termes de cadres et de registres participe également à la conceptualisation, tout comme l'insertion des notions dans le bagage mathématique des étudiants.

La conceptualisation des notions est donc « une notion relative, et n'est jamais achevée » (Robert et Rogalski, 2004, p. 78), et nous l'associons à la disponibilité et l'organisation des notions dans le bagage mathématique des étudiants et à la mise en place d'une dynamique productive entre les dialectiques outil / objet d'une part, et sens / technique d'autre part.

2.4 Étudier les activités des élèves en classe

Après avoir précisé ce que nous englobons sous le terme « conceptualisation » en mathématiques, il s'agit d'apprécier les activités des élèves pour étudier si elles mènent à la conceptualisation visée.

Pour étudier les activités des élèves, nous retenons que certains éléments peuvent amener de la variabilité dans les activités. Nous pensons à la nature des tâches proposées, à l'ensemble des tâches proposées vu dans sa globalité et à la gestion de la classe par l'enseignant. Nous les précisons ci-dessous.

▸▸ Nature des tâches proposées

Une tâche est caractérisée par les mises en fonctionnement des connaissances, anciennes et en cours d'acquisition, chez les élèves. Ces mises en fonctionnement sont déterminées à partir des connaissances à la disposition des élèves dans le cours (définitions, théorèmes, propriétés) et des adaptations à réaliser sur ces connaissances. En effet, comme le souligne Robert (Vandebrouck et al., 2008), « l'activité mathématique est entre autre une activité d'adaptation et nous faisons l'hypothèse que restituer aux élèves des possibilités de faire bouger, mélanger, reconnaître les connaissances à utiliser dans les exercices qu'ils ont à chercher est partie prenante de la construction (permettant assimilation, accomodation, déséquilibre et rééquilibration...) » (p. 36). Robert distingue les types d'adaptations suivants, pouvant intervenir simultanément dans la résolution des tâches (ibid., p. 50). Nous illustrons chaque type d'adaptation par un exemple pouvant être rencontré dans un exercice de topologie.

- □ **A1 Les reconnaissances des modalités d'application des connaissances**
  Par exemple, montrer qu'un ensemble A coïncide avec son intérieur se ramène à prouver les deux inclusions $\text{int}A \subseteq A$ et $A \subseteq \text{int}A$.
- □ **A2 L'introduction d'intermédiaires**
  Par exemple, pour montrer qu'un ensemble A ne coïncide pas avec son adhérence, on cherche l'existence d'un point qui appartient à $\text{adh}A$ mais pas à A.
- □ **A3 Les mélanges de plusieurs cadres ou notions, les changements de points de vue, les jeux de cadres, les mises en relation ou interprétations**
  Par exemple, le fait d'avoir une suite (x_n) d'éléments de l'intervalle $[0,1]$ peut être mis en relation avec le fait que (x_n) converge vers un réel x pour en déduire que $x \in [0,1]$.
- □ **A4 L'introduction d'étapes, l'organisation du raisonnement ou des calculs**

Par exemple, prouver qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B s'organise de la manière suivante : on considère un élément quelconque de A et on prouve qu'il appartient à B.

- □ **A5 L'utilisation de questions précédentes dans un problème**

  Par exemple, on peut s'intéresser à la nature topologique de deux ensembles pour ensuite déduire que leur intersection est un ensemble ouvert ou fermé.

- □ **A6 L'existence de choix, forcés ou non ; par exemple le choix d'une méthode**

  Par exemple, on peut montrer qu'un ensemble est fermé en prouvant qu'il coïncide avec son adhérence ou bien en prouvant que son complémentaire est ouvert.

En s'appuyant sur le travail mathématique mis en jeu dans les exercices, Robert différencie des types de tâches. Les tâches **simples et isolées** sont des applications immédiates de connaissances (appliquer une propriété ou une définition par exemple). Il n'y a pas d'adaptation à réaliser ni de mélange de notions. Il s'agit d'exercices contextualisés où l'utilisation des connaissances consiste à remplacer des données générales par des données particulières non problématiques.

Les tâches qui relèvent d'un niveau de mise en fonctionnement **mobilisable** nécessitent des adaptations et une juxtaposition de connaissances mais celles-ci sont au moins en partie indiquées.

Les tâches qui relèvent d'un niveau de mise en fonctionnement **disponible** sont celles où rien n'est indiqué. C'est à l'étudiant de rechercher dans son bagage mathématique les connaissances à utiliser et les adaptations à réaliser sur ces connaissances. Les analyses de tâches permettent donc de décrire les activités potentielles des élèves, c'est-à-dire les activités que les élèves peuvent réaliser à partir des énoncés qui leur sont proposés dans le contexte précis de la classe.

Du côté des déroulements en classe, les contraintes de temps présentes dans l'enseignement peuvent amener l'enseignant à proposer une majorité de tâches proches du cours qui se réduisent souvent à des applications immédiates de résultats. Comme nous l'avons dit précédemment, ce type de tâche ne nécessite pas d'adaptations des connaissances chez les élèves. Le travail mathématique qu'ils doivent accomplir est donc très minoré. Robert et Rogalski (2004) expliquent que le point de vue souvent développé par les enseignants est que « sans gammes, pas question de virtuosité : alors on choisit de commencer par les gammes, même si on n'a pas le temps de finir par le sens » (p. 82).

Elles ont également mis en évidence, dans certains cas, le découpage par l'enseignant des tâches proposées aux élèves en sous-tâches qui deviennent en fait des tâches élémentaires. Les activités engendrées sont alors séquentialisées : « les élèves font fonctionner les outils les uns après les autres, ils n'ont besoin que des connaissances outils (empilées) correspondant au cours et soufflées par le découpage organisé par l'enseignant » (ibid., p. 83).

Les tâches qui comportent des adaptations permettent de mettre en relation différents contextes et de jouer sur les liens entre différentes notions. En proposer dans l'enseignement peut donc contribuer aux apprentissages des élèves, voire à les transformer en connaissances, à condition que la gestion en classe ne modifie pas les activités.

▶▶ Élaboration d'un scénario

Pour organiser un enseignement mettant en jeu un certain nombre d'activités supposées favoriser les apprentissages, le chercheur élabore un scénario d'enseignement. Nous appelons scénario l'ensemble ordonné des cours, exercices, évaluations et gestion prévue a priori. Un scénario comprend donc à la fois des prévisions sur les contenus et sur la conduite de la classe par l'enseignant.

Son élaboration résulte de la prise en compte des éléments fournis par Piaget et Vygotsky sur la construction des connaissances, des spécificités des notions et des contraintes institutionnelles.

Participent à la conception d'un scénario[4] un travail sur l'introduction des notions et sur l'élaboration de l'ensemble des tâches à proposer aux étudiants, supposé permettre de surmonter les difficultés répertoriées chez les étudiants. Ce travail s'appuie également sur une réflexion a priori concernant la gestion du travail en classe en mettant en jeu de manière adaptée des leviers généraux susceptibles d'engendrer des activités favorisant les apprentissages.

Nous indiquons ci-dessous un certain nombre de ces leviers dont la prise en compte peut influencer les acquisitions des élèves, par l'intermédiaire des activités qui leur seront proposées en classe.

Dynamiques entre contextualisations et décontextualisations des notions

Ces dynamiques portent sur l'ensemble du cours et des exercices proposés sur les notions, donc sur la construction globale de l'enseignement. Y contribuent un certain nombre d'éléments tels que le choix d'introduction des notions (dont on sait qu'il dépend du type des notions), l'ordre dans lequel les notions se succèdent, l'exposition des connaissances, y compris la place et la présentation accordées aux démonstrations, la construction du sens et les acquisitions techniques des notions.

La prise en compte de la dimension outil / objet des notions dans ces éléments participe également à ces dynamiques.

Prise en compte du méta

Robert et Robinet (1996) utilisent le préfixe « méta » devant les mots connaissances ou cognitif ou cognition « pour désigner des éléments d'information ou de connaissances SUR les mathématiques, sur leur fonctionnement, sur leur utilisation, sur leur apprentissage » (p. 156).

Les auteurs se posent donc la question de savoir si les apprentissages des élèves peuvent être favorisés par des commentaires apportés par l'enseignant, à un moment qu'il juge propice, et qui apparaîtraient « comme un catalyseur pour

[4]Ce sont les choix précis du chercheur qui l'amènent à concevoir un scénario. D'autres choix pourraient bien entendu mener à l'élaboration d'un scénario différent.

pallier au manque d'activités préparatoires en les remplaçant par une réflexion sur les nouveaux concepts » (ibid., p. 148).

Différents types de commentaires peuvent être faits à divers niveaux d'information. Il peut s'agir d'informations sur les choix de méthodes, de structures ; ce sont donc des informations constitutives de la connaissance mathématique. De tels commentaires peuvent aussi participer à l'accès à la connaissance avec les jeux de cadres, le rôle des questionnements, les exemples... Ou encore, ils peuvent porter sur les modes de productions et le fonctionnement mathématique.

Lorsqu'il est difficile de trouver des activités d'introduction accessibles aux étudiants compte tenu de leur niveau mathématique, nous avons souvent évoqué qu'une voie pouvant contribuer à la conceptualisation est l'incorporation de commentaires méta-mathématiques dans le discours du professeur. Dorier (1995) en fait usage, par écrit, pour expliquer notamment que le concept d'espace vectoriel est introduit pour résoudre de manière analogue une classe de problèmes. Il propose ensuite aux étudiants une liste d'exercices dans laquelle interviennent des espaces très différents mais dont l'étude se ramène dans tous les cas à la résolution d'équations. Un dernier exemple porte sur l'explicitation de l'utilisation des théorèmes.

Laisser chercher les élèves en classe

Les modalités d'organisation du travail en classe peuvent elles aussi influencer les activités des élèves. Les processus mentaux décrits par Piaget amènent à penser qu'une construction autonome des connaissances de l'élève peut émerger dans l'organisation de phases de recherche individuelle ou collective, à des moments choisis par l'enseignant. Nous nous intéressons donc ici à la question d'organiser, dans l'enseignement, des phases durant lesquelles les étudiants travaillent sans l'intervention du professeur.

Dans une phase de recherche, la relation entre l'objet du travail proposé et les connaissances des élèves peut être de natures diverses et doit être précisée. Il peut s'agir d'une recherche portant sur un travail préliminaire à l'introduction d'une notion, la résolution d'un exercice, un problème transversal...

Différents éléments de gestion peuvent être prévus et influencer les activités des élèves : le professeur peut laisser travailler les élèves seuls ou en petits groupes, autoriser ou non les interactions entre les élèves. Les échanges entre les élèves, durant les phases de recherche, peuvent eux aussi influencer les activités. L'enseignant doit alors pouvoir repérer les questions formulées et l'élaboration des argumentations développées par les élèves dans une perspective d'institutionnalisation.

La gestion prévue par le professeur a des liens étroits avec deux formes d'intelligibilité : l'intelligibilité des contenus et celle des connaissances des élèves. Concernant l'intelligibilité des contenus, la nature des notions et le travail mathématique à réaliser sur les notions sont deux variables sur lesquelles le professeur peut s'appuyer. Concernant l'intelligibilité des connaissances des élèves, les théories de l'apprentissage permettent de penser qu'il est favorable de laisser des moments durant lesquels les élèves participent à la construction de leurs connaissances, se posent des questions, font des essais et les rectifient en cas d'erreurs... ceci, sous l'hypothèse que le professeur puisse intervenir ensuite en relation étroite avec le travail des étudiants. C'est en cela qu'il peut être intéressant pour l'enseignant de parvenir à repérer l'état des connaissances des élèves.

Cependant, Robert (2008) soulève le point suivant : « laisser chercher les élèves ne suffit pas à la transformation espérée en apprentissage : y contribuent, comme on l'a déjà dit, la spécificité des contenus sur lesquels ils travaillent ainsi que la manière dont ils travaillent et aussi tout ce que l'enseignant ajoute par ses propos aux divers moments de travail » (p. 7). De plus, l'action, même répétée, n'engendre pas nécessairement des connaissances. Il faut qu'il y ait une transformation qui s'opère du côté de l'élève et qui dépend de la situation qui lui est proposée.

Par conséquent, ce double travail de l'enseignant sur les contenus et sur ses interventions est à mener à des moments qu'il juge appropriés, pas nécessairement à chaque cours.

Les interventions de l'enseignant

Le levier précédent montre que les activités des élèves dépendent fortement des pratiques enseignantes. De plus, les processus d'acquisition des connaissances par imitation décrits par Vygotsky permettent de penser que les contenus des questions de l'enseignant, ses aides, ses explications et toutes les médiations qu'il incorpore à l'enseignement sont des leviers qui peuvent renforcer cette dynamique d'imitation. De ce fait, les accompagnements langagiers du professeur peuvent être pris en compte pour étudier les liens entre les activités des élèves et leurs apprentissages.

Les interventions de l'enseignant peuvent influencer les apprentissages des élèves suivant deux dynamiques. La première est la relation entre ce que les élèves ont pu faire et la phase d'institutionnalisation. La deuxième porte sur le jeu des questions / réponses : les relances, les aides, les reprises sont caractérisées par ce sur quoi elles portent et le moment où elles interviennent en relation avec le travail des élèves.

Une variable importante est donc la prise en compte des connaissances des élèves sur lesquelles portent les interventions et leur distance avec les connaissances déjà acquises. « Il peut y avoir des connaissances construites par imitation, mais pas n'importe lesquelles, ni à n'importe quel moment » (Robert in Vandebrouck et al., 2008, p. 38).

Deux types d'aides ont été distingués dans les phases d'interactions entre le professeur et les élèves. Les aides « à fonction procédurale » proviennent des indications données par l'enseignant avant ou pendant le travail des élèves. Elles peuvent conduire au découpage de la tâche en plusieurs sous-tâches simples et isolées ou encore à choisir une méthode. Ces aides modifient donc les tâches prévues et par conséquent, les activités possibles. Les aides « à fonction constructive » concernent les reprises du travail déjà réalisé, les rappels, les bilans, les interventions amenant les élèves à revenir sur leur activité. Ces aides vont donc ajouter quelque chose entre « l'activité stricte de l'élève et la construction (espérée) de la connaissance qui pourrait en résulter » (Pariès, Robert, Rogalski, 2007).

►► Gestion de la classe par l'enseignant

Une fois le scénario élaboré, il y a lieu de l'expérimenter pour, d'une part, étudier si les activités effectives sont conformes aux activités potentielles et pour, d'autre part, évaluer les effets de ce scénario.

C'est l'enseignant qui provoque les activités en classe. Pour reconstituer les activités qui sont effectivement réalisées en classe, le chercheur analyse la nature du travail aménagé pendant les phases d'exercices et les aides apportées par l'enseignant.

Deux types d'activités peuvent être distingués : les activités a maxima et a minima. Les premières concernent les étudiants qui se lancent immédiatement dans la tâche proposée par l'enseignant et les secondes concernent les étudiants qui ont besoin d'indications, d'une aide avant de se lancer dans la tâche.

3 Inscription de notre questionnement dans la théorie de l'activité et découpage du travail à mener

Nous admettons que les activités des étudiants sont déterminantes pour étudier nos questions.

Les éléments issus de la théorie de l'activité que nous venons d'évoquer orientent notre travail en nous renseignant sur le type d'analyses à mener pour élaborer des activités susceptibles de favoriser les apprentissages en topologie.

En amont de l'enseignement, il s'agit tout d'abord de préciser les spécificités des notions à enseigner. Une analyse historique et épistémologique élémentaire complétée d'une analyse de manuels permettent d'en préciser le sens et la fonction pour baliser les modes d'introduction possibles et les progressions des contenus envisageables. Ce type d'analyses permet également de caractériser la nature formalisatrice, unificatrice et généralisatrice des notions et fournit, par conséquent, des éléments pour intégrer ces notions dans le bagage mathématique des étudiants.

Ces analyses font l'objet de la partie 2 de ce travail. Elles donnent accès à une certaine intelligibilité des contenus à enseigner, leur nature et leurs enjeux. Confrontées aux théories de Piaget et Vygotsky ainsi qu'aux difficultés répertoriées des étudiants, nous pouvons, dans la partie 3, définir la conceptualisation visée en topologie et concevoir un scénario d'enseignement contenant des activités susceptibles, a priori, de réaliser les apprentissages attendus.

Nous poursuivons notre travail d'action sur l'enseignement en présentant, dans la partie 4, l'expérimentation du scénario et l'analyse des déroulements qui en découlent.

La partie 5 évalue les effets de l'enseignement à partir des évaluations proposées aux étudiants.

Les éléments méthodologiques spécifiques aux analyses menées seront précisés dans chaque partie.

Deuxième partie

Spécificités des notions de topologie et perspectives didactiques

Partie 2 — Introduction

Dans cette partie, notre objectif consiste à étudier les spécificités des premières notions de topologie enseignées à l'université, en abordant ce questionnement d'un point de vue global, c'est-à-dire en nous dégageant du contexte institutionnel auquel notre travail est soumis. Il s'agit, en particulier, de préciser leurs caractères formalisateur, unificateur et généralisateur.

Cet objectif soulève la question de l'étude du phénomène de transposition didactique des notions, au sens de Chevallard (1991). La prise en compte de la distance entre le savoir savant et le savoir à enseigner est un élément qui permet de mieux appréhender le savoir enseigné. Dans cette perspective, nous nous plaçons tout d'abord du côté du savoir savant en retournant à la genèse historique des notions de topologie. Nous présentons, au chapitre V, une étude historique et épistémologique élémentaire de l'émergence et du développement de quelques notions de topologie. Cette étude, centrée sur nos propres besoins didactiques, permet une première caractérisation de la nature formalisatrice, unificatrice et généralisatrice des notions. Nous complétons ce travail historique en nous plaçant ensuite du côté du savoir à enseigner. À partir d'une analyse de quelques manuels traitant de topologie, elle aussi guidée par des besoins spécifiques, nous pouvons préciser les aspects formalisateur, unificateur et généralisateur d'un certain nombre de notions qui relèvent de ce domaine.

Cette partie reste néanmoins guidée par la possibilité d'agir sur l'enseignement décrit au chapitre I. Cette visée d'action a des conséquences méthodologiques sur les analyses menées, et nous les décrivons préalablement dans chaque chapitre. Nous revenons alors, au chapitre VII, sur le projet initial en le confrontant aux conclusions provenant de la réalité historique et des manuels étudiés. Nous sommes alors en mesure de développer un certain nombre de pistes didactiques qui permettraient d'agir sur l'enseignement des notions de topologie au niveau d'enseignement concerné et auraient des conséquences favorables sur les apprentissages des étudiants.

Chapitre IV

Histoire, épistémologie et didactique des mathématiques

Dans ce chapitre, nous expliquons comment une composante historique et épistémologique s'est intégrée dans notre travail. Nous précisons ensuite la nature de l'étude historico-épistémologique, menée pour répondre à des besoins qui restent pilotés par la didactique des mathématiques.

1 Un objectif piloté par la didactique des mathématiques

À ce stade du travail, les éléments dont nous disposons concernant les spécificités et les difficultés d'enseignement des notions de topologie proviennent de l'étude d'un enseignement de topologie spécifique, qui est celui de notre institution. Cet enseignement cible de plus les notions précises d'intérieur, d'adhérence, d'ouvert et de fermé. L'objectif que nous nous fixons est à présent d'étudier les spécificités de ces notions en adoptant un point de vue plus général, c'est-à-dire en nous dégageant, provisoirement, des contraintes institutionnelles auxquelles notre travail est soumis. En particulier, il s'agit de préciser les caractères formalisateur, unificateur et généralisateur des notions pour mieux appréhender leur enseignement.

Cette partie du travail garde des visées didactiques consistant à agir sur l'enseignement. Nous avons en effet dégagé, dans la première partie, des difficultés caractéristiques de l'enseignement des notions FUG que nous cherchons à surmonter. Nous savons tout d'abord que la difficulté à trouver un « bon » problème initial pour introduire ce type de notions est telle que celles-ci sont souvent présentées par leur définition, sans réelle motivation. Cette approche ne contribue pas à donner du sens aux nouvelles notions. Un autre aspect caractéristique de l'enseignement d'une notion FUG est que les premiers exercices consistent souvent à manipuler les nouvelles définitions. Nous avons vu que, dans le cas des notions de topologie, le travail mathématique engendré ne mène pas, lui non plus, à développer une dynamique productive entre les aspects formel et conceptuel.

Nos perspectives sont donc d'étudier la possibilité d'agir suivant deux axes pour essayer de favoriser les apprentissages en topologie des étudiants. Précisément, nous cherchons à éclairer :

- □ les voies possibles d'introduction des notions, compte tenu du bagage mathématique des étudiants ;
- □ la nature des tâches qui peuvent être proposées aux étudiants pour travailler à la fois sur le sens et la technique.

Ce projet soulève la question de l'étude du phénomène de transposition didactique (Chevallard, 1991) des notions de topologie. Nous avons donc regardé comment le travail déjà réalisé dans la partie 1 nous permettait d'aborder cette question.

En premier lieu, nous avons mentionné précédemment que notre travail de didacticien ne peut se limiter à un unique contexte institutionnel. Il s'agit donc d'adopter une position plus générale pour étudier le passage du savoir savant au savoir enseigné. Comme le souligne Dorier (2000) dans le cadre de ses travaux sur l'enseignement de l'algèbre linéaire, « le chercheur en didactique ne peut se contenter d'un point de vue interne au système d'enseignement, il analyse le processus complexe qui conduit de la production du savoir dans la communauté mathématique jusqu'à son enseignement, en replaçant l'enjeu de connaissance dans le contexte plus vaste de la constitution des savoirs » (p. 9). De ce point de vue, si le didacticien ne prend pas en compte la genèse historique du savoir savant, il ne peut avoir accès aux origines de la transposition didactique. Nous pensons également que les caractères formalisateur, unificateur et généralisateur des notions de topologie peuvent davantage être clarifiés. L'étude de la transposition didactique nécessite donc de mieux cerner la complexité de ces notions, notamment les difficultés liées à leur introduction, mais aussi d'étudier la possibilité de les travailler en tant qu'outil de résolution à un problème adapté au niveau d'enseignement visé.

L'idée d'intégrer une étude de nature historique dans une recherche en didactique est notamment présente chez Dorier. Selon lui, « une part importante de l'analyse didactique consiste à prendre en compte l'évolution et la constitution historique du savoir mathématique dans la sphère savante et ses rapports avec la constitution du texte du savoir enseigné » (ibid., p. 9). Ce point de vue fait également apparaître une réflexion de nature épistémologique sous-jacente à une analyse historique. Selon Artigue (1989), une réflexion épistémologique permet au didacticien de prendre des distances par rapport au savoir enseigné. Plus précisément, elle explique qu'une composante épistémologique aide la didactique « à se déprendre de l'illusion de transparence des objets qu'elle manipule au niveau du savoir » (p. 2).

Nous devons maintenant préciser la véritable nature du travail historique que nous nous proposons de réaliser ainsi que la part prise par la composante épistémologique que nous y incorporons. Cette réflexion fait l'objet de la section suivante.

2 Des précisions sur la nature du travail à réaliser

Comme nous l'avons précédemment expliqué, notre intention est de questionner l'histoire et l'épistémologie à des fins didactiques. Un de nos objectifs consiste, en effet, à étudier la possibilité d'intégrer, dans l'enseignement des notions, des éléments visant à leur donner davantage de sens. Il est donc possible que nous soyons amenée à repenser le découpage de notre enseignement. En ce sens, une étude historique peut aider à préciser le savoir savant mais aussi le savoir à enseigner et le savoir enseigné, de façon à comprendre la transposition actuelle mais également à venir. Nous nous plaçons ici du côté du savoir savant. Nous indiquons ci-dessous la nature précise du travail que nous cherchons à réaliser.

Rappelons en premier lieu que notre travail cible les notions de topologie de $\mathbb{R}^N$. Nous y englobons tout d'abord les notions enseignées en première année d'université, du moins dans notre institution. Sont donc concernées les notions d'intérieur, d'adhérence, d'ouvert et de fermé, et quelques propriétés classiques les faisant intervenir. Nous pensons notamment au théorème des bornes atteintes [1] et à la compacité d'un intervalle borné et fermé. Mais nous savons également que de tels théorèmes sont repris par la suite, en deuxième année, pour être généralisés aux espaces métriques puis topologiques. Par conséquent, même si nous mettons l'accent sur l'émergence des notions dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{R}^N$, il nous semble pertinent d'étudier leur développement jusqu'à leur émergence dans les espaces métriques pour aboutir à la notion d'espace topologique. En ce sens, notre développement historique concerne la topologie générale.

Nous tenons ici à souligner le caractère modeste de notre démarche. Nous ne cherchons pas à couvrir toutes les facettes du développement historique des notions topologiques. Cela pourrait d'ailleurs faire l'objet d'un autre travail à lui seul. De même, nous ne cherchons pas non plus à détecter tous les problèmes mettant en jeu ces notions. L'exhaustivité n'est pas notre objectif principal. Nous nous attachons, autant que faire se peut, à ce que notre étude historique soit caractérisée par un certain nombre d'éléments qui répondent à nos besoins didactiques. L'histoire que nous cherchons à retracer devrait ainsi contenir :

- □ des questions qui motivent l'introduction de notions topologiques et quelles sont ces notions ;
- □ des raisonnements que nous qualifions « de nature topologique », développés par les mathématiciens. Nous pensons, par exemple, à des raisonnements dans les démonstrations sur la structure d'une famille d'ensembles ou bien sur l'agencement des points d'un ensemble ;
- □ des « manques » éventuels qui seront comblés grâce à l'introduction de notions topologiques ;

[1] Ce théorème affirme que toute fonction continue sur un ensemble compact atteint un maximum et un minimum. Nous indiquons, dans l'annexe B, les énoncés de quelques résultats fréquemment utilisés au fil de cette recherche. Il semble en effet que leur appellation soit différente en Belgique et en France, comme pour le théorème des bornes atteintes par exemple.

- □ des éléments sur l'évolution des notions jusqu'à leur émergence dans des espaces plus généraux tels que les espaces métriques et topologiques.

Ainsi, notre volonté est de pointer quelques travaux historiques possédant une ou plusieurs de ces caractéristiques. Nous nous sommes donc attachée à relater des faits historiques en nous centrant sur nos propres besoins et les liant aux contenus à enseigner.

Cette vue sélective nous amène à considérer une composante épistémologique dans l'histoire retracée. En ce sens, les besoins dont il est question ici se rapprochent de ce qu'Artigue (1989) qualifie de besoins épistémologiques, c'est-à-dire « les besoins formulables en termes de connaissance des processus par lesquels les concepts mathématiques se forment et se développent... » (p. 1).

Dans cette perspective, nous tenons à souligner que notre travail ne sera toutefois ni comparable à celui d'un historien, ni comparable à celui d'un épistémologue. En effet, un véritable travail historique et épistémologique vise à relater la genèse des notions, leur développement dans l'histoire et la chronologie des faits les uns en fonction des autres. Ce type de travail se donne comme objectif d'être exhaustif, même si cet objectif n'est pas souvent possible à atteindre. Cette quête d'exhaustivité implique notamment qu'une étude historique doive prendre en compte des contextes de natures très diverses : il est tout aussi important de situer le travail dans le contexte scientifique de l'époque que dans les contextes social, politique et culturel de cette époque. D'autre part, lorsque l'historien s'attache à retracer la genèse d'un savoir précis, les différents stades de l'évolution du savoir étudié doivent être analysés en fonction de l'époque, de façon à cerner précisément comment ce savoir s'est constitué et quelles ont été les difficultés rencontrées. Ce type de démarche a également des conséquences sur la nature des ouvrages consultés. Les sources d'un historien sont des sources de « première main » telles que les œuvres originales sur lesquelles l'historien est amené à donner une interprétation personnelle des faits.

Le travail que nous nous proposons de réaliser est de loin moins ambitieux. Le récit d'éléments historiques concernant la topologie générale existe dans divers travaux. La didacticienne que nous sommes a donc pour projet de s'approprier des faits qui ont déjà fait l'objet d'un récit dont nous ne sommes pas l'auteur. Notre démarche consiste à en retirer les éléments que nous jugeons pertinents pour notre recherche dont l'objectif reste didactique. Cependant, il sera important de ne pas nous limiter à une simple énumération des faits et d'y incorporer un point de vue critique mais nous restons très éloignée d'une étude épistémologique qui nous amènerait à nous intéresser davantage à la pensée des mathématiciens et à son évolution avec en plus une certaine forme de globalité.

En conclusion, nous partageons entièrement le point de vue de Robert (Robert et al., 2007) pour qualifier la nature de notre travail : « ce travail diffère fondamentalement de celui de l'historien ou de l'épistémologue : nous ne faisons pas avancer les réflexions sur le sujet, nous cherchons à tirer des travaux déjà faits des éléments assez globaux sur ce qui a pu mener les découvertes et notamment les problèmes éventuels ou les projets à l'origine des avancées, sur les difficultés qui se sont présentées, sur l'ordre dans lequel les différentes notions sont apparues, etc. » (p. 2).

3 Interactions entre didactique, épistémologie et histoire des mathématiques

Les apports mutuels entre les trois domaines que sont la didactique, l'épistémologie et l'histoire des mathématiques sont bien explicités dans la note de synthèse de Dorier (2000).

Dans les travaux de Dorier sur l'enseignement de l'algèbre linéaire, la réflexion épistémologique est construite dans une dialectique entre les recherches didactiques et les recherches historiques. En effet, les résultats du travail historique sont intégrés dans les recherches didactiques et inversement, l'analyse didactique permet d'incorporer dans le travail historique des questions épistémologiques. De son point de vue, « l'épistémologie apparaît comme le terme médiateur qui fait le lien entre le travail historique et le travail didactique » (ibid., p. 10).

Pour clarifier ce rôle médiateur, Dorier commence par montrer que l'épistémologie couvre différents types de travaux dans lesquels les approches peuvent être très diversifiées. Citons par exemple la difficulté de dissocier l'épistémologie de la philosophie des sciences ou des théories de la connaissance. Les travaux de Bachelard montrent quant à eux des liens importants entre l'épistémologie et l'histoire des sciences, tout en distinguant bien les deux domaines. L'épistémologie est également au cœur de nombreuses théories de l'apprentissage, notamment dans les travaux de Piaget. Il serait difficile, selon Dorier, de définir l'épistémologie « comme un domaine propre et bien délimité » (ibid., p. 11). Son approche vise à conserver la largesse du terme. Il précise que son intérêt pour l'épistémologie tient « en ce qu'elle nous permet de mieux comprendre les liens entre la constitution du savoir dans la sphère savante d'une part et l'enseignement et l'apprentissage de ce savoir d'autre part » (ibid., p. 16). Dans cette perspective, Dorier ne va pas chercher à définir le mot « épistémologie », mais bien l'adjectif « épistémologique ». Voici la définition qu'il propose :

> *épistémologique* : qui est relatif à l'évolution des savoirs ou des connaissances (ibid., p. 16).

L'intérêt de cette définition tient en ce qu'elle peut s'appliquer « partout où des savoirs et des connaissances mathématiques sont en cours de constitution, d'acquisition, d'évolution, d'application ou de transformation » (ibid., p. 17). L'adjectif « épistémologique » pourra donc être utilisé dans un contexte très vaste, qui peut aussi bien être la classe que l'élève ou encore le contexte historique.

À partir de cette définition, le point central du travail de Dorier consiste à étudier les types d'interactions, dans une perspective épistémologique, entre le travail didactique et le travail historique.

En première approche, nous retenons, comme nous l'avons déjà mentionné à la section précédente, que connaître la genèse du savoir étudié contribue à analyser la transposition didactique de ce savoir. Cependant, Dorier revient sur ce que peut apporter une recherche historique intégrée dans un travail didactique : « une analyse historique produit une base de données permettant de mieux comprendre l'évolution des concepts, les conditions dans lesquelles ceux-ci se sont développés, mais aussi les conditions qui ont rendu possibles les avancées ou a contrario ce qui a pu empêcher certains progrès » (ibid., p. 21).

Pour revenir à la question de l'enseignement, l'objectif n'est pas de regarder si cet enseignement suit ou non le déroulement historique. Dans les travaux de Dorier, le travail historique fournit néanmoins sur ce point un éclairage au didacticien en ce sens que lorsqu'une difficulté d'apprentissage ou d'enseignement est repérée, celle-ci peut être analysée à la lumière de la genèse historique en y incorporant une dimension épistémologique. De ce point de vue, l'analyse historique se présente comme une aide pour essayer de comprendre les origines d'une difficulté de nature didactique et tenter de dégager des moyens pour la dépasser. Cependant, comme le souligne Dorier à propos de l'analyse historique, « elle ne saurait le supposer exister a priori, ni en déterminer à elle seule les conditions de dépassement » (ibid., p. 26).

Il semble par ailleurs difficile de proposer systématiquement un enseignement dont le déroulement consisterait à retracer la genèse historique. Une raison en est que le développement historique d'une notion peut suivre un parcours très sinueux et laborieux. D'autre part, faire abstraction des difficultés rencontrées dans l'histoire pour n'en retenir que l'essentiel ne peut alors plus être qualifié d'un travail historique en tant que tel. Il y a donc lieu de construire une genèse du savoir interne à la classe et que les étudiants devront s'approprier. Une telle genèse est souvent qualifiée de genèse artificielle ou expérimentale ; elle est liée à l'expérience de la classe et des étudiants.

Artigue (1989) partage d'ailleurs cette position : « Certes les contraintes qui gouvernent ces genèses ne sont pas identiques à celles qui ont gouverné la genèse historique, mais cette dernière reste néanmoins, pour le didacticien, un point d'ancrage de l'analyse didactique, sorte de promontoire d'observation, quand il s'agit d'analyser un processus d'enseignement donné ou base de travail, s'il s'agit d'élaborer une telle genèse » (p. 3). Ici, la réflexion épistémologique qui appuie la dialectique entre le travail historique et le travail didactique peut fournir des éléments pour élaborer une ingénierie didactique.

Une analyse historique peut également mettre en évidence les éventuelles phases d'obstacles ou encore, des sauts conceptuels relatifs à l'évolution du savoir. À ce niveau, il est possible qu'un regard croisé entre les erreurs des élèves et ces phases d'évolution permettent une analyse plus précise de ces erreurs, menée par le didacticien.

4 Conclusion

Nous retenons, pour démarrer ce travail de nature historique, que l'histoire et l'épistémologie fournissent des voies potentielles de recherches dans le travail du didacticien en proposant des éléments permettant :

- □ d'analyser le phénomène de transposition didactique, tant du côté du savoir savant que du savoir à enseigner ;
- □ de confronter et d'interpréter les difficultés et les erreurs des étudiants à la lumière de l'histoire ;
- □ d'aider à l'élaboration d'une ingénierie didactique.

Nous sommes également bien consciente que, à travers ses recherches historiques, le travail du didacticien consiste à disposer d'un travail qui existe déjà et à en intégrer les éléments pertinents dans ses analyses didactiques. En ce sens, « le questionnement épistémologique doit avoir une origine et une finalité didactiques » (Dorier, 2000, p. 29).

Il s'agit donc, pour nous, d'interroger l'histoire des notions de topologie, avec cette vue critique dont l'objectif consiste à recueillir des éléments susceptibles de nous aider à mieux comprendre la fonction et le cœur des notions à enseigner. C'est l'objet du chapitre suivant.

Chapitre V

Genèse et développement historiques de quelques notions de topologie

Dans ce chapitre, nous réalisons une synthèse historique et épistémologique élémentaire concernant l'émergence et le développement de quelques notions de topologie. Après avoir indiqué la méthodologie suivie pour la réalisation de cette synthèse, nous dressons tout d'abord un panorama général de l'histoire retracée. Nous étudions alors quelques faits précis en montrant le rôle qu'y jouent certaines notions de topologie. Nous sommes alors en mesure, à partir de l'étude menée, de caractériser les aspects formalisateur, unificateur et généralisateur des notions rencontrées dans l'histoire.

1 Éléments méthodologiques

De manière à caractériser l'histoire à retracer, nous avons adapté la méthodologie suivie par Dorier (1990) pour mener son étude sur l'émergence des premiers concepts d'algèbre linéaire. Cette méthodologie repose sur différents actes dans lesquels il s'agit, à chaque étape, de consulter des sources de natures différentes, en allant de sources générales vers des sources spécifiques. Nous détaillons ci-dessous la progression de ce type de travail.

Dans un premier temps, nous nous sommes tournée vers des sources bibliographiques générales telles que les encyclopédies ou encore, vers des ouvrages traitant de l'histoire de la topologie. Nous avons ainsi pu retenir certains éléments jouant un rôle important dans la genèse et/ou le développement de certaines notions de topologie. La pertinence attribuée à ces éléments est une conséquence d'un phénomène de saturation constaté dans nos lectures, en ce sens que les ouvrages consultés faisaient systématiquement référence à cette série de faits répertoriés comme déterminants par rapport au travail qui nous concerne.

Cette première phase nous a donc permis d'établir un ordre chronologique de faits historiques à étudier précisément et de découper le travail en des périodes clés durant lesquelles les choses évoluent significativement.

Nous avons alors consulté des sources plus « spécialisées » telles que des revues d'histoire des mathématiques. Celles-ci nous ont donné accès à des articles de recherche retraçant l'histoire des faits ciblés à l'étape précédente. À cette étape aussi, nous nous sommes fiée à un phénomène de saturation des éléments relatés.

Ce type de littérature nous a alors fourni des éléments spécifiques sur l'émergence et/ou l'évolution de certaines notions importantes, sur les types de questions qui ont motivé leur introduction ou encore, sur les manques qui apparaissaient dans certaines théories.

Enfin, ces sources, que nous qualifions de sources de seconde main, nous ont renseigné sur des références bibliographiques de première main telles que les œuvres originales de certains mathématiciens et des traités mathématiques.

Une dernière étape nous a amenée à consulter quelques ouvrages originaux. Puisque notre objectif vise une étude historique élémentaire, avec des perspectives premières qui restent didactiques, nous n'avons pas réalisé une analyse fine et détaillée de l'ensemble des sources originales fournies par l'étape précédente. Nous nous sommes restreinte à quelques travaux ayant joué un rôle déterminant dans l'histoire dans la mesure où ils ont fait évoluer significativement l'état des connaissances en topologie. Nous avons également analysé quelques traités de mathématiques intégrant des notions de topologie.

Ainsi, nous nous sommes emparée de travaux déjà existants. Notre travail a consisté à imbriquer ces travaux en dégageant les éléments pertinents par rapport à nos besoins. Il n'y a donc pas, dans notre étude, de nouveauté quant à l'histoire même de la topologie.

Dans ce qui suit, nous dressons tout d'abord un panorama général de l'histoire retracée. Ensuite nous étudions plus précisément quelques faits historiques qui contribuent, selon nous, à donner une certaine intelligibilité aux notions qui nous intéressent.

Il nous semble cependant important de préciser au préalable que retracer la synthèse décrite ici s'est révélé être un travail qui n'a pas été sans difficultés. Une première raison est que l'histoire montre à quel point les notions de topologie ont été introduites de manière très dispersée. Un autre élément qui a rendu notre travail complexe est qu'une même notion peut être présente en germe dans des travaux divers et ce, sans parfois être nommée. Ce type de notion peut alors suivre une évolution telle que la notion sera systématisée dans un contexte complètement différent de celui dans lequel elle apparaissait initalement. Nous avons également rencontré des travaux qui ne contiennent pas explicitement des notions de topologie mais qui s'appuient sur des raisonnements montrant que des questions de nature topologique, par exemple sur la structure des ensembles de points considérés, sont tout de même bien présentes.

Ainsi, retracer une histoire complète de l'émergence des premières notions de topologie nous aurait plongée dans une étude reprenant une majeure partie des travaux mathématiques du 19e siècle. Ceci impliquerait une étude si détaillée qu'elle pourrait faire l'objet d'un travail complet sur ce sujet, ce qui n'est évidemment pas notre projet. Ce point de vue semble partagé par Dieudonné lorsqu'il relate certains faits historiques dans un chapitre intitulé *Une brève histoire de la topologie* dans le livre de Pier (Pier, 1994) : « il faudra nous limiter aux très grandes lignes d'une histoire extraordinairement complexe, où s'entrecroisent et réagissent les unes sur les autres les idées venues des horizons mathématiques les plus variés » (p. 35).

Une spécificité de notre travail a donc été d'opérer une sélection personnelle des travaux sur lesquels nous devions nous centrer pour obtenir des éléments que nous jugions pertinents par rapports à nos objectifs.

2 Une vue historique globale

Nous indiquons ci-dessous un panorama général des éléments historiques qui délimitent l'histoire que nous avons retracée. Il vise à situer les notions ciblées, leurs contextes d'émergence et à préciser les théories mathématiques dont les notions de topologie vont permettre le développement.

Ce panorama a été reconstitué à partir d'ouvrages généraux d'histoire des mathématiques et d'ouvrages traitant précisément de l'histoire de la topologie (par exemple Cooke (1997), Dahan-Dalmedico et Peiffer (1986), Dieudonné (1978), James (1999), Manheim (1964), Pier (1994)).

2.1 Délimiter l'histoire à retracer

Les notions concernées par notre travail appartiennent au domaine de la topologie élémentaire, c'est-à-dire dans les cadres de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^N$. Néanmoins, pour mieux appréhender les spécificités des notions, nous nous sommes placée dans un cadre plus large en traquant dans l'histoire des notions qui font émerger, in fine, le domaine mathématique qu'est la topologie générale.

Cela nous a amenée à réaliser un travail de sélection des notions à rechercher dans l'histoire. Vues a posteriori, les notions que nous avons visées sont bien entendu les notions concernées dans ce travail c'est-à-dire celles d'ouvert, de fermé, d'intérieur et d'adhérence mais nous savons que des notions telles que celles de voisinages, de point d'accumulation, de compacité par exemple relèvent également du domaine de la topologie générale et métrique. Nous savons aussi, toujours avec une vision actuelle, qu'au cœur de cette théorie se situe la question de savoir quelles topologies on peut mettre sur un ensemble et des propriétés qu'il faut en exiger pour obtenir des théories fécondes. L'histoire que nous délimitons cherche donc à prendre en compte ces éléments en retraçant l'émergence des notions dans le cadre de la topologie élémentaire et à en suivre l'évolution jusqu'à leur émergence dans le cadre des espaces métriques et topologiques.

Historiquement, la topologie élémentaire et la topologie générale trouvent leurs principales sources dans les développements de l'analyse au 19e siècle. Nous montrerons que les notions de limite et de fonction participent beaucoup à leur émergence mais la construction de chaque théorie résulte de projets différents. La naissance de la topologie élémentaire est, comme nous le verrons, nourrie par un souci de construire l'analyse sur des bases rigoureuses tandis que l'émergence de la topologie générale (et métrique) se caractérise par une tendance à l'abstraction et à la généralisation chez les mathématiciens de cette époque.

En tant que domaine des mathématiques, c'est tout d'abord le nom « topologie » seul qui apparaît dans l'histoire. Il a de plus été connu préalablement sous le nom d'*analysis situs*, qui signifie littéralement une analyse de positions. D'un point de vue étymologique, le mot *topologie* provient des deux racines *logos* et *topos* qui signifient respectivement le discours et le lieu. Les origines de ce domaine sont liées à l'idée de travailler avec un type de géométrie dans lequel on n'a pas recours à la notion de distance. C'est Leibniz qui introduit le terme lorsqu'il ébauche, au 17e siècle, le programme d'un calcul de positions, dans un sens un peu différent de ce que deviendra plus tard la topologie. L'idée sous-jacente consiste en effet à développer un calcul « qui n'exprime plus les qualités mais les formes et les situations algébriques » (Lecourt, 1999, p. 947). Ce nom sera utilisé jusque dans le premier tiers du 19e siècle. C'est Listing qui, en 1836, introduit le mot « topologie ».

Il faut attendre la fin du 19e siècle pour que la topologie se scinde en deux branches qui deviendront la topologie générale (on parle aussi de topologie ensembliste) d'une part, et la topologie combinatoire (qui deviendra la topologie algébrique) d'autre part. Cette seconde discipline nous éloigne fortement de notre projet. Nous ne la développerons pas en tant que telle par la suite, même si nous la mentionnons à quelques reprises.

La topologie générale semble émerger de la volonté de travailler sans recourir à la notion de distance en nourrissant le projet de s'appuyer quand même sur cette idée pour donner du sens aux notions de limite, de continuité et donc de proximité. Nous avons toutefois fréquemment rencontré, au fil de nos lectures, l'idée que la topologie générale est reconnue pour désigner l'étude des propriétés qui sont invariantes par homéomorphismes. Nous montrerons que l'histoire retracée en lien avec nos objectifs ne nous a pas emmenée sur ce terrain.

Koetsier et Van Mill (James, 1999) distinguent trois périodes dans l'histoire de la topologie générale. Ils nomment la première période « *the prehistory of the subject* ». Il s'agit de la période menant à la définition d'espace topologique que l'on doit à Hausdorff en 1914. La seconde période est « *the general topology's golden age* », période durant laquelle de nombreux théorèmes sont prouvés. Les auteurs considèrent qu'elle s'étend de 1920 à 1960. L'investissement consacré à établir ces nouveaux résultats porte ses fruits jusqu'à aujourd'hui. La période qui s'étend de 1960 jusqu'à nos jours est appelée « *the period of harvesting* ». De ce point de vue, nous pouvons considérer que notre travail a consisté à relater une partie de la préhistoire de la topologie générale.

2.2 Émergence et développement des notions

L'essentiel de l'histoire que nous retraçons ici se situe au 19e siècle. Nous avons choisi de présenter les faits dans un ordre chronologique, autant que faire se peut.

Il y a principalement deux classes de problèmes qui occupent les mathématiciens au début du 19e siècle : les questions liées aux approximations et l'étude des séries de fonctions. Cependant, ces problèmes ne peuvent être abordés avec toute la rigueur nécessaire car un certain nombre de théories font encore défaut à cette époque. Par exemple, les notions de limite et de continuité ne sont pas définies précisément et l'ensemble des nombres réels n'a pas encore fait l'objet d'une construction rigoureuse. On pense également, à cette époque, que la limite d'une série de fonctions continues est une fonction continue. Les questions liées à la notion de convergence, que ce soit dans le cadre des nombres réels ou celui des fonctions, sont un élément clé de l'émergence et du développement des notions de topologie.

Une grande partie des travaux du 19e siècle est associée à l'idée de fonder l'analyse sur des bases solides, notamment en définissant rigoureusement les notions clés de ce domaine mathématique. Nous avons repéré, dès le début du 19e siècle, que des mathématiciens se posent des questions sur la structure topologique des sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Nous en donnons trois exemples, chez Bolzano, chez Cauchy et chez Dirichlet.

Dans sa démonstration du théorème des valeurs intermédiaires (voir p. 66), Bolzano (1817) utilise un procédé d'emboîtement des intervalles qui se rapproche de la méthode permettant de démontrer le théorème de Bolzano-Weierstrass. Dans le langage actuel, ce théorème affirme que tout sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^N$ possède un point d'accumulation. La démonstration de Bolzano s'appuie effectivement sur une subdivision répétée d'intervalles. Bolzano formule également, à cette occasion, le premier énoncé de la condition nécessaire du « critère de Cauchy » : toute suite convergente est une suite de Cauchy. Cependant, il se heurte à la réciproque, c'est-à-dire que le critère est aussi une condition suffisante à la convergence d'une suite dans $\mathbb{R}$. Il ne parvient pas à justifier rigoureusement l'existence de la limite, qui suppose préalablement de définir les objets auxquels la définition s'applique : l'ensemble des nombres réels et la notion de complétude.

Dans son *Cours d'Analyse*, Cauchy (1821) énonce le résultat suivant, qui est erroné : si une série de fonctions continues est convergente dans le voisinage d'un point x_0, alors sa limite est une fonction continue dans le même voisinage. L'idée de se placer dans un voisinage du point illustre toutefois que la question de savoir sur quels types d'ensembles travailler est prise en compte.

La théorie des séries de Fourier est un autre exemple fournissant des questionnements semblables. En 1829, Dirichlet fournit la première démonstration rigoureuse de la convergence d'une série de Fourier. Mais il se pose aussi la question de savoir si la convergence d'une telle série est en lien avec le nombre de points de discontinuité et le nombre d'extremums que la fonction possède. Il s'agit donc de savoir à partir de quels types d'ensembles de points il est possible de garantir la convergence de la série. La question de préciser la structure topologique de ces ensembles est une fois encore présente.

Ces trois exemples illustrent que la notion de convergence, intégrée à la théorie des fonctions, apparaît comme une source de questionnement sur la nature topologique de l'ensemble des réels et de ses sous-ensembles.

La volonté de définir rigoureusement les notions clés de l'analyse transparaît tout particulièrement chez Weierstrass. C'est dans les cours que Weierstrass (1865, 1868) donne à l'Université de Berlin que les premiers énoncés et démonstrations corrects sur la continuité et la dérivabilité des fonctions apparaissent. Weierstrass est considéré comme une figure emblématique du mouvement de rigueur qui se développe depuis le début du 19e siècle. Il utilise, dans ses cours sur la théorie des fonctions, des démonstrations faisant intervenir ce que nous considérons aujourd'hui comme des théorèmes de topologie élémentaire. Par exemple, sa preuve de l'existence d'une borne supérieure et inférieure pour un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$ correspond à celle du théorème des intervalles emboîtés et à l'existence d'un point d'accumulation. Il définit également, dans le cadre de son étude des séries entières, des notions de topologie de $\mathbb{R}^N$ telles que voisinage, ensemble borné, point extérieur, frontière d'un ensemble, connexité. Ces notions sont introduites pour permettre la démonstration de résultats sur les séries mais aussi pour établir le théorème qui deviendra le théorème de Bolzano-Weierstrass ou celui des bornes atteintes [1]. Les notions de topologie constituent donc un outil pour permettre des démonstrations rigoureuses de résultats que Weierstrass ne considère pas comme autre chose que des résultats d'analyse. Il ne les perçoit pas comme relevant d'un domaine séparé. Weierstrass est également le premier à donner une définition rigoureuse de la convergence uniforme d'une suite de fonctions. L'existence de différents types de convergence pour des familles d'objets autres que des nombres est donc déjà présente dans ces travaux.

Nous sommes au début des années 1860 et une construction de l'ensemble des réels est toujours absente du paysage mathématique. Trois constructions vont émerger. La construction de Weierstrass, élaborée vers 1863, repose sur la notion d'agrégat. Elle consiste à définir les réels en termes de classes d'équivalence. La construction de Dedekind est publiée en 1872. Elle s'appuie sur la notion de coupure. Enfin, Heine et Cantor fourniront un peu plus tard une construction semblable à partir des suites de Cauchy.

Cantor (1883) appartient aux deux mouvements qui nous guident dans ce panorama : l'élucidation des notions de base de l'analyse et les séries de fonctions. Ce sont ses travaux sur les séries trigonométriques qui l'amènent à définir rigoureusement l'ensemble des réels et à introduire des notions de topologie qui, à l'époque, sont considérées comme des notions relevant de la théorie des ensembles. En cherchant à étendre un résultat sur la convergence des séries trigonométriques, Cantor s'intéresse aux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Il définit les notions de voisinage, de point limite (qui deviendra la notion actuelle de point d'accumulation), de point isolé et d'ensemble dérivé. Une fois encore, les notions ont

[1]Rappelons que l'énoncé de ce théorème est donné dans l'annexe B.

un caractère outil dans ces travaux puisqu'elle permettent à Cantor d'étendre le résultat initialement énoncé sur les séries.

La notion de fermé apparaît chez Cantor, dans un article de 1884, comme un ensemble contenant ses points limites. Il prouve que tout ensemble fermé P est le dérivé d'un ensemble Q et que le dérivé d'une réunion d'ensembles est la réunion des ensembles dérivés respectifs. Ce dernier résultat sera par la suite généralisé aux espaces topologiques. Cantor n'a jamais utilisé l'idée générale d'ensemble ouvert même lorsqu'il travaille avec la notion de point intérieur.

À la même époque, les notions introduites par Cantor émergent dans d'autres travaux. Peano (1887) définit des notions semblables : point intérieur, point extérieur, point frontière. Il définit la frontière d'un ensemble comme l'ensemble des points frontières mais il ne définit pas, lui non plus, un ouvert comme l'ensemble des points intérieurs. Plusieurs notions introduites par Cantor se retrouvent aussi chez Poincaré (1883) dans un article sur les groupes de Klein.

Les premières notions de topologie apparaissent donc de manière dispersée, dans des travaux se situant dans des contextes différents. Un des premiers textes fournissant un exposé global de ces notions est le Traité de Jordan (seconde édition, 1893). Jordan se place dans le cadre de $\mathbb{R}^N$. Pour introduire les notions dans ce contexte, il définit une métrique (il utilise le mot « écart ») différente de la distance usuelle associée au théorème de Pythagore. Dans le langage moderne, il s'agit de la taxi-distance[2]. Nous étudions également un article de Baire (1904) dans lequel il commence par présenter les notions dans $\mathbb{R}$ pour les généraliser naturellement à $\mathbb{R}^N$ à partir de la notion de sphère (qui est la notion de boule actuelle). Il est à noter que dans ces deux traités, les notions de topologie font partie d'un chapitre portant sur la théorie des ensembles.

Les travaux de Riemann sur les surfaces se placent dans un autre cadre que celui de l'espace euclidien. Dans sa théorie des fonctions abéliennes, Riemann (1854) étudie les variétés à n dimensions. Son projet consiste à étendre les notions métriques de longueur, d'aire et de volume à une classe plus large d'ensembles. Ces travaux ne font pas émerger des notions qui nous concernent au premier plan mais ils montrent bien comment Riemann s'appuie sur l'expérience quotidienne et le recours à l'intuition pour développer une théorie abstraite, dépourvue de la notion de mesure, pour classer certains types d'espaces. Ces travaux ouvriront la voie à la topologie algébrique. Nous les développerons donc peu mais c'est ce processus d'abstraction des notions à partir de notions intuitives que nous tenterons de décrire.

Nous arrivons vers la fin du 19e siècle. La volonté de considérer des ensembles d'objets autres que des points, de construire des théories abstraites et de généraliser bon nombre de résultats précédemment établis aux ensembles de fonctions, est très présente. Nous assistons à un phénomène très clair de généralisation des notions de topologie, guidé par la généralisation de la notion de limite.

---

[2] Dans $\mathbb{R}^2$, si $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$, rappelons que la taxi-distance entre x et y est définie par $|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$.

Fréchet (1904) introduit la notion de classe (à comprendre comme un espace) et prend comme notion de base celle de limite d'une suite infinie. Ces nouveaux espaces offrent un cadre abstrait pour généraliser des notions antérieures telles que celles de point limite et d'ensemble fermé. Fréchet définit également la notion de compacité en prenant comme caractérisation le fait qu'un ensemble est compact s'il satisfait le théorème de Bolzano-Weierstrass. Une propriété établie dans $\mathbb{R}^N$ devient un élément de définition dans un espace plus général. Il s'agit d'une démarche typique du phénomène de généralisation en mathématiques.

La dernière étape de notre histoire est franchie avec l'introduction de la notion d'espace topologique, qui émerge chez Hausdorff (1914). Son projet de généralisation est bien explicité : il cherche clairement à mettre une structure sur les espaces pour en étudier les propriétés sans recourir à la notion de distance. En prenant comme axiomes de base les propriétés des ensembles ouverts, il définit une structure sur les ensembles à partir de ces sous-ensembles privilégiés. Il parvient alors à définir les notions de voisinage et de fermé à partir des ouverts.

C'est avec l'émergence de cette notion que nous terminons notre étude, considérant que les développements des travaux de Hausdorff nous emmènent sur un terrain qui dépasse très largement les notions visées dans notre travail. Nous complétons cependant notre synthèse historique par l'analyse de deux traités datant du 20e siècle, ceux de Bourbaki (4e édition datant de 1965, mais le premier volume a été publié en 1939) et de Kuratowski (1933). Leur présentation des notions montre bien la volonté de développer une théorie abstraite et axiomatique en démarrant d'emblée l'étude de la topologie dans le cadre des espaces topologiques.

2.3 Trois sources d'émergence

Bien que la topologie regroupe, jusque dans la première partie du 20e siècle, les domaines de la théorie des ensembles, de la topologie générale, de la théorie de la mesure et de la topologie algébrique, nous pensons être parvenue à sélectionner un certain nombre de travaux en lien direct avec les notions visées. Notre objectif est maintenant d'étudier plus précisément les travaux qui délimitent le panorama qui vient d'être décrit en pointant la fonction des notions introduites et leur évolution. Tout en étant très succinte, la vue globale que nous avons donnée de l'histoire des notions met en évidence un élément important, nous amenant à préciser le découpage des analyses suivantes. Dans l'histoire retracée, les notions semblent émerger de trois sources différentes, que nous associons principalement aux besoins et aux projets des mathématiciens. Il s'agit de recourir à l'intuition géométrique, de définir rigoureusement les fondements de l'analyse et enfin, de généraliser les notions pour travailler dans des espaces abstraits. Nous les détaillons ci-dessous.

Le recours à l'intuition géométrique

Cette source cible principalement les travaux de Riemann et le contexte même de l'*analysis situs*. Le recours à l'intuition est associé au projet de développer une théorie abstraite. Même si ces travaux ouvrent la voie à ce qui deviendra la topologie algébrique ou combinatoire, il nous semble important de les prendre en compte, notamment dans des perspectives didactiques. Le contexte décrit ici n'étant pas celui que nous privilégions dans notre travail, nous nous contenterons de pointer quelques travaux de Riemann pour préciser cette volonté de s'appuyer sur des notions intuitives, issues de l'expérience quotidienne, pour introduire et définir des notions dans des espaces généraux.

La volonté de définir rigoureusement les fondements de l'analyse

L'idée de fonder l'analyse sur des bases rigoureuses mène à l'introduction de notions de topologie, dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{R}^N$. Les contextes d'introduction sont la nature de l'ensemble des nombres réels et de ses sous-ensembles, nourrie par des questionnements faisant intervenir la notion de limite et l'étude des séries de fonctions.

Après avoir décrit des travaux intégrant une réflexion sur la structure topologique de l'ensemble des réels, nous nous attacherons, dans cette voie, à développer quelques travaux illustrant le besoin d'introduire des notions de topologie pour parvenir à démontrer rigoureusement des résultats d'analyse.

La volonté de généraliser les notions antérieures

Nous pensons ici aux travaux de Fréchet et de Hausdorff. Cette voie est associée à l'idée de travailler dans des ensembles abstraits, en généralisant des résultats classiques établis dans $\mathbb{R}^N$. On y trouve aussi la question de savoir de quelles notions on a besoin pour travailler dans ce type d'ensembles.

Nous nous centrons donc sur ces deux mathématiciens en montrant de quelle manière ils généralisent les notions antérieures.

Nous présentons maintenant chaque source d'émergence en donnant tout d'abord quelques travaux précurseurs dans lesquels nous situons les idées sous-jacentes et les types de problèmes à partir desquels les notions de topologie ont été anticipées. Ensuite, nous étudions, pour chaque source, quelques travaux précis jouant un rôle dans l'histoire retracée.

3 Le recours à l'intuition géométrique

3.1 Travaux précurseurs

La topologie, en tant que domaine des mathématiques, a d'abord été connue sous le nom d'*analysis situs*, qui signifie littéralement géométrie de position. L'idée au cœur de ce type de géométrie consiste à étudier la position des objets dans l'espace les uns par rapport aux autres, en ne faisant pas intervenir la notion de distance qui les sépare. Ce sont les propriétés qualitatives des objets qui sont étudiées, indépendamment de toute mesure.

C'est Leibniz qui va ébaucher, vers 1677, le programme d'un calcul des positions, d'où le nom d'*analysis situs*. Leibniz, qui apparemment nourrissait un projet de calcul d'une autre nature, critique les résultats de l'époque liés au domaine de l'algèbre. Cette algèbre lui apparaît peu intuitive : « l'algèbre de Viète et de Descartes est selon lui un détour du point de vue de la pure géométrie ; ses voies ne sont ni les plus courtes ni les plus naturelles et, par dessus tout, ses calculs, s'ils conduisent aux résultats voulus, n'éclairent pas l'esprit en chemin » (Lecourt, 1999, p. 946). Les réticences de Leibniz quant à la méthode de Descartes viennent du fait que celle-ci utilise les nombres pour résoudre des problèmes de nature géométrique. Selon Leibniz, cette méthode ne permet pas de recourir à l'intuition et même si elle a le mérite de démontrer les résultats, elle ne permet pas de les expliquer. Leibniz s'intéresse à la question de donner du sens aux calculs. Pour développer ce projet, il va recourir à la géométrie et chercher une langue universelle pour faire des mathématiques qui « dans le contexte de la géométrie aurait l'efficacité de l'algèbre tout en restant fidèle à l'intuition » (ibid., p. 946).

Les idées de Leibniz sont, d'une certaine manière, peut-être trop en avance sur leur temps et son programme en restera là. Toutefois, l'idée de développer un calcul « qui n'exprime plus les qualités mais les formes et les situations géométriques » (ibid., p. 947) ouvre clairement la voie à l'*analysis situs*.

Les premiers résultats effectifs en *analysis situs* sont attribués à Euler. Cherchant à classer les polyèdres au moyen du nombre de leurs sommets, du nombre de leurs arêtes et du nombre de leurs faces, notés respectivement par s, a et f, il énonce, en 1750, la formule $s-a+f=2$ et en fournit une démonstration en 1751. Dans le langage actuel, nous dirions de cette formule qu'il s'agit d'un invariant topologique.

Cette formule ouvrira la voie à une géométrie où l'on ignore les formes, comme le précise Cooke (1997) : « This area of geometry came to be known as *geometria situs* or *analysis situs* (geometry or analysis of position) to contrast with the « geometry of magnitude » that constitutes ordinary geometry » (p. 396).

Malheureusement, la démonstration donnée par Euler en 1751 ainsi que le résultat en lui-même sont erronés. Le résultat d'Euler est cependant valable pour les polyèdres convexes[3]. De nombreux mathématiciens ont tenté de donner une démonstration et un résultat corrects. Il faudra attendre Poincaré, vers la fin du 19e siècle, et la notion d'homologie pour obtenir une forme rigoureuse du théorème. La principale faille dans les démonstrations proposées est l'absence de définitions précises pour les objets considérés. Cette question de définir rigoureusement les notions utilisées reviendra fréquemment par la suite, jouant ainsi un rôle clé dans l'émergence de certaines notions de topologie.

Euler énonce également le célèbre problème des « Ponts de Koenigsberg ». Il s'agit d'un autre problème de nature topologique, au sens décrit ici, qui contient en germe les prémisses de la théorie des graphes.

Ces travaux ouvrent en fait la voie à ce qui deviendra la topologie combinatoire. Ils nous emmènent donc sur un terrain qui nous éloigne fortement de notre projet initial. Les notions qui émergent dans ce domaine ne sont en effet pas celles

[3] Plus précisément, la formule est valable pour les polyèdres homéomorphes à la sphère.

que nous visons. Néanmoins, nous retenons que le type de géométrie décrit ici engendre des résultats établis en recourant à l'intuition géométrique. Par exemple, les travaux de Riemann sur les surfaces s'inscrivent dans ce courant d'idées en montrant bien qu'il s'appuie sur des raisonnements intuitifs qu'on peut avoir des objets dans le plan ou dans l'espace pour développer des notions abstraites. Nous l'illustrons en pointant maintenant quelques-uns de ses travaux qui permettent, selon nous, d'établir des liens avec nos perspectives didactiques concernant les notions de topologie que nous visons, même si celles-ci n'apparaissent pas explicitement dans les travaux que nous décrivons.

3.2 L'appui sur des notions intuitives chez Riemann

Dans ses travaux sur les fonctions abéliennes, Riemann (1892) formule le projet de travailler en ne recourant ni à la notion de mesure, ni à la notion de position. Ce programme constitue les idées qui servent de fondements à la topologie, telle que nous la décrivons ici. Nous reprenons les propos de Riemann, cités par Bourbaki (1965) pour illustrer ce projet, extraits de sa *Théorie des fonctions abéliennes* : « Dans l'étude des fonctions qui s'obtiennent par l'intégration de différentielles exactes, quelques théorèmes d'analysis situs sont presque indispensables. Sous ce nom, qui a été employé par Leibniz, quoique peut-être avec un sens quelque peu différent, il est permis de désigner la partie de la théorie des grandeurs continues qui étudie ces grandeurs, non pas comme indépendantes de leur position et mesurables les unes au moyen des autres, mais en faisant abstraction de toute idée de mesure et étudiant seulement leurs rapports de position et d'inclusion. Je me réserve de traiter cet objet plus tard, d'une manière complètement indépendante de toute mesure... »

Dans sa leçon inaugurale [4] intitulée *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie*, Riemann (1854) fournit une tentative importante de classification des espaces. Il s'agit d'un exposé que Riemann doit présenter devant un public de non mathématiciens. Tout en ne contenant pas de calculs, son exposé est très novateur pour l'époque.

Riemann perçoit l'idée de multiplicités à n dimensions, qui vont en fait devenir, dans le langage actuel, les variétés $\mathscr{C}^1$. Dans une telle variété, Riemann définit la position d'un point par n nombres pour lesquels nous dirions qu'ils jouent le rôle des coordonnées curvilignes de Gauss. Ces coordonnées possèdent des différentielles qui vont lui permettre d'une part un calcul infinitésimal sur la variété et d'autre part, d'étendre les notions de longueur, d'aire et de volume à une classe plus large d'ensembles tout en préservant les propriétés d'additivité et de continuité de ces notions.

[4] Riemann présente son travail de thèse en 1851. À l'époque, pour obtenir un poste dans une université et en raison du nombre réduit de postes, il fallait écrire une seconde thèse, appelée « Habilitation » et ensuite donner un « Cours d'habilitation » de façon à montrer ses qualités d'enseignant. Parmi les sujets que Riemann propose à Gauss, son directeur de thèse, pour la présentation de son cours, le choix de ce dernier se porte *« Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie ».*

Hawking (2005) présente quelques éléments d'analyse de ce cours sur lesquels nous nous appuyons ici pour préciser ce que nous jugeons pertinent pour l'histoire que nous cherchons à retracer. L'analyse de Hawking est suivie par la retranscription du cours en question.

Dans son cours, Riemann commence par expliquer que les propriétés métriques de notre espace, donc un espace à trois dimensions, doivent se déduire de l'expérience quotidienne. C'est l'appui sur ce type d'intuition que nous développons ci-dessous.

Ces propriétés ne peuvent pas dériver des seuls axiomes et postulats de la géométrie. Riemann remarque que cet espace dans lequel nous vivons n'est qu'une forme possible d'espace tridimensionnel. Le projet de Riemann est de définir le concept d'une grandeur de dimensions multiples. Riemann annonce qu'une telle grandeur peut comporter « différents rapports métriques, et que l'espace n'est par suite qu'un cas particulier d'une grandeur à trois dimensions. Or, il s'ensuit nécessairement que les propositions de la Géométrie ne peuvent se déduire des concepts généraux de grandeur, mais que les propriétés, par lesquelles l'espace se distingue de toute autre grandeur imaginable de trois dimensions, ne peuvent être empruntées qu'à l'expérience. De là surgit le problème de rechercher les faits les plus simples au moyen desquels puissent s'établir les rapports métriques de l'espace, problème qui, par la nature même de l'objet, n'est pas complètement déterminé ; car on peut indiquer plusieurs systèmes de faits simples, suffisants pour la détermination des rapports métriques de l'espace » (ibid., p. 915).

La première partie du cours, intitulée *Concept d'une grandeur de n dimensions*, prépare clairement aux travaux de Riemann sur l'*analysis situs*. Riemann explique que « les concepts de grandeur ne sont possibles que là où il existe un concept général qui permette différents modes de détermination. Suivant qu'il est, ou non, possible de passer de l'un de ces modes de détermination à un autre, d'une manière continue, ils forment une variété continue ou une variété discrète ; chacun en particulier de ces modes de détermination s'appelle, dans le premier cas, un point, dans le second un élément de cette variété » (ibid., p. 916). Riemann s'appuie à nouveau sur l'expérience quotidienne pour illustrer à quelle occasion on rencontre chaque type de variété : « Les concepts dont les modes de détermination forment une variété discrète sont si fréquents que, étant donnés des objets quelconques, il se trouve toujours, du moins dans les langues cultivées, un concept qui les comprend (...). Au contraire, les occasions qui peuvent faire naître les concepts dont les modes de détermination forment une variété continue sont si rares dans la vie ordinaire, que les lieux des objets sensibles et les couleurs sont à peu près les seuls concepts simples dont les modes de détermination forment une variété de plusieurs dimensions » (ibid., p. 916).

Riemann revient ensuite sur la distinction entre les variétés discrètes (par exemple les entiers naturels) et les variétés continues. Dans les premières, la comparaison de deux éléments s'appuie sur l'énumération tandis que pour les secondes, la comparaison repose sur la notion de mesure. Riemann considère comme variété unidimensionnelle une variété dans laquelle le déplacement d'un point n'est possible que vers l'avant ou vers l'arrière. En transportant une variété sur une autre, Riemann définit les variétés de dimension n. La caractéristique principale de ces variétés est que la détermination d'un élément se ramène à déterminer n grandeurs.

Dans la seconde partie du cours, Riemann étudie les rapports métriques d'une variété à n dimensions. Pour Riemann, « ces rapports métriques ne peuvent être étudiés que dans des concepts de grandeur abstraits, et leur dépendance ne peut se représenter que par des formules » (ibid., p. 919). Riemann s'attache alors à définir la distance entre deux points. Pour cela, il donne une classe générale de métriques pour laquelle la distance usuelle n'est qu'un cas particulier.

Dans la dernière partie, Riemann se recentre sur l'espace quotidien et il regarde comment ce qu'il a développé avant s'y applique. Il y a, selon lui, plusieurs façons de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour la détermination des rapports métriques de l'espace à trois dimensions :

« Elles peuvent d'abord s'exprimer en demandant que la mesure de courbure en chaque point soit nulle suivant trois directions superficielles, et par suite les rapports métriques de l'espace sont déterminés, si la somme des angles d'un triangle est partout égale à deux droits.

Si l'on suppose, en second lieu, comme Euclide, une existence indépendante de la position, non seulement pour les lignes, mais encore pour les corps, il s'ensuit que la mesure de courbure est partout constante, et alors la somme des angles est déterminée dans tous les triangles, lorsqu'elle l'est dans un seul.

Enfin l'on pourrait encore, en troisième lieu, au lieu d'admettre que la longueur des lignes est indépendante du lieu et de la direction, supposer que leur longueur et leur direction sont indépendantes du lieu. D'après ce point de vue, les changements de lieu ou les différences de lieu sont des grandeurs complexes, exprimables au moyen de trois unités indépendantes » (ibid., p. 925).

Riemann examine ensuite comment ces hypothèses sont ou non confirmées par l'expérience.

Nous voyons donc chez Riemann la volonté de développer une théorie abstraite, sans recourir à la notion de mesure, en prenant comme point de départ une forme d'intuition qui est ici appuyée par l'expérience quotidienne.

Les travaux de Riemann sur les variétés à n dimensions seront poursuivis par ses successeurs et feront émerger, vers 1930, la topologie différentielle dans les travaux de Weyl et Cartan.

Un autre élément illustrant bien l'idée de prendre appui sur des notions intuitives transparaît, chez Riemann, dans ses travaux sur les surfaces. Il considère les notions d'arc de courbe joignant deux points d'une surface et celle de déformation. Il n'en donne pas de définition mathématique car il suppose que ces notions sont comprises de tous. Ces deux notions vont lui permettre de développer des outils pour réaliser un premier classement des surfaces dites « fermées ». Mais l'étude de ce type de surfaces ne rentre pas, dans le cadre de ce travail.

En conclusion, les travaux en *analysis situs* sont ceux qui sont décrits le plus brièvement dans ce travail. Ils ouvrent en effet la voie à des notions et à des théories qui sont le moins en lien avec les notions que nous visons. Néanmoins, ils font partie intégrante de l'histoire de la topologie, perçue comme un domaine général ne distinguant pas encore la topologie générale de la topologie combinatoire. Ce fait illustre bien une des difficultés à retracer l'histoire de la topologie.

Nous avons toutefois relaté des travaux de Riemann pour illustrer les idées sous-jacentes à la construction d'une théorie féconde. Comme nous l'avons expliqué, ce n'est pas tant les notions introduites dans ces travaux qui ont suscité notre intérêt mais davantage le projet qui nourrit leur émergence. Nous en retenons une perspective didactique qui peut, selon nous, être investiguée, notamment dans l'introduction des notions à enseigner : il s'agit d'étudier la possibilité de s'appuyer sur l'intuition géométrique et sur des notions qui peuvent sembler intuitives, à ce niveau d'enseignement, pour introduire des notions porteuses d'un formalisme complexe qui provoque, chez les étudiants, des difficultés à donner du sens aux nouvelles notions.

4 La volonté de définir rigoureusement les fondements de l'analyse

4.1 Travaux précurseurs

Cette partie liée aux fondements de l'analyse trouve ses origines dans des travaux du 18e siècle. Ce siècle est marqué par un grand intérêt pour le calcul numérique (citons, par exemple, le calcul approché des racines d'une fonction chez Lagrange ou encore le calcul de valeurs approchées de π chez Euler) mais aussi par l'apparition de nouvelles branches des mathématiques dans lesquelles la notion de fonction joue un rôle majeur. Nous pensons, par exemple, à l'étude des phénomènes mécaniques et physiques qui amènent les mathématiciens à établir des équations différentielles qu'ils devront ensuite intégrer, ou bien au calcul des variations qui trouve son origine dans la volonté de « mathématiser » des problèmes issus de la physique tels que la mécanique, l'hydrodynamique, la théorie de l'élasticité, etc., ou encore à l'étude des courbes et des surfaces qui mène aux débuts de la géométrie différentielle.

Ces différentes branches ont en commun le calcul infinitésimal. Au 18e siècle, il est considéré comme une extension du calcul algébrique, c'est-à-dire qu'aux opérations algébriques classiques viennent s'ajouter les opérations de différentiation et d'intégration. Les propriétés des fonctions élémentaires étudiées à cette époque sont donc établies au moyen de procédés algébriques. Cette façon de procéder est telle que les questions de convergence ne font pas l'objet d'un traitement rigoureux dans les problèmes étudiés.

Le 18e siècle est également marqué par cette volonté d'algébriser l'analyse, comme le précise Verley (Dieudonné, 1978) : « Connue sous le nom d'*analyse algébrique*, cette étude des algorithmes illimités de nombres réels ou complexes et celle des méthodes spéciales permettant de représenter à l'aide de tels algorithmes les fonctions élémentaires sera le cœur des recherches des analystes du dix-huitième siècle » (p. 132).

Le développement du calcul infinitésimal constitue donc une large part des travaux menés au 18e siècle et même si les notions sur lesquelles il repose, comme par exemple les infiniment petits, ne sont pas définies rigoureusement à cette époque, il parvient tout de même à faire ses preuves grâce à l'efficacité de ses techniques.

Nous nous centrons sur deux classes de problèmes qui occupent les hommes de science au 18e siècle : les approximations d'une part et les séries trigonométriques d'autre part. Celles-ci ouvrent en effet la voie à des travaux dans lesquels vont émerger des notions de topologie, principalement au 19e siècle.

▶▶ Les approximations

Tout en étant bien présentes dans de nombreux calculs, les questions d'approximation et de convergence sont abordées de façon intuitive. Dieudonné (1978) explique que les analystes du 18e siècle « ont un sens intuitif très correct de la notion de limite et de la plus ou moins grande rapidité de convergence d'une suite vers une limite » (p. 21). Les traités d'analyse de l'époque contiennent des calculs très détaillés. Par exemple, vers 1736, Euler compare l'intégrale entre 1 et n d'une fonction f décroissante et positive avec la somme $f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$ pour en déduire la valeur à 6 décimales près de la somme des termes d'ordre inférieur à 10^6 des séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Le fait que les questions de convergence ne soient presque jamais abordées, en tout cas pas au sens actuel, a comme conséquence que les textes traitant de l'analyse contiennent essentiellement des égalités. Les inégalités y sont quasiment absentes. Une exception peut être mentionnée dans les travaux de Lagrange, lorsqu'il évalue le reste de la formule de Taylor par $\frac{m}{n!}(x-a)^n \leqslant R_n \leqslant \frac{M}{n!}(x-a)^n$, où m et M sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de la dérivée ne dans l'intervalle $[a,x]$.

Les textes de cette époque ne font pas non plus mention de théorèmes qui sont devenus, aujourd'hui, des piliers de l'analyse moderne. Dieudonné (1978) en donne quelques exemples : « Des propriétés telles que l'existence d'un maximum pour une fonction réelle continue dans un intervalle compact, ou le fait qu'une telle fonction ne puisse changer de signe sans s'annuler, ne sont même pas mentionnées ; elles sont utilisées comme allant de soi, chaque fois qu'on en a besoin » (p. 25).

▶▶ Les séries trigonométriques

Les séries de la forme $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ apparaissent, au 18e siècle, dans différents contextes. Par exemple, Euler obtient ce type de séries en les considérant comme la partie réelle ou imaginaire de séries entières $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ en posant $z = e^{ix}$.

Nous les retrouvons également dans l'étude des mouvements périodiques. En 1749, dans un mémoire portant sur les inégalités des mouvements de Jupiter et de Saturne, Euler a l'idée de développer la fonction $f(x) = \dfrac{1}{(1 - n\cos x)^s}$ sous la forme d'une série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx$ et fournit des formules de récurrence pour calculer les coefficients a_k.

Néanmoins, il conclut, vers 1750, qu'une fonction périodique de période 2π est la limite d'une série trigonométrique. Ce résultat est faux. Au 19e siècle, l'étude de la représentation, par des séries trigonométriques, des fonctions usuelles en analyse, mènera à l'émergence de notions comme celles de fonction, d'intégrale, de convergence uniforme et à celle d'ensemble également. Cette étude permettra aussi de rectifier ce résultat et d'en préciser bien d'autres.

▸▸ Une mise à jour des problèmes

Comme nous venons de l'expliquer, la façon d'aborder les questions liées à la notion de convergence est de nature calculatoire. On trouve en effet dans les travaux évoqués de nombreux calculs numériques qui contiennent, par exemple, des nombres avec plus de 20 décimales. Ces travaux, comme les inégalités données par Lagrange pour le reste, témoignent de cette volonté d'algébrisation de l'analyse dont nous avons parlé au point précédent.

Cependant, Dahan-Dalmedico et Peiffer (1986) expliquent que « la conception algébrique et formelle des fonctions, qui a stimulé si longtemps l'ascension de l'analyse, fonctionne maintenant comme un *facteur de blocage* ». Les analystes du 18e siècle se verront en effet reprocher par leurs successeurs un certain manque de rigueur dont la cause principale est la difficulté de définir de manière précise les notions de base du calcul infinitésimal. Nous pensons aux notions de fonction, de suite, de convergence, de limite, de continuité... Ainsi, dans l'étude des séries par exemple, celles-ci sont intégrées et dérivées termes à termes, en omettant les questions de convergence sous-jacentes.

Une explication possible à ce manque de rigueur est probablement liée à l'influence de l'algèbre dans la résolution des problèmes de l'époque. Elle est de plus à l'origine de l'introduction systématique des nombres complexes dans l'étude des fonctions élémentaires. Même si les mathématiciens maîtrisent bien les nombres complexes à la fin du 18e siècle, ils n'associent pas encore le nombre complexe z à l'idée qu'on puisse le représenter dans le plan par le couple $(\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Im}\, z)$. Les nombres complexes sont, eux aussi, traités algébriquement, pour ramener des égalités complexes à deux égalités réelles. L'algèbre est donc utilisée comme un outil pour s'attaquer aux problèmes sur les fonctions, évinçant ainsi les questions de convergence posées par l'analyse.

La correspondance entre les nombres complexes et les points du plan est cependant implicite dans la dissertation inaugurale de Gauss, vers 1799. On y trouve une démonstration du théorème fondamental de l'algèbre qui contient, en germes, un exemple d'argument utilisé en topologie algébrique : « Pour établir l'existence d'une racine complexe $z_0 = x_0 + y_0$ d'un polynôme P, il utilise des raisonnements intuitifs sur les déformations de courbes pour montrer l'existence d'un point d'intersection (x_0, y_0) des courbes $\operatorname{Re} P(x,y) = 0$ et $\operatorname{Im} P(x,y) = 0$ » (Dieudonné, 1978, p. 140).

Ainsi, vu a posteriori, nous remarquons qu'au début du 19e siècle, un certain nombre de théories font encore défaut. En voici quelques exemples :

- les notions de limite, de continuité, de dérivée et d'intégrale ne sont pas définies de façon précise ;
- un réel x est défini par une suite d'approximations décimales (d_n) telle que $|x - d_n|$ peut être rendu inférieur à un nombre « petit » du type 10^{-k} ;
- il n'y a pas de traitement rigoureux des séries trigonométriques et des séries de fonctions ;
- à cette époque, on pense que la limite d'une série de fonctions continues est une fonction continue ;
- pour une fonction périodique f, on n'est pas encore capable de démontrer sous quelles conditions $f(x)$ est égale à la somme de la série trigonométrique associée par les formules de Fourier.

Définir rigoureusement les fondements de l'analyse préoccupe donc beaucoup les mathématiciens au début du 19e siècle. Ceux-ci sont de plus amenés à enseigner les mathématiques. Ce facteur contribue lui aussi à la nécessité de définir rigoureusement les notions enseignées. En tentant de définir les notions de limites de suites et de fonctions d'une variable réelle, les mathématiciens sont également confrontés au problème de définir ce qu'est un nombre réel. Le début du 19e siècle est donc caractérisé par une volonté d'arithmétiser l'analyse en ce sens que les mathématiciens nourrissent le projet de construire l'analyse sur l'arithmétique, c'est-à-dire sur la notion de nombre. Cette conception de l'analyse contient également la volonté de ne pas recourir aux méthodes empruntées à la géométrie.

Le 19e siècle voit donc apparaître ce besoin de donner aux mathématiques des bases rigoureuses et d'éviter le recours à l'intuition. C'est au fil de ce siècle que vont se développer deux courants qui, parfois séparés et parfois entremêlés, vont chacun faire émerger des notions ou des raisonnements de nature topologique, ouvrant ainsi la voie à ce qui deviendra au début du 20e siècle la topologie générale.

Le premier courant dont il est question ici est celui de l'élucidation des notions de base de l'analyse. Ce courant est donc intimement lié aux préoccupations de rigueur dont il a été question plus haut, mais aussi à l'aboutissement d'une construction précise de $\mathbb{R}$ et de la mise à l'écart du recours à l'intuition géométrique. En somme, ce premier courant repose sur les principes mêmes de l'analyse.

Le second courant se développe grâce à des problèmes posés par la Physique menant à la représentation des fonctions par des séries, et à la question de la continuité de la limite d'une série de fonctions continues.

Pour chaque courant, nous allons maintenant évoquer des travaux précis les concernant. Ceux-ci ont pu retenir notre attention pour diverses raisons que nous expliciterons.

4.2 Élucidation des notions de base

▶▶ La notion de limite

La notion de limite joue un rôle important dans l'histoire que nous retraçons. Nous verrons en effet que sa généralisation à des espaces dont les éléments ne sont pas des nombres, vers la fin du 19e siècle, est un des fondements de la topologie générale. Nous resituons donc brièvement l'émergence de la notion de limite pour les suites et les fonctions.

Nous ne pouvons pas parler des efforts de rigueur au début du 19e siècle sans évoquer Cauchy. La notion de limite est au cœur de ses travaux.

Dans la définition de limite, chez Cauchy, il n'y a plus aucune conception géométrique, contrairement aux tentatives de définitions qui avaient été fournies jusque là. Dans son *Cours d'analyse* donné à l'École Polytechnique de Paris en 1821, Cauchy définit la notion de limite de la manière suivante : « Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres. » C'est à partir de cette définition que Cauchy définit un infiniment petit comme une suite qui converge vers zéro.

Il donne aussi une définition de la continuité d'une fonction : « La fonction $f(x)$ restera continue par rapport à x entre des limites données si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même. » Comme le soulignent Dahan-Dalmedico et Peiffer (1986), les définitions de Cauchy ont une caractéristique importante en ce sens qu'« elles posent la continuité comme une *propriété locale* et rompent avec la terminologie eulérienne, dont on peut dire qu'elle exprimait une sorte de continuité globale puisqu'une fonction continue pour Euler est définie par une seule loi analytique, terminologie qui va tomber en désuétude. »

Cauchy fournit également un résultat faux : il affirme que si une série de fonctions continues est convergente dans le voisinage d'un point x_0 alors sa limite est une fonction continue dans le même voisinage. Dans la démonstration, il considère la fonction suivante :

$$r_n(x) = s_n(x) - s(x) = u_n(x) + u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x) + \ldots$$

Son raisonnement est alors le suivant. Nous le décrivons dans le langage actuel : si on donne à x un accroissement infiniment petit α, on a alors $|r_n(x+\alpha) - r_n(x)| < \varepsilon$ pour $n \geqslant N$. Cauchy suppose donc implicitement que N ne dépend pas de x. Son erreur peut en partie s'expliquer par le fait que Cauchy travaille généralement sur des séries entières. Par exemple, il applique le théorème précédent à la série $1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$, avec $x \in]-1,1[$, dont la limite $\frac{1}{1-x}$ est en effet une fonction continue sur $]-1,1[$.

La démonstration de Cauchy met toutefois en relief l'idée de convergence uniforme d'une série de fonctions.

Dans un mémoire publié en 1853, Cauchy mentionne son erreur et donne une définition correcte de la convergence uniforme, sans la qualifier de cette manière.

La prise de conscience de l'existence de différents types de convergence, notamment pour les suites de fonctions, joue un rôle dans l'introduction de certaines notions de topologie, qui sera précisé par la suite.

▶▶ Le théorème des valeurs intermédiaires

En 1817, Bolzano publie un mémoire sur le théorème des valeurs intermédiaires. Dans le langage actuel, ce théorème s'énonce de la façon suivante : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Alors, il existe $\xi \in]a,b[,\ f(\xi) = 0$.

Avant la démonstration de ce résultat, Bolzano donne la définition suivante de la continuité d'une fonction : « Dire qu'une fonction réelle f de la variable x est continue, pour toutes les valeurs de x appartenant à un intervalle donné, ne signifie rien d'autre que ceci : si x est une telle valeur quelconque, la différence $f(x-w) - f(x)$ peut être rendue plus petite que toute grandeur donnée, si l'on peut prendre w aussi petit qu'on voudra ».

Des extraits de ce mémoire ont été analysés par plusieurs auteurs (par exemple Manheim (1964), Dugac (1984) ou Rouche (2001)). Nous avons extrait de ces analyses les éléments montrant que Bolzano se pose des questions liées à la topologie de $\mathbb{R}$ puisqu'il est amené à s'interroger sur l'agencement des points de la droite réelle les uns par rapport aux autres et à la nature de ces points.

Dans la préface de son mémoire, Bolzano explique qu'il réfute les démonstrations du théorème s'appuyant sur la géométrie. Nous le citons : « Dans la méthode de démonstration *la plus courante*, on s'appuie sur une vérité empruntée à la géométrie : *à savoir que toute ligne continue à courbure simple dont les ordonnées sont d'abord positives puis négatives* (ou inversement), *doit nécessairement couper quelque part l'axe des abscisses en un point situé entre ces ordonnées*. Il n'y a absolument rien à objecter contre la *justesse* ni contre l'*évidence* de ce théorème géométrique. Mais il est tout aussi manifeste qu'il y là une faute intolérable contre la *bonne méthode* qui consiste à vouloir déduire les vérités des mathématiques *pures* (ou générales) (c'est-à-dire de l'arithmétique, de l'algèbre ou de l'analyse) de considérations qui appartiennent à une partie *appliquée* (ou spéciale) seule, à savoir à la *géométrie*... En effet, dans la science, les démonstrations ne doivent nullement être de simples procédés de « fabrication d'évidences », mais doivent être bien plutôt des *fondements* ». Cette citation rejoint le courant d'idées du début du 19e siècle que nous avons évoqué précédemment à propos des efforts de rigueur et de cette volonté d'arithmétiser l'analyse. De ce point de vue, Bolzano fait partie intégrante de ce mouvement.

Bolzano expose ensuite la démarche générale de la démonstration en commençant par annoncer qu'il va s'attacher à démontrer un résultat plus général. Nous le citons : « La vérité à montrer : il y a toujours au moins une racine réelle entre deux valeurs α et β qui correspondent à des résultats de signes opposés, repose manifestement sur une autre, *plus générale* : si deux fonctions de x, $f(x)$ et $\varphi(x)$ ont la propriété que pour $x=\alpha$, on ait $f(\alpha)<\varphi(\alpha)$, mais pour $x=\beta$, $f(\beta)>\varphi(\beta)$, alors il doit toujours exister une certaine valeur intermédiaire entre α et β pour laquelle $f(x)=\varphi(x)$ ».

La preuve de ce théorème fait intervenir le résultat suivant, énoncé par Bolzano : « Si une propriété M n'appartient pas à *toutes* les valeurs d'une grandeur variable x, mais appartient à *toutes* celles qui sont *plus petites* qu'un certain u : alors il existe toujours une grandeur U qui est la plus grande de celles dont on peut affirmer que toutes les valeurs inférieures x possèdent la propriété M ». Dans le langage actuel, il s'agit du théorème affirmant l'existence de la borne supérieure.

Nous donnons ci-dessous l'idée du raisonnement suivi par Bolzano pour démontrer cette propriété.

Pour démarrer cette preuve, Bolzano considère $u+D$, où D est une quantité positive. Selon lui, ce nombre existe par hypothèse. Bolzano suppose que le nombre $u+D$ ne possède pas la propriété M.

Il considère alors la suite d'intervalles notée $\{(u,u+D/2^m)\},\ m=1,2,\ldots$ Quelle que soit la valeur de m considérée, il distingue alors deux cas. Le premier est celui où il existe au moins un nombre de l'intervalle n'ayant pas la propriété M. Dans ce cas, il pose $U=u$. Dans le second cas, il existe une plus petite valeur de m, notée m_i, telle que tous les nombres dans les intervalles $\{(u,u+\frac{D}{2^{m_j}})\},\ j\geqslant i$, ont la propriété M. Dans ce cas, Bolzano considère l'intervalle $(u+\frac{D}{2^{m_i}},u+\frac{D}{2^{m_i}}+\frac{D}{2^{m_i+n}})$, où $n\in\mathbb{N}$. Alors, pour tout n, soit il existe au moins un nombre dans l'intervalle n'ayant pas la propriété M, et on pose $U=u+D/2^{m_i}$, soit il existe une plus petite valeur de n, notée n_i, telle que tous les nombres des intervalles $(u+\frac{D}{2^{m_i}},u+\frac{D}{2^{m_i}}+\frac{D}{2^{m_i+n_j}})$, avec $j\geqslant i$, ont la propriété M. Dans ce cas, on poursuit de façon semblable le procédé de construction d'emboîtement des intervalles.

En continuant indéfiniment, U apparaît comme la limite de la suite

$$u,\ u+\frac{D}{2^{m_i}},\ u+\frac{D}{2^{m_i}}+\frac{D}{2^{m_i+n_i}},\ldots \tag{V.1}$$

Étant arrivé à la suite V.1, Bolzano comprend qu'il faut en prouver la convergence. Il s'attaque à ce problème en le posant dans toute sa généralité. Il l'énonce de la façon suivante : « Si dans une série de grandeurs :

$$F_1(x),\ F_2(x),\ F_3(x),\ldots,\ F_n(x),\ldots,\ F_{n+r}(x)$$

la différence entre son n^e terme $F_n(x)$ et tout terme ultérieur $F_{n+r}(x)$, aussi éloigné soit-il du n^e, reste plus petite que toute grandeur donnée, si l'on a pris n suffisamment grand : alors il existe toujours une certaine *grandeur constante*, et *une seule* dont s'approchent toujours d'avantage les termes de cette série et dont ils peuvent s'approcher d'aussi près que l'on voudra, lorsqu'on prolonge la série suffisamment loin ».

Dans le langage actuel, Bolzano affirme que toute suite de Cauchy est convergente. Bolzano parvient à démontrer qu'être une suite de Cauchy est une condition nécessaire pour la convergence de la série. Cependant, la démonstration qu'il donne pour la réciproque de cette propriété, c'est-à-dire le fait qu'il s'agit également d'une condition suffisante, n'est pas correcte. La raison est liée au sens de cette dernière propriété : le fait de prendre conscience qu'une suite de rationnels « qui approche quelque chose », au sens de la propriété de Cauchy, approche un nombre réel.

La raison est que celle-ci utilise le fait qu'un nombre réel, noté X, est limite d'une suite de rationnels. Or, on n'a pas encore de construction rigoureuse de $\mathbb{R}$ à cette époque.

Bolzano explique, au début de sa preuve, que « l'hypothèse d'une grandeur invariable ayant cette propriété d'approcher les termes de notre série d'aussi près qu'on veut ne contient rien d'impossible : cela vient du fait que cette hypothèse permet de déterminer cette grandeur avec la précision que l'on voudra. » Bien entendu, Bolzano ne peut pas prouver l'existence de cette grandeur invariable. Cette question se ramène à la notion intuitive de la « continuité » des nombres réels et à la notion formelle de complétude de $\mathbb{R}$, donc à l'« absence de trous ». En réalité, Bolzano argumente sur le fait que cette existence n'est a priori pas déraisonnable, que cette grandeur est « réelle » au sens de « qui existe », « qui est dans la réalité ». Il ne s'agit pas ici d'un élément de $\mathbb{R}$ à proprement parler. Dugac (1984) nous donne l'analyse suivante de l'affirmation de Bolzano : « la démonstration de l'existence de X se transforme en une démonstration de la possibilité d'approcher X que rien par ailleurs n'assure exister, avec une précision voulue d'avance » (p. 7).

Le mémoire de Bolzano fournit toutefois le premier énoncé précis du critère de Cauchy ainsi que la première tentative de sa démonstration, posant ainsi la question de la nature même des nombres réels. Malheureusement, l'idée que Bolzano a du continu n'est pas suffisamment précise pour mener à une construction rigoureuse de $\mathbb{R}$. Bolzano applique ensuite ce critère dans la démonstration de l'existence de la borne supérieure. Il utilise un procédé de dichotomie produisant des intervalles emboîtés tout à fait semblable à celui que nous avons décrit plus haut. Avec un regard actuel, un tel procédé est implicitement lié à la notion de recouvrement par des intervalles qui deviendra un raisonnement classique en topologie générale. En ce sens, les travaux de Bolzano contiennent en germe la structure continue de $\mathbb{R}$. Ils montrent que la question de la topologie de $\mathbb{R}$ est présente, bien qu'insuffisamment claire pour être rigoureusement résolue.

▸▸ La théorie des fonctions

On ne peut évoquer le mouvement d'arithmétisation de l'analyse et les préoccupations de rigueur au 19e siècle sans parler de Weierstrass. L'idée de fonder l'analyse sur des bases solides est un élément clé de ses travaux. De nombreux auteurs caractérisent d'ailleurs son œuvre comme étant un modèle rigueur (par exemple Poincaré (1898), Dieudonné (1978), Dahan-Dalmedico et Peiffer (1986), Dugac (1973)). Weierstrass a cependant très peu publié ou a été publié très tardivement.

Entre 1857 et 1887, Weierstrass donne à l'Université de Berlin une série de cours dont le thème général est la théorie des fonctions. Ces cours suivent le schéma général suivant :

- La théorie des fonctions analytiques
- La théorie des fonctions elliptiques
- Applications des fonctions elliptiques à la géométrie et à la mécanique
- La théorie des fonctions abéliennes

Dugac (1973) propose une analyse du contenu de ces cours. Ceux-ci sont accessibles à partir des notes prises par plusieurs étudiants qui y assistaient. Il montre l'évolution des théories de Weierstrass au fil des différents cours. Nous avons retenu de ce travail les endroits clés où Weierstrass est amené à introduire des notions topologiques.

Le cours donné en 1861 est intitulé *Calcul différentiel*. Il fait le point sur les notions fondamentales de la théorie des fonctions. L'analyse présentée par Dugac repose sur les notes rédigées par Schwarz, lorsqu'il assistait aux cours de Weierstrass.

Tout comme Bolzano et Cauchy, Weierstrass s'interroge sur l'idée qu'une grandeur variable puisse s'approcher indéfiniment d'une valeur fixe. Après avoir défini la notion de fonction, Weierstrass introduit la variation infiniment petite de la variable et de la fonction en termes de $\varepsilon - \delta$, laquelle va lui permettre de définir la notion de limite de la façon suivante, menant à la définition actuelle : « S'il est possible de déterminer une borne δ telle que pour toute valeur de h plus petite en valeur absolue que δ, $f(x+h) - f(x)$ soit plus petite qu'une quantité ε aussi petite que l'on veut, alors on dira qu'on a fait correspondre à une variation infiniment petite de la variable, une variation infiniment petite de la fonction » (ibid., p. 64). La dépendance de δ par rapport à ε apparaît ici pour la première fois. En comparaison avec la définition donnée par Cauchy, l'idée intuitive de « tendre vers » est ici traduite par une expression analytique. De plus, comme le précise Dugac à propos de la définition de Weierstrass, « à des suites tendant vers un point fixe, elle substituera les voisinages d'un point défini par les inégalités, ce qui sera une des origines de la topologie générale » (ibid., p. 64).

Weierstrass définit ensuite la continuité d'une fonction. Il énonce aussi le théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un intervalle fermé et borné atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure. Weierstrass énonce ensuite le théorème suivant qui affirme, dans le langage actuel, que si f est continue et si $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$, alors quel que soit $y_3 \in [y_1, y_2]$, il existe $x_3 \in [x_1, x_2]$ tel que $y_3 = f(x_3)$. Weierstrass définit alors le voisinage du point x_0 en disant que ce sont tous les x « pour lesquels la différence $x - x_0$ en valeur absolue ne dépasse pas une borne déterminée. »

Dans son cours de 1874 intitulé *« Introduction à la théorie des fonctions analytiques »* et rédigé par Hettner, lui aussi élève de Weierstrass, il poursuit son objectif d'arithmétiser l'analyse en essayant d'introduire la même clarté dans les enchaînements analytiques que celle rencontrée dans les enchaînements algébriques. C'est avec les notions de limite, de bornes supérieure et inférieure, de point d'accumulation et de convergence uniforme que Weierstrass essaie d'atteindre le but qu'il s'est fixé.

Une partie du cours de 1874 porte sur les séries entières. Il définit d'abord les notions de série entière et de rayon de convergence. Ensuite, on trouve l'énoncé d'un lemme, jugé important par Weierstrass et qui correspond à l'existence de la borne supérieure et de la borne inférieure. La démonstration, que nous retranscrivons ci-dessous en reprenant les propos de Dugac (ibid.), revient à celle du théorème des intervalles emboîtés et de l'existence d'un point d'accumulation.

Weierstrass commence par supposer qu'il s'agit d'un ensemble infini de nombres réels positifs et il remarque qu'on peut se limiter à l'ensemble des nombres rationnels d'un intervalle de la droite. Ces nombres réels positifs sont inférieurs à un nombre positif g_1. Cet ensemble admet donc une borne supérieure g, telle que, quel que soit $g' < g$, il y a des éléments de l'ensemble dans l'intervalle $]g', g[$.

Par hypothèse sur l'ensemble X considéré, et par emploi implicite de l'axiome d'Archimède, on peut trouver un nombre entier b_0, tel que dans l'intervalle $[b_0, b_0 + 1[$ il y ait encore des points de X. Pour ces points, on a donc $b_0 \leqslant x < b_0 + 1$.

Soit $a > 1$, un entier, on peut donc trouver un entier b_1 tel que $ax < b_1 + 1$ pour tout élément x de X et tel qu'il y ait encore des points de X satisfaisant à $b_1 \leqslant ax < b_1 + 1$, c'est-à-dire $\frac{b_1}{a} \leqslant x < \frac{b_1+1}{a}$.

Ainsi, on construit une suite possédant les propriétés précédentes :

$$b_0, \frac{b_1}{a}, \frac{b_2}{a^2}, \ldots, \frac{b_{r+1}}{a^{r+1}}, \text{ avec } \frac{b_p}{a^p} < \frac{b_q + 1}{a^q}$$

quels que soient p et q.

Comme $\frac{b_r}{a^r} < \frac{b_{r+1}+1}{a^{r+1}}$ et $\frac{b_{r+1}}{a^{r+1}} < \frac{b_r+1}{a^r}$, il en résulte que $ab_r + a > b_{r+1}$ et $b_{r+1} + 1 > ab_r$.

Posons $b_{r+1} = ab_r + c_{r+1}$. D'après ce qui précède, on a : $-1 < c_{r+1} = b_{r+1} - ab_r < a$.

Comme il s'agit de nombres entiers, il en résulte que c_{r+1} est un élément de l'ensemble $(0, 1, 2, \ldots a - 1)$.

Des définitions, il résulte que $\frac{b_{r+1}}{a^{r+1}} = b_0 + \frac{c_1}{a} + \ldots + \frac{c_{r+1}}{a^{r+1}}$.

Comme $a > 1$, la série $g = b_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_{n+1}}{a^{n+1}}$ est convergente.

Weierstrass démontre que g est la borne supérieure de l'ensemble considéré et qu'elle possède les propriétés énoncées.

L'étude des séries entières amène Weierstrass à introduire des notions de topologie. Après avoir défini la notion d'ouvert borné, qui semble davantage désigner une région du plan, il donne les définitions suivantes. Le point a appartient à l'ouvert O, s'il existe un voisinage de a, qui est contenu dans O. Chez Weierstrass, un voisinage est un disque ouvert de centre a ; a est un point extérieur de O, s'il existe un voisinage de a qui ne rencontre pas O ; a appartient à la frontière de O, si dans tout voisinage de a il y a des points de O et des points qui n'appartiennent pas à O.

Après avoir discuté ensuite de la notion de dérivée, Weierstrass énonce des propriétés sur la convergence des séries entières. Cette partie contient des théorèmes classiques tels que tout ensemble borné contient un point d'accumulation et dont la démonstration donnée se rapproche de celle de l'existence de la borne supérieure. Weierstrass en déduit qu'une fonction continue sur un compact atteint ses bornes. Il démontre aussi l'existence de points d'accumulation dans les sous-ensembles bornés de $\mathbb{R}^N$ et de $\mathbb{C}^N$. Il applique ensuite les résultats obtenus à l'étude des séries entières.

Selon Dugac (1973), « l'insistance de Weierstrass sur les notions de borne supérieure et de borne inférieure (et surtout sur les notions de borne supérieure et de borne inférieure atteintes) et l'usage constant de la notion de point d'accumulation ont été à l'origine de l'élargissement de la notion de limite et des progrès qui ont conduit à la création de la topologie générale » (p. 94).

Weierstrass aborde également la question du prolongement analytique d'une fonction. Ce problème l'amène à utiliser les notions de voisinage et de connexité pour établir un certain nombre de résultats sur les fonctions analytiques. Nous illustrons cet aspect ci-dessous. Dans le langage actuel, lorsque f est une fonction définie sur un ouvert U du plan complexe, on dit que f est analytique sur U si on peut développer f en série entière au voisinage de tout point de U. Cette représentation locale d'une fonction analytique montre que celle-ci possède des propriétés semblables à celles d'une fonction polynomiale, notamment des propriétés sur les zéros de la fonction f. Un résultat est que les zéros sont des points isolés, ce qui implique le théorème du prolongement analytique, énoncé par Weierstrass dans son cours de 1874 : si deux fonctions analytiques sur un ouvert connexe U sont égales sur un ensemble admettant un point d'accumulation dans U, alors ces deux fonctions coïncident sur U tout entier.

Dans son mémoire de 1842, Weierstrass étudie aussi la dérivation des séries infinies. Il introduit la convergence uniforme à l'aide du critère de Cauchy pour étudier la question de savoir sous quelles conditions la somme d'une série de fonctions continues qui converge partout dans un intervalle I est continue sur I. Il énonce le résultat suivant : la limite uniforme de fonctions continues est continue.

Dans les cours de Weierstrass, nous voyons émerger un certain nombre de notions considérées aujourd'hui comme des notions de topologie : voisinage, ouvert, frontière... Weierstrass s'attache à développer des théories mathématiques les plus rigoureuses possible. C'est cet effort de systématisation qui l'amène à définir ces notions. Celles-ci apparaissent comme l'instrument permettant de démontrer avec toute la rigueur nécessaire un certain nombre de résultats.

Tout comme chez Bolzano, l'existence de la borne supérieure est un résultat propice aux raisonnements de nature topologique sur la droite réelle. Le procédé d'emboîtement des intervalles met bien en évidence la structure continue de l'ensemble des réels.

La notion de connexité permet elle aussi des raisonnements de nature topologique sur la structure des ensembles. La notion de point d'accumulation semble y jouer un rôle important.

C'est donc l'aspect outil des notions qui transparaît dans ces travaux. Cependant, les théories des séries ou celle du prolongement analytique, dont les notions de topologie permettent le développement, ne sont pas accessibles au niveau d'enseignement visé dans ce travail.

Nous retenons enfin l'importance de la notion de voisinage. Utilisée dans un certain nombre de résultats, elle permet également de définir des notions telles que celles d'ouvert et de point frontière.

▸▸ Le théorème de Bolzano-Weierstrass

La notion de point d'accumulation, tout d'abord introduite sous l'expression *point limite*, apparaît dans un théorème considéré comme un pilier des cours d'analyse enseignés à notre époque : le théorème de Bolzano-Weierstrass. Celui-ci affirme que tout ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^N$ possède au moins un point d'accumulation.

Cantor est le premier à utiliser le terme de point limite mais c'est tout d'abord chez Weierstrass que la notion émerge. Les cours de Weierstrass contiennent différentes versions du théorème. Moore (2008) en fournit une analyse montrant bien la manière dont la notion est utilisée dans chaque énoncé.

La première version connue du théorème apparaît dans les notes prises par Pasch pendant le cours de Weierstrass (1865) sur les *Principes de la théorie des fonctions analytiques*. Weierstrass utilise la notion de voisinage et énonce le théorème sous la forme suivante, que nous reprenons de l'article de Moore : « If, in a bounded part of the plane, there are infinitely points with a given property, then there is at least one point (inside that part or on its boundary) such that in every neighborhood of this point there are infinitely many points having the given property. » (p. 222). Weierstrass perçoit en fait ce théorème comme un résultat d'analyse et non de topologie.

La version suivante, énoncée par Weierstrass (1868), est donnée en termes de fonctions : « If a function has a definite property infinitely often within a finite domain, then there is a point such that in any neighborhood of this point there are infinitely many points with the property » (p. 222).

C'est dans un article de 1886 que Weierstrass énonce le théorème de Bolzano-Weierstrass : « If x is an unbounded variable magnitude, which – as it is said – forms a simple manifold and is reprensented geometrically by a straight line, and if in it another variable magnitude x' is defined in such a way that the number of defined places is infinite, then there is in the domain of x, for which x' is defined, at least one place in the neighborhood of which infinitely many defined places occur. Such a place can either belong to the defined places, or not. In the latter case it is called a limit place » (p. 222).

Il est à noter que ce théorème n'est pas à attribuer à Bolzano dans le sens où il n'a pas énoncé le résultat. Ce que contiennent les travaux de Bolzano c'est le principe de subdivision d'intervalles répétée, que nous avons précédemment décrit, proche de celui utilisé par Weierstrass pour prouver le théorème.

Dans un article de 1872 sur lequel nous reviendrons par la suite, Cantor introduit le terme « point limite » qu'il définit en terme de voisinage. Il fournit ensuite la première version publiée du théorème, qu'il perçoit lui aussi comme un résultat important d'analyse. Il n'explique cependant pas d'où vient ce résultat ni pourquoi il suppose que l'ensemble doit être borné.

La notion de point limite est aussi utilisée par Dini (1878), qui énonce lui aussi le théorème de Bolzano-Weierstrass, dans une forme encore plus précise que les précédentes : un ensemble infini G de points de l'intervalle (a,b) possède un point limite, qui peut appartenir à G ou non.

Nous situons la place de ce théorème, en lien avec notre travail, de la manière suivante. L'importance de notions telles que celles de voisinage ou de point d'accumulation se confirme dans les travaux de Weierstrass. Leur introduction permet de définir d'autres notions et de démontrer un résultat tel que celui évoqué ici, montrant bien en quoi consiste un raisonnement de nature topologique. Or, ces notions ne sont pas enseignées en première année d'université, du moins dans notre institution. Une réflexion devra sans doute être menée sur le choix des notions à introduire. Enfin, le cadre des fonctions apparaît, une fois de plus, comme une source de motivation pour introduire les premières notions de topologie.

▸▸ La nécessité de construire $\mathbb{R}$

Pour revenir à la construction des réels, nous avons d'abord retenu que la nécessité d'une telle construction n'allait pas de soi auprès de tous les mathématiciens. Chez Pascal (1658) et encore après chez Cauchy (1821) par exemple, une construction rigoureuse de $\mathbb{R}$ était superflue. Selon eux, « les nombres (réels), qui se rattachaient directement à la mesure des grandeurs, étaient clairs par eux-mêmes et n'avaient pas besoin d'être définis plus rigoureusement » (Rouche, 2001). Pourtant, Cauchy avait remarqué la réciproque de la propriété : si $u_k \to l$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, $|u_n - u_p| < \varepsilon$ est vrai à partir d'un certain rang.

À partir de 1860, nous avons vu que Weierstrass reprend les bases de l'analyse mais il ne sera pas le seul à se lancer dans une telle démarche. Il y a à cela deux raisons majeures. La première est que la notion de limite est essentielle puisqu'elle sous-tend une large partie des mathématiques du 19e siècle en intervenant dans un nombre important de problèmes sur les intégrales et les séries. Ces notions sont en effet utilisées pour développer les fonctions en séries entières et trigonométriques, pour chercher les solutions d'une équation différentielle ou encore pour approcher les fonctions en certains points. Une seconde raison est que les démonstrations des théorèmes importants comme celui de D'Alembert-Gauss, le théorème des accroissements finis ou le théorème des valeurs intermédiaires nécessitent d'utiliser les résultats suivants :

- □ Toute suite croissante et majorée converge.

- □ Tout ensemble majoré et non vide admet une borne supérieure.
- □ Une fonction continue sur un compact de $\mathbb{R}$ atteint son maximum, résultat démontré par Weierstrass.

Ces résultats reposent sur le critère de Cauchy dont la démonstration de la condition suffisante exige une construction rigoureuse de $\mathbb{R}$, ce qui fait encore défaut à l'époque. Néanmoins, les nombres réels sont utilisés comme un outil dans de nombreux travaux.

Nous avons retenu trois constructions de l'ensemble des nombres réels qui sont, à notre connaissance, celles les plus fréquemment citées dans les sources consultées et qui constituent le pas vers la formalisation finale de la structure de l'ensemble des réels. Il s'agit des constructions de Weierstrass, Dedekind et Cantor. Nous indiquons ici une description succinte des constructions de Weierstrass et de Dedekind. La construction de Cantor étant celle des trois qui fait le plus explicitement émerger des notions topologiques, nous lui consacrons un paragraphe détaillé (cf paragraphe 4.4).

Notre choix de relater quelques éléments sur la construction des réels ne nous éloigne pas de notre projet. Notre questionnement initial est de savoir ce qu'il est possible de retirer de l'histoire à des fins d'enseignement. De ce point de vue, il nous semble intéressant d'étudier quelles sont les connaissances qui sont mises en jeu dans ces constructions et quels arguments (par exemple de nature algébrique ou géométrique) sont utilisés pour définir rigoureusement $\mathbb{R}$ qui est, somme toute, le cadre de travail principalement retenu pour manipuler les notions de topologie dans notre enseignement.

La construction de Weierstrass

La construction de $\mathbb{R}$ par Weierstrass a été élaborée vers 1863. Elle n'est pas reconnue comme étant la plus rigoureuse mais on peut considérer que cette théorie « a été la première à cristalliser autour d'elle cette vaste réforme de l'analyse qui finira par lui donner la forme que nous lui connaissons aujourd'hui » (Dieudonné, 1978, p. 364). Weierstrass définit les nombres réels au moyen d'agrégats de nombres rationnels. Dans le langage actuel, sa construction revient à définir les réels en termes de classes d'équivalence.

Le point d'entrée dans la théorie de Weierstrass est d'admettre l'existence de $\mathbb{N}$. Il définit une notion d'égalité sur les entiers en disant que deux entiers a et b sont égaux s'ils sont composés du même nombre d'unités et si de plus, on a $a = b$ et $b = c$ entraîne $a = c$. L'égalité entre a et b revient donc à établir une correspondance bijective entre les unités de a et celles de b.

Weierstrass introduit ensuite la notion de parties exactes de l'unité : $1/n$ est la n^{e} partie exacte de l'unité si et seulement si $n.(1/n) = 1$. Cette notion est introduite de façon à pouvoir définir un nombre b tel que $c = a.b$, où a et c sont deux entiers positifs. Un nombre rationnel est donc une combinaison linéaire finie à coefficients entiers de parties exactes de l'unité.

Weierstrass cherche alors à définir l'égalité entre deux rationnels. Pour cela, il utilise les transformations suivantes, que l'on peut effectuer sur les parties exactes de l'unité :

① n éléments quelconques de la forme $1/n$ peuvent être remplacés par l'unité.

② Tout nombre entier peut être remplacé par ses parties exactes. Par exemple, 1 peut être remplacé par $7.\frac{1}{7}$.

Un nombre rationnel positif va donc pouvoir être représenté par un ensemble fini dont les éléments appartiennent à $\mathbb{Q}^+$. C'est ce qu'on appelle un agrégat. Par exemple $4/3$ peut être représenté par l'agrégat $\{1/3, 1/3, 1/3, 1/3\}$ mais aussi par l'agrégat $\{1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6\}$. Il existe une infinité de représentations pour un nombre rationnel donné.

À partir de cette notion d'agrégat, Weierstrass dit que deux rationnels a et b sont égaux si l'agrégat a peut être transformé par les transformations élémentaires précédentes en a' de façon que a' contienne les mêmes éléments et le même nombre de fois que b. Par exemple, $4/3$ et $8/6$.

Pour définir les nombres réels, Weierstrass va considérer qu'on pourrait construire des agrégats contenant un nombre infini d'éléments, c'est-à-dire des suites d'une infinité de nombres rationnels. Pour définir ces nouveaux nombres, Weierstrass introduit des notions qui joueront un rôle important en théorie des ensembles. Il commence par définir la notion de partie de a qui lui sert à définir l'égalité de deux nombres quelconques : « Nous dirons que a' est une partie de a, si l'on peut transformer a' en a'', de façon que tous les éléments de a'' se trouvent autant de fois en a qu'en a', a pouvant contenir d'autres éléments » (repris dans Dugac, 1973, p. 80).

Cette définition permet de définir l'égalité entre deux nombres, même lorsque ceux-ci contiennent une infinité d'éléments et pour ce faire, Weierstrass se ramène à des sous-ensembles finis : « Nous dirons que deux nombres a et b sont *égaux* si *toute* partie de a peut être transformée en une partie b, et réciproquement toute partie b en une de a » (ibid., p. 80).

L'égalité ainsi définie par Weierstrass est une relation d'équivalence et un nombre réel sera défini comme une classe d'équivalence pour cette relation.

La définition d'un nombre composé d'une infinité d'éléments va reposer sur un critère de finitude, énoncé par Weierstrass de la façon suivante : « Nous dirons qu'un nombre a a une valeur finie, s'il existe un nombre b plus grand que a, b étant composé d'un nombre fini d'éléments » (ibid., p. 81). Ensuite, il définit ce qu'est un agrégat qui ne satisfait pas au critère précédent : « Si tout nombre c, composé d'un nombre fini d'éléments, est une partie de a, alors nous dirons que a est infiniment grand » (ibid., p. 81). Comme il n'est pas possible d'égaler deux nombres infiniment grands, Weierstrass n'utilisera que les agrégats vérifiant le critère de finitude.

La construction de Dedekind

C'est en donnant un cours sur le calcul différentiel à l'Ecole Polytechnique fédérale de Zurich en 1858 que Dedekind a ressenti la nécessité de définir rigoureusement les concepts de base, comme par exemple la notion de grandeur variable déjà évoquée dans les travaux de Bolzano : « Mon sentiment d'insatisfaction était alors si puissant que je pris la ferme décision de réfléchir jusqu'à ce que j'aie trouvé un fondement purement arithmétique et parfaitement rigoureux des principes de l'analyse infinitésimale » (repris dans Dieudonné, 1978, p. 367).

Dedekind fait lui aussi partie intégrante de ce mouvement qui consiste à ne pas recourir à l'intuition géométrique et à ressentir ce besoin d'arithmétiser l'analyse. Manheim (1964) nous donne son point de vue quant au but fourni par Dedekind : « Specifically, he rebelled at the recourse to geometric evidence in proving the theorem : « Every magnitude which grows continually, but not beyond all limits, must certainly approach a limiting value ». Convinced that this theorem formed a sufficient base upon which analysis could be founded, he resolved to find its origin in arithmetic and thus, in the same time, to find the essence of continuity » (p. 89).

Dedekind présente sa construction des réels dans *Continuité et nombres rationnels*, publié en 1872. Il explique que son but est de fournir une caractérisation des réels qui puisse s'appliquer dans les démonstrations.

La construction de Dedekind va s'appuyer sur la notion ensembliste de coupure. Il remarque tout d'abord que les nombres rationnels peuvent être mis en correspondance avec des points de la droite réelle. Inversement, il comprend qu'il existe des points de la droite à qui on ne peut pas associer de nombre rationnel.

Tout comme Weierstrass, la construction de Dedekind s'appuie sur l'ensemble des nombres rationnels. L'argument clé qui va permettre à Dedekind de définir l'ensemble des réels est de remarquer que chaque point de la droite sépare cette droite en deux parties. : « If all points of the straight line fall into two classes such that every point of the first class lies to the left of every point of the second class, then there exists one and only one point which produces this division of all points into two classes, thus severing of the straight line into two portions » (repris dans Manheim, 1964, p. 90). C'est donc un argument de type géométrique qui guide Dedekind.

Dedekind définit la notion de coupure. Un nombre rationnel q divise l'ensemble des rationnels en deux classes :

- □ l'ensemble des rationnels inférieurs à q, noté A_1,
- □ l'ensemble des rationnels supérieurs à q, noté A_2.

Tout nombre rationnel qui appartient à A_1 est inférieur à tout nombre rationnel appartenant à A_2. Une coupure (A_1,A_2) de $\mathbb{Q}$ est une partition de $\mathbb{Q}$ en deux classes A_1 et A_2 non vides et disjointes telles que tout nombre de la première A_1 soit strictement inférieur à tout nombre de la seconde A_2. Pour chaque coupure ainsi déterminée par un nombre rationnel, soit il existe un plus grand élément dans A_1, soit il existe un plus petit élément dans A_2. Réciproquement, une coupure qui vérifie cette propriété détermine un rationnel. Dedekind comprend que de nombreuses autres coupures peuvent être construites dans les rationnels et il donne un exemple de coupure qui ne possède pas la propriété précédente. Il prend $A_1 = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0 \text{ ou } x^2 \leqslant 2\}$ et $A_2 = \{x \in \mathbb{Q} : x \geqslant 0 \text{ et } x^2 > 2\}$. L'ensemble A_1 (respectivement A_2) n'a pas de plus grand élément (respectivement de plus petit élément) car un tel élément vérifierait $x^2 = 2$ ce qui n'est pas possible dans $\mathbb{Q}$.

Dedekind écrit : « Chaque fois que se présente une coupure (A_1, A_2) qui n'est engendrée par aucun nombre rationnel, nous *créons* un nombre nouveau, *irrationnel* α, que nous considérons comme parfaitement défini par cette coupure (A_1, A_2) ; nous dirons que le nombre α correspond à cette coupure, ou qu'il engendre cette coupure » (repris dans Dieudonné, 1978, p. 368).

4.3 L'étude des séries de fonctions

▸▸ Sur la représentation des fonctions par des séries trigonométriques

Pendant la première moitié du 19e siècle, tandis qu'on s'attache à définir rigoureusement les concepts de base de l'analyse, les mathématiciens se heurtent également au problème, déjà connu au 18e siècle, de la représentation des fonctions par des séries de fonctions continues et de la continuité de ces séries.

Nous traitons ici de faits historiques ne faisant pas émerger des notions de topologie. Notre but est de montrer que les types de questions suscitées par l'étude des séries trouvent leur origine dans la nature même des ensembles de points considérés. Cette prise en compte de la structure topologique des ensembles mènera à l'émergence de la topologie générale.

Dans l'ouvrage *Discours préliminaire* publié en 1822, Fourier considère une fonction φ définie dans l'intervalle $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont le développement en série trigonométrique est de la forme

$$\varphi(x) = a \sin x + b \sin 2x + \cdots + a_k \sin kx + \cdots \tag{V.2}$$

Fourier s'attache à calculer les coefficients a_k, y compris dans le cas où φ est une fonction discontinue. Pour déterminer ces coefficients, Fourier multiplie les deux membres de l'expression V.2 par $\sin kx$ et en intégrant terme à terme, il en déduit que

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin kx \, \mathrm{d}x.$$

Cependant, Fourier ne justifie aucune étape de son raisonnement. Il faut attendre 1829 pour obtenir la première démonstration rigoureuse de la convergence d'une série de Fourier. Dans son mémoire *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre les limites données*, Dirichlet donne des conditions pour qu'une série trigonométrique ayant comme coefficients ceux de Fourier converge et représente dans un intervalle une fonction arbitrairement donnée. Plus précisément, il montre que si f est une fonction continue et monotone par morceaux dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$, alors la série de Fourier converge.

À la fin du mémoire, Dirichlet s'intéresse aux deux cas suivants :

- □ Que se passe-t-il si le nombre de points de discontinuité de la fonction est infini ?

□ Que se passe-t-il si le nombre d'extremums de la fonction est infini ?

Dirichlet pense que le second cas se ramène au premier cas et en particulier, que la série de Fourier d'une fonction f continue converge vers f, ce qui est faux. Dans le premier cas, Dirichlet remet en cause la définition de l'intégrale de Cauchy. Nous reprenons ici les propos de Dirichlet (Dugac, 2003, p. 113) : « Il est nécessaire qu'alors la fonction $\varphi(x)$ soit telle que, si l'on désigne par a et b deux quantités quelconques comprises entre $-\pi$ et π, on puisse toujours placer entre a et b d'autres quantités r et s assez rapprochées pour que la fonction reste continue dans l'intervalle de r à s ». En d'autres termes, les points de discontinuité de la fonction doivent former un ensemble rare, c'est-à-dire un ensemble tel que son adhérence ne contienne pas de points intérieurs. Le problème soulevé par Dirichlet à propos de l'intégrale de Cauchy sera en partie résolu par Riemann.

Mentionnons également le célèbre exemple suivant, fourni par Dirichlet, d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui admet une infinité de discontinuités :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 \text{ si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$$

C'est à cette occasion que Dirichlet va donner une définition de la notion de fonction qui correspond à la version actuelle.

Ces travaux posent donc la question de savoir sur quels types d'ensembles de points il faut travailler pour garantir la convergence des séries. Cette question va amener les mathématiciens du 19e siècle à des considérations de nature topologique liées aux définitions des notions de fonction, d'intégrale, de convergence uniforme ainsi qu'à la notion même d'ensemble.

▶▶ Le théorème de Heine-Borel

Nous nous intéressons ici à un autre théorème fondamental de l'analyse : de tout recouvrement ouvert de l'intervalle $[a,b]$ on peut extraire un sous-recouvrement fini. Ce théorème de recouvrement est connu sous le nom de *Théorème de Heine-Borel*.

Nous nous appuyons sur l'article de Maurey et Tacchi (2005) pour donner quelques éléments sur la genèse du théorème et pour montrer comment il ouvre la voie aux fondements de la théorie de la mesure, développée par Borel, montrant une fois encore comment une notion de topologie, celle de recouvrement, constitue un outil pour fonder une théorie féconde. Notons que nous faisons ici abstraction de la discussion de Maurey et Tacchi à propos de l'appellation du théorème qui est, selon eux, inappropriée du point de vue de l'émergence historique du résultat. Ce point n'est pas l'objet de notre propos.

Ce théorème suscite également notre intérêt car l'idée d'extraire des sous-recouvrements finis est devenue une méthode classique de la théorie de la compacité.

En 1894, Borel soutient une thèse consacrée aux fonctions d'une variable complexe et intitulée *Sur quelques points de la théorie des fonctions*. Borel y étudie notamment le problème de prolongement suivant. Il considère la fonction f donnée par la série

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{a_n}{\zeta_n - z} ,$$

où (ζ_n) est une suite dense dans le cercle unité et la série $\sum |a_n|$ est convergente. Nous reprenons alors l'analyse de Maurey et Tacchi pour préciser le problème étudié par Borel et l'argument sur lequel repose sa preuve : la fonction f définie par la série précédente « est définie à l'intérieur U et à l'extérieur V du cercle unité Γ, et f est analytique dans ces deux ouverts U et V ; le cercle Γ forme une coupure pour les deux fonctions analytiques f_1 et f_2, définies à l'intérieur et à l'extérieur du cercle par restriction de f à U et à V, c'est-à-dire qu'au voisinage de chaque point de Γ, le prolongement analytique est impossible pour f_1 comme pour f_2. Borel va montrer que sous la condition plus forte que la série $\sum |a_n|^{1/2}$ converge, il existe des chemins γ (des arcs de cercle), traversant le cercle Γ et tels que la fonction f se prolonge par continuité sur le chemin γ, à travers le cercle de coupure Γ. Il va même montrer qu'il existe une quantité non dénombrable de tels chemins, mais sans qu'un seul de ces chemins ne soit *explicitement* donné » (ibid., p. 5).

L'argument de Borel est décrit de la manière suivante : « pour chaque couple (P,Q) d'un point de U et d'un point de V, Borel introduit un segment $[A,B]$ de longueur l situé sur la médiatrice de PQ ; pour chaque point M de $[A,B]$ on peut tracer un arc de cercle γ passant par P,M,Q ; Borel montre que, sous la condition que la série $\sum |a_n|^{1/2}$ converge, l'ensemble des points M de $[A,B]$ pour lesquels la fonction f ne se prolonge pas le long de γ, peut être enfermé dans une suite de segments (I_n) dont la série des longueurs est strictement inférieure à l. Borel en déduit que ces segments ne sauraient recouvrir le segment $[A,B]$, et qu'il existe donc des points M en lesquels passe un chemin γ de prolongement à travers le cercle de coupure Γ » (ibid., p. 5).

C'est pour démontrer cette dernière affirmation que Borel énonce le théorème de recouvrement sous la forme suivante : « si une suite de segments ouverts (I_n) recouvre l'intervalle $[A,B]$, une famille finie d'entre eux suffit à recouvrir $[A,B]$; pour une famille finie il est facile de se convaincre que le recouvrement de l'intervalle n'est possible que si la somme des longueurs des segments est strictement plus grande que la longueur l de l'intervalle » (ibid.,p. 5).

Borel ne cite pas ce théorème dans une *Note de Comptes Rendus* de 1894 annonçant les résultats de sa thèse mais il donne l'énoncé suivant qui se trouve être un des premiers principes de la théorie de la mesure selon Borel : « ... si, dans un intervalle donné sur une droite, on a une infinité d'intervalles partiels donnés, dont la somme est inférieure à l'intervalle total, il y a une infinité non dénombrable de points de la droite qui n'appartiennent à aucun des intervalles partiels » (Borel, 1894, p. 342). Borel démontre ce résultat en utilisant des notions introduites par Cantor telles que celles d'ordinal et le principe de récurrence transfinie.

À peine quelques jours avant la soutenance de thèse de Borel, Cousin présente également une thèse intitulée *Sur les fonctions de n variables complexes* et qui sera publiée en 1895 (Cousin, 1895). Cousin y produit le résultat suivant : « Soit, sur le plan YOX, une aire connexe S limitée par un contour fermé simple ou complexe ; on suppose qu'à chaque point de S ou de son périmètre correspond un cercle, de rayon non nul, ayant ce point pour centre : il est alors toujours possible de subdiviser S en régions, en nombre fini et assez petites pour que chacune d'elles soit complètement intérieure au cercle correspondant à un point convenablement choisi dans S ou sur son périmètre » (ibid., p. 22).

Il s'agit d'un résultat étroitement lié à l'idée de compacité. Maurey et Tacchi reprennent le raisonnement de Cousin appliqué au cas d'un intervalle et montrent que celui-ci permet de retrouver la preuve par dichotomie fournie par Borel.

Le nom de Cousin n'est cependant pas mentionné parmi les résultats de compacité car ses travaux se sont poursuivis dans le cadre de la théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes alors que Borel pose, quant à lui, les jalons de la théorie de la mesure.

4.4 Cantor : une classification des ensembles de points

Nous avons trouvé un autre précurseur des notions de topologie en la personne de Cantor.

Dans son article [5] sur une *Extension d'un théorème de la théorie des séries trigonométriques* (Cantor, 1883), Cantor essaie de caractériser les ensembles de points où la valeur de la variable peut être changée sans modifier la série. C'est dans ce contexte que Cantor va aussi s'intéresser aux propriétés des sous-ensembles de la droite réelle.

L'objet de cet article est une extension du résultat d'unicité suivant pour les séries trigonométriques déjà démontré dans un précédent article : « deux séries trigonométriques

$$\frac{1}{2}b_0 + \sum(a_n \sin nx + b_n \cos nx) \tag{V.3}$$

$$\frac{1}{2}b'_0 + \sum(a'_n \sin nx + b'_n \cos nx) \tag{V.4}$$

qui, pour toutes les valeurs de x, convergent et ont la même somme, ont les mêmes coefficients ».

Cantor a aussi démontré que ce théorème reste valable si on suppose aussi que pour un nombre fini de valeurs de x dans l'intervalle $[0,2\pi]$, on n'a pas la convergence des deux séries. Avant d'en fournir la démonstration, Cantor abandonne son problème initial et s'intéresse aux « diverses manières dont peuvent se comporter des grandeurs numériques en nombre fini ou infini » (ibid., p. 337). Les arguments de Cantor le mèneront à une construction de l'ensemble des réels.

[5] Il s'agit d'un mémoire rédigé en 1871 qui a été repris, précisé et traduit en français sous la forme d'un article en 1883.

Dans le langage actuel, on dirait que Cantor définit un nombre réel comme la limite d'une suite de Cauchy. Cantor prend comme point de départ l'ensemble des rationnels, noté A, « pour arriver à la notion plus étendue d'une grandeur numérique » (ibid., p. 337). Dans l'article mentionné plus haut, une suite $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ de rationnels est appelée « série infinie de nombres rationnels ». Dans la suite du texte, Cantor nomme cette série « la série (1) ». Cantor considère des séries infinies de nombres rationnels vérifiant le critère de Cauchy. Il exprime cette propriété par le fait que la série a une limite déterminée b et il précise que ces mots « ne servent donc qu'à énoncer cette propriété de la série, sans exprimer d'abord autre chose » (ibid., p. 337). Cantor entrevoit sous ces termes que supposer l'existence de la limite nécessite une définition rigoureuse des nombres réels. Sa construction repose sur la notion d'ordre dans $\mathbb{Q}$.

Cantor énonce ensuite les relations qui peuvent exister entre deux suites de rationnels (a_n) et (a'_n) de *limites déterminées* respectives b et b'. On dira que

- $b = b'$ lorsque « $a_n - a'_n$ devient infiniment petit à mesure que n croît[6] »,
- $b > b'$ lorsque « $a_n - a'_n$, à partir d'un certain n, reste toujours plus grand qu'une valeur positive (rationnelle ε) »,
- $b < b'$ lorsque « $a_n - a'_n$, à partir d'un certain n, reste toujours plus petit qu'une grandeur négative (rationnelle) $-\varepsilon$. » (ibid., p. 338).

Si (a_n) est une suite de rationnels de *limite déterminée* b et si a est un rationnel, Cantor donne des relations semblables aux précédentes entre b et a en s'appuyant cette fois sur la différence $a_n - a$.

Cantor continue : « De ces définitions et de celles qui suivent immédiatement, il résulte (et on peut démontrer rigoureusement cette conséquence) que, b étant la limite de la série (1), $b - a_n$ devient infiniment petit à mesure que n croît, ce qui justifie par conséquent d'une manière précise la désignation de « limite de la série (1) » donnée à b (ibid., p. 338). Dans le texte original, l'expression entre parenthèses est absente. La phrase était à l'origine ambigüe dans la mesure où on ne sait pas quel sens attribuer à la suite $b - a_n$ lorsque b n'est pas rationnel puisque les irrationnels ne sont pas encore définis. Cantor est conscient de cette difficulté et ajoute cette parenthèse dans la version française mentionnée ici (Cantor, 1883).

Dans la suite de l'article, Cantor note B l'ensemble des grandeurs numériques b et il étend à B, c'est-à-dire à $\mathbb{R}$, les opérations élémentaires définies dans A. Ainsi, un réel est défini comme une classe d'équivalence de suites de Cauchy.

En résumé, la construction de Cantor suit les étapes suivantes. En premier lieu, il définit une relation d'équivalence pour les suites de Cauchy de nombres rationnels. $\mathbb{R}$ est alors défini comme l'ensemble de ces classes d'équivalence. En particulier, $\mathbb{R}$ contient l'ensemble des classes des suites constantes ($u_n = a \in \mathbb{Q}$). Les opérations de $\mathbb{Q}$ sont prolongées à $\mathbb{R}$ (càd $+, -, ., /$ par un réel non nul). Cantor montre alors que si on applique ce procédé de construction à $\mathbb{R}$ lui même, on ne l'étend pas. En d'autres mots, $\mathbb{R}$ est complet.

[6]Deux suites de rationnels sont donc équivalentes si les différences termes à termes de ces deux suites constituent une suite qui tend vers 0.

À partir de l'ensemble B construit, Cantor poursuit en introduisant un nouvel ensemble C constitué des suites de Cauchy de A et de B qui sont équivalentes. Il va alors itérer ce processus pour construire des ensembles, D, E... Après λ opérations, on obtient un ensemble L et un élément quelconque de L est « une grandeur numérique, une valeur, ou une limite, de λ^e espèce » (ibid., p. 340). Cantor est conscient que les ensembles C, D,... ainsi construits n'apportent pas d'information supplémentaire quant à la complétude de $\mathbb{R}$ puisqu'il écrit que les ensembles B et C peuvent « dans une certaine mesure être regardés comme identiques » (ibid., p. 340). Cependant, il a déjà comme projet l'élaboration de sa théorie des nombres transfinis et il explique qu'il est essentiel de distinguer ces ensembles.

Dans la suite du mémoire, Cantor étudie le lien entre les nombres réels et la géométrie de la ligne. C'est à partir d'ici que vont apparaître des notions topologiques dans $\mathbb{R}$.

En supposant qu'on dispose d'une unité de mesure, un point de la droite est repéré par sa distance à l'origine O. Si cette distance, notée b, est un nombre rationnel, elle est caractérisée par un nombre de l'ensemble A. Si non, d'après ce qui a été dit au point précédent, il existe une suite de rationnels ayant pour limite b. Cantor « considère un point de la droite comme déterminé, quand sa distance de O, précédée du signe convenable, est donnée comme grandeur numérique, valeur ou limite de λ^e espèce » (ibid., p. 342). Il y a donc une correspondance 1–1 entre les nombres réels et les points de la droite.

Cantor s'intéresse alors aux sous-ensembles de la droite réelle, c'est-à-dire à un nombre donné, fini ou infini, de points de la droite. Cantor parle de systèmes pour désigner ces sous-ensembles. Cantor considère un système de points dans un intervalle fini, se plaçant ainsi dans le contexte d'un ensemble borné, et il explique qu'il y a lieu d'envisager un second système de points déduit du premier puis un troisième système de points déduit du second, etc. Il introduit alors les notions de voisinage, de point limite et de point isolé pour pouvoir étudier ces nouveaux systèmes. Les définitions ci-dessous sont reprises de l'article de Cantor (ibid., p. 343) :

- Un voisinage d'un point est un intervalle dans lequel ce point est contenu.
- Un point limite d'un système de points P est un point de la droite tel que dans son voisinage, il y ait un nombre infini de points du système P ; il peut d'ailleurs se faire que le point limite appartienne au système (dans le langage actuel, un tel point est appelé point d'accumulation).
- Un point isolé d'un système de points P est un point qui, appartenant à P, n'est pas en même temps point limite de P.

Cantor remarque que lorsqu'un système de points P comprend un nombre infini de points, alors il existe toujours un point limite de P.

Cantor appelle ensuite *le premier système dérivé de* P l'ensemble des points d'accumulation de P. Cantor va poursuivre le processus : si l'ensemble P' contient un nombre infini de points, alors on peut construire l'ensemble des points d'accumulation de P', appelé le *second système dérivé de* P. En itérant ce procédé de construction, on en arrive à considérer l'ensemble P^ν qui est le ν^e *système dérivé de P*.

Cantor donne deux exemples. Il regarde tout d'abord les ensembles dérivés de l'ensemble P constitué des points de la droite à coordonnée rationnelle. On a $P' = [0,1] = P'' = ...$ L'exemple suivant est celui de l'ensemble $P = \{1/n : n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$ pour lequel $P' = \{0\}$ et Cantor explique que cet ensemble « ne donnera naissance lui-même, par déduction, à aucun autre ».

Cantor termine son étude des systèmes dérivés en expliquant qu'après un nombre ν fini d'étapes, il peut arriver que le ν^e ensemble dérivé de P contienne un nombre fini de points. C'est le cas du second exemple mentionné ci-dessus où on a $P' = \{0\}$. Pour un tel ensemble P^ν, on aura $P^{\nu+1} = \varnothing$ et on dit que P est un ensemble de ν^e espèce.

Ce sont ces ensembles qui vont permettre à Cantor de généraliser le théorème cité au début de l'article : si on a $f(x) = 0$ pour tout $x \in]0,2\pi[$ sauf aux points d'un ensemble de ν^e espèce, on a alors $a_n = b_n = 0$.

4.5 Ensembles ouverts, ensembles fermés

Bien que la notion de point intérieur ait été définie par Cantor, la notion d'ensemble ouvert n'apparaît pas dans ses travaux. Elle n'apparaît pas non plus chez Borel lorsqu'il énonce la première version du théorème de Heine-Borel-Lebesgue. Cela peut paraître surprenant car la notion de point intérieur et celle de recouvrement sont des contextes propices à l'émergence de la notion. Nous avons de plus rencontré la notion d'ouvert chez Weierstrass en un sens différent que celui que nous connaissons aujourd'hui. La question se pose donc de savoir quelles ont été les premières réelles motivations pour introduire les ouverts. Nous n'y avons pas trouvé de réponse dans les travaux étudiés dans cette synthèse.

La notion d'ensemble ouvert apparaît dans la thèse de Baire (1899) dans laquelle il étudie les fonctions réelles semi-continues. Il définit tout d'abord ce que sont une sphère fermée S et une sphère ouverte S' centrée au même point. Il poursuit en énonçant que pour chaque point de S', il y a une sphère centrée en ce point dont tous les points appartiennent à S'. Il appelle *domaine ouvert à n dimensions* tout ensemble possédant cette propriété. Il utilise alors cette notion pour démontrer le résultat suivant, que nous énonçons dans le langage actuel : toute famille $(f_i)_{i\in I}$ de fonctions semi-continues inférieurement sur un ouvert non vide U de $\mathbb{R}^N$, dont la borne supérieure $\sup f_i(x)$ est finie en chaque point x de U, est uniformément bornée sur un ouvert non vide V de U.

Le nom même d'ensemble ouvert est prononcé par Lebesgue dans sa thèse de 1902. Nous sommes dans le contexte de l'introduction de la mesure de Lebesgue et de l'intégrale de Lebesgue. Après avoir défini la notion de point intérieur et celle de frontière d'un ensemble [7], Lebesgue définit celle d'ensemble ouvert comme un

[7] Les définitions données par Lebesgue sont semblables à celles énoncées par Jordan dans son traité de 1893. Nous consacrons la section 6.1 à l'étude de ce traité dans laquelle nous présentons, en particulier, ces définitions.

ensemble ne contenant aucun point de sa frontière. Il ajoute que chaque point d'un ensemble ouvert est un point intérieur et que le complémentaire d'un ensemble ouvert est un ensemble fermé. Il montre aussi qu'un ensemble ouvert est un ensemble de Borel. Il étend également ces notions à n dimensions mais il ne généralise pourtant pas le théorème de recouvrement d'un intervalle. Cette généralisation apparaît dans les travaux de Riesz.

Concernant les ensembles fermés, l'histoire retracée par Moore (2008) montre qu'un certain nombre de résultats éronnés sont énoncés vers la fin du 19ᵉ siècle. Par exemple, Hurwitz (1898) énonce le résultat suivant : si P et Q sont deux ensembles fermés et $f : P \to Q$ est une fonction bijective et continue, alors l'inverse de f est aussi continue. En d'autres mots, f est un homéomorphisme. Jordan (1893) avait prouvé ce théorème lorsque P est fermé et borné. Le résultat est faux si on omet cette deuxième hypothèse. En pensant que tout ensemble constitué d'une infinité de points possède nécessairement un point limite, Schoenflies (1900) énonce que l'image d'un ensemble parfait par une fonction bijective et continue est un ensemble parfait. Il énonce un résultat analogue pour les ensembles fermés et un autre concernant une intersection de sous-ensembles emboîtés dans un ensemble fermé, intersection qui est selon lui toujours non vide.

5 La volonté de généraliser les notions antérieures

5.1 Travaux précurseurs

L'idée de considérer des ensembles d'objets autres que des points est déjà présente au 18ᵉ siècle. En calcul des variations, on regarde des ensembles de courbes et de surfaces et en géométrie projective, on regarde des ensembles de droites, de plans ou de courbes algébriques. Dans son étude du « Principe de Dirichlet », Riemann conçoit que des familles infinies de courbes ou de surfaces pourraient elles aussi être considérées comme des multiplicités de dimension infinie. D'où l'idée d'étendre des notions de topologie à des ensembles d'objets qui ne sont plus des parties de $\mathbb{R}^N$. Cette volonté de travailler dans des espaces plus généraux, et donc plus abstraits, va être prolongée par les analystes de la fin du 19ᵉ siècle.

La théorie des fonctionnelles que Lévy (1886-1971) baptise *Analyse fonctionnelle* est présentée comme « une élaboration théorique abstraite des problèmes rencontrés dans le calcul des variations » (Chevallard, 1991, p. 128). C'est Volterra qui en est l'initiateur lorsqu'il développe en 1887 une théorie des fonctionnelles, aussi appelée théorie des fonctions de lignes. Les lignes sont toutes les fonctions à valeurs réelles définies sur un intervalle $[a,b]$. Ces fonctions sont considérées comme les éléments d'un ensemble dans lequel on peut définir les notions de voisinage et de limite d'une suite. Volterra définit la continuité et la dérivabilité des fonctions de lignes et il essaie de construire une théorie de ces fonctions par analogie à la théorie des fonctions de variable complexe de Riemann. Volterra utilise le mot « fonctionnelle » pour désigner une application d'un ensemble de fonctions dans $\mathbb{R}$.

En 1903, Hadamard décrit les fonctionnelles $f \to F(f)$ linéaires dans l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$, noté $\mathscr{C}(0,1)$, qui possèdent la propriété suivante : $F(f_n) \to F(f)$ quand $f_n \to f$ uniformément dans $[0,1]$. On doit à Riesz la forme définitive de cette description en 1909.

La portée des travaux précédents est cependant limitée par l'absence d'une recherche de systématisation. Les problèmes sont abordés au cas par cas et dans chaque cas, on tente de définir les notions spécifiques qui permettraient d'étendre les notions définies dans $\mathbb{R}$. Le pas décisif vers la topologie générale sera franchi par Fréchet. C'est l'objet du point suivant.

5.2 Les espaces abstraits

Fréchet réussit en effet à systématiser un certain de nombres de notions. À la base, il a pour projet de passer des « ensembles ponctuels » à ce qu'il nomme des « ensembles abstraits ». Son problème est que, quand on quitte $\mathbb{R}$, on perd la notion d'intervalle. C'est en travaillant à partir de cette dernière notion que Fréchet introduit la notion d'ensemble compact, dont nous donnons la définition un peu plus loin. Dans ses travaux, Fréchet explique aussi qu'il n'est pas toujours nécessaire de généraliser les notions et que les résultats et les démonstrations sont parfois plus faciles lorsqu'on procède au cas par cas, comme par exemple en théorie des groupes où « chaque catégorie d'éléments donnait lieu à un mode de composition parfaitement défini, mais dont la définition variait d'une catégorie à l'autre » (repris dans Chevallard, 1991, p. 131). Il ajoute, un peu plus loin : « dans la théorie des groupes abstraits, le mode de composition est supposé défini à l'avance dans chaque cas particulier ; mais on ignore volontairement cette définition pour ne retenir que certaines conditions générales qu'elle remplit mais qui ne la déterminent pas. En procédant ainsi, il arrive que certaines démonstrations sont rendues plus difficiles puisqu'on se prive d'une représentation plus concrète. Mais ce que l'on perd ainsi, on le regagne largement en se dispensant de répéter plusieurs fois sous des formes différentes les mêmes raisonnements. On y gagne souvent aussi d'apercevoir plus nettement ce qui dans les démonstrations était véritablement essentiel et de les simplifier ainsi en les débarrassant de ce qui ne tenait qu'à la nature propre des éléments considérés » (ibid., p. 132).

Deux éléments sont donc prédominants dans les travaux de Fréchet. D'une part, il va chercher à donner un sens aux notions de topologie introduites dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^N$, notamment par Cantor, en travaillant dans des ensembles d'objets dont la nature n'est pas précisée. D'autre part, son intérêt pour la théorie des groupes lui permet de se rendre compte du type de travail à réaliser pour concrétiser ce processus d'axiomatisation et de généralisation à des ensembles « abstraits ».

Un des premiers objectifs poursuivi par Fréchet est d'étendre le théorème de Bolzano-Weierstrass. Pour décrire le cheminement suivi par Fréchet, nous nous appuyons sur l'article de Pier (1980) retraçant l'historique de la notion de compacité.

Dans une communication datant de 1904 présentée à l'Académie des Sciences à Paris, Fréchet introduit de nouvelles définitions. Il commence par considérer un ensemble sur lequel on suppose uniquement qu'on a défini une notion de limite de suite devant satisfaire un certain nombre d'axiomes (le procédé de définition n'est cependant pas explicité) : « Nous supposons donnée une certaine catégorie C d'éléments quelconques (nombres, surfaces, etc.) dans laquelle on sache discerner les éléments distincts... Nous supposerons acquise une définition qui donne un sens précis à cette phrase la suite infinie $A_1,\ A_2,...,A_n,...$ d'éléments de C a une limite B. Il nous suffira que cette définition, d'ailleurs quelconque, satisfasse aux deux conditions suivantes : 1) si la suite $A_1,\ A_2,...A_n,...$ a une limite, toute suite $A_{p_1},\ A_{p_2},...$, d'éléments d'indices croissants de la première suite a aussi une limite qui est la même ; 2) si aucun des éléments $A_1,\ A_2,...$ d'une suite quelconque n'est distinct de A, cette suite a une limite qui est A. » (Fréchet, 1904).

Un point limite p d'un ensemble E est défini comme la limite d'une suite d'éléments distincts de E et un ensemble fermé est un ensemble contenant ses éléments limites. Une fonction est dite continue si elle satisfait la propriété suivante : si $A_1,A_2,...$ a pour limite P, alors $f(A_1),\ f(A_2),...$ a pour limite $f(P)$.

Fréchet énonce également une première formulation de la notion de compacité : « Nous appellerons ensemble compact tout ensemble E tel qu'il existe toujours au moins un élément commun à une suite infinie quelconque d'ensembles $E_1,\ E_2,...,E_n,...$ contenus dans E lorsque ceux-ci (possédant au moins un élément chacun) sont fermés et chacun contenu dans le précédent » (Fréchet, 1904).

Il caractérise ensuite plus simplement les ensembles compacts au moyen du théorème suivant : « La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble E soit compact est que tout ensemble E_1 formé d'une infinité d'éléments distincts contenus dans E donne lieu à un élément limite au moins. » (Fréchet, 1904).

Fréchet remarque que les ensembles compacts possèdent des propriétés vérifiées par des ensembles de points de la droite réelle. Par exemple, tout ensemble fini d'éléments distincts est compact ou encore tout ensemble constitué d'un nombre fini d'ensembles compacts est compact. Selon Fréchet, « ce rapprochement s'explique lorsqu'on remarque que, en prenant comme éléments les points d'une droite, par exemple, et en adoptant la définition ordinaire de la limite d'une suite de points, on trouve que tout ensemble limité de points d'une droite est un ensemble compact. Un intervalle (où les extrémités sont comprises) sera un ensemble compact et fermé. » (Fréchet, 1904).

Ces travaux montrent bien que cette notion de compacité définie par Fréchet lui permet de généraliser le théorème de Weierstrass à d'autres ensembles. Fréchet remarque aussi que le théorème précédemment cité s'étend à l'espace ayant une infinité dénombrable de dimensions à condition de choisir convenablement la définition de limite.

En 1906, Fréchet reprend ces idées dans sa thèse intitulée *Sur quelques points* *du calcul fonctionnel*. Il appelle classe $(\mathscr{L})$ un ensemble pour lequel on admet la notion de limite que nous avons présentée plus haut.

Fréchet y définit un ensemble compact comme un sous-ensemble d'une classe $(\mathscr{L})$ n'ayant qu'un nombre fini d'éléments ou pour lequel tout sous-ensemble infini possède un point limite. Cette définition apparaît pour que cette notion de compacité « joue le même rôle dans la théorie des ensembles abstraits que la notion d'ensemble limité dans la théorie des ensembles ponctuels » (Fréchet, 1906, p. 6).

En d'autres termes, un ensemble est compact s'il satisfait le théorème de Bolzano-Weierstrass. Nous voyons très bien ici un processus typique du phénomène de généralisation d'une théorie : un résultat précédemment établi dans $\mathbb{R}^N$ devient une définition dans un espace plus général.

Le système d'axiomes introduit par Fréchet présente toutefois des inconvénients. Par exemple, il ne permet pas de conserver le résultat suivant, établi par Cantor : pour un ensemble donné, l'ensemble dérivé n'est pas nécessairement fermé. Pour y remédier, Fréchet définit une notion de voisinage :

« Considérons une classe (V) d'éléments de nature quelconque, mais tels qu'on sache discerner si deux d'entre eux sont ou non identiques et tels, de plus, qu'à deux quelconques d'entre eux A, B, on puisse faire correspondre un nombre $(A,B) = (B,A) \geqslant 0$ qui jouit des deux propriétés suivantes : 1) La condition nécessaire et suffisante pour que (A,B) soit nul est que A et B soient identiques. 2) Il existe une fonction positive bien déterminée $f(\varepsilon)$ tendant vers zéro avec ε, telle que les inégalités $(A,B) \leqslant \varepsilon, (B,C) \leqslant \varepsilon$ entraînent (A,B) et $(A,C) \leqslant f(\varepsilon)$ quels que soient les éléments A, B, C. Autrement dit, il suffit que (A,B) et (B,C) soient petits pour qu'il en soit de même de (A,C). Nous appellerons voisinage de A et de B le nombre (A,B) » (ibid., p. 18).

Le mot « voisinage » n'est donc pas à rapprocher de son sens actuel mais bien de la notion de distance. Fréchet peut alors parler de sphéroïde (boule) et de suite de Cauchy. Il peut aussi généraliser le théorème de Borel-Lebesgue.

Dans les travaux de Fréchet, le seul objet qui peut être lié au domaine de la géométrie est la notion de distance mais un premier point qui oppose la distance définie par Fréchet de la distance géométrique usuelle est que la distance au sens de Fréchet contient implicitement l'idée qu'on peut la remplacer par une distance équivalente (dit dans le langage actuel), ce qui n'est pas le cas de la distance de la géométrie métrique. D'où la question : qu'est-ce-que la notion de distance au sens de Fréchet emprunte précisément à la géométrie ? On comprend par la suite que cette notion apparaît comme un outil dans le projet de construction de Fréchet quand il fait remarquer que presque toutes les définitions classiques de la limite peuvent se traduire par des propriétés faisant intervenir la notion de distance. Cependant, il n'est pas dit comment cette construction technique et abstraite peut être articulée avec le réel mathématique visé : courbes, surfaces... C'est l'objet de la deuxième partie de la thèse de Fréchet où il dit avoir « appliqué les résultats généraux ainsi obtenus à diverses catégories d'éléments, chacune de nature déterminée » (Fréchet, 1906, p. 34). Une difficulté était alors de montrer que chaque catégorie satisfaisait aux conditions générales qui rendaient les théorèmes de la première partie valides. Or, dit Chevallard (1991), « avant même de vérifier que les conditions de validité des résultats généraux sont satisfaites, il convient de pouvoir simplement énoncer ces conditions, c'est-à-dire qu'il convient d'avoir défini les termes de base de ces énoncés, et d'abord d'avoir défini une distance (écart) » (p. 140).

On peut de plus remarquer que la notion de distance de Fréchet est un outil qu'on peut utiliser car elle comporte un aspect qui est absent de la notion de distance en géométrie : « la distance entre deux objets (deux fonctions, deux courbes, deux surfaces, etc.) apparaît implicitement comme une mesure de leur *ressemblance* » (ibid., p. 140). En d'autres mots, la notion de distance définie par Fréchet traduit l'idée de ressemblance. Plus les objets se ressemblent, plus la distance qui les sépare est petite. Or, en géométrie et en particulier dans le plan, on ne peut pas vraiment dire que deux points « se ressemblent » quand ils sont proches l'un de l'autre.

La notion de distance définie par Fréchet permet de généraliser toutes les notions de topologie introduites dans $\mathbb{R}^N$ à un ensemble E muni d'une distance : limite, continuité, voisinage, fermé, ouvert, point d'accumulation, compacité, connexité... Cependant, certaines propriétés établies dans $\mathbb{R}^N$ ne sont pas conservées. Nous pensons notamment au critère de Cauchy pour les suites et le fait qu'un ensemble fermé et borné soit compact. Cela amène Fréchet à identifier deux types d'ensembles : les espaces métriques complets dans lesquels le critère de Cauchy est vérifié et les espaces localement compacts dans lesquels tout point possède un voisinage compact. Fréchet s'aperçoit aussi que certaines notions de convergence pour les suites de fonctions ne peuvent pas se définir à partir d'une distance. Un autre pas vers la généralisation doit encore être franchi.

5.3 La notion d'espace topologique

En 1912, Hausdorff est professeur à l'université de Bonn ; il donne un cours sur la théorie des ensembles. Le chapitre 6 de ses notes de cours traite des ensembles de points et s'intitule « Voisinages » (« Umgebungen »). Hausdorff y définit les points de $\mathbb{R}^N$, la distance euclidienne et la notion de voisinage. Nous nous appuyons sur la retranscription du manuscrit de Hausdorff présentée par Koetsier et Mill (James, 1999) pour montrer comment Hausdorff introduit ces notions.

Il commence par expliquer qu'un point peut se situer sur une ligne droite, dans le plan, dans l'espace ou de manière générale dans un espace à n dimensions qu'il note $r = r_n$. Un point est défini comme un système de n nombres réels $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Hausdorff définit ensuite la distance euclidienne entre deux points par

$$x.y = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} \geqslant 0$$

Ce qu'il définit alors comme le voisinage d'un point x est en fait, dans le langage actuel, une boule ouverte de centre x : il écrit en effet qu'un voisinage U_x d'un point x est l'ensemble des points y tels que $x.y < \rho$, pour un certain $\rho > 0$.

Hausdorff explique que les voisinages possèdent les quatre propriétés suivantes :

- □ chaque voisinage de x contient x et est contenu dans l'espace r ;
- □ deux voisinages de x, notés U_x et U'_x sont tels que $U_x \subseteq U'_x$ ou bien $U'_x \subseteq U_x$;
- □ si y appartient à U_x, alors il existe un voisinage de y, noté U_y, qui est contenu dans U_x ;
- □ si x et y sont deux points distincts, alors on peut trouver deux voisinages U_x et U_y qui sont disjoints.

Dans un espace topologique général, on fait de cette dernière propriété un axiome et l'espace qui le vérifie a alors une topologie dite « séparée ».

Au chapitre 7, Hausdorff pose la question de définir une théorie des ensembles plus générale. Son but est de définir une notion générale d'espace qui englobe $\mathbb{R}^N$, les surfaces de Riemann, les espaces de dimension infinie et les espaces où les éléments sont des courbes ou des fonctions. Il donne deux avantages à définir cette notion : la théorie s'en trouve simplifiée et est libérée du recours à l'intuition.

Hausdorff examine brièvement les différentes approches possibles pour travailler dans un espace général sans considérer les relations entre les éléments. Il dispose des notions de limite, de voisinage et de distance. Les voisinages et les limites de suites peuvent être définis en termes de distance. Les voisinages permettent de définir la notion de limite mais pas nécessairement celle de distance. Et à partir des limites, on ne peut définir ni les voisinages ni les distances. Koetsier et Mill reprennent les propos de Hausdorff : « Thus the distance theory seems to be the most special and the limit theory the most general ; on the other hand, the limit theory creates immediately a relation with the countable (with sequences of elements), which the neighborhood theory avoids » (ibid., p. 215).

En 1914, Hausdorff introduit l'expression « metrische Raum », traduite par Bouligand en « espace distancié » car le nom d'espace métrique ne lui semble pas approprié. Cela tient au fait que dans les travaux de Fréchet, le mot « métrique » ne fait pas référence à l'espace métrique des géomètres et donc à la géométrie. Le risque de confusion provoqué par ce mot tient à ce que « la construction des espaces abstraits, qui vise à systématiser et à généraliser des travaux épars d'analyse fonctionnelle, n'est en rien – aux yeux de son auteur – une *géométrisation* du cadre adapté au développement de cette analyse. Le modèle est ici, comme on l'a souligné, celui de la construction par Cantor de la théorie des ensembles linéaires » (Chevallard, 1991, p. 136).

Hausdorff remarque qu'en supprimant des propriétés de dénombrabilité, on peut encore définir sur un ensemble quelconque les mêmes notions topologiques que dans un espace métrique sans recourir à l'usage d'une distance. Il appelle ce type de structure « topologie ». Cette structure est définie par un système d'axiomes imposés à des sous-ensembles appelés « ouverts » ou par un système équivalent imposé à une autre famille d'ensembles appelés « voisinages ». Ces noms sont liés au fait que dans un espace métrique, les ouverts et les voisinages vérifient ces axiomes. Une grande partie des résultats établis dans les espaces métriques demeurent valables ou partiellement dans un espace topologique.

Après avoir donné les axiomes qui définissent un espace topologique, Hausdorff définit la notion de point intérieur d'un sous-ensemble A : x est intérieur à A si on peut trouver un voisinage de x est un sous-ensemble de A. Un ensemble est ouvert si tous ses points sont des points intérieurs. Hausdorff montre que toute réunion d'ouverts est un ouvert et que toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Après avoir défini les ouverts en termes de voisinages, il définit les notions de point d'accumulation et de fermé. Un point p est un point d'accumulation de B si chaque voisinage de p contient une infinité d'éléments de B (définition qui concorde avec la définition de point limite de Cantor). Un ensemble est fermé s'il contient tous ses points d'accumulation. Hausdorff démontre qu'une intersection de fermés est un fermé et qu'une union finie de fermés est un fermé.

6 Les traités

Nous avons vu que les efforts de rigueur des années 1860 et avec eux la construction rigoureuse de $\mathbb{R}$, donnent une impulsion nouvelle aux mathématiciens qui s'attachent à fonder l'analyse sur des bases solides. En particulier, les questions que se posent les mathématiciens sur les fondements de l'analyse et sur la structure de la droite réelle font émerger les premières notions de topologie. Ces notions apparaissent de façon dispersée. D'où l'idée de nous pencher sur quelques traités de cette époque de façon à étudier comment y sont développées les notions de topologie.

Notre choix s'est porté sur les traités de Jordan parus en 1882 et en 1893, sur un article de Baire, rédigé dans l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* (1904), sur le livre de topologie générale de Bourbaki (1965) et sur un traité de topologie écrit par Kuratowski (1933).

6.1 Les traités de Jordan

Plusieurs dates sont importantes dans l'histoire du Cours d'Analyse de Jordan.

En 1882 paraît le premier tome du *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*. Il s'intitule *Calcul différentiel*. Le deuxième tome porte sur le *Calcul Intégral* ; il paraît en 1883. En 1887 paraît le troisième tome *Intégration des équations différentielles et Éléments de calcul des variations*.

La deuxième édition paraît en 1893 et contient des modifications majeures par rapport à l'édition précédente. En particulier, la place accordée aux notions qui constituent les fondements de l'analyse est beaucoup plus importante. Jordan parvient à globaliser et à synthétiser les résultats sur les fondements établis à l'époque et des notions de topologie sont, par conséquent, exposées dans le traité.

Une troisième édition paraît, en 1909, n'apportant que des corrections et modifications mineures à la deuxième édition.

Nous nous sommes concentrée sur les deux premières éditions (1882 et 1893) du *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique, Tome premier*.

Gispert (1982) a réalisé une étude comparative de ces deux ouvrages dans laquelle elle s'attache à comparer entre les deux éditions la place occupée par les notions qui constituent les fondements de l'analyse. Nous nous appuyons sur ce travail et sur notre propre lecture des traités pour décrire la manière avec laquelle sont exposées un certain nombre de notions de topologie.

▶▶ Le tome I de 1882

La première édition du cours de Jordan paraît en 1882 avec le premier tome, *Calcul différentiel*. Le second tome, *Calcul intégral*, est publié en 1883.

Concernant le contenu de ces deux tomes, Gispert explique que « Jordan présente de façon claire et exhaustive les derniers développements de l'analyse classique à cette époque, mais ignore complètement les travaux de la dernière décennie sur les fondements » (ibid., p. 35). En particulier, aucune notion de topologie n'est introduite dans cette première édition. Une autre caractéristique importante est la part très faible accordée à la notion de continuité d'une fonction. En effet, il n'y avait pas lieu de traiter de la continuité avant les travaux sur les fondements puisque d'une part toutes les fonctions considérées étaient continues et d'autre part, ces fonctions étaient définies sur des compacts et avaient donc de « bonnes propriétés ». Comme le précise Gispert dans son analyse de la table des matières de cette première édition (ibid., p. 38), « on ne trouve

- □ ni la définition de la limite bien qu'elle soit évidemment utilisée ;
- □ ni la construction des réels ;
- □ aucun énoncé sur les ensembles ou les notions premières de topologie (ouvert, voisinage, etc) ;
- □ aucune des propriétés des fonctions continues qui soient démontrées. Elles ne sont parfois mentionnées qu'au détour d'une démonstration, comme le théorème des valeurs intermédiaires. »

Cette première édition ne nous renseigne donc pas sur les notions que nous visons. C'est pourquoi nous n'allons pas plus loin dans la description que nous en faisons.

▶▶ Le tome I de 1893

Même si le titre du traité est resté identique à la version précédente, il s'agit d'un ouvrage d'un type complètement nouveau, faisant apparaître un exposé globalisé et une synthèse des résultats sur les fondements de l'analyse établis à cette époque et cette caractéristique s'applique aussi aux notions de topologie. Gispert confirme ce point de vue : « S'il s'agit de la naissance de la topologie générale, de la théorie des fonctions à leurs tout débuts, personne ne voyait encore ni leur globalité, ni leur cohérence, ni leur utilité ; là sera le mérite de Jordan avec la deuxième édition du traité qui en présentera un exposé unique » (p. 24).

Jordan réécrit entièrement le début du traité et remanie le plan, même si la division entre le calcul différentiel et intégral est conservée. Le chapitre I est consacré à la notion de limite. Alors que les infiniments petits faisaient l'objet de l'introduction dans le traité de 1882, ils sont ici incorporés dans le premier chapitre en occupant une place plus réduite. Le chapitre II porte sur les *Ensembles*. Jordan y présente notamment les notions qui ont été introduites par Cantor. Les chapitres suivants sont consacrés aux fonctions (intégrales, continuité, fonctions bornées, etc.).

La partie qui traite des ensembles nous intéresse à double titre. D'une part, c'est celle qui est à l'origine de la transformation majeure de la première édition. D'autre part, Jordan y réunit toutes les propriétés qui lui serviront dans les chapitres suivants, ce qui l'amène à présenter des notions de topologie.

Nous décrivons ci-dessous le contenu du chapitre. En particulier, il nous semble intéressant de retranscrire les définitions et les propriétés pour mener notre analyse de cette partie du traité.

Jordan commence par caractériser un point par « un système de valeurs simultanées $a,b,...$ donné à des variables $x,y,...$ ».

Il introduit ensuite une métrique qui est différente de la distance donnée par le théorème de Pythagore : il définit la notion d'écart entre deux points $p=(a,b,...)$ et $p'=(a',b',...)$ par « l'expression $pp'=|a'-a|+|b'-b|+...$ ». Dans le langage actuel, il s'agit de la taxi-distance.

La limite p d'une suite de points p_n est alors définie avec la notion d'écart.

Un ensemble désigne « toute collection de points, en nombre fini ou infini. »

Jordan donne alors les premières définitions de notions topologiques en commençant par la notion de point limite. Il appelle point limite d'un ensemble E « tout point qui est la limite d'une suite de points de E. Le système de ces points limites forment un nouvel ensemble E', qu'on appelle le *dérivé* de E. » Il donne comme exemples l'ensemble des nombres entiers, qui n'a pas de point limite, et l'ensemble des nombres $1/2, 1/4, 1/8, ...$ qui a 0 comme point limite. L'ensemble des nombres rationnels compris strictement entre a et b a pour dérivé l'ensemble des nombres réels compris (largement) entre a et b. Jordan mentionne que ces exemples illustrent qu'une ensemble e peut contenir des points n'appartenant pas à son dérivé et réciproquement.

Il définit ensuite la notion de point isolé : « Si un point $p=(a,b,...)$ appartient à E sans appartenir à E', on pourra, par définition, trouver une quantité ε telle que tout autre point de E soit écarté de p de plus de ε. On dit dans ce cas que p est un *point isolé* dans E. »

Jordan nomme alors ensemble parfait « tout ensemble qui contient son dérivé » et montre que l'ensemble dérivé d'un autre ensemble est nécessairement parfait. Ainsi, ce que Jordan appelle « ensemble parfait » est ce que nous nommons actuellement « ensemble fermé ».

Pour un ensemble E, Jordan considère son complémentaire, noté E_1, et son dérivé, noté E'. Jordan classe alors tous les points de l'espace en trois catégories.

① Les points intérieurs à E : ce sont « ceux qui appartiennent à E sans appartenir à E'. » Jordan fournit une caractérisation de ce type de points : « Pour chacun d'eux p on pourra assigner une quantité ε telle, que tout point dont l'écart à p est $< \varepsilon$ n'appartient pas à E_1, et par suite appartient à E. »

② Les points « qui appartiennent à E_1, sans appartenir à E'. Ces points seront extérieurs à E et intérieurs à E_1. »

③ Les points frontières : ce sont « ceux qui appartiennent en même temps à l'un des ensembles E, E_1 et au dérivé de l'autre. Ces points constituent la frontière commune des deux ensembles E, E_1. »

Remarquons que la caractérisation des points intérieurs signifie que la boule ouverte de centre p et de rayon ε est incluse dans E. L'ensemble des points intérieurs est donc ouvert. Jordan ne prononce ni le mot ouvert, ni le mot voisinage car sa volonté est d'éviter d'introduire une surcharge de vocabulaire dont il peut se passer puisque travaillant dans $\mathbb{R}^N$. Il utilise la caractérisation des boules ouvertes comme système de voisinages.

Jordan prouve qu'il existe toujours des points frontières et il établit que la frontière est un ensemble parfait. Il utilise ensuite l'existence de points frontières pour caractériser, dans $\mathbb{R}$, la borne supérieure d'un ensemble borné. Il définit, de plus, la notion de maximum d'un ensemble E.

Le théorème de Bolzano-Weierstrass est alors énoncé pour un ensemble quelconque mais Jordan le démontre dans $\mathbb{R}^2$: « Tout ensemble borné qui contient une infinité de points admet au moins un point limite ». La démonstration de Jordan s'appuie sur la construction d'une suite d'ensembles emboîtés E_n contenant une infinité de points tels que l'écart entre deux points est de la forme $1/n^2$. Considérant un point p_n dans chaque ensemble E_n, Jordan en conclut que la suite (p_n) tend vers un point limite π. Il ne mentionne par contre pas qu'il s'agit d'une suite de Cauchy et qu'elle est par conséquent convergente.

Jordan définit ensuite la notion de connexité, même si ce n'est pas le vocabulaire qu'il utilise. Pour cela, il commence par considérer deux ensembles, notés E et E', formés par des points de même nature. « Les écarts des divers points p de E aux points p' de E' forment un ensemble de nombres non négatifs. Il est donc borné inférieurement, et admet un minimum Δ, positif ou nul, que nous appellerons l'*écart* des ensembles $E,\ E'$. Si cet écart est > 0, nous dirons que les ensembles $E,\ E'$ sont *séparés*. »

Il appelle alors ensemble d'un seul tenant un ensemble borné et parfait qui ne peut être décomposé en plusieurs ensembles parfaits séparés. Cela correspond bien à la définition actuelle de connexité puisque ce que Jordan appelle ensemble parfait est en fait, dans le langage moderne, un ensemble fermé.

Pour terminer ce passage sur la connexité, Jordan démontre un énoncé équivalent au fait que tout connexe de $\mathbb{R}$ est un intervalle : « Un ensemble E, d'un seul tenant et d'une seule dimension, qui contient deux nombres donnés a et b, contient tout nombre intermédiaire entre a et b. » Il conclut que « Si l'ensemble parfait E est borné, il admettra un maximum M et un minimum m ; étant parfait, il les atteindra. Il est donc formé par le système de tous les nombres réels qui sont $<= M$ et $>= M'$ ».

Nous remarquons que Jordan ne définit pas la totalité des notions introduites par Cantor. Par exemple, il ne définit pas la notion de voisinage, ni celle d'ouvert.

6.2 L'article de Baire

L'article dont il est question ici est issu de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, 1904. L'article s'intitule *Théorie des Ensembles*. Dans la première partie, Baire dresse un historique des notions ensemblistes introduites par Cantor. Il signale d'ailleurs explicitement qu'il s'appuie sur les travaux de ce mathématicien. Les paragraphes développés dans cette partie portent sur la notion d'ensemble, sur la notion de dénombrabilité et de continu, et sur les nombres transfinis.

La deuxième partie de l'article est consacrée aux ensembles transfinis. Baire revient sur les notions de puissance d'un ensemble, d'ensemble fini, d'ensemble transfini et sur les opérations que l'on peut effectuer sur ces ensembles. La notion de dénombrabilité est ensuite étudiée. Dans cette partie, un paragraphe est consacré aux séries fondamentales contenues dans un ensemble M ordonné qui sont, dans le langage actuel, les suites d'éléments de M : « une série fondamentale ascendante est de la forme $\{a_\mu\}$, où $a_\mu < a_{\mu+1}$, μ prenant toutes les valeurs entières positives. » Baire définit, dans ce cadre, des notions analogues à celles introduites par Cantor pour définir l'ensemble des réels à partir de la notion de limite d'une suite de rationnels. Baire explique à ce propos que cette théorie générale « permet de mettre en évidence les propriétés fondamentales du continu linéaire et de les exprimer d'une manière purement formelle, en les dégageant de toute intuition géométrique. » (p. 503).

À partir de la notion d'élément limite d'une suite de M, Baire introduit les notions d'ensemble dense en soi, d'ensemble fermé et d'ensemble parfait. Voici leurs définitions, telles qu'énoncées par Baire (p. 502) : « Un ensemble ordonné dont tous les éléments sont des éléments principaux (c'est-à-dire dont chacun peut être considéré comme l'élément-limite d'une série fondamentale contenue dans l'ensemble) est dit *dense en soi*. Un ensemble ordonné tel que toute série fondamentale qui y est contenue possède dans l'ensemble un élément-limite, est dit *fermé*. Un ensemble à la fois fermé et dense en soi est dit *parfait*. »

La troisième partie de l'article nous intéresse au plus haut point. Elle s'intitule *Théorie des ensembles de points*. Le premier paragraphe porte sur les ensembles de points situés sur une droite. Les définitions données par Baire sont les suivantes :

« Étant donné un ensemble P de points, situé sur une droite, on dit que M est un *point limite* de l'ensemble P si tout segment de droite contenant M à son intérieur contient un point de P autre que M. Cette définition équivaut à la suivante :

M est point limite si tout segment contenant M à son intérieur contient une infinité de points de P.

L'ensemble des points limites d'un ensemble P est appelé ensemble dérivé de p ou *dérivé d'ordre un* de P : nous le noterons P^1.

Un ensemble de points est dit *fermé* s'il contient tous ses points limites, autrement dit s'il contient son dérivé. »

Baire regarde les exemples suivants, que nous avons écrit avec les notations actuelles. Il considére d'abord les ensembles $P = \{1/2, 1/4, ..., 1/2^n\}$ et $Q = P \cup \{0\}$. P n'est pas fermé, Q est fermé. Puis Baire considère un ensemble P réparti sur un segment borné HK et contenant une infinité de points. P a au moins un point limite.

Après avoir défini les ensembles dérivés d'un ordre quelconque, Baire introduit d'autres notions topologiques. Nous le citons à nouveau :

« Tout point d'un ensemble P qui n'appartient pas au dérivé de P est dit *isolé* : on peut entourer ce point d'un intervalle qui ne contient aucun point de P autre que le point donné.

Un ensemble est dit *dense en lui-même* si chacun de ses points est limite pour l'ensemble, autrement dit s'il ne contient aucun point isolé.

Un ensemble est dit *parfait* s'il coïncide avec son dérivé ; pour qu'un ensemble soit parfait, il faut et il suffit qu'il soit à la fois fermé et dense en lui-même. »

Les paragraphes suivants portent respectivement sur la densité des ensembles, des résultats généraux puis sur les ensembles de première catégorie.

Baire développe ensuite un paragraphe sur les *Ensembles de points de l'espace à n dimensions* (p. 521). Il commence par expliquer que la plupart des résultats établis pour les ensembles linéaires s'étendent aux ensembles de points de l'espace à n dimensions. Voici comment Baire les énonce :

« Un point A est dit *point limite* pour l'ensemble de points P si toute sphère à n dimensions de centre A contient au moins un point de P distinct de A ou, ce qui revient au même, contient une infinité de points de P. Étant donné un ensemble P, l'ensemble P^1 des points limites de P est appelé *l'ensemble dérivé* de P.

Un ensemble est dit *fermé* s'il contient tous ses points limites.

Un ensemble est dit *dense en lui-même* si chacun de ses points est limite pour l'ensemble. Un ensemble est *parfait* s'il coïncide avec son dérivé, c'est-à-dire s'il est fermé et dense en lui-même. »

Il énonce les exemples suivants qui portent, dans le langage actuel, sur la structure topologique d'une boule (ouverte ou fermée) et sur le produit cartésien de deux ensembles : « dans l'espace plan G_2, on constate que l'ensemble des points situés à l'intérieur et sur le contour d'un cercle est parfait. L'ensemble des points intérieurs au cercle n'est pas parfait, parce qu'il n'est pas fermé, mais il est dense en lui-même. Dans l'espace plan G_2, rapporté à deux axes Ox, Oy prenons sur O_x un ensemble parfait non dense H, sur Oy un ensemble parfait non dense K. Par les points de H, menons des parallèles à Oy ; par les points de K, menons des parallèles à O_x. L'ensemble des points de rencontre des droites ainsi menées est parfait » (p. 521).

Les propriétés suivantes sont citées.

« L'ensemble commun à des ensembles fermés (en nombre fini ou infini), s'il existe, est fermé.

Un ensemble borné contenant une infinité de points a au moins un point limite. »

Baire étudie ensuite la mesure des ensembles qui, comme il le précise, permet d'étendre les notions géométriques de longueur, d'aire et de volume.

L'article se termine par des *Compléments*. En présentant des résultats de Hausdorff sur la notion d'exponentiation, Baire fait remarquer que certaines notions définies dans cet article pour des ensembles de points s'appliquent à des ensembles plus généraux. Ces définitions ont été données par Hausdorff pour les notions d'ensemble fermé, parfait, dense en lui-même et partout dense. Baire cite ensuite les travaux de Fréchet qui « s'est préoccupé d'établir des résultats concernant les ensembles dans lesquels on ne spécifie pas la nature des éléments. On donne à ces ensembles le nom d'*ensembles* abstraits » (p. 529). Baire explique les origines du projet de Fréchet. En remarquant que la majorité des résultats établis dans la théorie des ensembles reposent sur la notion de limite et que celle-ci dépend de la nature des ensembles considérés, Fréchet montre que les propriétés essentielles de cette notion peuvent s'énoncer d'une manière qui ne tient plus compte de la nature des éléments. Il étend des résultats précédemment établis à des ensembles quelconque mais possédant toutefois des propriétés relatives à la notion d'écart, que nous avons présentées dans la paragraphe consacré aux travaux de Fréchet.

Dans cet article, il apparaît que les notions de topologie sont étroitement liées à celles de la théorie des ensembles.

6.3 Bourbaki, les Élements de mathématique

▶▶ Quelques particularités du traité

Les membres du groupe Bourbaki se sont lancés dans la rédaction d'un traité avec comme objectif de fournir un exposé mathématique « moderne ». Le traité s'adresse principalement aux futurs mathématiciens, il n'a pas de préoccupations liées à l'enseignement des mathématiques. Plus précisément, cette objectif devait, selon les membres du groupe, passer par une réorganisation des thèmes à enseigner mais aussi par une clarification des concepts de base, tout en utilisant une terminologie très précise. Ainsi, pour moderniser la manière dont étaient exposés les contenus mathématiques dans les manuels, les membres du groupe ont décidé de commencer par exposer l'ensemble des notions nécessaires pour traiter les sujets abordés. L'ensemble de ces concepts et outils de base a été baptisé le « paquet abstrait ». Lorsque la rédaction du traité a commencé, il n'a cessé de s'agrandir, devenant à lui seul un traité de mathématique qui compte actuellement plus de 7000 pages. Ainsi, les *Élements de mathématique* constituent un traité dont le premier volume est paru en 1939 et le dernier volume en 1998. Actuellement, le traité se compose de 10 livres, chacun scindé en plusieurs volumes eux-mêmes divisés en chapitres :

- Théorie des ensembles : 4 chapitres et un fascicule de résultats, sans démonstration.
- Algèbre : 10 chapitres.
- Topologie générale : 10 chapitres.
- Fonctions d'une variable réelle : 7 chapitres.
- Espaces vectoriels topologiques : 5 chapitres.
- Intégration : 9 chapitres.
- Algèbre commutative : 10 chapitres.
- Variétés différentielles et analytiques, un fascicule de résultats sans démonstration.
- Groupes et algèbre de Lie : 9 chapitres.
- Théories spectrales : 2 chapitres.

Selon Bourbaki, la théorie des ensembles apparaît comme les fondements des mathématiques. C'est pourquoi elle fait l'objet du premier livre.

Par sa conception même, le traité présente des spécificités qu'il est important de mentionner. Celles-ci sont présentées au début de chaque volume sous la rubrique *Mode d'emploi du traité*.

Le mode d'emploi précise que ce sont d'abord les bases qui sont exposées et que tout est démontré. Mais lorsqu'on lit la phrase suivante, on apprend que la lecture du traité « ne suppose donc, en principe, aucune connaissance mathématique particulière, mais seulement une certaine habitude du raisonnement mathématique et un certain pourvoir d'abstraction. Néanmoins, le traité est destiné plus particulièrement à des lecteurs possédant au moins une bonne connaissance des matières enseignées dans la première ou les deux premières années de l'Université ». Le traité s'adresse donc à un public d'un certain niveau mathématique. Cependant, le traité ne peut pas non plus être considéré comme un livre de recherche puisqu'il n'y a pas nouveauté en termes de contenus. Il s'agit d'une réorganisation et d'une reformulation dans un langage moderne de connaissances déjà existantes.

Concernant le mode d'exposition, le traité utilise une présentation axiomatique et abstraite en allant du général au particulier. « L'armature logique de chaque chapitre est constituée par les *définitions*, les *axiomes* et les *théorèmes* de ce chapitre ». Chaque chapitre contient des exercices pour lesquels l'objectif est double. Il s'agit d'une part d'entraîner le lecteur et d'autre part « de lui faire connaître des résultats qui n'avaient pas leur place dans le texte ». Il y a donc des résultats qui sont intégrés dans les exercices : il s'agit d'applications qui ne s'insèrent pas dans le déroulement strictement logique du texte.

▶▶ Le livre de topologie générale

L'introduction

Le livre traitant de la topologie générale contient deux chapitres en lien direct avec notre travail : une partie du chapitre 1 portant sur les *Structures topologiques* fait émerger les notions que nous visons, même si leur introduction se fait dans un cadre général par rapport à nos objectifs, et le chapitre 4 sur les *Nombres réels* traite explicitement de la topologie de $\mathbb{R}$.

Au début du livre, Bourbaki présente le plan suivi. Il ne s'agit pas d'une simple énumération des notions qui vont apparaître. Le discours tenu est à mi-chemin entre ce que nous qualifierions d'un discours didactique et méta-mathématique. Bourbaki prend la peine d'expliquer ce qui motive l'introduction des notions, à quoi elles vont servir dans un langage tout à fait accessible à un débutant qui serait, aujourd'hui, en première année universitaire.

La topologie y apparaît d'emblée comme le domaine de l'analyse où les structures étudiées « sont celles où l'on donne un sens mathématique aux notions de *limite*, de *continuité* et de *voisinage* ». Ces notions sont liées à celles de *détermination expérimentale* et *d'approximation*, se trouvant elles-mêmes en relation étroite avec la notion de nombre. Mais la portée de ces notions dépasse largement le cadre des nombres réels et complexes.

L'introduction de la notion de voisinage est motivée par le besoin de parler d'éléments suffisamment proches l'un de l'autre, donc par le besoin de parler de la distance entre ces deux éléments. En supposant que cette notion de distance vérifie certaines conditions, « on obtient ainsi une vaste généralisation de la géométrie euclidienne, aussi est-il commode de se servir d'un langage géométrique, d'appeler *points* les éléments de l'ensemble sur lequel a été définie une « distance », cet ensemble prenant lui-même le nom d'*espace* ». Mais cette conception des espaces n'est pas encore débarrassée de la notion de nombre.

C'est en s'intéressant aux propriétés mêmes des voisinages (par exemple le fait que tout sous-ensemble contenant un voisinage d'un point est lui-même un voisinage ou bien le fait que l'intersection de deux voisinages d'un même point soit aussi un voisinage) que sont obtenus des énoncés qui ne font plus appel à la notion de distance.

La notion d'espace topologique apparaît donc comme étant un ensemble muni d'une structure topologique, c'est-à-dire une structure dans laquelle on associe à chaque élément de l'espace une famille de voisinages de cet élément. La topologie est donc « la branche des mathématiques qui étudie les structures topologiques », et dont l'*Analysis situs* est un synomyme.

La notion de voisinage permet de définir les notions d'intérieur, d'adhérence, de frontière, d'ensemble ouvert et d'ensemble fermé. Bourbaki explique que les voisinages définissent les ouverts de l'espace considéré et réciproquement. Dans le traité, le choix réalisé consiste à partir de la notion d'ouvert « pour des raisons de commodité, parce que les axiomes correspondants offrent un caractère de plus grande simplicitié ». Les notions de limite et de continuité peuvent alors être définies.

Le chapitre I

Ces notions font l'objet du chapitre I intitulé *Structures topologiques*. Nous nous centrons sur l'introduction des notions et les définitions qui sont données. Le cadre initial choisi étant celui des espaces topologiques, l'ensemble des notions et résultats présentés dépassent très rapidement le cadre de ce travail.

C'est la notion de structure topologique qui est tout d'abord donnée (p. 13) : « On appelle structure topologique (ou plus brièvement) topologie sur un ensemble X une structure constituée par la donnée d'un ensemble D de parties de X possédant les propriétés suivantes (dites axiomes des structures topologiques) :

- (O_I) Toute réunion d'ensembles de D est un ensemble de D.
- (O_{II}) Toute intersection finie d'ensembles de D est un ensemble de D.

Les ensembles de D sont appelés ensembles ouverts de la structure topologique définie par D sur X. »

On appelle alors voisinage d'une partie A de X tout ensemble qui contient un ensemble ouvert contenant A.

Un ensemble fermé est le complémentaire d'un ouvert.

Un point x est intérieur à une partie A de X lorsque A est un voisinage de x. L'intérieur de A est alors l'ensemble des points intérieurs à A.

Un point x est adhérent à A lorsque tout voisinage de x rencontre A. L'adhérence de A est l'ensemble des points adhérents à A.

Le chapitre 4

Un chapitre est explicitement consacré aux nombres réels. Dans le premier paragraphe *Définition des nombres réels*, une série de propriétés sont établies sur les intervalles de $\mathbb{R}$.

Le résultat suivant est mentionné :« Tout intervalle fermé (resp. ouvert) de $\mathbb{R}$, est un ensemble fermé (resp. ouvert) dans $\mathbb{R}$. » La démonstration, que nous retranscrivons ci-dessous, montre bien la volonté de s'appuyer sur les propriétés des ouverts, qui servent d'axiomes pour définir la notion d'espace topologique :

> En effet, les ensembles $[a,\leftarrow[\, = a+\mathbb{R}_+$ et $]\rightarrow,a] = a-\mathbb{R}_+$ se déduisent par translation de $\mathbb{R}_+$ et $-\mathbb{R}_+$ respectivement, donc (chap. III, paragraphe 1, numéro 1) sont fermés ; les ensembles $]\rightarrow,a[$ et $]a,\leftarrow[$, qui en sont les complémentaires respectifs, sont ouverts ; enfin, l'intervalle fermé $[a,b]$ (resp. l'intervalle ouvert $]a,b[$), intersection de $[a,\leftarrow[$ et $]\rightarrow,b]$ (resp. de $]a,\leftarrow[$ et $]\rightarrow,b[$) est un ensemble fermé (resp. ouvert).

Le paragraphe suivant est explicitement consacré aux *Propriétés topologiques fondamentales de la droite numérique*. La première de ces propriétés est connue sous le nom d'axiome d'Archimède : quels que soient les nombres réels $x>0$ et $y>0$, il existe un entier $n>0$ tel que $y<nx$. Cette propriété est considérée comme un axiome dans le paragraphe consacré à une construction axiomatique de $\mathbb{R}$. Bourbaki annonce aussi que toutes les propriétés qui vont suivre en découlent.

Le paragraphe se poursuit par l'étude des parties compactes de $\mathbb{R}$. On y trouve le théorème de Borel-Lebesgue : pour qu'une partie de la droite numérique $\mathbb{R}$ soit compacte, il faut et il suffit qu'elle soit fermée et bornée.

Le théorème affirmant l'existence de la borne supérieure d'une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ est alors énoncé.

Les intervalles sont caractérisés de la manière suivante : pour qu'une partie non vide A de $\mathbb{R}$ soit un intervalle, il faut et il suffit que, quels que soient les points $a,\ b$ de A tels que $a < b$, l'intervalle $[a,b]$ soit contenu dans A.

L'étude des parties connexes de $\mathbb{R}$ s'intègre également dans les propriétés topologiques : pour qu'une partie A de $\mathbb{R}$ soit connexe, il faut et il suffit que A soit un intervalle. Il s'ensuit que $\mathbb{R}$ est connexe.

Les ouverts de $\mathbb{R}$ sont caractérisés : tout ensemble ouvert non vide de $\mathbb{R}$ est la réunion d'une famille dénombrable d'intervalles ouverts, sans point commun deux à deux.

La notion d'homéomorphisme s'intègre aussi dans ce paragraphe : soit I un intervalle de $\mathbb{R}$; pour qu'une application f de I dans $\mathbb{R}$ soit un homéomorphisme de I sur $f(I)$, il faut et il suffit que f soit strictement monotone et continue dans I ; $f(I)$ est alors un intervalle de $\mathbb{R}$.

6.4 Kuratowski, Traité de Topologie

Nous nous intéressons ici à un traité de topologie écrit par Kuratowski en 1933. Nous analysons le tome III, intitulé *Topologie I, Espaces métrisables, Espaces complets*.

Dans la préface, Kuratowski fait le point sur ce que désigne la topologie à cette époque. Il explique tout d'abord que la topologie « traite des propriétés des ensembles de points *invariantes* par rapport aux transformations bicontinues. » Il précise ensuite ce qu'il entend par « ensembles de points ». L'espace euclidien à n dimensions en est un exemple. Il explique la manière dont la convergence d'une suite y est étudiée, ce qui correspond dans le langage moderne à la convergence composante par composante. Cependant, les développements récents de la topologie et d'autres domaines des mathématiques lui font penser que « cette conception de l'espace est trop étroite. » La plupart des problèmes amènent en effet à considérer l'espace $\varepsilon^{\aleph_0}$ à une infinité de dimensions (nommé aussi espace ε_ω de Fréchet) dont les éléments sont des suites infinies de nombres réels.

Selon Kuratowski, « c'est précisément l'étude des invariants des homéomorphies entre sous-ensembles de l'espace $\varepsilon^{\aleph_0}$ qui constitue le vrai domaine de la topologie à l'état actuel de cette science. »

Dans son traité, il va s'attacher à développer les contenus en s'appuyant sur la méthode axiomatique. L'avantage de cette méthode « tient d'abord à des raisons méthodologiques. En particulier, elle permet de mieux se rendre compte des prémisses qui sont essentielles dans les démonstrations des théorèmes topologiques. Bien que G. Cantor, le fondateur de la Théorie des ensembles, et les autres mathématiciens qui s'occupaient de la Théorie des ensembles de points, ne procédaient pas par la voie axiomatique, on s'est aperçu plus tard (Fréchet) que, dans la majorité des problèmes topologiques, bien peu de propriétés de l'espace intervenaient dans les raisonnements. En admettant ces propriétés comme axiomes, on est parvenu aux espaces abstraits. Tel est en particulier l'espace considéré dans ce livre ; il équivaut topologiquement – comme nous l'avons dit – à un sous-ensemble arbitraire de $\varepsilon^{\aleph_0}$ ou, en d'autres termes, à un espace métrique séparable. »

Après avoir traité, dans une introduction, des opérations de la logique et de la théorie des ensembles, Kuratowski développe un premier chapitre intitulé *Notions fondamentales. Calcul topologique*. Comme annoncé dans la préface, il fonde la topologie sur un système d'axiomes s'appuyant sur la notion de fermeture qui selon lui, caractérise les propriétés géométriques de l'espace. Il se place donc dans le contexte suivant, que nous décrivons avec le vocabulaire utilisé par Kurawtoski :

- □ un ensemble, appelé *espace* ;
- □ une fonction $\overline{X}$, appelée fermeture de X, définie pour chaque sous-ensemble X de l'espace, telle que $\overline{X}$ est contenue dans l'espace ;
- □ les éléments de l'espace sont appelés *points*.

Les trois axiomes suivants sont admis :

① $\overline{X+Y} = \overline{X} + \overline{Y}$;

② Si X ne contient qu'un seul point ou aucun, on a $\overline{X} = X$;

③ $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.

Il donne juste après une interprétation géométrique dans l'espace euclidien à n dimensions pour lequel « $\overline{X}$ est l'ensemble X augmenté de ses points d'accumulation. ». Il démontre que les trois axiomes sont en effet vérifiés dans cet espace.

Des propriétés faisant intervenir la notion de fermeture et les opérations ensemblistes sont alors démontrées.

Les paragraphes suivants traitent des ensembles fermés, ouverts, de la frontière et de l'intérieur d'un ensemble, des ensembles denses.

C'est donc à partir de la notion d'ensemble fermé que les contenus sont développés. Un ensemble est fermé s'il coïncide avec sa fermeture. Un ensemble est ouvert lorsque son complémentaire est fermé. En notant 1 l'espace, la frontière de X est définie par $\mathrm{Fr}X = \overline{X}.\overline{1-X}$, où la notation « . » désigne l'intersection. L'intérieur de X est alors $\mathrm{int}X = 1 - \overline{1-X}$. Un ensemble X est dense si $\overline{X} = 1$.

Chaque notion est illustrée par un exemple dans le cadre de l'espace euclidien. Ces exemples sont énoncés de manière quasi-identique à ce que nous écririons aujourd'hui. Kuratowski cite les intervalles $a \leqslant x \leqslant b$ et $a < x < b$ pour illustrer un ensemble fermé et un ensemble ouvert. Il mentionne que dans le plan, le deuxième ensemble n'est plus ouvert. Si f est une fonction bornée et continue, l'ensemble $\{(x,y) : y = f(x)\}$ est fermé. Il donne également la frontière et l'intérieur du cercle unité, précise que la frontière des nombres rationnels est l'espace des nombres réels. Si l'on considère X un sous-ensemble des réels et la fonction f

définie par $f(x) = 1$ si $x \in X$ et 0 sinon, la frontière de X est l'ensemble des points de discontinuité de f.

Kuratowski étudie les propriétés de ces notions relativement aux opérations ensemblistes d'inclusions, d'intersection et de réunion.

7 Premières conclusions provenant de la réalité historique

Dans ce chapitre, nous avons utilisé la réalité historique dans le but d'éclairer les spécificités des notions de topologie que nous cherchons à enseigner, c'est-à-dire les notions d'intérieur, d'adhérence, d'ouvert et de fermé.

En particulier, il s'agit de préciser leurs caractères formalisateur, unificateur et généralisateur. Pour y parvenir, nous avons tenté, dans la mesure du possible, de mettre en évidence, dans notre étude, un certain nombre d'éléments concernant les notions, notamment :

- préciser quelles sont les notions de topologie qui émergent dans la réalité historique ;
- présenter des questionnements de nature topologique ;
- pointer les cadres d'émergence des notions ;
- préciser la fonction des notions, en particulier leur dimension outil et objet ;
- montrer la volonté de généraliser les premières notions pour aboutir aux cadres des espaces métriques et topologiques.

Nous présentons maintenant nos premières conclusions concernant l'histoire retracée.

Un premier aspect frappant tient d'abord aux notions visées dans ce travail et à leur genèse historique. Ces notions apparaissent tardivement dans l'histoire retracée, surtout les notions d'intérieur et d'adhérence. Notre étude montre bien que ce sont d'autres notions de topologie qui émergent initialement, telles que celles de voisinage, de point limite ou de point isolé par exemple.

L'émergence des notions de topologie auxquelles notre travail s'est élargi est, en fin de compte, le fruit d'un grand nombre de travaux qui couvrent l'ensemble du 19e siècle. En effet, de nombreuses notions, qui ne relèvent pas du domaine strict de la topologie, sont finalement liées, implicitement ou explicitement, à l'introduction des premières notions de topologie. Nous pensons aux notions de limite, de suite, de fonction ou de série par exemple. Une conséquence est que les notions apparaissent de manière dispersée. Nous avons vu qu'une même notion peut effectivement être utilisée par plusieurs mathématiciens dans des contextes différents. C'est le cas, par exemple, de la notion de voisinage, utilisée par Weierstrass pour étudier des problèmes sur les séries entières alors que Cantor introduit la notion pour étudier les sous-ensembles de la droite réelle.

L'histoire montre également que des raisonnements de nature topologique sont utilisés bien avant que ne soient introduites des notions de topologie. C'est le cas chez Bolzano, dont la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires contient en germe un procédé d'emboîtement d'intervalles lié à la notion de recouvrement. La prise de conscience de différents types de convergence pour les suites de fonctions provoque également des questions de la même nature.

D'un point de vue chronologique, c'est la structure topologique de l'ensemble des réels qui fait émerger une série de notions de topologie. Nous avons tout d'abord exposé les constructions de Weierstrass et de Dedekind. Alors que celle développée par Weierstrass repose sur une construction en termes de classes d'équivalence et ne nécessite pas l'introduction de notions de topologie, la construction de Dedekind à partir des coupures est bien guidée par la structure continue de la droite réelle qui est un argument topologique.

Dans la construction de Cantor, c'est à partir de la notion de limite qu'il étudie les liens entre les nombres réels et la structure topologique de la droite. Des notions telles que celle de point limite et de point isolé sont alors introduites.

L'émergence des premières notions de topologie dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{R}^N$ est, de notre point de vue, très liée au souci de démontrer rigoureusement des théorèmes d'analyse réelle ou complexe, même s'il y a peu d'utilisation du langage symbolique. Weierstrass utilise la notion de voisinage pour définir la continuité d'une fonction et pour démontrer des résultats sur les séries entières. La notion de point limite est un outil pour énoncer et démontrer le théorème de Bolzano-Weierstrass. Cantor abandonne un problème sur le développement d'une fonction en série trigonométrique pour étudier l'ensemble des réels car il a besoin de préciser sur quels types d'ensembles il doit travailler pour étendre un résultat sur les séries trigonométriques. Tout l'apport des mathématiciens consiste alors à incorporer ces notions dans leurs raisonnements et à réfléchir à la construction de la théorie que les nouvelles notions introduites permet de développer.

Toujours en nous appuyant sur la chronologie des faits, c'est la notion de voisinage qui est tout d'abord introduite. Celle-ci est utilisée pour catégoriser les différents sous-ensembles de l'espace euclidien à partir des notions de point limite, de point isolé, de point frontière... Cantor utilise la notion de voisinage en lien avec celle d'intervalle. La notion d'ensemble fermé est contenue en germe dans celle d'ensemble parfait. Ces notions sont pendant longtemps considérées comme des notions de théorie des ensembles. Le Traité de Jordan (seconde édition, 1893) et l'article de Baire les présentent d'ailleurs dans des chapitres traitant des ensembles. Alors que Jordan les introduit directement dans $\mathbb{R}^N$ à partir de la notion d'écart (de métrique), Baire les expose tout d'abord dans $\mathbb{R}$ et les généralise à $\mathbb{R}^N$ à partir de la notion de sphère (boule).

Les notions de limite et de fonction vont jouer un rôle important dans la généralisation aux espaces métriques. Fréchet cherche à se placer dans des ensembles dont les éléments sont autre chose que des réels mais dans lesquels on peut toutefois mesurer des distances. En cherchant à généraliser le théorème de Bolzano-Weierstrass, il définit une notion de limite sur ces espaces et une notion de compacité. L'introduction des espaces métriques amène une généralisation des notions antérieures, toujours guidée par la notion de voisinage. Mais la généralisation la plus marquante est l'émergence de la notion d'espace topologique, chez Hausdorff, qui redéfinit les notions sans recourir à la notion de distance.

La volonté d'abstraction devient alors la voie suivie pour exposer les notions comme le montrent les traités de Bourbaki et de Kuratowski. La manière de les présenter diffère toutefois dans les deux traités. Alors que Bourbaki part de la notion d'ouvert, Kuratowski prend quant à lui la notion de fermé pour démarrer son étude.

Sur la base de cette synthèse, nous sommes maintenant capable de préciser un certain nombre d'éléments concernant les caractères formalisateur, unificateur et généralisateur des notions de topologie.

8 Spécificités des notions de topologie

Au chapitre II, nous avons présenté les notions formalisatrices, unificatrices et généralisatrices comme des notions qui unifient un certain nombre de notions antérieures en les généralisant grâce à l'introduction d'un (nouveau) formalisme.

L'étude menée voit émerger un réseau de notions, que ce soit dans le cadre de la topologie élémentaire ou dans celui de la topologie générale. Ce réseau est constitué de types de points et de types de sous-ensembles des espaces considérés : voisinage, point intérieur, point limite, point isolé, ouvert, fermé, intérieur, fermeture.

Nous allons donc nous attacher à décrire l'aspect unificateur de ces notions de topologie, ce qu'elles permettent de généraliser et à partir de quel type de formalisation.

Le caractère unificateur

Deux types d'unification doivent, selon nous, être distingués dans l'émergence des notions de topologie. Ceux-ci sont associés d'une part à ce qui relève de la topologie élémentaire de $\mathbb{R}^N$ et d'autre part, de la topologie métrique ou générale.

Les travaux que nous avons décrits comme émergeant de la volonté de fonder l'analyse sur des bases solides et rigoureuses unifient un certain nombre de notions autour de la construction de l'ensemble des réels. Comprendre, caractériser et définir rigoureusement $\mathbb{R}$ amène à étudier les sous-ensembles de la droite réelle et à catégoriser les types de points en fonction de leur position dans les sous-ensembles (point isolé, point limite, point frontière). Cette unification rassemble ainsi un certain nombre de notions à partir d'un langage commun et fournit un arsenal d'outils pour démontrer des résultats classiques d'analyse. Le passage de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}^N$ est une unification naturelle qui ne nécessite pas de changement de point de vue dans la manière de définir les notions. La notion d'intervalle est étendue à la notion de boule pour définir les notions à partir de caractérisations semblables à celles utilisées dans $\mathbb{R}$. De même, le passage aux espaces métriques se fait naturellement à partir de la notion de distance.

Une seconde unification, d'un autre type, émerge dans les travaux de Hausdorff. La volonté de généralisation qui anime celui-ci l'amène à introduire la notion d'espace topologique. Une unification des notions est cristallisée autour de la notion d'ouvert. Celle-ci est associée à un changement de point de vue sur les notions antérieures : il ne s'agit plus de catégoriser les objets mais d'utiliser une même notion, celle d'ouvert, pour caractériser les sous-ensembles de l'espace. Toutes les notions et les propriétés associées sont définies à partir de la notion d'ouvert. Cette unification rend cohérente la manière de s'intéresser aux sous-ensembles de l'espace, c'est-à-dire à partir de la notion d'ouvert, amenant ainsi une forme d'économie complètement absente dans le cadre de la topologie élémentaire.

Vue a posteriori, cette seconde unification est, selon nous, relativement indépendante du cadre de la topologie élémentaire. En effet, cette dernière articule déjà en elle même des notions permettant d'étudier les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^N$. Le cadre abstrait des espaces topologiques n'est pas nécessaire pour travailler dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^N$.

Le caractère généralisateur

La mise en place de la topologie de $\mathbb{R}$ n'amène aucune généralisation. En revanche, les notions définies dans ce cadre se généralisent naturellement à $\mathbb{R}^N$ puis aux espaces métriques à partir des notions de boule et de distance. Tout comme dans l'aspect unificateur des notions, la généralisation ne modifie les caractérisations des objets.

L'émergence de la notion d'espace topologique est guidée par la notion de limite. C'est elle qu'on cherche à généraliser ainsi que les résultats d'analyse classique. Ce n'est pas tant la volonté de généraliser les notions antérieures qui guide Hausdorff mais bien la nature des ensembles dans lesquels il souhaite travailler. Les définitions sont données, dans ce cadre général, à partir de leurs propriétés dans les espaces métriques et non pas à partir de leur définition. De plus, ce ne sont plus les éléments de l'espace considéré qui sont étudiés mais bien les sous-ensembles puisque la structure des espaces est donnée à partir de ces sous-ensembles privilégiés que sont les ouverts.

Le caractère formalisateur

L'histoire montre que les définitions des notions qui émergent sont écrites dans la langue naturelle, notamment avec des mots empruntés au langage mathématique pour caractériser les notions. Cette formalisation des notions produit des expressions spécifiques aux mathématiques caractérisant les choix faits par les mathématiciens pour définir les notions et en donner les propriétés. Elle ne s'exprime pas nécessairement dans le langage symbolique.

Les symboles mathématiques rencontrés dans les textes historiques sont principalement des symboles d'inégalités, des lettres... Le registre symbolique est donc peu sollicité, contrairement à l'enseignement décrit au début de ce travail (cf. chapitre I). De plus, nous n'avons trouvé aucun autre registre, comme par exemple celui du dessin, dans les travaux consultés.

En conclusion, la nature formalisatrice, unificatrice et généralisatrice des notions dans l'espace $\mathbb{R}^N$ n'est pas, historiquement parlant, une évidence. C'est le caractère unificateur qui transparaît le mieux dans l'histoire. Les notions introduites caractérisent la structure topologique de la droite réelle. Le caractère généralisateur apparaît de manière tout à fait naturelle et interne à l'espace euclidien à partir de la notion de boule. La formalisation associée s'appuie sur l'utilisation de la langue naturelle. En revanche, nous montrerons qu'il n'en est pas de même dans l'enseignement, où ces caractères sont mis en évidence d'une manière bien différente.

9 Limites méthodologiques et perspectives

Comme nous l'avons mentionné à plusieurs reprises, notre travail ne vise pas l'exhaustivité des faits. Nous sommes bien consciente de n'avoir retracé qu'une partie de l'histoire des notions de topologie et que ce que nous avons retenu est le fruit de besoins didactiques spécifiques, ce qui minore également l'étude réalisée.

En nous centrant aussi sur certaines notions, nous avons accordé très peu de place aux notions de compacité et de connexité par exemple. Même si celles-ci jouent un rôle dans le développement historique des notions, nous avons choisi de ne pas les traiter dans cette étude car nous savons qu'elles ne nous concernent pas du point de vue du niveau d'enseignement visé dans ce travail.

Nous nous proposons maintenant de poursuivre l'étude du phénomène de transposition didactique en étudiant le savoir à enseigner, au chapitre suivant. Nous aurons alors une vision globale de la transposition opérée et nous serons alors en mesure, au chapitre VII, de la confronter à notre projet initial concernant l'enseignement des notions visées dans ce travail.

Chapitre VI

Une analyse de manuels

Nous poursuivons l'étude de la transposition didactique des notions topologiques en complétant notre travail historique par une analyse de quelques manuels traitant de topologie. Nous sommes alors en mesure de mettre en évidence quelques spécificités des notions en nous plaçant cette fois du côté du savoir à enseigner.

1 Éléments méthodologiques

L'étude du phénomène de transposition didactique a été amorcée, au chapitre V, avec la réalisation d'une synthèse historique et épistémologique élémentaire. Après nous être placée du côté du savoir savant, nous nous plaçons maintenant du côté du savoir à enseigner.

Notre objectif reste identique ; il s'agit toujours de clarifier la question des spécificités des notions de topologie. Nous complétons donc ici le travail déjà réalisé par une analyse de quelques manuels traitant de la topologie.

En lien avec les notions visées, nous nous centrons, pour étudier les manuels, sur les aspects suivants. Nous privilégions, comme cadres de travail, les ensembles $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^N$. Nous nous intéressons, au premier plan, à la place qui leur est accordée dans un manuel traitant de topologie. Nous cherchons également à étudier deux aspects en lien direct avec les difficultés d'enseignement des notions visées : leur introduction et la nature des exercices proposés, lorsque les manuels en contiennent.

Il s'agit donc de baliser les modes d'introduction des notions, les définitions choisies pour les caractériser et les éventuelles mises en relation entre les différentes notions. Du côté des exercices, notre intérêt se porte sur les cadres de travail sollicités et les connaissances mises en jeu pour les résoudre.

Nous découpons l'analyse à mener en différentes étapes, chacune déclinée en un certain nombre de questions à étudier pour chaque manuel et qui permettent, selon nous, de préciser les différents aspects que nous venons d'évoquer.

Les trois étapes retenues dans notre analyse portent sur :

- □ une présentation générale du manuel ;

- les contenus théoriques (définitions, résultats, démonstrations) ;
- les exercices proposés.

Chaque étape est abordée de la manière suivante.

Présentation générale du manuel

Pour chaque manuel, nous commençons par en faire une présentation générale sur la base des préfaces, des avant-propos et du découpage des parties et /ou chapitres. Nous précisons également les chapitres qui font l'objet d'une analyse et que nous sélectionnons pour leurs liens directs avec les notions visées. Nous nous intéressons aux aspects suivants :

- De quel type de manuel s'agit-il (cours, manuels d'exercices...) ?
- Le manuel contient-il à la fois de la théorie et des exercices ?
- À quel type de public s'adresse-t-il ?
- Quelle est la place occupée par la topologie ? Le manuel lui est-il entièrement consacré ou bien n'y occupe-t-elle qu'une partie ?
- Dans quel cadre de travail l'étude de la topologie démarre-t-elle ? Quel est le cheminement suivi pour présenter les contenus ?

Contenus théoriques

Après avoir ciblé préalablement dans chaque manuel les parties à étudier, nous nous intéressons, dans un second temps, à l'exposition des contenus théoriques. Ce sont alors les aspects suivants qui sont étudiés :

- Quel est le mode de présentation utilisé ? Par exemple, s'agit-il du mode classique « définitions, résultats, démonstrations » ?
- Comment les notions sont-elles définies ? Et quels sont les registres d'écriture utilisés ? En particulier, quelle est la place du langage formel ?
- Comment les notions sont-elles développées ? En particulier, des liens sont-ils établis entre les notions ?
- Quelle est la place des exemples ? Sont-ils nombreux ?
- Quelle est la place des dessins ? Les notions sont-elles illustrées géométriquement ?
- Le livre contient-il des commentaires méta-mathématiques ?
- Quelle est la place accordée à l'étude de la topologie de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^N$?

Les exercices

- Sont-ils nombreux ?
- Quelle est leur complexité ?
- Sont-ils placés au fur et à mesure de l'exposition des contenus théoriques ou alors à la fin d'un chapitre ou du livre ?
- Quels sont les cadres de travail sollicités ? Y a-t-il des mélanges de cadres ou des changements de cadres à réaliser, que ce soit pour un même exercice ou bien pour l'ensemble des exercices proposés ?

- Quels sont les registres d'écriture sollicités ? Y a-t-il différents types de registres à utiliser ?
- Quelles sont les connaissances anciennes et nouvelles à mettre en jeu ?

Sur la base de ces questions, nous présentons l'étude de la manière suivante. Dans un premier temps, nous décrivons de manière succinte chaque manuel séparément. Concernant les contenus théoriques et les exercices, nous donnons une analyse globale de l'ensemble des manuels étudiés en mettant en évidence les traits communs et en intégrant ponctuellement les spécificités propres à chaque manuel. Cette manière de procéder permet, selon nous, de pointer les aspects les plus frappants et fournit une présentation plus aisée pour le lecteur.

2 Les manuels

Les sept manuels suivants ont fait l'objet d'une analyse :

- Rudin W. (1964), *Principles of Mathematical Analysis*, International Student Edition, 270 pages.
- Revuz A. et L. (1964), *Cours de l'APM*, Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, Paris, 250 pages.
- Schwartz L. (1967), *Cours d'analyse*, Hermann, 830 pages.
- Choquet G. (1969), *Cours de topologie*, 1re édition, Masson, Paris, 317 pages.
- Gostiaux B. (1993), *Cours de mathématiques spéciales*, Presses universitaires de France, 403 pages.
- Skandalis G. (2001), *Mathématiques pour la licence, Topologie et analyse*, Dunod, Paris, 323 pages.
- Lehmann D. (2004), *Initiation à la topologie générale*, Ellipses, 131 pages.

Notre sélection a été guidée par différents critères. Nous avons tout d'abord tenté de couvrir différentes époques. Les livres de Rudin, Revuz, Schwartz et Choquet datent des années 1960, celui de Gostiaux des années 1990 et les deux derniers du début du 21e siècle. Nous avons aussi été guidée par des noms emblématiques tels que Choquet, Revuz et Schwartz. Il y a également deux types d'ouvrages : ceux traitant uniquement de topologie et ceux de Rudin et Gostiaux qui sont des cours d'analyse, ne consacrant qu'un chapitre au domaine de la topologie.

Même s'il s'agit d'une analyse très succinte, nous parvenons néanmoins à pointer des tendances communes à l'ensemble des manuels en lien avec les notions que nous visons et leur enseignement.

La description de chaque manuel est donnée ci-dessous.

Rudin W., Principles of Mathematical Analysis, 1964

Ce livre s'adresse à des étudiants en début de parcours universitaire, et qui étudient les mathématiques. Comme le titre l'indique, il s'agit d'un manuel d'analyse. Des thèmes classiques y sont traités, tels que les nombres réels et complexes, des éléments de théorie des ensembles, les suites et les séries, les notions de limite, de continuité, de dérivabilité et d'intégrale, la convergence des suites et séries de fonctions. Des sujets tels que les séries de puissances, les séries de Fourier, les fonctions de plusieurs variables et la théorie de la mesure sont également étudiés. Il s'agit d'un programme qui serait certainement considéré comme très ambitieux pour un cours d'analyse qui se donnerait aujourd'hui au niveau d'une première année universitaire ! Le livre contient de la théorie et des exercices donnés à la fin de chaque chapitre.

Nous nous sommes intéressée au chapitre intitulé *Elements of Set Theory*. Il est précédé par un chapitre portant sur les nombres réels et complexes. Le chapitre que nous décrivons introduit tout d'abord la notion d'espace métrique. Celle-ci est suivie par une liste de définitions des notions suivantes : voisinage, point limite, point intérieur, ouvert, fermé, dense...

Rudin commence par la notion de voisinage dont la définition correspond en fait à celle d'une boule ouverte. Trois types de points sont ensuite définis à partir de cette notion :

- □ p est un point limite de l'ensemble E si chaque voisinage de p contient un point q différent de p tel que $q \in E$;
- □ p est un point intérieur de E si on peut trouver un voisinage N de p tel que $N \subset E$;
- □ Si $p \in E$ et p n'est pas un point limite de E alors p est un point isolé de E.

Un ensemble E est fermé si chaque point limite de E est un point de E. Un ensemble E est ouvert si chaque point de E est un point intérieur de E. Un ensemble E est parfait si E est fermé et si chaque point de E est un point limite de E.

Des propriétés sur les familles d'ouverts et de fermés sont alors démontrées.

Les notions précédentes sont réinvesties lorsque Rudin introduit la compacité. Il se place alors dans $\mathbb{R}^N$ pour montrer que la compacité d'un ensemble E est équivalente au fait que E soit fermé et borné ou encore, au fait que chaque sous-ensemble d'un ensemble compact a un point d'accumulation. Le théorème de Weierstrass est alors prouvé.

Les espaces topologiques ne sont pas traités dans le livre.

Dans ce manuel, les contenus sont présentés en une succession rapide de définitions et de propriétés auxquels sont intégrés quelques exemples, peu nombreux. Cela peut s'expliquer par le fait qu'il s'agit d'un cours portant sur le domaine de l'analyse. Il y a, par conséquent, de nombreux sujets à aborder pour couvrir ce domaine. Le chapitre qui nous intéresse se termine par une liste de 16 exercices. Le cadre des espaces métriques est très rapidement mobilisé, ce qui rend la majorité des exercices inaccessibles au niveau d'enseignement que nous visons.

Revuz A. et L., Cours de l'APM, 1964

Nous analysons la partie du cours qui traite des *Éléments de topologie* et plus précisément les deux premiers chapitres. Le livre contient de la théorie et des exercices qui sont présentés au lecteur au fur et à mesure du développement des contenus théoriques.

Les auteurs prennent la peine de motiver les notions qu'ils introduisent. C'est la notion de continuité qui est, selon eux, le moteur pour introduire les notions de topologie. Dans le chapitre 1 intitulé *Continuité, Structures topologiques*, les auteurs expliquent d'ailleurs que « si l'on voulait définir d'un mot la topologie, on pourrait dire que c'est la branche des Mathématiques qui traite de la *continuité* » (p. 11).

Ils définissent la continuité d'une fonction d'une variable réelle et à valeurs réelles à partir de la définition en $\varepsilon - \delta$, en termes d'inégalités. Après avoir défini les notions d'espace métrique, de boules et de voisinages, les auteurs formulent des définitions équivalentes de la continuité en faisant intervenir ces nouvelles notions. Un voisinage d'un point x_0 est un ensemble qui contient une boule ouverte de centre x_0.

La notion d'ouvert est définie en termes de voisinage : un ensemble ouvert est un ensemble qui est voisinage de tous ses points ou encore, un ensemble dont tous les points sont centres d'une boule qui y est incluse. La définition de continuité est cette fois formulée à partir de l'image réciproque d'un ouvert.

L'introduction de la notion d'espace topologique est préalablement motivée par les auteurs : « Nous avons vu plus haut que, sur un ensemble, il était possible de définir des distances différentes pour lesquelles les ouverts étaient les mêmes. On voit donc que, pour les espaces métriques, la notion de continuité ne fait pas appel à la totalité de la structure d'espace métrique. Même en se limitant à ces espaces, si c'est à la seule continuité des applications qu'on s'intéresse, il y a donc avantage à n'utiliser que ce qui s'y rapporte, *c'est-à-dire la famille des ouverts de chaque espace* » (p. 18).

Le chapitre 2 porte sur les *Notions topologiques fondamentales*. Les auteurs soulignent l'importance de travailler avec la notion de voisinage dans un espace topologique : « Le fait pour un sous-ensemble d'un espace topologique E d'être voisinage de tous ses points caractérise donc les ouverts, que la topologie dérive ou non d'une distance » (p. 22).

Dans un espace topologique, un fermé est défini comme le complémentaire d'un ouvert. L'intérieur (respectivement la fermeture) de A est le plus grand ouvert (respectivement le plus petit fermé) contenu dans (respectivement contenant) A. L'intérieur est également défini en termes de voisinage. La notion de point adhérent est alors définie en termes de voisinage pour introduire l'adhérence d'un ensemble, qui coïncide avec sa fermeture.

Dans ce livre, l'introduction des notions est justifiée. Les auteurs expliquent clairement les objectifs visés dans chaque chapitre. Ils s'attachent également à établir des liens entre les notions, notamment en formulant des caractérisations équivalentes d'une même notion à partir des notions précédemment introduites.

Mais c'est la notion de voisinage qui est utilisée pour formuler les premières définitions. Les notions de topologie apparaissent pour formuler des propriétés sur la continuité d'une fonction. Quelques exercices sont proposés dans le cadre de $\mathbb{R}$. Nous y reviendrons dans la suite de ce chapitre. Cependant, le cadre des espaces topologiques, dans lequel la majorité des énoncés sont donnés, met en jeu des notions telles que celles de filtre ou de base de voisinages, complètement hors de portée d'une première année universitaire.

Schwartz L., Cours d'analyse, 1967

Il s'agit d'un cours donné par Schwartz à l'École Polytechnique de Paris. Le public visé est constitué d'étudiants en physique et d'ingénieurs.

C'est un livre de théorie, il n'y a aucun exercice. C'est le support du cours. Les objectifs du cours sont explicités dans la préface. Schwartz explique que ses notes sont volontairement longues et qu'elles contiennent de nombreux théorèmes. Les démonstrations sont en général complètes. Le cours oral sera un résumé de ses notes. Les étudiants doivent être capables de comprendre les idées nouvelles et d'appliquer les théorèmes. L'accent sera mis, dans le cours oral, sur les énoncés puisque les étudiants devront connaître peu de démonstrations.

Le chapitre 1 traite de la théorie des ensembles et le chapitre 2 de la topologie. C'est ce dernier chapitre qui nous intéresse.

Schwartz commence par définir la notion d'espace métrique puis celles de boule ouverte et d'espace vectoriel normé. Le paragraphe suivant est consacré aux notions d'ouvert, de fermé, de voisinage, d'intérieur, de frontière, d'adhérence et aux sous-ensembles denses. Ces notions sont définies les unes à partir des autres.

Dans un espace métrique E, une partie A de E est appelée ouverte si, toutes les fois qu'elle contient un point de E, elle contient au moins une boule ouverte (de rayon > 0) ayant pour centre ce point. Schwartz explique que cette définition s'écrit « en abrégé » de la manière suivante :

$$(\forall x \in A)(\exists \rho > 0)(\forall y \in E,\ d(x,y) < \rho) : (y \in A)$$

ou plus rapidement : $(\forall x \in A)(\exists \rho > 0) : B_o(x,\rho) \subset A$.

Le langage formel est présenté avec sa fonction économique d'écriture. Schwartz n'utilise plus ce registre d'écriture dans la suite du cours.

Schwartz prépare l'introduction des espaces topologiques en donnant immédiatement les propriétés classiques des ouverts sur la réunion, l'intersection et sur le fait que E et l'ensemble vide sont eux-mêmes ouverts. Il suit un cheminement semblable pour les notions de fermé et de voisinage.

Une partie fermée de E est une partie dont le complémentaire est ouvert. Des propriétés sur l'intersection et la réunion d'une famille de fermés sont démontrées.

Un voisinage d'un point a de E est une partie de E contenant au moins un ouvert contenant lui-même a. Des propriétés analogues sont données sur les familles de voisinages.

L'intérieur de A est caractérisé de différentes manières telles que la réunion de tous les ouverts de E contenus dans A, le plus grand ouvert contenu dans A, l'ensemble des points centres d'au moins une boule contenue dans A, et l'ensemble des points dont au moins un voisinage est tout entier dans A.

L'extérieur de A est aussi défini comme l'intérieur du complémentaire de A. La notion de frontière est alors caractérisée à partir de l'intérieur et de l'extérieur d'un ensemble et en termes de voisinage.

Enfin, l'adhérence de A est définie par une série de caractérisations « duales » de celles données pour la notion d'intérieur.

Un point est alors adhérent à l'ensemble s'il appartient à son adhérence.

Le paragraphe suivant est consacré à la continuité, qui est définie à partir de plusieurs formulations équivalentes faisant intervenir les notions de voisinage, d'ouvert et de fermé.

Les espaces topologiques sont introduits et la notion de limite d'une suite est étudiée dans ce cadre.

Les notions de topologie sont, comme chez Revuz, utilisées pour démontrer des résultats sur la continuité d'une fonction. Schwartz s'attache aussi à donner une multitude de caractérisations pour une même notion et à établir des liens entre les notions en les définissant les unes à partir des autres. L'exposé se veut très riche et complet, comme l'auteur l'explique au début du livre.

Choquet G., Cours de topologie, 1re édition, 1969

Nous analysons ici la seconde édition du cours, publiée en 2000. Selon Choquet, le livre couvre les besoins de la Licence et de la Maîtrise (en France) de Mathématiques en ce qui concerne la topologie générale. Il s'adresse aux étudiants qui ont un bagage mathématique équivalent à celui acquis après un premier cycle de mathématiques. Le livre est le fruit d'un cours enseigné par Choquet à Paris. Il contient des développements théoriques et des exercices proposés à la fin de chaque chapitre.

Au début du livre, Choquet reprend un extrait du Livret Européen de l'étudiant qui détaille le programme couvert par la topologie générale. Nous le donnons ci-dessous :

- □ Topologie de $\mathbb{R}$, de $\mathbb{R}^N$, théorème de Borel-Lebesgue. Définition générale d'un espace topologique (par les ouverts ou par les fermés) ; exemple des espaces métriques. Fonctions continues. Produit d'espaces topologiques.
- □ Espaces compacts ; théorèmes classiques. Espaces localement compacts.
- □ Espaces connexes ; image d'un espace connexe par une application continue.
- □ Espaces métriques (nombreux exemples). Critère de compacité des espaces métriques. Continuité uniforme ; cas d'une application continue d'un espace métrique compact dans un espace métrique.
- □ Espaces métriques complets (sans traiter de la complétion). Méthode des approximations successives.
- □ Familles sommables dans un espace normé complet ; convergence normale.

Notons que le programme ne mentionne pas ce qui relève précisément de la topologie de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^N$, même si cette étude fait partie du programme.

Choquet avertit ensuite le lecteur sur le mode de présentation des notions : « Les notions de base sont presque toujours présentées sous leur forme générale, après l'étude préalable d'un ou deux exemples destinés à justifier le choix des définitions. C'est ainsi qu'on aborde les espaces topologiques quelconques après une brève étude de la droite réelle ; les espaces métriques ne viennent qu'ensuite, lorsque se posent les questions d'uniformité. »

Le premier chapitre traite tout d'abord de la topologie de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^N$ en introduisant les notions d'ouverts, de fermés, de voisinages et de point d'accumulation. Ces notions sont tout d'abord définies dans $\mathbb{R}$. Un ensemble est donc ouvert si pour chacun de ses points, il existe un intervalle ouvert contenant le point et contenu dans l'ensemble. Un fermé est le complémentaire d'un ouvert et un voisinage d'un point est un ensemble contenant un ouvert contenant ce point. La notion de point d'accumulation est définie en termes de voisinage. La notion de limite est définie en termes de voisinage. La compacité des intervalles fermés et bornés est démontrée ainsi que le théorème de Bolzano-Weierstrass. Les propriétés sur les familles d'ensembles ne sont pas étudiées dans ce cadre. Les notions sont très brièvement étendues à $\mathbb{R}^N$ à partir de la notion de *pavé ouvert*, qui généralise la notion d'intervalle ouvert dans $\mathbb{R}$ et l'auteur précise alors qu'au lieu de reprendre les résultats précédemment établis dans $\mathbb{R}$, il est plus instructif de passer à un cadre plus général.

Choquet introduit alors les espaces topologiques à partir d'axiomes sur les ouverts. Un fermé est le complémentaire d'un ouvert et un voisinage d'un point x de l'espace topologique E est un sous-ensemble de E contenant un ouvert contenant x.

Trois types de points sont définis en termes de voisinage : point adhérent, point d'accumulation et point isolé. Les définitions sont les suivantes :

- x est adhérent à A si tout voisinage de x contient un point de A ;
- x est un point d'accumulation de A si tout voisinage de x contient un point de A autre que x ;
- x est un point isolé de A s'il appartient à A mais n'en est pas point d'accumulation, autrement dit s'il existe un voisinage de x qui ne contient aucun autre point de A que x.

La fermeture de A est le plus petit fermé de E contenant A. Elle coïncide avec la notion d'adhérence qui est l'ensemble des points adhérents de A.

La caractérisation $A = \overline{A}$, où $\overline{A}$ désigne l'adhérence de A, est donnée pour les fermés ainsi que sa forme « duale » pour les ouverts : $A = \mathring{A}$, où $\mathring{A}$ désigne l'intérieur de A.

Les espaces métriques sont ensuite étudiés comme cas particuliers des espaces topologiques.

Choquet s'attache, lui aussi, à fournir une présentation complète. Même si les ensembles $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^N$ sont traités séparément dans un paragraphe, leur place se réduit à l'introduction de définitions. L'ensemble des notions et toutes les caractérisations associées sont traités dans le cadre des espaces topologiques. Pour l'auteur, c'est précisément ce cadre qui a le plus d'intérêt. Il affiche d'ailleurs cette volonté de travailler en présentant les notions sous une forme générale dès le début du livre. Quelques exercices sont proposés dans les cadres de la droite réelle et de $\mathbb{R}^N$. Beaucoup d'entre eux font intervenir les notions d'isométrie et d'homéomorphisme. Ils n'ont donc aucun lien direct avec les notions qui nous concernent, compte tenu de nos contraintes institutionnelles.

Gostiaux B., Cours de mathématiques spéciales, 1993

Comme le titre du livre l'indique, il s'agit d'un cours destiné aux étudiants de mathématiques spéciales. Nous regardons le tome 2 intitulé *Topologie, analyse réelle*. Le livre contient de la théorie et des exercices. Ces derniers sont placés à la fin de chaque chapitre.

Le premier chapitre est intitulé *Topologie générale*. Le rôle de la topologie élémentaire est d'emblée défini au sein du livre : « L'étude de la topologie, d'abord générale, puis métrique sera faite en supposant connues les propriétés de $\mathbb{R}$, ce qui permettra de donner des exemples. »

L'auteur présente la notion d'espace topologique, d'ouvert, de fermé et de voisinage. Les notions de fermé et de voisinage sont définies à partir de la notion d'ouvert. L'intérieur et la fermeture sont aussi définis. Ces notions sont aussi caractérisées de différentes manières. Un fermé A apparaît comme coïncidant avec son adhérence ou comme l'intersection de tous les fermés de l'espace contenant A. Les formulations « duales » sont données pour la notion d'intérieur.

Il y a finalement peu d'exemples dans le cadre des réels. L'auteur cite, pour illustrer la densité, que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Les intervalles de la forme $]x-1/n, x+1/n[$, où n est un naturel non nul, apparaissent comme une base de voisinages de x.

Suivent des chapitres traitant de la compacité, de la connexité et des espaces métriques. Dans ce dernier chapitre, les notions précédentes sont particularisées avec la notion de boule.

Des caractérisations sont également données en termes de suites. Elles sont énoncées avec un statut de théorème. Par exemple, « Soit A une partie de E métrique, on a $x \in \overline{A}$ si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x » ou « Soit A une partie de E métrique, on a x point d'accumulation de A si et seulement si il existe une suite de points tous distincts de A qui converge vers x ».

Ce livre, qui se veut être un cours, offre un exposé structuré de l'ensemble des définitions et propriétés à étudier.

Skandalis G., Mathématiques pour la licence, Topologie et analyse, 2001

Le livre présente un cours qui s'inscrit dans la continuité de ce qui est en enseigné en Deug, en exposant les notions généralement enseignées en Licence. Le livre contient de la théorie et des exercices à la fin de chaque chapitre.

Dans l'avant-propos, l'auteur précise que la topologie « offre un cadre général, simple et élégant, à toutes les notions de continuité et de limite qui apparaissent en analyse. »

Le livre s'ouvre un premier chapitre portant sur les espaces métriques. Ce chapitre démarre par des rappels sur la topologie de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^N$. Ceux-ci consistent à donner les définitions de majorant et de borne supérieure et à énoncer, comme axiome, que toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure. La notion d'intervalle est définie avant d'énoncer le théorème de la valeur intermédiaire. Ce paragraphe ne contient finalement rien explicitement sur $\mathbb{R}^N$.

Ce sont ensuite les espaces vectoriels normés qui sont définis. Dans un tel espace, la continuité est définie en termes de norme et la notion d'ensemble ouvert est définie en termes de boule.

Un paragraphe succint porte sur les espaces métriques. Après avoir défini la notion de distance, l'auteur redéfinit la notion de boule en termes de cette nouvelle notion. Le paragraphe suivant redéfinit la continuité en termes de boule. Elle est aussi caractérisée en termes de distance.

La notion de voisinage est définie en termes de boule. La continuité est retraduite en termes de voisinage.

Vient alors un paragraphe sur les ouverts. Dans un espace métrique (X,d), un sous-ensemble U de X est ouvert si pour tout $a \in U$, U est un voisinage de a, autrement dit si U est un voisinage de chacun de ses points. Les propriétés classiques des ouverts sont étudiées.

Le fait qu'une boule ouverte soit un ouvert et que les ouverts d'un espace métrique soient les réunions de boules ouvertes apparaît dans un théorème.

Le chapitre 2 porte sur les espaces topologiques. L'auteur motive leur introduction de la manière suivante. Il s'agit de généraliser les notions précédemment définies dans les espaces métriques. Il fournit plusieurs réponses à la question de ce besoin de généralisation :

- « Si l'on ne s'attache pas trop aux exemples pathologiques, la topologie générale n'offre pas de difficultés nouvelles par rapport aux espaces métriques ; elle peut même rendre certaines notions plus simples, en les situant dans le bon cadre abstrait » ;
- « Les espaces métriques sont insuffisants pour rendre compte de certains types de convergence, comme la convergence simple d'une suite de fonctions ou la convergence dans certains espaces topologiques naturels (espaces quotients, produits infinis...) » ;
- « Enfin, une motivation, peut-être la plus importante, pour l'introduction de la topologie est l'élégance de cette théorie qui, à partir de trois axiomes... permet de décrire tous les phénomènes de continuité et de convergence. »

Après avoir défini les espaces topologiques et différents types de topologies, l'auteur consacre successivement un paragraphe aux fermés, à l'intérieur, à l'adhérence puis aux voisinages. Un fermé est le complémentaire d'un ouvert. L'intérieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A, l'adhérence de A est le plus petit fermé contenant A. Un point adhérent est un point qui appartient à l'adhérence. Les ouverts (respectivement les fermés) sont caractérisés à partir de ces notions. Les voisinages sont définis en termes d'ouvert.

Un paragraphe est consacré au rôle des suites dans un espace métrique. L'auteur explique que, dans un tel espace, les suites servent à caractériser les fermés. Il énonce la proposition et le corollaire suivant : « Soient (X,d) un espace métrique, A une partie de X et x un point de $\overline{A}$. Alors il existe une suite de points de A convergeant vers x » et « Une partie A d'un espace métrique (X,d) est fermée si et seulement si toute suite de points de A convergeant dans X a sa limite dans A ». La continuité d'une fonction est également caractérisée en termes de suite. Les exercices se placent majoritairement dans le cadre des espaces métriques. Certains peuvent être adaptés au cadre de la droite réelle. Nous y revenons un peu plus loin dans ce chapitre.

Lehmann D., Initiation à la topologie générale, 2004

Il s'agit de la rédaction d'un cours donné par Lehmann pendant plusieurs années en Licence de Mathématiques. L'auteur précise que les contenus correspondent à ce qu'il est possible d'enseigner à ce niveau sur un semestre de cours.

L'auteur insiste sur le fait que le livre est en particulier bien adapté aux étudiants qui deviendront professeurs dans l'enseignement secondaire. Tout en sachant que ces étudiants ne devront pas enseigner la topologie, il y voit davantage un « aspect culturel » en ce sens que la topologie générale « semble aussi être la matière idéale pour aborder des raisonnements un peu plus fins que d'habitude. » Elle offre également, selon lui, un cadre propice à l'apprentissage de la rédaction des démonstrations. Des exercices sont proposés à la fin de chaque chapitre.

Notre attention s'est portée sur la première partie du livre. Le premier chapitre porte sur la structure topologique des espaces métriques. Après avoir défini ces espaces, les notions de boules, de voisinages et de métriques équivalentes sont introduites. Viennent alors les topologies abstraites (espace topologique). La notion d'espace topologique est définie en termes de voisinages, tout comme celle d'ouvert. Un fermé est le complémentaire d'un ouvert. La fermeture d'un ensemble est l'intersection de tous les fermés contenant l'ensemble et l'intérieur est la réunion de tous les ouverts inclus dans l'ensemble. La frontière est définie à partir des deux notions précédentes.

Le chapitre 2 porte sur la structure uniforme des espaces métriques. C'est ici que sont abordées les notions de suites de Cauchy et de continuité uniforme, notamment.

L'auteur explique qu'il s'est attaché à distinguer les concepts purement topologiques au chapitre 1 de ceux liés à la structure uniforme des espaces métriques.

Les notions abordées dans ce livre sont inaccessibles pour des étudiants en première année universitaire, y compris du côté des exercices mettant rapidement en jeu diverses topologies sur les ensembles.

3 Une analyse globale de l'ensemble des manuels

3.1 Contenus théoriques

En lien avec nos objectifs didactiques portant sur l'enseignement des notions de topologie dans $\mathbb{R}^N$ en première année universitaire, nous avons été frappée par deux aspects qui ont considérablement influencé nos analyses.

Tout d'abord, l'ensemble des manuels consultés s'adresse à un public plus expérimenté que celui visé dans notre travail. Nous avons en effet souvent relevé, au début des manuels, que ceux-ci couvrent les besoins d'un étudiant abordant une maîtrise en mathématiques, au sens actuel que nous lui donnons. Un deuxième aspect frappant, qui pourrait être une conséquence du niveau d'enseignement visé, est que l'étude spécifique de la topologie élémentaire, c'est-à-dire dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{R}^N$, est très minimisée. Seuls les manuels de Choquet et Skandalis y consacrent une petite partie, préalablement à l'étude d'espaces plus généraux. Dans les autres manuels, leur place est réduite à quelques exemples illustrant les notions introduites dans des cadres plus généraux.

Ces deux aspects ne semblent pas pouvoir être reliés à la date de parution des manuels. Le cours de Choquet a en effet été publié en 1969 et celui de Skandalis en 2001. Notre étude s'en est donc trouvée très minimisée. Nous avons été amenée à nous centrer principalement sur l'émergence des notions dans chaque livre, la portée des résultats établis devenant très rapidement inaccessible au niveau d'enseignement qui nous concerne. Le type d'étude que nous avons réalisé explique également la présentation succinte de chaque manuel, en mettant principalement l'accent sur la manière d'introduire les notions et en nous attachant finalement peu aux résultats et aux démonstrations associées.

Concernant l'analyse globale à proprement parler, nous avons tout d'abord retenu que la progression des contenus principalement choisie est de démarrer l'étude dans le cadre des espaces métriques et de généraliser les notions introduites aux espaces topologiques. Cinq des sept manuels consultés suivent ce schéma. Deux manuels (Choquet et Gostiaux) prennent toutefois comme cadre initial celui des espaces topologiques pour particulariser ensuite les notions dans les espaces métriques. Ce choix ne semble pas, lui non plus, être lié à l'époque puisque ces deux manuels datent de deux époques différentes, respectivement de 1969 et de 1993.

Un trait commun à l'ensemble des livres consultés est d'introduire le réseau de notions suivant : voisinage, ouvert, fermé, intérieur, adhérence/fermeture. Chaque notion est, en général, caractérisée de différentes manières à partir de certaines autres notions du réseau. Cet aspect est très présent dans l'ensemble des manuels. Les auteurs s'attachent à reprendre plusieurs fois la même notion au fil de leur exposé pour la mettre en lien avec d'autres notions. La présentation la plus détaillée des différentes possibilités de caractérisations des notions est fournie par Schwartz.

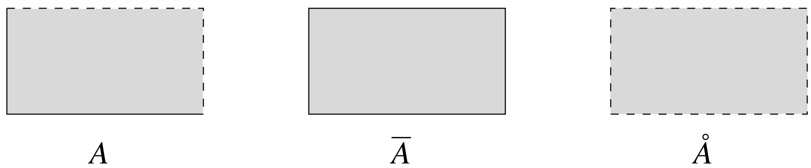
L'ordre de présentation n'est toutefois pas commun à tous les manuels. Nous distinguons deux cheminements : celui qui consiste à partir de la notion de voisinage et celui prenant appui sur la notion d'ouvert. Le premier cas est rencontré dans les quatre manuels suivants : Rudin, Revuz, Skandalis et Lehmann. Ils ont en commun de prendre comme cadre initial celui des espaces métriques. Un voisinage est défini en termes de boules, un ouvert est défini en termes de voisinage et un fermé apparaît alors comme le complémentaire d'un ouvert. Pour les trois autres manuels, c'est-à-dire ceux de Schwartz, Choquet et Gostiaux, le cadre initial est soit les espaces topologiques, soit les espaces métriques. Dans la première situation, un ouvert est un élément d'un espace topologique, un fermé est le complémentaire d'un ouvert et un voisinage est défini en termes d'ouvert. Dans la seconde situation, un ouvert est défini en termes de boule et les deux autres notions sont définies de manière semblable à la première situation.

La notion d'intérieur d'un ensemble est en général définie comme le plus grand ouvert contenu dans l'ensemble et celle de fermeture d'un ensemble comme le plus petit fermé contenant l'ensemble. Nous avons noté que les auteurs introduisent la notion de fermeture et tous ne mentionnent pas celle d'adhérence alors que ces deux notions coïncident, comme le montre Revuz.

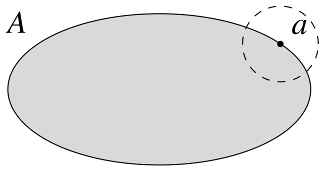
Nous avons aussi relevé que le mode d'exposition de chaque manuel suit le schéma classique « définition, résultats, démonstrations ». L'introduction des notions est quelque peu motivée dans les livres de Revuz, Choquet et Lehmann. Nous avons principalement trouvé deux sources de motivation pour pénétrer dans le domaine de la topologie. La première est de parvenir à définir la notion de continuité. Revuz et Skandalis le mentionnent explicitement dans leurs objectifs. L'autre source, non indépendante de la première, est clairement une volonté affichée de travailler dans un cadre général et de présenter les notions de manière simplifiée, voire élégante, avec des définitions générales. Dans cette perspective, il n'y a pas lieu de définir préalablement les notions dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{R}^N$, sauf pour des raisons pédagogiques comme dans le programme de cours mentionné par Choquet. La place accordée aux notions de topologie élémentaire est finalement réduite à deux aspects : d'une part énoncer des résultats classiques tels que l'existence de la borne supérieure, la compacité d'un intervalle fermé et borné et le théorème de Bolzano-Weierstrass. D'autre part, ces deux espaces servent d'exemples pour particulariser les notions introduites dans un cadre général et abstrait.

Pourtant, un aspect qui est très minimisé dans les livres est justement la présence d'exemples. Ceux-ci sont souvent peu nombreux et ceux que nous avons rencontrés pour illustrer les notions sont très semblables. Dans $\mathbb{R}$, c'est la notion d'intervalle qui est fréquemment citée pour illustrer les notions d'ouvert et de fermé. Les ensembles $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\{1/n : n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\}$ reviennent très souvent aussi. Dans $\mathbb{R}^N$, la notion de boule ouverte (respectivement fermée) apparaît dans pratiquement tous les manuels comme exemple d'ouvert (respectivement de fermé). C'est donc au travers de ces quelques exemples que la topologie de $\mathbb{R}^N$ apparaît comme une particularisation des notions introduites dans un cadre plus général.

Les dessins sont un moyen très peu utilisé pour illustrer les notions. Chez Skandalis et Lehmann, nous en avons trouvés pour illustrer les notions de voisinage et le fait qu'une boule ouverte est un ensemble ouvert. Ces dessins illustrent l'idée que chaque point de l'ensemble est le centre d'une boule contenue dans l'ensemble. Revuz est le seul auteur qui donne une vision intuitive et géométrique de certaines notions. Par exemple, après avoir défini les notions de fermeture et d'intérieur dans le cadre des espaces topologiques, il en donne tout d'abord une vision intuitive avec des mots : « Dans le plan (muni de la topologie déduite de la distance ordinaire), l'ensemble défini par un contour fermé et comprenant les points intérieurs au contour et une partie du contour admet pour fermeture le même ensemble avec ses frontières complétées et pour intérieur, l'intérieur (au sens vulgaire du mot), du contour ». Il illustre ensuite les notions :



Il suit un cheminement semblable pour la notion de point adhérent pour lequel il explique que, « dans le plan a est adhérent à A si pour tout ε il y a des points de A dans la boule de centre a, de rayon ε. » Il l'illustre par un dessin :



Une dernière similitude entre les manuels est un usage très marqué de la langue naturelle pour développer les contenus. Le registre symbolique est moins sollicité, y compris dans les indications fournies pour résoudre les exercices. Les définitions, les résultats et même les démonstrations sont écrites avec des mots, le registre symbolique n'intervenant qu'au travers de noms donnés aux objets et pour écrire les symboles correspondants aux opérations ensemblistes. Il n'apparaît pas comme fondamental pour décrire les notions. Schwartz l'utilise dans un souci d'économie d'écriture, en ne pointant que cette seule fonctionnalité. Et dans la suite du livre, il continue d'utiliser le registre de la langue naturelle.

Nous avons cependant relevé une différence majeure qui, nous semble-t-il, est fonction de l'époque considérée. Au réseau de notions décrit précédemment viennent s'ajouter d'autres notions dans les quatre manuels plus anciens, c'est-à-dire ceux de Rudin, Revuz, Schwartz et Choquet, que nous avons très peu retrouvées dans les autres manuels. Il s'agit de types de points : point intérieur, point d'accumulation, point adhérent, point isolé. Ces points permettent de fournir des définitions équivalentes pour les notions d'intérieur et d'adhérence qui apparaissent comme les ensembles formés des points intérieurs et adhérents de l'ensemble considéré. Dans les manuels récents, la notion qui apparaît souvent est celle de point d'accumulation. Les caractérisations des notions en termes de suite dans les espaces métriques, comme chez Skandalis par exemple, fournissent en effet des résultats mettant en jeu cette notion et celle de compacité. Mais globalement, la place des types de points est minorée dans les manuels plus récents.

3.2 Les exercices

Nous avons précédemment expliqué que l'étude théorique des notions s'était limitée à leur introduction dans les manuels, compte tenu du rôle très restreint de la topologie élémentaire dans les cadres de travail initialement choisis. Cet aspect réduit également notre analyse des exercices qui, eux aussi, sont principalement proposés dans les contextes des espaces métriques ou topologiques. La majorité des exercices que nous avons rencontrés sont inaccessibles à des étudiants en première année universitaire.

Néanmoins, nous avons trouvé des exercices qui sont soit énoncés directement dans le cadre de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}^N$, soit énoncés dans un cadre général mais susceptibles d'être adaptés à notre cadre particulier. Nous n'avons par contre pas retenu les exercices portant sur la compacité et la connexité qui ne sont pas des notions visées au niveau d'enseignement qui nous intéresse. Une liste de tels exercices est donnée ci-dessous.

Notre objectif n'est pas de les proposer tels quels dans la conception d'un enseignement de topologie mais d'étudier, lorsque nous élaborerons un scénario d'enseignement tenant compte des contraintes institutionnelles, comment nous pouvons intégrer des questionnements semblables dans un enseignement pour faire travailler les étudiants sur des tâches différentes des tâches de manipulation des définitions, très présentes dans l'enseignement décrit au chapitre I.

Après avoir présenté les énoncés, nous expliquons ce qui a motivé précisément notre volonté de les juger pertinents pour notre travail.

1. (Rudin) Construire un sous ensemble borné de $\mathbb{R}$ qui possède exactement trois points limites.
2. (Rudin) Soit E' l'ensemble des points limites d'un ensemble E. Montrez que E' est fermé.
3. (Revuz) Montrer que, dans un espace métrique, tout ouvert est une réunion de boules.
4. (Revuz) Montrer que l'ouvert le plus général de la droite réelle est une réunion dénombrable (ou finie) d'intervalles deux à deux disjoints. (Étant donné un ouvert O de la droite réelle et un point $x_0 \in O$ on étudiera les intersections du complémentaire de O avec la demi-droite $[x_0, +\infty[$ et avec la demi-droite $]-\infty, x_0]$.)
5. (Revuz) Montrer que $\mathrm{adh} A = \overline{A}$ en cherchant les complémentaires des deux membres de la formule $\mathring{A} = \{x \,;\, A \in V(x)\}$.
6. (Revuz) Établir les formules suivantes : a) par dualité : b) directement :
   - □ $A \supset B \Rightarrow \mathring{A} \supset \mathring{B}$

- □ $\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}} = \mathring{A}\cap\mathring{B}$

7. (Revuz et Gostiaux) Trouver dans le plan muni de sa topologie usuelle un ensemble tel que les sept ensembles suivants soient distincts : A, $\overline{A}$, $\mathring{A}$, $\mathring{\overline{A}}$, $\overline{\mathring{A}}$, $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$, $\overline{\mathring{\overline{A}}}$.
8. (Revuz) Établir les équivalences :
   - □ A fermé $\leftrightarrow$ frontière de A incluse dans A.
   - □ A ouvert $\leftrightarrow$ frontière de A disjointe de A.
9. (Choquet) Soit f une application d'un espace topologique E dans $\mathbb{R}$; montrer que si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\{x : f(x) < \lambda\}$ et $\{x : f(x) > \lambda\}$ sont ouverts, f est continue.
10. (Choquet) Soit f une application continue d'un espace topologique X séparé dans lui-même. Montrer que l'ensemble des points x de X tels que $f(x) = x$ est fermé.

Les exercices 1 et 2 soulèvent une question d'ordre didactique. La notion de point limite ne fait pas partie des notions que nous visons. Elle apparaît néanmoins dans l'ensemble des manuels consultés. Ces exercices retiennent donc notre attention car ils amènent une réflexion sur la variété des notions à enseigner dans le cadre d'une introduction à la topologie de $\mathbb{R}^N$ préalablement à l'élaboration de séquences d'enseignement. Une question sous-jacente consiste à nous demander quels pourraient être les avantages à introduire des types de points en lien avec la question du sens à donner aux notions visées.

L'exercice 3 peut être posé dans le cadre de $\mathbb{R}^N$ et tout comme l'exercice 4, ce type d'exercice permet, chez l'étudiant, une réflexion sur la structure des ensembles en caractérisant la notion d'ouvert dans des espaces de référence. Cette réflexion peut être amorcée et appuyée par l'enseignant grâce à des commentaires méta-mathématiques.

Les exercices 5, 6 et 8 mélangent les cadres de la topologie et de la théorie des ensembles. Ils permettent de travailler les notions aussi bien à partir de leur définition qu'à partir d'une de leur caractérisation, comme demandé dans l'exercice 6 d'ailleurs.

L'exercice 7 est posé dans le cadre de $\mathbb{R}^2$. Les étudiants doivent posséder, dans leur bagage mathématique, un stock de référence en matière d'ensembles ouverts ou fermés. Ils peuvent donc essayer de combiner différents types d'ensembles déjà rencontrés pour aborder cette question. Cet exercice permet une réflexion complémentaire sur la structure topologique de ces ensembles de référence et peut également être l'occasion de s'appuyer sur le registre du dessin pour aider à la construction des ensembles demandés.

Les exercices 9 et 10 intègrent au cadre de la topologie la notion de la continuité d'une fonction. Les différentes notions doivent donc être mises en relation.

Dans ces exercices, aucune méthode n'est indiquée, exception faite de l'exercice 4. Les choix de définition sont également à la charge de l'étudiant. Ces exercices ne peuvent pas, selon nous, être proposés au début d'un enseignement de topologie, au niveau concerné dans notre travail. Cependant, ils nous fournissent des pistes pour concevoir des exercices permettant de travailler d'autres aspects des notions que celui de la manipulation de leur définition.

4 Spécificités des notions de topologie, du côté du savoir à enseigner

Avant de nous centrer sur les caractères formalisateur, unificateur et généralisateur des notions de topologie, il nous semble que l'analyse menée met en évidence quelques spécificités des notions, telles qu'elle apparaissent dans les manuels.

Une première spécificité tient à la fonction des notions au sein des manuels. Les notions sont en effet introduites d'une part pour caractériser la notion de continuité d'une fonction et la reformuler quand on ne travaille pas dans $\mathbb{R}$ et d'autre part pour caractériser la structure d'espaces généraux. Cette spécificité est confirmée par la nature des exercices proposés. Ceux-ci portent en effet majoritairement sur la structure topologique des ensembles et lorsque les notions de topologie sont mises en relation avec d'autres notions, c'est précisément la notion de continuité qui est travaillée.

Une autre spécificité est que la topologie élémentaire, de $\mathbb{R}^N$ et de $\mathbb{R}$, n'apparaît pas comme un enjeu explicite de ce qui relève d'un exposé de topologie. Elle ne semble pas offrir un cadre de travail propice à la généralisation des notions à la topologie générale et même métrique. Le cœur de la topologie élémentaire semble être d'établir un certain nombre de résultats d'analyse tels que l'existence de la borne supérieure, la compacité d'un intervalle fermé et borné et le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Le rôle de la topologie élémentaire apparaît d'ailleurs non pas comme une source de généralisation, mais au contraire comme un cadre propice à la particularisation des notions générales puisque la place qui lui est accordée est d'illustrer, par des exemples, les notions introduites dans le cadre des espaces métriques ou topologiques.

Une autre spécificité est mise en évidence par le réseau de notions que nous avons décrit : voisinage, ouvert, fermé, intérieur, adhérence. Toutes ces notions peuvent être définies les unes à partir des autres offrant ainsi à chaque notion une multitude de caractérisations.

Nous pouvons maintenant donner quelques éléments concernant la nature formalisatrice, unificatrice et généralisatrice des notions de topologie dans les manuels.

Le caractère formalisateur

Le langage formel utilisé pour caractériser les notions sollicite principalement le registre de la langue naturelle. Ce dernier est totalement infiltré par une utilisation importante de symboles mathématiques, notamment pour les opérations ensemblistes. Les quantificateurs sont quant à eux très souvent exprimés dans la langue naturelle.

Les caractères unificateur et généralisateur

Nous regroupons la description de ces deux caractères pour la raison suivante. Les manuels ne mettent pas en évidence les aspects unificateur et généralisateur dans le cadre de la topologie élémentaire. Ce cadre apparaît en effet comme un cas particulier des espaces généraux. Par conséquent, sa présentation est telle qu'il unifie et ne généralise aucune notion antérieure.

L'unification et la généralisation sont spécifiques au cadre des espaces topologiques. L'introduction de ces espaces est liée à une volonté d'abstraction, confirmée par différents auteurs dans les manuels. Cette volonté amène à se centrer sur les seules notions et propriétés qui permettent de décrire ces espaces généraux, c'est-à-dire la notion d'ouvert (ou de voisinage) et les axiomes associés. Les notions qui en découlent, comme celles de fermé, d'intérieur ou d'adhérence, peuvent alors être définies de manière uniforme et générale : un fermé est le complémentaire d'un ouvert, l'intérieur d'un ensemble est le plus grand ouvert inclus dans l'ensemble et l'adhérence d'un ensemble est le plus petit fermé contenant l'ensemble.

L'unification et la généralisation des notions sont donc cristallisées autour de l'introduction des espaces topologiques grâce à la notion d'ouvert. Les notions peuvent alors être particularisées au cadre de la topologie élémentaire et permettre de retrouver les notions qui caractérisent la structure topologique de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^N$: intervalle, boule, ... Les notions d'intérieur et d'adhérence peuvent alors prendre un sens intuitif, comme le montre Revuz.

En conclusion, la topologie de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^N$ est clairement considérée comme un cas particulier du cadre des espaces métriques ou topologiques. Dans les manuels analysés, ce mouvement qui consiste à passer du cadre général des espaces métriques ou topologiques au cadre particulier de la topologie de $\mathbb{R}^N$ ne fait pas émerger de manière évidente les caractères formalisateur, unificateur et généraisateur des notions.

Si ces notions doivent être introduites dans un enseignement, en unifiant et en généralisant des notions antérieures, il est nécessaire d'amorcer une réflexion spécifique sur l'enseignement à concevoir, sur le type de notions à introduire, sur les exercices à proposer et sur le discours ménagé par l'enseignant pour dégager ce que les notions de topologie à enseigner pourraient réellement unifier et généraliser.

5 Limites méthodologiques et perspectives

L'étude réalisée reste bien entendu très succinte et ce, pour diverses raisons. Nous sommes tout d'abord bien consciente que celle-ci est réduite par le nombre de livres consultés. Ensuite, nos analyses ne relèvent finalement que de l'introduction des notions dans les différents manuels. La fonction des notions pourrait sans doute être mieux précisée grâce à une analyse plus fine de l'ensemble des chapitres traitant des espaces métriques et topologiques.

Enfin, nos besoins didactiques sont tels que bien des notions relevant du cadre de la topologie n'ont pas été retenues dans l'étude. C'est le cas des notions de compacité et de connexité. Une réflexion complémentaire pourrait donc être menée sur l'apport didactique de ces notions dans un enseignement de topologie au niveau d'enseignement visé.

Néanmoins, cette analyse centrée sur nos propres besoins nous permet de revenir, au chapitre suivant, à notre projet initial en fournissant des pistes didactiques à explorer pour concevoir un enseignement des notions visées dans ce travail.

Chapitre VII

Perspectives didactiques

Dans ce chapitre, nous mettons en regard les conclusions obtenues de la réalité historique et de l'analyse des manuels avec l'enseignement de topologie décrit au chapitre I. Sur cette base, nous fournissons quelques pistes à explorer dont l'intégration dans notre enseignement permettraient de surmonter certaines difficultés rencontrées chez les étudiants.

1 Une immense transposition didactique du savoir enseigné

1.1 Retour au projet initial

La mise en évidence des spécificités des notions de topologie, tant du côté du savoir savant, via notre synthèse historique, que du savoir à enseigner, via notre analyse de manuels, nous permet de revenir maintenant à notre projet initial. Nous sommes en effet guidée par la perspective d'agir sur un enseignement de topologie qui provoque initialement des difficultés chez les étudiants. Après avoir travaillé, dans cette partie, en amont de l'enseignement, nous cherchons à présent à le confronter aux conclusions obtenues pour étudier nos moyens d'action.

Nous rappelons tout d'abord les principales caractéristiques de cet enseignement. Le cadre de travail est celui de la topologie élémentaire de $\mathbb{R}^N$, dans lequel les quatre notions suivantes sont enseignées : intérieur et adhérence d'un ensemble, ensemble ouvert et ensemble fermé. Les notions d'intérieur et d'adhérence sont caractérisées en termes de boules et de suites dans le registre symbolique, sans réelle motivation. Un ouvert (respectivement un fermé) est un ensemble coïncidant avec son intérieur (respectivement avec son adhérence). Ces deux dernières notions sont de plus caractérisées en termes de suites et de boules, avec une utilisation massive du registre symbolique.

L'enseignement en question vise principalement à atteindre deux objectifs. L'un consiste à présenter les notions d'ouvert et de fermé comme unifiant et généralisant un certain nombre de notions fréquemment rencontrées par les étudiants dans leur parcours antérieur, c'est-à-dire principalement au lycée et au début de l'enseignement universitaire : intervalle ouvert ou fermé dans $\mathbb{R}$, la réunion et l'intersection de tels intervalles, boule ouverte ou fermée... En ce sens, l'enseignement vise à caractériser la structure topologique d'un certain nombre d'ensembles de référence en s'appuyant sur le vocabulaire utilisé (ouvert, fermé par exemple).

Un autre objectif est d'amener les étudiants à manipuler le langage formel utilisé dans les différentes caractérisations des notions. Cet objectif a des conséquences sur la nature des exercices proposés, qui consistent essentiellement en des applications immédiates des définitions. Nous savons que ce type d'exercices ne permet pas de donner du sens aux notions, notamment parce qu'il ne met pas en jeu de réelles connaissances en topologie et parce qu'il mobilise des connaissances en logique et en théorie des ensembles qui ne sont pas disponibles chez un grand nombre d'étudiants.

Ainsi, l'introduction non motivée des nouvelles notions, la variété de leurs caractérisations et la nature des exercices proposés sont autant d'éléments qui ne permettent pas de travailler à la fois sur les aspects formel et conceptuel et font que cet enseignement ne mène ni à la conceptualisation des notions, ni à une utilisation appropriée du formalisme. Prenant en compte ces éléments et les conclusions obtenues dans les deux chapitres précédents, nous cherchons maintenant à agir sur cet enseignement en nous centrant essentiellement sur deux aspects : l'introduction des notions et la nature des exercices à proposer aux étudiants.

Dans un premier temps, nous confrontons notre étude de la réalité historique et l'analyse de quelques manuels à l'enseignement que nous venons de décrire. Nous mettons en évidence des décalages importants entre cet enseignement et ce qui relève de nos conclusions à propos du savoir savant et du savoir à enseigner. Ceux-ci nous permettent néanmoins de développer quelques pistes didactiques à explorer pour tenter d'agir sur l'enseignement en question, en y intégrant de nouveaux éléments susceptibles de favoriser les apprentissages des étudiants en topologie.

1.2 Savoir savant – savoir à enseigner – savoir enseigné

▸▸ Des décalages importants

Que ce soit dans la réalité historique ou dans l'analyse de manuels, nous avons montré que les quatre notions dont il est question dans notre enseignement s'insèrent dans un réseau plus vaste dans lequel sont intégrés la notion de voisinage et des types de points (points isolé, intérieur, adhérent, d'accumulation). Nos analyses mettent également en évidence qu'au sein de ce réseau, ce ne sont pas les notions d'intérieur et d'adhérence qui émergent en premier lieu, contrairement à ce qui se passe dans notre enseignement. En effet, tant du côté du savoir savant que du savoir à enseigner, les notions de voisinage, d'ouvert et de fermé et les types de points sont introduits bien avant celles d'intérieur et d'adhérence. Nous pensons qu'une raison possible est liée au fait qu'un objectif clairement associé à l'émergence des notions est la volonté de travailler dans un cadre le plus général possible. Ce sont alors précisément les notions d'ouvert et de voisinage qui permettent de caractériser la structure des espaces généraux.

Nous avons ensuite rencontré de nombreuses caractérisations possibles des notions faisant partie de ce réseau. Les notions de voisinage et d'ouvert peuvent être définies l'une à partir de l'autre, par exemple en prenant appui sur la notion de boule dans le cadre des espaces métriques. Ainsi, un ensemble est un voisinage d'un point x s'il contient une boule de centre x. Un ouvert est alors un ensemble qui est voisinage de chacun de ses points. Un autre itinéraire consiste à définir un ouvert comme un ensemble dont tous les points sont centres d'une boule contenue dans cet ensemble. Un voisinage d'un point x est alors un ensemble contenant un ouvert contenant x. Un fermé peut alors être défini comme le complémentaire d'un ouvert.

L'intérieur se caractérise de différentes manières. Il peut être

- l'ensemble des points intérieurs à l'ensemble ;
- la réunion de tous les ouverts contenus dans l'ensemble ;
- le plus grand ouvert contenu dans l'ensemble.

Il en va de même pour l'adhérence dont les caractérisations sont, elles aussi, multiples. Elle peut être :

- l'ensemble des points adhérents ;
- l'intersection de tous les fermés contenant l'ensemble ;
- le plus petit fermé contenant l'ensemble.

Dans notre enseignement, nous optons pour des caractérisations différentes de celles précédemment décrites. C'est en effet à partir des notions de suite et de boule que les notions sont décrites. Or, nous n'avons rencontré ni dans notre synthèse historique ni dans les manuels la caractérisation de fermé en termes de boule, telle que nous la donnons dans l'enseignement, tout comme celle de suite pour la notion d'ouvert [1]. Nos choix d'enseignement minorent donc fortement la possibilité d'établir un certain nombre de liens entre les notions qui sont beaucoup plus visibles dans les caractérisations issues des analyses menées dans cette partie, où les notions sont définies les unes à partir des autres, que ce soit dans l'histoire ou dans les manuels.

La question des caractérisations des notions soulève également celle du choix des registres d'écritures pour les expliciter. Notre enseignement, centré sur la manipulation du registre symbolique, est une fois encore en décalage avec les analyses menées. Les notions y sont en effet définies à partir du registre de la langue naturelle, historiquement parlant et dans les manuels également. Le langage formel a pour seule fonction une économie d'écriture, d'ailleurs soulignée par Schwartz. Le recours aux symboles mathématiques est très minoré dans le paysage mathématique que nous avons étudié.

[1] Rappelons que les caractérisations utilisées dans notre enseignement sont données au chapitre I, p. 7.

Nous abordons ci-dessous des aspects spécifiquement liés aux deux thèmes que nous souhaitons étudier : l'introduction des notions et la nature des exercices à proposer aux étudiants.

▶▶ L'introduction des notions

Notre enseignement s'attache à introduire la topologie de $\mathbb{R}^N$, en la particularisant à $\mathbb{R}$ dans les exercices notamment. Nos différentes analyses ne vont pas dans ce sens. En effet, du point de vue de l'histoire, les notions émergent tout d'abord dans le cadre de la droite réelle pour permettre le développement de questions issues de la théorie des séries de fonctions associée à des questions de convergence, donc de limite. Mais ces domaines sont inaccessibles à notre niveau d'enseignement. Il nous semble donc difficile de nous en inspirer pour motiver l'introduction des notions à enseigner.

La généralisation à $\mathbb{R}^N$ apparaît finalement comme allant de soi, le processus étant tellement naturel qu'il en est presque transparent dans les travaux étudiés. Nous avons par contre montré que l'unification et la généralisation relèvent précisément de l'émergence de la notion d'espace topologique, donc au sein du cadre de la topologie générale. Ce cadre est lui aussi inaccessible au niveau visé.

Du côté des manuels, nous avons situé la place réduite occupée par la topologie de $\mathbb{R}^N$. Celle-ci est utilisée ponctuellement pour particulariser à des exemples dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$ les notions introduites dans le cadre des espaces topologiques. Les commentaires des auteurs le confirment, la topologie est un domaine associé à l'idée de présenter les notions sous leur forme la plus générale possible.

Il nous semble donc difficile de caractériser la fonction des notions de topologie dans le cadre $\mathbb{R}^N$ à des étudiants en première année universitaire et quel rôle les notions qui relèvent de ce cadre peuvent jouer dans leurs connaissances anciennes et nouvelles. Dans l'enseignement décrit au chapitre I, elle apparaît comme une théorie pouvant unifier et généraliser des notions introduites dans $\mathbb{R}$ telles que les intervalles. Les manuels analysés lui confèrent au contraire un statut de particularisation des notions de topologie générale. La difficulté de motiver l'introduction des notions, dans notre enseignement, à partir d'un « bon » problème initial, est donc très clairement confirmée. Les exercices que nous avons rencontrés ne nous semblent pas non plus fournir des pistes à explorer pour introduire les notions, compte tenu des notions qu'ils mettent en jeu, souvent hors de portée du niveau d'enseignement visé et des contraintes de notre institution.

▶▶ La nature des exercices proposés

Les problèmes issus de l'histoire retraçant l'émergence des notions et leur développement se situent dans les cadres de la théorie des séries de fonctions, de la construction de l'ensemble des réels... Il nous semble, ici aussi, difficile d'exploiter les théories dans lesquelles les notions de topologie sont utilisées à des fins d'élaboration d'exercices à proposer aux étudiants, au niveau d'enseignement visé.

Notre enseignement vise principalement à faire manipuler les définitions mais les manuels fournissent d'autres types d'exercices, davantage axés sur la structure topologique des ensembles. Nous avons également trouvé des exercices faisant intervenir les notions de topologie avec celle de la continuité des fonctions. Il s'agira, pour nous, d'en étudier les possibilités d'adaptations à notre enseignement.

▸▸ Conclusion

En conclusion, notre enseignement propose une genèse des notions présentant un certain nombre de décalages importants par rapport à leur rôle dans la réalité historique et au sein des manuels. La transposition didactique réalisée au sein de cet enseignement est « gigantesque » comparativement à l'émergence des notions dans les textes du savoir savant et à enseigner.

Les différences observées semblent indiquer que nous fabriquons artificiellement des aspects formalisateur, unificateur et généralisateur des notions à enseigner, qui n'ont pas été pointés par les études réalisées dans cette partie. En effet, la nature formalisatrice des notions est mise en évidence par l'utilisation massive que nous faisons du registre symbolique. Celui-ci est volontairement utilisé pour caractériser les notions alors que le registre de la langue naturelle est tout à fait suffisant pour introduire les mêmes notions. La nature unificatrice et généralisatrice des notions est également « fabriquée » par le mode de présentation choisi. En nous plaçant dans $\mathbb{R}^N$ pour introduire les nouvelles notions, nous cherchons à unifier et généraliser le cadre de la droite réelle, alors que cet aspect est pratiquement transparent dans la production du savoir décrite tout au long de cette partie, tant dans nos analyses historiques que dans celles des manuels.

2 Pistes à explorer

À ce stade du travail, notre compréhension de ce qui est au cœur des notions de topologie s'est élargie dans au moins deux directions. D'une part, nous avons maintenant une vision beaucoup plus globale, externe à notre contexte institutionnel, des spécificités des notions. Leur genèse historique, leur fonction dans les cadres de la topologie élémentaire et générale, leur présentation dans les manuels nous ont permis de préciser leur véritable nature formalisatrice, unificatrice et généralisatrice.

D'autre part, nous cernons d'autant mieux les notions enseignées. En confrontant la description de notre enseignement aux résultats obtenus, nous pensons avoir montré l'ampleur du travail de transposition à mener pour introduire les notions visées et toute la difficulté à leur donner du sens.

Cette mise en relief des notions nous amène à développer des pistes de travail, que nous présentons sous la forme de questions à étudier pour tenter de modifier quelques aspects de notre enseignement dans le but de surmonter certaines difficultés.

2.1 La progression des contenus à enseigner

Nous faisons l'hypothèse qu'une manière de contribuer à donner du sens aux notions est la possibilité d'établir des liens entre elles. Or, la progression actuelle des quatre notions à enseigner et les caractérisations données ne privilégient pas de tels liens. L'accent est en effet mis sur la manipulation des caractérisations en termes de boule et de suite.

Nos analyses précédentes ont montré que les notions sont définies les unes à partir des autres en s'intégrant dans un réseau plus vaste. Une réflexion peut donc être menée sur l'intégration, dans notre enseignement, d'autres notions que celles enseignées et des choix de caractérisations associés pour permettre davantage de cohésion dans la progression des contenus.

Cette réflexion s'associe aux questions de l'ordre dans lequel les notions peuvent être introduites et du choix des résultats à démontrer dans l'enseignement.

2.2 Le recours à l'intuition

Nous savons qu'une volonté affichée du domaine de la topologie est de permettre de travailler dans un cadre général, centré sur l'abstraction et ne faisant pas appel à l'intuition. Le caractère abstrait des notions enseignées a lui aussi été confirmé dans des questionnaires proposés à nos étudiants.

Nous avons cependant rencontré des éléments montrant la possibilité de recourir à l'intuition tout en travaillant avec des notions abstraites. Nous pensons par exemple aux travaux de Riemann dans lesquels il s'appuie sur l'expérience quotidienne et sur une vision intuitive des notions métriques de longueur, d'aire et de volume pour développer une théorie abstraite sur les variétés.

Un autre exemple a été rencontré chez Revuz lorsqu'il particularise les notions introduites dans le cadre des espaces topologiques à l'espace euclidien à deux dimensions. Il donne alors une caractérisation des notions guidée par des mots du vocabulaire quotidien (frontière, intérieur, contour...).

Il s'agit donc ici d'étudier la possibilité de partir de notions suffisamment intuitives chez les étudiants pour introduire les nouvelles notions.

2.3 Le recours aux dessins

L'idée de s'appuyer sur l'intuition permet également d'explorer la question de l'utilisation de dessins pour illustrer les nouvelles notions. Nous avons vu que Revuz complète sa vision intuitive des notions en les représentant par des dessins dans $\mathbb{R}^2$. Un dessin est une source potentielle pour aider au raisonnement, dans une démonstration par exemple.

Une réflexion peut être menée sur la possibilité d'intégrer, à certains moments de l'enseignement, l'utilisation de dessins avec une fonction qui devra, elle aussi, être précisée.

2.4 Les registres d'écriture

Les dessins sont un registre d'écriture que nous pensons développer comme un moyen de donner du sens aux notions. Mais la question de savoir quels registres utiliser pour les introduire trouve sa source dans la nature formalisatrice des notions qui est très, voire trop, exacerbée dans notre enseignement.

L'ensemble du travail mené dans cette partie montre pourtant que le registre de la langue naturelle est constamment privilégié pour caractériser les notions.

Nous devons donc nous demander le rôle précis que nous voulons faire jouer au langage formel et quels sont les apports potentiels de l'utilisation de la langue naturelle dans notre enseignement.

Ces pistes doivent maintenant être confrontées aux contraintes institutionnelles qui pèsent sur notre travail. Nous devons étudier la pertinence de leur intégration dans notre enseignement et la manière la plus appropriée de le faire pour tenter de restituer du sens aux notions enseignées, sans pour autant négliger la manipulation du langage formel qui demeure un objectif fort de l'enseignement.

Ce double travail d'élaboration et de confrontation au réel institutionnel fait l'objet de la partie suivante de ce travail.

Troisième partie

Élaboration d'un dispositif d'introduction des notions de topologie

Partie 3 — Introduction

Nous avons consacré la partie 2 de ce travail à l'étude du phénomène de transposition didactique de certaines notions de topologie. L'étude historique et épistémologique menée au chapitre V nous a notamment permis de retourner à la genèse des notions et à leur fonction au sein des théories qu'elles font émerger. Nous avons aussi dégagé des spécificités des notions étudiées en précisant leur nature formalisatrice, généralisatrice et unificatrice.

L'analyse des manuels présentée au chapitre VI a montré quels étaient les modes d'expositions des contenus fréquemment suivis. Nous avons aussi montré la place réduite occupée par la topologie élémentaire dans les livres où celle-ci apparaît comme un cas particulier des espaces métriques ou topologiques. Nous avons enfin mentionné quelques exercices permettant de travailler d'autres aspects que la manipulation des définitions des notions, notamment en travaillant sur la structure topologique de certains ensembles.

À ce stade du travail, nous disposons donc de deux visions des notions à enseigner. La première, à la base de ce travail, est le diagnostic de l'enseignement étudié dans le chapitre I. Il fournit un angle d'attaque complètement conditionné par les contraintes institutionnelles, montrant à quel point un enseignement centré sur la manipulation du langage formel ne contribue pas à l'acquisition des notions et engendre des difficultés chez les étudiants, qui utilisent le langage introduit sans en contrôler le sens. La variété des adaptations à réaliser dans les tâches de manipulation des définitions et la disponibilité des connaissances en logique et en théorie des ensembles ne facilitent pas, elles non plus, les acquisitions en topologie des étudiants. La partie 2 du travail nous fournit une vision plus globale des contenus à enseigner car elle précise la véritable nature des notions de topologie et en particulier, celles de topologie élémentaire.

Toutefois, même si l'ensemble des résultats obtenus nous renseigne sur le sens et la fonction des notions à enseigner et sur leur insertion dans les programmes, ils ne prennent pas en compte ce qui se passe en classe lorsque le professeur donne un cours de topologie élémentaire, ni ce qui se passe en travaux dirigés lorsque des exercices sont proposés aux étudiants. Pourtant, la mise au travail des étudiants et la gestion des tâches qui leur sont données peuvent jouer un rôle dans leurs apprentissages. Il y a donc lieu d'incorporer dans notre travail une partie plus expérimentale pour étudier les apprentissages en topologie que peuvent réaliser les étudiants.

Nous indiquons ci-dessous l'objectif général de cette partie du travail. Prenant en compte le travail réalisé en amont de l'enseignement dans les parties 1 et

2, nous cherchons à concevoir des séquences d'enseignement des notions de topologie élémentaire en tentant de rétablir une dynamique productive entre le sens et la technique, compte tenu des contraintes institutionnelles.

Il convient d'emblée de souligner que notre but n'est en rien de révolutionner l'enseignement de la topologie. Notre démarche est de loin plus modeste. Une raison est le poids des contraintes institutionnelles auxquelles nous sommes soumise. D'une part, les contenus à enseigner sont en effet fixés : il s'agit d'introduire les notions d'intérieur, d'adhérence, d'ensemble ouvert et d'ensemble fermé. D'autre part, la manipulation des définitions reste un objectif de l'enseignement. Nous cherchons donc à construire une progression cohérente des contenus visés dans laquelle les notions pourraient être introduites par l'intermédiaire d'une question accessible aux étudiants tout en leur permettant de travailler de manière plus ou moins autonome pour construire les nouvelles connaissances. La conception d'exercices qui ne consistent pas en la manipulation exclusive des définitions est aussi une question à étudier pour travailler à la fois les aspects formel et conceptuel.

Dans un premier temps, nous menons, au chapitre VIII, une réflexion générale sur l'idée d'élaborer des séquences d'enseignement en prenant appui sur la notion d'ingénierie didactique. Cette réflexion, combinée aux résultats obtenus dans les deux premières parties du travail, nous permettent de définir la conceptualisation des notions de topologie attendue. À cette étape, nous sommes également en mesure de choisir des leviers, à intégrer dans l'enseignement visé, dont nous pensons qu'ils peuvent contribuer à approcher cette conceptualisation.

Le scénario qui en découle est présenté au chapitre IX. Pour étudier son potentiel d'apprentissage, nous en proposons une lecture descriptive, au chapitre X, dans laquelle nous mettons en évidence les leviers intégrés à l'enseignement et les activités attendues des étudiants.

Chapitre VIII

Principes d'élaboration d'un dispositif d'introduction des notions de topologie

Dans ce chapitre, nous nous interrogeons tout d'abord sur l'idée d'élaborer des séquences d'enseignement portant sur quelques notions élémentaires de topologie en la mettant en regard de la notion d'ingénierie didactique. Après avoir expliqué en quoi notre projet s'en distingue, nous définissons la conceptualisation espérée dans l'enseignement, compte tenu des contraintes institutionnelles auxquelles nous sommes soumise. Les résultats établis dans les deux premières parties nous amènent à exposer une série de choix à expérimenter dans l'enseignement, pouvant contribuer aux apprentissages en topologie et amener les étudiants à la conceptualisation attendue.

1 La notion d'ingénierie didactique

L'élaboration d'un enseignement de la topologie de $\mathbb{R}^N$ soulève plusieurs questions. Dans un premier temps, il s'agit de définir la conceptualisation visée par l'enseignement. Ensuite, nous devons organiser un enseignement, en termes de contenus et de gestion de la classe, à proposer aux étudiants.

La production de séquences d'enseignement, appuyée par un travail théorique du chercheur, est liée à la notion d'ingénierie didactique. Nous prenons appui sur cette notion pour caractériser la nature de l'enseignement que nous cherchons à concevoir.

La notion d'ingénierie didactique est apparue dans le champ de la didactique des mathématiques au début des années 1980 en étant associée à des réalisations didactiques dans les classes. Pour la communauté didactique se pose alors la question de la relation entre l'ingénierie didactique et son action sur le système d'enseignement et, à travers elle, la capacité de la communauté à assurer sa légitimité sociale. En effet, comme le souligne Chevallard dans sa note de préparation de la deuxième école d'été de didactique des mathématiques, un enjeu important pour les didacticiens est « d'avancer des propositions face aux difficultés qui affectent le système d'enseignement » (Chevallard, 1982, p. 1).

La notion d'ingénierie didactique va se consolider, au fil des années 1980, comme une méthodologie de recherche entretenant des liens étroits avec la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998). Artigue (1990) présente deux caractéristiques majeures de l'ingénierie didactique vue comme une méthodologie. La première est qu'elle revêt un caractère expérimental passant par des phases telles que la conception, la réalisation et l'analyse de séquences d'enseignement. Elle plonge ainsi le chercheur dans la complexité du système étudié. Les objectifs visés dans la conception d'une ingénierie peuvent être variés, allant de l'étude des processus d'apprentissage d'un concept, amenant à la construction de genèses artificielles pour ce concept, à des recherches transverses aux contenus (par exemple l'apprentissage de méthodes, le travail en groupes...). Comme Artigue le souligne, « ce n'est donc pas par les objectifs des recherches menées sous sa bannière, mais bien par les caractéristiques de son fonctionnement méthodologique que l'ingénierie pose sa singularité » (ibid., p. 287). La seconde caractéristique est qu'il s'agit d'une méthodologie dont le mode de validation est essentiellement interne, s'appuyant sur la confrontation entre une analyse a priori et une analyse a posteriori.

Artigue distingue quatre phases dans la méthodologie d'ingénierie didactique, que nous décrivons brièvement ci-dessous.

Il y a tout d'abord la phase des analyses préliminaires dans laquelle le chercheur peut, par exemple, mener une analyse épistémologique des contenus visés par l'enseignement, une analyse des conceptions des élèves et des difficultés observées, une analyse du champ de contraintes dans lequel va se situer la réalisation didactique effective et la prise en compte des objectifs spécifiques de la recherche. Artigue explique que « les exigences d'analyse préalable ne seront pas les mêmes pour une recherche dont l'objectif est la construction d'une genèse artificielle de la connaissance dans un champ conceptuel donné..., et pour une recherche qui, par exemple, vise la mise en place d'une stratégie globale d'enseignement... » (ibid., p. 288).

La seconde phase de la méthodologie d'ingénierie didactique est celle de la conception et de l'analyse a priori de séquences d'enseignement. C'est ici que les liens avec la théorie des situations didactiques transparaissent tout particulièrement. En effet, une importance majeure est accordée, dans cette phase, à l'élaboration de situations prenant en compte l'épistémologie des notions à enseigner et porteuses d'un potentiel adidactique fort. En ce sens, le chercheur est guidé par la recherche de situations fondamentales susceptibles de « faire apparaître les connaissances visées comme des solutions optimales au problème mathématique posé à travers les interactions entre les élèves et un milieu adidactique, dans un fonctionnement quasi-isolé de l'enseignant » (Artigue, 2011, p. 20). L'analyse a priori doit donc, à ce titre, mettre en évidence le choix des variables didactiques et des leviers permettant de produire les connaissances visées chez les élèves de manière quasi-autonome. Enfin, le rôle attribué aux différents acteurs illustre également les liens tissés avec la théorie des situations puisque l'élève apparaît comme un sujet épistémique tandis que l'enseignant est pris en compte de manières théoriques à travers les processus de dévolution et d'institutionnalisation.

Vient alors la phase « classique » d'expérimentation, suivie d'une phase d'analyse a posteriori. Cette dernière s'appuie sur l'ensemble des données qui ont été recueillies lors de l'expérimentation, allant des observations réalisées pendant les séances d'enseignement aux productions des élèves. Ces données peuvent être complétées par des éléments obtenus à partir de questionnaires proposés aux élèves et d'entretiens réalisés pendant ou après l'enseignement. Enfin, « c'est sur la confrontation des deux analyses : analyse a priori et analyse a posteriori que se fonde essentiellement la validation des hypothèses engagées dans la recherche » (Artigue, 1990, p. 297).

Au fil des années, le rôle de l'enseignant a été davantage pris en compte en considérant celui-ci « comme un acteur tout aussi problématique que l'élève de la relation didactique » (Artigue, 2011, p. 8), d'où le besoin de comprendre les pratiques enseignantes et les caractéristiques du métier d'enseignant.

Sans pour autant disparaître, le statut de l'ingénierie comme une méthodologie de recherche privilégiée a été minoré tout en continuant de vivre, notamment grâce aux évolutions internes de la théorie des situations didactiques et à ses usages dans d'autres champs disciplinaires.

Notre projet d'enseignement de conception de séquences d'enseignement se distingue de la notion d'ingénierie didactique. En effet, c'est la recherche d'une situation fondamentale qui guide la conception d'une ingénierie didactique. L'enseignement consiste donc à dévoluer à l'élève une ou plusieurs situations adidactiques appropriées et les apprentissages résultent de l'adaptation à ces situations. Artigue (ibid.) explique que, de manière à analyser la situation adidactique que l'on a cherché à construire, l'analyse a priori va comporter une partie descriptive et une partie prédictive. Le chercheur doit décrire les choix effectués au niveau local et la situation adidactique qui va en découler. L'enjeu de cette situation pour l'élève doit aussi être analysé. Le chercheur peut alors prévoir les champs de comportements possibles tout en essayant de montrer en quoi l'analyse réalisée assure que les comportements attendus résultent bien de la mise en œuvre de la connaissance visée par l'apprentissage.

Le chercheur va donc essayer d'évaluer les avancées du savoir chez les élèves en réalisant des prévisions précises et en regardant a posteriori ce qui est effectivement réalisé. Notre projet n'a pas la même ambition. La nature formalisatrice, unificatrice et généralisatrice des notions, telles que nous devons les enseigner, complique en effet la recherche d'une situation fondamentale visant à les introduire. De plus, nous avons montré la complexité du travail mathématique à réaliser dans un certain nombre de tâches mettant en jeu des applications immédiates des notions. Laisser travailler les étudiants de manière autonome sur ce type de tâches ne nous semble pas les amener à l'appropriation des connaissances visées.

En ce sens, nous ne cherchons pas à produire une ingénierie didactique. Notre enseignement de topologie se limite à l'introduction de quelques notions (intérieur, adhérence, ouvert, fermé). Nous allons donc nous attacher à organiser une progression cohérente des notions à enseigner en nous appuyant sur des leviers susceptibles, a priori, de donner du sens aux notions sans négliger le travail de la technique.

Nous n'empruntons donc pas la terminologie d'« ingénierie didactique » pour désigner notre projet de conception de séquences d'enseignement des notions de topologie. Il nous semble plus approprié, pour caractériser ce projet, de parler de la conception d'un « dispositif d'introduction des notions ».

2 Définition de la conceptualisation visée

Préalablement à l'élaboration d'un dispositif d'introduction, nous définissons la conceptualisation visée. Au chapitre III, nous avons associé la conceptualisation à une certaine disponibilité des notions dans leurs dimensions objet et outil, à leur mise en fonctionnement dans divers cadres, en manipulant différents registres d'écriture, et à une prise de sens des notions tout en ne négligeant pas les aspects techniques (p. 31).

Prenant en compte le programme institutionnel auquel nous sommes soumis, nous caractérisons les apprentissages visés en topologie en décrivant les notions à introduire, les définitions et les propriétés associées et les types d'exercices visés. Nous précisons également le niveau de rigueur attendu dans les productions des étudiants et la réorganisation des connaissances attendues à la fin de l'enseignement à partir des éléments que nous venons de décrire.

Notions à enseigner

Introduire les notions d'intérieur et d'adhérence d'un ensemble, et celles d'ensemble ouvert, d'ensemble fermé.

Arsenal de définitions et propriétés

- Caractériser les notions en utilisant d'une part la notion de boule et d'autre part, celle de suite.
- Démontrer l'équivalence des deux types de définitions.
- Démontrer quelques résultats classiques de topologie reliant l'intérieur et l'adhérence d'un ensemble, la dualité entre les ensembles ouverts et les ensembles fermés.
- Étudier la réunion et l'intersection d'une famille quelconque d'ouverts et de fermés.

Types d'exercices

- Rechercher l'intérieur et l'adhérence d'ensembles de référence dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{R}^2$.
- Décider si un ensemble donné est ouvert (ou non), fermé (ou non) et le justifier à partir des définitions.
- Résoudre des exercices dans lesquels les notions interviennent dans différents cadres.

Dialectiques outil / objet et sens / technique

- □ Manipuler correctement le langage formel, en réalisant les bonnes adaptations (traduction des définitions, reconnaissance des modalités d'application, changements de points de vue...).
- □ Utiliser correctement les connaissances en logique et en théorie des ensembles.
- □ Interpréter et traduire les définitions dans différents registres d'écriture (dessin, symbolique, langue naturelle...).
- □ Reconnaître les notions à utiliser où qu'elles apparaissent et à bon escient (choix d'un type de définition par exemple).

Il nous semble également important de faire le point sur le bagage mathématique des étudiants au moment où l'enseignement de la topologie démarre. Nous devons tout d'abord préciser que les étudiants suivent un cours de mathématiques générales dès leur entrée à l'université. Ce cours a lieu durant les mois de septembre et octobre, les cours d'analyse, d'algèbre et d'algèbre linéaire démarrent quant à eux en novembre. Ce cours de mathématiques générales a notamment pour objectif de revoir certaines notions de l'enseignement secondaire telles que la manipulation d'inégalités dans $\mathbb{R}$ ou les propriétés de la valeur absolue. De plus, nous introduisons quelques notions de logique et de théorie des ensembles dont nous avons déjà évoqué que leur enseignement n'était pas pris en charge dans le secondaire. Les étudiants vont donc, dans le cadre de ce cours, manipuler et utiliser la négation d'une propriété, la notion d'implication et les opérations ensemblistes que sont l'inclusion, l'intersection et la réunion de deux ensembles [1]. Le travail sur ces notions se poursuit dans l'ensemble des cours. Concernant le cours d'analyse [2], le chapitre sur la topologie est précédé par ceux portant sur la convergence des suites de nombres réels, sur les notions de maximum, minimum, bornes supérieure et inférieure d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, sur les normes dans $\mathbb{R}^N$ et sur la continuité des fonctions. Enfin, dans l'ensemble des cours, un accent particulier est mis sur la rigueur attendue dans les productions des étudiants. Lors de la résolution d'exercices, les enseignants exigent en effet des étudiants qu'ils expliquent leur démarche, qu'ils citent les définitions et les résultats utilisés et qu'ils détaillent leurs calculs.

3 Choix précis du chercheur pour la conception de son dispositif

À ce stade du travail, nous mettons en regard la conceptualisation visée et les pistes didactiques développées au chapitre VII pour amorcer la description d'un

[1] Le lecteur trouvera des exercices proposés aux étudiants sur ces notions à l'adresse : `http://math.umh.ac.be/an/fr/enseignement/mathelem/`

[2] Rappelons que le programme de ce cours est donné dans l'annexe A.

dispositif d'introduction des notions. Dans cette perspective, nous sommes amenée à faire des choix de contenus et de gestion de la classe, que nous présentons ci-dessous. Nous faisons l'hypothèse que leur intégration dans notre dispositif pourrait contribuer aux acquisitions des étudiants en topologie. Il s'agit de choix faits a priori. C'est bien entendu leur expérimentation au sein de l'enseignement qui permettra d'en tester les effets.

3.1 Des choix sur les contenus à enseigner

La progression des contenus

Le travail en réseau de notions (théorie des champs conceptuels, Vergnaud, 1990) est un levier susceptible de donner du sens aux notions. Nous l'avons évoqué au chapitre III.

Les analyses menées dans la partie 2 montrent bien, elles aussi, que c'est au sein d'un réseau de types de sous-ensembles et de types de points que les notions de topologie sont introduites. Les notions y sont définies les unes à partir des autres. Le choix de l'itinéraire à suivre peut donc conditionner certaines mises en relation entre les notions à enseigner et par conséquent, leur donner du sens.

Les deux notions qui retiennent notre attention sont celles de point intérieur et de point adhérent car elles sont en lien direct avec celles d'intérieur et d'adhérence d'un ensemble.

Nous savons que :

- p est un point intérieur à un ensemble A si p est le centre d'une boule contenue dans A ;
- p est un point adhérent à un ensemble A si toute boule de centre p rencontre A.

Dans le langage formel, nous avons donc :

- p est un point intérieur à un ensemble A si $\exists r > 0,\ B(p,r) \subseteq A$;
- p est un point adhérent à un ensemble A si $\forall r > 0,\ B(p,r) \cap A \neq \varnothing$.

Du point de vue de la syntaxe formelle, l'idée de démarrer l'enseignement en introduisant ces deux types de points permet de manipuler une écriture faisant intervenir un unique quantificateur.

L'introduction de la notion d'intérieur (respectivement d'adhérence) peut alors se justifier de manière naturelle en considérant l'ensemble des points intérieurs à l'ensemble (respectivement l'ensemble des points adhérents à l'ensemble). La notion de frontière apparaît alors naturellement. Une autre question, qui devient tout aussi naturelle, est de savoir si un ensemble peut coïncider avec son intérieur (respectivement son adhérence). Cela permet de définir les notions d'ouvert et de fermé.

Nous choisissons donc d'intégrer dans l'enseignement visé les deux notions de point intérieur, de point adhérent et de frontière d'un ensemble. Celles-ci ne font pas partie, a priori, des notions à enseigner mais nous faisons le pari que leur intégration dans l'enseignement peut garantir une forme de cohésion dans la progression des contenus.

Nous élargissons donc le réseau de notions à enseigner et nous optons pour l'ordre d'introduction suivant :

> point intérieur et point adhérent, intérieur et adhérence d'un ensemble, frontière d'un ensemble, ensemble ouvert et ensemble fermé.

Ce choix de progression nous permet d'introduire chaque notion de manière justifiée et avec un formalisme moins complexe que celui initialement utilisé dans notre enseignement (cf. chapitre I). En effet, après avoir défini les types de points, l'intérieur et l'adhérence d'un ensemble sont caractérisés dans le registre de la langue naturelle et dans le registre symbolique :

- □ l'intérieur de A est l'ensemble des points intérieurs à A, c'est-à-dire $\text{int}A = \{x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A\}$;
- □ l'adhérence de A est l'ensemble des points adhérents à A, c'est-à-dire $\text{adh}A = \{x \in \mathbb{R}^N,\ \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \varnothing\}$.

Un choix simple pour caractériser les ouverts et les fermés consiste alors à définir un ouvert (respectivement un fermé) comme coïncidant avec son intérieur (respectivement avec son adhérence). Donc, un ensemble A est ouvert si $\text{int}A = A$ et fermé si $\text{adh}A = A$.

L'introduction des premières notions

Nous avons soulevé, à plusieurs reprises, les difficultés d'introduction d'une notion FUG. Dans le cas de l'enseignement décrit au chapitre I, les notions étaient introduites par des définitions écrites d'emblée dans le registre symbolique. Nous avons montré les difficultés des étudiants à donner du sens aux notions qui étaient travaillées dans cet unique registre d'écriture.

Nos objectifs, concernant l'introduction des notions, consistent d'une part à repousser l'introduction du formalisme en privilégiant d'autres registres d'écriture au début de l'enseignement et d'autre part, à proposer aux étudiants une tâche d'introduction leur permettant de découvrir le sens des nouvelles notions de manière plus ou moins autonome.

Pour préciser ces objectifs, nous revenons, dans un premier temps, sur nos analyses précédentes en expliquant que certains éléments n'apparaissent pas comme une source d'inspiration pour concevoir une telle tâche.

L'analyse historique et épistémologique a montré que les premières notions de topologie émergent dans $\mathbb{R}$ pour devenir des outils permettant de démontrer certains résultats de manière rigoureuse, comme dans les travaux de Cantor ou ceux de Weierstrass, notamment. Les théories fondatrices sont celles des séries, qui ne sont pas accessibles au niveau d'enseignement considéré ici.

L'analyse des manuels n'apparaît pas non plus comme une voie propice pour trouver comment introduire les nouvelles notions. En effet, celle-ci a révélé que peu de place est finalement accordée à la topologie de $\mathbb{R}^N$. Les cadres de travail initialement choisis pour démarrer l'étude de la topologie sont ceux des espaces métriques ou topologiques.

Néanmoins, certains travaux illustrés dans l'étude historico-épistémologique ont montré comment des mathématiciens tels que Riemann prenaient appui sur une forme d'intuition géométrique pour introduire et utiliser des notions abstraites. Dans les manuels, Revuz s'appuie sur un vocabulaire intuitif pour caractériser les notions et il les représente dans $\mathbb{R}^2$.

Nous notons aussi que, le langage formel n'apparaissant qu'au début du 20e siècle, l'ensemble des travaux du 19e siècle contiennent finalement peu de symboles mathématiques et sont principalement écrits dans la langue naturelle.

Nous retenons donc, pour concevoir une tâche d'introduction des notions, l'idée de recourir à une forme d'intuition géométrique à partir d'une question accessible aux étudiants et de les faire d'abord travailler dans la langue naturelle en évitant, au début de l'enseignement, l'utilisation du registre symbolique.

Nos choix précis sont les suivants. En accord avec l'itinéraire décrit au point précédent, ce sont les notions de point intérieur et de point adhérent qui sont d'abord introduites. Le cadre de travail retenu est celui du plan cartésien $\mathbb{R}^2$ qui est un cadre familier aux étudiants. Les notions à introduire étant complètement nouvelles pour eux, ceux-ci n'ont pas dans leur bagage mathématique des connaissances anciennes dont les définitions ou même l'utilisation pourraient être raccrochées aux notions de point intérieur et de point adhérent. Nous optons donc pour une introduction où l'étudiant conjecture un choix possible pour une définition des notions, en s'appuyant sur un certain nombre de dessins, que le professeur validera a posteriori. Nous choisissons aussi d'énoncer les premières caractérisations des notions en termes de boule parce que cette notion est associée, selon nous, à une représentation visuelle disponible chez un grand nombre d'étudiants.

Des registres d'écriture variés

Nous venons de motiver notre choix de travailler avec les registres du dessin et de la langue naturelle pour introduire les premières notions. Néanmoins, la manipulation du formalisme contenu dans les définitions est un objectif de l'enseignement. Nous savons aussi à quel point le recours à ce seul langage n'est pas producteur de sens.

Notre choix consiste donc ici à introduire le langage formel avec sa fonction d'économie d'écriture dans les premiers exemples portant sur les notions de points intérieur et adhérent, donc après avoir caractérisé ces deux notions dans le langage naturel. Nous accordons donc, au fil de l'enseignement, un rôle spécifique aux différents registres d'écritures introduits.

Le langage formel apparaît pour rendre plus économique l'utilisation des définitions mais il sera constamment associé aux dessins et à la langue naturelle pour aider au développement du sens à donner aux notions. Nous faisons en effet l'hypothèse que l'appui sur ces deux derniers registres peut amener l'étudiant à développer sa représentation géométrique des notions et l'aider dans certaines tâches telles que déterminer si un point est intérieur ou non à un ensemble ou bien si un ensemble est fermé ou non. Le langage formel intervient alors avec un rôle d'outil de validation.

Cette volonté de sensibiliser les étudiants à manipuler différents registres d'écriture doit, selon nous, être appuyée par le discours de l'enseignant. Il y a lieu de prévoir des commentaires méta-mathématiques pour insister sur ce point. Nous y revenons dans la présentation des choix concernant la gestion de la classe.

La multiplication des exemples

Les étudiants sont peu habitués à utiliser simultanément différents registres d'écriture. Pourtant, ils devront manipuler ici trois registres pour travailler sur les notions. Nous devons également tenir compte de la complexité mathématique de la manipulation des définitions.

Nous choisissons donc d'intégrer dans nos séquences d'enseignement de nombreux exemples tant au niveau des types de points que des types d'ensembles. Nous avons vu que l'exemplification était peu présente dans les manuels. Nous pensons pourtant que l'incorporation d'exemples contribue à élargir le stock de référence des étudiants et peut les aider à mieux se représenter la structure topologique des ensembles, notamment à partir des ressemblances et des différences dans les exemples traités.

Ce travail d'exemplification permet également de prendre en compte la non-disponibilité des connaissances en logique et en théorie des ensembles. Il ne s'agit pas de prévoir un cours « avant » l'enseignement pour faire travailler ces connaissances mais bien de les expliciter au fur et à mesure de l'enseignement.

Nous faisons donc l'hypothèse que, moyennant une gestion adaptée du travail de l'enseignant, la multiplication des exemples est susceptible de favoriser les acquisitions des étudiants, tant du point de vue du sens que de la technique. Nous revenons sur le problème de la gestion par la suite.

3.2 Du côté de la gestion de la classe

Recours au méta

Compte tenu des spécificités de notions de topologie et des apprentissages visés, nous pensons que différents moments de l'enseignement peuvent être propices à des commentaires méta-mathématiques de la part du professeur.

Nous pensons tout d'abord à l'itinéraire choisi dans lequel les notions y apparaissent de manière justifiée. Le professeur peut souligner la cohérence de cet itinéraire en insistant sur les questions qui motivent l'émergence de chaque nouvelle notion.

Durant l'enseignement, l'enseignant peut de plus insister sur l'importance d'associer différents registres d'écriture et sur leur rôle spécifique.

Les adaptations à réaliser dans la manipulation des définitions peuvent être, selon nous, appuyées par des commentaires sur le fonctionnement des mathématiques.

Dans ce cas, l'enseignant met l'accent sur la nature des adaptations à réaliser, comme la traduction d'une définition dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{R}^2$, la traduction de l'objet « boule » dans $\mathbb{R}$ comme étant un intervalle, le choix du rayon d'une boule de centre x contenue dans un intervalle $]a,b[$ en fonction de la distance entre x et chaque extrémité de l'intervalle, le recours au dessin comme un support au raisonnement.

La multiplication des exemples peut s'associer à des commentaires sur la structure topologique des ensembles étudiés. Nous pensons notamment à la notion d'intervalle dans $\mathbb{R}$, à celle de courbe ou encore à celle de graphe d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ces objets sont familiers aux étudiants dans le sens où ils les manipulent depuis longtemps. La topologie permet d'amener un nouveau questionnement sur leur structure.

Enfin, certains choix de méthodes ou une réflexion sur les énoncés mathématiques proposés sont également des moments dans lesquels l'enseignant peut susciter une réflexion sur l'activité mathématique des étudiants.

Travail des étudiants et de l'enseignant dans les phases d'exercices

Les difficultés des étudiants rencontrées dans la manipulation d'une définition, une tâche pourtant immédiate et isolée, nous amènent à admettre que la complexité du travail mathématique engendré par ce type de tâche ne peut pas être laissée à la seule charge des étudiants. En d'autres mots, laisser chercher les étudiants de manière autonome, du moins quand il s'agit de manipuler une définition, ne leur permet pas selon nous de surmonter les difficultés repérées, compte tenu de la distance entre ce qu'ils savent et ce dont ils ont besoin dans ce type de tâche.

Il y a donc lieu de ménager des phases durant lesquelles c'est l'enseignant qui montre aux étudiants le fonctionnement des mathématiques, par ostension assumée et par la multiplication des exemples préalables et ultérieurs. Nous empruntons ici les idées de Vygotsky selon lesquelles il peut y avoir appropriation des connaissances par imitation, si les connaissances nouvelles sont proches des anciennes. Dans notre cas, nous savons que la distance entre ces connaissances est grande mais nous faisons le pari que le professeur peut contribuer à réduire cette distance en développant de nombreux exemples bien choisis.

Des phases de travail autonome peuvent néanmoins être ménagées, comme dans les tâches d'introduction des nouvelles notions ou dans certains types d'exercices.

3.3 Bilan

Notre pari, pour élaborer notre dispositif d'enseignement, consiste à penser que les choix qui viennent d'être explicités peuvent rendre plus accessible l'entrée dans le domaine mathématique qu'est la topologie de $\mathbb{R}^N$.

Ces choix de contenus et de gestion ciblent finalement les aspects suivants :

- la cohérence d'un itinéraire permettant un travail en réseau de notions,
- une introduction spécifique des notions appuyée par l'utilisation de différents registres d'écritures,
- un certain nombre de tâches dans lesquelles les registres d'écritures apparaissent avec une fonction spécifique,

- □ un travail sur la technique s'appuyant sur l'exemplification,
- □ un rôle spécifique du professeur tout au long de l'enseignement et de manières différentes, adaptées aux différents moments (ostension assumée),
- □ le recours à des commentaires méta-mathématiques.

Nous appuyant sur des choix globaux tels que le méta et le rôle de l'enseignant mais aussi sur des choix plus spécifiques aux contenus, nous sommes consciente que d'autres options auraient pu être prises en compte, menant peut-être, a posteriori, à d'autres apprentissages. Le scénario d'enseignement qui découle de nos choix est présenté au chapitre suivant.

Chapitre IX

Le scénario d'enseignement

Nous présentons maintenant le dispositif d'introduction des notions, tel qu'il a été élaboré à partir des choix établis au chapitre VIII. Nous y incorporons des éléments globaux sur la gestion, sur le découpage des séances, en tenant compte du temps imparti pour l'enseignement visé. Le scénario d'enseignement ainsi construit fera l'objet d'une analyse détaillée au chapitre suivant.

1 Remarques méthodologiques

Le programme du cours d'analyse mathématique [1] prévoit que le chapitre portant sur la topologie démarre aux environs du mois de mars.

Une séance de cours, qu'elle soit une séance de théorie en cours magistral ou des travaux dirigés, couvre en général 1h45 d'enseignement mais certaines séances placées à l'horaire des cours durent parfois 2h45. Le programme prévoit de consacrer une vingtaine d'heures à la topologie de $\mathbb{R}^N$, théorie et exercices confondus.

Rappelons qu'une contrainte forte du cours est d'habituer les étudiants à manipuler le langage formel. Cette contrainte s'associe à des exigences en matière de rédaction. Un effort particulier est imposé aux étudiants quant à la manière dont ils rédigent la solution d'un exercice. Ils doivent toujours expliquer leur démarche, citer les définitions et les résultats utilisés et détailler leurs calculs. Le dispositif d'introduction des notions est donc rédigé avec la rigueur attendue de la part des étudiants.

Un scénario d'enseignement, tel que nous l'avons défini au chapitre III, reprend l'ensemble des cours, exercices, évaluations et gestion prévue a priori. Nous choisissons de présenter les évaluations dans un chapitre ultérieur. La raison est que les premières évaluations sur la topologie sont organisées en juin, c'est-à-dire environ deux mois après l'enseignement. Nous pensons que le travail personnel des étudiants et les notions enseignées dans la suite du cours peuvent donc avoir un effet sur les apprentissages des étudiants, notamment parce qu'ils ont disposé

[1] Un programme du cours est donné dans l'annexe A.

de temps pour poursuivre leur apprentissage des notions. Nous les traitons donc de manière séparée.

Un autre choix méthodologique porte sur la répartition des cours théoriques et exercices. Nous avons opté pour un enseignement dans lequel la théorie et les exercices sont intégrés l'un à l'autre, de manière à pouvoir proposer certains types de tâches aux étudiants directement après l'introduction de certaines notions.

Nous détaillons maintenant le scénario que nous avons conçu, c'est-à-dire l'ensemble des contenus théoriques à enseigner et les tâches à proposer aux étudiants, en donnant quelques éléments globaux sur le découpage des séances prévu et sur la gestion a priori. Nous mettons le tout en regard dans un tableau.

La colonne de gauche présente le découpage des séances et des éléments de gestion. La colonne de droite décrit la progression des contenus, les résultats et leurs démonstrations et les exercices à proposer aux étudiants. À ce stade du travail, nous n'envisageons pas une description fine de la gestion effective de l'enseignement.

L'ensemble des tâches proposées aux étudiants, c'est-à-dire les tâches d'introduction et les exercices, fera l'objet d'une analyse détaillée au chapitre suivant. Dès lors, nous ne présentons pas, dans le scénario, les solutions possibles. Elles sont données dans l'annexe C. Par contre, les démonstrations des résultats établis, pour lesquelles il est prévu que ce soit l'enseignant qui les présente en cours magistral, sont intégrées dans le scénario.

Pour faciliter la lecture du scénario, une liste des notations mathématiques utilisées est dressée dans l'annexe B.

2 Présentation du scénario

Séance 1
Durée : 1h45
Contenus : présentation du nouveau chapitre, introduction des notions de points intérieur et adhérent, définitions formelles des notions, exercice de manipulation des définitions.

Recherche individuelle ou entre pairs, environ $30'$. L'enseignant intervient le moins possible.

La topologie de $\mathbb{R}^N$

Point intérieur, point adhérent

Tâche d'introduction 1. Voici 4 propriétés mettant en relation un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^2$ et un point $p \in \mathbb{R}^2$:

① A contient une boule ouverte de centre p.

② A contient toutes les boules ouvertes de centre p.

③ Il y a une boule ouverte de centre p qui intersecte A.

④ Toutes les boules ouvertes de centre p intersectent A.

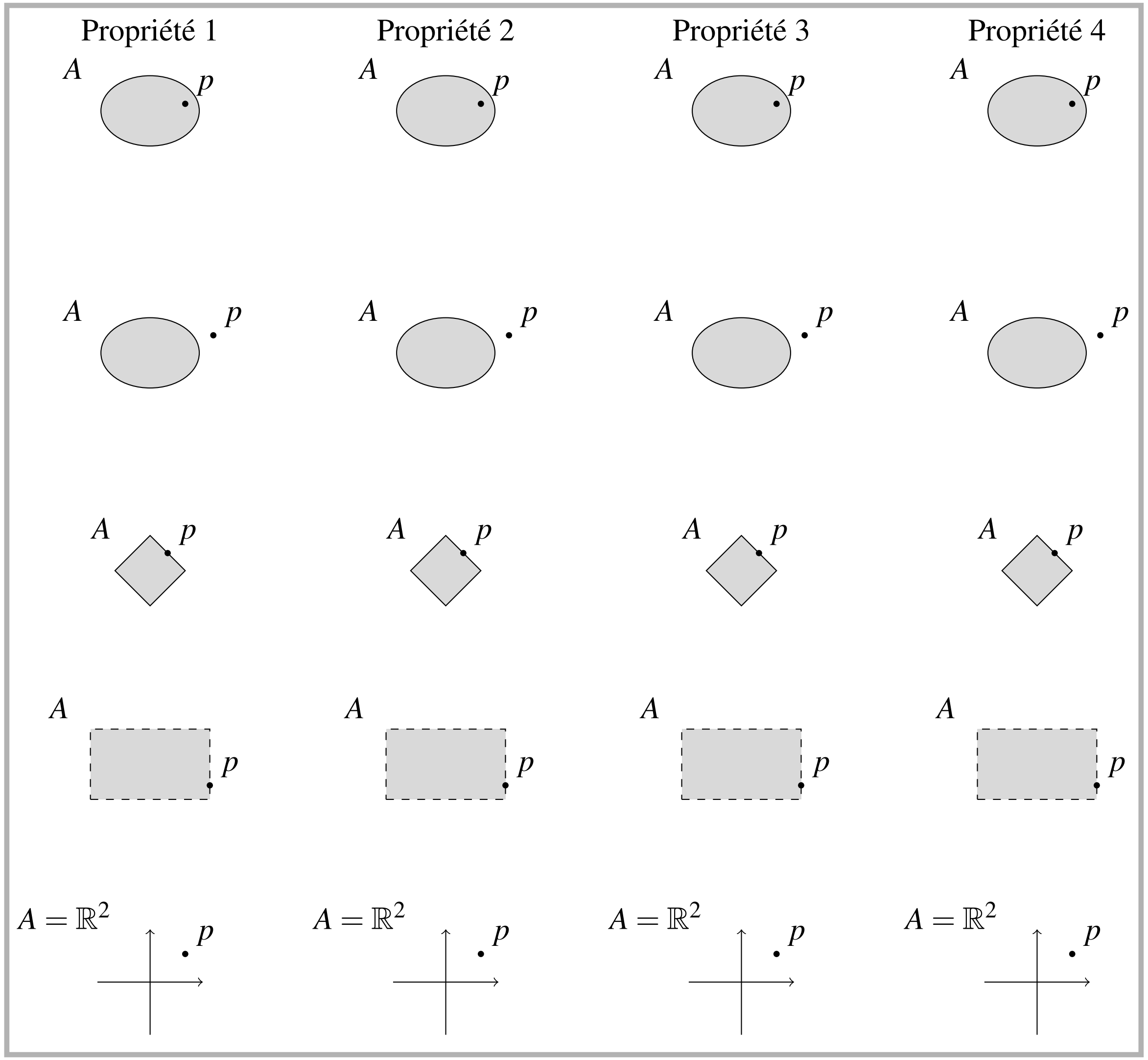
Dans chaque situation proposée sur la feuille 2, dites

- □ si p est un point de A ou non,
- □ si p et A vérifient ou non les propriétés ①, ②, ③, ④. Pour chaque propriété, justifiez votre réponse sur le dessin.

Selon vous, quelle est la propriété qui traduit l'idée que

- □ p est un point intérieur à A : ....
- □ p est un point adhérent à A : ....

Feuille 1 distribuée aux étudiants



Feuille 2 distribuée aux étudiants

Discussion collective.
Validation des définitions par l'enseignant.

Nous avons donc que :

- p est un point intérieur à A si A contient une boule ouverte de centre p.
- p est un point adhérent à A si toutes les boules ouvertes de centre p intersectent A.

Recherche individuelle ou entre pairs, environ $30'$.
Correction collective de chaque affirmation.

Pour chacune des propositions suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.

- Vrai : ☐ Faux : ☐ Si p est un point intérieur à A, alors p est un point adhérent à A.
- Vrai : ☐ Faux : ☐ Si p est un point adhérent à A, alors p est un point intérieur à A.
- Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $p \in A$, alors p est un point intérieur à A.
- Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $p \in A$, alors p est un point adhérent à A.
- Vrai : ☐ Faux : ☐ Si p est intérieur à A, alors $p \in A$.
- Vrai : ☐ Faux : ☐ Si p est adhérent à A, alors $p \in A$.

Feuille 3 distribuée aux étudiants

Bilan collectif pour établir les liens entre les types de points.

Nous pouvons donc établir les liens suivants :

- Si p est un point intérieur à A, alors p appartient à A.

  En effet, si p est un point intérieur à A, alors A contient une boule ouverte de centre p. Autrement dit, tout point de la boule appartient aussi à A. Comme p est le centre de la boule, on en déduit que p appartient à A.

□ Si p appartient à A, alors p est un point adhérent à A.

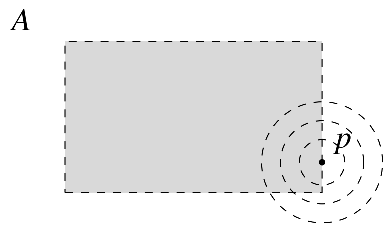
En effet, si p est un point de A, alors toutes les boules ouvertes de centre p ont au moins un point commun avec A, à savoir le point p. Donc, p est adhérent à A.

□ Si p est un point intérieur à A, alors p est adhérent à A.

C'est une conséquence des deux propriétés précédentes.

□ Si p est adhérent à A, alors p n'appartient pas nécessairement à A.

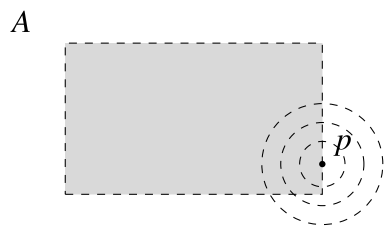
On a un contre-exemple dans la feuille 2 :



Le point p est adhérent à A car toutes les boules de centre p intersectent l'ensemble A. Mais p n'est pas un point de A.

□ Si p est un point adhérent à A, alors p n'est pas nécessairement un point intérieur à A.

Le contre-exemple précédent convient ici aussi :



Il est impossible de trouver une boule de centre p qui soit contenue dans l'ensemble A.

Le professeur prend en charge la correction de l'exercice en collaboration avec les étudiants en laissant, pour chaque cas, un court moment de recherche individuelle de manière à ce que l'étudiant prenne connaissance de chaque exemple.
Introduction du registre symbolique.
Recours au méta pour mettre en évidence les adaptations en jeu dans l'utilisation du registre symbolique.

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, on donne un point p et un ensemble A. Dites si le point p est intérieur à A ou non, est adhérent à A ou non. Justifiez votre réponse.

① $p = 1/3,\ A = [0,1]$

② $p = -\sqrt{2},\ A = [-2,1]$

③ $p = 1,\ A = [0,1[$

④ $p = 1/2,\ A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$

⑤ $p = 0,\ A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$

⑥ $p = (2,4),\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$

⑦ pour $x, y \in \mathbb{R}$ et $r > 0,\ p = (x, y - r/3),\ A = B_{|.|_\infty}\big((x,y), r\big)$

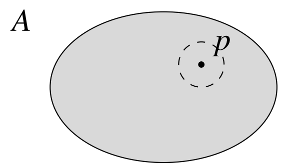
Les définitions sont données entre les exemples ① et ② de l'exercice 1 pour introduire le formalisme.
Recours au méta pour insister sur l'utilisation du dessin et de la langue naturelle pour donner du sens aux nouvelles notions.

Définition 1. Soient $A \subseteq \mathbb{R}^N$ et $p \in \mathbb{R}^N$. On dit que

- p un point intérieur à A si $\exists r > 0,\ B(p,r) \subseteq A$.
- p est un point adhérent à A si $\forall r > 0,\ B(p,r) \cap A \neq \varnothing$.

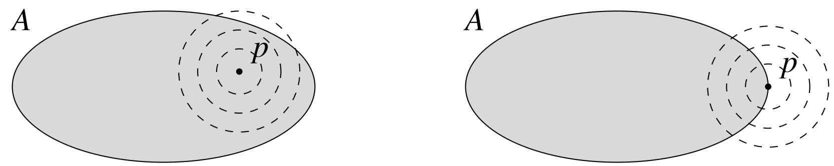
Une aide à la compréhension des notions est d'utiliser les dessins et les idées suivants :

□ p est un point intérieur à A :



Idée : « p a un peu d'espace autour de lui dans l'ensemble A. »

□ p est un point adhérent à A :



Idée : « Toutes les boules de centre p ont une intersection avec A. Donc p est à l'intérieur de A ou sur le contour de A. »

Séance 2
Durée : 1h45
Contenus : rappel du cours précédent, définitions formelles d'intérieur et d'adhérence d'un ensemble, propriétés et démonstrations, équivalence des définitions en termes de boule et de suite, exercice de manipulation des définitions.

Intérieur, adhérence d'un ensemble

Après avoir défini les notions de point intérieur et de point adhérent, nous nous intéressons à deux autres notions qui leur sont associées.

Pour un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^N$, nous pouvons considérer l'ensemble de ses points intérieurs et l'ensemble de ses points adhérents. Ces deux ensembles sont respectivement appelés l'intérieur et l'adhérence de A. Nous avons donc la définition suivante.

Cours magistral.
Le professeur soulignera à nouveau l'aide que peuvent apporter les registres de la langue naturelle et du dessin pour donner du sens aux notions.

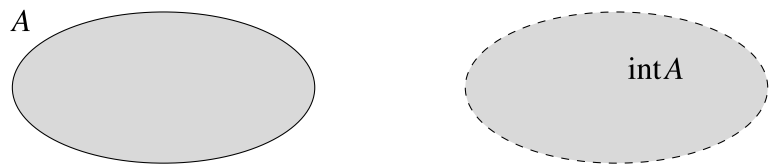
Définition 2. Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$.

- L'intérieur de A, noté $\mathrm{int}A$, est défini par $\mathrm{int}A = \{x \in A : \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A\}$.
- L'adhérence de A, notée $\mathrm{adh}A$, est définie par $\mathrm{adh}A = \{x \in \mathbb{R}^N : \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \varnothing\}$.

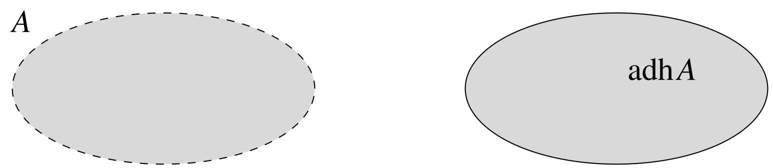
Les notations suivantes sont également utilisées : l'intérieur de A se note aussi $\mathring{A}$ et l'adhérence de A se note aussi $\overline{A}$.

Une aide à la compréhension des notions est de se les représenter de la manière suivante :

- l'intérieur de A :



- l'adhérence de A :



Cours magistral.

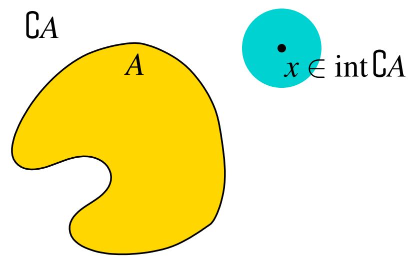
Proposition 3. Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Nous avons les inclusions suivantes : $\mathrm{int}A \subseteq A \subseteq \mathrm{adh}A$.

Démonstration

Soit $x \in \operatorname{int} A$, c'est-à-dire $\exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A$. Comme $x \in B(x,r)$, on en déduit que $x \in A$, ce qui montre que $\operatorname{int} A \subseteq A$.

Soit $x \in A$. On a, quel que soit $r > 0$, $x \in B(x,r)$. Donc, quel que soit $r > 0$, on a $B(x,r) \cap A \neq \varnothing$. Autrement dit, $x \in \operatorname{adh} A$. On a donc montré que $A \subseteq \operatorname{adh} A$.

Proposition 4. (Propriété de dualité) On a $\operatorname{int} A = \complement \operatorname{adh} \complement A$ et $\operatorname{adh} A = \complement \operatorname{int} \complement A$.



Démonstration

Soit $x \in \mathbb{R}^N$.

Montrons que $x \in \operatorname{int} A$ si et seulement si $x \in \complement \operatorname{adh} \complement A$. En effet, on a :

$$
\begin{aligned}
x \in \operatorname{int} A \text{ ssi } & \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A \\
\text{ssi } & \neg(\forall r > 0,\ B(x,r) \nsubseteq A) \\
\text{ssi } & \neg(\forall r > 0,\ \exists y \in B(x,r) \text{ et } y \notin A) \\
\text{ssi } & \neg(\forall r > 0,\ B(x,r) \cap \complement A \neq \varnothing) \\
\text{ssi } & \neg(x \in \operatorname{adh} \complement A) \\
\text{ssi } & x \in \complement \operatorname{adh} \complement A)
\end{aligned}
$$

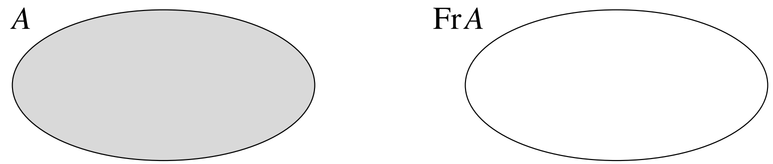
Montrons maintenant que $x \in \operatorname{adh} A$ si et seulement si $x \in \complement \operatorname{int} \complement A$. En effet, on a :

$$
\begin{aligned}
x \in \mathrm{adh} A \text{ ssi } & \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \varnothing \\
\text{ssi } & \neg(\exists r > 0,\ B(x,r) \cap A = \varnothing) \\
\text{ssi } & \neg(\exists r > 0,\ \forall y \in B(x,r),\ y \notin A) \\
\text{ssi } & \neg(\exists r > 0,\ \forall y \in B(x,r),\ y \in \complement A) \\
\text{ssi } & \neg(\exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq \complement A) \\
\text{ssi } & \neg(x \in \mathrm{int} \complement A) \\
\text{ssi } & x \in \complement \, \mathrm{int} \complement A
\end{aligned}
$$

Le professeur fera le lien avec la tâche d'introduction 1 dans laquelle les étudiants ont travaillé sur des ensembles dont on prenait la frontière ou non.

Définition 5. Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$. La frontière de A, notée $\mathrm{Fr}A$, est définie par $\mathrm{Fr}A = \mathrm{adh}A \setminus \mathrm{int}A$.

La frontière de A peut se représenter de la manière suivante :



Cours magistral.

Proposition 6. Soient $x \in \mathbb{R}^N$, un nombre réel $r > 0$ et $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^N$. Nous avons :

① $\mathrm{int} B_{\|.\|}[x,r] = B_{\|.\|}(x,r)$,

② $\mathrm{adh} B_{\|.\|}(x,r) = B_{\|.\|}[x,r]$.

Pour alléger les notations, les boules seront notées par la suite $B[x,r]$ et $B(x,r)$, en considérant implicitement que la norme associée est $\|.\|$.

Démonstration

① Montrons que $\operatorname{int} B_{\|.\|}[x,r] = B_{\|.\|}(x,r)$.

Nous avons tout d'abord $\operatorname{int} B[x,r] \subseteq B(x,r)$. Soit $y \in \operatorname{int} B[x,r]$. Alors, par définition de l'intérieur, $\exists r' > 0,\ B(y,r') \subseteq B[x,r]$. Nous devons montrer que $y \in B(x,r)$, c'est-à-dire $\|y-x\| < r$. Si $y = x$, alors c'est évident. Supposons donc que $y \neq x$. Considérons le point $z = y + \dfrac{r'}{2\|x-y\|}(y-x)$. Nous avons $z \in B(y,r')$ car $\|z-y\| = \left\|\frac{r'}{2\|x-y\|}(y-x)\right\| = \frac{r'}{2}\frac{\|y-x\|}{\|x-y\|} = r'/2 < r'$. Donc, grâce à l'hypothèse, nous en déduisons que $z \in B[x,r]$. Nous avons donc $\|z-x\| \leqslant r$, c'est-à-dire en remplaçant z par son expression, $\left\|\left(1+\dfrac{r'}{2\|x-y\|}\right)(y-x)\right\| \leqslant r$ ou encore $\left(1+\dfrac{r'}{2\|x-y\|}\right)\|y-x\| \leqslant r$. Comme $1+\dfrac{r'}{2\|x-y\|} > 1$, nous en déduisons que $\|y-x\| < r$.

Nous avons aussi $B(x,r) \subseteq \operatorname{int} B[x,r]$. Soit $y \in B(x,r)$, c'est-à-dire $\|y-x\| < r$. Montrons que $y \in \operatorname{int} B[x,r]$, c'est-à-dire $\exists r' > 0,\ B(y,r') \subseteq B[x,r]$. Prenons $r' = r - \|x-y\| > 0$. Soit $z \in B(y,r')$, c'est-à-dire $\|z-y\| < r'$. Montrons que $z \in B[x,r]$. Nous avons $\|z-x\| = \|z-y+y-x\| \leqslant \|z-y\| + \|y-x\| < r' + \|y-x\| < r$.

② Montrons maintenant que $\operatorname{adh} B(x,r) = B[x,r]$.

Nous avons tout d'abord $\operatorname{adh} B(x,r) \subseteq B[x,r]$. Soit $y \in \operatorname{adh} B(x,r)$, c'est-à-dire $\forall r' > 0,\ B(y,r') \cap B(x,r) \neq \varnothing$, ou encore $\forall r' > 0,\ \exists z \in B(y,r')$ et $z \in B(x,r)$. En prenant $r' = 1/n$ où $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on obtient : $\forall n \geqslant 1,\ \exists z_n \in B(y,1/n)$ et $z_n \in B(x,1/n)$. Nous avons donc, $\forall n \geqslant 1, \|z_n - y\| < 1/n$ et $\|z_n - x\| < r$. En passant à la limite dans chaque inégalité, nous obtenons d'abord, par convergence dominée, $z_n \to y$; en utilisant la continuité de la norme dans la seconde inégalité et le fait que l'inégalité devient large par passage à la limite, nous obtenons $\|y-x\| \leqslant r$. Donc $y \in B[x,r]$.

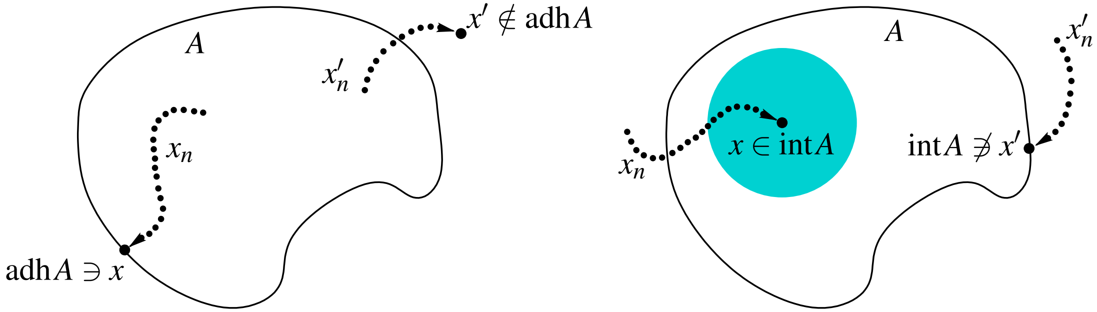
On a aussi $B[x,r] \subseteq \operatorname{adh} B(x,r)$. Soit $y \in B[x,r]$, c'est-à-dire $\|y-x\| \leqslant r$. Montrons que $y \in \operatorname{adh} B(x,r)$. Soit $r' > 0$. Il faut prouver que $B(y,r') \cap B(x,r) \neq \varnothing$. Si $y = x$ alors c'est évident car $x \in B(x,r') \cap B(x,r)$ puisqu'il est le centre de chaque boule. Supposons donc $y \neq x$. Montrons qu'il existe $z \in B(y,r') \cap B(x,r)$. Si $r' > r$, alors prenons $z = x$. Nous avons bien $z \in B(y,r')$ car $\|z-y\| = \|x-y\| \leqslant r < r'$. Et nous avons aussi $z = x \in B(x,r)$. Si $r' \leqslant r$, alors prenons $z = y - \frac{r'}{2r}(y-x)$. Nous avons $z \in B(y,r')$ car $\|z-y\| = \frac{r'}{2r}\|y-x\| \leqslant \frac{r'}{2r} r \leqslant \frac{r'}{2} < r'$. Nous avons aussi $z \in B(x,r)$ car $\|z-x\| = \left(1 - \frac{r'}{2r}\right)\|y-x\| < r$ puisque $\|y-x\| \leqslant r$ et $0 \leqslant \left(1-\frac{r'}{2r}\right) < 1$.

Cours magistral.

Proposition 7. Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Nous avons :

① $\operatorname{adh} A = \{x \in \mathbb{R}^N : \exists (x_n) \subseteq A,\ x_n \to x\}$,

② $\operatorname{int} A = \{x \in A : \forall (x_n) \subseteq \mathbb{R}^N,\ \text{si } x_n \to x,\ \text{alors } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ x_n \in A\}$.



Démonstration

① Montrons que $\operatorname{adh} A = \{x \in \mathbb{R}^N : \exists (x_n) \subseteq A,\ x_n \to x\}$.

Nous avons d'abord $\operatorname{adh} A \subseteq \{x \in \mathbb{R}^N : \exists (x_n) \subseteq A,\ x_n \to x\}$. Soit $y \in \operatorname{adh} A$, c'est-à-dire $\forall r > 0,\ B(y,r) \cap A \neq \varnothing$. Prenons $r = 1/n$ où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Nous construisons alors une suite (x_n) telle que $\forall n \geqslant 1$, on a $x_n \in B(y, 1/n)$, c'est-à-dire $\|x_n - y\| < 1/n$, et $x_n \in A$. Or, en passant à la limite dans l'inégalité $\|x_n - y\| < 1/n$, nous obtenons, par convergence dominée, $x_n \to y$. Nous avons donc bien construit une suite $(x_n) \subseteq A$ telle que $x_n \to y$.

Nous avons aussi $\{x \in \mathbb{R}^N : \exists (x_n) \subseteq A,\ x_n \to x\} \subseteq \mathrm{adh} A$. Soit y tel que $\exists (x_n) \subseteq A,\ x_n \to y$. Montrons que $y \in \mathrm{adh} A$, c'est-à-dire que $\forall r > 0,\ B(y,r) \cap A \neq \varnothing$. Soit $r > 0$. En prenant $\varepsilon = r/2$ dans la définition de convergence de $x_n \to y$, il existe $n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \|x_n - y\| \leqslant r/2$. On a alors $x_{n_0} \in B(y,r)$ car $\|x_{n_0} - y\| \leqslant r/2 < r$ et $x_{n_0} \in A$ par définition de la suite. Donc $B(y,r) \cap A \neq \varnothing$, ce qui prouve que $y \in \mathrm{adh} A$.

② Montrons que $\mathrm{int} A = \{x \in A : \forall (x_n) \subseteq \mathbb{R}^N,$ si $x_n \to x$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ x_n \in A\}$.

Nous avons d'abord $\mathrm{int} A \subseteq \{x \in A : \forall (x_n) \subseteq \mathbb{R}^N,$ si $x_n \to x$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ x_n \in A\}$. Soit $x \in \mathrm{int} A$, c'est-à-dire $\exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A$. Soit $(x_n) \subseteq \mathbb{R}^N$. Supposons que $x_n \to x$. En prenant $\varepsilon = r/2$ dans la définition de convergence, il existe $n_0,\ \forall n \geqslant n_0,\ \|x_n - x\| \leqslant r/2 < r$. On a donc : $\forall n \geqslant n_0,\ x_n \in B(x,r)$ et par conséquent, $\forall n \geqslant n_0,\ x_n \in A$ puisque $B(x,r) \subseteq A$ par hypothèse.

Nous avons aussi $\{x \in A : \forall (x_n) \subseteq \mathbb{R}^N,$ si $x_n \to x$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ x_n \in A\} \subseteq \mathrm{int} A$. Soit $x \in A$. Supposons, au contraire, que $x \notin \mathrm{int} A$, c'est-à-dire $\forall r > 0,\ B(x,r) \nsubseteq A$. En prenant $r = 1/n$ où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on obtient une suite (x_n) telle que $\forall n \geqslant 1,\ x_n \in B(x, 1/n)$ et $x_n \notin A$. On en déduit, par convergence dominée, que $x_n \to x$. Or, par hypothèse, on devrait alors avoir : $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ x_n \in A$. Cela contredit le fait que $\forall n \geqslant 1,\ x_n \notin A$. On a donc $x \in \mathrm{int} A$.

Les nouvelles caractéristations de l'intérieur et de l'adhérence d'un ensemble peuvent être utilisées, dans la suite du cours, comme des définitions.

Recherche individuelle, environ $10'$.
Correction collective.

Exercice 2. En utilisant la propriété précédente, montrez que $\mathrm{adh}\,]-2,5] = [-2,5]$.

Cours magistral.

Proposition 8. Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}^N$ tels que $A \subseteq B$. Nous avons :

- $\operatorname{int} A \subseteq \operatorname{int} B$,
- $\operatorname{adh} A \subseteq \operatorname{adh} B$.

Démonstration

Soit $x \in \operatorname{int} A$, c'est-à-dire $\exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A$. Comme $A \subseteq B$ par hypothèse, on a donc aussi $\exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq B$. Autrement dit, $x \in \operatorname{int} B$.

La preuve de l'autre inclusion est tout à fait analogue.

Séance 3
Durée : 1h45
Contenus : rappel du cours précédent, tâche d'introduction visant à énoncer les résultats sur l'intérieur et l'adhérence de l'intersection et la réunion de deux ensembles, énoncés et démonstrations des résultats pour deux ensembles.

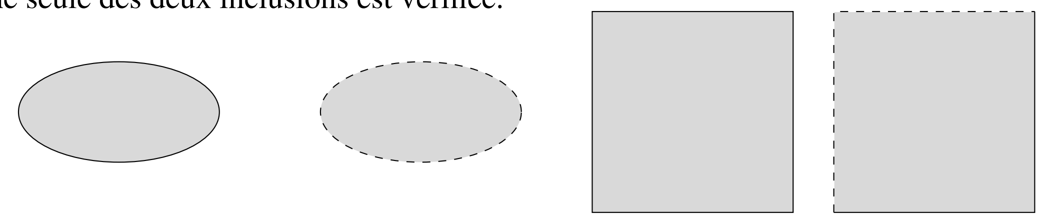
Lecture de l'énoncé par l'enseignant.
Recherche individuelle, environ $15'$.

Tâche d'introduction 2. On cherche à comparer, pour deux ensembles $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$, les ensembles :

① $\operatorname{int}(A \cap B)$ avec $\operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$,

② $\operatorname{int}(A \cup B)$ avec $\operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$.

Pour vous aider, vous disposez des quatre ensembles ci-dessous. Vous pouvez les associer deux à deux pour conjecturer si les ensembles donnés en ① et ② sont égaux ou bien si une seule des deux inclusions est vérifiée.



En procédant de la même manière, comparez maintenant les ensembles :

① $\mathrm{adh}(A \cap B)$ avec $\mathrm{adh}\, A \cap \mathrm{adh}\, B$,

② $\mathrm{adh}(A \cup B)$ avec $\mathrm{adh}\, A \cup \mathrm{adh}\, B$.

Bilan collectif pour conjecturer les résultats. Recours au méta pour insister sur le besoin d'une preuve formelle pour valider les résultats. Démonstration sous la forme d'un cours magistral.

Proposition 9. Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}^N$. On a :

① $\mathrm{int}(A \cap B) = \mathrm{int}\, A \cap \mathrm{int}\, B$,

② $\mathrm{int}(A \cup B) \supseteq \mathrm{int}\, A \cup \mathrm{int}\, B$,

③ $\mathrm{adh}(A \cup B) = \mathrm{adh}\, A \cup \mathrm{adh}\, B$,

④ $\mathrm{adh}(A \cap B) \subseteq \mathrm{adh}\, A \cap \mathrm{adh}\, B$.

Démonstration

① Montrons que $\mathrm{int}(A \cap B) = \mathrm{int}\, A \cap \mathrm{int}\, B$.

Nous avons $\mathrm{int}(A \cap B) \subseteq \mathrm{int}\, A \cap \mathrm{int}\, B$. Soit $x \in \mathrm{int}(A \cap B)$, c'est-à-dire $\exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A \cap B$. Comme $A \cap B \subseteq A$ et $A \cap B \subseteq B$, nous avons en particulier : $\exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A$ et $B(x,r) \subseteq B$. Cela revient à dire que $x \in \mathrm{int}\, A \cap \mathrm{int}\, B$.

Nous avons aussi $\mathrm{int}\, A \cap \mathrm{int}\, B \subseteq \mathrm{int}(A \cap B)$. Soit $x \in \mathrm{int}\, A \cap \mathrm{int}\, B$. Comme $x \in \mathrm{int}\, A$, on en déduit $\exists r_1 > 0,\ B(x,r_1) \subseteq A$. Mais on a aussi $x \in \mathrm{int}\, B$, donc $\exists r_2 > 0,\ B(x,r_2) \subseteq B$. Nous devons prouver $\exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A \cap B$. Prenons $r = \min\{r_1, r_2\}$. On a alors $B(x,r) \subseteq B(x,r_1) \subseteq A$ (car $r \leqslant r_1$) et $B(x,r) \subseteq B(x,r_2) \subseteq B$ (car $r \leqslant r_2$). Donc $B(x,r) \subseteq A \cap B$, ce qui prouve que $x \in \mathrm{int}(A \cap B)$.

② Montrons que $\mathrm{int}(A \cup B) \supseteq \mathrm{int}\, A \cup \mathrm{int}\, B$.

Soit $x \in \mathrm{int}\, A \cup \mathrm{int}\, B$, c'est-à-dire $x \in \mathrm{int}\, A$ ou $x \in \mathrm{int}\, B$. Nous devons prouver que $x \in \mathrm{int}(A \cup B)$, c'est-à-dire $\exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A \cup B$. Si $x \in \mathrm{int}\, A$, alors $\exists r_1 > 0,\ B(x,r_1) \subseteq A$. On prend alors $r = r_1$. On a $B(x,r) \subseteq A$ et comme $A \subseteq A \cup B$, on a bien $B(x,r) \subseteq A \cup B$. Si $x \in \mathrm{int}\, B$, alors $\exists r_2 > 0,\ B(x,r_2) \subseteq B$. On prend alors $r = r_2$ et on conclut par un raisonnement analogue à celui qui vient d'être fait. Donc $x \in \mathrm{int}(A \cup B)$.

③ Nous allons utiliser la propriété de dualité entre l'intérieur et l'adhérence d'un ensemble pour démontrer les deux dernières propriétés. Pour rappel, cette propriété dit : $\operatorname{int} A = \complement \operatorname{adh} \complement A$ et que $\operatorname{adh} A = \complement \operatorname{int} \complement A$.

Nous avons montré que quels que soient les ensembles $C, D \subseteq \mathbb{R}^N$, on a $\operatorname{int}(C \cap D) = \operatorname{int} C \cap \operatorname{int} D$.

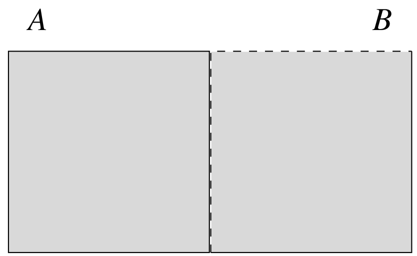
Montrons que $\operatorname{adh}(A \cup B) = \operatorname{adh} A \cup \operatorname{adh} B$. Appliquons la propriété ① à $C = \complement A$ et $D = \complement B$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\operatorname{int}(\complement A \cap \complement B) = \operatorname{int} \complement A \cap \operatorname{int} \complement B \ \text{ssi}\ & \operatorname{int} \complement(A \cup B) = \complement \operatorname{adh} A \cap \complement \operatorname{adh} B \\
\text{ssi}\ & \complement \operatorname{adh}(A \cup B) = \complement(\operatorname{adh} A \cup \operatorname{adh} B) \\
\text{ssi}\ & \operatorname{adh}(A \cup B) = \operatorname{adh} A \cup \operatorname{adh} B
\end{aligned}$$

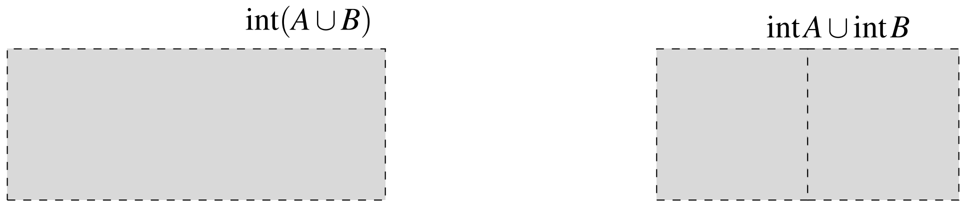
④ Montrons que $\operatorname{adh}(A \cap B) \subseteq \operatorname{adh} A \cap \operatorname{adh} B$. Appliquons la propriété ② à $C = \complement A$ et $D = \complement B$. On a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{int}(\complement A \cup \complement B) \supseteq \operatorname{int} \complement A \cup \operatorname{int} \complement B \ \text{ssi}\ & \operatorname{int} \complement(A \cap B) \supseteq \complement \operatorname{adh} A \cup \complement \operatorname{adh} B \\
\text{ssi}\ & \complement \operatorname{adh}(A \cap B) \supseteq \complement(\operatorname{adh} A \cap \operatorname{adh} B) \\
\text{ssi}\ & \operatorname{adh}(A \cap B) \subseteq \operatorname{adh} A \cap \operatorname{adh} B
\end{aligned}$$

Nous n'avons pas nécessairement $\operatorname{int}(A \cup B) \subseteq \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$. En effet, en associant deux ensembles A et B de la manière suivante :



Nous avons que $\operatorname{int}(A \cup B) \nsubseteq \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$:



Si nous nous plaçons dans $\mathbb{R}$, en prenant $A = [0,1]$ et $B =]1,2]$, nous avons $\operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B =]0,1[\cup]1,2[=]0,2[\setminus \{1\}$ et $\operatorname{int}(A \cup B) = \operatorname{int}[0,2] =]0,2[$.

En reprenant les mêmes dessins que ci-dessus, nous pouvons dire que nous n'avons pas non plus $\operatorname{adh}(A \cap B) \supseteq \operatorname{adh} A \cap \operatorname{adh} B$. En effet, à partir des dessins, nous avons $\operatorname{adh}(A \cap B) = \varnothing$ alors que $\operatorname{adh} A \cap \operatorname{adh} B \neq \varnothing$.

En reprenant aussi les ensembles $A = [0,1]$ et $B =]1,2]$, nous avons $\operatorname{adh}(A \cap B) = \operatorname{adh} \varnothing = \varnothing$ et $\operatorname{adh} A \cap \operatorname{adh} B = [0,1] \cap [1,2] = \{1\}$.

Séance 4
Durée : 2h45
Contenus : énoncés et démonstrations des résultats sur l'intérieur et l'adhérence d'une intersection et d'une réunion d'une famille quelconque d'ensembles, définition d'ensemble ouvert et d'ensemble fermé, lien entre les deux types d'ensembles, exercice de manipulation des définitions.

Cours magistral.

Définition 10. Une famille de sous-ensembles de $\mathbb{R}^N$ est une fonction

$$A \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^N) : \alpha \mapsto E_\alpha$$

où A est un ensemble et $\mathscr{P}(\mathbb{R}^N)$ est l'ensemble des parties de $\mathbb{R}^N$.

On note une telle famille $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Théorème 11. *Soit $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de sous-ensembles de $\mathbb{R}^N$. On a :*

① $\operatorname{int}\big(\cap_{\alpha \in A} E_\alpha\big) \subseteq \cap_{\alpha \in A} \operatorname{int} E_\alpha$ *et on a l'égalité si A est fini,* ② $\operatorname{int}\left(\cup_{\alpha\in A} E_\alpha\right) \supseteq \cup_{\alpha\in A} \operatorname{int} E_\alpha$,

③ $\operatorname{adh}\left(\cup_{\alpha\in A} E_\alpha\right) \supseteq \cup_{\alpha\in A} \operatorname{adh} E_\alpha$ *et on a l'égalité si A est fini,*

④ $\operatorname{adh}\left(\cap_{\alpha\in A} E_\alpha\right) \subseteq \cap_{\alpha\in A} \operatorname{adh} E_\alpha$.

Démonstration

① Montrons que $\operatorname{int}\left(\cap_{\alpha\in A} E_\alpha\right) \subseteq \cap_{\alpha\in A} \operatorname{int} E_\alpha$.
Soit $x \in \operatorname{int}\left(\cap_{\alpha\in A} E_\alpha\right)$, c'est-à-dire $\exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq \cap_{\alpha\in A} E_\alpha$. Alors, $\forall\alpha \in A,\ B(x,r) \subseteq E_\alpha$. Donc, $\forall\alpha \in A,\ x \in \operatorname{int} E_\alpha$. Autrement dit, $x \in \cap_{\alpha\in A} \operatorname{int} E_\alpha$.
Supposons maintenant que A est fini. Soit $x \in \cap_{\alpha\in A} \operatorname{int} E_\alpha$, c'est-à-dire $\forall\alpha \in A,\ \exists r_\alpha > 0,\ B(x,r_\alpha) \subseteq E_\alpha$. Montrons que $x \in \operatorname{int} \cap_{\alpha\in A} E_\alpha$, c'est-à-dire $\exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq \cap_{\alpha\in A} E_\alpha$. Prenons $r = \min\{r_\alpha : \alpha \in A\}$. Ce minimum existe puisque A est fini. On a alors : $\forall\alpha \in A,\ B(x,r) \subseteq B(x,r_\alpha) \subseteq E_\alpha$. Donc $B(x,r) \subseteq \cap_{\alpha\in A} E_\alpha$, ce qui prouve que $x \in \operatorname{int} \cap_{\alpha\in A} E_\alpha$.

② Montrons que $\operatorname{int}\left(\cup_{\alpha\in A} E_\alpha\right) \supseteq \cup_{\alpha\in A} \operatorname{int} E_\alpha$. Soit $x \in \cup_{\alpha\in A} \operatorname{int} E_\alpha$, c'est-à-dire $\exists\alpha_x \in A,\ x \in \operatorname{int} E_{\alpha_x}$, ou encore $\exists\alpha_x \in A,\ \exists r_{\alpha_x} > 0,\ B(x,r_{\alpha_x}) \subseteq E_{\alpha_x}$. Montrons que $x \in \operatorname{int} \cup_{\alpha\in A} E_\alpha$, c'est-à-dire $\exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq \cup_{\alpha\in A} E_\alpha$. Prenons $r = r_{\alpha_x}$. On a $B(x,r) \subseteq E_{\alpha_x} \subseteq \cup_{\alpha\in A} E_\alpha$.

③ On a, en partant de la première propriété :

$$\begin{aligned}
\operatorname{int}\left(\cap_{\alpha\in A} E_\alpha\right) \subseteq \cap_{\alpha\in A} \operatorname{int} E_\alpha \ &\text{ssi}\ \complement \operatorname{int}\left(\cap_{\alpha\in A} E_\alpha\right) \supseteq \complement \cap_{\alpha\in A} \operatorname{int} E_\alpha\\
&\text{ssi}\ \operatorname{adh} \complement(\cap_{\alpha\in A} E_\alpha) \supseteq \cup_{\alpha\in A} \complement \operatorname{int} E_\alpha\\
&\text{ssi}\ \operatorname{adh}\left(\cup_{\alpha\in A} \complement E_\alpha\right) \supseteq \cup_{\alpha\in A} \operatorname{adh} \complement E_\alpha
\end{aligned}$$

④ On a, en partant de la deuxième propriété :

$$\begin{aligned}
\operatorname{int}\left(\bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha\right) \supseteq \bigcup_{\alpha\in A} \operatorname{int} E_\alpha \ &\text{ssi}\ \complement \operatorname{int}\left(\bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha\right) \subseteq \complement \bigcup_{\alpha\in A} \operatorname{int} E_\alpha\\
&\text{ssi}\ \operatorname{adh} \complement\left(\bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha\right) \subseteq \bigcap_{\alpha\in A} \complement \operatorname{int} E_\alpha\\
&\text{ssi}\ \operatorname{adh}\left(\bigcap_{\alpha\in A} \complement E_\alpha\right) \subseteq \bigcap_{\alpha\in A} \operatorname{adh} \complement E_\alpha
\end{aligned}$$

Pour l'intérieur d'une intersection, on n'a pas nécessairement l'égalité si A est infini. Prenons $A = \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $E_n =]-1/n, 1/n[$, avec $n \in A$. On a $\cap_{n\in A} E_n = \{0\}$ et donc $\operatorname{int}\big(\cap_{n\in A} E_n\big) = \varnothing$. D'autre part, $\cap_{n\in A} \operatorname{int} E_n = \cap_{n\in A} E_n = \{0\}$. Or, $\{0\} \nsubseteq \varnothing$.

Ensemble ouvert, ensemble fermé

Bilan sur les notions introduites à ce stade de l'enseignement.

Après avoir défini les notions d'intérieur et d'adhérence d'un ensemble, nous nous demandons s'il existe des ensembles qui coïncident avec leur intérieur ou bien avec leur adhérence.

Définition 12. Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$. On dit que

- A est ouvert si $A = \operatorname{int} A$,
- A est fermé si $A = \operatorname{adh} A$.

Cours magistral.

Proposition 13. Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Nous avons :

- A est ouvert si et seulement si $\complement A$ est fermé.
- A est fermé si et seulement si $\complement A$ est ouvert.

Démonstration

Grâce à la propriété de dualité, nous avons :

$$\begin{aligned} A \text{ est ouvert } &\text{ ssi } A = \operatorname{int} A \\ &\text{ ssi } \complement A = \complement \operatorname{int} A \\ &\text{ ssi } \complement A = \operatorname{adh} \complement A \\ &\text{ ssi } \complement A \text{ est fermé.} \end{aligned}$$

L'autre propriété se démontre de manière analogue.

Recherche individuelle, environ 15′.
Correction collective.

Exercice 3. Soient $a,b \in \mathbb{R}$. Les ensembles $[a,b]$, $]a,b[$, $]a,b]$ sont-ils ouverts ? Fermés ?

Recherche individuelle, environ 5′.
Correction collective.

Exercice 4. Peut-on trouver un ensemble qui soit à la fois ouvert et fermé ?

Recherche individuelle, environ 25′.
Correction collective.

Exercice 5. Les ensembles suivants sont-ils ouverts ? Fermés ? Justifiez votre réponse.

① $[\pi,+\infty[$,

② $]-\infty,-2[$,

③ $\{3\}$,

④ $\{1/n : n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$,

⑤ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 3x+2y=6\}$.

Séance 5
Durée : 1h45
Contenus : énoncés et démonstrations des résultats portant sur l'intersection et la réunion d'une famille quelconque d'ouverts, de fermés, résolution d'exercices.

Théorème 14. *Soit $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille d'ensembles ouverts. On a :*

- □ $\cup_{\alpha\in A}E_\alpha$ *est un ensemble ouvert,*
- □ $\cap_{\alpha\in A}E_\alpha$ *est un ensemble ouvert si A est fini,*

Soit $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille d'ensembles fermés. On a :

- □ $\cap_{\alpha\in A}E_\alpha$ *est un ensemble fermé,*
- □ $\cup_{\alpha\in A}E_\alpha$ *est un ensemble fermé si A est fini.*

Cours magistral.

Démonstration

Grâce au théorème 11, nous avons $\operatorname{int}\big(\cup_{\alpha\in A}E_\alpha\big) \supseteq \cup_{\alpha\in A}\operatorname{int}E_\alpha = \cup_{\alpha\in A}E_\alpha$ car E_α est ouvert. L'autre inclusion est vérifiée car l'intérieur d'un ensemble est toujours inclus dans cet ensemble.

Par le même théorème, si A est fini alors $\operatorname{int}\big(\cap_{\alpha\in A}E_\alpha\big) = \cap_{\alpha\in A}\operatorname{int}E_\alpha = \cap_{\alpha\in A}E_\alpha$ car E_α est ouvert.

Les deux autres propriétés se déduisent par dualité.

Exercices

Exercice 6. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble non-vide, fermé et majoré. Montrez que $\sup A \in A$.

Exercice 7. Soit l'ensemble $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqslant 2 \text{ et } x+y \leqslant 0\}$.

① Représentez graphiquement l'ensemble E.

② L'ensemble E est-il ouvert ? Fermé ? Justifiez votre réponse.

③ Soit l'ensemble $F = \big\{(1/n, 1/n) : n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\big\}$. Dites si F est ouvert, fermé. Justifiez votre réponse.

④ L'ensemble $E \cup F$ est-il fermé ?

Séance 6
Durée : 2h45
Contenus : résolution d'exercices.
Recherche individuelle ou entre pairs à durée variable.
Correction collective.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \in \mathbb{R}$. Considérons l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \leqslant a\}$. Montrez que l'ensemble E est fermé.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $p \in \mathbb{R}$. Supposons que $f(p) > 0$. Montrez qu'il existe un ouvert, noté O, contenant p sur lequel la fonction f est strictement positive.

Exercice 10. Soit $O \subseteq \mathbb{R}^N$ un ouvert et $x_0 \in O$. Considérons l'ensemble $O \backslash \{x_0\}$. Cet ensemble est-il ouvert ?

Exercice 11. Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Montrez que l'intérieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A. Montrez que l'adhérence de A est le plus petit fermé contenant A.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Le graphe de f, noté $\operatorname{Graph} f$, est défini par $\operatorname{Graph} f = \{(x, f(x)) : x \in \operatorname{Dom} f\}$. L'ensemble $\operatorname{Graph} f$ est-il fermé ?

Exercice 13. Peut-on trouver un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^2$ tel que $\operatorname{Fr} A = \varnothing$?

Chapitre X

Une analyse du scénario en termes de tâches et d'activités

Nous donnons ici une lecture descriptive du scénario. Nous expliquons la progression des contenus et la manière dont les notions sont travaillées. Nous précisons, au fil de cette lecture, les conditions mises en place pour contribuer aux apprentissages des étudiants, tant du point de vue des contenus mathématiques que de la gestion prévue en classe.

1 Éléments méthodologiques

En situant notre questionnement au sein de la théorie de l'activité (cf. chapitre III), nous cherchons à étudier les activités des étudiants pour caractériser leurs apprentissages en topologie. Nous proposons donc ici une analyse de notre scénario d'enseignement à partir des activités attendues des étudiants.

Nous menons cette analyse de la manière suivante. Nous proposons une lecture chronologique du scénario en montrant comment nous avons intégré nos choix théoriques (cf. chapitre VIII) et quelles sont les conditions mises en place pour contribuer à la conceptualisation visée. Nous décrivons également les activités attendues dans chaque phase de l'enseignement.

Nous y incorporons l'analyse a priori des tâches d'introduction et des exercices à proposer aux étudiants. Celles-ci s'appuient sur les outils d'analyse des contenus développés par Robert (1998), présentés au chapitre III (page 32). Elles prennent en compte les connaissances du cours susceptibles d'être utilisées pour résoudre les exercices. Les solutions possibles de chaque tâche d'introduction et des exercices sont données dans l'annexe C.

Dans le but de faciliter la lecture du chapitre, nous avons encadré les analyses a priori. Le lecteur qui préférera une description plus globale en termes d'activités attendues peut donc les passer en première lecture.

2 Première partie : point intérieur et point adhérent

La première partie de l'enseignement est consacrée à l'étude de deux types de points : point intérieur et point adhérent. L'enseignement démarre avec la tâche d'introduction 1 (feuilles 1 et 2) visant à faire émerger les définitions de ces deux notions.

Nous faisons ci-dessous une analyse a priori de cette tâche après en avoir rappelé l'énoncé.

Tâche d'introduction 1 (Feuilles 1 et 2)

Voici 4 propriétés mettant en relation un ensemble $A \subset \mathbb{R}^2$ et un point $p \in \mathbb{R}^2$:

① A contient une boule ouverte de centre p.

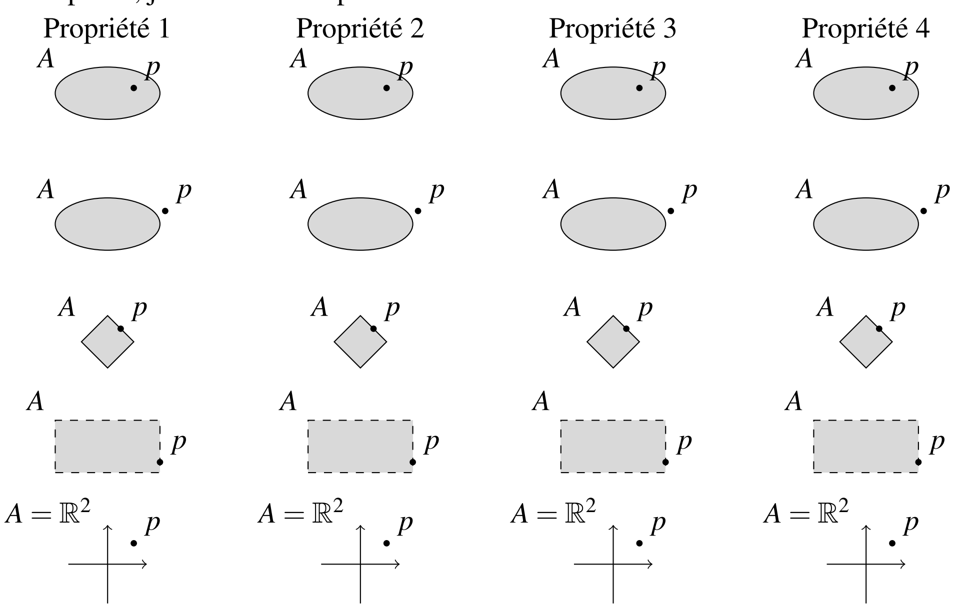
② A contient toutes les boules ouvertes de centre p.

③ Il y a une boule ouverte de centre p qui intersecte A.

④ Toutes les boules ouvertes de centre p intersectent A.

Dans chaque situation proposée sur la feuille 2, dites

- □ si p est un point de A ou non,
- □ si p et A vérifient ou non les propriétés ①, ②, ③, ④. Pour chaque propriété, justifiez votre réponse sur le dessin.



Selon vous, quelle est la propriété qui traduit l'idée que

- □ p est un point intérieur à A : ...
- □ p est un point adhérent à A : ...

Analyse a priori

Domaine de travail

Cadre géométrique de $\mathbb{R}^2$.

Registres d'écriture

Registre du dessin et registre de la langue naturelle.

Connaissances mises en jeu

Connaissances en cours d'acquisition : boule ouverte, intersection et non intersection de deux ensembles, inclusion et non inclusion d'ensembles, appartenance d'un point à un ensemble, ensemble vide.
Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ sont présents dans les quatre propriétés mais ils sont écrits dans la langue naturelle. Soulignons aussi que, même si les justifications sont appuyées par un dessin, il est nécessaire, pour les réaliser, de comprendre le sens des phrases proposées et dans certains cas, de leur négation. La tâche met donc en jeu des connaissances en logique et en théorie des ensembles, même si elles sont implicites. L'ensemble des connaissances à mettre en oeuvre est constitué de connaissances en cours d'acquisition, donc probablement pas disponibles chez tous les étudiants. En effet, nous avons déjà mentionné que les connaissances en logique et en théorie des ensembles, bien que rencontrées épisodiquement par les étudiants dans l'enseignement secondaire, n'y font l'objet d'aucun travail de manipulation. Elles sont par contre explicitement utilisées dès le début du parcours universitaire et sont travaillées dans l'ensemble des cours. Par conséquent, leur manipulation est plus ou moins récente dans le bagage mathématique des étudiants.
Les différentes propriétés font intervenir la notion de boule. Dans le chapitre du cours portant sur les normes dans $\mathbb{R}^N$, cette notion a été travaillée en utilisant différentes normes et des dessins ont été réalisés. Il s'agit donc d'une notion propice à la mobilisation du registre du dessin et de plus, la représentation géométrique de cette notion est disponible chez un grand nombre d'étudiants, au moins lorsqu'il s'agit de travailler avec la norme associée à la distance euclidienne.

Adaptations à réaliser

L'étudiant doit ici apporter une justification prenant appui sur un dessin. Les *reconnaissances des modalités d'application* nécessitent donc un *changement de point de vue* par rapport au type de travail auquel l'étudiant est habitué. Ce changement de point de vue provoque un questionnement inhabituel chez les étudiants portant sur les éléments à utiliser et à insérer sur chaque dessin pour fournir un argument qui convaincra le lecteur.

La manière d'introduire les nouvelles notions consiste à proposer aux étudiants différentes caractérisations dont une seule définit la notion de point intérieur (respectivement de point adhérent). Pour provoquer un choix correct de la définition, nous nous appuyons sur des leviers tels que le recours à l'intuition géométrique (avec la notion de boule), mais nous faisons aussi l'hypothèse que le vocabulaire utilisé (les mots « intérieur » et « adhérent ») peut constituer une aide pour amener l'étudiant à choisir la propriété définissant chaque notion. La tâche ne requiert pas l'utilisation du langage formel.

Durant cette phase de découverte des notions, il est prévu que les étudiants travaillent individuellement ou entre pairs, en évitant autant que possible les interventions de l'enseignant. Nous faisons donc le pari que les étudiants peuvent découvrir les nouvelles notions de manière autonome. L'enseignant récupèrera les copies des étudiants à la fin de la séance pour analyser leurs productions. Les copies leur seront restituées à la séance suivante.

Les activités attendues sur cette tâche consistent en une phase de recherche où l'étudiant doit donner du sens aux propriétés d'une part en maîtrisant le langage utilisé et d'autre part, en étayant sa compréhension par l'élaboration d'un dessin.

Une phase de validation est ensuite prévue, durant laquelle l'enseignant énonce les premières définitions dans la langue naturelle en termes de boule.

La seconde partie de la tâche d'introduction 1 est alors proposée aux étudiants (feuille 3).

Tâche d'introduction 1 (Feuille 3)

Pour chacune des propositions suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.

- □ Vrai : □ Faux : □ Si p est un point intérieur à A, alors p est un point adhérent à A.
- □ Vrai : □ Faux : □ Si p est un point adhérent à A, alors p est un point intérieur à A.
- □ Vrai : □ Faux : □ Si $p \in A$, alors p est un point intérieur à A.
- □ Vrai : □ Faux : □ Si $p \in A$, alors p est un point adhérent à A.
- □ Vrai : □ Faux : □ Si p est intérieur à A, alors $p \in A$.
- □ Vrai : □ Faux : □ Si p est adhérent à A, alors $p \in A$.

Analyse a priori

Domaine de travail

Cadre géométrique de $\mathbb{R}^2$.

Registres d'écriture

Registre du dessin, registre de la langue naturelle.

Connaissances mises en jeu

Connaissances en cours d'acquisition : boule ouverte, intersection et non intersection de deux ensembles, inclusion et non inclusion d'ensembles, appartenance d'un point à un ensemble, ensemble vide.

Adaptations à réaliser

Cette question *met en relation* les propositions données avec les dessins réalisés à l'étape précédente. L'étudiant doit *conjecturer* sur la véracité de chaque proposition et valider sa réponse à partir du travail mené précédemment.

Elle vise à établir des liens entre les différents types de points qui ont été définis. Ici aussi, il est prévu que les étudiants travaillent individuellement ou entre pairs. Pour justifier leurs choix, ils disposent des registres de la langue naturelle et des dessins. Une phase de correction collective est prévue. Les copies des étudiants seront ici aussi collectées par l'enseignant au terme de la séance.

Les activités attendues sont ici aussi une recherche individuelle amenant l'étudiant à se prononcer sur la véracité de chaque affirmation et à justifier son choix (vrai ou faux) à partir des registres d'écriture dont il dispose à ce stade de l'enseignement.

Un élément important qui se dégage de la tâche d'introduction, vue dans sa globalité, est le changement de point de vue requis chez l'étudiant dans sa manière d'aborder son questionnement : il doit impérativement s'appuyer sur des dessins et non pas sur le langage formel, ce qui devrait bouleverser ses habitudes de travail.

Le début de l'enseignement s'appuie donc sur un certain nombre de leviers qui, selon nous, peuvent amener l'étudiant à construire les notions de manière presque autonome tout en leur donnant du sens. Tout d'abord, le cadre de $\mathbb{R}^2$, mobilisé dans la tâche, est un cadre dans lequel les étudiants travaillent régulièrement. Le recours aux dessins est une condition contribuant, selon nous, au développement d'une forme d'intuition géométrique pour se représenter les nouvelles notions. L'utilisation de la notion de boule y participe également.

Le type de justification requis oblige les étudiants à travailler explicitement sur les dessins proposés. La raison est d'habituer les étudiants, dès le début de l'enseignement, à solliciter leur intuition géométrique et le recours au dessin soit pour appuyer la définition des nouvelles notions, soit pour réaliser des adaptations de connaissances, comme nous le verrons dans la résolution des exercices. Ce fonctionnement mathématique est complètement inhabituel chez les étudiants. Le recours au registre symbolique est évité à ce stade de l'enseignement.

Étant donnée la difficulté de s'appuyer sur des connaissances anciennes pour proposer un problème aux étudiants dans lequel les nouvelles notions apparaîtraient comme la solution optimale, nous avons opté pour une introduction mixte, entre le travail des étudiants qui consiste à conjecturer et à valider à partir de dessins, et le travail de l'enseignant qui valide leurs choix et énonce les nouvelles définitions dans la langue naturelle, en donnant aux dessins un rôle spécifique d'aide pour donner du sens aux notions.

Un premier exercice de manipulation des définitions de point intérieur et de point adhérent est proposé (Exercice 1). En voici l'énoncé et son analyse a priori.

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, on donne un point p et un ensemble A. Dites si le point p est intérieur à A ou non, est adhérent à A ou non. Justifiez votre réponse.

① $p = 1/3,\ A = [0,1]$

② $p = -\sqrt{2},\ A = [-2,1]$

③ $p = 1,\ A = [0,1[$

④ $p = 1/2,\ A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$

⑤ $p = 0,\ A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$

⑥ $p = (2,4),\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$

⑦ pour $x,y \in \mathbb{R},\ p = (x, y - r/3),\ A = B_{|.|_\infty}((x,y),r)$

Analyse a priori

►► Analyse a priori de ①, ②, ③, ④ et ⑤

La question est ouverte. Aucune méthode n'est indiquée. Les justifications peuvent donc s'appuyer sur les définitions qui ont émergé du travail sur les dessins dans la tâche d'introduction 1 ou sur les liens établis entre les types de points dans cette même tâche.

Une étape préliminaire, avant de choisir un type de justification, est de conjecturer si le point donné est effectivement intérieur ou non, adhérent ou non à l'ensemble. Cette étape nécessite de donner du sens aux notions en faisant appel à une forme d'intuition géométrique associée à une bonne compréhension des ensembles donnés. La notion de boule doit également être disponible. Un appui sur un dessin peut aider l'étudiant dans cette phase de conjecture.

Compte tenu des exigences du cours (rappelées p. 147), un objectif de cet exercice est de passer à la phase de formalisation des définitions et de faire apparaître la fonction d'économie d'écriture de l'utilisation des symboles mathématiques. Ce passage est prévu entre les deux premiers exemples.

Dans les cinq premiers cas, les notions sont travaillées dans $\mathbb{R}$. Nous en présentons une analyse globale, en pointant l'évolution de la complexité du travail mathématique à réaliser.

Domaines de travail

Cadre géométrique de la droite réelle et cadre de la topologie de $\mathbb{R}$.

Registres d'écriture

Registre de la langue naturelle, registre du dessin et registre du langage formel.

Connaissances mises en jeu dans chaque exemple

- □ Connaissances anciennes : position des nombres sur la droite réelle, intervalle ouvert, intervalle fermé.
- □ Connaissances en cours d'acquisition : boule ouverte dans $\mathbb{R}$, distance entre deux nombres réels, inclusion d'ensembles, intersection d'ensembles, quantificateurs.
- □ Connaissances nouvelles : point intérieur, point adhérent.

Adaptations à réaliser dans chaque exemple

Les adaptations suivantes sont communes au démarrage de chaque exemple à traiter.

- □ *Existence d'un choix* : savoir si p est intérieur ou non, adhérent ou non.
- □ *Travail sur les modalités d'application* : écrire la formule quantifiée à prouver, c'est-à-dire la définition ou sa négation, le cas échéant.
- □ *Changement de cadre*, lié au passage de $\mathbb{R}^N$ à $\mathbb{R}$: dans $\mathbb{R}$, la boule ouverte de centre a et de rayon r est l'intervalle $]a-r, a+r[$.

Adaptations à réaliser pour la notion de point intérieur

Nous indiquons maintenant les adaptations à réaliser et leur évolution au fil de l'exercice pour la notion de point intérieur.

Dans les exemples ① et ②, p est un point intérieur. L'*organisation du raisonnement* se décompose en les étapes suivantes. Il y a lieu de chercher une boule de centre p contenue dans l'intervalle (*reconnaissance des modalités d'application*). Cela engendre un *changement de point de vue* : chercher une boule revient à trouver un rayon convenable pour cette boule. L'ordre sur $\mathbb{R}$ et la notion de distance entre deux nombres vont intervenir (*mise en jeu de connaissances anciennes*). Entre ① et ②, la valeur des nombres en jeu se complexifie, rendant moins évidente la valeur du rayon à trouver. Il faut ensuite prouver l'inclusion de la boule dans l'intervalle. L'ordre sur $\mathbb{R}$ intervient à nouveau (*mise en jeu de connaissances anciennes*).

Dans ③, ④ et ⑤, p n'est pas un point intérieur à A. L'*organisation du raisonnement* est alors la suivante. Il faut prouver la négation de la définition de point intérieur (*reconnaissance des modalités d'application*). Cela engendre l'*introduction d'un point intermédiaire* puisque montrer la non inclusion de la boule dans l'ensemble revient à chercher un réel y appartenant à la boule mais pas à l'ensemble. Trouver y implique l'*existence d'un choix*.

Dans ③, un choix facile est de prendre $y = 1$. Il appartient à la boule car il en est le centre (*mise en jeu d'une connaissance en cours d'acquisition*) et il n'appartient pas à l'ensemble (*mise en jeu d'une connaissance ancienne*).

Dans ④, la nature de l'ensemble A s'est complexifiée, rendant plus difficile le choix de y. La justification du choix de y mobilise la manipulation d'inégalités et l'ordre sur $\mathbb{R}$ (*connaissances anciennes*) et s'organise en *plusieurs étapes*.

Le raisonnement de ⑤ est semblable à celui du troisième cas. Le fait que 0 n'appartienne pas à l'ensemble se justifie par des connaissances sur la nature des nombres (*connaissances anciennes*).

Adaptations à réaliser pour la notion de point adhérent

Nous faisons une analyse semblable à la précédente pour la notion de point adhérent. Dans les cinq premiers exemples, p est un point adhérent à l'ensemble. L'organisation du raisonnement est la suivante pour ①, ② et ④. Dans les trois cas, p est un point de l'ensemble. Il y a lieu de prouver que toutes les boules de centre p intersectent l'ensemble (*reconnaissance des modalités d'application*). Cela engendre l'*introduction d'un point intermédiaire* car prouver qu'une intersection d'ensembles n'est pas vide revient à trouver un réel y qui appartient simultanément à la boule et à l'ensemble. Un choix facile est de prendre $y = p$ car c'est un point de l'ensemble (*mise en jeu d'une connaissance ancienne*) et c'est le centre de la boule (*mise en jeu d'une connaissance en cours d'acquisition*).

Dans ③, le choix du réel y est plus complexe car p n'est pas un point de l'ensemble. Il y a lieu de discuter soit sur les valeurs du rayon de la boule, soit sur la construction de la valeur de y (*introduction d'étapes*). La discussion nécessite la manipulation d'inégalités et donc des connaissances sur l'ordre sur $\mathbb{R}$ (*connaissances anciennes*) et la définition de maximum entre deux nombres (*connaissance en cours d'acquisition*).

Dans ⑤, la construction de y fait appel à des *connaissances en cours d'acquisition* sur la nature des nombres et sur l'ordre pour construire un naturel n non nul tel que $1/n < r$. On utilise pour cela la fonction partie entière supérieure. Cette construction a déjà été rencontrée dans le cours, notamment dans le chapitre sur la convergence des suites de nombres réels (*mise en jeu d'une connaissance en cours d'acquisition*).

▸▸ Analyses a priori de ⑥ et ⑦

On change ici de cadre de travail ; les registres d'écriture sont par contre semblables. Nous allons rencontrer une organisation des raisonnements semblable à ce qui a été traité dans les cas précédents mais les mises en fonctionnement des connaissances réalisées dans $\mathbb{R}$ doivent ici être adaptées à $\mathbb{R}^2$ en utilisant des couples de nombres réels. La manipulation d'inégalités réapparaît avec la notion de norme.

Domaines de travail

Cadres géométrique de $\mathbb{R}^2$, cadre de la topologie de $\mathbb{R}^2$.

Registres d'écriture

Registres de la langue naturelle, du dessin et du langage formel.

Connaissances mises en jeu

Connaissances en cours d'acquisition : boule ouverte dans $\mathbb{R}^2$, norme sur $\mathbb{R}^2$, distance entre deux points, inclusion d'ensembles, intersection d'ensembles, quantificateurs.

Adaptations à réaliser pour montrer que p n'est pas un point intérieur

Elles sont semblables à ③ mais il faut adapter le travail réalisé pour montrer la non inclusion, c'est-à-dire ici $\forall r > 0,\ B\big((2,4),r\big) \not\subseteq A$. Il faut adapter le choix de y en travaillant sur les composantes du couple de réels.

Pour ⑦, on est dans le cas général. Le recours au registre symbolique est inévitable. Les adaptations à réaliser sont du même type que dans les exemples précédents mais elles font cette fois intervenir des réels ou des couples de réels quelconques.

> ***Utilisation des liens entre les types de points***
> On peut rapidement conclure que p est adhérent à l'ensemble A lorsque p appartient à A ou bien que p n'est pas intérieur à l'ensemble A lorsque p n'appartient pas à A. Ces liens, ou leur contraposée, ont été établis dans la tâche d'introduction 1. L'exercice devient alors une application immédiate d'une propriété du cours. Mais l'utilisation des liens n'est pas possible dans tous les exemples. Dans certains cas, l'utilisation des définitions est nécessaire.

L'énoncé consiste en une application apparemment immédiate des définitions. L'analyse a priori révèle cependant la complexité de la tâche. La variété des adaptations et celle des connaissances à mettre en jeu sont telles que la tâche relève du niveau disponible de mise en fonctionnement des connaissances (cf. p. 33).

Les cinq premiers exemples portent tous sur des sous-ensembles classiques de $\mathbb{R}$, les deux derniers sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$. Le travail sur les exemples est un levier utilisé pour habituer les étudiants à l'utilisation du registre symbolique.

La phase de formalisation des définitions doit apparaître entre l'exemple ① et l'exemple ②. L'objectif est d'amener les étudiants à manipuler le registre symbolique en montrant son économie d'écriture pour rédiger les raisonnements. Les dessins trouvent ici leur fonction d'aide dans les adaptations de connaissances telles que la recherche du rayon d'une boule ou bien pour montrer une non inclusion d'ensembles par exemple. Ils sont réalisés dans les solutions possibles (cf. annexe C).

La progression des exemples proposés met en jeu des variables didactiques choisies par l'enseignant : la nature des nombres (passage de ① à ②) et la nature des ensembles (passage de ③ à ④) donnés se complexifie au fur et à mesure de l'exercice. L'exemple ⑥ provoque un changement de cadre nécessitant d'adapter les raisonnements développés dans $\mathbb{R}$ à des couples de réels. Cette progression amène à aborder l'exemple ⑦ qui est purement formel. Les exemples font intervenir des ensembles classiques faisant partie du bagage mathématique des étudiants.

Cette première tâche met en jeu de nombreuses connaissances en cours d'acquisition et des connaissances anciennes dont on sait qu'elles ne sont pas disponibles chez un grand nombre d'étudiants. Les connaissances en logique (manipulation des quantificateurs) et en théorie des ensembles (inclusion, intersection d'ensembles) apparaissent tout au long de l'exercice. Ce type de tâche nécessite des adaptations variées.

Nous pensons que le travail mathématique qui vient d'être décrit pour réaliser la tâche ne peut pas être laissé à la charge de l'étudiant, surtout au début de l'enseignement. C'est la raison pour laquelle la gestion prévue est de ménager un moment de recherche individuelle pour prendre connaissance de l'exemple à traiter, mais la correction prendra la forme d'une discussion collective durant laquelle l'enseignant montrera le type de justification et la rigueur attendus pour manipuler les définitions dans le langage formel. Il insistera aussi sur les adaptations de connaissances à réaliser et l'utilisation de connaissances en logique et en théorie des ensembles. L'utilisation des registres de la langue naturelle et des dessins comme une aide au démarrage de l'exercice et dans les adaptations sera également mise en évidence.

Cette phase de l'enseignement porte sur la manipulation du formalisme contenu dans les définitions de point intérieur et de point adhérent.

Dans la phase de correction collaborative, le recours aux commentaires méta-mathématiques apparaît comme un levier permettant de dégager les connaissances à mettre en oeuvre, notamment en logique et en théorie des ensembles, pour le type d'adaptations à réaliser (recherche du rayon d'une boule, manipulation d'inégalités...). Ce type de commentaires peut également être utilisé pour faire apparaître les registres de la langue naturelle et du dessin comme une aide à la résolution de l'exercice et non plus comme un type de justification, comme dans la tâche d'introduction.

Le langage formel est présenté comme un moyen de justification ayant une fonction propre : ce langage est plus économique que celui de la langue naturelle mais nous pensons que cette fonction ne peut apparaître de manière autonome chez l'étudiant, tout comme la manipulation de ce langage. Nous faisons néanmoins le pari que cette manipulation peut s'acquérir par un travail d'imitation du professeur qui montre comment utiliser ce langage.

Les activités attendues sont ici difficiles à caractériser davantage puisque la gestion prévue est d'engager l'étudiant dans une discussion collective dans laquelle l'enseignant montre le travail mathématique à réaliser.

3 Deuxième partie : intérieur et adhérence d'un ensemble

Après avoir travaillé sur des types de points, nous introduisons, dans cette partie, des types d'ensembles. Nous prenons appui sur les notions de point intérieur et de point adhérent pour définir celles d'intérieur et d'adhérence d'un ensemble. L'enseignant motive l'introduction de ces deux nouvelles notions avec la question de considérer l'ensemble des points intérieurs (respectivement adhérents) à un ensemble.

Les notions sont, ici aussi, définies en termes de boules (Définition 2). Les définitions sont immédiatement écrites dans le registre symbolique en s'appuyant sur des dessins pouvant aider à une représentation intuitive des notions.

Des propriétés classiques sur les liens entre les types d'ensembles sont ensuite démontrées (Propositions 3 et 4). Cette phase est prévue sous la forme d'un cours magistral pris en charge par l'enseignant.

La notion de frontière est alors introduite (Définition 5). Cette notion a été implicitement évoquée dans la tâche d'introduction 1, où certains dessins représentaient des ensembles dont le bord était ou non contenu dans l'ensemble. Le fait que le bord apparent ne soit pas inclus dans un ensemble était symbolisé par un trait en pointillé. Son introduction est donc justifiée et la définition découle des notions qui viennent d'être présentées.

La propriété 6 revient sur la notion de boule en cherchant à quoi correspond l'intérieur d'une boule fermée et l'adhérence d'une boule ouverte. Le résultat est intuitif mais la preuve consiste à prouver une égalité entre deux ensembles et à manipuler le formalisme contenu dans les définitions.

L'enseignant prend en charge la présentation de la démonstration. Il incorpore, dans son discours mathématique, des commentaires visant à montrer que le travail mathématique à réaliser s'est complexifié par rapport à l'exercice 1 qui mettait lui aussi en jeu l'utilisation des définitions.

La démonstration sur l'adhérence d'une boule ouverte fait intervenir la construction d'une suite convergente de points de l'ensemble. L'apparition de la notion de suite est une motivation pour savoir si l'on peut définir l'adhérence d'un ensemble en termes de suite et par conséquent, l'intérieur aussi.

C'est l'objet de la proposition 7 dont la démonstration est, elle aussi, prévue par l'enseignant, pour des raisons semblables à celles évoquées pour la propriété 6. L'enseignant pourra mentionner que la définition d'intérieur en termes de suites sera peu utilisée dans le cours. Il peut néanmoins être intéressant de savoir que cette caractérisation existe.

Un exercice de manipulation de la définition d'adhérence en terme de suite est proposé. En voici l'énoncé et son analyse a priori.

Exercice 2

En utilisant la propriété précédente, montrez que $\text{adh}]-2,5] = [-2,5]$.

Analyse a priori

La question est fermée. La méthode est indiquée.

Domaines de travail

Cadre de la topologie de $\mathbb{R}$, cadre des suites numériques.

Registres d'écriture

Registre symbolique.

Connaissances mises en jeu

- □ Connaissances en cours d'acquisition : inclusion d'ensembles, convergence d'une suite de nombre réels.
- □ Connaissance nouvelle : adhérence d'un ensemble.

Adaptations à réaliser

Il s'agit de prouver une égalité d'ensembles, ce qui revient à prouver deux inclusions (*reconnaissance des modalités d'application*). On est dans le cadre de la théorie des ensembles (*changement de cadre*).

Pour l'inclusion $\text{adh}]-2,5] \subseteq [-2,5]$, l'*organisation du raisonnement* consiste à prendre un réel quelconque x appartenant à $\text{adh}]-2,5]$ et à montrer son appartenance à $[-2,5]$ (*introduction d'un intermédiaire*). Plusieurs arguments doivent alors

être articulés (*mise en relation d'arguments*). Il faut utiliser la définition d'adhérence pour traduire l'hypothèse en l'existence d'une suite d'éléments de l'ensemble qui converge vers x (*mise en jeu d'une connaissance nouvelle*). L'appartenance des éléments de la suite se traduit en inégalités (*changement de point de vue*). En *articulant* le passage à la limite avec le fait que l'inégalité stricte devient large (*connaissance en cours d'acquisition*), on obtient $x \in [-2,5]$.
L'organisation du raisonnement pour prouver l'autre inclusion s'appuie sur la décomposition de l'ensemble en $[-2,5] =]-2,5] \cup \{-2\}$ (*changement de point de vue*). L'inclusion $]-2,5] \subseteq \mathrm{adh}]-2,5]$ est une application immédiate d'une propriété du cours (*mise en jeu d'une connaissance nouvelle*). Le fait que $-2 \in \mathrm{adh}]-2,5]$ mobilise la définition d'adhérence (*mise en jeu d'une connaissance nouvelle*) pour construire une suite qui converge vers -2 (*mise en jeu d'une connaissance en cours d'acquisition*).

C'est le deuxième exercice qui apparaît dans l'enseignement. Il s'agit encore une fois d'une tâche immédiate de manipulation de la définition d'adhérence. L'analyse a priori montre que l'organisation du raisonnement nécessite la disponibilité de connaissances en théorie des ensembles. Les connaissances à mettre en jeu sont soit nouvelles, soit en cours d'acquisition. L'exercice met en relation plusieurs arguments et même si la méthode est indiquée, des adaptations variées sont à réaliser. L'exercice relève du niveau disponible de mise en fonctionnement des connaissances.

Concernant les activités, une phase de recherche individuelle de quelques minutes est prévue. Nous savons que ce type d'exercices ne pourra pas être laissé à la seule charge de tous les étudiants. Il s'agit néanmoins de les laisser chercher un peu de manière à étudier s'ils parviennent à réaliser certains types d'adaptations tels qu' organiser la structure logique du raisonnement (deux inclusions d'ensembles à prouver), traduire l'appartenance d'un point à un ensemble. On se donne ainsi les moyens d'identifier leurs difficultés.

Durant la correction, l'enseignant peut à nouveau insister sur la différence entre le caractère simple et intuitif du résultat et le travail mathématique à mettre en œuvre pour le démontrer.

La propriété 8 porte sur les inclusions d'ensembles et les conséquences sur les intérieurs et adhérences respectifs. Il s'agit, ici aussi, d'une propriété classique démontrée par l'enseignant.

Cette deuxième partie est enseignée sous la forme d'un cours théorique magistral. L'enseignant expose donc l'ensemble des contenus, qui nécessitent ici une utilisation massive du registre symbolique.

Le recours au méta permet notamment à l'enseignant de souligner le décalage entre les résultats énoncés, souvent intuitifs, et la complexité des démonstrations.

Ce dernier point nous semble être une condition permettant aux étudiants de distinguer l'intuition qu'ils peuvent associer aux résultats en lien avec le sens donné aux notions et la nature du travail mathématique engendré dans les preuves, compte tenu des définitions adoptées.

La progression des contenus choisie dans cette partie permet de justifier l'introduction de chaque nouvelle notion. Il existe en effet une question accessible aux étudiants pour motiver le passage des types de points de la partie 1 aux types d'ensembles ainsi que l'émergence de la notion de frontière, implicitement introduite dans la tâche d'introduction 1. De plus, la question de définir les notions en termes de suite est elle aussi motivée car elle trouve son origine dans la démonstration d'un résultat portant sur la notion de boule.

La cohérence de la progression peut, selon nous, contribuer à donner du sens aux notions, au moins chez certains étudiants.

Cette partie ménage donc des phases permettant de travailler à la fois sur le sens et la technique. Le travail sur la technique est pris en charge par l'enseignant mais nous faisons l'hypothèse que cette forme de travail peut contribuer à l'acquisition de la disponibilité des connaissances en logique et en théorie des ensembles et à une appropriation des adaptations à réaliser pour manipuler le langage formel.

À ce stade de l'enseignement, un certain de nombre de preuves formelles ont été réalisées. L'ensemble des adaptations qui apparaissent dans les tâches de manipulation des définitions ont été rencontrées et travaillées à plusieurs reprises en insistant de plus sur l'utilisation des connaissances en logique et en théorie des ensembles. Nous faisons l'hypothèse que les étudiants ne sont sûrement pas encore capables, à cette étape, de réaliser une telle tâche de manière autonome, ni de s'appuyer spontanément sur les registres du dessin et du langage naturel pour faire évoluer leurs questionnements.

Après avoir étudié les notions d'intérieur et d'adhérence par rapport aux inclusions d'ensembles, une question semblable peut émerger à propos des opérations ensemblistes que sont l'intersection et la réunion de deux ensembles. Cette question est proposée aux étudiants sous la forme d'une tâche les amenant à travailler à nouveau en autonomie sur des dessins (Tâche d'introduction 2).

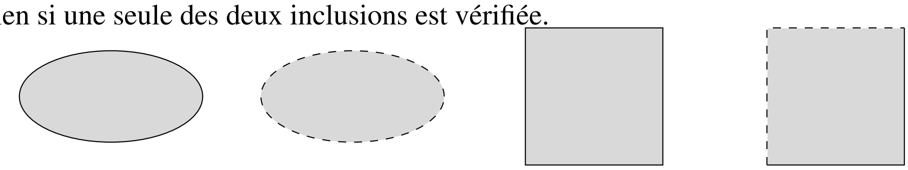
Tâche d'introduction 2

On cherche à comparer, pour deux ensembles $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$, les ensembles :

① $\mathrm{int}(A \cap B)$ avec $\mathrm{int}A \cap \mathrm{int}B$,

② $\mathrm{int}(A \cup B)$ avec $\mathrm{int}A \cup \mathrm{int}B$.

Pour vous aider, vous disposez des quatre ensembles ci-dessous. Vous pouvez les associer deux à deux pour conjecturer si les ensembles donnés en ① et ② sont égaux ou bien si une seule des deux inclusions est vérifiée.



En procédant de la même manière, comparez maintenant les ensembles :

① $\mathrm{adh}(A \cap B)$ avec $\mathrm{adh}A \cap \mathrm{adh}B$,

② $\mathrm{adh}(A \cup B)$ avec $\mathrm{adh}A \cup \mathrm{adh}B$.

Analyse a priori

Domaines de travail

Cadre géométrique de $\mathbb{R}^2$ et cadre de la topologie de $\mathbb{R}^2$.

Registres d'écriture

Registre du dessin, registre symbolique.

Connaissances mises en jeu

- □ Connaissances en cours d'acquisition : intersection et réunion de deux ensembles, inclusion et non inclusion de deux ensembles, égalité d'ensembles.
- □ Connaissances nouvelles : intérieur d'un ensemble, adhérence d'un ensemble, frontière d'un ensemble.

Adaptations à réaliser

Les *reconnaissances des modalités d'application* portent sur l'association de dessins, l'objectif étant de *conjecturer* sur des égalités d'ensembles.
Le recours aux dessins pour se prononcer sur un résultat est une forme de travail qui a été proposée aux étudiants dans la tâche d'introduction 1 supposée inhabituelle. Cette tâche les amène donc, une fois de plus, à s'appuyer sur des dessins pour aborder un questionnement, ce qui peut constituer un *changement de point de vue* sur le travail mathématique à réaliser par rapport aux exigences classiques du cours.

Il s'agit d'établir les liens entre l'intérieur (respectivement l'adhérence) d'une intersection et d'une réunion de deux ensembles A et B et les intérieurs (respectivement les adhérences) de chaque ensemble. La nature des ensembles donnés, dont on inclut leur frontière ou non, est pour l'enseignant une variable didactique de la tâche proposée. Elle amène à envisager que la notion de frontière joue un rôle dans le fait que certaines inclusions ne sont pas vérifiées. Des dessins semblables avaient été rencontrés dans la tâche d'introduction 1. Il y a donc une forme de continuité entre les deux tâches puisque ce sont les mêmes objets qui interviennent. Le questionnement est par contre de nature différente.

Une phase de recherche individuelle est prévue, durant laquelle les activités des étudiants consistent à manipuler des dessins pour conjecturer s'il y a égalité ou bien seulement inclusion entre les différents ensembles. Les résultats sont énoncés dans la propriété 9 et démontrés par l'enseignant en collaboration avec les étudiants. Les dessins peuvent contribuer à la recherche de contre-exemples, notamment pour faire apparaître les problèmes posés par la frontière des ensembles.

L'étape suivante consiste à se poser des questions semblables pour une famille quelconque d'ensembles. Préalablement, il y a lieu de définir en toute généralité ce qu'est une famille d'ensembles (Définition 10). Les résultats généraux sont ensuite énoncés dans le théorème 11. La preuve sera réalisée par l'enseignant car elle met en jeu un formalisme particulièrement complexe.

Cette partie est essentiellement théorique. Elle se donne principalement sous la forme d'un cours magistral. Le langage formel et un certain nombre de connaissances en logique et en théorie des ensembles sont constamment utilisés. Les commentaires méta-mathématiques visent à insister sur le fonctionnement des mathématiques mises en jeu dans les démonstrations.

Le fait de pouvoir caractériser les notions d'intérieur et d'adhérence d'un ensemble de manières, a priori, différentes (en termes de boule et de suite) est un autre aspect dont les étudiants doivent prendre conscience. Néanmoins, la démonstration de l'équivalence des définitions montre qu'il semble naturel de pouvoir caractériser les notions avec la notion de suite. Nous pensons que parler aux étudiants de ces aspects de l'enseignement peut provoquer une réflexion sur leur activité mathématique susceptible de donner un « certain » sens aux notions, au moins chez certains d'entre eux.

Cette deuxième partie prend fin avec le théorème 11, qui est particulièrement formel et abstrait. Nous avons ménagé, à cette fin, un itinéraire spécifique pour parvenir à l'énoncer et à le démontrer. Il s'agit tout d'abord de faire travailler les étudiants sur des questions semblables dans $\mathbb{R}^2$ en ne faisant intervenir que deux ensembles, pour passer ensuite à la phase de généralisation. C'est donc l'exemplification qui est à nouveau utilisée, comme dans la partie 1, comme un levier permettant d'accéder à la manipulation du formalisme. Les démonstrations sont d'abord réalisées dans $\mathbb{R}^2$ et sont ensuite reprises et adaptées dans $\mathbb{R}^N$.

Nous faisons encore, pour cette partie, cette hypothèse (forte) que les étudiants réaliseront les apprentissages visés par appropriation de ce qui leur est montré par l'enseignant, après un premier contact avec les connaissances mises en jeu et les adaptations associées.

4 Troisième partie : ensemble ouvert et ensemble fermé

Un bilan est prévu au début de cette partie. L'enseignant peut revenir sur l'itinéraire suivi pour construire les notions. Des types de points ont tout d'abord été introduits. La question de considérer l'ensemble de chaque type de points est alors apparue avec les notions d'intérieur et d'adhérence. Les dessins et les exemples ont montré l'existence d'ensembles qui coïncidaient avec leur intérieur ou bien avec leur adhérence. On peut maintenant se poser la question de définir de manière générale de tels ensembles.

Ce questionnement justifie l'introduction des notions d'ensemble ouvert et d'ensemble fermé et amène naturellement à les définir en termes d'égalité d'ensembles (Définition 12). Les définitions peuvent donc être écrites dans un formalisme très économique. L'itinéraire développé permet, selon nous, de favoriser la manipulation des définitions. En effet, la traduction des définitions d'ouvert et de fermé en deux inclusions, dont l'une est toujours vérifiée, permet de se ramener à la question de savoir si un point de l'ensemble est un point intérieur à l'ensemble ou si un point adhérent à l'ensemble est un point de l'ensemble.

Une autre question qui découle de cette définition est de pouvoir établir des liens entre les deux types d'ensembles. La propriété 13 établit un lien entre les ouverts et les fermés par passage au complémentaire (Propriété de dualité). La démonstration est prise en charge par l'enseignant.

Trois exercices sont proposés (Exercices 3, 4 et 5). En voici les énoncés et analyses a priori.

Exercice 3

Soient $a,b \in \mathbb{R}$. Les ensembles $[a,b]$, $]a,b[$, $]a,b]$ sont-ils ouverts ? Fermés ?

Analyse a priori

L'énoncé porte sur la structure topologique des intervalles bornés dans $\mathbb{R}$. La question est ouverte. La seule méthode à la disposition des étudiants est le recours aux définitions.

Domaines de travail

Cadre géométrique de la droite réelle et cadre de la topologie de $\mathbb{R}$.

Registres d'écriture

Registre symbolique, registre de la langue naturelle et registre du dessin.

Connaissances mises en jeu

- □ Connaissances anciennes : position des nombres sur la droite réelle, intervalle ouvert, intervalle fermé.
- □ Connaissances en cours d'acquisition : boule ouverte dans $\mathbb{R}$, distance entre deux nombres réels, inclusion d'ensembles, intersection d'ensembles, quantificateurs.
- □ Connaissances nouvelles : point intérieur, point adhérent, intérieur et adhérence d'un ensemble, ensemble ouvert, ensemble fermé.

Remarquons que les connaissances anciennes et en cours d'acquisition à mettre en œuvre sont identiques à celles de l'exercice 1, portant sur les notions de point intérieur et de point adhérent.

Adaptations à réaliser pour les trois exemples

Les adaptations suivantes sont communes au démarrage de chaque ensemble à traiter :

- □ *Existence d'un choix* : savoir si l'ensemble est ouvert ou non, fermé ou non.
- □ *Reconnaissance des modalités d'application* : écrire l'égalité d'ensembles à prouver s'il s'agit d'un ensemble ouvert (respectivement fermé) ou alors écrire la non inclusion à prouver s'il s'agit d'un ensemble qui n'est pas ouvert (respectivement qui n'est pas fermé). Il y a donc un *changement de cadre*, puisqu'on travaille dans le cadre de la théorie des ensembles maintenant.
- □ *Changement de point de vue*, lié au cadre de travail : dans $\mathbb{R}$, une boule ouverte de centre x et de rayon r est l'intervalle $]x-r,x+r[$.

- □ *Changement de point de vue*, induit par l'adaptation précédente : le fait que $y \in B(x,r)$ se traduit par les inégalités $x - r < y < x + r$.

Adaptations à réaliser pour montrer qu'un des ensembles n'est pas ouvert (respectivement n'est pas fermé)

La non inclusion $A \nsubseteq \mathrm{int}A$ (respectivement $\mathrm{adh}A \nsubseteq A$) amène un *changement de point de vue* : trouver un point de A n'appartenant pas à $\mathrm{int}A$ (respectivement trouver un point de $\mathrm{adh}A$ n'appartenant pas à A). La recherche d'un tel point nécessite l'*existence d'un choix*. Ensuite, montrer que le choix réalisé convient engendre un travail identique à celui réalisé dans l'exercice 1 et donc, les mêmes adaptations pour montrer qu'un point de l'ensemble n'est pas intérieur à l'ensemble (respectivement qu'un point adhérent à l'ensemble n'appartient pas à l'ensemble).

Adaptations à réaliser pour montrer que l'ensemble $]a,b[$ est ouvert

L'égalité $A = \mathrm{int}A$ se traduit (*interprétation*) en deux inclusions dont l'une est trivialement vérifiée grâce à une propriété vue dans le cours. L'inclusion $A \subseteq \mathrm{int}A$ nécessite l'*introduction d'un intermédiaire* : considérer $x \in A$ et prouver que $x \in \mathrm{int}A$. Dans ce cas aussi, les adaptations à réaliser sont semblables à celles de l'exercice 1. La recherche du rayon de la boule $B(x,r)$ se fait ici dans le cas général, nécessitant de travailler avec la distance entre deux nombres réels quelconques et la notion de minimum entre deux valeurs (*mises en jeu de connaissances en cours d'acquisition*).

Adaptations à réaliser pour montrer que l'ensemble $[a,b]$ est fermé

L'égalité $A = \mathrm{adh}A$ se traduit (*interprétation*) en deux inclusions dont l'une est toujours vraie. L'inclusion $\mathrm{adh}A \subseteq A$ nécessite l'*introduction d'un intermédiaire* : prendre $x \in \mathrm{adh}A$ et en déduire que $x \in A$.
Si l'on travaille avec la définition en termes de boule, les adaptations à réaliser coïncident avec celles réalisées à l'exercice 1 pour la notion de point adhérent.
Si l'on travaille avec la notion de suite, des *connaissances en cours d'acquisition* sont sollicitées : construction d'une suite de points appartenant à un ensemble et convergeant vers un point x fixé, passage à la limite dans des inégalités.

Dans cet exercice, le travail sur les modalités d'application consiste à traduire les définitions en deux inclusions à prouver. La cohérence de l'itinéraire choisi permet ensuite de revenir à un travail mathématique semblable à celui réalisé dans les exercices 1 et 2 portant sur la manipulation des définitions. Par exemple, montrer que $A \subseteq \mathrm{int}A$ revient à montrer qu'un point de A est intérieur à A.

Cet exercice met donc en jeu l'ensemble des notions introduites dans le cours ainsi que l'ensemble des adaptations à réaliser. Il relève du niveau disponible de mise en fonctionnement des connaissances.

Une première phase de recherche individuelle est prévue pour que les étudiants conjecturent les résultats. Un autre temps de recherche est ensuite aménagé pour la réalisation du travail mathématique engendré par la manipulation des définitions. Une correction collective est prévue.

Les activités attendues des étudiants sont la réalisation autonome des adaptations apparaissant dans l'analyse a priori.

L'énoncé peut engendrer des commentaires méta-mathématiques de la part de l'enseignant sur le fait que les résultats établis caractérisent la structure topologique et même le nom (intervalle ouvert, intervalle fermé) d'ensembles qui sont familiers aux étudiants.

Exercice 4

Peut-on trouver un ensemble qui soit à la fois ouvert et fermé ?

Analyse a priori

La question est ouverte. La solution attendue ne nécessite pas une justification rigoureuse. Dans cet exercice, l'accent est mis sur la recherche d'un tel ensemble, ce qui nécessite de donner du sens aux notions.

Domaine de travail

On est dans le cadre de la topologie mais le cadre dans lequel l'ensemble est donné n'est pas précisé de manière à ouvrir le champ des possibilités.

Registres d'écriture

Registre de la langue naturelle.

Connaissances mise en jeu

Stock d'ensembles de référence précédemment rencontrés, ensemble ouvert, ensemble fermé.

Adaptations à réaliser

Interpréter les définitions.

La question traitée dans cet exercice découle naturellement des résultats établis dans l'exercice 3. Les étudiants y ont en effet rencontré un ensemble ouvert, un ensemble fermé et un ensemble qui n'était ni ouvert ni fermé. On peut donc se demander s'il existe un ensemble qui soit à la fois ouvert et fermé. La tâche amène une réflexion sur la nature topologique des ensembles précédemment rencontrés. Les étudiants doivent donner du sens aux nouvelles notions et puiser dans leur stock de référence pour répondre à la question. Cet exercice requiert donc la disponibilité d'un certain nombre de connaissances.

La gestion prévue est une discussion collective. Il est donc difficile de caractériser davantage les activités attendues des étudiants.

Exercice 5

Les ensembles suivants sont-ils ouverts ? Fermés ? Justifiez votre réponse.

① $[\pi, +\infty[$,

② $]-\infty, -2[$,

③ $\{3\}$,

④ $\left\{1/n : n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\right\}$,

⑤ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 3x+2y=6\}$.

Analyse a priori

L'énoncé est identique à celui de l'exercice 3. On s'intéresse ici à la structure topologiques des intervalles non bornés dans $\mathbb{R}$, d'un singleton et de deux ensembles classiques, l'un dans $\mathbb{R}$ et le dernier dans $\mathbb{R}^2$, représentant une droite.
L'analyse a priori est semblable à celle de l'exercice 3.

La gestion prévue est une phase de recherche individuelle assez longue pour que les étudiants aient le temps de traiter chaque exemple. Les activités attendues sont la réalisation autonome des adaptations nécessaires pour traiter chaque ensemble.

L'enseignant insistera ici aussi sur le fait que la structure topologique d'ensembles fréquemment rencontrés est établie.

Cette partie porte sur les deux dernières notions à enseigner : ensemble ouvert et ensemble fermé. La cohérence de l'itinéraire choisi depuis le début de l'enseignement apparaît à deux niveaux. Tout d'abord, l'introduction des notions est motivée naturellement par la partie 2. Ensuite, la manipulation du formalisme utilisé n'engendre pas de nouvelles mises en fonctionnement des connaissances malgré l'introduction des nouvelles notions.

Le recours aux commentaires méta-mathématiques peut permettre une réflexion sur la nature des résultats obtenus et induire une prise de sens des nouvelles notions.

5 Quatrième partie : exercices

À ce stade de l'enseignement, tous les contenus théoriques prévus au programme ont été introduits : intérieur et adhérence d'un ensemble, ensemble ouvert et ensemble fermé, avec une introduction préalable des notions de points intérieur et adhérent.

Les connaissances installées devraient permettre aux étudiants d'utiliser trois registres d'écriture : le registre symbolique et la langue naturelle sont les registres utilisés pour rédiger les solutions des exercices et le registre du dessin peut servir d'appui pour organiser les raisonnements à développer.

Les adaptations de connaissances et les connaissances en logique et en théorie des ensembles ont fait l'objet d'un travail récurrent dans les trois premières parties en proposant des exercices de manipulation des définitions qui sont un autre point du programme initialement prévu.

Pour poursuivre le travail sur le sens et la technique, une liste d'exercices est alors proposée aux étudiants.

Pour chaque exercice, nous donnons l'énoncé et son analyse a priori. Nous intégrons également après chaque analyse quelques commentaires sur la gestion prévue.

Exercice 6

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble non-vide, fermé et majoré. Montrez que $\sup A \in A$.

Analyse a priori

La question est fermée. Aucune méthode n'est indiquée.

Domaine de travail

Cadre de la topologie de $\mathbb{R}$.

Registres d'écriture

Registre de la langue formelle, registre de la langue naturelle.

Connaissances mises en jeu

- □ Connaissances en cours d'acquisition : supremum, suite numérique.
- □ Connaissance nouvelle : ensemble fermé.

Adaptations à réaliser

La solution repose sur la *mise en relation* des définitions d'ensemble fermé et de supremum en utilisant la notion de suite (*connaissance en cours d'acquisition*).

Il y a lieu d'*interpréter* l'existence d'une suite d'éléments de l'ensemble qui converge vers $\sup A$ en l'information $\sup A \in \operatorname{adh} A$, et de conclure grâce au fait que A est fermé.

L'exercice met en jeu les notions de supremum [1] et d'ensemble fermé. Ce sont deux notions en cours d'acquisition. Il relève du niveau disponible de mise en fonctionnement des connaissances.

[1] Il s'agit de la borne supérieure d'un ensemble ou encore, dans certains pays, de la plus petite borne supérieure.

Un temps de recherche individuelle est prévu, suivi d'une correction collective. Les activités attendues sont le choix d'une caractérisation correcte de la notion de supremum et sa mise en relation avec celle de fermé.

L'enseignant pourra revenir sur le fait que le résultat établi donne un critère garantissant l'appartenance du supremum à l'ensemble en s'appuyant sur la nature topologique de celui-ci. C'est aussi l'occasion de revenir sur une erreur fréquemment rencontrée qui consiste, chez les étudiants, à penser que le supremum d'un ensemble est forcément un élément de cet ensemble.

Exercice 7

Soit l'ensemble $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 2 \text{ et } x + y \leqslant 0\}$.

① Représentez graphiquement l'ensemble E.

② L'ensemble E est-il ouvert ? Fermé ? Justifiez votre réponse.

③ Soit l'ensemble $F = \big\{(1/n, 1/n) : n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\big\}$. Dites si F est ouvert, fermé. Justifiez votre réponse.

④ L'ensemble $E \cup F$ est-il fermé ?

Analyse a priori

La question est décomposée en plusieurs sous-questions ouvertes. Aucune méthode n'est indiquée mais le recours aux définitions est inévitable.

Domaines de travail

Cadre de la topologie de $\mathbb{R}^2$ et cadre de la théorie des ensembles.

Registres d'écriture

Registre du dessin, registre du langage formel.

Connaissances mises en jeu

- □ Connaissances anciennes : équation d'un cercle de centre $(0,0)$ et de rayon r, équation d'une droite dans $\mathbb{R}^2$, représentation graphique de points vérifiant une inégalité.
- □ Connaissances en cours d'acquisition : boule ouverte, intersection et réunion de deux ensembles, norme dans $\mathbb{R}^2$, distance entre deux points de $\mathbb{R}^2$, convergence des suites numériques, passage à la limite dans les inégalités.
- □ Connaissances nouvelles : intérieur et adhérence d'un ensemble, ensemble ouvert, ensemble fermé.

Adaptations à réaliser

Dans la définition de l'ensemble E, le mot « et » est à *traduire* par une intersection entre deux ensembles contenant les points qui vérifient chaque inégalité. La représentation de chaque ensemble de points fait appel à des *connaissances antérieures* sur le cercle, la droite et la représentation de points satisfaisant une inégalité.

Le point ① apparaît comme un *intermédiaire* pour visualiser si l'ensemble E est ouvert ou non, fermé ou non (*existence d'un choix*).
Les adaptations mises en jeu dans ② sont du même type que celles rencontrées à l'exercice 5, pour l'exemple ⑤.
Le point ③ est une *généralisation* de l'étude de l'ensemble $\{1/n : n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$ réalisée dans l'exercice 5 dans l'exemple ④. Elle est liée au passage de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}^2$ (*changement de cadre*).
Le choix de *points intermédiaires* tels que $(1,1)$ pour montrer que l'ensemble F n'est pas ouvert et $(0,0)$ pour montrer qu'il n'est pas fermé se justifie par un jeu sur les composantes généralisant le travail réalisé dans $\mathbb{R}$ (*généralisation*).
Le point ④ nécessite d'*interpréter* que le problème rencontré au point ③ concernant la limite $(0,0)$ de la suite $\big((1/n,1/n)\big)$ qui n'appartient pas à l'ensemble F est ici résolu car $(0,0)$ appartient à l'ensemble E (*mise en relation de connaissances du cours*).

Cet exercice met en jeu de nombreuses connaissances. Des arguments variés doivent de plus être articulés et la compréhension de la nature topologique des ensembles en jeu est indispensable. Il permet donc de travailler à la fois sur le sens et la technique tout en faisant intervenir des ensembles plus complexes que dans les premières tâches. La tâche relève du niveau disponible de mise en fonctionnement des connaissances.

Un temps de recherche individuelle est ménagé suivi d'une discussion collective. Les activités attendues au terme de la recherche individuelle sont a minima la réalisation du dessin et une tentative de conjecture de chaque résultat. Nous attendons ensuite, chez un certain nombre d'étudiants, une première organisation des raisonnements appuyée par le choix d'une caractérisation (boule pour la notion d'ouvert, suite pour la notion de fermé) et la mise en relation de l'ensemble F avec l'ensemble des nombres de la forme $1/n$, précédemment traité dans l'enseignement.

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \in \mathbb{R}$. Considérons l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \leqslant a\}$. Montrez que l'ensemble E est fermé.

Analyse a priori

La question est fermée. Il s'agit d'une application de la définition d'ensemble fermé.

Domaines de travail

Cadre de la théorie des ensembles, cadre des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

Registres d'écriture

Registre symbolique, registre de la langue naturelle.

Connaissances mises en jeu

- □ Connaissances en cours d'acquisition : convergence d'une suite numérique, passage à la limite dans une inégalité, continuité d'une fonction.
- □ Connaissances nouvelles : adhérence d'un ensemble, ensemble fermé.

Adaptations à réaliser

Il s'agit de prouver une égalité entre deux ensembles (*reconnaissance des modalités d'application*) sachant que l'une est une *application immédiate d'un résultat du cours*.

Montrer que $\mathrm{adh}E \subseteq E$ nécessite d'*articuler plusieurs étapes* : on *introduit un intermédiaire* $x \in \mathrm{adh}E$. On *traduit* cette information en l'existence d'une suite d'éléments de E convergeant vers x. En passant à la limite dans l'inégalité vérifiée par les éléments de la suite et en utilisant la continuité de la fonction f (*mise en jeu de résultats du cours*), on obtient une inégalité sur x qui se *traduit* en $x \in E$.

L'enseignant peut proposer aux étudiants de représenter une fonction f et l'ensemble E associé pour comprendre la nature de l'ensemble. Ensuite, il s'agit d'un exercice formel qui relève du niveau disponible de mise en fonctionnement des connaissances pour pouvoir articuler les informations et mettre en jeu les connaissances du cours.

Les activités attendues sont l'organisation du raisonnement en deux inclusions à démontrer. Pour l'inclusion $\mathrm{adh}E \subseteq E$, nous attendons la traduction de l'appartenance d'un point dans l'adhérence et une utilisation appropriée de l'hypothèse de continuité de la fonction.

Exercice 9

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $p \in \mathbb{R}$. Supposons que $f(p) > 0$. Montrez qu'il existe un ouvert, noté O, contenant p sur lequel la fonction f est strictement positive.

Analyse a priori

La question est fermée et aucune méthode n'est indiquée.

Domaines de travail

Cadre de la topologie et cadre des fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

Registres d'écriture

Registre symbolique, registre de la langue naturelle.

Connaissances mises en jeu

- □ Connaissances en cours d'acquisition : boule ouverte, définition formelle de la continuité d'une fonction.
- □ Connaissances nouvelles : ensemble ouvert.

Adaptations à réaliser

Plusieurs arguments sont à articuler pour construire l'ouvert recherché (*mises en relations d'informations*) : en écrivant la définition en $\varepsilon - \delta$ de la continuité d'une fonction en un point (*mise en jeu d'une connaissance du cours*), il faut remarquer que l'inégalité $|x-a| < \delta$ peut se *traduire* en l'appartenance de x à une boule ouverte qui peut convenir pour l'ouvert recherché (*résultat du cours*). Il faut donc donner une valeur à ε dans la définition pour garantir que $f(x) > 0$ (*existence d'un choix*).

L'exercice requiert une bonne manipulation de la définition de la continuité d'une fonction en un point. La difficulté consiste à mettre en relation la manipulation de cette définition avec le choix de l'ouvert recherché. L'étudiant est donc confronté à la difficulté de savoir comment entrer dans la tâche. On est au niveau disponible de mise en fonctionnement des connaissances.

Nous n'attendons pas que l'étudiant résolve cet exercice de manière autonome. Les activités attendues sont ici la réalisation d'un dessin sur lequel pourrait apparaître la possibilité de trouver un ouvert contenant le point dans lequel la fonction est strictement positive, en faisant intervenir l'hypothèse de continuité de la fonction.

Exercice 10

Soit $O \subseteq \mathbb{R}^N$ un ouvert et $x_0 \in O$. Considérons l'ensemble $O \backslash \{x_0\}$. Cet ensemble est-il ouvert ?

Analyse a priori

La question est fermée et aucune méthode n'est indiquée.

Domaines de travail

Cadre de la topologie dans $\mathbb{R}^N$, cadre de la théorie des ensembles.

Registres d'écriture

Registre symbolique, registre de la langue naturelle.

Connaissances mises en jeu

- □ Connaissances en cours d'acquisition : complémentaire d'un ensemble, réunion de deux ensembles.
- □ Connaissances nouvelles : nature topologique d'un singleton, ensemble ouvert, ensemble fermé.

Adaptations à réaliser

Le passage au complémentaire de l'ensemble à étudier peut constituer un *changement de point de vue*. Il faut ensuite étudier la nature topologique de l'ensemble en le décomposant en une réunion de deux ensembles (*introduction d'un intermédiaire*). Il faut ensuite *articuler* plusieurs arguments : le fait que le complémentaire de O est fermé car O est ouvert (*connaissance du cours*) avec le fait qu'un singleton est un ensemble fermé, pour en conclure qu'une réunion de deux ensembles fermés est un ensemble fermé (*résultat du cours*).

Dans cet exercice, l'étudiant est encore une fois confronté à la difficulté de savoir comment entrer dans la tâche. Un dessin peut éventuellement aider à la compréhension de l'énoncé et penser au passage au complémentaire. C'est ce type d'activités qui est attendu. La méthode de résolution est courte mais n'est pas simple conceptuellement parlant à ce niveau d'enseignement. L'exercice relève du niveau disponible de mise en fonctionnement des connaissances.

Exercice 11

Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Montrez que l'intérieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A. Montrez que l'adhérence de A est le plus petit fermé contenant A.

Analyse a priori

La question est fermée, aucune méthode n'est indiquée.

Domaines de travail

Cadre de la topologie dans $\mathbb{R}^N$, cadre de la théorie des ensembles.

Registres d'écriture

Registre symbolique et registre de la langue naturelle.

Connaissances mises en jeu

- Connaissances en cours d'acquisition : inclusion d'ensembles.
- Connaissances nouvelles : intérieur et adhérence d'un ensemble, ensemble ouvert, ensemble fermé.

Adaptations à réaliser

Il faut tout d'abord interpréter le fait d'être « le plus grand ouvert » en les deux informations : être ouvert et tout ensemble contenu dans A doit être contenu dans int$A$ (*reconnaissance des modalités d'application*). On applique ensuite une *propriété du cours* sur les inclusions entre deux ensembles et leurs intérieurs respectifs.
Les adaptations pour montrer que adh$A$ est le plus petit fermé contenant A sont semblables.

Tout comme l'exercice précédent, c'est l'entrée dans la tâche qui peut créer des difficultés conceptuelles chez les étudiants. Il y a lieu de traduire correctement ce qu'il faut prouver. On est au niveau disponible de mise en fonctionnement des connaissances.

Ce type d'exercice ne peut être laissé à la charge de l'étudiant. Une discussion collective doit, selon nous, être engagée sur le sens de l'énoncé pour aider les étudiants à organiser le raisonnement.

Exercice 12

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Le graphe de f, noté Graph f, est défini par $\operatorname{Graph} f = \{(x, f(x)) : x \in \operatorname{Dom} f\}$. L'ensemble Graph f est-il fermé ?

Analyse a priori

Le démarrage de l'exercice requiert de donner du sens aux notions d'ensemble fermé et de graphe d'une fonction continue ou non.
Dans le cas où la fonction est continue, cet exercice nécessite des adaptations semblables à celles rencontrées dans la manipulation de la définition d'ensemble fermé. Une adaptation de connaissance vient s'ajouter : *articuler* l'utilisation de la continuité de f avec le fait que la suite $\big(f(x_n)\big)$ converge vers y pour en déduire que $y = f(x)$.

Le niveau formel de l'exercice est tel que, même si le travail mathématique à réaliser a déjà été effectué sur des exercices numériques, les mises en fonctionnement des connaissances relèvent du niveau disponible. Les activités attendues sont principalement l'émergence de l'hypothèse de continuité.

Exercice 13

Peut-on trouver un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^2$ tel que $\operatorname{Fr} A = \varnothing$?

Analyse a priori

Cet énoncé est de la même nature que l'exercice 4. C'est davantage la recherche de l'ensemble qui doit être mise en évidence plutôt que la justification. Cet exercice requiert de donner du sens aux notions.

Domaines de travail

Cadre de la topologie de $\mathbb{R}^2$.

Registres d'écriture

Registre symbolique, registre de la langue naturelle.

Connaissances mises en jeu

Connaissances nouvelles : stock de référence d'ensembles précédemment rencontrés, frontière d'un ensemble, adhérence et intérieur d'un ensemble.

Adaptations à réaliser

Interpréter la question en la recherche d'un ensemble qui n'a pas de frontière.

C'est le seul exercice mettant en jeu la notion de frontière. L'objectif est de donner du sens à cette notion. C'est l'interprétation de l'énoncé qui est conceptuellement difficile. Les connaissances doivent être disponibles chez l'étudiant. Les activités attendues sont l'interprétation de l'information $\mathrm{Fr}A = \varnothing$ en la recherche d'un ensemble qui n'a pas de frontière.

6 Bilan

Notre dispositif d'introduction des notions se découpe en quatre parties. Les trois premières visent à introduire les notions et à proposer un premier travail sur la manipulation de leurs caractérisations. La dernière partie comporte des exercices sur l'ensemble des notions enseignées.

Le réseau de notions à enseigner contient des types de points et des types d'ensembles. L'itinéraire choisi pour les introduire permet de les définir les unes à partir des autres. En effet, la première partie introduit des types de points : points intérieurs et adhérents à un ensemble. Leur introduction est appuyée par une tâche sur laquelle les étudiants travaillent en autonomie pour conjecturer une caractérisation possible pour chaque type de point, à partir de dessins. La deuxième partie du dispositif présente les notions d'intérieur et d'adhérence d'un ensemble en les définissant à partir des types de points. Enfin, les ouverts et les fermés sont caractérisés, à la troisième partie, en termes d'intérieur et d'adhérence. Les premières notions (points intérieur et adhérent) sont donc introduites de manière intuitive à partir d'une travail sur les dessins tandis que les notions d'intérieur, d'adhérence, d'ouvert et de fermé sont introduites à partir de considérations ensemblistes.

Dès le début, le dispositif propose un travail appuyé par différents registres ayant une fonction spécifique. Les registres de la langue naturelle et du dessin apparaissent dans l'introduction des types de points pour développer des activités mettant en jeu la notion intuitive de boule. Avec pour objectif premier de montrer ce que représentent les nouvelles notions, l'utilisation de ces registres vise aussi à permettre aux étudiants la réalisation de certains types d'adaptations. Nous pensons notamment à leur fonction d'aide pour conjecturer sur le fait qu'un ensemble est ouvert ou non, à l'introduction d'intermédiaire ou aux problèmes de choix. Le registre symbolique vient rapidement s'associer aux deux registres précédents. Il est quant à lui sollicité pour rédiger les démonstrations et les solutions des exercices proposés avec la rigueur attendue. C'est avec une fonction d'économie d'écriture qu'il est introduit.

Dans les trois premières parties, les contenus théoriques sont principalement exposés, a priori, sous la forme d'un cours magistral. Les premières tâches portent sur la manipulation des définitions qui est, rappelons-le, un objectif de l'enseignement. Les cadres d'intervention des notions sont $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$. Prenant en compte la complexité du travail engendré par ce type de tâche, plusieurs leviers sont intégrés dans le dispositif pour amener les étudiants à réaliser, seuls, ce genre d'exercices au terme des trois premières parties.

Nous avons déjà évoqué le recours à différents registres d'écriture comme une aide à la réalisation de certaines adaptations. Le travail sur les exemples est un autre levier que nous associons, dans le dispositif, à une gestion particulière de la classe. C'est en effet l'enseignant qui est supposé prendre en charge la mise en œuvre des tâches de manipulation des définitions, après un certain travail des étudiants. À partir de nombreux exemples, il montre aux étudiants le fonctionnement des mathématiques mises en jeu et utilise des commentaires méta-mathématiques pour insister sur les types d'adaptations et sur les connaissances à mobiliser. Nous faisons donc le pari que le travail d'imitation de l'enseignant peut contribuer à atteindre un objectif fort de l'enseignement.

Ainsi, les trois premières parties introduisent les notions visées par le programme institutionnel en intégrant un travail sur leur sens à partir de la manipulation de différents registres d'écritures. Elles prennent également en compte l'objectif de manipulation des définitions à partir de leviers tels que l'exemplification et la gestion prévue par l'enseignant.

Le travail sur le sens et la technique se poursuit dans la dernière partie de l'enseignement. La quatrième partie propose en effet des tâches qui dépassent la manipulation stricte des définitions.

L'exercice 7 a la particularité de mettre en jeu l'ensemble des nouvelles notions. Donner du sens à ces notions, à partir de dessins par exemple, est inévitable pour répondre aux sous-questions et pour étudier la nature topologique des ensembles proposés. La technique apparaît alors pour valider ce que le travail sur le sens a permis de conjecturer.

Des tâches plus conceptuelles, telles que les exercices 6, 10 et 11, sont proposées. Une difficulté se pose pour démarrer l'exercice. L'exercice 6 requiert de mettre en relation plusieurs notions et leurs caractérisations associées. Les exercices 10 et 11 nécessitent un choix d'une stratégie adaptée à l'énoncé. L'exercice 11 met de plus en jeu un problème de compréhension du vocabulaire. L'entrée dans ces trois tâches nécessite donc un réel travail sur le sens des notions qui sera, ici aussi, validé par la technique.

Les exercices 4 et 13 ne mettent pas en jeu un réel travail technique. Ils requièrent, selon nous, une prise de sens importante des notions et de la structure topologique des ensembles rencontrés. C'est davantage la réponse donnée que la justification qui est ici privilégiée. Le travail d'exemplification mené dans les trois premières parties aura contribué à la constitution d'un stock de références d'ensembles dont les étudiants connaissent les propriétés topologiques. L'utilité de ce travail peut être appuyée par ce type de tâches.

Enfin, les tâches 6, 8, 9 et 12 mettent en relation les nouvelles notions avec d'autres notions du cours, comme la continuité d'une fonction ou la notion de supremum.

Nos analyses de tâches, incorporées à la lecture descriptive du scénario, mettent en évidence plusieurs spécificités des exercices proposés. Tout d'abord, la quantité des adaptations, la variété des registres utilisés et le type de connaissances à mettre en jeu dans la résolution des tâches font que tous les exercices relèvent du niveau disponible de mises en fonctionnement des connaissances (cf. p. 33). Une autre spécificité de cette analyse globale de l'ensemble des tâches est de pointer la possibilité de travailler à la fois sur le sens et la technique.

En conclusion, l'enseignement décrit présente, selon nous, des caractéristiques permettant de mener à la conceptualisation visée tout en prenant en compte les contraintes de notre institution. Cet enseignement s'appuie notamment sur des leviers intégrés a priori concernant la gestion de la classe. Nous sommes bien consciente que d'autres choix auraient pu être réalisés. Nous pensons par exemple à certains choix de méthodes dans les démonstrations ou au choix des exercices proposés. Il s'agit donc maintenant d'expérimenter le scénario ainsi construit pour étudier d'une part la possibilité de le proposer dans une classe et d'autre part, les apprentissages qui sont effectivement réalisés. C'est l'objet de la partie suivante.

Quatrième partie

Expérimentation du scénario

Partie 4 — Introduction

Après avoir élaboré notre scénario d'enseignement de topologie, nous rendons compte, dans cette partie, de son expérimentation auprès d'un public constitué d'étudiants de première année universitaire dans une filière mathématique au sein de notre institution.

Comme nous l'avons décrit au chapitre III, le cadre de la théorie de l'activité, retenu dans ce travail, nous amène à étudier les activités des étudiants pour approcher leurs apprentissages en topologie.

À cette fin, nous commençons par développer, au chapitre XI, la méthodologie mise en place pour décrire les activités des étudiants en relation avec les analyses a priori précédentes. Celle-ci s'appuie sur l'analyse des formes de travail ménagées par l'enseignant en classe et sur ses interventions dans les phases de mise aux travail des étudiants. Ces deux aspects, relatifs à ce qui se passe en classe, peuvent effectivement influencer les activités réalisées par les étudiants.

Dans la perspective de rendre compte le plus précisément possible de l'expérimentation, nous donnons, au chapitre XII, une première description globale de l'enseignement de topologie proposé aux étudiants. Nous montrons ainsi les premières différences observées entre l'expérimentation et le découpage des séances prévu a priori dans notre scénario.

Nous analysons ensuite, au chapitre XIII, des phases précises de l'enseignement à partir de la méthodologie développée précédemment. Nous pouvons alors rendre compte des activités possibles des étudiants en classe et étudier leur conformité avec les activités prévues par nos analyses a priori (cf. chapitre X).

L'étude de l'expérimentation se poursuit, au chapitre XIV, avec des explications plus fines des décalages observés dans la passation du scénario. Nous montrons en effet que certains éléments se sont intégrés à l'enseignement, non prévus dans le scénario, et à quelles difficultés les étudiants ont été confrontés dans la réalisation des exercices.

Nous terminons cette partie par un bilan dans lequel nous présentons une première description, très partielle, des apprentissages des étudiants. Nous revenons aussi sur les limites méthodologiques des analyses menées.

Chapitre XI

Choix méthodologiques pour l'analyse des déroulements en classe

Le scénario d'enseignement décrit à la partie 3 a été analysé en termes de tâches et d'activités. Notre objectif consiste maintenant à évaluer ce qui s'est passé en classe. En particulier, nous cherchons à étudier l'adéquation entre nos choix de gestion faits a priori et la manière dont l'enseignement de topologie s'est déroulé au sein de la classe. Dans ce chapitre, nous décrivons la méthodologie mise en place pour analyser les déroulements.

1 Premiers éléments globaux sur l'expérimentation

Le dispositif d'introduction des notions présenté au chapitre IX a été expérimenté durant l'année universitaire 2008-2009. Plus précisément, l'enseignement de topologie dont il est question a couvert trois semaines de cours se répartissant entre la moitié du mois de mars et le début du mois d'avril 2009. Conformément au programme du cours d'analyse [1], le chapitre sur la topologie est précédé par des chapitres portant sur la convergence des suites de nombres réels, sur les normes dans $\mathbb{R}^N$ et sur les notions de limite et de continuité d'une fonction de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$.

Le public auquel l'enseignement a été proposé est un groupe de 23 étudiants en première année universitaire dans une filière mathématique. Le niveau du groupe est bon. De plus, un certain nombre de connaissances anciennes dont nous avons besoin dans le chapitre sur la topologie [2], ont été préalablement travaillées avec les étudiants dans le cours de Mathématiques générales qui se donne au début de l'année universitaire et dont nous avons déjà parlé à la page 140. Un des objectifs de celui-ci est en effet de reprendre des connaissances mathématiques

[1] Le programme du cours est donné dans l'annexe A.

[2] Nous pensons à la manipulation d'inégalités ou aux propriétés de la valeur absolue.

de l'enseignement secondaire supérieur dont les étudiants ont besoin pour aborder les cours universitaires. Nous prenons également appui sur ces connaissances anciennes pour développer le travail attendu chez les étudiants en matière de rédaction et d'organisation des raisonnements [3]. Cet aspect fait partie des contraintes institutionnelles et a été lui aussi évoqué à la page 140. Ainsi, nous considérons que les contenus abordés dans le cours de mathématiques générales sont disponibles pour les cours ultérieurs, tels que le cours d'analyse ou celui d'algèbre linéaire. En général, les étudiants de la filière mathématiques réussissent ce cours de mathématiques générales avec une note supérieure ou égale à 12 sur 20.

Un autre élément important concernant les étudiants visés par l'enseignement de topologie peut être mentionné. En tant qu'enseignante, nous travaillons avec eux depuis leur entrée à l'université puisque nous intervenons dans le cours de Mathématiques générales, dans le cours d'analyse et dans des séances de remédiation également. Des habitudes de travail se sont donc installées entre les enseignants et les étudiants. Par exemple, dans les phases de recherche individuelle, tous les étudiants se mettent au travail lorsque des exercices leur sont proposés et prennent la peine de réfléchir à la mise en place d'une stratégie de résolution. La taille du groupe est également telle que les étudiants sont habitués aux discussions collectives et à intervenir dans les enseignements, que ce soit en cours magistral ou bien en travaux dirigés. En dehors de la classe, ces étudiants fournissent un travail intense. Beaucoup d'entre eux prennent la peine de compléter des éléments qui auraient été laissés en suspens par l'enseignant, tels que la fin d'un calcul ou une démonstration à achever. Ils résolvent également de nombreux exercices complémentaires qui ne sont pas forcément corrigés en travaux dirigés.

En accord avec le titulaire du cours d'analyse, nous avons pris en charge l'ensemble des séances portant sur la topologie. Deux choix ayant trait à la gestion des séances prévue a priori (cf. chapitre IX, p. 147) doivent, selon nous, être rappelés. Le dispositif d'introduction des notions intègre les exercices aux contenus théoriques. Les cours magistraux et les travaux dirigés ne sont donc pas scindés ni donnés par différents enseignants. D'autre part, il est prévu de consacrer une quinzaine d'heures à l'enseignement de la topologie. Tel qu'il a été décrit au chapitre IX, le dispositif couvre a priori 12h30 d'enseignement.

Nous avons enregistré l'ensemble des séances. Celles-ci n'ont pas été filmées. Le type de données dont nous disposons a des conséquences méthodologiques sur les analyses menées a posteriori. Nous y revenons un peu plus loin dans ce chapitre.

[3]Rappelons que les étudiants doivent, dans leurs productions, expliquer leur démarche, citer les définitions et les résultats utilisés et détailler leurs calculs.

2 Conséquences de nos choix théoriques sur les éléments pris en compte dans les analyses des déroulements

En nous plaçant dans le cadre de la théorie de l'activité, nous choisissons d'étudier les activités de nos étudiants en classe pour approcher leurs apprentissages. Plus précisément, c'est à partir de la description des activités en classe que nous accédons à la manière dont les étudiants peuvent construire les connaissances visées, le sens qu'ils parviennent à donner aux notions et leur acquisition du travail technique.

Les activités mathématiques des étudiants, telles que nous cherchons à les caractériser dans le cadre de la théorie de l'activité, sont fortement conditionnées par la gestion de l'enseignant en classe. Nous sommes donc également amenée, pour décrire les activités, à spécifier dans les déroulements la forme et la nature du travail organisé par l'enseignant mais également ses interventions, notamment les aides apportées et le rapport entre ces aides et le travail des étudiants. L'étude des activités des étudiants amène donc à appréhender à la fois les contenus enseignés et les déroulements observés en classe.

À partir des enregistrements des séances, nous cherchons à renseigner sur la partie du discours de l'enseignant, audible et observable, qui peut être mise en relation avec les activités des étudiants. C'est donc par des traces des interventions du professeur et des formes de travail ménagées en classe que nous traquons les activités. Nous visons aussi, en approchant ces activités, à étudier l'adéquation entre les choix réalisés a priori et la gestion qui en a été faite en classe. Nous sommes donc bien consciente de ne pas mener une étude fine des déroulements comme dans certains travaux, par exemple Chesnais (2009) ou Roditi (2005), qui s'attachent à étudier des questions telles que la gestion des incidents ou la prise en compte des différences entre les élèves.

Pour rendre compte des déroulements en classe, nous procédons en trois étapes :

- la première est une description chronologique globale de l'expérimentation ;
- la deuxième est une analyse du déroulement de quelques phases précises typiques de l'enseignement ;
- la troisième est une analyse plus locale de certaines phases de l'enseignement, en renseignant sur des modifications de choix de gestion en classe et sur des difficultés rencontrées par les étudiants au cours de l'expérimentation dans la réalisation de certains types d'activités.

Nous décrivons ci-dessous la manière dont nous abordons chaque étape. Pour décrire la chronologie globale de l'expérimentation, nous présentons un tableau mettant en regard le découpage des séances prévu a priori (cf. chapitre IX) avec celui qui a été effectivement réalisé. Nous montrons les premiers aspects frappants de l'enseignement directement observables à partir de ce tableau et nous en donnons également quelques explications.

Nous menons ensuite une étude plus fine de quelques phases précises de l'enseignement qui, d'une part, nous semblent bien rendre compte du travail mathématique organisé en classe par l'enseignant, de ses interventions et des activités qui ont pu être réalisées et d'autre part, correspondent selon nous à des moments clés de l'enseignement. Dans cette perspective, nous nous centrons sur

- la tâche d'introduction 1 : nous choisissons de rendre compte de son déroulement car cette tâche vise à installer, chez les étudiants, la possibilité d'utiliser des dessins et le langage naturel comme une aide pour donner du sens aux notions. De plus, elle ne requiert pas l'usage de symboles mathématiques, ce qui diffère du fonctionnement mathématique auquel les étudiants sont habitués. Nous nous sommes expliquée sur ce point dans l'analyse a priori de la tâche (cf. p. 172 et suivantes).
- l'exercice 1 portant sur la manipulation des définitions de point intérieur et de point adhérent. Notre choix d'étudier le déroulement de cet exercice tient au fait que celui-ci vise à introduire l'utilisation du registre symbolique pour caractériser les notions (cf. définition 1 du scénario, p. 153) et à faire apparaître la fonction d'économie du langage formel dans sa version symbolique. Celui-ci devient alors le langage que les étudiants doivent utiliser dans la résolution des exercices tout en continuant de s'appuyer sur les dessins et le langage naturel pour guider leur intuition et organiser leurs raisonnements.
- un exercice de la partie 4 du scénario. Nos analyses a priori ont montré que les exercices proposés dans cette partie relèvent tous du niveau disponible de mise en fonctionnement des connaissances. Ils mettent en jeu des adaptations variées et en général, aucune méthode n'est indiquée. Ce type d'exercices amène donc les étudiants à rechercher par eux-mêmes les connaissances à utiliser et à organiser de manière autonome le raisonnement menant à la résolution de l'exercice. Il nous semble donc pertinent d'étudier la mise au travail des étudiants sur ce type d'exercice, compte tenu des choix de gestion réalisés dans les trois premières parties de l'enseignement.

Nous procédons à une analyse semblable pour les trois déroulements en adaptant la méthodologie proposée par Pariès, Robert et Rogalski (Vandebrouck et al., 2008) pour l'analyse des déroulements.

Dans la perspective de comparer ce qui a été prévu dans le scénario avec ce qui se passe effectivement en classe, nous cherchons à déterminer des activités que les étudiants peuvent réaliser en classe. Cependant, considérant ce que nous englobons sous le terme « activité [4] », nous savons que nous ne pouvons accéder qu'à des traces des activités des étudiants. Nous nous restreignons donc à l'étude des activités possibles des étudiants, c'est-à-dire les activités auxquelles nous pouvons nous attendre, compte tenu des connaissances à mobiliser dans l'enseignement et du déroulement.

[4] Les activités désignent tout ce qu'un étudiant fait, dit, pense en classe mais également ce qu'il ne fait pas, ne dit pas, ne pense pas...

De plus, les activités possibles ne sont sans doute pas identiques chez tous les étudiants. C'est la raison pour laquelle nous distinguons les activités possibles a maxima et a minima. Les activités a maxima sont celles d'un étudiant qui se lance directement dans la tâche qui lui est proposée. Les activités a minima sont celles d'un étudiant qui a besoin d'indications complémentaires et d'aides de la part de l'enseignant pour démarrer la tâche.

Pour reconstituer les activités possibles des étudiants et les mettre en regard des activités prévues à partir de nos analyses a priori, nous nous appuyons sur les interventions de l'enseignant. Celles-ci nous permettent de découper le déroulement d'une tâche en différentes phases. Nous présentons alors le déroulement de la tâche sous la forme d'un tableau à trois colonnes.

La première colonne indique la nature du travail organisé par le professeur. Il peut s'agir d'une recherche individuelle ou collective, d'un rappel de cours, d'une correction... La deuxième colonne décrit les interventions de l'enseignant. Elle précise donc les rappels qu'il fait, le recours aux commentaires méta-mathématiques et les aides apportées. Rappelons que deux types d'aides peuvent être distingués : les aides à fonction procédurale et celles à fonction constructive. Nous les avons décrites à la page 36. Enfin, la troisième colonne décrit les activités possibles des étudiants. Ce type de tableau permet donc de préciser, a posteriori, les activités possibles des étudiants, à partir des interventions de l'enseignant, et de les comparer aux analyses a priori.

Notre analyse des déroulements se termine par une troisième étape qui vise à rendre compte d'éléments plus locaux de ce qui s'est passé en classe. Nous indiquons tout d'abord quelques phases de l'enseignement dont la gestion a été modifiée par rapport aux choix faits a priori. Nous décrivons ensuite quelques difficultés des étudiants au démarrage de certains exercices en précisant la nature des activités qui ont provoqué des blocages. Nous sommes alors en mesure de donner quelques éléments de l'adéquation entre les apprentissages visés et ceux qui semblent avoir été réalisés par les étudiants.

Chapitre XII

Chronologie globale de l'expérimentation

Dans ce chapitre, nous donnons une première lecture, très globale, de l'expérimentation du scénario en classe. Nous pointons ensuite quelques éléments pouvant expliquer les premiers décalages observés entre la gestion prévue a priori et celle effectivement réalisée.

1 Découpage du dispositif d'introduction des notions

Le scénario présenté au chapitre IX découpe le dispositif d'introduction des notions en six séances couvrant environ 12h30 d'enseignement. Pour expérimenter la totalité du scénario, nous avons été amenée à ajouter deux séances, ce qui correspond à plus ou moins 4 heures supplémentaires par rapport au volume horaire initialement prévu.

Le tableau suivant met en évidence les différences observées lors de l'expérimentation en ce qui concerne la progression des contenus.

Découpage des séances

Séance	Chronologie a priori	Chronologie effective
Séance 1 : 2h45	□ Présentation du nouveau chapitre □ Tâche d'introduction 1 □ Définitions formelles □ Manipulation des définitions, exercice 1, exemples 1 à 7	□ Présentation du nouveau chapitre □ Tâche d'introduction 1 □ Définitions formelles □ Manipulation des définitions, exercice 1, exemples 1 à 5
Séance 2 : 1h45	□ Rappels □ Définitions formelles d'intérieur et d'adhérence □ Propositions 1, 2 et proposition 3, et leurs démonstrations □ Définition de la frontière d'un ensemble □ Équivalence des définitions en termes de boule et de suite (Proposition 7) □ Exercice de manipulation des définitions (Exercice 2)	□ Rappels □ Correction des exemples 6 et 7 de l'exercice 1 □ Définitions formelles d'intérieur et d'adhérence □ Propositions 3 et 4 et leurs démonstrations □ Définition de la frontière d'un ensemble

Séance 3 : 1h45	□ Rappels □ Intérieur et adhérence de l'intersection et de la réunion de deux ensembles : tâche d'introduction 2, énoncés des résultats et démonstrations (Proposition 9)	□ Rappels □ Proposition 6 et sa démonstration □ Équivalence des définitions en termes de boule et de suite (Proposition 7)
Séance 4 : 2h45	□ Définition d'une famille d'ensembles □ Résultats sur l'intérieur et l'adhérence d'une intersection et d'une réunion d'une famille quelconque d'ensembles : énoncés et démonstrations (Théorème 11) □ Définitions d'ensemble ouvert et d'ensemble fermé □ Proposition 13 et sa démonstration □ Exercice de manipulation des définitions (Exercice 3)	□ Rappels □ Exercice de manipulation des définitions (Exercice 2) □ Intérieur et adhérence de l'intersection et de la réunion de deux ensembles : tâche d'introduction 2, énoncés des résultats et démonstrations (Proposition 9) □ Définition d'une famille d'ensembles □ Résultats sur l'intérieur et l'adhérence d'une intersection et d'une réunion d'une famille quelconque d'ensembles : énoncés (Théorème 11) □ Définitions d'ensemble ouvert et d'ensemble fermé

Séance 5 : 1h45	□ Intersection et réunion d'une famille quelconque d'ouverts, de fermés : énoncés et démonstrations □ Résolution d'exercices	□ Démonstration des résultats sur l'intérieur et l'adhérence d'une famille quelconque d'ensembles (Théorème 11) □ Rappels des définitions d'ensemble ouvert et d'ensemble fermé □ Proposition 13 et sa démonstration □ Intersection et réunion d'une famille quelconque d'ouverts, de fermés : énoncés et démonstrations □ Exercice de manipulation de la définition d'ouvert (Exercice 3)
Séance 6 : 2h45	Résolution d'exercices	Exercices 4, 5, 6 et 7
Séance 7 : 1h45		Exercices 8, 9, 10 et 11.
Séance 8 : 1h45		Exercices 12 et 13

2 Décalages observés et premières explications

La lecture du découpage des séances montre tout d'abord que tous les contenus à enseigner prévus dans le dispositif ont bien été enseignés. L'ordre de présentation initialement retenu a lui aussi, globalement, été suivi.

L'aspect le plus frappant est sans doute le décalage entre le volume horaire prévu, c'est-à-dire plus ou moins 12h30 d'enseignement, et celui effectivement réalisé qui monte à 16 heures. Cette augmentation de plusieurs heures trouve principalement sa source dans les phases de recherche individuelle qui ont été proposées aux étudiants. Nous en donnons ci-dessous quelques explications qui seront reprises de manière plus approfondie dans la suite de nos analyses.

Un premier élément ayant contribué à augmenter le volume horaire de l'enseignement concerne la réalisation de l'ensemble des tâches, qui a nécessité des temps de recherche individuelle longs. Nous lui associons deux explications. D'une part, nous avons choisi, à certains moments, d'accorder aux étudiants davantage de temps pour travailler afin qu'ils puissent aborder chaque point de la tâche proposée. Nous pensons par exemple aux tâches d'introduction 1 et 2 et à des exercices tels que l'exercice 5 ou l'exercice 7 (cf. le scénario). D'autre part, l'implication des étudiants dans l'enseignement a permis, dans certaines phases prévues en cours magistral, de les mettre à contribution dans la réalisation de certains calculs ou dans l'organisation de certains raisonnements. Ce choix nécessite bien entendu d'accorder du temps aux étudiants pour les laisser travailler individuellement.

Dans la partie 2 de l'enseignement, portant sur les notions d'intérieur et d'adhérence d'un ensemble, le besoin d'incorporer des exemples, initialement non prévus, s'est fait sentir à certains endroits pour illustrer les notions introduites.

Certaines phases de correction se sont avérées plus longues que prévues. Nous pensons précisément aux exercices de manipulation des définitions (Exercices 1 et 5).

L'énoncé de l'exercice 3 a été modifié. Un travail sur le cas particulier de l'intervalle $]-3,7[$ a du être réalisé avant de passer au cas général de l'intervalle $]a,b[$.

Des questionnements supplémentaires se sont intégrés à l'enseignement. Nous pensons à des manques de connaissances en logique et en théorie des ensembles qui ont du être comblés par l'enseignant.

Enfin, des difficultés observées chez les étudiants ont du être gérées par l'enseignant. Nous reviendrons également sur ce point ultérieurement mais nous citons d'ores et déjà en exemple la difficulté de représenter l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqslant 2\}$ dans l'exercice 7.

Ces premiers éléments, très globaux, pointent un certain nombre de décalages dans l'organisation de l'enseignement prévu et celle observée a posteriori. Ils seront précisés au fil des analyses menées dans les deux chapitres suivants.

Chapitre XIII

Analyse de quelques phases précises de l'enseignement

Nous présentons, dans ce chapitre, une analyse de trois déroulements réalisée à partir de la méthodologie développée au chapitre XI.

1 Présentation des analyses

Comme nous l'avons expliqué au chapitre XI, nous avons choisi d'analyser les déroulements de trois moments précis de l'enseignement qui sont :

- la tâche d'introduction 1 ;
- l'exercice 1 ;
- un exercice de la partie 4. Nous avons retenu l'exercice 10.

Pour chaque moment, nous indiquons tout d'abord les formes globales de travail. À cette fin, nous décrivons d'abord la chronologie globale du déroulement. Nous présentons ensuite dans un tableau la mise en regard du travail proposé par l'enseignant, ses interventions et les activités possibles des étudiants. Dans ce type de tableau, la lettre « P » désigne l'enseignant et la lettre « E » désigne le ou les étudiants, suivant le contexte que nous préciserons.

À partir de ce tableau, nous dégageons un certain nombre de constatations sur les interventions de l'enseignant et sur la description des activités possibles des étudiants a maxima et a minima. Nous retranscrivons également certaines parties du déroulement pour illustrer, à partir de la description donnée dans le tableau, la nature des discussions entre l'enseignant et les étudiants ou quelques phases de cours prises en charge par l'enseignant. Nous dressons alors un bilan de l'analyse menée.

2 Tâche d'introduction 1

2.1 Feuilles 1 et 2

Tâche d'introduction 1 (Feuille 1)

Voici 4 propriétés mettant en relation un ensemble $A \subset \mathbb{R}^2$ et un point $p \in \mathbb{R}^2$:

① A contient une boule ouverte de centre p.

② A contient toutes les boules ouvertes de centre p.

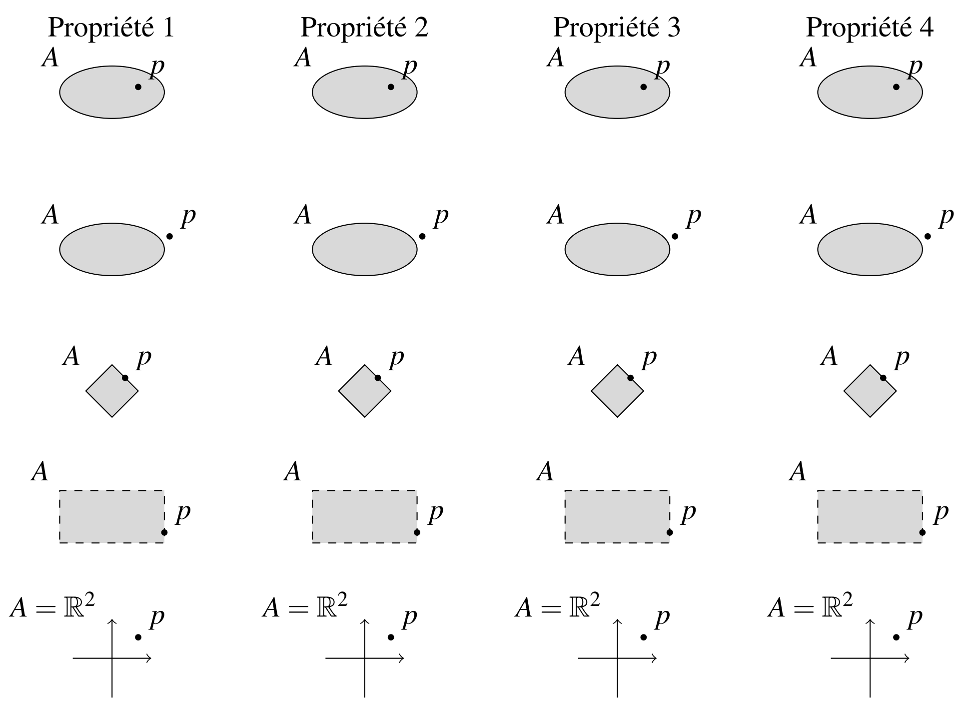
③ Il y a une boule ouverte de centre p qui intersecte A.

④ Toutes les boules ouvertes de centre p intersectent A.

Dans chaque situation proposée sur la feuille 2, dites

- □ si p est un point de A ou non,
- □ si p et A vérifient ou non les propriétés ①, ②, ③, ④. Pour chaque propriété, justifiez votre réponse sur le dessin.

Tâche d'introduction 1 (Feuille 2)



▶▶ Formes globales de travail

La première partie de la tâche porte sur l'émergence des propriétés permettant de définir les notions de point intérieur et de point adhérent. Après avoir distribué les feuilles 1 et 2, l'enseignant lit l'énoncé avec les étudiants. Une phase de recherche est ensuite organisée par l'enseignant. Les étudiants ont le choix de travailler individuellement ou collectivement. Ils travaillent à leur place, certains interagissent entre eux mais la majorité travaille individuellement pendant que l'enseignant circule auprès d'eux.

Le scénario prévoit que, dans la phase de recherche individuelle, l'enseignant intervient le moins possible. Il n'interagit donc pas avec les étudiants lorsqu'il passe près d'eux ; il répond néanmoins individuellement aux questions posées par l'un ou l'autre étudiant, lorsque la situation se présente.

Le tableau ci-dessous réprend la chronologie globale de cette partie.

Distribution des feuilles et lecture de l'énoncé	4'
Recherche individuelle	40'
Bilan collectif et émergence des définitions	10'

Le déroulement du bilan collectif est présenté dans le tableau suivant.

Durée	Nature du travail	Interventions de P	Activités des E
1'30	Choix d'une caractérisation pour chaque point.	Pour chaque caractérisation, P sollicite les E pour savoir s'ils l'ont choisie ou non.	Les E lèvent le doigt ou non.
4'	Compléments sur les autres caractérisations.	Pour chaque type de point, P explique pourquoi les affirmations non retenues ne caractérisent pas les notions. Il réalise des dessins au tableau.	Les E écoutent et copient.
2'	Écriture des définitions.	P écrit les définitions de chaque type de point au tableau.	Les étudiants copient.

▶▶ Interventions de l'enseignant

Phase de recherche individuelle

Deux types de questions apparaissent lorsque les étudiants travaillent sur les feuilles 1 et 2. L'enseignant y répond individuellement.

Deux étudiants demandent des explications complémentaires concernant le mot « intersecter ». L'enseignant leur propose des synonymes tels que « *couper, avoir une intersection* », ce qui semble suffire pour que les étudiants se remettent au travail.

Cinq étudiants se posent la question de savoir si un point peut être considéré comme une boule. À chaque fois, l'enseignant leur suggère de rappeler la définition d'une boule ouverte de centre a et de rayon r. Tous les étudiants sont capables de donner la définition et, dans ce cas également, le rappel leur permet de reprendre leur travail.

Les aides apportées par l'enseignant ne modifient pas, selon nous, la nature du travail des étudiants. Elles ont une fonction constructive.

Bilan collectif et émergence des définitions

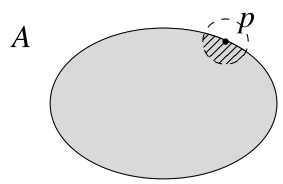
Dans cette phase, l'enseignant sollicite tout d'abord les étudiants pour faire le point sur les caractérisations choisies. Nous citons ses propos :

> P « *Alors, pour la notion de point intérieur, qui a choisi l'affirmation 1 ?* »
> Tous les étudiants lèvent le doigt.
> P « *Ah, j'en déduis que personne n'a choisi les autres affirmations.* »
> Des étudiants répondent : « *Non.* »

L'enseignant procède de manière semblable pour la notion de point adhérent.

Il valide les choix des étudiants et utilise des commentaires méta-mathématiques pour leur montrer que les affirmations non retenues ne caractérisent pas les nouvelles notions. Voici un exemple de ce type de commentaires ; nous citons l'enseignant :

> « *Si l'affirmation 3 correspondait au point intérieur, on pourrait avoir ce genre de dessin (l'enseignant réalise le dessin ci-dessous au tableau) où on a un ensemble A, et par exemple un point p qui est sur le bord. Et on a bien une boule qui a une intersection avec l'ensemble, c'est la partie hachurée, ici. Clairement, on n'a pas envie de dire que ce point p est à l'intérieur de l'ensemble.* »



Au moment de l'écriture des définitions, l'enseignant revient sur l'utilisation des différents registres d'écriture. Ici aussi, il recourt au levier méta dans ses propos :

> « *Vous voyez, on a défini deux nouvelles notions : point intérieur et point adhérent. Ce sont donc des types de points qu'on associe aux ensembles. Vous avez vous-mêmes choisi les définitions en faisant des dessins qui correspondaient, selon vous, aux différentes phrases. Finalement les notions sont assez intuitives si on s'appuie sur le vocabulaire utilisé : intérieur et adhérent. Ce sera important par la suite que vous vous souveniez de ces dessins et de ces phrases, ça pourra vous aider pour aborder certains exercices. Donc, il faut que vous les ayez toujours en tête.* »

▶▶ Activités possibles a maxima et a minima

Tous les étudiants se lancent immédiatement dans la tâche proposée. Ils semblent rencontrer peu de difficultés pour réaliser les dessins. Ce point est confirmé par le dépouillement des copies qui montre que tous les étudiants ont réalisé des dessins pour justifier chaque affirmation. De plus, tous les étudiants déduisent les deux caractérisations correctes pour les notions de points intérieur et adhérent. Nous présentons les éléments marquants du dépouillement des copies dans l'annexe D. Les activités possibles sont donc conformes aux activités prévues.

▶▶ Bilan

Comme prévu dans la gestion a priori, les interventions de l'enseignant ont été peu nombreuses et brèves durant la phase de recherche. Le dépouillement des copies indique que les étudiants sont parvenus à donner un certain sens aux nouvelles notions en utilisant des registres d'écritures auxquels ils sont peu habitués et en conjecturant, par eux-mêmes, une caractérisation correcte pour chaque type de point.

Le bilan vise ensuite à valider les deux nouvelles définitions mais aussi à sensibiliser les étudiants aux registres d'écritures utilisés et au fait que l'utilisation de symboles mathématiques n'a pas été nécessaire pour définir les nouvelles notions. Il utilise, à cette fin, des commentaires méta-mathématiques.

En conclusion, les activités possibles correspondent à celles décrites dans notre analyse a priori de cette partie de la tâche, moyennant le fait que nous avons accordé aux étudiants un temps de recherche plus long que celui prévu dans le scénario.

2.2 Feuille 3

Tâche d'introduction 1 (Feuille 3)

Pour chacune des propositions suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.

- □ Vrai : □ Faux : □ Si p est un point intérieur à A, alors p est un point adhérent à A.
- □ Vrai : □ Faux : □ Si p est un point adhérent à A, alors p est un point intérieur à A.
- □ Vrai : □ Faux : □ Si $p \in A$, alors p est un point intérieur à A.
- □ Vrai : □ Faux : □ Si $p \in A$, alors p est un point adhérent à A.
- □ Vrai : □ Faux : □ Si p est intérieur à A, alors $p \in A$.
- □ Vrai : □ Faux : □ Si p est adhérent à A, alors $p \in A$.

▶▶ Formes globales de travail

La deuxième partie de la tâche d'introduction porte sur les liens entre les types de points qui viennent d'être définis. L'énoncé proposé aux étudiants est du type « vrai ou faux », avec justification de la réponse.

L'enseignant ne lit pas l'énoncé avec les étudiants, il les met directement au travail. Un temps de recherche individuelle est organisé par l'enseignant durant lequel il n'intervient pas du tout. Il circule néanmoins parmi les étudiants pour maintenir les conditions de travail et pour repérer ce qu'ils font.

Une phase de correction collective est ensuite organisée, suivie d'un bilan. Un point important est que la majorité des étudiants s'engagent dans la discussion.

Le tableau ci-dessous donne la chronologie globale de cette partie.

Recherche individuelle	25'
Correction et bilan	25'

Nous rendons maintenant compte de la correction des deux premières affirmations et du bilan, les autres phases de la correction se déroulant de manière semblable.

Nature du travail	Interventions de l'enseignant	Activités des étudiants
Lecture de l'affirmation 1	P recopie l'affirmation 1 au tableau. Il sollicite les E pour savoir si l'affirmation est vraie ou fausse.	Des E interviennent oralement. Leur réponse est correcte.
Justification orale : L'affirmation est vraie.	P demande aux E de justifier pourquoi l'affirmation 1 est vraie. Il leur demande de rappeler ce qui caractérise un point intérieur.	Des étudiants expliquent que si p est intérieur à A, alors $p \in A$.
Rappel : si p est intérieur à A, alors $p \in A$. Rappel : si $p \in A$, alors p est adhérent à A.	P répète oralement le raisonnement des étudiants et leur demande comment ils enchaînent pour faire intervenir la notion de point adhérent.	Un étudiant explique que chaque boule de centre p aura une intersection avec l'ensemble.
Correction au tableau.	P répète oralement le raisonnement de l'étudiant. P écrit la correction au tableau en répétant oralement ce qu'il écrit.	Les étudiants écoutent. Les étudiants recopient.
Lecture de l'affirmation 2	P sollicite les étudiants pour savoir si l'affirmation 2 est vraie ou fausse.	Des étudiants donnent la réponse correcte.
Justification orale : l'affirmation est fausse.	P explique que, comme l'affirmation est fausse, on recherche un contre-exemple et en demande un aux E.	Deux E s'expriment en même temps et proposent de reprendre le deuxième exemple de la feuille 2.
Recherche d'un contre-exemple.	P fait un dessin au tableau.	Les étudiants recopient.
Justifier que le contre-exemple convient.	P demande aux étudiants pourquoi le point p est un point adhérent.	Les étudiants développent un raisonnement correct.
Correction au tableau	P recopie la correction au tableau. P demande pourquoi p n'est pas un point intérieur. P répète la réponse de l'étudiant et la recopie au tableau en précisant que le point a de l'espace autour de lui mais pas dans l'ensemble.	Les E recopient. Un E répond que le point n'a pas d'espace autour de lui. Les E recopient.

Bilan de l'exercice Recherche de liens entre les types de points.	P explique que l'exercice permet d'établir des liens entre les types de points.	Les E écoutent.
Énoncés des liens pour la notion de point intérieur.	Il demande aux E de rappeler les liens établis. P considère la notion de point intérieur et demande aux E ce qu'ils en déduisent. P écrit les liens au tableau.	Plusieurs étudiants s'expriment. Des E répondent puis recopient.
Énoncés des liens pour la notion de point adhérent.	P considère ensuite la notion de point adhérent et demande aux E ce qu'ils en déduisent. P écrit les liens au tableau.	Quelques E répondent puis recopient.
Retour sur les types de définitions rencontrés et les types de justifications utilisés.	P explique oralement que deux types de points ont été définis. Il rappelle les définitions oralement en insistant sur le fait qu'on n'a pas utilisé de symboles mathématiques comme les quantificateurs pour donner les définitions. Il insiste également sur l'utilisation de dessins et du langage pour définir les notions.	Les E prennent des notes.

▶▶ Interventions de l'enseignant

Conformément à la gestion prévue a priori, l'enseignant n'a donné aucune aide pendant la phase de recherche individuelle.

Avant de démarrer la correction, il demande aux étudiants de ne plus rien écrire sur la feuille 3, qu'il récupérera à la fin de la séance. Il propose donc aux étudiants de prendre note de la correction sur une feuille séparée.

Dans les phases de correction, le discours de l'enseignant consiste à solliciter constamment les étudiants pour proposer une justification pour chaque affirmation. Les interventions de l'enseignant se décomposent alors en deux temps. Dans un premier temps, l'enseignant écoute la réponse apportée par un ou plusieurs étudiants. Ensuite, il répète lui-même l'argument et l'écrit au tableau.

Nous retranscrivons la correction de l'affirmation 1 :

> P « *La première affirmation, c'est donc : si p est un point intérieur à A, alors p est un point adhérent à A. Vrai ou faux ?*
> Plusieurs étudiants : « *Vrai.* »
> P « *Alors c'est vrai en effet. Justification ? Expliquez moi pourquoi c'est vrai.* »
> Personne ne répond.
> P « *Quelle est la particularité d'un point intérieur ?* »
> E « *Si le point est intérieur alors il est dans A.* »
> E « *Un point intérieur est dans l'ensemble.* »
> P « *OK, si le point est intérieur alors il appartient à A et donc, comment on poursuit le raisonnement ? Comment vous en arrivez à parler de point adhérent ?* »
> E « *Il y aura au moins p comme intersection.* »
> P « *Voilà, quand on va regarder chaque boule centrée en p, qu'est-ce-qui va faire que l'intersection sera non-vide ? Ben, il y aura au moins le point p. Donc recopions ce qu'on vient de dire.* »
> P copie et continue de s'exprimer.
> P « *Si p est un point intérieur alors p appartient à A. (Il arrête d'écrire au tableau). Et donc, suivant la définition de point adhérent qui dit que toutes les boules centrées en p ont une intersection non vide avec A, on va écrire : (il écrit au tableau) dans ce cas, chaque boule de centre p aura une intersection avec l'ensemble A. En effet, il y a au moins dans cette intersection le point p.* »

Durant la phase de bilan, le professeur fait usage de commentaires méta-mathématiques pour insister, une fois encore, sur le rôle des dessins et de la langue naturelle pour comprendre et justifier les affirmations proposées. Nous le citons :

> « *Voilà, donc jusqu'à présent, on a défini deux types de points. Il y a les points intérieurs, ce sont des points qui ont un peu de place autour d'eux dans l'ensemble, c'est-à-dire il y a une boule centrée en ces points contenue dans l'ensemble et un autre type de points, les*

> *points adhérents. Ce sont les points pour lesquels chaque boule centrée en ce point a une intersection non vide avec l'ensemble. Et vous voyez que jusqu'à présent on n'a pas utilisé les symboles des quantificateurs, on a tout écrit avec des mots. Maintenant on va s'attaquer à des exercices et c'est là qu'on va avoir besoin des symboles parce que tout écrire avec des mots c'est long et puis les dessins, ça ne sera pas toujours suffisant.* »

▶▶ Activités possibles a maxima et a minima

A minima, si un étudiant ne participe pas à la discussion organisée par l'enseignant, il aura à recopier la correction indiquée au tableau. Cependant, la majorité des étudiants s'engagent dans la discussion, ce qui peut témoigner d'une certaine réflexion de leur part au fil de la correction.

De plus, le dépouillement des copies des étudiants, présenté dans l'annexe D, montre bien que les activités prévues ont été réalisées. En effet, un fait très marquant est que tous les étudiants sont parvenus à justifier correctement chaque affirmation avec la rigueur attendue, compte tenu des registres d'écriture dont ils disposent. Ce point nous semble extrêmement positif !

▶▶ Bilan

La gestion de la classe dans les phases de recherche des étudiants est conforme à la gestion prévue a priori. L'enseignant reste en effet en retrait dans ce type de phase. Il laisse chercher les étudiants et n'intervient pas dans leur travail. Il répond individuellement aux questions posées. Il n'y a pas de bilan intermédiaire. Cela correspond à nos choix de gestion a priori.

Dans chaque phase de la correction, l'enseignant commence par solliciter les étudiants pour qu'ils développent les arguments à faire intervenir pour justifier chaque réponse. Ensuite, il répète l'argument, puis le recopie au tableau. Il y a donc une phase où les idées importantes sont tout d'abord développées oralement, puis celles-ci sont retranscrites par l'enseignant au tableau en y incorporant les détails de justifications. Beaucoup d'étudiants participent aux phases orales. Mais durant la phase d'institutionnalisation, les étudiants ne sont pratiquement plus sollicités. Les activités possibles des étudiants sont donc, à ce moment, limitées à l'écoute et au recopiage.

Toutefois, les réponses apportées par les étudiants sur leur copie témoignent du sens qu'ils ont donné à chaque affirmation. Les activités qu'ils ont réalisées sont donc en adéquation avec les activités prévues à partir de l'analyse a priori de la tâche.

2.3 Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, on donne un point p et un ensemble A. Dites si le point p est intérieur à A ou non, est adhérent à A ou non. Justifiez votre réponse.

① $p = 1/3,\ A = [0,1]$

② $p = -\sqrt{2},\ A = [-2,1]$

③ $p = 1,\ A = [0,1[$

④ $p = 1/2,\ A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$

⑤ $p = 0,\ A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$

⑥ $p = (2,4),\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$

⑦ pour $x, y \in \mathbb{R},\ p = (x, y - r/3),\ A = B_{|\cdot|_\infty}\big((x,y), r\big)$

▶▶ Formes globales de travail

Il s'agit d'un exercice portant sur la manipulation des premières définitions. Le rôle de l'enseignant est important, comme le prévoit la gestion a priori (voir chapitre IX). En effet, l'enseignant doit introduire, au début de l'exercice, les définitions écrites dans le registre symbolique. Ensuite, son rôle consiste à traiter les autres exemples en montrant aux étudiants ce qui est mis en jeu dans ce travail manipulatoire et notamment les adaptations à réaliser.

L'enseignant prend donc en charge le déroulement de l'exercice sous la forme d'une résolution collective s'appuyant sur un jeu de questions-réponses entre l'enseignant et les étudiants. Le déroulement va prendre une forme semblable à celui décrit dans la tâche d'introduction 1.

Le tableau suivant reprend la chronologie globale du déroulement de la correction.

Exemple 1	5'
Exemple 2	5'
Exemple 3	17'
Exemple 4	13'
Exemple 5	11'
Exemple 6	12'
Exemple 7	15'

Le tableau suivant renseigne sur le déroulement observé dans la phase de correction des exemples 1 et 3.

Nature du travail	Interventions de l'enseignant	Activités des étudiants
Lecture de l'exemple 1	P écrit l'énoncé au tableau.	Les E recopient.
$1/3$ est intérieur à l'ensemble : savoir si le point est intérieur ou non.	P demande aux E si le point est intérieur ou non.	Les E répondent.
	P demande aux E de justifier.	Un E répond que $1/3$ a de l'espace autour de lui.
	P explique que « voir » que $1/3$ a de l'espace autour de lui n'est pas un argument rigoureux.	Les E écoutent puis un E explique qu'il y a une boule de centre $1/3$ contenue dans l'ensemble.
	P fait un dessin au tableau : il construit $[0,1]$ et place $1/3$.	Les E recopient.
	P suggère de suivre la définition pour construire un argument rigoureux.	Les E recopient.
	P écrit ce qu'on cherche à prouver.	Les E recopient.
Construction d'une boule de centre $1/3$ contenue dans $[0,1]$.	P demande aux E ce qui caractérise une boule de centre $1/3$.	Des E répondent.
	P demande à quel objet géométrique correspond une telle boule.	Des E répondent.
	P demande aux E de fournir un candidat pour le rayon de la boule.	Des E donnent un candidat correct, souvent le même.
	P demande aux E à quoi correspond la boule de centre $1/3$ et de rayon $1/3$.	Un E répond.

$1/3$ est un point adhérent : savoir si $1/3$ est adhérent ou non. Justification orale.	P demande aux E si $1/3$ est adhérent ou non. P propose d'utiliser les différents arguments proposés.	Quelques E répondent en justifiant immédiatement. Certains s'appuient sur le fait que le point est intérieur donc adhérent, d'autres ont utilisé la définition en termes de boule.
Première justification : lien entre les types de points.	P demande de reprendre le raisonnement proposé. P écrit le raisonnement de l'E au tableau.	Un E reprend son raisonnement. Les E recopient.
Seconde justification, à partir de la définition : traduire la propriété à prouver.	P demande aux E ce qu'il faut montrer. P écrit au tableau la propriété à prouver.	Les E répondent. Les E recopient.
Justifier que toutes les boules de centre $1/3$ ont une intersection non vide avec $[0,1]$.	P demande aux E de poursuivre le raisonnement.	Plusieurs répondent immédiatement que $1/3 \in [0,1]$ et est le centre de la boule.

Introduction du registre symbolique.	P fait remarquer que les phrases sont longues à utiliser dans les raisonnements. L'utilisation de symboles mathématiques amène de l'économie dans l'écriture de la preuve.	Les E écoutent.
Écrire la preuve en utilisant les quantificateurs.	P traduit avec des quantificateurs le fait que $1/3$ est adhérent à l'ensemble car $\forall r > 0,\ 1/3 \in B(1/3, r)$ et $1/3 \in A$.	Les E recopient.
Écrire les définitions dans le langage formel.	P explique que l'utilisation des symboles permet d'écrire plus rapidement la preuve. P explique aussi que les dessins et l'intuition ne constituent pas une preuve. Il pointe une seconde fois l'utilité de recourir au formalisme. P demande aux E de définir chaque notion avec des symboles mathématiques et les écrit au tableau. Il rappelle que c'est le rayon qui va caractériser la boule. C'est pour cette raison que le premier quantificateur porte sur r.	Les E écoutent. Les E répondent et recopient en même temps les définitions.
Énoncés des exemples suivants.	P impose d'utiliser les définitions. Il écrit au tableau les exemples suivants à traiter. P insiste sur l'utilisation des dessins et du langage pour s'aider dans des situations plus complexes.	Les E recopient. Les E écoutent.

Lecture de l'exemple 3	P recopie l'énoncé au tableau.	Les E copient.
1 n'est pas un point intérieur : savoir si 1 est ou non un point intérieur.	P rappelle qu'on se demande si 1 a un peu de place autour de lui dans l'ensemble. Il sollicite les E pour donner la réponse.	Des E répondent.
Écrire la négation de la définition.	P demande aux E ce qu'il faut prouver. P écrit la négation de la définition au tableau.	Quelques E dictent la négation de la définition. Les E recopient.
Prouver la non inclusion.	P demande comment on prouve une non inclusion.	Plusieurs E répondent.
Traduire la non inclusion en l'existence d'un point appartenant à la boule mais pas à l'ensemble.	P écrit ce qu'il faut prouver et rappelle que $B(1,r) =]1-r, 1+r[$. P répète ce qu'on cherche à faire.	Les E recopient.
Trouver un tel point.	P demande aux E de fournir un candidat pour le point recherché.	Quelques E donnent un candidat correct.
Justifier le choix du point.	P demande aux E de justifier le choix du point. Il recopie la réponse donnée.	Un E développe son raisonnement.

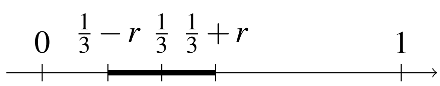
1 est un point adhérent : savoir si 1 est un point adhérent ou non.	P revient sur le dessin et rappelle qu'on se demande si n'importe quelle boule de centre 1 intersecte l'ensemble. Il demande la réponse aux E.	Plusieurs E répondent.
Écrire la définition.	P écrit ce qu'il faut prouver et écrit lui-même que le fait que l'intersection soit non-vide se traduit par l'existence d'un point commun aux deux ensembles.	Les E copient.
Trouver un point commun à la boule et à l'ensemble en discutant sur la valeur du rayon r.	P demande aux E de fournir un candidat pour le point.	Plusieurs E proposent $1-r/2$. Un E mentionne le problème de la valeur de r qui peut être grande.
	P fait un dessin sur lequel il prend un rayon $r>1$ et montre sur le dessin l'existence de points communs aux deux ensembles. Il demande aux E un candidat.	Un E explique que $1-r/2$ doit appartenir à $[0,1[$.
	P explique que $1-r/2$ convient si r n'est pas trop grand. Il place alors sur le dessin un point de la forme $1-r$ qui pose problème et demande pour quelles valeurs de r ce choix peut convenir.	Plusieurs étudiants répondent $r \leqslant 2$.
	P demande ce qu'on peut retirer à 1 pour être sûr que $1-r/2 \in [0,1]$.	Un E remarque qu'on peut prendre 0 si $r>2$ et propose de choisir pour y 0 si $r>2$ et $1-r/2$ sinon.
	P revient demande s'il est possible de rassembler les cas.	Un E propose de choisir pour y le minimum des deux quantités trouvées, c'est-à-dire $y=\min\{1-r/2,0\}$. Un E explique que le choix ne convient pas et propose de prendre la maximum entre les deux quantités.

►► Interventions de l'enseignant

Conformément à la gestion prévue a priori, le professeur n'a pas ménagé de phases de recherche. Son discours consiste à relancer constamment les étudiants en leur posant les questions qu'ils devraient eux-mêmes se poser face à un tel exercice. Cette manière de procéder permet également de maintenir l'attention des étudiants.

L'enseignant « montre » donc aux étudiants le travail mathématique qui se cache derrière la manipulation des définitions. En interrogeant continuellement les étudiants, il construit le raisonnement à produire avec la rigueur attendue.

Nous retranscrivons ci-dessous certains propos de l'enseignant illustrant bien, selon nous, comment il montre le travail mathématique à accomplir dans ce type de tâche.

> EXEMPLE 1
> P « *Alors, est-ce-que* $1/3$ *est intérieur à* $[0,1]$ *?* »
> E « *Oui parce qu'il y a une boule contenue dans l'ensemble.* »
> E « *Oui parce qu'il a de l'espace autour de lui.* »
> P « *Bon, moi à partir de maintenant, ça ne me parle pas quand vous dites qu'il a de l'espace autour de lui. Ce que vous voyez, moi, je ne le vois pas forcément.* »
> E « *On va prendre une boule de centre* $1/3$ *et de rayon* $1/3$. »
> P fait le dessin ci-dessous au tableau tout en s'exprimant : « *Vous voyez, on a l'ensemble* $[0,1]$, *le point* $1/3$ *qui est ici, si je suis la définition, il doit exister une boule de centre* $1/3$ *qui doit être contenue dans l'intervalle* $[0,1]$. *Si vous allez dans la définition qu'on a donnée tout à l'heure, on a une boule ouverte. Donc pour me construire cette boule, il manque le rayon. Rappelez moi, quand on est dans* $\mathbb{R}$, *une boule de centre x et de rayon r, ça correspond à quoi ?* »
>
> 
>
>
> E « *c'est un intervalle.* »
> P « *Quelle est la forme de cet intervalle ?* »
> E « $]x-r,x+r[$ »
> P « *Oui, donc ça c'est un rappel* (P écrit au tableau), *dans* $\mathbb{R}$, *la boule ouverte de centre x et de rayon r est l'intervalle* $]x-r,x+r[$. *Donc ici, il suffit de prendre la boule de centre* $1/3$ *et de rayon* $1/3$. *C'est donc quel intervalle ça ?* »
> E « $]0,2/3[$ »
> P « *Oui et effectivement, c'est contenu dans l'ensemble.*

L'extrait ci-dessous correspond à l'écriture des définitions avec des symboles mathématiques, juste après l'exemple 1.

P « *Bon, vous voyez dans cet exemple, on s'en est sorti avec les phrases mais c'est tout de même long à écrire. On va donc réécrire ces définitions données avec des phrases avec des quantificateurs. Ça va vous permettre, quand on vous imposera d'utiliser les définitions, d'aller un peu plus vite dans l'écriture du raisonnement. Ce sont vraiment ces écritures qui vous permettront de travailler rigoureusement et un dessin ne permet pas ça. On a donc les deux définitions suivantes.* »

P écrit au tableau les définitions avec les symboles mathématiques appropriés en collaboration avec les étudiants.

P « *Pour les exemples suivants, on va utiliser ces définitions. Donc vous vous demandez peut-être pourquoi on a tellement insisté sur les phrases et les dessins. C'est parce que plus les exemples vont se présenter, plus il sera difficile d'avoir de l'intuition. Les choses vont se compliquer. Donc les phrases et les dessins peuvent toujours vous aider à vous décider à savoir au départ si c'est intérieur ou non, adhérent ou non.*

▶▶ Activités possibles a maxima et a minima

A minima, un étudiant qui ne s'implique pas dans la discussion organisée par le professeur recopie la solution écrite au tableau.

Les étudiants participant à la discussion résolvent pas à pas l'exercice avec l'enseignant en découvrant la rigueur attendue dans l'écriture de la solution et le travail mathématique engendré, comme par exemple la recherche du rayon d'une boule ou la preuve d'une inclusion d'ensembles.

Les activités possibles sont conformes à celles prévues dans la gestion de cet exercice.

▶▶ Bilan

La gestion de la classe, pendant le déroulement de cet exercice, est conforme à ce qui était prévu. Le fait que nous soyons l'enseignant a peut-être facilité cette conformité. L'enseignant montre aux étudiants le travail mathématique à réaliser dans la manipulation d'une définition tout en sollicitant constamment les étudiants pour avancer dans l'exercice. L'enseignant ne rencontre pas de difficultés pour gérer la tâche de cette manière car pour chacune de ces questions, au moins un étudiant parvient à fournir une réponse correcte validée par l'enseignant. Ce dernier peut alors l'écrire au tableau et poursuivre le raisonnement. Cet aspect lui permet également d'insister sur les différentes adaptations à réaliser, prévues dans l'analye a priori de l'exercice.

L'introduction du registre symbolique se fait, comme prévu, après le premier exemple. Le rôle de chaque registre d'écriture est ensuite mis en évidence par des commentaires méta-mathématiques.

À ce stade de l'enseignement, les étudiants disposent donc d'une vision intuitive des notions appuyée par le registre du dessin et les adaptations à réaliser dans la manipulation d'une définition sont apparues pour la première fois.

2.4 Exercice 10

Soit $O \subseteq \mathbb{R}^N$ un ouvert et $x_0 \in O$. Considérons l'ensemble $O \backslash \{x_0\}$. Cet ensemble est-il ouvert ?

▶▶ Formes globales de travail

Avant d'aborder cette partie de l'enseignement, les étudiants ont été confrontés à des exercices de manipulation des définitions et aux adaptations mathématiques associées. Ils ont utilisé différents registres d'écriture et ils ont rencontré des exemples d'ensembles ouverts ou non, fermés ou non et tous les résultats prévus dans le scénario ont été démontrés. La partie 4 propose alors des exercices plus « originaux ».

Nous avons choisi d'analyser le déroulement de l'exercice 10 car cet exercice permet de montrer aux étudiants que l'utilisation d'une définition n'est pas toujours l'unique choix de méthode de résolution. Une stratégie plus simple consiste à montrer que le complémentaire de l'ensemble est fermé, ce qui nécessite un changement de point de vue auquel les étudiants ont été peu confrontés. Ensuite, des résultats de théorie des ensembles sont utilisés.

L'analyse a priori a montré que cet exercice a la particularité de mettre en jeu des connaissances en topologie autrement que dans les exercices de manipulation des définitions. Il permet de faire prendre aux étudiants une initiative interne à la topologie.

Le tableau suivant reprend la chronologie globale du déroulement.

Lecture de l'énoncé	2'
Recherche individuelle	5'
Mise en place d'une stratégie	3'
Recherche individuelle	3'
Correction au tableau	4'

La description du déroulement est donnée dans le tableau suivant.

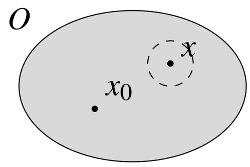
Nature du travail	Interventions de l'enseignant	Activités des élèves
Lecture de l'énoncé	P écrit l'énoncé au tableau.	Les E recopient.
Recherche individuelle	P circule parmi les E.	La majorité des E réalisent un dessin. D'autres, plus rares, traitent des exemples.
Savoir si l'ensemble est ouvert ou non.	P sollicite les E pour qu'ils se prononcent sur le fait que l'ensemble est ouvert ou non.	La majorité des E pensent que l'ensemble est ouvert. D'emblée, certains ajoutent la difficulté d'utiliser la définition.
Choix d'une stratégie pour montrer que l'ensemble est ouvert.	P encourage les E à chercher une autre stratégie que l'utilisation de la définition. Il leur demande de rappeler les possibilités apparues dans le cours pour montrer qu'un ensemble est ouvert. P demande aux étudiants d'écrire le complémentaire de l'ensemble.	Certains E rappellent les définitions, les propriétés sur la réunion et l'intersection. Un E mentionne le passage au complémentaire.
Recherche individuelle	P circule parmi les E.	Recherche individuelle.
Rechercher le complémentaire de l'ensemble.	P sollicite les E pour donner le complémentaire de l'ensemble.	Quelques E ont trouvé la réponse.
Utiliser le fait que la réunion de deux fermés est un fermé.	P demande aux E pourquoi le complémentaire est fermé. P écrit le raisonnement au tableau.	La majorité des E répondent. Les E recopient.

▶▶ Interventions de l'enseignant

L'enseignant doit intervenir pour mettre en place une stratégie avec les étudiants. Son aide consiste à les faire réfléchir sur ce qui, dans le cours, permet de montrer qu'un ensemble est ouvert. Cette aide est à fonction constructive.

▶▶ Activités possibles a maxima et a minima

Les étudiants sont bloqués au démarrage de l'exercice. Ils réalisent tous un dessin comme celui présenté ci-dessous. Le dessin comporte un ensemble O, un point x_0 et souvent un point x, centre d'une boule contenue dans l'ensemble A.



Ce dessin les conforte dans l'idée que l'ensemble est ouvert mais lorsqu'ils sont interrogés, les étudiants soulignent la difficulté de trouver un rayon approprié pour la boule de centre x car ils ne savent pas si le point x_0 lui appartient ou non. Le changement de point de vue pour passer au complémentaire n'est donc pas une activité qu'ils peuvent réaliser seuls.

Lorsque le changement de point de vue est proposé par l'enseignant, les activités possibles a maxima sont de justifier que le complémentaire est fermé. A minima, les étudiants recopient la solution proposée par l'enseignant.

▶▶ Bilan

Dans cet exercice, les étudiants ne parviennent pas à réaliser un type d'activité de manière autonome. Ils se dirigent spontanément vers la manipulation des définitions qui ne leur permet pas, ici, de résoudre l'exercice. La possibilité de recourir à d'autres moyens que les définitions pour montrer qu'un ensemble est ouvert n'est donc pas disponible chez les étudiants. C'est l'enseignant qui les met sur la voie d'une autre méthode.

Les activités possibles ne sont donc pas, ici, conformes avec l'analyse a priori de l'exercice.

3 Premières conclusions

Nos deux premières analyses des déroulements (tâche d'introduction 1 et exercice 1) montrent la conformité entre la gestion prévue a priori dans le scénario et le déroulement en classe, vu a posteriori.

Concernant la tâche d'introduction 1, les activités possibles des étudiants sont en adéquation avec celles prévues par nos analyses a priori. Les étudiants sont parvenus à réaliser la tâche en autonomie. Dans le dépouillement de leurs copies (cf. annexe D), l'émergence correcte des nouvelles notions et le travail sur les liens entre les types de points autorisent à penser que les étudiants donnent un certain sens, de nature intuitive, aux notions de point intérieur et de point adhérent.

Dans la phase de correction, l'enseignant utilise des commentaires méta-mathématiques pour insister sur la possibilité d'utiliser différents registres d'écriture.

Selon nous, les objectifs visés par cette tâche sont atteints mais ils ne renseignent évidemment pas, à ce stade de l'enseignement, sur les premiers apprentissages en topologie des étudiants. Cette tâche montre tout au plus que les étudiants ont réussi à faire un pas de côté dans leur fonctionnement mathématique habituel, en délaissant l'utilisation du registre symbolique, et qu'ils ont développé un sens intuitif pour découvrir seuls de nouvelles notions.

L'exercice 1 s'est, lui aussi, déroulé conformément à la gestion prévue dans le scénario. La description du déroulement montre de plus la manière dont l'enseignant fonctionne dans la réalisation de la tâche.

L'enseignant prend en charge la correction de chaque exemple en sollicitant continuellement les étudiants avec un jeu de questions / réponses. Il montre ainsi lui-même l'organisation du raisonnement en découpant la tâche en sous-tâches ordonnées. Ce découpage est mené à partir des différentes adaptations à réaliser (recherche du rayon d'une boule, choix d'un point intermédiaire...). Dans chaque phase, l'enseignant sollicite les étudiants pour qu'ils énoncent la sous-tâche à réaliser. Puis, il ajoute un commentaire tel qu'une formalisation, une information complémentaire... En ce sens, les interventions de l'enseignant sont à fonction constructive et nous faisons l'hypothèse que, étant donné le niveau du groupe, ce fonctionnement permettra à un certain nombre d'étudiants de réaliser seuls ce type d'exercices plus tard dans l'enseignement.

Le fonctionnement de l'enseignant montre également que ce dernier n'autorise pas, chez les étudiants, la « descente » vers les connaissances anciennes ou en cours d'acquisition qui sont mises en jeu dans l'exercice. Il y fait lui-même appel et les rappelle aux étudiants et fur et à mesure de l'avancement de la tâche.

L'analyse du déroulement de l'exercice 10 montre quant à elle des variations avec la gestion prévue a priori. Dans cette phase de l'enseignement, les activités possibles ne sont pas conformes aux activités attendues.

La phase de recherche individuelle ménagée par l'enseignant, au début de l'exercice, ne mène pas les étudiants à pouvoir choisir une stratégie de résolution. L'aide apportée par l'enseignant modifie les activités attendues puisqu'il met lui-même les étudiants sur le chemin d'un choix de méthode autre que la manipulation des définitions.

En conclusion, les trois analyses réalisées dans ce chapitre montrent que nous devons rester attentif à deux aspects de l'enseignement pour évaluer les apprentissages en topologie des étudiants. D'une part, nous devons étudier si l'enseignement proposé permet effectivement de mener les étudiants à manipuler seuls les définitions en réalisant toutes les adaptations associées. D'autre part, nous devons pouvoir déterminer si les étudiants peuvent réaliser de manière autonome un exercice ne nécessitant pas d'utiliser spécifiquement une définition. Nous reviendrons sur ces questions lorsque nous évaluerons les apprentissages des étudiants, à la partie 5.

Chapitre XIV

Des éléments plus locaux concernant les déroulements

Nous décrivons ici quelques phases très ciblées de l'enseignement de topologie qui amènent à des variations entre le scénario élaboré au chapitre IX et l'expérimentation du dispositif d'introduction des notions.

1 Variations dans la gestion du scénario

Comme nous l'avons montré au chapitre XII, le découpage des séances, lors de l'expérimentation, n'est pas celui qui a été initialement prévu. La principale différence se situe au niveau du volume horaire. Deux séances d'enseignement supplémentaires ont en effet été nécessaires pour effectuer la totalité du scénario.

Dans ce chapitre, nous rendons compte de certaines phases marquantes de l'enseignement qui ont provoqué le décalage de temps observé dans le découpage des séances. Nous ne menons pas une analyse fine de chaque déroulement comme dans le chapitre précédent. Notre objectif consiste ici à décrire la nature des phases à l'origine de la différence horaire. Dans cette perspective, nous renseignons tout d'abord sur des phases qui sont venues s'intégrer dans l'enseignement alors qu'elles n'étaient pas prévues dans la gestion du scénario, vue a priori. Ensuite, nous décrivons quelques difficultés rencontrées par les étudiants dans la réalisation de certains types d'activités, au moment des exercices. Nous indiquons également le type d'aide apporté par l'enseignant pour tenter de surmonter ces difficultés en regardant les éventuelles modifications de la tâche proposée.

2 Des phases d'enseignement non prévues dans le scénario

2.1 Le début de l'enseignement

Préalablement au démarrage de l'enseignement de la topologie, l'enseignant s'est exprimé durant quelques minutes pour donner aux étudiants des explications d'une part, sur les conditions de travail ménagées dans le nouveau chapitre [1] et d'autre part, sur ce nouveau domaine qu'est la topologie.

Nous restranscrivons ci-dessous les propos de l'enseignant.

> « *Je vais assurer jusqu'à Pâques les séances durant lesquelles vous êtes seuls, donc les séances où il y a uniquement la section math. Alors, on va en profiter pour voir une nouvelle matière et le titre de ce nouveau chapitre, c'est la topologie de* $\mathbb{R}^n$. »
>
> L'enseignant écrit le titre au tableau.
>
> « *La topologie, c'est une branche des maths et en tant qu'étudiant en mathématique, c'est une branche qui sera très importante pour vous, ne serait-ce que parce que le cours d'analyse de deuxième année est consacré en grande majorité à faire de la topologie. Mais surtout, c'est une branche des maths que vous allez rencontrer souvent tout au long de votre parcours, que ce soit dans des cours de maths, j'ai cité l'analyse mais il y aura aussi l'analyse complexe, la géométrie, mais également aussi dans certains cours de physique. Donc c'est vraiment une discipline mathématique super importante. D'autre part, la topologie c'est aussi une discipline qui est souvent considérée par les étudiants comme étant difficile. Un des buts des séances que je vais vous donner est d'essayer de rendre cette matière un peu plus accessible, tout en nous plaçant dans notre espace de référence qui est* $\mathbb{R}^N$. *Alors, comment va-t-on essayer de faire pour que ça semble un peu plus accessible ? Vous allez voir qu'on va un peu changer votre manière de travailler. Je m'explique. Durant les séances, à certains endroits, je vais vous proposer des petites activités durant lesquelles vous allez travailler seuls. L'objectif est qu'en travaillant sur ces activités, vous allez découvrir seuls les nouvelles notions et le but du jeu est de vous aider à acquérir un certain nombre de réflexes qui sont censés vous aider à mieux comprendre les notions. Il n'y aura pas nécessairement des activités de ce type à chaque séance, durant lesquelles vous travaillerez seuls ou en petits groupes ou en tout cas avec le moins d'aide de ma part possible. Certaines séances se dérouleront de manière tout à fait traditionnelle, c'est-à-dire en cours magistral ou en séances d'exercices. Pour le moment, je ne vous explique pas*

[1] Rappelons que nous prenons en charge l'ensemble des séances, à la place du titulaire du cours. De plus, la théorie et les exercices sont intégrés l'un à l'autre alors que les séances en cours magistraux et les travaux dirigés sont traditionnellement séparés.

non plus d'où vient le mot « topologie », on y reviendra. Je vais tout de suite vous confronter à une petite activité, comme je viens de vous en parler. »

2.2 Des modifications de gestion

Dans le scénario, la gestion prévue pour démontrer les différents résultats est un cours magistral. Néanmoins, les étudiants ont réalisé de manière autonome des parties de démonstrations, modifiant ainsi nos choix de gestion a priori.

C'est le cas de la proposition 3 dont nous rappelons l'énoncé :

> Proposition 3 :
> Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Nous avons les inclusions suivantes : $\mathrm{int}A \subseteq A \subseteq \mathrm{adh}A$.

L'enseignant propose aux étudiants de réaliser seuls la démonstration de cette propriété, comme un exercice. Il ménage un temps de recherche individuelle de 5 minutes suivies d'une correction collective de 5 minutes également.

Ce choix tient au fait que le travail réalisé dans la tâche d'introduction 1 sur les liens entre les types de points (feuille 3) met en jeu des connaissances semblables à celles mobilisées ici. En effet, nous avons travaillé, à partir de la feuille 3, sur des propriétés telles que « si p est intérieur à A, alors p appartient à A » ou « si p appartient à A, alors p est adhérent à A ».

Nous n'avons pas noté de difficulté particulière dans la réalisation de la démonstration.

Nous avons procédé de manière semblable pour montrer la proposition 8, dont nous rappelons l'énoncé :

> Proposition 8 :
> Soient $A,\ B \subseteq \mathbb{R}^N$ tels que $A \subseteq B$. Nous avons :
> - $\mathrm{int}A \subseteq \mathrm{int}B$;
> - $\mathrm{adh}A \subseteq \mathrm{adh}B$.

Le temps de recherche individuelle et la correction sont d'environ 5 minutes chacun. La démonstration met en jeu des connaissances en logique et en théorie des ensembles qui sont souvent utilisées dans l'enseignement. Il s'agit de tester si les étudiants parviennent à organiser le raisonnement de manière autonome. Nous avons l'impression qu'ils n'ont pas rencontré de difficulté particulière même si nous n'avons pas analysé spécifiquement cette phase de l'enseignement.

Les étudiants ont aussi été mis à contribution dans la démonstration de la proposition 6 :

> Proposition 6 :
> Soient $x \in \mathbb{R}^N$, un nombre réel $r > 0$ et $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^N$. Nous avons
> - $\mathrm{int}B_{\|.\|}[x,r] = B_{\|.\|}(x,r)$;

□ $\operatorname{adh} B_{\|.\|}(x,r) = B_{\|.\|}[x,r]$.

Nous avons demandé aux étudiants de montrer que les points intermédiaires choisis dans la démonstration (ces points sont notés par la lettre z, cf. p. 157) s'avèrent être de bons candidats.

Ce choix, complètement improvisé, tient au fait de vouloir maintenir les conditions de travail dans une démonstration complexe. Nous n'avons pas de traces des activités des étudiants mais notre ressenti, sur le terrain, nous laisse penser que les étudiants ont rencontré des difficultés pour réaliser les calculs.

Des rappels de cours sont également venus s'insérer dans certaines phases de l'enseignement. Nous pensons à la définition du complémentaire d'un ensemble ou de l'opération ensembliste $A\backslash B$.

Enfin, dans la démonstration de la proposition 9, les propriétés sur l'adhérence sont démontrées à partir de la propriété de dualité. Nous avons été amené à rappeler et démontrer le résultat suivant : $\complement(A\cap B) = \complement A \cup \complement B$ et $\complement(A\cup B) = \complement A \cap \complement B$.

2.3 Incorporation d'exemples

Dans la partie 2 de l'enseignement, portant sur les notions d'intérieur et d'adhérence d'un ensemble, nous avons incorporé des exemples pour illustrer les notions.

Nous avons demandé aux étudiants de se prononcer sur l'intérieur et l'adhérence de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{Q}$, sur l'intérieur de l'intervalle $[0,1]$, sur l'adhérence de l'intervalle $]0,1]$ et enfin sur l'intérieur et l'adhérence d'un singleton.

Les réponses apportées n'ont pas fait l'objet d'une justification précise, cette phase est restée à l'état de conjecture. Les étudiants peuvent par contre rédiger une justification en exercice complémentaire [2].

3 Des difficultés à surmonter

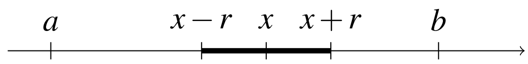
Nous nous centrons ici sur les exercices proposés aux étudiants. Nous passons donc en revue les exercices de l'enseignement. Nous montrons que certains types d'activités n'ont pas pu être laissés à la charge des étudiants, amenant ainsi l'enseignant à proposer une aide pour tenter de dépasser les difficultés rencontrées.

Exercice 3 :
Soient $a,b\in\mathbb{R}$. Les ensembles $[a,b]$, $]a,b[$, $]a,b]$ sont-ils ouverts ? Fermés ?

[2] Il s'agit d'un exercice qui ne sera pas corrigé en séance. Toutefois, un étudiant qui souhaite une correction de son travail peut soumettre sa copie à l'enseignant en dehors des heures de cours.

Les étudiants conjecturent des résultats corrects. Ils choisissent la caractérisation en termes de suite pour montrer que $[a,b]$ est fermé et celle en termes de boule pour démontrer que $]a,b[$ est ouvert.

La phase de recherche individuelle est interrompue car les étudiants ne parviennent pas à trouver un rayon convenable pour une boule de la forme $B(x,r)$, avec $x \in]a,b[$, qui doit être incluse dans l'ensemble. Certains étudiants ont réalisé un dessin comme ci-dessous qui ne semble pas les aider dans leur raisonnement.



L'enseignant propose un travail sur un cas particulier en considérant l'intervalle $]-3,7[$. Il prend en charge cette sous-tâche en sollicitant les étudiants pour construire le raisonnement à mener. Ce type de gestion est semblable à ce que nous avons décrit pour l'exercice 1, au chapitre précédent.

L'enseignant reprend alors le cas général. Le candidat $r = \min\{x-a, b-x\}$ émerge chez plusieurs étudiants. Cependant, la manipulation des inégalités pour justifier que ce candidat convient provoque, elle aussi, des difficultés. L'enseignant prend à sa charge le cas $r = x-a$ et laisse l'autre cas en exercice complémentaire.

Pour l'intervalle $[a,b]$, l'enseignant propose d'abord une correction à partir de la caractérisation en termes de suite, choisie par les étudiants, puis il donne une seconde correction en manipulant la caractérisation en termes de boule.

Exercice 4 :
Peut-on trouver un ensemble qui soit à la fois ouvert et fermé ?

Le début de la discussion collective voit rapidement émerger $\mathbb{R}$, chez plusieurs étudiants, comme ensemble à la fois ouvert et fermé. L'ensemble vide n'est par contre cité par aucun étudiant.

À la fin de cet exercice, l'enseignant mentionne sous la forme d'un résultat que $\mathbb{R}^N$ et l'ensemble vide sont à la fois ouvert et fermé et que ce sont les seuls sous-ensembles de $\mathbb{R}^N$ possédant cette caractéristique.

Exercice 5 :
Les ensembles suivants sont-ils ouverts ? Fermés ? Justifiez votre réponse.

① $[\pi, +\infty[$,

② $]-\infty, -2[$,

③ $\{3\}$,

④ $\{1/n : n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$,

⑤ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 2y = 6\}$.

La mise au travail des étudiants se fait ici sans difficulté. Le temps de recherche individuelle est de 40 minutes, au lieu des 25 minutes initialement prévues dans le scénario. L'enseignant organise une correction collective, semblable à celle ménagée pour l'exercice 1 (cf. chapitre précédent).

> Exercice 6 :
> Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble non-vide, fermé et majoré. Montrez que $\sup A \in A$.

Les étudiants commencent par écrire les définitions des notions apparaissant dans l'énoncé. Ils traduisent le fait que A est fermé en $A = \operatorname{adh} A$, suivant la définition donnée dans l'enseignement, et pour la définition du supremum, ils choisissent une caractérisation en termes de suite, qui est celle la plus fréquemment utilisée dans le chapitre correspondant.

Ils ne parviennent cependant pas à mettre en relation les deux notions pour en déduire que $\sup A \in A$. Une aide apportée par l'enseignant consiste à faire remarquer aux étudiants que la thèse peut s'écrire $\sup A \in \operatorname{adh} A$. Cette information permet à plusieurs étudiants de reprendre le travail mais certains étudiants ne parviennent pas à aller plus loin dans cet exercice et devront attendre la correction.

Après la correction, l'enseignant revient sur l'énoncé et utilise le levier méta pour revenir sur une erreur souvent rencontrée dans le chapitre sur la notion de supremum. Elle consiste à penser que le supremum de A est un point de A. Nous avons ici une propriété qui caractérise cette appartenance à partir de la structure topologique de l'ensemble.

> Exercice 7 :
> Soit l'ensemble $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 2 \text{ et } x + y \leqslant 0\}$.
>
> ① Représentez graphiquement l'ensemble E.
>
> ② L'ensemble E est-il ouvert ? Fermé ? Justifiez votre réponse.
>
> ③ Soit l'ensemble $F = \{(1/n, 1/n) : n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}\}$. Dites si F est ouvert, fermé. Justifiez votre réponse.
>
> ④ L'ensemble $E \cup F$ est-il fermé ?

Les constructions des ensembles E et F posent des difficultés. Concernant l'ensemble E, nous pensons que la présence d'inégalités est à l'origine des difficultés. En effet, l'enseignant demande aux étudiants à quelles constructions mèneraient les égalités correspondantes (c'est-à-dire les couples (x,y) vérifiant $x^2 + y^2 = 2$ et $x + y = 0$). La majorité des étudiants peut répondre à cette question. C'est l'enseignant qui rappelle la manière de traiter les inégalités quand on connaît la construction associée aux égalités.

L'interprétation de l'ensemble E en une intersection de deux ensembles fermés qu'on peut traiter séparément n'est réalisée par aucun étudiant. Ici aussi, c'est l'enseignant qui suggère cette décomposition.

Concernant l'ensemble F, nous pensons que la source de difficulté est la représentation d'une suite dans $\mathbb{R}^2$. Tout se passe comme si le blocage était lié au fait de représenter une succession de points et non pas une courbe.

Nous constatons aussi que les étudiants n'ont pas d'intuition sur la structure topologique de F. Ils ne font pas le lien avec l'ensemble $\{1/n : n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$, pourtant traité précédemment dans l'enseignement.

La réalisation de cette tâche a occupé environ 1h15 d'enseignement.

Des compléments sont apportés par l'enseignant à la fin de la correction. Dans cet exercice, on a un ensemble E fermé et un ensemble F qui ne l'est pas. On a montré, dans ce cas particulier, que $E \cup F$ est fermé. Est-ce tout le temps vrai ? Et dans le cas contraire, peut-on trouver des ensembles E et F tels que E est fermé, F n'est pas fermé, et pour lesquels $E \cup F$ est ouvert, ni ouvert ni fermé ? Une question semblable sur l'intersection de deux ensembles peut également être posée. Les étudiants peuvent réaliser ces questions en exercice complémentaire.

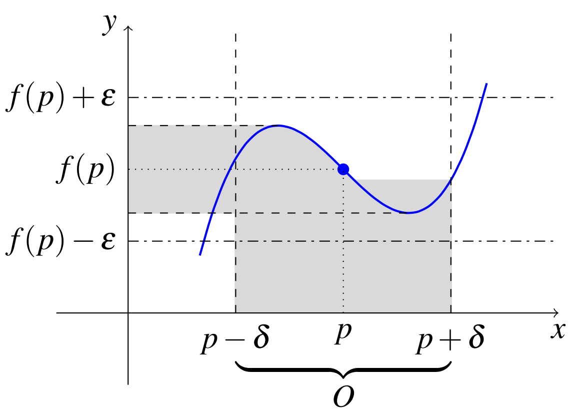
Exercice 8 :
Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \in \mathbb{R}$. Considérons l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \leqslant a\}$. Montrez que l'ensemble E est fermé.

Cet exercice n'a posé aucune difficulté dans sa gestion. Celle-ci est conforme à la gestion prévue a priori. Un temps de recherche de 10 minutes a été ménagé.

Exercice 9 :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $p \in \mathbb{R}$. Supposons que $f(p) > 0$. Montrez qu'il existe un ouvert, noté O, contenant p sur lequel la fonction f est strictement positive.

C'est le blocage total sur cet exercice. Aucune stratégie de résolution n'émerge chez les étudiants. Tout se passe comme s'ils ne donnaient aucun sens à l'énoncé.

L'enseignant réalise un dessin au tableau, comme ci-dessous, en expliquant comment peut intervenir l'hypothèse de continuité. Il suggère également aux étudiants d'utiliser la définition de continuité en $\varepsilon - \delta$. Les aides apportées permettent à quelques étudiants de terminer l'exercice mais une grande partie ne va pas plus loin et attend la correction de l'enseignant.

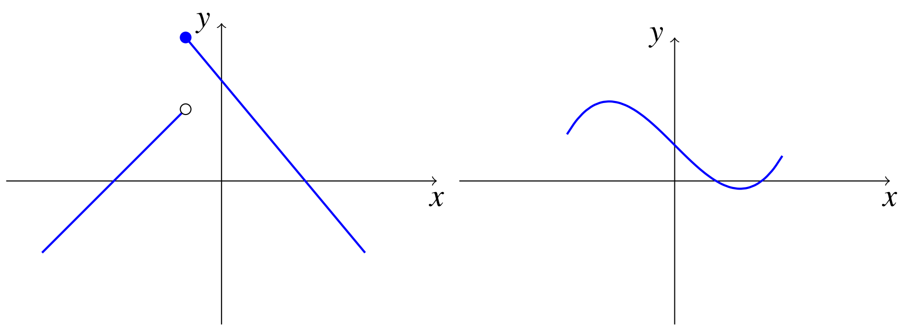


Exercice 11 :
Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Montrez que l'intérieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A. Montrez que l'adhérence de A est le plus petit fermé contenant A.

Pour cet exercice, les étudiants ne parviennent pas à traduire l'information « le plus grand » (respectivement « le plus petit »). C'est l'enseignant qui énonce ce qu'il faut prouver. Un temps de recherche de 10 minutes est ménagé.

Exercice 12 :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Le graphe de f, noté $\operatorname{Graph} f$, est défini par $\operatorname{Graph} f = \{(x, f(x)) : x \in \operatorname{Dom} f\}$. L'ensemble $\operatorname{Graph} f$ est-il fermé ?

Le démarrage de cet exercice pose des difficultés. Certains étudiants se prononcent sur le fait que l'ensemble est fermé, sans rien imposer à la fonction f. L'enseignant prend à sa charge la réalisation de graphes de fonctions continues ou non, comme ci-dessous, pour faire émerger la condition.



fonction non continue sur $\mathbb{R}$ fonction continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 13 :
Peut-on trouver un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^2$ tel que $\operatorname{Fr} A = \varnothing$?

Aucune réponse n'est apportée par les étudiants au terme de 5 minutes de recherche individuelle. C'est l'enseignant qui traduit la condition sur la frontière en l'expression « on cherche un ensemble qui n'a pas de frontière ». L'ensemble $\mathbb{R}^2$ est alors suggéré par un étudiant.

4 Bilan

Comme nous l'avons expliqué au début de ce chapitre, nous ne visons pas ici une description exhaustive de l'expérimentation.

Les éléments que nous avons décrits nous permettent toutefois de préciser certains aspects de l'enseignement qui méritent, selon nous, d'être mis en évidence. Nous pensons par exemple à la possibilité de proposer un travail autonome aux étudiants dans des phases que nous n'avions pas prévu de gérer de cette manière.

Ils montrent, de plus, que la manipulation des définitions sur des ensembles classiques, comme ceux proposés dans l'exercice 5, ne semble pas poser de difficulté particulière. Il s'agit d'un constat que nous faisons à partir de notre propre observation du travail des étudiants, il ne nous autorise pas à penser que tous les étudiants parviennent à réaliser de manière autonome l'ensemble des adaptations nécessaires à ce type d'exercice, ni qu'ils mettent en jeu les connaissances appropriées en logique et en théorie des ensembles. Néanmoins, nous observons que les étudiants parviennent à organiser le raisonnement et nos analyses précisent tout de même que certaines adaptations sont correctement réalisées.

Les difficultés rencontrées par les étudiants amènent l'enseignant à modifier les activités prévues par nos analyses a priori dans les tâches proposées. Nous avons décrit des phases dans lesquelles les étudiants sont complètement bloqués, notamment dans les mises en relation des notions de topologie avec d'autres notions ou par une connaissance antérieure qui n'est pas disponible. Les aides apportées par l'enseignant n'ont pas un effet constructif sur l'ensemble du groupe puisqu'une partie des étudiants n'a pas d'autre possibilité que d'attendre la correction de l'enseignant pour obtenir une solution possible.

Sur la base de toutes les analyses menées, nous dressons, au chapitre suivant, un bilan global de l'expérimentation.

Chapitre XV

Bilan de l'expérimentation

Nous dressons ici un bilan de l'expérimentation en croisant nos analyses précédentes avec le scénario prévu a priori et la conceptualisation attendue chez les étudiants. Nous donnons ensuite les premiers éléments caractérisant les apprentissages en topologie réalisés par les étudiants.

1 Une vue a posteriori du scénario d'enseignement

L'élaboration de notre scénario d'enseignement des notions de topologie prend appui sur des choix du chercheur, en termes de contenus et de gestion de la classe, que nous avons décrits au chapitre VIII. Compte tenu de ces choix, nous pensons avoir expérimenté un enseignement de topologie intégrant les contraintes institutionnelles qui pèsent sur notre travail, mais aussi conforme au scénario prévu et susceptible de mener à la conceptualisation attendue (cf. chapitre VIII), du moins chez un certain nombre d'étudiants. Nous expliquons ci-dessous ce qui nous motive à nous prononcer dans ce sens.

Concernant les contenus mathématiques visés, les notions à enseigner ont été introduites à partir d'un questionnement accessible aux étudiants associé à des choix de gestion de l'enseignant. De fait, les notions de points intérieur et adhérent ont émergé de manière autonome chez les étudiants à partir d'un travail de conjecture des caractérisations possibles des notions, appuyé par des dessins. Le recours au levier méta aide l'enseignant à introduire ensuite les notions d'intérieur et d'adhérence d'un ensemble, puis celles d'ensemble ouvert ou fermé, à partir des notions précédentes.

Le travail de manipulation des définitions, objectif fort de l'enseignement, s'installe au fil de l'enseignement en s'associant lui aussi à une gestion particulière du professeur. Celui-ci prend en effet à sa charge la mise sur le chemin des connaissances intervenant dans ce type de tâche. Il découpe lui-même la tâche en sous-tâches correspondant aux adaptations mathématiques à réaliser en faisant intervenir les connaissances à utiliser, qu'elles soient anciennes ou en cours d'acquisition. Nous faisons l'hypothèse que les étudiants pourront, a posteriori, accomplir seuls ce type de tâche par un travail d'imitation de l'enseignant. Cette hypothèse est confrontée aux évaluations des étudiants dans la partie suivante du travail.

L'enseignement de topologie prend également en compte la mise en place d'une dialectique entre le sens et la technique. En effet, l'utilisation de plusieurs registres d'écriture, ayant chacun une fonction spécifique, et l'introduction de nombreux exemples contribuent, selon nous, à travailler sur les aspects formel et conceptuel des notions dans les trois premières parties de l'enseignement. Ce travail se poursuit dans la dernière partie. Celle-ci propose des exercices dont la résolution requiert davantage de travail que la manipulation stricte des définitions des notions de topologie. La mise en relation avec d'autres notions, comme la continuité des fonctions par exemple, ou le choix d'une stratégie, nécessitent une disponibilité et une organisation autonome des connaissances. Ces aspects interviennent dans la conceptualisation attendue des étudiants.

Concernant les déroulements, nous avons montré que la gestion des exercices de manipulation des définitions était conforme à nos prévisions de gestion a priori. Des difficultés ont par contre dû être surmontées dans la dernière partie de l'enseignement, amenant à modifier certains choix de gestion et les activités des étudiants prévues dans nos analyses de tâches. C'est la mise en relation avec d'autres notions qui semblent provoquer des difficultés majeures, dès le démarrage de l'exercice.

En croisant la description de la conceptualisation visée avec l'enseignement décrit ici et les difficultés rencontrées, nous pensons qu'il est pertinent de nous centrer sur les aspects suivants pour caractériser les apprentissages en topologie des étudiants :

- □ la manipulation autonome des définitions, ce qui comprend la conjecture de la structure topologique des objets et le travail mathématique associé en termes d'adaptations ;
- □ la mise en relation des notions de topologie avec d'autres notions et le choix d'une stratégie pour aborder les questionnements associés.

Tenant compte de ces deux aspects, nous sommes en mesure de préciser, partiellement, certains éléments qui peuvent être mis en relation avec les apprentissages en topologie réalisés par les étudiants.

2 Premiers éléments en relation avec les apprentissages en topologie des étudiants

Certaines phases de l'enseignement nous semblent renseigner sur la mise en place de connaissances en topologie chez les étudiants et sur leur réalisation de types d'adaptations précis. Ces phases sont mises en évidence par les activités possibles que nous avons étudiées à partir de nos analyses des déroulements.

Les analyses révèlent que les étudiants rencontrent peu de difficultés à conjecturer si un ensemble donné est ouvert ou non, fermé ou non. Dans la manipulation des définitions, des adaptations telles que l'organisation des raisonnements ou l'introduction d'intermédiaires sont correctement réalisées. Cependant, ces adaptations provoquent des difficultés lorsque les ensembles se complexifient, comme dans l'exercice 7.

Au démarrage d'un exercice, les étudiants se dirigent spontanément vers l'utilisation des définitions. Nous pensons qu'il s'agit d'un effet de l'enseignement, très centré sur cet aspect. Le changement de point de vue qui consiste à penser à une autre stratégie de résolution provoque des difficultés difficiles à dépasser, puisque nous avons montré que l'enseignant prend complètement à sa charge la possibilité de modifier la méthode à utiliser.

Ces premiers constats émergent de ce que nous avons observé et ressenti lors de l'enseignement et sont partiellement confirmés par nos analyses. Nous ne pouvons bien entendu pas nous en contenter pour caractériser les apprentissages des étudiants.

Nous choisissons, comme aboutissement de ce travail, de nous appuyer sur les évaluations organisées à la fin de l'année universitaire, c'est-à-dire au mois de juin et en août également, pour étudier les apprentissages en topologie que les étudiants ont effectivement réalisés. Elles font l'objet de la partie suivante.

3 Limites méthodologiques

La composante expérimentale, que nous avons introduite dans cette recherche, présente des limites liées à nos choix méthodologiques. Il nous semble tout d'abord évident que le fait de nous placer dans la double posture d'enseignant et de chercheur influence l'expérience. En effet, nous savons parfaitement ce que nous cherchons à réaliser en classe, nous sommes aussi particulièrement attachée à ce que cela fonctionne. Les étudiants le ressentent probablement.

Nous avons également pris le parti d'étudier ce qui se passe en classe. Dans la mesure où nous n'avons pas filmé l'ensemble des séances, nous ne pouvons pas mener une analyse fine des déroulements et accéder de manière précise au travail effectivement réalisé par les étudiants en classe. Nous n'avons pas non plus pris en compte le travail personnel des étudiants alors que ce facteur peut lui aussi influencer leurs apprentissages. Cependant, nous faisons le pari que nos choix sont déjà légitimes pour étudier les déroulements en classe et pour approcher les apprentissages en topologie que peuvent réaliser les étudiants.

Nous sommes donc bien consciente que des éléments manquants auraient pu contribuer à préciser davantage nos analyses, mais nous ne pouvons toutefois pas évaluer le complément d'informations qu'ils pourraient fournir quant aux activités des étudiants.

Cinquième partie

Apprentissages des étudiants

Partie 5 — Introduction

Après notre expérimentation, qui s'est terminée en avril 2009, le cours d'analyse mathématique dans lequel elle s'intégrait a repris son déroulement classique, c'est-à-dire en scindant les séances de théorie sous la forme d'un cours magistral et les travaux dirigés, avec un enseignant spécifique pour chaque type de séance.

Dans notre département, des évaluations portant sur chaque cours du programme de la filière mathématique sont organisées au mois de juin. Comme le cours d'analyse commence en novembre et se termine en mai, l'évaluation de juin porte sur l'ensemble des contenus abordés dans le cours pendant l'année universitaire.

Les cours apparaissant dans le programme de cette filière sont pondérés de manière différente. Pour réussir, les étudiants doivent obtenir $12/20$ de moyenne pour l'ensemble de leur programme et au moins $10/20$ dans chaque cours. Les étudiants qui ne sont pas dans cette situation sont évalués à nouveau au mois d'août pour tenter de satisfaire aux conditions de réussite.

Nous nous intéressons dans cette partie aux questions sur la topologie posées dans chaque évaluation du cours d'analyse. Celles-ci se sont donc déroulées en juin et en août 2009.

Notre objectif est de caractériser les apprentissages des étudiants en topologie au terme de l'expérimentation. Pour ce faire, nous avons élaboré deux questions portant sur la topologie dans chaque évaluation.

Nous présentons tout d'abord séparément les résultats de chaque question. Nous étudions, pour chaque question, les solutions possibles, compte tenu de l'enseignement proposé aux étudiants. Nous réalisons ensuite une analyse a priori de chaque tâche. Le dépouillement des copies nous permet alors de mettre en évidence les difficultés des étudiants et de préciser la progression de leurs connaissances entre les deux évaluations. Nous croisons enfin les résultats obtenus avec la conceptualisation visée, décrite au chapitre VIII, pour décrire les apprentissages des étudiants.

Chapitre XVI

Des évaluations aux apprentissages des étudiants

Dans ce chapitre, nous présentons notre analyse des évaluations réalisées en juin et en août. Dans chaque évaluation [1], deux questions portent sur la topologie. Nous nous appuyons sur le dépouillement des copies des étudiants d'une part pour rendre compte de leur progression entre chaque évaluation et d'autre part pour inférer des éléments sur les apprentissages en topologie que ceux-ci ont réalisés.

1 Première évaluation

1.1 Question 1

> Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$.
>
> ① Définissez l'intérieur de A.
>
> ② Définissez l'adhérence de A.
> On dit d'un ensemble $V \subseteq \mathbb{R}^N$ qu'il est un *voisinage* de $x \in \mathbb{R}^N$ s'il existe un ouvert O de $\mathbb{R}^N$ tel que $x \in O \subseteq V$.
> Soient $A \subseteq \mathbb{R}^N$ et $x \in \mathbb{R}^N$.
>
> ③ Montrez que $x \in \operatorname{int} A$ si et seulement s'il existe un voisinage V de x tel que $V \subseteq A$.
>
> ④ Montrez que $x \in \operatorname{adh} A$ si et seulement si, pour tout voisinage V de x, $V \cap A \neq \varnothing$.
>
> ⑤ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(\pi) = 0,1$. Montrez qu'il existe un voisinage V de π sur lequel la fonction f est strictement positive.

►► Solutions possibles

Les points ① et ② portent sur la restitution des définitions d'intérieur et d'adhérence. Nous avons :

[1] L'ensemble des questions posées est disponible à l'adresse suivante :
http ://math.umh.ac.be/an/fr/enseignement/analyse/

$$\begin{aligned}\operatorname{int}A &= \{x\in A:\ \exists r>0,\ B(x,r)\subseteq A\}\\ &= \{x\in A:\ \forall (x_n)\subseteq \mathbb{R}^N,\ \text{ si } x_n\to x,\ \text{ alors } \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant n_0,\ x_n\in A\}\\ \operatorname{adh}A &= \{x\in\mathbb{R}^N,\ \forall r>0,\ B(x,r)\cap A\neq\varnothing\}\\ &= \{x\in\mathbb{R}^N,\ \exists (x_n)\subseteq A,\ x_n\to x\}\end{aligned}$$

Nous donnons successivement pour chaque question les solutions possibles en utilisant chaque caractérisation. Nous n'envisageons pas ici de solution utilisant la définition d'intérieur en termes de suite.

- ③ EN TERMES DE BOULE :

Supposons que $x\in\operatorname{int}A$, c'est-à-dire $\exists r>0,\ B(x,r)\subseteq A$. Nous cherchons un voisinage V de x tel que $V\subseteq A$. Prenons $V=B(x,r)$. C'est un voisinage de x car il existe un ouvert O tel que $x\in O\subseteq V$. En effet, prenons $O=B(x,r)$. On a bien $x\in B(x,r)$ car c'est le centre de la boule et on a trivialement $B(x,r)\subseteq B(x,r)$. On a aussi $B(x,r)\subseteq A$ par hypothèse.

D'autres choix possibles pour V sont par exemple $B(x,r/2)$ ou bien $V=A$. Dans ce dernier cas, l'inclusion $V\subseteq A$ est trivialement vérifiée et il existe bien un ouvert O tel que $x\in\ \subseteq V$. Il suffit de prendre $O=\operatorname{int}A$.

Supposons maintenant qu'il existe un voisinage V de x tel que $V\subseteq A$. Par définition de voisinage, il existe un ouvert O tel que $x\in O\subseteq V$. Nous devons montrer que $x\in\operatorname{int}A$, c'est-à-dire $\exists r>0,\ B(x,r)\subseteq A$. Comme O est ouvert, on a $O=\operatorname{int}O$, et on a donc $x\in\operatorname{int}O$, c'est-à-dire $\exists r'>0,\ B(x,r')\subseteq O$. Prenons $r=r'$. On a alors $B(x,r)\subseteq O\subseteq V$. Comme $V\subseteq A$, on en déduit que $B(x,r)\subseteq A$, ce qui prouve $x\in\operatorname{int}A$.

- ④ EN TERMES DE BOULE :

Supposons que $x\in\operatorname{adh}A$, c'est-à-dire que $\forall r>0,\ B(x,r)\cap A\neq\varnothing$. Soit V un voisinage de x. Nous devons montrer $V\cap A\neq\varnothing$. Par définition de voisinage, il existe un ouvert O tel que $x\in O\subseteq V$. D'autre part, par définition d'ensemble ouvert, on a $\exists r'>0,\ B(x,r')\subseteq O$. En prenant $r=r'$ dans l'hypothèse, on a $B(x,r')\cap A\neq\varnothing$, c'est-à-dire il existe $y\in B(x,r')$ et $y\in A$. Comme $B(x,r')\subseteq O\subseteq V$, on a donc aussi $y\in V$. Par conséquent, $V\cap A\neq\varnothing$.

Supposons maintenant que pour tout voisinage V de x, on a $V\cap A\neq\varnothing$. Montrons que $x\in\operatorname{adh}A$, c'est-à-dire $\forall r>0, B(x,r)\cap A\neq\varnothing$. Soit $r>0$. on a $B(x,r)$ est un voisinage de x. Donc, grâce à l'hypothèse, en prenant $V=B(x,r)$, on en déduit que $B(x,r)\cap A\neq\varnothing$.

- ④ EN TERMES DE SUITE :

Supposons que $x\in\operatorname{adh}A$, c'est-à-dire $\exists (x_n)\subseteq A,\ x_n\to x$. Soit V un voisinage de x. Nous devons montrer $V\cap A\neq\varnothing$. Par définition de voisinage, il existe un ouvert O tel que $x\in O\subseteq V$. Comme O est ouvert, il existe $r>0,\ B(x,r)\subseteq O$. Comme $x_n\to x$, en prenant dans la définition de convergence $\varepsilon=r$, on a $\exists n_0,\ \forall n\geqslant n_0,\ x_n\in B(x,r)$. Considérons alors l'élément x_{n_0} de la suite. On a $x_{n_0}\in A$ par construction de la suite et on a aussi $x_{n_0}\in B(x,r)\subseteq O\subseteq V$. On en déduit que $V\cap A\neq\varnothing$.

Supposons maintenant que pour tout voisinage V de x, on a $V \cap A \neq \varnothing$. Montrons que $x \in \text{adh}A$, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(x_n) \subseteq A$ telle que $x_n \to x$. Quel que soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, on a $B(x, 1/n)$ est un voisinage de x. Grâce à l'hypothèse, on a donc $\forall n \in \mathbb{N} \backslash \{0\},\ B(x, 1/n) \cap A \neq \varnothing$. Autrement dit, $\forall n \geqslant 1,\ \exists x_n \in B(x, 1/n)$ et $x_n \in A$. Par convergence dominée, on en déduit $x_n \to x$. On a donc bien construit une suite $(x_n) \subseteq A$, telle que $x_n \to x$.

□ ⑤ Nous savons que f est continue en π. Autrement dit, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},$ si $|x - \pi| < \delta,$ alors $|f(x) - f(\pi)| < \varepsilon$. L'inégalité $|x - \pi| < \delta$ se traduit par $x \in B(\pi, \delta)$ et l'inégalité $|f(x) - f(\pi)| < \varepsilon$ par $0,1 - \varepsilon < f(x) < 0,1 + \varepsilon$. Nous avons donc que, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},$ si $x \in B(\pi, \delta),$ alors $0,1 - \varepsilon < f(x) < 0,1 + \varepsilon$.

En prenant $\varepsilon = 0,1$, on trouve $\delta > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, si $x \in B(\pi, \delta)$, alors $0 < f(x) < 0,2$.

Prenons $V = B(\pi, \delta)$. Alors, $\forall x \in B(\pi, \delta)$, on a bien $f(x) > 0$.

►► Analyse a priori

La question est fermée. La méthode n'est pas indiquée mais le découpage de l'exercice permet de penser que les définitions d'intérieur et d'adhérence données dans ① et ② sont à utiliser dans la suite de l'exercice.

L'exercice porte sur une notion qui n'a pas été introduite dans le cours, à savoir la notion de voisinage d'un point, mais qui peut être intégrée dans le réseau de notions travaillées dans l'enseignement de topologie en ce sens que la définition d'un voisinage met en jeu la notion d'ouvert.

Les propriétés apparaissant aux points ③ et ④ sont semblables à celles données dans le cours pour les notions de point intérieur et de point adhérent. En effet, la présence d'une inclusion et d'une intersection entre deux ensembles peut être mise en relation avec les écritures suivantes :

$x \in \text{int}A$ si et seulement si $\exists r > 0,\ B(x, r) \subseteq A$;

$x \in \text{adh}A$ si et seulement si $\forall r > 0,\ B(x, r) \cap A \neq \varnothing$.

Plusieurs liens peuvent donc être établis avec le cours pour résoudre cette question. En premier lieu, la forme des propriétés à démontrer peut faire penser que les définitions d'intérieur et d'adhérence seront plus faciles à manipuler en termes de boule.

Un autre point clé est de comprendre qu'une boule de la forme $B(x, r)$ satisfait la définition de voisinage d'un point x. Il y a donc une adaptation d'une connaissance du cours à réaliser sous la forme d'une *mise en relation* de connaissances du cours de topologie avec des connaissances en logique et en théorie des ensembles. Cette information peut être utilisée à plusieurs reprises dans l'exercice.

Le dernier point de la question met en jeu les notions de voisinage et de continuité d'une fonction en un point. Une mise en relation semblable a également été étudiée dans le cours avec la notion d'ouvert dans l'exercice 9.

Notre démarche globale, dans cet exercice, est de tester l'autonomie du travail mathématique de l'étudiant face à la découverte d'une nouvelle notion qu'il doit manipuler et utiliser seul. Nous cherchons donc à étudier si l'étudiant parvient à prendre appui sur le cours pour mettre en relation une nouvelle notion, celle de voisinage, avec les notions d'intérieur et d'adhérence d'un ensemble. Les preuves des liens à établir sont à la charge de l'étudiant. Il doit donc donner du sens à la nouvelle notion et manipuler le formalisme contenu dans la nouvelle définition introduite dans l'exercice en s'appuyant sur les connaissances du cours et en réalisant des adaptations qui y ont été travaillées.

Domaines de travail

Cadre de la topologie de $\mathbb{R}^N$, cadre de la logique, cadre de la théorie des ensembles, cadre des fonctions d'une variable réelle.

Registres d'écriture

Registre symbolique, registre de la langue naturelle.

Connaissances mises en jeu

- □ Connaissances qui ont fait l'objet d'un enseignement explicite pendant l'année : convergence des suites numériques, manipulation d'inégalités, manipulation de la définition formelle de la continuité d'une fonction en un point, boule ouverte, intersection et inclusion d'ensembles, non inclusion d'ensembles, quantificateurs et manipulation d'écritures formelles, intérieur et adhérence d'un ensemble, ensemble ouvert.
- □ Connaissance nouvelle : voisinage d'un point.

Adaptations à réaliser

Les points ① et ② portent sur la restitution des définitions. Dans le cours, les définitions ont été écrites en termes de boule et de suite. Concernant les notions d'intérieur et d'ouvert, les définitions en termes de suite ont été utilisées à certains endroits dans des démonstrations mais elles n'ont pas fait l'objet d'un travail spécifique dans les exercices. On peut donc s'attendre à ce que l'intérieur soit défini en termes de boule. Concernant la notion d'adhérence, la forme de la question posée au point ④ peut faire penser à utiliser la définition de boule qui porte sur une intersection d'ensembles comme dans cet énoncé, mais il est également possible d'utiliser la définition en termes de suite.

Un *choix* de définitions lié à l'*interprétation* des questions posées doit donc être réalisé au démarrage de l'exercice.

Au point ③, pour la condition nécessaire, il faut comprendre que la recherche d'un voisinage passe par la recherche d'un ouvert contenant x et inclus dans le voisinage (*reconnaissance des modalités d'application*). Cette recherche cache donc deux problèmes d'existence (celui du voisinage et celui de l'ouvert associé) qui vont nécessiter de faire des *choix*. Il faut alors *mettre en relation* la recherche du voisinage avec l'existence de la boule apparaissant dans le fait que x appartient à $\mathrm{int} A$ (*connaissance du cours*). Le fait que cette boule soit un candidat potentiel pour le voisinage recherché tient au fait que $B(x,r)$ est un ouvert (*mise en jeu d'une connaissance du cours* à utiliser pour apporter un *changement de point de vue* sur un objet). Le travail que nous décrivons ici s'associe à la *mise en jeu de connaissances* en logique et en théorie des ensembles.

Pour la condition suffisante, montrer que x appartient à $\mathrm{int}A$ nécessite de trouver une boule de centre x contenue dans A (*reconnaissance des modalités d'application*). En prenant appui sur la définition de voisinage, il faut traduire la définition de l'ouvert associé en termes de boule (*changement de point de vue*) et la *mettre en relation* avec la boule cherchée.

Au point ④, pour la condition nécessaire, l'existence de l'ouvert associé au voisinage nécessite un *changement de point de vue* pour écrire la définition en termes de boule. On utilise alors l'hypothèse avec une valeur particulière de r pour faire apparaître un point commun à la boule et à l'ensemble A (*introduction d'un intermédiaire*). La *mise en relation* avec les inclusions d'ensembles permet de conclure.

Pour la condition suffisante, on utilise le fait que la boule $B(x,r)$ est un voisinage de x (*mise en relation de connaissances du cours*) pour utiliser l'hypothèse. La thèse en découle immédiatement.

Le point ⑤ est très proche de l'exercice 9 présenté dans le scénario (cf. chapitre IX). En effet, si l'étudiant a pu *mettre en relation* le fait qu'une boule ouverte de centre x est un ensemble ouvert et est par conséquent un voisinage de x, cet exercice consiste à particulariser les adaptations de l'exercice 9 à $p = \pi$.

En conclusion, l'exercice met en jeu une nouvelle notion, celle de voisinage. L'étudiant a à sa charge de la découvrir seul et de l'utiliser dans l'exercice pour établir des liens avec des notions du cours.

L'exercice est conceptuellement difficile car la nouvelle notion est définie dans un formalisme dont la complexité tient notamment à l'existence d'un ouvert pour définir ce qu'est un voisinage. Par conséquent, manipuler la notion provoque un double travail sur le voisinage et sur l'ouvert qui en découle. Cela amène à réaliser de nombreuses mises en relation entre des informations mettant en jeu des inclusions et des intersections d'ensembles.

Le recours au registre symbolique est nécessaire pour résoudre les différentes questions. La manipulation de ce registre nécessite la disponibilité de connaissances en logique et en théorie des ensembles. Les mises en relation sont nombreuses. Les autres adaptations de connaissances à réaliser ont été explicitement travaillées dans le cours.

Un point clé de l'exercice est de comprendre qu'une boule ouverte de centre x est un voisinage de x.

L'absence d'indications dans l'énoncé et le travail mathématique complexe à réaliser sont tels que l'étudiant est amené à organiser lui-même tous les raisonnements en prenant un certain nombre d'initiatives. Cet exercice relève du niveau disponible de mise en fonctionnement des connaissances à partir d'un travail sur les objets enseignés.

En plus d'étudier le travail autonome de l'étudiant décrit ci-dessus, les mises en fonctionnement de connaissances à réaliser dans cette question nous permettent d'évaluer la maîtrise de plusieurs éléments décrits dans la conceptualisation attendue dans notre enseignement de topologie.

Un premier élément porte sur la connaissance des définitions. Nous avons évoqué au début de ce travail (cf. chapitre I) que dans l'enseignement de topologie « classique[2] », des difficultés étaient souvent repérées dans la restitution des définitions. Les étudiants qui sont ici interrogés ont bénéficié d'un enseignement différent, tentant de mettre davantage l'accent sur le sens des nouvelles définitions. Nous testons donc tout d'abord, dans cet exercice, la connaissance « stricte » des définitions aux points ① et ②.

La manipulation du registre symbolique est un autre objectif de l'enseignement. Elle a fait l'objet d'un travail explicite dans le cours, appuyé par les interventions de l'enseignant pour montrer aux étudiants comment utiliser les connaissances en logique et en théorie des ensembles et pour réaliser les adaptations de connaissances dans les exercices.

Cet exercice nous amène donc à étudier comment l'étudiant prend en charge un travail mathématique semblable à celui réalisé dans le cours sur les notions pour l'adapter à une nouvelle notion.

▸▸ Analyse des copies

Remarques préliminaires

La question vaut 10 points. La répartition des sous-questions est donnée dans le tableau suivant :

① et ②	1
③	3
④	3
⑤	3
Total	10

23 étudiants de la filière mathématique ont réalisé l'examen du cours d'analyse mathématique. Ce sont précisément les étudiants à qui l'expérimentation a été proposée. Parmi les copies récupérées à la fin de l'examen se trouvait une copie vide. Nos analyses portent donc sur 22 copies.

Les résultats globaux sont les suivants. Nous avons mené toutes nos analyses en nous conformant à la manière usuelle de noter les copies. En d'autres mots, nous considérons qu'une question est réussie dès que l'étudiant obtient au moins la moitié des points.

Note $\geqslant 8$	2 étudiants
$5 \leqslant$ Note < 8	9 étudiants
Note < 5	11 étudiants
Réussite, note $\geqslant 5$	11 étudiants

Ainsi, 11 étudiants obtiennent une note supérieure ou égale à $5/10$, ce qui correspond à 50% des étudiants.

[2]Nous entendons par là l'enseignement de topologie qui était traditionnellement présenté aux étudiants avant notre expérimentation.

Nous donnons maintenant les résultats obtenus à chaque sous-question. Ici aussi, nous associons la réussite au fait que l'étudiant obtient au moins la moitié des points sur chaque partie de la question.

Point ① : définition de $\mathrm{int}A$

Tous les étudiants donnent une définition. Ils utilisent la notion de boule pour définir l'intérieur d'un ensemble. 18 d'entre eux donnent une définition correcte. Cela correspond donc à un taux de réussite de 81%.

Chez les quatre autres étudiants donnant une définition erronée, les erreurs observées consistent à ne pas définir $\mathrm{int}A$ comme un ensemble :

- Un étudiant donne comme définition :

  $$\exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A \text{ où } x \in A.$$

  Deux étudiants donnent la définition suivante :

  $$\forall x \in A,\ \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A.$$

  Nous pensons qu'il pourrait s'agir d'une confusion entre la définition d'intérieur et la notion d'ouvert caractérisée par une écriture quantifiée.

- Un étudiant définit l'intérieur de A en termes ensemblistes mais il échange ponctuellement le rôle de x et r :

  $$\mathrm{int}A = \{r \in \mathbb{R}^N : \exists x > 0, B(x,r) \subseteq A\}$$

  Une explication possible pourrait être liée au travail personnel de l'étudiant, peut-être axé sur une étude « par coeur » des définitions.

Point ② : définition de $\mathrm{adh}A$

Tous les étudiants donnent une définition. 19 d'entre eux donnent une définition en termes de boule dont 15 définitions sont correctes. Les 4 étudiants qui fournissent une définition erronée sont précisément ceux qui ont également donné une définition fausse pour l'intérieur. Les erreurs observées sont identiques.

Les trois autres étudiants donnent une définition correcte en termes de suite.

Il y a donc, globalement, 18 réponses correctes, ce qui correspond à un taux de réussite de 81% dont 100% de réussite pour les étudiants qui utilisent la notion de suite et 79% de réussite pour les étudiants qui utilisent la notion de boule.

Points ① et ②

Les étudiants qui échouent sur la restitution des définitions produisent ensuite des raisonnements contenant les erreurs fréquemment rencontrées dans le détail des questions ci-dessous. Nous entendons par là que leur échec ne mène pas à des productions complètement atypiques, ils commettent par la suite le même type d'erreurs que les étudiants donnant une définition correcte.

Point ③ : lien intérieur/voisinage

Chaque implication vaut $1,5$ sur 3.

16 étudiants obtiennent une note supérieure ou égale à 1,5 sur 3, ce qui correspond à un taux de réussite de 72% pour l'ensemble de la question. Nous détaillons maintenant les résultats pour chaque implication.

- □ SI $x \in \operatorname{int} A$, ALORS IL EXISTE UN VOISINAGE V DE x TEL QUE $V \subseteq A$

  Un seul étudiant ne répond pas à cette question.

  9 étudiants obtiennent le maximum des points pour cette implication. Ils choisissent tous $B(x,r)$ comme voisinage et comme ouvert sauf un étudiant qui travaille avec $V = A$ et $O = \operatorname{int} A$.

  Chez 5 étudiants, l'erreur commise consiste à donner un candidat pour l'ouvert O (ils prennent $B(x,r)$) mais le voisinage V n'est pas explicitement donné. Ils semblent associer l'existence d'un voisinage à la recherche « stricte » d'un ouvert. Par contre, la justification du fait que l'ouvert choisi convient est correcte. Cette erreur est, selon nous, liée aux deux quantificateurs existentiels dans la recherche d'un voisinage : l'un pour V, l'autre pour O. Ces étudiants obtiennent une note de $0,5$ sur $1,5$.

  Les autres erreurs commises sont ponctuelles et consistent en des raisonnements absurdes.

  Il y a donc, globalement, pour cette implication, neuf étudiants qui réussissent, soit un taux de réussite de 40%.

- □ S'IL EXISTE UN VOISINAGE V DE x TEL QUE $V \subseteq A$, ALORS $x \in \operatorname{int} A$

  Deux étudiants ne répondent pas à cette question.

  12 étudiants obtiennent le maximum des points à cette question. Ils mettent tous en jeu le raisonnement développé dans l'analyse a priori.

  Les erreurs observées sont de différentes natures.

  Nous avons rencontré des erreurs liées à une manipulation erronée des écritures quantifiées. Par exemple, deux étudiants choisissent l'ouvert qui découle de l'appartenance de x au voisinage V. Ils prennent $O = B(x,r)$ sans préciser qui est r. Il est difficile de savoir si cette boule émerge dans leur raisonnement par définition de l'ouvert O et du fait que $x \in O$ ou bien s'ils procèdent par une forme d'analogie avec le raisonnement développé à l'implication précédente où cette boule existe par hypothèse. La manipulation des quantificateurs semble donc créer des difficultés liées au fait de savoir quels sont les symboles qui sont fixés par l'énoncé et ceux qui varient.

  D'autres erreurs sont liées à des mises en relation entre des informations sans les justifier. Par exemple, un étudiant comprend qu'il existe un ouvert O provenant de la définition de V tel que $x \in O \subseteq V \subseteq A$. Il en déduit que $x \in \operatorname{int} A$ sans aucune explication. Un autre étudiant déduit de la définition de voisinage l'existence immédiate d'une boule de centre x contenue dans A. C'est donc ici la manipulation des inclusions qui pose des problèmes.

  Les autres erreurs sont ponctuelles et proviennent de raisonnements absurdes.

Nous avons donc un taux de réussite de 54% à cette question qui correspond aux 12 étudiants ayant obtenu le maximum.

Point ④ : lien adhérence/voisinage

Chaque implication vaut $1,5$ sur 3.

15 étudiants obtiennent 0 à la question. Parmi eux, 13 étudiants produisent une réponse, seuls deux d'entre eux ne répondant pas à la question.

Deux étudiants obtiennent $0,5$ ou 1 sur les trois points de la question.

Trois étudiants obtiennent 1,5 et deux étudiants obtiennent le maximum.

Seuls cinq étudiants ont donc au moins la moitié des points sur cette question. Le taux de réussite est par conséquent de 22%.

Nous donnons maintenant les résultats pour chaque implication.

- SI $x \in \mathrm{adh}A$, ALORS POUR TOUT VOISINAGE V DE x, $V \cap A \neq \varnothing$

  Deux étudiants ne répondent pas à la question.

  18 étudiants fournissent une réponse. Parmi eux, 5 étudiants obtiennent le maximum des points en s'appuyant sur un raisonnement semblable à celui de l'analyse a priori. 13 étudiants produisent une réponse erronée, les mettant en échec sur cette question.

  Nous avons donc un taux de réussite de 22% (les cinq étudiants).

  Nous avons repéré différentes erreurs.

  Quatre étudiants commencent par considérer un voisinage V quelconque, ce qui est correct. Mais ensuite, ils choisissent l'ouvert qui découle de la définition de voisinage. Par exemple, ils prennent $O = B(x,r)$. Nous retrouvons donc, comme dans la question précédente, des difficultés de manipulation des quantificateurs, en particulier celle du quantificateur existentiel.

  Un étudiant choisit le voisinage V et tente de montrer que ce voisinage particulier a une intersection non vide avec l'ensemble. Ici, le quantificateur universel semble poser problème.

  Parmi les trois étudiants qui ont défini l'adhérence en termes de suite, deux d'entre eux vont résoudre cette question en repassant à la définition en termes de boule. L'un considère que, comme c'est un quantificateur universel qui porte sur le voisinage, il y en a aussi un sur l'ouvert O. L'autre travaille avec un voisinage particulier. Le troisième commence par rappeler la définition en termes de suite mais il ne l'utilise finalement pas car son raisonnement consiste à penser que comme $x \in \mathrm{adh}A$, alors $x \in A$. Dès lors, comme on a aussi $x \in V$, on a forcément $V \cap A \neq \varnothing$.

  Tout comme dans la question précédente, nous voyons apparaître des difficultés liées à la disponibilité de connaissances en logique.

- SI POUR TOUT VOISINAGE V DE x, $V \cap A \neq \varnothing$, ALORS $x \in \mathrm{adh}A$

  Six étudiants ne répondent pas à la question.

  3 étudiants obtiennent le maximum à la question. Leur stratégie est celle de l'analyse a priori.

Cinq étudiants produisent un raisonnement qui manque de justification : ils travaillent avec un ou des voisinages particuliers : ils prennent $V = B(x,r)$ sans préciser qui est r et sans justifier que c'est un voisinage. Ils en déduisent alors directement que l'intersection entre $B(x,r)$ et A est non vide.

Parmi les trois étudiants qui avaient défini l'adhérence en termes de suites, deux échouent à la question. Le troisième la réussit mais il est repassé par la définition en termes de boule.

Nous avons donc 4 étudiants qui réussissent cette question, soit un taux de réussite de 18%.

Point ⑤ : lien continuité/voisinage

5 étudiants ont le maximum ou presque à la question. Ils travaillent tous avec une valeur différente pour le choix de ε dans la manipulation de la définition de continuité.

17 étudiants sont en échec : 16 obtiennent 0 et 1 étudiant obtient $0,5$. Parmi eux, 10 étudiants ne répondent rien ou se contentent de recopier l'énoncé.

Les difficultés observées rejoignent celles rencontrées au point ④. Les étudiants ne parviennent pas à distinguer les objets qui sont fixés des objets qui varient.

Les erreurs rencontrées sont les suivantes :

- □ Deux étudiants choisissent comme voisinage $V =]x-\delta, x+\delta[$ sans avoir préalablement donné une valeur particulière à ε.
- □ Quatre étudiants choisissent un voisinage particulier sans utiliser la définition de continuité. Des exemples de voisinages sont $B(0,1/n)$ sans préciser qui est n, $B(0,2\pi)$ ou $]0,4[$. Ils s'arrêtent là ou se lancent dans des inégalités qui ne mènent à rien.

Seuls cinq étudiants réussissent donc cette question, soit un taux de réussite de 22%.

Les étudiants n'ont pas fait le lien avec l'exercice résolu au cours. Les erreurs observées sont des erreurs de logique, encore une fois liée aux quantificateurs. Les étudiants ne distinguent pas les objets qui sont fixés de ceux qui sont génériques.

►► Conclusion

Nous avons, pour cette question, un taux de réussite globale de 50%.
Le tableau suivant reprend les résultats obtenus pour chaque sous-question.

Énoncé	Taux de réussite
Définition int$A$	81%
Définition adh$A$	100% avec suite, 79% avec boule
Lien int$A$/voisinage	72%
Lien adh$A$/ voisinage	22%
Lien continuité/voisinage	22%

Un premier élément qui s'avère positif est la bonne connaissance des définitions. Celle de la notion d'intérieur est parfaitement connue, la définition d'adhérence en termes de boule pose des difficultés ponctuelles.

Un autre élément, selon nous, également positif est que la majorité des étudiants a repéré qu'une boule de centre x est un voisinage de x. Beaucoup d'étudiants ont pu utiliser cette information mais la justification est parfois incomplète. Nous pensons qu'il s'agit d'un aspect témoignant du fait que les étudiants donnent du sens à la nouvelle notion qu'ils découvrent dans cet exercice.

Nous donnons maintenant, en lien avec ce que nous cherchions à étudier, les éléments nous permettant de caractériser la manipulation des notions dans les différentes questions en lien avec les adaptations à réaliser.

Tous les étudiants manipulent les définitions d'intérieur et d'adhérence en s'appuyant sur la notion de boule, y compris les étudiants qui avaient préalablement défini l'adhérence en termes de suite. Nous avions souligné que, vu la forme des énoncés (présence d'inclusion et d'intersection), les étudiants pouvaient penser que ce type de définition était plus simple à manipuler. Ils font un choix cohérent avec l'énoncé sur lequel ils travaillent.

L'analyse a priori a montré que le travail mathématique à réaliser dans les points ③, ④ et ⑤ nécessite d'une part des mises en relation entre plusieurs informations et d'autre part l'utilisation massive de connaissances en logique, sur la manipulation des quantificateurs précisément et en théorie des ensembles, sur l'inclusion et l'intersection d'ensembles.

Au point ③, il semble que la structure logique de la proposition « il existe un voisinage V de x tel que $V \subseteq A$ » soit à l'origine de plusieurs erreurs. Celle-ci contient en effet implicitement un autre quantificateur existentiel portant sur l'ouvert O. Ainsi, dans la première implication[3], l'existence de V est associée à la recherche stricte d'un ouvert O. Les étudiants donnent donc un candidat pour O, souvent correct d'ailleurs, mais nous n'avons aucun candidat pour V. Pour l'implication réciproque, nous avons tout d'abord rencontré un type d'erreur que nous associons également à la manipulation de la proposition « il existe un voisinage V de x tel que $V \subseteq A$ » qui est cette fois l'hypothèse. Les étudiants traduisent correctement l'existence d'un voisinage en l'existence d'un ouvert O tel que $x \in O \subseteq V$ mais ils s'autorisent à choisir eux-mêmes un ouvert O. Une autre erreur repérée est la suivante. Certains étudiants traduisent eux aussi correctement l'existence d'un voisinage en l'existence d'un ouvert O mais ils ne mettent pas en relation cet ouvert avec la possibilité de trouver une boule de centre x contenue dans l'ensemble A. Tout se passe ici comme si la caractérisation d'ouvert en termes d'intérieur n'était pas disponible chez ces étudiants.

Au point ④, c'est cette fois un quantificateur universel qui porte sur le voisinage V dans la proposition « pour tout voisinage V de x, $V \cap A \neq \varnothing$. Dans la première implication[4], les étudiants commencent par se donner un voisinage V

[3] Si $x \in \operatorname{int} A$, alors il existe un voisinage V de x tel que $V \subseteq A$.

[4] Si $x \in \operatorname{adh} A$, alors pour tout voisinage V de x, $V \cap A \neq \varnothing$.

quelconque, ce qui est tout à fait correct. Mais ensuite, nous avons vu que certains d'entre eux s'autorisent à choisir l'ouvert O associé à ce voisinage arbitraire. Comme au point précédent, la manipulation du quantificateur existentiel est ici aussi source de difficultés. Dans l'implication réciproque, c'est davantage le manque de précision qui pénalise les étudiants. Par exemple, nous avons vu que pour prouver $x \in \mathrm{adh}A$, c'est-à-dire $\forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \varnothing$, ils ne considèrent pas préalablement un réel $r > 0$ et prennent directement dans l'hypothèse $V = B(x,r)$ sans expliquer d'où ils tiennent ce réel r. C'est donc ici l'organisation logique du raisonnement qui pose des problèmes.

Le point ⑤ nécessite de manipuler la définition formelle de continuité qui, elle aussi, a une structure logique semblable à celle qui vient d'être décrite : pour tout ε, il existe δ... Ce point est également mal réussi, notamment à cause de la manipulation formelle.

Il apparaît très clairement que c'est la non-disponibilité de certaines connaissances en logique, notamment la manipulation du quantificateur existentiel, qui provoque la majorité des erreurs, plus qu'un manque de connaissances en théorie des ensembles. Un autre élément peut être mis en évidence dans la réussite des points ③, ④ et ⑤. Il semble qu'il n'y ait pas de demi-mesure dans les résultats obtenus. En effet, soit l'étudiant réussit presque parfaitement la question, soit c'est l'échec global.

Nous pouvons faire une analogie avec l'hypothèse des blocs développées dans les travaux présentés au chapitre II (cf. p. 16). Tout se passe comme si le bloc des connaissances en logique devait être plus rempli pour garantir la réussite aux différentes questions. Dans le cas contraire, c'est l'échec.

1.2 Question 2

Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$.

① Définissez « A est ouvert ».

② Définissez « A est fermé ».

③ En utilisant les définitions ci-dessus, dites, pour chacun des ensembles suivants, s'il est ouvert et/ou fermé.

- □ $E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leqslant x \leqslant y\}$;
- □ $E_2 = \left\{\dfrac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$;
- □ $E_3 = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 - 3x + 2 < 0\}$.

▶▶ Solutions possibles

Les deux premiers points de la question portent sur la restitution des définitions. Dans le cours, un ouvert A (respectivement un fermé) a été défini comme un ensemble tel que $A = \mathrm{int}A$ (respectivement $A = \mathrm{adh}A$).

- □ E_1 n'est pas ouvert. Montrons pour cela que $E_1 \not\subseteq \mathrm{int}E_1$. Prenons $(x,y) = (0,0)$. On a bien $(0,0) \in E_1$ car $0 \leqslant 0 \leqslant 0$. Mais $(0,0) \notin \mathrm{int}E_1$, c'est-à-dire $\forall r > 0,\ B\big((0,0),r\big) \not\subseteq E_1$. En effet, soit $r > 0$. Prenons $(x',y') = (-r/2,0)$. Travaillons avec la norme $|.|_2$. C'est possible puisque toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^N$. On a bien que $(-r/2,0) \in B\big((0,0),r\big)$ car $|(-r/2,0)|_2 = r/2 < r$. Mais $(-r/2,0) \notin E_1$ car, comme $-r/2 < 0$, on n'a pas $0 \leqslant -r/2$.

  Nous n'envisageons pas une solution où l'intérieur de A est caractérisé en termes de suite car nous avons peu utilisé cette caractérisation dans le cours.
- □ E_1 est fermé. Montrons que $E_1 = \mathrm{adh}E_1$. On a toujours $E_1 \subseteq \mathrm{adh}E_1$, c'est une propriété vue dans le cours. Montrons que $\mathrm{adh}E_1 \subseteq E_1$. Soit $(x,y) \in E_1$, c'est-à-dire $\exists\big((x_n,y_n)\big) \subseteq E_1,\ (x_n,y_n) \to (x,y)$. On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant x_n \leqslant y_n$. Comme $x_n \to x$ et $y_n \to y$ grâce à la convergence composante par composante, on a, en passant à la limite dans les inégalités, $0 \leqslant x \leqslant y$. Donc $(x,y) \in E_1$.

  Dans l'analyse des déroulements, nous avons montré que les étudiants caractérisent les fermés en termes de suite. Nous n'envisageons pas de solution à partir de la notion de boule.
- □ E_2 n'est pas ouvert. Montrons que $E_2 \not\subseteq \mathrm{int}E_2$. Prenons $x = 0$. On a $x \in E_2$ en prenant $n = 0$. Mais $x \notin \mathrm{int}E_2$, c'est-à-dire $\forall r > 0,\ B(0,r) \not\subseteq E_2$. En effet, soit $r > 0$. Prenons $y = -r/2$. On a $-r/2 \in B(0,r)$ car $|-r/2| = r/2 < r$. Et $-r/2 \notin E_2$ car $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{n}{n+1} \geqslant 0$. Or, $-r/2 < 0$.
- □ E_2 n'est pas fermé. Montrons que $\mathrm{adh}E_2 \not\subseteq E_2$. Prenons $x = 1$. On a $1 \in \mathrm{adh}E_2$. En effet, considérons la suite $\left(\dfrac{n}{n+1}\right) \subseteq E_2$. Cette suite converge vers 1. Mais $1 \notin E_2$ car quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on ne peut pas avoir $\frac{n}{n+1} = 1$, c'est-à-dire $n = n+1$.
- □ Les racines du polynôme $x^2 - 3x + 2$ sont 1 et 2. En étudiant le signe du polynôme, on trouve $E_3 =]1,2[$.

  E_3 est ouvert, c'est-à-dire $]1,2[= \mathrm{int}]1,2[$. Une propriété du cours nous dit qu'on a toujours $\mathrm{int}]1,2[\subseteq]1,2[$. Montrons que $]1,2[\subseteq \mathrm{int}]1,2[$. Soit $x \in]1,2[$. Nous devons montrer que $x \in \mathrm{int}]1,2[$, c'est-à-dire $\exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq]1,2[$. Prenons $r = \min\{x-1, 2-x\}$. Soit $y \in B(x,r)$, c'est-à-dire $x - r < y < x + r$. Montrons que $y \in]1,2[$. Si $r = x-1$, alors on a, en remplaçant r par sa valeur, $y > 1$. Par définition du minimum, on a aussi $y < x + r \leqslant x + 2 - x = 2$. Donc, $y < 2$. Si $r = 2 - x$, alors on a, en remplaçant r par sa valeur, $y < 2$. Par définition du minimum, on a aussi $y > x - r \geqslant x - (x-1) = 1$. Donc, $y > 1$. Dans les deux cas, on a $y \in]1,2[$, ce qui prouve $x \in \mathrm{int}]1,2[$.
- □ E_3 n'est pas fermé. Montrons $\mathrm{adh}]1,2[\not\subseteq]1,2[$. Prenons $x = 2$. On a $2 \in \mathrm{adh}]1,2[$ car la suite $\left(2 - \dfrac{1}{2n}\right) \subseteq]1,2[$ et converge vers 2. Mais $2 \notin]1,2[$.

►► Analyse a priori

Déterminer si un ensemble est ouvert et/ou fermé est un objectif de l'enseignement. Il est ici combiné à une autre attente institutionnelle qui consiste à pouvoir manipuler le formalisme des définitions pour montrer les résultats annoncés. La représentation géométrique qu'ont les étudiants de chaque ensemble à traiter peut jouer un rôle dans leurs productions. En effet, si les étudiants ne se représentent pas correctement la structure de l'ensemble et le type d'éléments qu'il contient, ils peuvent rencontrer des difficultés à conjecturer les résultats sur la nature topologique de l'ensemble.

La question est ouverte et la méthode est indiquée. L'étude de chaque ensemble peut de plus être mise en lien avec au moins un exercice de l'enseignement. La proximité entre cet exercice et l'exercice associé dans le cours tient d'une part à la ressemblance des énoncés et d'autre part à la ressemblance du travail mathématique à réaliser pour étudier l'ensemble.

Ainsi, l'étude de la nature topologique de l'ensemble E_1 peut par exemple se rapprocher de celle de l'ensemble $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqslant 2 \text{ et } x+y \leqslant 0\}$, rencontré dans l'exercice 7 du scénario. La représentation graphique de l'ensemble E était une aide pour conjecturer qu'il était fermé mais pas ouvert.

Ici, la présence d'un dessin à réaliser n'apparaît pas dans l'énoncé. L'analyse des copies pourra donc permettre de savoir si le recours au dessin est utilisé par les étudiants pour conjecturer les résultats à prouver. Néanmoins, si l'étudiant fait le lien avec l'exercice du cours, il peut aussi se rappeler que la présence d'inégalités larges permet de penser que l'ensemble contient son bord et est donc fermé. Dans tous les cas, un parallèle peut être fait avec le cours, permettant d'annoncer les résultats à démontrer. Ensuite, le travail mathématique qui en découle est identique à celui mené dans l'exercice 7.

L'étude de l'ensemble E_2 est à rapprocher de celle de l'ensemble $\{1/n : n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$, réalisée dans l'exercice 5. Penser à étudier la convergence de la suite et voir si la limite est un point de l'ensemble ou non permet de conjecturer si l'ensemble est fermé ou pas. Dans l'exercice mentionné, un accent avait été mis sur la position des points pour comprendre que l'ensemble n'est pas ouvert. Cette idée peut encore être utilisée ici. Cet ensemble a donc la même nature topologique que celui étudié dans le cours. Toutes les adaptations ont été explicitement travaillées dans un exercice semblable, y compris les connaissances en logique et en théorie des ensembles.

L'étude de l'ensemble E_3 est facilitée par le fait que c'est un intervalle ouvert. La tâche consiste alors à particulariser le travail mathématique fait dans le cours pour étudier, de manière générale, un intervalle $]a,b[$ où $a,b \in \mathbb{R}$. Les exigences du cours sont telles que l'étudiant doit reprendre le raisonnement mené en classe en l'adaptant à $a = 1$ et $b = 2$. La consigne de l'énoncé qui impose d'utiliser les définitions est aussi présente pour empêcher que l'étudiant se contente de citer le résultat du cours.

La consigne imposant d'utiliser les définitions rend l'étude de E_3 plus difficile si l'étudiant ne transforme pas l'ensemble en un intervalle. Il peut toutefois étudier le complémentaire de l'ensemble et utiliser le fait que la fonction $f(x) = x^2 - 3x + 2$ est continue pour particulariser les raisonnements mis en jeu dans l'exercice 8 et en déduire que le complémentaire de E_3 est fermé. La réponse sera considérée comme réussie partiellement car les consignes données dans l'énoncé ne sont alors pas respectées.

L'analyse a priori de cet exercice montre que le travail mathématique à réaliser est identique à celui des différents exercices du cours mentionnés, tant du point de vue des domaines de travail, des registres d'écritures, des connaissances mises en jeu et des adaptations à réaliser. Un aspect du travail de l'étudiant consiste donc à particulariser certaines variables communes à cet exercice et à celui du cours qui lui correspond : la nature des nombres, le choix des suites, l'étude de la convergence des suites, le choix du rayon d'une boule... L'analyse des copies devra se centrer sur la question de savoir si les étudiants ont fait les mises en relation attendues et les bonnes particularisations. Toutefois, la compréhension de la structure des ensembles peut provoquer des difficultés au démarrage de l'étude de chaque ensemble.

Notre démarche générale consiste donc ici à analyser comment les étudiants étudient la nature topologique de quelques ensembles ayant des traits communs avec ceux étudiés dans le cours en manipulant le registre symbolique, mais aussi la représentation qu'ils ont des différents ensembles à traiter.

▸▸ Analyse des copies

Remarques préliminaires

Cet exercice a pour objectif principal de tester si l'étudiant est capable d'étudier la nature topologique d'un ensemble. À ce titre, il doit donc pouvoir déterminer si un ensemble est ouvert ou non, fermé ou non et le montrer en utilisant à bon escient les connaissances en logique et en théorie des ensembles et en réalisant les bonnes adaptations. Il s'agit d'un objectif de l'enseignement sur lequel nous nous sommes déjà expliqué.

Un autre aspect peut ici être étudié en lien avec les objectifs de l'enseignement. Nous cherchons aussi à analyser la représentation qu'ont les étudiants des différents ensembles intervenant dans l'exercice. C'est une des difficultés de l'exercice mais l'enseignement a tenté faire acquérir des réflexes aux étudiants pour donner du sens aux objets qu'ils manipulent, notamment par le recours aux registres de la langue naturelle et des dessins.

La question vaut 7 points. La répartition des sous-questions est donnée dans le tableau suivant :

① et ②	1
étude de E_1	2
étude de E_2	2
étude de E_3	2
Total	7

22 copies ont été dépouillées puisqu'un étudiant n'a pas répondu à la question. Il s'agit du même étudiant n'ayant pas répondu non plus à la question précédente.

Cinq étudiants obtiennent une note supérieure à 5 points. Nous avons ensuite un groupe de 7 étudiants qui n'a pas respecté la consigne d'utilisation des définitions. En effet, lorsque l'ensemble est fermé, comme E_1 (respectivement ouvert, comme E_3), ils en ont déduit qu'il ne pouvait pas être ouvert (resp. ne pas être fermé) car les seuls ensembles qui sont à la fois ouverts et fermés sont $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}$) et l'ensemble vide. Cette justification est tout de même acceptée car elle est parfaitement correcte. Ce groupe d'étudiants a donc une note de 5 sur 7.

Les autres étudiants sont en situation d'échec.

12 étudiants ont donc une note supérieure ou égale à 5 sur 7, ce qui donne un taux de réussite de 54%.

Les définitions

Dans notre enseignement, les notions d'ouvert et de fermé sont définies en termes ensemblistes ($A = \mathrm{int} A$ et $A = \mathrm{adh} A$). Ces définitions contiennent un formalisme simple et économique, donc facile à restituer, mais il s'agit ensuite d'étudier comment les étudiants les manipulent dans la suite de l'exercice.

16 étudiants donnent, dans les deux cas, une définition correcte.

Quatre étudiants définissent les objets avec une écriture quantifiée. Pour la définition d'ouvert, ils utilisent tous la notion de boule et toutes les définitions sont correctes. Pour la définition de fermé, ils travaillent tous avec la notion de suite. Deux définitions sont erronées car elles sont vérifiées par tous les ensembles. Il s'agit d'une erreur que nous avions déjà mentionnée dans les difficultés des étudiants au chapitre I de ce travail. Leur définition est :

$$\forall x \in A,\ \forall (x_n) \subseteq A,\ \text{ si } x_n \to x \text{ alors } x \in A.$$

Dans la suite de l'exercice, l'un repasse à la définition ensembliste de l'adhérence pour étudier l'ensemble E_1 mais il s'arrête à la traduction de l'existence d'une suite de l'ensemble qui convergerait vers un élément x non précisé. À chaque fois que l'autre étudiant regarde si un ensemble est fermé ou non, il va omettre le quantificateur sur x. Il suppose qu'il a une suite (x_n) qui converge vers un certain x, sans préciser à quel ensemble ce dernier appartient.

Deux étudiants donnent les deux types de définitions. Chez l'un, toutes les définitions sont correctes. Chez l'autre, la définition d'ouvert est correcte et la définition de fermé avec quantificateurs est vérifiée par tous les ensembles.

Il y a donc 19 étudiants qui donnent deux définitions correctes, ce qui correspond à un taux de réussite de 81%.

L'ensemble E_1

- □ E_1 EST FERMÉ

  9 étudiants ne répondent pas à la question.

  8 étudiants donnent une réponse correcte. Ils utilisent tous une définition ensembliste.

  5 étudiants, dont 4 travaillent avec une écriture quantifiée, ne mettent pas de quantificateur sur (x, y) au démarrage de l'exercice. Mais le raisonnement qui suit est correct. Ces étudiants ont été peu pénalisés et réussissent la question.

Un étudiant transforme l'ensemble de manière erronée mais l'organisation du raisonnement qu'il met en place pour traiter cet ensemble est correcte.

Nous considérons que 60% des étudiants réussissent la question (ce sont les $8+5+1$ ci-dessus) et réalisent les bonnes adaptations : la manipulation de la suite, la traduction de l'appartenance des éléments de la suite à l'ensemble, le passage à la limite.

□ E_1 N'EST PAS OUVERT

7 étudiants ne répondent pas à la question. Ils n'avaient pas non plus répondu au fait que l'ensemble est fermé.

3 étudiants donnent une réponse correcte en utilisant la définition ensembliste.

9 étudiants n'utilisent pas la consigne d'utilisation des définitions et justifient que l'ensemble n'est pas ouvert par le fait que les seuls ensembles à la fois ouverts et fermés sont $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble vide. Comme $E_1 \neq \mathbb{R}^2$ et E_1 est fermé, il ne peut donc pas être ouvert. Ils ont été peu pénalisés car l'argument développé reste parfaitement correct.

Trois étudiants produisent un raisonnement erroné lié à la manipulation d'une non inclusion d'ensembles :

- deux étudiants ne parviennent pas développer la non inclusion $E_1 \not\subseteq \operatorname{int} E_1$. Ils s'arrêtent là.
- un étudiant traduit cette non inclusion en « soit $z \in E_1$. Montrons que $z \notin \operatorname{int} E_1$. »

Enfin, un étudiant pense que E_1 ne peut pas être ouvert car il est fermé, sans rien dire de plus.

Remarquons aussi que 12 étudiants commencent par examiner le fait que E_1 est fermé, alors que ce n'est pas précisé dans l'énoncé.

Nous intégrons les 9 étudiants qui n'ont pas respecté la consigne d'utilisation des définitions mais dont la justification est néanmoins correcte dans le taux de réussite. Nous considérons donc que 12 étudiants ont réussi cette question, soit un taux de réussite de 54%.

L'ensemble E_2

□ E_2 N'EST PAS FERMÉ

Six étudiants ne répondent pas à la question.

Sept étudiants donnent une réponse correcte. Nous avons donc un taux de réussite de 31%.

Neuf étudiants pensent que l'ensemble est fermé. Deux d'entre eux s'arrêtent à l'inclusion $\operatorname{adh} E_2 \subseteq E_2$; trois étudiants produisent un raisonnement complètement dénué de sens.

4 étudiants considèrent que la suite $(x_n) = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ est une suite constante. Ils écrivent que, comme $(x_n) \subseteq E_2$, on a $x_{n^*} = \dfrac{n^*}{n^*+1} \to \dfrac{n^*}{n^*+1} \in E_2$. Ces

étudiants travaillent avec une définition de fermé sous la forme d'une écriture quantifiée. Il peut, selon nous, s'agir d'une représentation erronée des éléments de l'ensemble.

Un étudiant pense que $E_2 = [0,1[$ et travaille sur cet ensemble. Son raisonnement est correct.

Huit étudiants commencent par regarder si l'ensemble est fermé ou non, alors que ce n'est pas spécifié dans l'énoncé.

□ E_2 N'EST PAS OUVERT

Huit étudiants ne répondent pas à la question.

Trois étudiants donnent une réponse correcte. Trois autres produisent un raisonnement correct. Cependant, pour montrer $0 \notin \operatorname{int} E_2$, ils doivent trouver un réel y tel que $\forall r > 0,\ y \in B(0,r)$ et $y \notin E_2$. Leur candidat ne convient pas quelle que soit la valeur de r car ils prennent $y = r/2$. Si $r = 1$, alors $y \in E_2$. Ces étudiants réussissent globalement la question.

Sept étudiants ne parviennent pas à montrer que $0 \notin \operatorname{int} E_2$ car ils ne trouvent pas de candidat pour un point qui serait dans $B(0,r)$ mais pas dans E_2. Il peut s'agir d'une difficulté liée à la représentation qu'ont les étudiants des ensembles manipulés.

Nous remarquons tout de même que l'ensemble des étudiants parvient à détecter que 0 n'appartient pas à $\operatorname{int} E_2$.

Trois étudiants pensent que E_2 est fermé et en déduisent qu'il n'est pas ouvert, sans rien préciser.

Six étudiants réussissent donc cette question, ce qui correspond à un taux de réussite de 27%. Les erreurs observées sont liées à la manipulation des écritures quantifiées en lien avec la non disponibilité de connaissances en théorie des ensembles, comme la preuve d'une non inclusion par exemple.

L'ensemble E_3

Huit étudiants ne répondent pas à la question.

Comme nous allons le voir, le fait de remarquer que l'ensemble peut s'écrire comme un intervalle a des conséquences sur la réussite de la question.

Neuf étudiants remarquent que l'ensemble est un intervalle.

□ E_3 EST OUVERT

Parmi les neuf étudiants qui ont écrit l'ensemble comme un intervalle, cinq réponses sont correctes. Les erreurs observées sont les suivantes :

- deux étudiants ne trouvent pas un rayon convenable pour la boule intervenant dans la définition d'intérieur.
- un étudiant écrit $E_3 = [1,2]$. Il en déduit que son ensemble n'est pas ouvert et son raisonnement pour le prouver est correct.
- un étudiant explique qu'on a vu dans le cours que $]a,b[$ est ouvert et non fermé. Il n'a donc pas compris que le travail attendu était de particulariser le cas général.

Parmi les six étudiants n'ayant pas remarqué que l'ensemble est un intervalle, aucun d'entre eux ne parvient à utiliser correctement les définitions. Quatre passent au complémentaire et produisent un raisonnement correct. Ils réussissent globalement la question. Les deux autres citent le résultat suivant du cours pour justifier que l'ensemble est ouvert : tout ensemble de la forme $\{x \in \mathbb{R} : f(x) < a\}$ où f est une fonction continue est un ensemble ouvert.

Nous considérons que neuf étudiants réussissent cette question, soit un taux de réussite de 40%.

□ E_3 N'EST PAS FERMÉ

Parmi les neuf étudiants qui ont utilisé l'intervalle, quatre donnent une réponse correcte. Les cinq autres utilisent le fait que les seuls ensembles qui sont simultanément ouverts et fermés sont $\mathbb{R}$ et l'ensemble vide.

Parmi les six étudiants n'ayant pas remarqué que l'ensemble est un intervalle, ils utilisent tous le fait que les seuls ensembles ouverts et fermés à la fois sont $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble vide.

Neuf étudiants réussissent donc cette question. Nous avons donc un taux de réussite de 40%.

La représentation de E_3 joue réellement un rôle dans la réussite globale.

►► Conclusion

Nous avons, pour cette question, un taux de réussite globale de 54%.
Le tableau suivant reprend les résultats obtenus pour chaque sous-question.

Énoncé	Taux de réussite
Définitions	81%
E_1 est fermé	60%
E_1 n'est pas ouvert	54%
E_2 n'est pas fermé	31%
E_2 n'est pas ouvert	27%
E_3 n'est pas fermé	40%
E_3 est ouvert	40%

Comme dans l'exercice précédent, nous avons remarqué que la connaissance des définitions est bonne. Néanmoins, le fait de choisir une écriture quantifiée pour définir les objets provoque des difficultés, même si peu d'étudiants ont fait ce choix. Cet aspect avait déjà été relevé dans le diagnostic de l'enseignement de topologie présenté au chapitre I de ce travail. Cet enseignement introduisait justement les notions avec une écriture quantifiée.

L'étude de l'ensemble E_1 est plutôt bien réussie. Les étudiants conjecturent les résultats corrects. La difficulté principalement rencontrée est liée à la manipulation de la non inclusion $E_1 \not\subseteq \operatorname{int} E_1$ pour justifier que E_1 n'est pas ouvert.

L'étude de E_2 n'est pas du tout bien réussie. La majorité des étudiants qui répondent à cette question pensent que l'ensemble est en fait fermé. Tout se passe comme si les étudiants ne parvenaient pas à se représenter les éléments de l'ensemble puisque c'est la manière dont ils traitent la suite $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ qui pose problème. Pour montrer que l'ensemble n'est pas ouvert, les étudiants ne peuvent pas montrer que $0 \notin E_2$ parce qu'ils ne trouvent pas de bon candidat pour un point appartenant à $B(0,r)$ et pas à E_2. Ici aussi nous pensons qu'il peut s'agir d'une difficulté liée à la représentation des ensembles.

Un phénomène semblable apparaît dans l'étude de E_3 puisque nous avons vu que les étudiants ne remarquant pas que l'ensemble est en fait un intervalle ouvert ne réussissent pas la question.

L'analyse des copies montre donc que, excepté pour l'ensemble E_2, les étudiants conjecturent en général des résultats corrects sur la nature topologique des ensembles.

Ensuite, les étudiants qui utilisent une définition ensembliste pour définir les objets réalisent, dans l'ensemble, les bonnes adaptations. Les étudiants qui utilisent une écriture quantifiée pour définir les objets vont soit revenir à la définition ensembliste dans l'exercice soit manipuler de manière erronée leur définition.

Par ailleurs, nous n'avons relevé la présence de dessins que chez deux étudiants. Dans les deux cas, le dessin apparaissait dans l'étude de E_3 pour montrer qu'il est ouvert. Le dessin visait à trouver un rayon convenable pour montrer que $\forall x \in]1,2[, \exists r > 0, B(x,r) \subseteq]1,2[$.

Les étudiants ne se sont donc pas du tout appuyéS sur des dessins pour se représenter les ensembles. Nous n'avons donc pas pu relever d'éléments dans les productions des étudiants sur cette question de la représentation. Toutefois, nous avons noté que les étudiants essaient d'abord de savoir si l'ensemble est fermé ou non. Nous pensons que cet élément peut être relié à la question de la représentation. En effet, l'ensemble E_1 met en jeu des inégalités. Dans le cours, les ensembles définis en termes d'inégalités à satisfaire étaient souvent traités à partir de la notion de suite et le fait que les inégalités soient larges ou strictes donnaient des résultats sur le fait que les ensembles étaient fermés ou non. Il y a donc une forme d'analogie entre les ensembles traités dans le cours et ceux proposés ici. Si les étudiants font le lien avec le cours, le recours au dessin leur apparaît peut-être alors comme inutile.

Enfin, nous avons noté un élément qui peut se rapprocher des résultats obtenus à la question précédente. Soit les étudiants répondent à la question et développent un raisonnement complet ou presque, en réalisant correctement la majorité des adaptations, soit les étudiants ne répondent (presque) rien.

2 Deuxième évaluation

2.1 Question 1

Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$.

① Définissez « A est un ensemble ouvert ».

② Définissez « A est un ensemble fermé ».

③ *À partir des définitions précédentes*, dites, pour chacun des ensembles suivants, s'il est ouvert et/ou fermé.

- □ $E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant y\}$;
- □ $E_2 = \left\{\frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\right\}$;
- □ $E_3 = \{x \in \mathbb{R} : x^3 + x^2 + x + 1 < 1\}$.

Cette question est très proche de la question 2 posée à la première évaluation. Les deux premiers points testent la manipulation des définitions. L'étude de chaque ensemble met en jeu des connaissances identiques dans les deux exercices. Pour l'ensemble E_1, montrer qu'il est fermé nécessite ici d'utiliser la continuité de la valeur absolue dans un passage à la limite tel que $\lim |x_n| \leqslant y_n$. Et l'étude de l'ensemble E_3 est facilitée si on remarque qu'il s'agit de l'intervalle $]-\infty, 0[$ à partir de l'étude du signe de l'expression $x(x^2 + x + 1)$.

Nous ne donnons donc pas, pour cette question, une solution détaillée ni son analyse a priori car celles-ci sont tout à fait analogues à ce que nous avons décrit à la question précédente, dans la première évaluation.

▸▸ Analyse des copies

Remarques préliminaires

11 étudiants ont présenté l'évaluation.

La question vaut 7 points. La répartition des sous-questions est donnée dans le tableau suivant :

① et ②	1
E_1	2
E_2	2
E_3	2

Les résultats globaux sont les suivants. Comme pour la première évaluation, nous considérons la réussite lorsque l'étudiant obtient une note supérieure à la moitié des 7 points.

Note $\geqslant 5$	2 étudiants
$3,5 \leqslant$ Note < 5	4 étudiants
Note $< 3,5$	5 étudiants
Réussite, note $\geqslant 3,5$	6 étudiants

6 étudiants obtiennent donc une note supérieure ou égale à $3,5/7$, ce qui correspond à un taux de réussite de 54%.

Quatre étudiants ne répondent qu'aux point ① et ②.

Nous donnons maintenant les résultats obtenus à chaque sous-question, toujours en considérant la réussite dès le moment où la moitié de la note est atteinte.

Les définitions

Deux étudiants ne répondent pas à la question, ni aux questions suivantes.

Les neuf autres étudiants donnent une définition correcte en termes ensemblistes pour chaque notion. Nous avons donc un taux de réussite sur cette question de 82%.

L'ensemble E_1

Tous les étudiants commencent par regarder si l'ensemble est fermé.

- □ E_1 EST FERMÉ

  Six étudiants produisent une réponse correcte en utilisant la définition en termes de suites, ce qui donne un taux de réussite de 54%.

  Un étudiant produit un raisonnement incohérent.

- □ E_1 N'EST PAS OUVERT

  Deux étudiants produisent un raisonnement correct en utilisant la négation de la définition en termes de boule.

  Cinq étudiants donnent un argument correct mais qui ne consiste pas à utiliser la définition. Un étudiant part du fait qu'on a vu dans le cours que si f est une fonction continue, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \leqslant a\}$ n'est pas ouvert. Quatre étudiants s'appuient sur le fait que les seuls ensembles qui sont simultanément ouverts et fermés sont $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble vide pour en déduire que l'ensemble n'est pas ouvert. Ces étudiants sont pénalisés d'un demi-point. Le taux de réussite pour cette question est donc de 63%.

L'ensemble E_2

Tous les étudiants commencent par regarder si l'ensemble est fermé. Deux étudiants ne répondent pas à la question.

- □ E_2 N'EST PAS FERMÉ

  Huit étudiants travaillent avec la négation de la définition en termes de suite. Sept réponses sont correctes et une réponse donnée est incohérente. Nous avons donc un taux de réussite de 63%.

- □ E_2 N'EST PAS OUVERT

  Neuf étudiants travaillent avec la négation de la définition d'ouvert en termes de boule. Deux réponses sont considérées comme complètement correctes. Mis à part un raisonnement incohérent, les autres productions sont correctes mais manquent de précision ou sont partiellement fausses. Par exemple, deux étudiants font un choix incorrect pour un point $y \in B(1,r)$ tel que $y \notin E_2$. Deux étudiants utilisent le fait que $\frac{n+1}{n} \leqslant 2$ sans le justifier. Un étudiant utilise le fait que $2 \in E_2$ sans le justifier. Un étudiant ne fait pas le lien entre son raisonnement et le fait que la définition est mise en défaut.

Huit étudiants réussissent donc cette question, soit un taux de réussite de 72%.

Globalement, les étudiants développent un raisonnement cohérent. C'est le plus souvent un manque de justification qui les pénalise.

L'ensemble E_3

Trois étudiants ne répondent pas à la question. Cinq étudiants commencent par résoudre l'inégalité pour écrire l'ensemble sous la forme d'un intervalle.

- □ E_3 EST OUVERT

  Cinq étudiants produisent un raisonnement correct en travaillant avec la négation de la définition en termes de boule. Trois étudiants montrent que le complémentaire de l'ensemble est donné en utilisant les suites, ce qui est pénalisé. Mais globalement, ces huit étudiants réussissent la question, soit un taux de réussite de 72%.

- □ E_3 N'EST PAS FERMÉ

  Trois étudiants produisent un raisonnement correct avec la négation de la définition en termes de suite. Trois étudiants utilisent le fait que les seuls ensembles qui sont à la fois ouverts et fermés sont l'ensemble vide et $\mathbb{R}$. Ils sont pénalisés mais réussissent la question. Deux étudiants produisent un raisonnement incohérent.

  Nous avons donc six étudiants qui réussissent la question, soit un taux de réussite de 54%.

►► Conclusion

Nous avons, pour cette question, un taux de réussite de 54%, ce qui est identique à la première évaluation. Le tableau suivant reprend les résultats obtenus pour chaque question.

Énoncé	Taux de réussite
Définitions	81%
E_1 est fermé	54%
E_1 n'est pas ouvert	63%
E_2 n'est pas fermé	63%
E_2 n'est pas ouvert	72%
E_3 n'est pas fermé	72%
E_3 n'est pas ouvert	54%

La restitution des définitions n'a posé aucun problème dans cette question.

Nous notons ensuite que ce ne sont pas les connaissances à mettre en jeu qui pénalisent les étudiants mais davantage le manque de justification. Concernant les étudiants qui répondent à la question, il y a donc un progrès significatif entre les deux évaluations, notamment dans la réalisation des adaptations.

Nous remarquons également qu'il n'y a pas de demi-mesure en ce sens que soit l'étudiant répond entièrement à la question et la réussit très bien, soit l'étudiant ne produit aucune réponse.

2.2 Question 2

Soient une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$. On définit l'image réciproque de A par f comme

$$f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} : \ f(x) \in A\}.$$

① Pour la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 1$, recherchez l'ensemble $f^{-1}\big([-1,1]\big)$. Détaillez vos calculs.

② Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrez que l'ensemble $g^{-1}\big([\pi,+\infty[\big)$ est fermé. Énoncez les définitions et les résultats que vous utilisez. Un argument tel que « on l'a vu dans le cours » ne suffit pas.

③ Déduisez du point précédent que l'ensemble $g^{-1}\big(]-\infty,\pi[\big)$ est ouvert.

④ Montrez que si g est une fonction continue et A est un ensemble ouvert, alors $g^{-1}(A)$ est un ensemble ouvert. Énoncez les définitions et les résultats que vous utilisez.

▸▸ Solutions possibles

① On a

$$\begin{aligned} f^{-1}\big([-1,1]\big) &= \{x \in \mathbb{R} : \ f(x) \in [-1,1]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : \ -1 \leqslant x^2 - 1 \leqslant 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : \ 0 \leqslant x^2 \leqslant 2\} \\ &= [-\sqrt{2},\sqrt{2}] \end{aligned}$$

② On a $g^{-1}\big([\pi,+\infty[\big) = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \geqslant \pi\}$.

Posons $E = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \geqslant \pi\}$ et montrons $E = \operatorname{adh} E$. On a $E \subseteq \operatorname{adh} E$, c'est une propriété du cours. Montrons $\operatorname{adh} E \subseteq E$.

Soit $x \in \operatorname{adh} E$, c'est-à-dire $\exists (x_n) \subseteq E,\ x_n \to x$. Comme $(x_n) \subseteq E$, on a $\forall n,\ g(x_n) \geqslant \pi$. En passant à la limite et en utilisant le fait que g est continue, on en déduit $g(x) \geqslant \pi$. Donc $x \in E$.

③ On a $g^{-1}\big(]-\infty,\pi[\big) = \{x \in \mathbb{R} : \ g(x) < \pi\} = \complement E$.

Or, nous avons montré, au point précédent, que E est fermé. Son complémentaire est donc ouvert, c'est une propriété du cours.

④ Nous devons montrer $g^{-1}(A) = \operatorname{int} g^{-1}(A)$.

L'inclusion $\operatorname{int} g^{-1}(A) \subseteq g^{-1}(A)$ est toujours vraie, c'est une propriété du cours. Montrons que $g^{-1}(A) \subseteq \operatorname{int} g^{-1}(A)$.

Soit $x \in g^{-1}(A)$, c'est-à-dire $g(x) \in A$. Comme A est ouvert, nous savons qu'il existe $r > 0,\ B(g(x), r) \subseteq A$.

Nous devons prouver que $x \in \operatorname{int} g^{-1}(A)$, c'est-à-dire il existe $r' > 0,\ B(x, r') \subseteq g^{-1}(A)$. Autrement dit, nous devons montrer $\exists r' > 0,\ \forall y \in B(x, r'),\ y \in g^{-1}(A)$.

Comme la fonction g est continue, elle est en particulier continue en x. Autrement dit, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, si $|\alpha - x| < \delta$, alors $|g(\alpha) - g(x)| < \varepsilon$.

Prenons $\varepsilon = r$. Alors il existe $\delta > 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$, si $\alpha \in B(x, \delta)$, alors $g(\alpha) \in B(g(x), r)$.

Prenons $r' = \delta$. Soit $y \in B(x, r')$. Alors, l'hypothèse de continuité nous dit que $g(y) \in B(g(x), r) \subseteq A$. Donc $g(y) \in A$, c'est-à-dire $y \in g^{-1}(A)$.

►► Analyse a priori

La question est fermée et aucune méthode n'est indiquée.

L'exercice met en jeu une notion qui n'a pas été travaillée dans l'enseignement de topologie : l'image réciproque d'un ensemble. Il s'agit donc d'une connaissance nouvelle. Le travail mathématique à réaliser dans cet exercice peut néanmoins être mis en relation avec des éléments du cours. Nous pensons à la manipulation d'inégalités et à l'exercice 9 dans lequel l'ensemble dont il est question est semblable à celui du point ②.

Notre objectif est d'étudier comment les étudiants s'emparent de cette nouvelle notion, s'ils parviennent à la particulariser dans les différentes questions et à réaliser les adaptations qu'ils ont déjà rencontrées dans l'enseignement de topologie. Le point ④ met en jeu un travail mathématique complexe en faisant de plus intervenir la notion de continuité d'une fonction.

Domaines de travail

Cadre de la topologie de $\mathbb{R}$, cadre de la logique, cadre de la théorie des ensembles, cadre des fonctions d'une variable réelle.

Registres d'écriture

Registre symbolique, registre de la langue naturelle.

Connaissances mises en jeu

- □ Connaissances qui ont fait l'objet d'un enseignement explicite pendant l'année : convergence des suites numériques, manipulation d'inégalités, manipulation de la définition formelle de la continuité d'une fonction en un point, boule ouverte, intersection et inclusion d'ensembles, non inclusion d'ensembles, quantificateurs et manipulation d'écritures formelles, intérieur et adhérence d'un ensemble, ensemble ouvert.
- □ Connaissance nouvelle : image réciproque d'un ensemble.

Adaptations à réaliser

□ POINT ①

Il s'agit de *particulariser* la définition d'image réciproque à une fonction f et un ensemble A donnés. L'appartenance de $f(x)$ à l'intervalle $[-1,1]$ doit être *traduite* en inégalités. Ensuite des connaissances anciennes sur les nombres réels sont utilisées pour résoudre chaque inégalité et *interpréter* les solutions sous la forme d'un intervalle.

□ POINT ②

Un travail de *particularisation* semblable au point précédent doit être réalisé au démarrage. L'ensemble à traiter est alors un cas particulier de l'exercice 9 du scénario d'enseignement. Il met donc en jeu des adaptations semblables.

La consigne qui demande d'énoncer les résultats utilisés est donnée pour forcer les étudiants à réaliser le travail mathématique attendu et ne pas mentionner l'exercice du cours en se contentant de dire qu'on est ici dans un cas particulier.

□ POINT ③

Cette question *met en jeu une connaissance du cours* : un ensemble est ouvert si et seulement si son complémentaire est fermé. Préalablement, il faut *mettre en relation* l'ensemble avec celui qui a été traité au point précédent pour passer au complémentaire (*changement de point de vue*).

□ POINT ④

Le raisonnement s'organise en deux inclusions d'ensembles à prouver (*reconnaissance des modalités d'application*), dont l'une est immédiate (*mise en jeu d'une connaissance du cours*).

L'autre inclusion nécessite *plusieurs étapes*. L'information $x \in g^{-1}(A)$ doit être *mise en relation* avec le fait que A est ouvert pour *traduire* en termes de boule le fait que $g(x) \in A$.

La recherche de r' doit ensuite être *mise en relation* avec la continuité de la fonction g au point x qui doit elle-même être raccrochée à l'hypothèse pour donner une valeur convenable à ε. La définition de continuité doit aussi être *traduite* en termes de boule pour rendre ces mises en relation possibles.

►► Dépouillement des copies

Remarques préliminaires

La question vaut 10 points. La répartition des sous-questions est donnée dans le tableau suivant.

①	2
②	3
③	2
④	3
Total	10

Parmi les 11 étudiants présents à l'évaluation, deux ne répondent pas à cette question.

Cinq étudiants ont une note supérieure ou égale à 5 sur 10, ce qui nous donne un taux de réussite de 45%.

Les résultats sont repris dans le tableau suivant :

Note $\geqslant 8$	4 étudiants
Note $= 6$	1 étudiants
Note $= 3,5$	1 étudiants
Note $= 0$	5 étudiants
Réussite, note $\geqslant 5$	5 étudiants

Point ①

Cinq étudiants obtiennent le maximum à cette question. Nous avons donc un taux de réussite de 45%.

Les quatre autres qui y ont répondu obtiennent 0 ou 0,5. Ils traduisent tous les inégalités $0 \leqslant x^2 \leqslant 2$ en $x \in [0, \sqrt{2}]$. Ce sont donc les connaissances anciennes qui posent des difficultés.

Point ②

Quatre étudiants obtiennent le maximum et un étudiant a $1,5$ sur 3, donc globalement un taux de réussite de 45%. La production de ce dernier manque de justification. Il considère une suite qui converge vers un certain x sans préciser d'où vient cet élément. Il ne mentionne pas non plus l'utilisation de la continuité dans le passage à la limite.

Les quatre autres étudiants utilisent une stratégie de résolution semblable à celle mise en place dans le cours, en travaillant donc avec la notion de suite.

Les autres étudiants n'ont pas réussi à particulariser la définition d'image réciproque. Selon eux, l'ensemble à traiter est $[\pi, +\infty[$. Notons qu'ils montrent parfaitement bien que cet ensemble est fermé, même si ce n'est pas l'objet de la question !

Point ③

Cinq étudiants obtiennent le maximum, les mêmes dont nous avons parlé au point précédent. Les autres travaillent cette fois avec l'intervalle $]-\infty, \pi[$, ce qui est cohérent avec leur réponse donnée au point précédent.

L'adaptation qui consiste à passer au complémentaire est donc disponible chez l'ensemble des étudiants.

Point ④

Un étudiant obtient le maximum, il réalise parfaitement l'ensemble des adaptations prévues par l'analyse a priori.

Quatre étudiants ont 1 sur 3. Ils traduisent l'appartenance de x à $\operatorname{int} g^{-1}(A)$, ils écrivent la thèse et la définition de continuité, mais ils ne mettent pas en relation les deux informations.

Les autres étudiants ne répondent pas à la question.

►► Conclusion

Le tableau suivant reprend les résultats obtenus pour chaque sous-question.

Énoncé	Taux de réussite
Point ①	45%
Point ②	45%
Point ③	45%
Point ④	9%

Un élément positif est que l'ensemble des étudiants réalise les adaptations mises en jeu. Toutefois, leur interprétation erronée de l'image réciproque est telle qu'ils ne manipulent pas l'ensemble attendu.

C'est le dernier point de la question qui provoque le plus de difficultés. Ce sont les mises en relation entre les différentes notions qui en sont l'origine. Les étudiants parviennent toutefois à traduire les informations en termes de boule.

3 Mise en regard des deux évaluations

Nous mettons ici en évidence les traits communs et les différences observées entre chaque évaluation. Notre objectif consiste à rendre compte de la progression des étudiants entre les deux évaluations. Nous caractérisons ensuite, à la section suivante, de manière plus précise les acquisitions des étudiants, telles qu'elles apparaissent dans les évaluations.

À la suite de nos analyses des déroulements et dans la visée de nos objectifs, nous avons soulevé deux aspects à étudier en lien avec la conceptualisation attendue. D'une part, nous cherchons à savoir si les étudiants parviennent à manipuler les définitions de manière autonome et d'autre part, nous voulons étudier s'ils peuvent mettre en relation les notions de topologie avec d'autres notions.

Dans les deux évaluations, nous avons élaboré deux questions qui permettent d'étudier chaque aspect. En effet, chaque évaluation comporte une question où l'étudiant doit étudier la structure topologique de trois ensembles. Il doit donc manipuler les définitions des ensembles ouverts ou fermés, ou bien leur négation. Il y a également, à chaque fois, une question mettant en relation les notions de topologie avec une nouvelle notion qui n'a fait l'objet d'aucun enseignement. Il s'agit de la notion de voisinage pour la première évaluation et de celle d'image réciproque d'un ensemble dans la deuxième évaluation. La notion de continuité d'une fonction est également sollicitée dans chaque question. Rappelons que les étudiants avaient rencontré des difficultés importantes, dans l'expérimentation, pour démarrer des exercices faisant intervenir cette dernière notion.

Dans chaque évaluation, nous trouvons peu d'erreurs dans la restitution des définitions.

Dans la première évaluation, nous trouvons des difficultés liées aux connaissances en logique des étudiants. C'est principalement la manipulation du quantificateur existentiel qui en est la source. Dans la seconde évaluation, ce ne sont que des manques de justifications qui pénalisent les étudiants. Ce type de difficulté est très lié au contrat institutionnel et n'est pas un résultat fondamental des analyses menées. Par conséquent, les étudiants qui ont échoué en juin ont donc progressé sur les difficultés liées aux connaissances en logique précédemment révélées par l'usage du symbolisme, ce qui était visé par le programme institutionnel. Les adaptations mises en jeu dans la manipulation des définitions sont aussi en général correctement réalisées dans chaque évaluation.

Dans les deux évaluations, les résultats obtenus sont en fait très bons ou très mauvais. Plus précisément, soit l'étudiant réussit très bien la question, soit il échoue complètement. Un résultat semblable a été obtenu par Robert (1981) concernant l'acquisition de la notion de convergence d'une suite de nombres réels. Cette caractérisation des résultats des étudiants nous amène à nous interroger sur l'existence d'effet de seuils dans les acquisitions des étudiants où au-delà d'un certain seuil, les connaissances des étudiants qui échouent ne sont jamais proches des connaissances à acquérir, pour reprendre les idées de Vygotsky. Nous pensons notamment à la non disponibilité des connaissances enseignées dans le cours de mathématiques générales, décrit au chapitre XI. Une autre tentative d'explication concerne les choix de gestion en classe. La gestion collective de l'enseignant sous la forme d'un jeu de questions - réponses avec les étudiants, décrite dans nos analyses précédentes, n'apporte pas d'aide constructive individuelle ni d'appui sur le repérage individuel des difficultés. Nous ne sommes donc pas en mesure de pointer finement le décrochage des étudiants qui échouent sur les tâches proposées.

4 Inférences des productions aux apprentissages des étudiants

4.1 Un état des lieux

Préalablement à l'élaboration de notre scénario d'enseignement, nous avons donné des éléments sur la conceptualisation visée (cf. chapitre VIII). Nous avons dès lors pu circonscrire les apprentissages attendus en topologie à partir des notions à introduire et des types d'exercices que les étudiants doivent pouvoir réaliser de manière autonome après l'enseignement, en prenant en compte les contraintes institutionnelles.

Nous avons expérimenté ce scénario et nous avons rendu compte des acquisitions en topologie des étudiants. Nos analyses des déroulements ne pointent pas de difficulté particulière dans la manipulation des définitions. Des difficultés sont toutefois repérées lorsqu'il s'agit de mettre en relation les notions de topologie avec des notions relevant d'un autre cadre de travail.

Ces premiers constats ne décrivent les apprentissages des étudiants que de manière très partielle et ne peuvent être mis en lien qu'avec certains aspects de la conceptualisation visée.

Pour étudier précisément le travail que les étudiants peuvent réaliser de manière autonome, nous avons analysé leurs productions aux évaluations du cours d'analyse en ce qui concerne les questions portant sur la topologie. Celles-ci nous permettent d'approcher les apprentissages en topologie effectivement réalisés par les étudiants. Nous les décrivons ci-dessous.

4.2 Productions et apprentissages des étudiants

Concernant les notions introduites dans l'enseignement de topologie, un premier apprentissage visé est l'écriture des définitions à partir d'une caractérisation présentée dans le cours (les notions y ont été définies en termes de boule et de suite).

Nous avons repéré très peu d'erreurs dans l'écriture des définitions. L'analyse des copies montre, de plus, que tous les étudiants manipulent la notion d'intérieur en termes de boule alors qu'ils choisissent tous la notion de suite pour l'adhérence d'un ensemble. Les définitions d'ouvert et de fermé sont quant à elles écrites de manière très économique, telles que vues dans le cours : un ensemble A ouvert (respectivement fermé) est tel que $A = \mathrm{int}A$ (respectivement $A = \mathrm{adh}A$). Ces caractérisations sont peu propices à commettre des erreurs de restitution.

Ces premiers éléments sont cohérents avec l'enseignement proposé où l'intérieur a en effet été très peu travaillé en termes de suite. L'adhérence a par contre été manipulée en termes de boule et de suite dans l'exposition des contenus théoriques mais les exercices proposés étaient facilités par un travail à partir des suites.

Un autre aspect de la conceptualisation attendue est la manipulation des définitions et propriétés équivalentes des notions vues en tant qu'objet, en utilisant à bon escient les connaissances mises en jeu, notamment en logique et en théorie des ensembles, et en réalisant les adaptations associées.

Chaque évaluation décrit une situation identique : soit l'étudiant résout la totalité de la tâche et réalise correctement les adaptations, avec ponctuellement quelques manques dans les justifications, soit l'étudiant est bloqué au démarrage de l'exercice. Dans le premier cas, les connaissances en logique et en théorie des ensembles sont correctement mobilisées elles aussi.

En termes de pourcentage de réussite sur ce type de question, nous avons 12 étudiants sur 23 pour la première évaluation auxquels viennent s'ajouter 6 étudiants sur 11 à la deuxième évaluation. Avec 18 étudiants au total, nous avons un taux de réussite final de 78% concernant la manipulation des définitions.

Une autre composante de la conceptualisation visée est la mise en relation des notions de topologie avec d'autres notions. L'expérimentation a révélé des difficultés, chez les étudiants, dans la manipulation de la définition de continuité d'une fonction dans le cadre de la topologie. Celles-ci sont confirmées par les évaluations dans lesquelles nous avons un taux de réussite particulièrement bas dans les questions faisant intervenir la continuité des fonctions. La manipulation même de l'écriture $\forall\varepsilon$, $\exists\delta$... semble être la source des difficultés.

Alors que la manipulation des définitions ne met pas en évidence des problèmes spécifiques aux écritures quantifiées, des difficultés sont repérées lorsque les exercices se complexifient, comme dans les exercices faisant intervenir la notion de voisinage (évaluation 1) ou celle d'image réciproque d'un ensemble (évaluation 2). Dans ce type de tâche, nous avons constaté que c'est précisément aussi la structure des écritures avec quantificateurs qui est à l'origine des problèmes. Le quantificateur existentiel reste un objet sensible. Les étudiants font peu de distinction dans la manipulation de ce quantificateur, selon qu'il apparaît dans une hypothèse ou dans ce qu'il faut démontrer.

5 Bilan

Ces premiers résultats montrent que le travail manipulatoire des notions en tant qu'objet est acquis chez environ 80% des étudiants. Des difficultés subsistent, chez 20% des étudiants, dans le registre symbolique. Elles sont principalement liées aux connaissances en logique et sans doute aussi, à la non disponibilité de connaissances anciennes.

La conceptualisation attendue est pour nous également associée au sens des notions. Pour favoriser le travail sur le sens, des leviers ont été intégrés à l'enseignement, notamment l'utilisation de différents registres d'écriture et la présence de dessins pour développer une forme d'intuition, mais également l'utilisation du levier méta par l'enseignant.

Les tâches d'introduction des notions, intégrées à l'enseignement, nous autorisent à penser que les étudiants ont acquis un sens intuitif adapté des notions. Cependant, compte tenu de la force du contrat et des contraintes en matière de manipulation du symbolisme, les questions proposées aux évaluations renseignent quant à elles très peu sur la question du sens dans les acquisitions des étudiants.

Un premier élément marquant allant dans cette direction est que pratiquement aucun étudiant ne réalise de dessin dans les évaluations. Ce registre ne semble plus du tout apparaître comme une aide au démarrage des tâches ou comme support au raisonnement. Un élément pouvant, selon nous, témoigner d'une forme de sens associée aux notions est cependant que les étudiants conjecturent des résultats corrects sur la nature topologique des ensembles traités.

En conclusion, l'expérience a certainement contribué à développer l'acquisition visée du travail manipulatoire des notions en tant qu'objet chez la majorité des étudiants. Presque 80% d'entre eux parviennent en effet à mobiliser à bon escient les connaissances du cours dans un certain nombre de tâches sur des objets tels que l'intérieur et l'adhérence d'un ensemble, les ouverts et les fermés avec la réalisation des adaptations associées à partir d'une utilisation massive du langage symbolique. En revanche, la réussite baisse à 50% lorsque les tâches se complexifient, les difficultés repérées tenant à la non disponibilité de certaines connaissances en logique. Nous ne pouvons par contre pas du tout préjuger de la disponibilité des caractères outils des notions puisque les contraintes institutionnelles ne nous ont pas permise de les analyser.

La question du sens donné aux notions reste ouverte. Cette question est de prime abord déjà difficile à aborder en toute généralité et elle l'est encore plus ici, car elle est complètement spécifique à un type d'enseignement et aux contraintes associées.

Conclusion

Conclusion

Synthèse de notre travail

C'est d'abord en tant qu'enseignante que nous nous sommes intéressée au domaine de la topologie, ne comprenant pas pourquoi son enseignement provoquait des difficultés chez les étudiants. En particulier, nous nous demandions pourquoi les questions proposées aux évaluations étaient si mal réussies alors que, de notre point de vue, il s'agissait de restituer des définitions et de les manipuler sur des exemples simples. Ce type d'exercices nous apparaissait comme une application immédiate du cours.

Ces premiers constats nous semblaient d'autant plus inquiétants que l'utilisation des définitions est un objectif à atteindre à la fin de la première année universitaire, dans notre institution. En effet, nous attendons des étudiants qu'ils manipulent les notions enseignées à partir du langage formel et du symbolisme associé et qu'ils disposent d'une certaine autonomie dans leur utilisation. Nous percevons ce type de travail comme un moyen de permettre une première incursion dans le monde des mathématiciens experts et de leurs pratiques. L'enseignement de topologie qui nous préoccupe s'inscrit bien entendu dans cette logique.

Nous avons abordé d'un point de vue didactique cette problématique, liée à notre expérience de terrain, en choisissant comme point d'entrée de nous appuyer sur le statut des notions de topologie et sur leurs spécificités. Nos premières analyses, menées dans le cadre de notre mémoire DEA, nous ont amenée à caractériser les notions de topologie en termes de notions formalisatrices, unificatrices et généralisatrices. Le manque de connaissances anciennes pour les introduire, la difficulté de leur donner du sens, la nouvelle formalisation apportant un certain degré d'unification et de généralisation, sont autant d'éléments associés aux difficultés d'enseignement des notions FUG.

Concernant les spécificités des notions, nous avons montré que les premiers exercices de manipulation des définitions, dans lesquels la formalisation devrait apporter de la simplification, s'avèrent être des tâches très difficiles pour les étudiants parce qu'elles mettent en jeu des adaptations de leurs connaissances très complexes à ce niveau d'enseignement.

Cet enseignement de topologie, que nous questionnons, propose donc un travail syntaxique sur les notions enseignées et ne permet aucun retour sur la sémantique. D'une part, le travail manipulatoire que l'institution vise dans l'enseignement n'est pas acquis chez la majorité des étudiants et d'autre part, ceux-ci ne donnent aucun sens aux notions qu'ils utilisent. Ces premiers résultats interrogent également pour la première fois les contraintes institutionnelles auxquelles notre travail de chercheur est soumis.

Dans cette recherche, nous nous sommes placée à l'intérieur de ce système de contraintes que nous avons été amenée à remettre en question de plus en plus, à tous les stades du travail. Nous avons néanmoins tenu le pari de pouvoir enrichir cet enseignement de topologie pour tenter d'atteindre les objectifs visés, tout en nous posant la question de savoir si quelque chose d'autre peut être gagné dans ce type d'enseignement.

Une partie de ce travail a été consacrée à l'élaboration d'un scénario d'enseignement qui ne diffère pas fondamentalement de l'enseignement initial en termes de contenus à enseigner mais dans lequel nous sommes venue intégrer un certain nombre de leviers et d'exercices dont nous avons fait l'hypothèse qu'ils pouvaient mener aux apprentissages attendus.

De fait, une mise en regard de notre scénario et de l'enseignement de topologie à l'origine de ce travail montre comment nous avons exploité nos marges de manœuvre. Rappelons aussi que les analyses menées dans notre recherche ont été continuellement orientées par cette idée que les notions de topologie sont des notions formalisatrices, unificatrices et généralisatrices. Prenant tout d'abord en compte les difficultés d'introduction de ce type de notions, nous avons ménagé, dans notre scénario, un itinéraire spécifique pour introduire les notions visées dans le programme institutionnel, en jouant à la fois sur les spécificités des notions et sur la conduite de la classe par l'enseignant.

En intégrant les notions de point intérieur et de point adhérent au réseau de notions à enseigner, nous avons ainsi élaboré une tâche d'introduction dans laquelle les premières notions émergent de manière autonome chez les étudiants à partir d'un travail de conjecture aidé par des dessins qu'ils réalisent seuls. La nature FUG des notions rend difficile la recherche d'une situation fondamentale dans laquelle elles apparaissent comme l'outil optimal pour résoudre le problème. Toutefois, cette tâche conserve la condition que les connaissances visées soient un élément de réponse à une question accessible aux étudiants, appuyée par l'intuition géométrique liée au vocabulaire utilisé.

Cela reste vrai pour chaque nouvelle notion, qui émane d'un lien avec une notion préalablement introduite. Le choix retenu, pour « motiver » l'introduction des notions, est de rendre visible aux étudiants un questionnement tel que l'objet à définir présente un intérêt. En effet, nous avons introduit les notions d'intérieur et d'adhérence en les faisant émerger de manière naturelle à partir des types de points en considérant les ensembles qui leur sont associés. Puis la notion d'ouvert (respectivement de fermé) est introduite en se demandant quels types d'ensembles peuvent coïncider avec leur intérieur (respectivement avec leur adhérence). Nos choix d'introductions consistent donc en un questionnement préalable à celles-ci, permettant d'éclairer d'une façon ou d'une autre les objets à définir, et renforcé par le recours au levier méta. Le dépouillement des copies des étudiants, notamment dans la tâche d'introduction, montre qu'ils développent une représentation intuitive des notions parfaitement correcte.

L'accès à la formalisation des notions est facilité par des passages à réaliser par les étudiants entre différents types de registres d'écriture. Plus précisément, nous commençons par associer les registres de la langue naturelle et du dessin pour construire une première représentation des notions que nous qualifions de représentation « pré-formelle », en ce sens qu'elle s'associe à des idées intuitives pour caractériser les notions comme « un point a de l'espace autour de lui dans l'ensemble » pour la notion de point intérieur. Le passage au registre symbolique s'appuie ensuite sur le traitement d'exemples pour montrer l'économie d'écriture de ce registre. Nous n'avons pas trouvé d'autres alternatives pour ménager ce passage.

Nous avons été obligée, dans l'élaboration de notre scénario, de nous priver de certains éléments, comme par exemple l'utilisation des notions en tant qu'outil, compte tenu des contraintes que nous ne nous sommes pas autorisée à franchir. Ce point est bien mis en évidence dans le choix des tâches proposées aux étudiants. Nos analyses a priori montrent en effet que le travail mathématique à réaliser dans l'ensemble des tâches ne met à aucun moment en jeu les notions de topologie en tant qu'outil possible dans les stratégies de résolution. Les tâches de manipulation des définitions restent dominantes, conformément aux contraintes institutionnelles. Leur réalisation en classe est associée à un rôle spécifique de l'enseignant. Celui-ci rend opérationnelles les définitions des notions de topologie à partir d'une traduction symbolique des propriétés qui les caractérisent mais en limitant toutefois l'usage ultérieur et rigoureux de ces définitions à des exercices manipulatoires dans lesquels les notions n'interviennent pas dans leur dimension outil.

Nous avons toutefois ajouté à ce type d'exercices des tâches absentes de l'enseignement initial, mettant en relation les notions de topologie avec d'autres notions. Certaines de ces tâches permettent de travailler d'autres adaptations que celles fréquemment rencontrées. Par exemple, nous pensons au changement de point de vue réalisé dans l'exercice 10 du scénario pour mettre en place une stratégie de résolution qui consiste à passer au complémentaire.

Nos analyses des déroulements en classe illustrent la possibilité de proposer le scénario prévu. Les résultats obtenus aux évaluations confirment ensuite que les objectifs institutionnels sont atteints puisque les productions des étudiants témoignent d'une diminution significative des difficultés repérées dans l'enseignement initial, du moins sur les tâches de manipulation des objets. De fait, les résultats nous autorisent à penser que la distance énorme entre l'enseignement et les productions des étudiants incriminée au début de ce travail a été réduite sur un certain nombre d'éléments. Au terme de l'expérimentation, la restitution des définitions est correcte chez la majorité des étudiants et l'organisation attendue, en termes d'adaptations, dans les exercices de manipulation des définitions et des écritures symboliques associées est réalisée correctement par 80% d'entre eux.

Ainsi, les étudiants sont, semble-t-il, parvenus à associer un certain sens aux notions, construit dans les tâches de manipulation des définitions. Ils mobilisent à bon escient les connaissances à mettre en jeu dans ce type de tâche et les aspects techniques engendrés en termes d'adaptations. Toutefois, il leur manque, à la fin de l'enseignement, une certaine disponibilité des notions dans les tâches plus complexes, qu'il est tentant d'associer à la non prise en compte de la dimension outil dans l'enseignement, du fait des contraintes.

Cette mise en regard de l'enseignement de topologie décrit initialement et de notre scénario montre de quelle manière nous avons pris en compte à la fois la nature FUG des notions et les contraintes institutionnelles. Le travail d'introduction spécifique que nous ménageons et nos choix de gestion vont dans ce sens. En effet, en ce qui concerne la nature FUG des notions, la progression des contenus choisie montre que nous commençons par minorer le caractère formalisateur des notions, vu ses difficultés, pour introduire les notions de point intérieur et de point adhérent en proposant une tâche qui s'appuie sur le dessin. Au début de l'enseignement, la formalisation des notions et le symbolisme associé sont donc remplacés par une approche plus intuitive. L'enseignant place lui-même la formalisation au premier plan en présentant un certain nombre d'exemples appuyés par de nombreux commentaires. Les aspects unificateur et généralisateur apparaissent dans l'enseignement avec l'introduction des notions d'intérieur et d'adhérence, puis d'ouvert et de fermé en ciblant les espaces $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$. Il s'agit donc d'une unification et d'une généralisation isolées, spécifiques à certains espaces.

Nous avons d'autre part complètement tenu compte, dans notre scénario, des contraintes institutionnelles puisque nous n'avons pas élargi l'enseignement à d'autres notions que celles prévues et nous n'avons pas non plus proposé d'exercices mettant en jeu les notions dans leur dimension outil.

Cette prise en compte de la difficulté de la formalisation des notions associée à leurs caractères unificateur et généralisateur et la conduite de la classe par l'enseignant ont probablement contribué à ce que les étudiants parviennent à mobiliser les connaissances mises en jeu dans les exercices de manipulation dont nous avons montré la complexité.

L'élaboration de ce scénario repose sur des choix inspirés du travail mené en amont de l'enseignement. Robert (Robert et al., 2007) parle de « relief » sur les notions à enseigner pour désigner des éléments qui peuvent donner accès à une certaine intelligibilité des contenus, à leur fonction et à leurs enjeux. Ces éléments de relief, associés aux difficultés répertoriées chez les étudiants, orientent les choix du chercheur pour aborder la question de l'introduction des notions mais également pour apprécier l'ensemble d'un scénario en termes de contenus et de gestion a priori.

En orientant nos investigations historiques et épistémologiques par cette idée que les notions de topologie sont des notions FUG, nous avons pu reconstituer des éléments qui ont enrichi notre compréhension de ces différents caractères, mettant ainsi une forme de relief sur les notions à enseigner. Certains éléments ont été pris en compte dans le scénario, d'autres n'ont pas été exploités en raison des contraintes institutionnelles.

La synthèse historique montre bien l'émergence des premières notions de topologie avec leur dimension outil, pour aborder des problèmes dans le cadre des fonctions. Cette voie n'a pas du tout été explorée dans ce travail, du fait des contraintes. Nous présentons, à la section suivante, une alternative à étudier en proposant une tâche d'introduction prenant davantage en compte des éléments issus des conclusions obtenues dans la reconstitution de la genèse et du développement historiques des notions. Nous avons par contre utilisé, dans notre scénario, l'idée de recourir à l'intuition pour travailler sur des notions abstraites, inspirée des travaux de Riemann. Celle-ci nourrit en effet l'élaboration de la tâche d'introduction des notions de points intérieur et adhérent. Les caractères unificateur et généralisateur relèvent finalement davantage de la topologie générale que de la topologie élémentaire de $\mathbb{R}^N$. Cet aspect est confirmé par l'analyse des manuels, dans laquelle on voit bien apparaître la topologie élémentaire comme une particularisation de la topologie générale tout en étant peu exemplifiée. Ce sont des résultats tels que l'existence de la borne supérieure ou le théorème de Bolzano-Weierstrass qui servent de fondements à la topologie élémentaire. Les notions d'ouvert, de voisinages et de fermés, sont introduites dans le cadre de la topologie générale et utilisées, dans les manuels, pour caractériser la notion de continuité en termes d'image réciproque d'un ensemble.

Cette partie historique du travail caractérise le type d'enseignement que nous tentons de proposer en lien avec les spécificités des notions. Nous introduisons la topologie de $\mathbb{R}^N$ en supposant qu'elle anticipe la topologie générale. Nous proposons alors un travail sur les objets sans explorer la question de savoir si une dialectique outil-objet peut être mise en place dans notre espace particulier. Les contraintes institutionnelles ne sont sans doute pas étrangères à cette vision des choses.

Une nouvelle question est quant à elle apparue concernant le caractère formalisateur des notions qui est selon nous, plus difficile à caractériser. En effet, les écrits historiques montrent l'adoption d'un langage mathématique spécifique (boule, voisinage, réunion et intersection d'ensembles...) pour caractériser les premières notions, exprimé dans le langage naturel, traduisant les choix que les mathématiciens ont faits pour rendre ces caractérisations opérationnelles dans leur cadre de travail. Il s'agit d'une formalisation des notions qui n'est pas celle décrite dans notre enseignement initial de topologie, dans lequel le langage formel est d'emblée exprimé avec le langage symbolique. La question de la nature formalisatrice des notions de topologie mérite, selon nous, d'être approfondie après ce travail.

En conclusion, nous pensons atteindre, au terme de ce travail, une forme de saturation quant à notre compréhension de l'enseignement de topologie que nous avons élaboré et expérimenté. Notre travail montre quels apprentissages sont susceptibles d'être atteints avec ce type d'enseignement. Nous pensons avoir exploité au maximum nos marges de manœuvre pour proposer le scénario. La question du sens n'a été que partiellement explorée. Pour poursuivre le travail sur cette question, nous pensons à envisager un bouleversement des contraintes institutionnelles, y compris dans le choix des contenus à enseigner.

Une réflexion doit, selon nous, être développée sur le travail mené en amont de la conception du scénario que nous avons expérimenté. Nous pensons en effet que nos analyses didactiques, menées dans cette partie du travail, fournissent des ingrédients pour penser à d'autres alternatives pour concevoir un scénario d'enseignement de la topologie, susceptibles de mener à d'autres apprentissages. Nous en présentons quelques-unes au point suivant.

Quelques alternatives

L'ensemble de Cantor

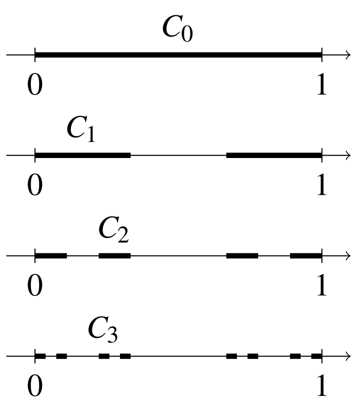
Notre première alternative ne bouleverse pas fondamentalement les contraintes institutionnelles. Elle concerne les types de tâches à proposer aux étudiants. Nous pensons qu'il existe des problèmes s'intégrant dans notre système de contraintes qui pourraient contribuer à approfondir la question du sens des notions. Il s'agit d'étudier des propriétés topologiques d'ensembles « non classiques », dont certaines vont parfois à l'encontre de l'intuition. Un exemple de tel ensemble qui est de plus, selon nous, accessible au niveau d'enseignement visé, est l'ensemble de Cantor. Il s'agit d'un ensemble fractal dont nous rappelons ci-dessous la construction.

L'étude de cet ensemble reste une piste à explorer. Dans cette perspective, nous nous contentons de pointer quelques questions qui pourraient être proposées aux étudiants mais nous ne réalisons pas d'analyse a priori ni de prévisions de gestion en classe.

Construction de l'ensemble de Cantor

On considère l'ensemble $[0,1]$, noté C_0. Dans une première étape, on retire de ce segment le tiers central et on considère la réunion des deux autres segments. On obtient un nouvel ensemble : $C_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$. On applique la même opération à l'ensemble C_1 pour construire l'ensemble $C_2 = [0,1/9] \cup [2/9,3/9] \cup [6/9,7/9] \cup [8/9,1]$. Et ainsi de suite.

Nous avons représenté ci-dessous les premières étapes de la construction.



Après n itérations, on peut remarquer que l'ensemble C_n obtenu est la réunion de 2^n intervalles fermés de longueur 3^{-n}. L'ensemble de Cantor, noté C, est défini par

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n.$$

Quelques questions à étudier

- □ L'ensemble de Cantor est-il vide ?

  On peut montrer que $0 \in C$.

- □ Caractériser les éléments de l'ensemble de Cantor.

  Comme l'ensemble est non vide, on peut se demander quelle est la forme de ses éléments. Un lien peut être établi avec la décomposition d'un nombre réel en base 3 pour faire apparaître la propriété suivante :

  > $x \in C$ si et seulement si x est un nombre réel de la forme $0, x_1 x_2 \ldots$
  > où $x_i \in \{0, 2\}$.

- □ La structure topologique peut être caractérisée par les résultats suivants :

  > L'ensemble de Cantor est fermé et d'intérieur vide.

Nous sommes bien consciente que l'intégration de ce problème dans le scénario d'une part, nécessite du temps et d'autre part, ne règle pas la question de travailler la dimension outil des notions.

La notion de connexité

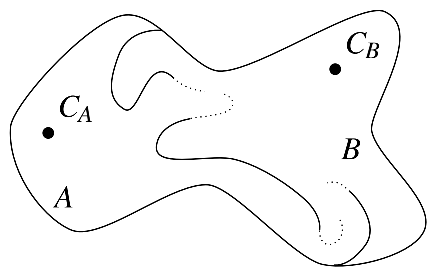
Les analyses menées dans l'étude de la transposition didactique montrent que la notion de connexité appartient au réseau de notions jouant un rôle dans le développement historique de la topologie. Nous proposons d'élargir le réseau de notions à enseigner à cette notion. Dans cette perspective, nous proposons une tâche d'introduction [5] des notions de topologie dans $\mathbb{R}^2$ mettant en jeu la notion de connexité. Nous la décrivons ci-dessous, telle qu'elle pourrait être proposée aux étudiants en dégageant les notions qui peuvent émerger à partir des interventions de l'enseignant.

On cherche à étudier le problème suivant :

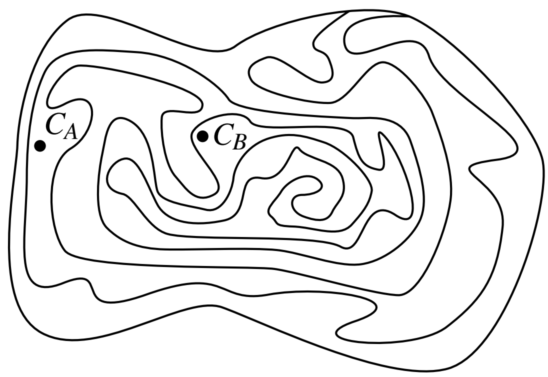
> Une île I est la réunion de deux pays A et B séparés par une frontière. Une automobile part de la capitale du pays A, notée C_A, et suit une route qui la mène à la capitale du pays B, notée C_B. Aucune des deux capitales ne se situe sur la frontière entre les deux pays. Le conducteur a dans son coffre une marchandise qu'il se propose d'importer de A vers B.
> Peut-il le faire sans la déclarer en douane, sachant que les douaniers sont sévères et visitent les coffres de toutes les voitures ?

[5] L'élaboration de la tâche a été menée en collaboration avec M. Rogalski.

On dispose d'un plan de l'île reproduit ci-dessous. Il s'agit d'une carte assez vieille où la route joignant les deux capitales est en partie effacée, ainsi que la frontière.



On peut s'attendre à ce qu'un certain nombre d'étudiants pensent que la route va forcément croiser la frontière. L'enseignant peut semer le doute en proposant une frontière très complexe et une route si tortueuse que l'existence de l'intersection des deux ne va pas de soi, comme sur le dessin ci-dessous.



La production d'une preuve mathématique de l'existence de l'intersection requiert une modélisation du problème. La route est modélisée par un chemin continu $\gamma\colon [0,1] \to I : t \mapsto \gamma(t)$. La question se pose de caractériser la frontière F entre les deux pays A et B. Une idée est de commencer par décrire un point p de $A \cup B$ qui n'est pas sur la frontière en termes de points voisins. On peut aussi faire émerger l'idée suivante : si $p \in A$ mais $p \notin F$, alors on ne peut pas trouver des points de B aussi proches de p qu'on veut. De là, la notion de point intérieur peut être introduite en termes de boule.

La réponse suivante peut apparaître pour caractériser la frontière : $F = A \cap B$. Cependant, rien n'assure que les points de la frontière sont communs : les deux pays auraient pu se répartir les points de F, par exemple pour partager les frais d'installation d'une clôture. L'appartenance d'un point p à F peut émerger sous la forme suivante : toute boule $B(p,r)$ coupe à la fois $\complement A \cap \complement B$, c'est-à-dire B et A. La notion de point adhérent peut être introduite ici.

L'enseignant peut ensuite caractériser l'intérieur (respectivement l'adhérence d'un ensemble) comme l'ensemble des points intérieur (respectivement l'ensemble des points adhérents). On peut alors répartir les points de l'île en trois ensembles disjoints, à savoir $\mathrm{int}A$, $\mathrm{int}B$ et F et y situer les capitales des deux pays.

En décrivant la route de la manière suivante : $\gamma(0) = C_A \in \mathrm{int}A$ et $\gamma(1) = C_B \in \mathrm{int}B$, on peut envisager de montrer par l'absurde que R, l'image de γ, coupe F. Le passage suivant amènera sans doute des difficultés chez les étudiants et nécessairement l'aide de l'enseignant :

> Supposons que R ne coupe pas F. On a alors $R \subseteq \mathrm{int}A \cup \mathrm{int}B$.
> On a $R = \gamma([0,1])$. Posons $G = \gamma^{-1}(\mathrm{int}A)$ et $H = \gamma^{-1}(\mathrm{int}B)$.
> Soit $p \in G$. Alors il existe $]t-\varepsilon, t+\varepsilon[\subseteq G$. Donc $p \in \mathrm{int}G$. Comme $\mathrm{int}G \subseteq G$, on en déduit que $G = \mathrm{int}G$. La notion d'ouvert peut être définie.
> L'ensemble H est également ouvert.
> Les points de R se répartissent donc entre $\mathrm{int}A$ et $\mathrm{int}B$, ceux de $[0,1]$ entre G et H. De plus, $G \cap H = \varnothing$, $0 \in G$ car $\gamma(0) = C_A$ et $1 \in H$ car $\gamma(1) = C_B$.
> L'intervalle $[0,1]$ est donc la réunion de deux ouverts G et H non vides et disjoints, ce qui est impossible.

Ce dernier résultat est admis à ce stade. Le théorème suivant peut alors être énoncé :

> Soit $I \subseteq \mathbb{R}^2$ partagé en deux sous-ensembles A et B disjoints dont les intérieurs (dans I) sont non vides, un chemin continu joignant un point de l'intérieur de A à un point de l'intérieur de B coupe la frontière $F = I \setminus (\mathrm{int}A \cup \mathrm{int}B)$.

Dans ce problème, les notions de points intérieur et adhérent, d'intérieur, d'adhérence, de frontière et d'image réciproque d'un ouvert par une application continue interviennent comme des outils pour résoudre un problème, via une modélisation de la situation dont l'évidence première peut être combattue par des dessins compliqués évoqués par l'enseignant. Il subsiste une ambiguïté sur le caractère relatif des notions par rapport à l'ensemble I.

La notion de connexité peut être définie et on peut démontrer quelques propriétés à son propos qui prolongent le travail entrepris : la connexité des intervalles $[a,b]$, des exemples de connexes dans $\mathbb{R}^2$, etc.

Ce début de la topologie propose donc une introduction des notions dans leur dimension outil, pouvant selon nous amener les étudiants à donner une autre forme de sens aux notions que celle décrite au terme de notre expérimentation.

Une question complètement ouverte

Une dernière alternative qui peut être envisagée, mais sur laquelle nous ne disposons pour le moment d'aucun élément précis, est la possibilité d'utiliser le cadre des fonctions, qui est le cadre d'émergence des notions de topologie historiquement parlant, pour concevoir une tâche dans laquelle les notions apparaissent comme un outil de résolution adapté au problème. Une voie à explorer consiste à s'inspirer des résultats établis par Cantor ou Weierstrass. Une autre alternative serait de proposer aux étudiants un travail sur un ou plusieurs textes historiques, avec cette idée sous-jacente de montrer de quelle manière les mathématiciens s'attaquent à des problèmes difficiles. Le texte sert donc d'intermédiaire, dans l'enseignement, pour tenter de réduire les difficultés d'introduction des notions.

Portée et limites du travail

Dans cette recherche, nous avons constamment interrogé la nature et les spécificités des notions de topologie. Nous pensons avoir contribué à enrichir la compréhension des caractères formalisateur, unificateur et généralisateur de ces notions. Un premier élément concerne les tâches de manipulation des définitions, proposées au début de l'enseignement, qui sont en fait très complexes en première année d'université.

Ensuite, nous pensons que des distinctions apparaissent entre les notions FUG. Ces différences sont caractérisées par la part de formalisation, d'unification et de généralisation prise dans leur enseignement. Nous pensons par exemple que les notions de topologie se distinguent de la notion de suite, identifiée comme FUG par Robert, dans le caractère formalisateur. La traduction formelle de la notion de convergence est, selon nous, davantage justifiée et motivée par les démonstrations ultérieures que dans le cadre de la topologie. Le fait que la topologie s'appuie sur des questions concernant la forme des objets et la place qu'ils occupent dans l'espace rend plus facile l'utilisation du dessin que dans le cadre des suites.

Nous pensons également que les caractères unificateur et généralisateur sont plus marqués dans la notion d'espace vectoriel, identifiée comme FUG par Dorier, que pour les notions de topologie. En algèbre linéaire, une difficulté majeure porte justement sur la perte d'information qui se produit lorsqu'on travaille dans un espace plus général. L'étude de la topologie de $\mathbb{R}^N$ ne provoque pas ce type d'unification et de généralisation.

Notre travail montre donc la nécessité de délimiter les questions à étudier pour enseigner une notion FUG, notamment par des analyses didactiques préalables, confrontant l'histoire et l'épistémologie des notions, pour en caractériser la nature formalisatrice, unificatrice et généralisatrice. Des différences émergent en effet entre les notions de l'analyse, où les difficultés relèvent de la formalisation choisie et de l'expression symbolique associée, et celles de l'algèbre, où la difficulté de la formalisation tiendrait davantage à l'introduction des structures étudiées. Les notions de l'analyse et de l'algèbre n'engendrent peut-être pas non plus les mêmes généralisations.

D'autre part, nous pensons avoir bien montré à quel point il est important de prendre conscience de l'inscription des contraintes institutionnelles dans un travail de type ingénierie. Ces contraintes ont influencé nos analyses et nos choix également, nous amenant à nous priver de certains éléments qui auraient pu mener à d'autres apprentissages chez les étudiants. Le système des contraintes auxquelles nous avons été soumise débouche sur la question d'accepter d'interroger ce système.

Malgré le poids des contraintes institutionnelles, les analyses menées tout au long du travail, dont certaines ont été peu exploitées par la suite, ont apporté des éléments nouveaux permettant d'enrichir notre compréhension des notions à enseigner et leurs spécificités. De manière beaucoup plus interne et plus institutionnelle aussi, les analyses ont révélé que les difficultés de manipulation du langage symbolique subsistent dans la réalisation de tâches complexes, notamment liées aux connaissances en logique. Elles montrent également que la construction du sens des notions est inachevée, la question du type de tâches proposées dans l'enseignement n'y étant probablement pas étrangère.

Nous pointons maintenant certaines limites méthodologiques de notre travail. La réalisation de la synthèse historique nous a confrontée à des difficultés majeures. La dispersion des sources, le peu d'écrits actuels sur le sujet sont tels que le travail de reconstitution chronologique que nous avons présenté a été particulièrement complexe et ne se veut en aucun cas exhaustif. Notre travail de sélection s'appuie avant tout sur les ouvrages auxquels nous avons eu le plus facilement accès, notamment parce qu'ils étaient écrits en français ou en anglais. Mais nous sommes bien consciente que d'autres travaux, issus de l'école italienne par exemple, pourraient enrichir cette synthèse. Nous pensons également que des éléments d'étude concernant la naissance de la théorie des ensembles pourraient compléter notre synthèse.

L'entrée par la question du statut des notions est telle que nos analyses ont été pilotées par les caractères formalisateur, unificateur et généralisateur des notions de topologie. Ce point peut lui aussi être remis en question. C'est en effet à partir de ces caractères que nous avons par exemple organisé notre synthèse historique et reconstitué l'histoire à retracer pour faire émerger des éléments en lien avec notre problématique. Toutefois, cette entrée n'exclut pas d'autres regards. D'autres alternatives auraient pu être choisies, telles que cibler le recours à l'intuition pour organiser la genèse et le développement historiques des notions à enseigner.

L'expérimentation menée présente elle aussi des limites. En réalisant nous-même l'expérience, nous avons l'avantage de travailler avec un groupe d'étudiants que nous connaissons. Toutefois, nous qualifions cette expérience de « théorème d'existence » car elle n'a été menée qu'une seule fois et qui plus est, auprès d'un groupe dont la taille est très réduite. En nous plaçant dans la double posture d'enseignant-chercheur, nous sommes contrainte à des choix de gestion dans l'expérimentation qui pourraient être pris en compte différemment s'ils étaient gérés par un autre enseignant, modifiant ainsi les déroulements prévus. Nous sommes aussi amenée à nous analyser en tant qu'enseignant, ce qui risque de produire peu de décalage conceptuel entre l'expérience prévue et l'expérience réalisée et de, peut-être, modifier le regard porté sur cette dernière. En menant l'expérimentation de notre scénario dans une autre institution que la nôtre, nous aurions probablement rencontré des difficultés à l'adapter suffisamment pour qu'il ne reste pas totalement expérimental, comme c'est souvent le cas.

En ce qui concerne les apprentissages des étudiants, rappelons que nous les avons interrogés sur la base des évaluations. Or, il est difficile, avec ce type de données, de distinguer réussite et apprentissages. Nous pallions quelque peu cette difficulté par le fait que nos analyses se centrent sur les procédures des étudiants et non pas sur de la restitution simple.

Nous pouvons enfin discuter le parti pris théorique du travail. Cependant la nécessité d'intégrer dans cette recherche les acteurs que sont l'enseignant et les étudiants, y compris jusqu'à la réalisation finale, nous semble légitimer a posteriori notre inscription dans le cadre théorique de la théorie de l'activité, même si d'autres inscriptions théoriques auraient tout aussi bien pu contribuer à éclaircir les organisations mathématiques en cause.

Pour terminer, nous associons une fois encore, tout comme au début de cette recherche, nos points de vue d'enseignant et de chercheur pour mener une réflexion plus générale sur l'enseignement supérieur. En effet, le fait de proposer nous-même le scénario à nos étudiants, dans notre institution, a eu le mérite de révéler des caractéristiques internes de l'enseignement supérieur, souvent difficiles à percevoir pour un observateur étranger. En particulier, certaines habitudes deviennent transparentes aux yeux des enseignants, y compris nous même. Nous pensons aux habitudes sur l'écriture mathématique exigée dans les productions de nos étudiants, que nous n'avons pas cessé de mettre en question au fil de cette recherche et qui nous interrogent encore aujourd'hui. L'importance de ces habitudes et des contraintes institutionnelles ne nous auraient pas été révélées sans ces analyses fines des déroulements en classe, nous amenant ainsi à déduire des éléments sur les pratiques des enseignants du supérieur : à force, les habitudes institutionnelles ne sont plus questionnées, alors que les acquisitions des étudiants se modifient. Il est alors tentant d'être conduit par le fait que les étudiants réussissent dans ce qu'on laisse à leur charge, même si ce faisant on perd des qualités mathématiques de ce qui leur est transmis. C'est seulement lorsque les échecs deviennent cuisants qu'on s'en préoccupe, avec cette tendance à supprimer éventuellement certains contenus à enseigner, ou à reculer, considérant souvent que « c'est la faute des étudiants », alors que c'est peut-être davantage un équilibre entre leurs connaissances, les types de problèmes, le niveau de rigueur attendu qui devrait être remis en chantier, avec l'aide de réflexions didactiques sur les notions et leur apprentissage, comme l'illustre cette recherche. Nos analyses didactiques nous ont en effet permis de faire la lumière sur les choix que nous faisions en tant qu'enseignante, avant de démarrer cette recherche, et de mieux mettre en perspective d'autres possibilités d'enseignements, en acceptant de bouleverser l'équilibre actuel.

Perspectives

En acceptant, au terme de ce travail, d'interroger les contraintes institutionnelles, de les modifier aussi, nous pensons n'avoir touché que du bout des doigts l'enseignement de la topologie car notre étude mène à de nouvelles questions à explorer.

Nous avons à ce titre évoqué des alternatives internes et externes au système d'enseignement. Celles-ci doivent être investiguées.

La question, plus générale, du rapport entre le formalisme et le symbolisme, qui est apparue à la fin de ce travail, n'a été qu'ébauchée.

Ces questions ouvrent la voie à de nouvelles expériences à mener, dans lesquelles le travail déjà réalisé pourra certainement influencer les choix du chercheur dans d'autres directions que celles retenues ici. La possibilité de proposer un scénario d'enseignement dans une autre institution que la nôtre est aussi une perspective à développer.

Annexe A

Programme du cours d'analyse

Les notes de cours sont disponibles à l'adresse :
`http://math.umh.ac.be/an/fr/enseignement/analyse/`

▶▶ Limite et continuité

- □ Convergence des suites de nombres réels
  - Définition et propriétés
  - Limites d'inégalités
  - Sous-suites
- □ Limites au sens large
- □ Suites de Cauchy
- □ Supremum, infimum
- □ Suites monotones
- □ Normes dans $\mathbb{R}^N$
- □ Convergence des suites vectorielles
- □ Limites de fonctions et continuité
  - Limites
  - Continuité
  - Théorème des valeurs intermédiaires
- □ Notions de topologie
  - Intérieur, adhérence, ouvert, fermé
  - Union et intersection

▶▶ Compacité

- □ Définition
- □ Définitions équivalentes
- □ Théorème des bornes atteintes

►► Dérivée des fonctions d'une variable

- □ Définitions et interprétations
- □ Propriétés
- □ Théorèmes de Rolle et de la moyenne
- □ Règle de L'Hospital
- □ Dérivées d'ordre supérieur

►► Développement de Taylor

- □ Définitions
- □ Formule du reste

►► Equations différentielles ordinaires linéaires

- □ Définitions
- □ EDO linéaires à coefficients constants

Annexe B

Symboles mathématiques et notions utilisés dans le travail

$\|\cdot\|$	norme sur $\mathbb{R}^N$
$\lvert\cdot\rvert_2$	norme associée à la distance euclidienne
$\lvert\cdot\rvert_1$	norme associée à la taxi-distance
$\lvert\cdot\rvert_\infty$	norme associée à la distance du maximum
$\mathbb{R}^N$	espace euclidien à N dimensions
$\subseteq$	est inclus dans
$\neg P$	négation de la propriété P
$\operatorname{int} A$, $\mathring{A}$	intérieur de A
$\operatorname{adh} A$, $\overline{A}$	adhérence de A
$\operatorname{Fr} A$	frontière de A
$\complement A$	complémentaire de A
$B_{\|\cdot\|}(x,r)$	boule ouverte de centre $x \in \mathbb{R}^N$ et de rayon $r > 0$ pour la norme $\|\cdot\|$
$B_{\|\cdot\|}[x,r]$	boule fermée de centre $x \in \mathbb{R}^N$ et de rayon $r > 0$ pour la norme $\|\cdot\|$
$\lceil x \rceil$	partie entière supérieure de x (le plus petit entier supérieur ou égal à x)

Théorème 15 (Théorème de la convergence dominée)**.** *Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels et $a \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - a| \leqslant y_n$.*
Si $y_n \to 0$, alors $x_n \to a$.

Théorème 16 (Théorème des bornes atteintes)**.** *Soit $C \subseteq \mathbb{R}^N$ un compact non-vide et $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f atteint ses bornes : il existe $x_{\min}, x_{\max} \in C$ tels que, pour tout $x \in C$, on a $f(x_{\min}) \leqslant f(x) \leqslant f(x_{\max})$.*

Définition 17. Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On dit que a est le supremum de A et on note $a = \sup A$, si a vérifie les propriétés suivantes :

① $\forall x \in A,\ x \leqslant A$,

② $\exists (x_n) \subseteq A,\ x_n \to a$.

La propriété ② est équivalente à $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ a - \varepsilon < x \leqslant a$.

Définition 18. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \operatorname{Dom} f$. On dit que f est continue en a si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \operatorname{Dom} f,\ |x - a| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$.

Proposition 19. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \operatorname{Dom} f$. Alors f est continue en a si et seulement si $\forall (x_n) \subseteq \operatorname{Dom} f,\ x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$.

Annexe C

Solutions des tâches proposées aux étudiants

1 Tâches d'introduction

1.1 Tâche d'introduction 1

Feuille 1

Voici 4 propriétés mettant en relation un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^2$ et un point $p \in \mathbb{R}^2$:

① A contient une boule ouverte de centre p.

② A contient toutes les boules ouvertes de centre p.

③ Il y a une boule ouverte de centre p qui intersecte A.

④ Toutes les boules ouvertes de centre p intersectent A.

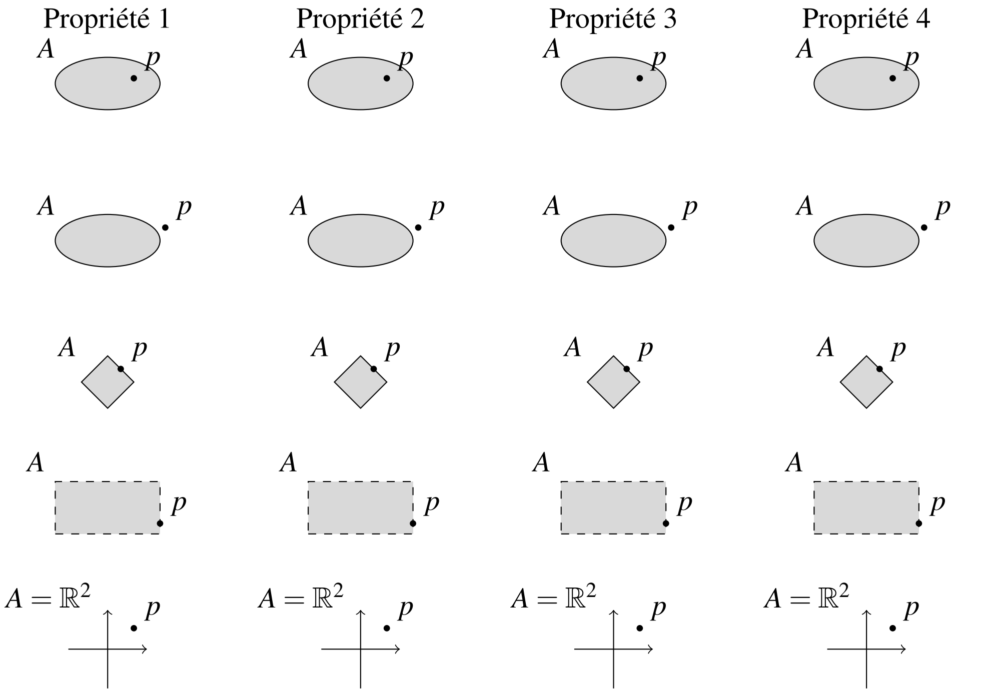
Dans chaque situation proposée sur la feuille 2, dites

- □ si p est un point de A ou non,
- □ si p et A vérifient ou non les propriétés ①, ②, ③, ④. Pour chaque propriété, justifiez votre réponse sur le dessin.

Selon vous, quelle est la propriété qui traduit l'idée que

- □ p est un point intérieur à A : **propriété** ①
- □ p est un point adhérent à A : **propriété** ④

Feuille 2



Feuille 3

Pour chacune des propositions suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.

- ☐ Vrai : ☐ Faux : ☐ Si p est un point intérieur à A, alors p est un point adhérent à A.
- ☐ Vrai : ☐ Faux : ☐ Si p est un point adhérent à A, alors p est un point intérieur à A.
- ☐ Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $p \in A$, alors p est un point intérieur à A.
- ☐ Vrai : ☐ Faux : ☐ Si $p \in A$, alors p est un point adhérent à A.
- ☐ Vrai : ☐ Faux : ☐ Si p est intérieur à A, alors $p \in A$.
- ☐ Vrai : ☐ Faux : ☐ Si p est adhérent à A, alors $p \in A$.

La solution est donnée dans le scénario (cf. chapitre IX).

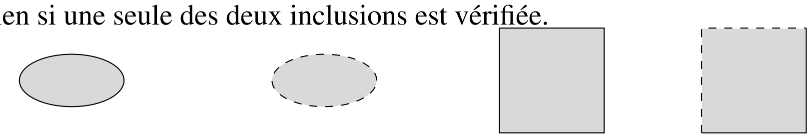
1.2 Tâche d'introduction 2

On cherche à comparer, pour deux ensembles $A, B \subseteq \mathbb{R}^N$, les ensembles :

① $\operatorname{int}(A \cap B)$ avec $\operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$,

② $\operatorname{int}(A \cup B)$ avec $\operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$.

Pour vous aider, vous disposez des quatre ensembles ci-dessous. Vous pouvez les associer deux à deux pour conjecturer si les ensembles donnés en ① et ② sont égaux ou bien si une seule des deux inclusions est vérifiée.



En procédant de la même manière, comparez maintenant les ensembles :

① $\operatorname{adh}(A \cap B)$ avec $\operatorname{adh} A \cap \operatorname{adh} B$,

② $\operatorname{adh}(A \cup B)$ avec $\operatorname{adh} A \cup \operatorname{adh} B$.

La réalisation de dessins et la démonstration des propriétés sont données dans le scénario (cf. chapitre IX).

2 Exercices

2.1 Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, on donne un point p et un ensemble A. Dites si le point p est intérieur à A ou non, est adhérent à A ou non. Justifiez votre réponse.

① $p = 1/3,\ A = [0,1]$

② $p = -\sqrt{2},\ A = [-2,1]$

③ $p = 1,\ A = [0,1[$

④ $p = 1/2,\ A = \{1/n : n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}\}$

⑤ $p = 0,\ A = \{1/n : n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}\}$

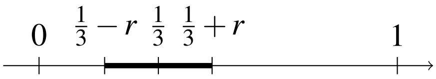
⑥ $p = (2,4),\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$

⑦ pour $x, y \in \mathbb{R},\ p = (x, y - r/3),\ A = B_{|.|_\infty}\big((x,y), r\big)$

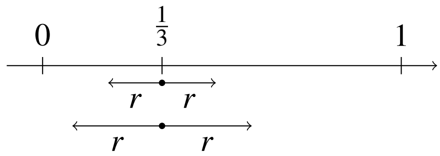
① $p = 1/3$ et $A = [0, 1]$

> Dans cet exemple, la solution est écrite en utilisant les registres d'écriture disponibles à ce stade de l'enseignement, c'est-à-dire les registres du dessin et de la langue naturelle apparus dans la tâche d'introduction 1.

Les dessins suivants aident à conjecturer que $1/3$ est à la fois un point intérieur et adhérent à l'ensemble $[0, 1]$.



$1/3$ est un point intérieur



$1/3$ est un point adhérent

$1/3$ est un point intérieur car il existe une boule de centre $1/3$ contenue dans l'ensemble $[0, 1]$. En effet, il suffit de considérer la boule de centre $1/3$ et de rayon $1/6$, c'est-à-dire l'intervalle $]1/6, 1/2[$. On a bien $]1/6, 1/2[\subseteq [0, 1]$. Il existe d'autres possibilités pour le choix du rayon.

p est un point adhérent car toutes les boules de centre $1/3$ intersectent l'ensemble $[0, 1]$. Autrement dit, quel que soit $r > 0$, on a toujours $B(1/3, r) \cap [0, 1] \neq \varnothing$. En effet, $1/3 \in B(1/3, r)$ car c'est le centre de la boule et $1/3 \in [0, 1]$.

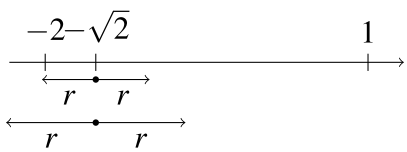
On peut aussi justifier que p est un point adhérent à l'ensemble car p est un point de l'ensemble, la propriété « si p appartient à A, alors p est adhérent à A » ayant été établie dans la tâche d'introduction 1.

> À cette étape, les définitions sont écrites à partir des symboles mathématiques. Ils sont alors utilisés dans la rédaction des solutions.

② $p = -\sqrt{2}$ et $A = [-2, 1]$

Les dessins suivants aident à conjecturer que $-\sqrt{2}$ est à la fois un point intérieur et adhérent à l'ensemble $[-2, 1]$.

$-\sqrt{2}$ est un point intérieur



$-\sqrt{2}$ est un point adhérent

p est un point intérieur car on a : $\exists r > 0,\ B(-\sqrt{2}, r) \subseteq [-2, 1]$. En effet, prenons $r = 1/1000$. Alors, $B(-\sqrt{2}, 1/1000) =]-\sqrt{2} - 1/1000, -\sqrt{2} + 1000[$

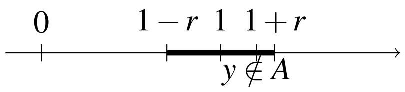
car la boule ouverte de centre a et de rayon r, dans $\mathbb{R}$, est l'intervalle $]a-r,a+r[$. on a bien $B(-\sqrt{2},1/1000) \subseteq [-2,1]$.

p est un point adhérent car on a : $\forall r > 0,\ B(-\sqrt{2},r) \cap [-2,1] \neq \varnothing$. En effet, soit $r > 0$. On peut trouver un réel y tel que $y \in B(-\sqrt{2},r)$ et $y \in [-2,1]$. En effet, il suffit de prendre $y = -\sqrt{2}$. On a bien $-\sqrt{2} \in B(-\sqrt{2},r)$ car c'est le centre de la boule et $-\sqrt{2} \in [-2,1]$. Il y a d'autres possibilités pour le choix de y.

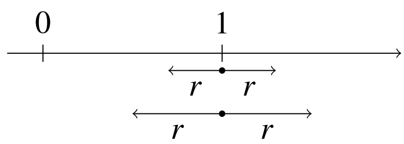
On peut expliquer que p est un point adhérent car p est un élément de l'ensemble et on a vu la propriété : « si un point appartient à l'ensemble alors il est adhérent à l'ensemble ».

③ $p = 1$ et $A = [0,1[$

Les dessins suivants peuvent aider à conjecturer que p n'est pas un point intérieur mais qu'il est adhérent à l'ensemble.



1 n'est pas un point intérieur



1 est un point adhérent

p n'est pas un point intérieur car on a $\forall r > 0,\ B(1,r) \nsubseteq [0,1[$. En effet, soit $r > 0$. On peut trouver un réel y tel que $y \in B(1,r)$ et $y \notin [0,1[$. Il suffit de prendre $y = 1$.

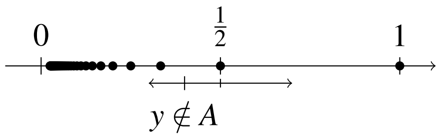
p est un point adhérent car on a $\forall r > 0,\ B(1,r) \cap [0,1[\neq \varnothing$. En effet, soit $r > 0$. Montrons qu'il existe un réel y tel que $y \in B(1,r)$ et $y \in [0,1[$.

Une première possibilité est de discuter sur r. Si $0 < r \leqslant 2$, alors prenons $y = 1-r/2$. On sait que $B(1,r) =]1-r,1+r[$. On a donc bien $y \in]1-r,1+r[$. En effet, $1-r < 1-r/2$ car comme $r > 0$, $r/2 < r$, et $1-r/2 < 1+r$. On a aussi $y \in [0,1[$ car d'une part, comme $r/2 \leqslant 1$, on a $1-r/2 \geqslant 1-1 = 0$ et d'autre part, comme $r > 0$, on a $1-r/2 < 1$. Si $r > 2$ alors tous les points de $[0,1[$ appartiennent aussi à $B(1,r)$. N'importe quel point de l'intervalle convient alors pour y.

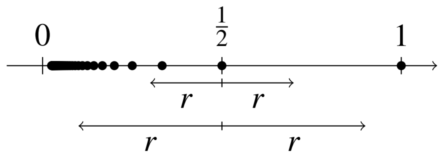
Une autre possibilité consiste à prendre $y = \max\{1-r/2,0\}$. Si $y = 1-r/2$, on a tout d'abord que $y \in B(1,r)$ par définition de la boule. Et on a aussi $y \in [0,1[$ car d'une part $y \geqslant 0$ par définition du maximum et d'autre part, comme $r > 0$, on a $1-r/2 < 1$. Donc $y \in B(1,r) \cap [0,1[$. Si $y = 0$, alors $y \in B(1,r)$ car, comme $r > 0$, on a $1-r < 1-r/2 \leqslant 0$ par définition du maximum. Comme $0 < 1+r$, on a bien que $y \in B(1,r)$. De plus, $0 \in [0,1[$.

④ $p = 1/2$ et $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$

Les dessins suivants peuvent aider à conjecturer que p n'est pas un point intérieur mais qu'il est un point adhérent à l'ensemble.



1/2 n'est pas un point intérieur



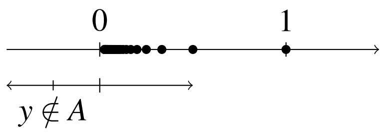
1/2 est un point adhérent

p n'est pas un point intérieur car $\forall r > 0,\ B(1/2,r) \not\subseteq A$. En effet, soit $r > 0$. Montrons qu'on peut trouver un réel y tel que $y \in B(1/2,r)$ et $y \notin A$. Si $r = 1$, alors $B(1/2,r) =]-1/2,3/2[$ par définition d'une boule dans $\mathbb{R}$. Prenons alors $y = 3/4$. On a $y \in B(1/2,1)$ et $y \notin A$ car y n'est pas de la forme $1/n$, avec $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Si $r \neq 1$, alors prenons $y = 1/2 + r/2$. on a $y \in B(1/2,r)$ car, comme $r > 0$, $1/2 - r < 1/2 + r/2 < 1/2 + r$. Mais $1/2 + r/2 \notin A$ car $1/2 + r/2 = (1+r)/2$ n'est pas de la forme $1/n$, avec $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Il est possible de discuter sur d'autres valeurs pour r.

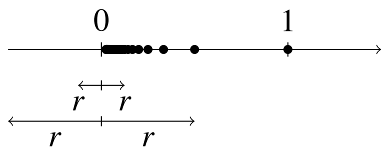
p est adhérent car on a $\forall r > 0,\ B(1/2,r) \cap A \neq \varnothing$. Soit $r > 0$, on a $1/2 \in B(1/2,r)$ car c'est le centre de la boule et $1/2 \in A$, en prenant $n = 2$.

⑤ $p = 0$ et $A = \left\{1/n : n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\right\}$

Les dessins suivants amènent à penser que 0 n'est pas un point intérieur mais qu'il est un point adhérent à l'ensemble.



0 n'est pas un point intérieur



0 est un point adhérent

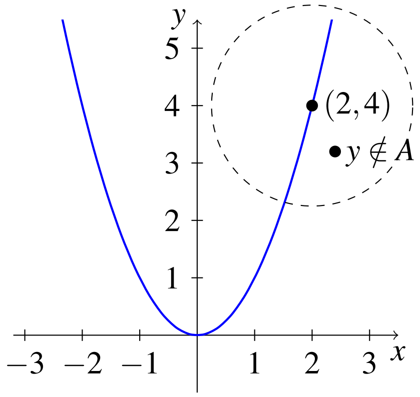
p n'est pas un point intérieur car $\forall r > 0,\ B(0,r) \not\subseteq A$. En effet, montrons qu'il existe un réel y tel que $y \in B(0,r)$ et $y \notin A$. Prenons $y = 0$. On a bien $0 \in B(0,r)$ car c'est le centre de la boule mais $y \notin A$ car 0 ne peut pas s'écrire sous la forme $1/n$, avec $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

Une autre possibilité consiste à dire que si $p \notin A$, alors p n'est pas intérieur à A. C'est la contraposée de la propriété « si p est un point intérieur à A, alors p est un point de A », établie dans la tâche d'introduction 1.

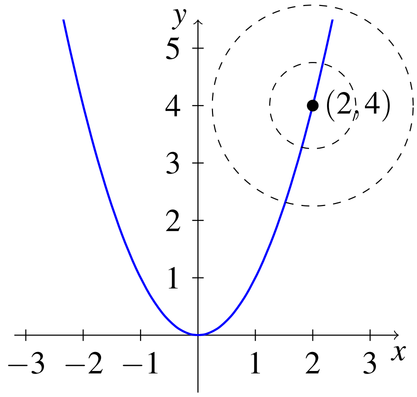
p est un point adhérent car $\forall r > 0,\ B(0,r) \cap A \neq \varnothing$. En effet, soit $r > 0$. Montrons qu'il existe un réel y tel que $y \in B(0,r)$ et $y \in A$. Prenons $y = \dfrac{1}{\lceil 1/r \rceil + 1}$. On a $y \in B(0,r) =]-r,r[$ car d'une part $y > 0 > -r$ et d'autre part $y < \frac{1}{\lceil 1/r \rceil} \leqslant \frac{1}{1/r} = r$. Et $y \in A$ car y est de la forme $1/n$ avec $n = \lceil 1/r \rceil + 1$.

⑥ $p = (2,4)$ et $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = x^2\}$

Les dessins suivants aident à conjecturer que p n'est pas un point intérieur mais qu'il est un point adhérent à l'ensemble.



$(2,4)$ n'est pas un point intérieur



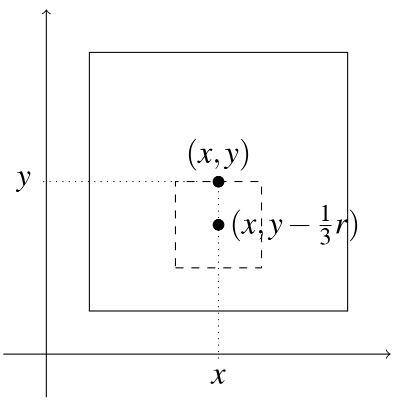
$(2,4)$ est un point adhérent

p n'est pas un point intérieur à A car $\forall r>0, B_{|.|_2}\big((2,4),r\big) \nsubseteq A$. On peut choisir de travailler avec $|.|_2$ car toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^N$. Soit $r>0$. Prenons $(x,y)=(2,4-r/2)$. On a bien $(x,y)\in B_{|.|_2}\big((2,4),r\big)$ car $|(2,4)-(x,y)|_2 = |(0,r/2)|_2 = r/2 < r$. Mais $(x,y)\notin A$ car (x,y) ne vérifie pas la relation $y=x^2$ puisque $2^2=4$ et $4\neq 4-r/2$ car $r>0$.

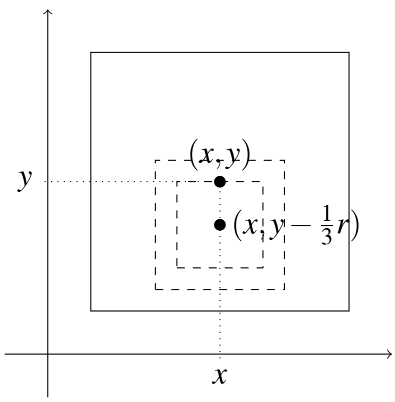
p est un point adhérent à A car $\forall r>0,\ B\big((2,4),r\big)\cap A \neq \varnothing$. En effet, soit $r>0$. Prenons $(x,y)=(2,4)$. On a bien $(2,4)\in B\big((2,4),r\big)$ car c'est le centre de la boule et $(2,4)\in A$ car $2^2=4$.

⑦ $p=(x,y-r/3)$ et $A=B_{|.|_\infty}\big((x,y),r\big)$

Les dessins suivants aident à conjecturer que p est un point intérieur et adhérent à l'ensemble.



p est un point intérieur



p est un point adhérent

p est un point intérieur car $\exists r'>0,\ B_{|.|_\infty}\big((x,y-r/3),r'\big)\subseteq A$. Prenons $r'=r/3$. Soit $(x',y')\in B_{|.|_\infty}\big((x,y-r/3),r/3\big)$. On a donc $|(x,y-r/3)-(x',y')|_\infty < r/3$, c'est-à-dire $|(x-x',y-r/3-y')|_\infty < r/3$. Donc, par définition de $|.|_\infty$, on a $|x-x'|<r/3$ et $|y-r/3-y'|<r/3$. Montrons que $(x',y')\in A$, ce qui revient à montrer $|(x-x',y-y')|_\infty < r$, ou encore $|x-x'|<r$ et $|y-y'|<r$. Or, on a $|x-x'|<r/3<r$ et on a $|y-y'| = |y-y'-r/3+r/3| < |y-y'-r/3|+r/3 < 2r/3 < r$.

p est un point adhérent car $\forall r' > 0,\ B_{|.|_\infty}(p,r') \cap A \neq \varnothing$. En effet, soit $r' > 0$. Montrons qu'il existe $(a,b) \in B(p,r')$ tel que $(a,b) \in A$. Prenons $(a,b) = (x,y-r/3)$. on a bien $(x,y-r/3) \in B(p,r')$ car c'est le centre de la boule et on a $(a,b) \in A$ car $|(x,y)-(x,y-r/3)|_\infty = |(0,r/3)|_\infty = r/3 < r$.

2.2 Exercice 2

> En utilisant la propriété précédente, montrez que $\mathrm{adh}]-2,5] = [-2,5]$.

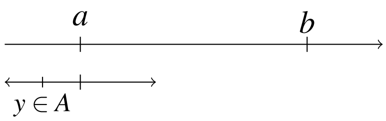
On a $\mathrm{adh}]-2,5] \subseteq [-2,5]$. En effet, soit $x \in \mathrm{adh}]-2,5]$. Par définition de l'adhérence, il existe donc une suite $(x_n) \subseteq\ ]-2,5]$ telle que $x_n \to x$. On a donc $\forall n,\ -2 < x_n \leqslant 5$. En passant à la limite, l'inégalité stricte devient large et on a $-2 \leqslant \lim x_n \leqslant 5$, c'est-à-dire $-2 \leqslant x \leqslant 5$. Donc $x \in [-2,5]$.

On a aussi $[-2,5] \subseteq \mathrm{adh}]-2,5]$. En effet, on a déjà $]-2,5] \subseteq \mathrm{adh}]-2,5]$ par la propriété qui dit qu'un ensemble est toujours contenu dans son adhérence. Il reste donc à montrer que $-2 \in \mathrm{adh}]-2,5]$. En effet, prenons la suite $(x_n) = (-2+1/n)$. On a bien $(x_n) \subseteq\ ]-2,5]$ et $x_n \to -2$.

2.3 Exercice 3

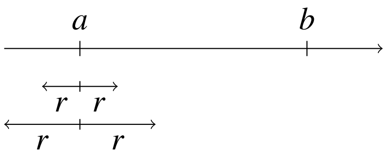
> Soient $a,b \in \mathbb{R}$. Les ensembles $[a,b]$, $]a,b[$, $]a,b]$ sont-ils ouverts ? Fermés ?

① Le dessin suivant aide à conjecturer que $[a,b]$ n'est pas un ensemble ouvert car a par exemple n'est pas un point intérieur à l'ensemble.



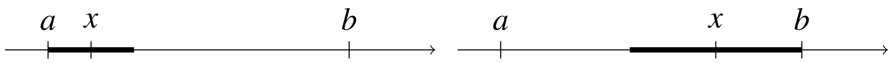
Montrons que $[a,b] \nsubseteq \mathrm{int}[a,b]$. Prenons $x = a$. On a $x \in [a,b]$. Mais $x \notin \mathrm{int}[a,b]$, c'est-à-dire $\forall r > 0,\ B(a,r) \nsubseteq [a,b]$. En effet, soit $r > 0$. Prenons $y = a - r/2$. On a bien $y \in B(a,r)$ car, comme $r > 0$, on a $a - r < a - r/2 < a + r$ et $a - r/2 < a$. Cette dernière inégalité montre que $a - r/2 \notin [a,b]$.

② Le dessin suivant illustre que a est un point adhérent à $[a,b]$. Il peut aider à conjecturer qu'il en va de même pour tous les éléments de l'intervalle.



Montrons que $[a,b] = \mathrm{adh}[a,b]$. On a toujours $[a,b] \subseteq \mathrm{adh}[a,b]$, par une propriété vue dans le cours. Soit $x \in \mathrm{adh}[a,b]$. Alors, il existe $(x_n) \subseteq [a,b]$, $x_n \to x$. On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ a \leqslant x_n \leqslant b$. En passant à la limite, on a $a \leqslant x \leqslant b$. Autrement dit, $x \in [a,b]$, ce qui prouve $\mathrm{adh}[a,b] \subseteq [a,b]$.

③ $]a,b[$ est un ensemble ouvert. Montrons que $]a,b[= \text{int}]a,b[$. On a toujours $\text{int}]a,b[\subseteq]a,b[$ par une propriété vue dans le cours. Soit $x \in]a,b[$. Le dessin suivant peut aider à trouver une valeur convenable pour r.



Prenons $r = \min\{x-a, b-x\}$. On a alors $B(x,r) \subseteq]a,b[$. En effet, soit $y \in B(x,r)$, c'est-à-dire $x-r < y < x+r$. Si $r = x-a$, on a d'abord, en remplaçant r, $a < y$. Et $y < x+r < x+b-x = b$ où la dernière inégalité découle de la définition de minimum. Si $r = b-x$, on a d'abord, par définition du minimum, $y > x-r > x-a-x = a$ et en remplaçant r, on obtient $y < b$. Dans les deux cas, on en déduit que $y \in]a,b[$. On a donc montré que $x \in \text{int}]a,b[$, ce qui prouve $]a,b[\subseteq \text{int}]a,b[$.

④ $]a,b[$ n'est pas un ensemble fermé. Les dessins précédents peuvent aider à conjecturer auq a n'est pas un point adhérent. Montrons $\text{adh}]a,b[\not\subseteq]a,b[$. Prenons $x = a$. On a $a \in \text{adh}]a,b[$. En effet, prenons $(x_n) = \left(a + \dfrac{b-a}{n}\right)$. On a $(x_n) \subseteq]a,b[$ et $x_n \to a$. Mais $a \notin]a,b[$.

⑤ $]a,b]$ n'est ni un ensemble ouvert, ni un ensemble fermé. On montre que $\text{int}]a,b] \neq]a,b]$ par un raisonnement semblable à celui développé dans ① en prenant $x = b$ et $y = b + r/2$. On montre que $\text{adh}]a,b] \neq]a,b]$ par un raisonnement semblable à celui développé dans ④.

2.4 Exercice 4

> Peut-on trouver un ensemble qui soit à la fois ouvert et fermé ?

Il s'agit de savoir si on peut trouver un ensemble qui coïncide à la fois avec son intérieur et son adhérence. Autrement dit, cet ensemble doit posséder simultanément les deux caractéristiques suivantes :

- chaque point de l'ensemble doit avoir un peu de place autour de lui dans l'ensemble,
- chaque boule centrée en un point de l'espace doit avoir une intersection non vide avec l'ensemble.

$\mathbb{R}^N$ possède ces caractéristiques et, par passage au complémentaire, l'ensemble vide aussi.

Le fait que ce soit les deux seuls ensembles à être à la fois ouverts et fermés est admis. Une preuve sera proposée avec un statut de complément au cours pour les étudiants qui souhaiteraient des détails.

2.5 Exercice 5

Les ensembles suivants sont-ils ouverts ? Fermés ? Justifiez votre réponse.

① $[\pi, +\infty[$,

② $]-\infty, -2[$,

③ $\{3\}$,

④ $\{1/n : n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$,

⑤ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 3x+2y=6\}$.

Pour les ensembles ouverts, nous n'envisageons pas de solution s'appuyant sur la caractérisation en termes de suite.

Des dessins semblables à ceux présentés dans les solutions précédentes peuvent aider à conjecturer les résultats. Ces dessins ont pour objectif de détecter l'ensemble des points intérieurs (respectivement l'ensemble des points adhérents) à l'ensemble lorsqu'on étudie si celui-ci est ouvert (respectivement fermé).

① $[\pi, +\infty[$ n'est pas ouvert car $[\pi, +\infty[\neq \mathrm{int}[\pi, +\infty[$.

Nous allons montrer que $[\pi, +\infty[\nsubseteq \mathrm{int}[\pi, +\infty[$. Prenons $x = \pi$. Alors, $\forall r > 0,\ B(x,r) \nsubseteq [\pi, +\infty[$. Soit $r > 0$. Prenons $y = \pi - r/2$. Alors $y \in B(\pi, r)$ mais $y \notin [\pi, +\infty[$ car, comme $r > 0,\ y = \pi - r/2 < \pi$. Donc π n'est pas un point intérieur à $[\pi, +\infty[$.

$[\pi, +\infty[$ est fermé car $[\pi, +\infty[= \mathrm{adh}[\pi, +\infty[$.

On a toujours $[\pi, +\infty[\subseteq \mathrm{adh}[\pi, +\infty[$ par une propriété vue dans le cours. Montrons que $\mathrm{adh}[\pi, +\infty[\subseteq [\pi, +\infty[$.

En termes de suites : Soit $x \in \mathrm{adh}[\pi, +\infty[$, c'est-à-dire $\exists (x_n) \subseteq [\pi, +\infty[,\ x_n \to x$. On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \geqslant \pi$. En passant à la limite, on en déduit $x \geqslant \pi$. Autrement dit, $x \in [\pi, +\infty[$.

En termes de boules : Soit $x \in \mathrm{adh}[\pi, +\infty[$, c'est-à-dire $\forall r > 0,\ B(x,r) \cap [\pi, +\infty[\neq \varnothing$. En prenant $r = 1/n$ où $n \geqslant 1$, on construit une suite (x_n) telle que $\forall n \geqslant 1,\ x_n \in B(x, 1/n)$ et $x_n \geqslant \pi$. La première information implique $x_n \to x$ et en passant à la limite dans l'inégalité, on obtient $x \geqslant \pi$.

② $]-\infty, -2[$ est un ensemble ouvert car $]-\infty, -2[= \mathrm{int}]-\infty, -2[$.

On a $\mathrm{int}]-\infty, -2[\subseteq]-\infty, -2[$. Montrons que $]-\infty, -2[\subseteq \mathrm{int}]-\infty, -2[$. Soit $x \in]-\infty, -2[$. Il faut prouver : $\exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq]-\infty, -2[$. Prenons $r = -2 - x$. On a bien $r > 0$ car $x < -2$. Soit $y \in B(x,r)$, c'est-à-dire $x - r < y < x + r$. Montrons que $y < -2$. En effet, on a : $y < x + r = x - 2 - x = -2$. Donc, par transitivité, on a bien $y < -2$.

$]-\infty, -2[$ n'est pas un ensemble fermé car il n'est pas égal à son adhérence. Montrons que $\mathrm{adh}]-\infty, -2[\nsubseteq]-\infty, -2[$. Prenons $x = -2$. Clairement, $-2 \notin]-\infty, -2[$. Nous allons montrer que $-2 \in \mathrm{adh}]-\infty, -2[$.

En termes de suites : Prenons $(x_n) = (-2 - 1/n)$. On a bien $(x_n) \subseteq]-\infty, -2[$ et $x_n \to -2$.

EN TERMES DE BOULES : Soit $r > 0$. Montrons que $B(-2,r) \cap]-\infty,-2[\neq \varnothing$. Prenons $y = -2 - r/2$. On a bien $y \in B(-2,r)$ et $y \in]-\infty,-2[$.

③ $\{3\}$ n'est pas ouvert car 3 n'est pas un point intérieur à $\{3\}$ puisqu'on a clairement $\forall r > 0,\ B(3,r) \nsubseteq \{3\}$.

$\{3\}$ est fermé car 3 est un point adhérent à $\{3\}$.

④ Posons $E = \{1/n : n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$.

E n'est pas ouvert car il n'est pas égal à son intérieur. En effet, 1 n'est pas un point intérieur à l'ensemble. Montrons que $\forall r > 0,\ B(1,r) \nsubseteq E$. Soit $r > 0$. Prenons $y = 1 + r/2$. On a $y \in B(1,r)$. Mais $y \notin E$ puisque $y > 1$ car $r > 0$ et $\forall n \geqslant 1,\ 1/n \leqslant 1$.

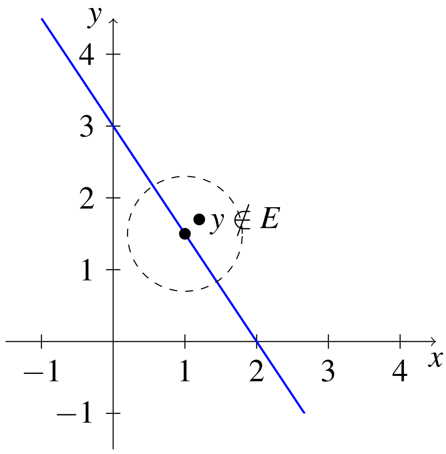
E n'est pas fermé car il n'est pas égal à son adhérence. En effet, 0 est un point adhérent à E mais $0 \notin E$.

EN TERMES DE SUITES : Prenons $(x_n) = (1/n)$. On a bien $(x_n) \subseteq E$ et $1/n \to 0$.

EN TERMES DE BOULES : Cela a été fait à l'exercice 1.

⑤ Posons $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 3x + 2y = 6\}$.

Le dessin suivant peut aider à conjecturer qu'il y a au moins un point de E qui n'est pas intérieur à E.



E n'est pas ouvert car $E \neq \operatorname{int} E$. Montrons que $E \nsubseteq \operatorname{int} E$. Prenons $(x,y) = (2,0)$. on a bien $(x,y) \in E$ car $3.2 + 2.0 = 6$. Mais $(2,0) \notin \operatorname{int} E$, c'est-à-dire $\forall r > 0,\ B_{|.|_2}\big((2,0),r\big) \nsubseteq E$. Soit $r > 0$. Prenons $(x',y') = (2 + r/2, 0)$. on a $(x',y') \in B_{|.|_2}\big((2,0),r\big)$ car $|(x',y') - (2,0)|_2 = r/2 < r$. Mais $(x',y') \notin E$ car $3(2 + r/2) + 2.0 = 6 + 3r/2 > 6$ puisque $r > 0$.

E est fermé car $E = \operatorname{adh} E$. On a toujours $E \subseteq \operatorname{adh} E$. Montrons que $\operatorname{adh} E \subseteq E$. Soit $(x,y) \in \operatorname{adh} E$, c'est-à-dire $\exists \big((x_n,y_n)\big) \subseteq E,\ (x_n,y_n) \to (x,y)$. On a donc $\forall n \geqslant 1,\ 3x_n + 2y_n = 6$. Comme $x_n \to x$ et $y_n \to y$, on obtient, en passant à la limite, $3x + 2y = 6$. Autrement dit, $(x,y) \in E$.

2.6 Exercice 6

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble non-vide, majoré et fermé. Montrez que $\sup A \in A$.

Solution 1

Par définition du supremum, on sait qu'il existe une suite $(x_n) \subseteq A$ telle que $x_n \to \sup A$. Autrement dit, $\sup A \in \operatorname{adh} A$, par définition de l'adhérence. Or, comme A est fermé, on a $A = \operatorname{adh} A$. Donc, $\sup A \in A$.

Solution 2

Par définition du supremum, on sait que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ \sup A - \varepsilon < a \leqslant \sup A$. En prenant $\varepsilon = 1/n$, où $n \geqslant 1$, on construit une suite $(a_n) \subseteq A$, telle que $\forall n \geqslant 1$, on a $\sup A - 1/n < a_n \leqslant \sup A$. En passant à la limite, on en déduit $a_n \to \sup A$. Par conséquent, $\sup A \in \operatorname{adh} A$. On conclut comme dans la solution 1.

2.7 Exercice 7

Soit l'ensemble $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 2 \text{ et } x + y \leqslant 0\}$.

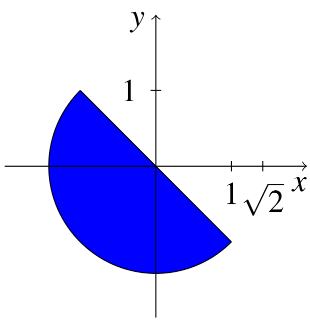
① Représentez graphiquement l'ensemble E.

② L'ensemble E est-il ouvert ? Fermé ? Justifiez votre réponse.

③ Soit l'ensemble $F = \big\{(1/n, 1/n) : n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\big\}$. Dites si F est ouvert, fermé. Justifiez votre réponse.

④ L'ensemble $E \cup F$ est-il fermé ?

① Représentons l'ensemble E.



L'ensemble E

② L'ensemble E n'est pas ouvert car on a $E \neq \operatorname{int} E$. En effet, montrons que $E \nsubseteq \operatorname{int} E$, c'est-à-dire il existe un couple de réels (x,y) tel que $(x,y) \in E$ et $(x,y) \notin \operatorname{int} E$.

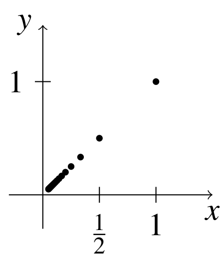
Prenons $(x,y) = (0,0)$. On a bien $(x,y) \in E$ car il vérifie les deux inégalités apparaissant dans la définition de E. En remplaçant x et y par 0, on a $0^2 + 0^2 = 0 \leqslant 2$ et $0 + 0 = 0 \leqslant 0$.

Mais $(x,y) \notin E$ car $\forall r > 0,\ B_{|.|_2}\big((0,0),r\big) \nsubseteq E$. Soit $r > 0$. Prenons $(x',y') = (0,r/2)$. on a $(x',y') \in B_{|.|_2}\big((0,0),r\big)$ car $|(x',y') - (0,0)|_2 = |(0,r/2)|_2 = r/2 < r$ et $(x',y') \notin E$ car il ne vérifie pas l'inégalité $x+y \leqslant 0$ puisque $x'+y' = r/2 > 0$.

L'ensemble E est fermé car $E = \operatorname{adh} E$.

On a toujours $E \subseteq \operatorname{adh} E$. Montrons que $\operatorname{adh} E \subseteq E$. Soit $(x,y) \in \operatorname{adh} E$. Alors $(x,y) \in E$. En effet, par définition d'adhérence, il existe une suite $\big((x_n,y_n)\big) \subseteq E$ telle que $(x_n,y_n) \to (x,y)$. Par définition de E, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n^2 + y_n^2 \leqslant 2$ et $x_n + y_n \leqslant 0$. En passant à la limite et en utilisant les règles de calcul sur les limites de suites, on a $(\lim x_n)^2 + (\lim y_n)^2 \leqslant 2$ et $\lim x_n + \lim y_n \leqslant 0$. Comme $x_n \to x$ et $y_n \to y$, on en déduit $x^2 + y^2 \leqslant 2$ et $x + y \leqslant 0$, c'est-à-dire $(x,y) \in E$.

③ L'ensemble F est représenté ci-dessous.



L'ensemble F

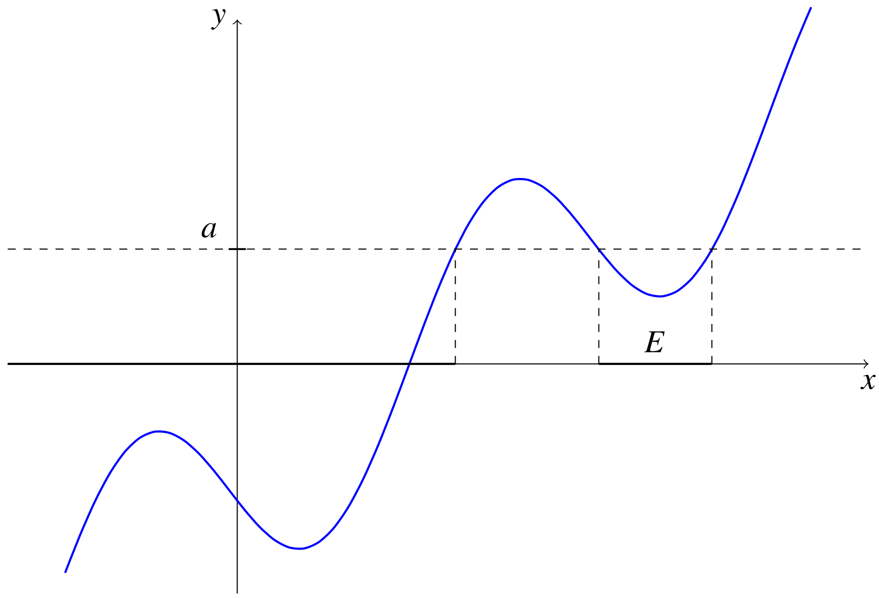
L'ensemble F n'est pas ouvert car $F \neq \operatorname{int} F$. Montrons que $F \nsubseteq \operatorname{int} F$. Prenons $(x,y) = (1,1)$. On a $(x,y) \in F$ car $(1,1)$ est bien de la forme $(1/n,1/n)$ avec $n = 1$. Mais $(1,1) \notin \operatorname{int} F$ car $\forall r > 0,\ B_{|.|_2}\big((1,1),r\big) \nsubseteq F$. Soit $r > 0$. Prenons $(x',y') = (1,1+r/2)$. On a $(x',y') \in B_{|.|_2}\big((0,0),r\big)$ car $|(x',y') - (1,1)|_2 = |(0,r/2)|_2 = r/2 < r$ et $(x',y') \notin F$ car $y' = 1 + r/2$ est un nombre strictement supérieur à 1. On ne peut donc pas l'écrire sous la forme $1/n$ avec $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ puisque $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on a $1/n \leqslant 1$.

L'ensemble F n'est pas fermé car $F \neq \operatorname{adh} F$. Montrons que $\operatorname{adh} F \nsubseteq F$. Prenons $(x,y) = (0,0)$. On a $(x,y) \in \operatorname{adh} F$ car il existe une suite $\big((x_n,y_n)\big) \subseteq F$ telle que $(x_n,y_n) \to (x,y)$. Il suffit de prendre la suite $\big((1/n,1/n)\big)$ dont les éléments sont dans F par définition de l'ensemble. Mais $(0,0) \notin F$ car $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\},\ 1/n \neq 0$.

2.8 Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \in \mathbb{R}$. Considérons l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \leqslant a\}$. Montrez que l'ensemble E est fermé.

Le dessin suivant montre une fonction f continue et l'ensemble E associé.

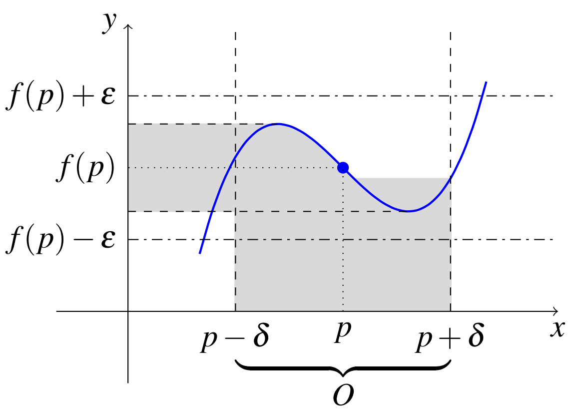


Nous savons que $E \subseteq \operatorname{adh} E$, par une propriété du cours. Montrons que $\operatorname{adh} E \subseteq E$. Soit $x \in \operatorname{adh} E$. Alors, par définition de l'adhérence d'un ensemble, il existe une suite $(x_n) \subseteq E$ telle que $x_n \to x$. Donc $\forall n,\ f(x_n) \leqslant a$, par définition de l'ensemble E. En passant à la limite dans cette inégalité et en utilisant le fait que f est une fonction continue, on en déduit $f(x) \leqslant a$, c'est-à-dire $x \in E$.

2.9 Exercice 9

> Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $p \in \mathbb{R}$. Supposons que $f(p) > 0$. Montrez qu'il existe un ouvert, noté O, contenant p sur lequel la fonction f est strictement positive.

On a représenté ci-dessous une fonction f continue en un point p et telle que $f(p) > 0$. On a également fait apparaître un candidat pour l'ouvert recherché à partir de la définition de continuité.



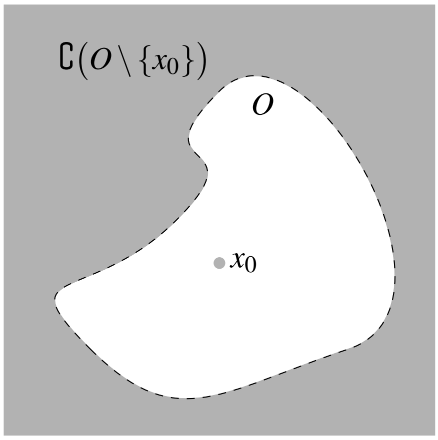
Par hypothèse, f est continue en p, c'est-à-dire $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall x \in \mathrm{Dom}\, f$, si $|x-p| < \delta$, alors $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$. En utilisant cette définition avec $\varepsilon = f(p)/2$, qui est bien strictement positif, il existe $\delta > 0, \forall x \in \mathrm{Dom}\, f$, si $|x-p| < \delta$, alors $|f(x) - f(p)| < f(p)/2$. Cette dernière inégalité s'écrit encore $f(p)/2 < f(x) < 3f(p)/2$. D'autre part, l'inégalité $|x-a| < \delta$ se traduit par $x \in B(p,\delta)$.

Prenons donc $O = B(p,\delta)$. L'ensemble O est bien ouvert. Soit $x \in O$. Alors on a bien $f(x) > f(p)/2 > 0$.

2.10 Exercice 10

> Soit $O \subseteq \mathbb{R}^N$ un ouvert et $x_0 \in O$. Considérons l'ensemble $O \backslash \{x_0\}$. Cet ensemble est-il ouvert ?

Considérons l'ensemble $\complement\big(O\backslash\{x_0\}\big)$ représenté ci-dessous.



Montrons que $\complement\big(O\backslash\{x_0\}\big)$ est fermé. En effet, $\complement\big(O\backslash\{x_0\}\big) = \{x_0\} \cup \complement O$. Or, $\{x_0\}$ est un ensemble fermé et $\complement O$ est fermé puisque O est ouvert, et la réunion de deux ensembles fermés est un ensemble fermé.

2.11 Exercice 11

> Soit $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Montrez que l'intérieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A. Montrez que l'adhérence de A est le plus petit fermé contenant A.

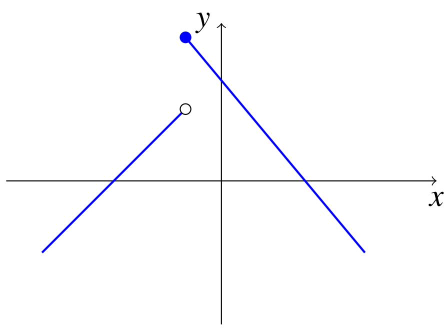
On a vu que l'intérieur d'un ensemble est un ouvert. Il reste à montrer que si on prend O un ouvert inclus à A, alors on a $O \subseteq \mathrm{int} A$. Or, si $O \subseteq A$, alors on a aussi $\mathrm{int}\, O \subseteq \mathrm{int} A$, c'est-à-dire, vu que O est ouvert, $O \subseteq \mathrm{int} A$.

On a vu que l'adhérence d'un ensemble est un ensemble fermé. Il reste à montrer que si F est un fermé contenant A, alors on a $F \supseteq \mathrm{adh} A$. Or, si $F \supseteq A$, alors on a aussi $\mathrm{adh}\, F \supseteq \mathrm{adh} A$, c'est-à-dire vu que F est fermé, $F \supseteq \mathrm{adh} A$.

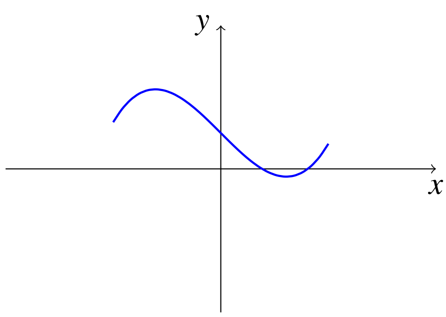
2.12 Exercice 12

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Le graphe de f, noté $\operatorname{Graph} f$, est défini par $\operatorname{Graph} f = \{(x, f(x)) : x \in \operatorname{Dom} f\}$. L'ensemble $\operatorname{Graph} f$ est-il fermé ?

Les dessins ci-dessous peuvent aider à conjecturer que l'ensemble est fermé lorsque la fonction est continue et qu'il ne l'est pas nécessairement lorsque celle-ci ne l'est pas.



fonction non continue sur $\mathbb{R}$



fonction continue sur $\mathbb{R}$

Le graphe d'une fonction n'est pas toujours un ensemble fermé. Il suffit de prendre une fonction non continue sur son domaine.

Si f est une fonction continue, alors $\operatorname{Graph} f$ est fermé. En effet, on a $\operatorname{Graph} f \subseteq \operatorname{adh} \operatorname{Graph} f$, par une propriété vue dans le cours. On a aussi $\operatorname{adh} \operatorname{Graph} f \subseteq \operatorname{Graph} f$. En effet, soit $(x, y) \in \operatorname{adh} \operatorname{Graph} f$. Par définition de l'adhérence, il existe une suite $(z_n) \subseteq \operatorname{Graph} f$ telle que $z_n \to (x, y)$. La suite (z_n) est de la forme $\big((x_n, f(x_n)\big)$ avec $(x_n) \subseteq \operatorname{Dom} f$. Grâce à la convergence composante par composante dans $\mathbb{R}^2$, dire que $z_n \to (x, y)$ revient à dire que $x_n \to x$ et $f(x_n) \to y$. Mais comme f est une fonction continue, on a aussi $f(x_n) \to f(x)$. Par unicité de la limite, on en déduit $y = f(x)$. Par conséquent (x, y) est de la forme $(x, f(x))$ et $x \in \operatorname{Dom} f$. Autrement dit, $(x, y) \in \operatorname{Graph} f$.

2.13 Exercice 13

Peut-on trouver un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^2$ tel que $\operatorname{Fr} A = \varnothing$?

Cela revient à chercher un ensemble qui n'a pas de frontière. Prenons $A = \mathbb{R}^2$. Alors, $\operatorname{Fr} \mathbb{R}^2 = \operatorname{adh} \mathbb{R}^2 \setminus \operatorname{int} \mathbb{R}^2$. Or, comme $\mathbb{R}^2$ est à la fois ouvert et fermé, on en déduit que $\operatorname{Fr} \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^2 = \varnothing$.

Annexe D

Expérimentation de la tâche d'introduction 1

1 Pré-expérimentation, année universitaire 2007-2008

1.1 Remarques préliminaires

La tâche d'introduction 1 de notre scénario a pu être expérimentée une première fois durant l'année universitaire 2007-2008 de manière à en tester sa viabilité au sein d'un enseignement de topologie. Cette pré-expérimentation s'est déroulée dans des conditions semblables à celles que nous décrivons dans notre scénario. Plus précisément, la tâche a été donnée au début de l'enseignement de topologie traditionnel, c'est-à-dire l'enseignement décrit au chapitre I de ce travail. Nous rendons compte ici du dépouillement des copies des étudiants. Une description détaillée de l'expérience est donnée dans (Bridoux, 2009).

Nous avons réalisé cette pré-expérimentation au début du mois de mars 2008 pendant une séance de travaux dirigés du cours d'analyse mathématique concerné dans notre travail. Nous avons pris en charge le déroulement de cette séance dont la durée était d'environ 1h50. Le public était un groupe de 21 étudiants en première année d'université dans la filière mathématique de notre institution.

À ce stade de l'année, les chapitres suivants ont été traités :

- □ convergence des suites de nombres réels ;
- □ borne supérieure, borne inférieure, maximum et minimum d'un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$;
- □ normes dans $\mathbb{R}^N$;
- □ convergence des suites vectorielles ;
- □ limite d'une fonction $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.

1.2 Chronologie globale de l'expérience

Nous indiquons ci-dessous, à titre indicatif, le découpage de la réalisation de la tâche. Nous n'allons pas plus loin dans la description de son déroulement puisque notre objectif est de rendre compte du dépouillement des copies.

Distribution des feuilles 1 et 2 et lecture de l'énoncé	5'
Recherche individuelle	30'
État des lieux et bilan	10'
Distribution de la feuille 3	1'
Recherche individuelle	25'
Correction orale	15'

1.3 Dépouillement des copies

▶▶ Feuilles 1 et 2

En nous appuyant sur les caractéristiques des dessins réalisés par les étudiants, nous répartissons l'ensemble de la classe en deux catégories. Une première catégorie correspond à des dessins « dépouillés » en ce sens qu'ils ne contiennent aucune annotation. Neuf étudiants appartiennent à cette catégorie. Ils représentent des boules mais ils ne montrent pas explicitement si la propriété est vérifiée ou non. Nous avons trouvé, dans cette catégorie, des dessins de la forme suivante :

Une seconde catégorie correspond à des dessins plus « élaborés ». Ici, l'inclusion ou la non inclusion, l'intersection ou la non intersection apparaît explicitement sous la forme d'un jeu de couleurs ou de partie hachurée. Douze étudiants font partie de cette catégorie. Ils réalisent des dessins de la forme suivante :

Six étudiants de cette catégorie vont de plus utiliser des symboles pour annoter leurs dessins et /ou incorporer des commentaires tels que :

- □ « on a bien $B(p,r) \subseteq A$ ou $B(p,r) \cap A =$ partie hachurée » ;
- □ « la boule de centre p ne peut pas être contenue dans A car $p \notin A$ » ;

□ « la boule de centre p intersecte A car $p \in A$. »

Il est tentant de dire que les étudiants de la seconde catégorie donnent davantage de sens aux notions mais nous ne pouvons pas conclure des dessins réalisés par les étudiants classés dans la première catégorie que ces derniers ne donnent pas de sens aux notions.

Tous les étudiants choisissent la caractérisation correcte pour la notion de point intérieur et 20 étudiants sur 21 pour la notion de point adhérent.

1.4 Feuille 3

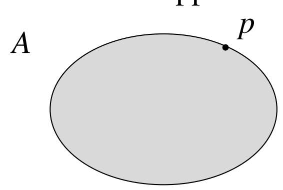
Tout en mettant prioritairement l'accent sur la nature des justifications, nous constatons que 19 étudiants sur 21 se prononcent correctement sur la véracité de chaque affirmation. Tous les étudiants utilisent le registre de la langue naturelle pour justifier leur réponse. 16 étudiants vont, de plus, incorporer des dessins dans leurs justifications.

Nous trouvons deux types de justification, qui dépendent de l'affirmation à traiter. La première manière de justifier, notée par la suite « justification 1 », est le retour aux définitions qui ont émergé du travail sur les feuilles 1 et 2. La seconde manière, notée « justification 2 », consiste à utiliser les liens entre les types d'ensembles que sont l'intérieur, l'adhérence et le bord [1]. Le tableau suivant met en lien chaque affirmation avec le type de justification utilisé.

Affirmation 1	Justification 1
Affirmation 2	Justification 2
Affirmation 3	Justification 2
Affirmation 4	Justification 1
Affirmation 5	Justification 1
Affirmation 6	Justification 2

Un exemple correspondant à la justification 1 est : « si p est un point intérieur à A, alors A contient une boule de centre p. Donc, toutes les boules de centre p intersectent A car il y aura toujours au moins p dans l'intersection. »

Un exemple correspondant à la justification 2 est : « sur le dessin suivant, p est sur le bord et appartient à A, mais p n'est pas intérieur à A. »



Nous remarquons que le second type de justification (justification 2) est sollicité pour les affirmations 2, 3 et 6, c'est-à-dire pour les affirmations fausses. C'est aussi précisément pour ces affirmations que nous trouvons la présence de dessins.

[1] Il s'agit du mot utilisé par les étudiants et prononcé par l'enseignant dans la correction des feuilles 1 et 2.

La recherche d'un contre-exemple semble donc amener les étudiants à développer une réflexion plus intuitive, en ne recourant pas aux définitions mais aux liens entre les notions.

1.5 Bilan de l'expérience

Nous indiquons ci-dessous quelques points marquants de cette première expérience. À nouveau, le lecteur trouvera une conclusion plus détaillée dans (Bridoux, 2009).

Un premier élément qui s'avère positif est l'émergence d'une caractérisation correcte des notions chez pratiquement tous les étudiants. Ils ont également pu réaliser un dessin pour tous les ensembles apparaissant sur la feuille 2. Le fait que les affirmations de la feuille 3 aient été traitées correctement par la majorité des étudiants est un autre élément positif. Le travail sur les feuilles 1 et 2, à partir des phrases et des dessins, permet de penser que les étudiants donnent un certain sens aux nouvelles notions.

Concernant le déroulement de la séance, l'énoncé de la feuille 3 a fait l'objet d'une correction orale. Il n'y a donc pas eu de véritable phase d'institutionnalisation pour mettre en évidence les liens entre les types de points.

Enfin, lorsque l'enseignement de topologie a véritablement démarré en cours théorique en reprenant les contenus décrits au chapitre I, nous avons proposé, à la séance suivante, des exercices de manipulation des définitions. Nous constatons que, même si les étudiants semblent avoir une vision intuitive des notions au terme de l'expérience, celle-ci n'ajoute aucun élément positif lorsque les étudiants doivent manipuler les définitions. Nous avons remarqué qu'ils ne parviennent pas à se prononcer sur le fait qu'un ensemble est ouvert ou non, fermé ou non. Tout se passe comme s'ils n'avaient aucune vision des ensembles avec lesquels ils travaillent et l'idée de réaliser un dessin est complètement absente dans leur démarche mathématique. Nous avons pu expliquer cette difficulté en discutant avec les étudiants. En réalité, ils ne parviennent pas à interpréter, seuls, le fait qu'un ensemble ouvert est un ensemble dont tous ses points sont intérieurs. Une explication semblable apparaît pour les ensembles fermés.

2 Tâche d'introduction 1, année universitaire 2008-2009

Cette tâche a fait l'objet d'une analyse a priori au chapitre X et nous avons décrit le déroulement en classe au chapitre XIII. Nous donnons ici les résultats du dépouillement des copies des étudiants. Rappelons que nous disposons de 23 copies.

2.1 Feuilles 1 et 2

Un premier aspect frappant est que tous les étudiants ont choisi la caractérisation correcte des notions de point intérieur et de point adhérent.

Tout comme dans la pré-expérimentation, nous classons les dessins des étudiants en deux catégories identiques à celles précédemment mises en évidence. Les dessins « dépouillés » concernent ici 11 étudiants. Les dessins « élaborés » sont rencontrés chez les 12 autres étudiants.

2.2 Feuille 3

Le dépouillement de cette feuille fournit des résultats différents de ceux obtenus lors de la pré-expérimentation. Tout d'abord, tous les étudiants incorporent des dessins pour l'ensemble des affirmations traitées. Un autre aspect frappant est que tous les étudiants se prononcent correctement sur la véracité de chaque affirmation et produisent une justification correcte à partir des registres du dessin et de la langue naturelle.

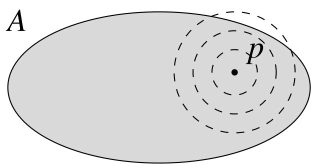
Le tableau suivant montre de plus à quel point la majorité des étudiants se lance dans l'un ou l'autre type de justification. Rappelons que la justification 1 consiste à utiliser les définitions alors que la justification 2 mobilise les liens entre les types d'ensembles.

	Justification 1	Justification 2	Présence d'un dessin
Affirmation 1	19	4	16 étudiants
Affirmation 2	15	8	22 étudiants
Affirmation 3	22	1	20 étudiants
Affirmation 4	21	2	17 étudiants
Affirmation 5	23	0	17 étudiants
Affirmation 6	18	5	23 étudiants

Nous donnons maintenant, pour chaque affirmation, le type d'argument le plus fréquemment utilisé par les étudiants.

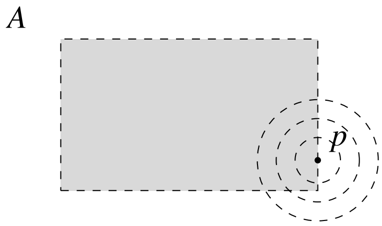
- □ Affirmation 1 : si p est intérieur à A, alors A contient une boule ouverte de centre p, donc aura au moins le point p comme intersection.

  Type de dessin rencontré :

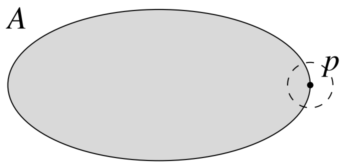
- □ Affirmation 2 : avec le dessin suivant, on a un point p adhérent à A car toutes les boules de centre p coupent A mais p n'appartient pas à A, donc il n'est pas intérieur.

  Type de dessin rencontré :



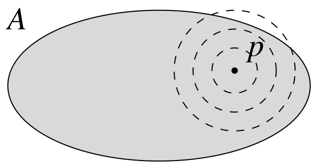
- □ Affirmation 3 : sur le dessin, p appartient à A mais n'est pas un point intérieur car A ne contient pas une boule de centre p.

  Type de dessin rencontré :



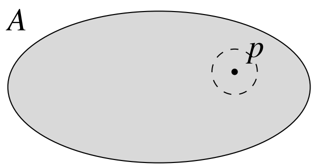
- □ Affirmation 4 : vu que p appartient à A, une boule de centre p aura le point p comme intersection avec A.

  Type de dessin rencontré :



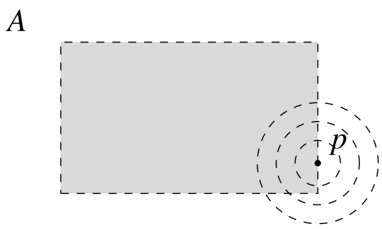
- □ Affirmation 5 : si p est intérieur à A, on peut construire une boule de centre p contenue dans A. Donc p appartient à A.

  Type de dessin rencontré :



- □ Affirmation 6 : sur le dessin suivant, toutes les boules de centre p intersectent A mais le point p n'appartient pas à A.

  Type de dessin rencontré :



Nous remarquons que les étudiants retournent systématiquement aux définitions qui ont émergé des feuilles 1 et 2 pour justifier chaque affirmation. Ils utilisent tous des dessins pour appuyer leur raisonnement et ce, pour chaque affirmation.

Le dépouillement des copies nous autorise à penser que les étudiants donnent du sens aux nouvelles notions et qu'ils sont parfaitement rentrés dans le jeu d'utiliser les registres de la langue naturelle et du dessin.

3 Bilan

Les deux expériences ont en commun l'émergence correcte des définitions. Toutefois, les dépouillements des copies montrent clairement des différences dans les productions des étudiants. Alors que dans la pré-expérimentation, les réponses à la feuille 3 se répartissent clairement en deux catégories, la seconde expérience marque très nettement l'utilisation des définitions et beaucoup moins l'utilisation des liens entre les notions pour justifier les affirmations.

Dans chaque expérience, il nous semble également important de souligner que tous les étudiants parviennent à réaliser la tâche et à produire des réponses correctes. La tâche ne permet donc pas de détecter des différences quant au niveau mathématique des étudiants.

La réalisation de la tâche permet de penser que la majorité des étudiants a un sens intuitif des notions. Nous ne pouvons à ce stade faire aucune prévision sur leurs apprentissages futurs en topologie mais l'objectif de les faire travailler à partir d'autres registres que celui des symboles mathématiques, auquel ils sont habitués, est parfaitement atteint.

Bibliographie

Références didactiques

ARTIGUE M. (1989), Epistémologie et Didactique, *Cahier de Didactique des Mathématiques*, Numéro 3, Université Paris 7.

ARTIGUE M. (1990), Ingénierie didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11, 281–308.

ARTIGUE M. (2006), Apprendre les mathématiques au niveau universitaire, ce que les recherches récentes nous apprennent dans ce domaine, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, IREM de Strasbourg, volume 11, 269–288.

ARTIGUE M. (2011), L'ingénierie didactique comme thème d'étude, in Margolinas et al., *Actes de la XVI^e école d'été de didactique des mathématiques*, à paraître.

BREIDENBACH D., DUBINSKY E., HAWKS J., NICHOLS D. (1992), Development of the process conception of function, *Educational Studies in Mathematics*, 23, 247–285.

BINGOLBALI E., MONAGHAN J. (2008), Concept image revisited, *Educational Studies in Mathematics*, 68, 19–35.

BOSCHET F. (1988), Un aperçu des travaux de Vygotsky, Leontiev et Bruner, disciples de Vygotsky, *Cahier de Didactique des Mathématiques*, Numéro 52, Université Paris 7.

BOSCHET F., ROBERT A. (1984), Acquisition des premiers concepts d'analyse sur $\mathbb{R}$ dans une section ordinaire de première année de DEUG, *Cahier de Didactique des Mathématiques*, Numéro 7, Université Paris 7.

BRIDOUX S. (2005), Analyse d'un enseignement de topologie en première année d'université, *Cahier de Didactique des Mathématiques*, Numéro 51, Université Paris 7.

BRIDOUX S. (2008), Utiliser une définition, une tâche simple a priori. Le cas de la topologie de $\mathbb{R}^N$, *Actes du colloque EMF 2006*, Université de Sherbrooke, Canada.

BRIDOUX S. (2009), Une séquence d'introduction des notions de topologie dans $\mathbb{R}^N$: de la conception à l'expérimentation, *Actes du Colloque EMF 2009*, Université de Dakar, Sénégal, à paraître.

BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHELLOUGUI F. (2004), *L'utilisation des quantificateurs universel et exixtentiel en première année universitaire entre l'explicite et l'implicite*, Thèse de doctorat en co-tutelle Lyon et Tunis.

CHESNAIS A. (2009), *L'enseignement de la symétrie axiale en sixième dans des contextes différents : les pratiques de deux enseignants et les activités des élèves*, Thèse de Doctorat de l'Université Paris 7.

CHEVALLARD Y. (1982), *Sur l'ingénierie didactique*, Préparation de la deuxième école d'été de didactique des mathématiques. Preprint. IREM d'Aix Marseille.

CHEVALLARD Y. (1991), *La transposition didactique*, 2e édition, Grenoble : La Pensée Sauvage.

DORIER J.-L. (1990), Analyse historique de l'émergence des concepts élémentaires d'algèbre linéaire, *Cahier de didactique des mathématiques*, Numéro 7, Université Paris 7.

DORIER J.-L. (1995), Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 29, 175–197.

DORIER J.-L. (dir.) (1997), *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

DORIER J.-L. (2000), Recherche en Histoire et en Didactique des Mathématiques sur l'Algèbre linéaire – Perspectives théoriques sur leurs interactions, *Les Cahiers du Laboratoire Leibniz*, Numéro 12, Laboratoire Leibniz-IMAG.

DORIER J.-L., LAVERGNE C. (1990), Analyse dans le suivi de productions d'étudiants de DEUG A en algèbre linéaire, *Cahier de Didactique des Mathématiques*, Numéro 6, Université Paris 7.

DOUADY R. (1987), Jeux de cadres et dialectique outil/objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7/2, 5–31.

DOUADY R. (1994), Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir, *Repères-Irem*, 15, 37–61.

DREYFUS T. (1999), Why Johnny can't prove, *Educational Studies in Mathematics*, 38, 85–109.

DUBINSKY E. (1991), Reflective abstration in advanced mathematical thinking. In D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking*, 95–126, Dordrecht : Kluwer academic publishers.

DUBINSKY E., DAUTERMANN J., LERON U., ZAZKIS R. (1994), On learning fundamental concepts of group theory, *Educational Studies in Mathematics*, 27, 267–305.

DUBINSKY E. (1997), Some Thoughts on a First Linear Algebra Course. Dans D. Carlson, C.R. Johnson, D.C. Lay, R.D. Porter, A. Watkins et W. Watkins, *Resources for teaching linear algebra*, 42, 85–106.

DURAND-GUERRIER V. (1996), *Logique et raisonnement mathématique – Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*, Thèse de Doctorat de l'Université de Lyon 1.

DURAND-GUERRIER V. (2005), *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique*, Habilitation à diriger des recherches en didactique des mathématiques, Université de Lyon 1.

DURAND-GUERRIER V. (2005), Questions de logique dans l'enseignement supérieur. Quelques pistes pour faire évoluer les pratiques enseignantes, *Questions de pédagogie dans l'enseignement supérieur*.

DURAND-GUERRIER V., ARSAC G. (2003), Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ?, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23/3, 295–342.

DUROUX A. (1982), La valeur absolue. Difficultés majeures pour une notion mineure, *Publications de l'IREM de Bordeaux*.

DUVAL R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine – Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Berne, Peter Lang.

EPP S. (2003), The role of logic in teaching proof, *The Mathematical Association of American Monthly*.

GUEUDET G. (2008), Perspectives en didactique des mathématiques. La transition secondaire-supérieur : résultats et perspectives des recherches didactiques, *Actes de la XIII^{e} école d'été de didactique des mathématiques*, 159–175.

MOORE R.C. (1994), Making the transition to formal proof, *Educational Studies in Mathematics*, 27, 249–266.

PARIÈS M., ROBERT A., ROGALSKI J. (2008), Analyses de séances en classe et stabilité des pratiques d'enseignants de mathématiques expérimentés du second degré, *Educational Studies in Mathematics*, 68, 55–80.

ROBINET J. (1986), Les réels : quels modèles en ont les élèves ?, *Cahier de Didactique des mathématiques*, Numéro 21, Université Paris 7.

ROBERT A. (1982), *L'acquisition de la notion de convergence des suites dans l'enseignement supérieur*, Thèse d'État, Université Paris 7.

ROBERT A. (1998), Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18/2, 138–190.

ROBERT A. ET AL. (2007), Mettre du relief sur les mathématiques au collège et au lycée – Quelques exemples, *Document pour la formation des enseignants*, Numéro 7, Université Paris 7.

ROBERT A. (2008), Laisser chercher les élèves ? Les faire travailler en petits groupes ?, *L'Ouvert*, 117, 31–46.

ROBERT A., ROBINET J. (1996), Prise en compte du méta en didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16/2, 145–175.

RODITI E. (2005), *Les pratiques enseignantes en mathématiques*, Paris, L'Harmattan.

ROGALSKI J. (1983), Quelques éléments de théorie piagétienne et didactique des mathématiques, *Cahier de Didactique des Mathématiques*, Numéro 2, Université Paris 7.

TALL D. (1991), *Advanced Mathematical Thinking, Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht, The Netherlands.

TALL D., VINNER S. (1981), Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151–169.

TANGUAY D. (2002), L'enseignement des vecteurs, *Bulletin AMQ*, vol. XLII, Numéro 4, 36–47.

TRIGUEROS M. ET OKTAC A. (2005), La théorie APOS et l'enseignement de l'algèbre linéaire, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, IREM de Strasbourg, 10, 157–176.

VANDEBROUCK F. (dir.) (2008), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, Toulouse : Octarès.

VERGNAUD G. (1981), *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Berne, Peter Lang.

VERGNAUD G. (1990), La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des mathématiques*, 10/2-3, 133–170.

Références historiques et épistémologiques

BAIRE R. (1899), Sur les fonctions de variables réelles, *Annali di matematica pura ed applicata*, 3, 1–123.

BAIRE R. (1904), Théorie des ensembles, exposé d'après l'article allemand de A. Schoenflies, In *Encyclopédie des Sciences mathématiques*, t.1, vol. I, 489–531, Gauthier-Villars, Paris.

BOLZANO B. (1817), Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daßzwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege, *Abh. K. Böhm. Gessel/Wiss.*, 3, t. 5, 1–60 ; *Ostwald's Klassiker* n° 153, Leipzig, 1905 ; trad. française par J.Sebestik, *Revue d'histoire des Sciences*, 17, 136–164, 1964.

BOREL E. (1894), Sur quelques points de la théorie des fonctions, *C.R. de l'Académie des Sciences Paris*, 118, 340–342.

BOURBAKI N. (1965), *Eléments de mathématique, Livre 3, Topologie Générale*, quatrième édition, Hermann, Paris.

CANTOR G. (1883), Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, *Math.Ann.*, 5, 123–132, 1872, *Gesamm.Abh.*, 92 – 101, Springer, Berlin, 1932, trad. française *Acta Mathematica*, 2, 336–348, 1883.

CAUCHY A.L. (1821), *Oeuvres complètes*, Gauthier-Villars, Paris.

COOKE R. (1997), *The History of Mathematics, A Brief Course*, John Wiley and Sons, INC.

COUSIN P. (1895) Sur les fonctions de *n* variables complexes, *Acta Mathematica*, 19, 1–61.

DAHAN-DALMEDICO A., PEIFFER J. (1986), *Une histoire des mathématiques – Routes et dédales*, Éditions du Seuil.

DIEUDONNÉ J. (dir.) (1978), *Abrégé d'histoire des mathématiques*, 2 volumes, Hermann, Paris.

DINI U. (1878), *Fondamenti per la teorica della funzioni di variabili reali*, Nistri, Pisa.

DUGAC P. (1973), Eléments d'analyse de Karl Weierstrass, *Archive for History of Exact Sciences*, 10, 41–174.

DUGAC P. (1984), Histoire des espaces complets, *Revue d'Histoire des Sciences*, 37, 3–28.

DUGAC P. (2003), *Histoire de l'Analyse, Autour de la notion de limite et de ses voisinages*, Vuibert.

FRÉCHET M. (1904), Généralisation d'un théorème de Weierstrass, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 139, 848–850.

FRÉCHET M. (1906), Sur quelques points du Calcul Fonctionnel, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 22, 1–74.

GISPERT H. (1982), *Camille Jordan et les fondements de l'analyse (Comparaison de la 1re édition (1882-1887) et de la 2e (1893) de son cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique*, thèse de doctorat de l'Université Paris Sud.

HAUSDORFF F. (1914), *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit, Leipzig.

HAUWKING S. (2005), *Et Dieu cré les nombres, Les plus grands textes de mathématiques*, trad. française de J. Randon-Furling, Dunod.

HURWITZ A. (1898), *Über die Eintwickelung der allgemeinen Theorie der analytische, Funcktionen in neuer Zeit*, in Rudio F. (Ed.).

JAMES I.M. (1999), *History of Topology*, Elsevier.

JORDAN C. (1882) *Cours d'Analyse, tome 1*, première édition, Gauthier-Villars, Paris.

JORDAN C. (1893), *Cours d'Analyse, tome 1*, seconde édition, Gauthier-Villars, Paris.

KURATOWSKI C. (1933), *Topologie I, Espaces métrisables, espaces complets*, Garasinski, Warsaw.

LECOURT D. (1999), *Dictionnaire d'histoire et philosophie des sciences*, Presses Universitaires de France.

MANHEIM J.H. (1964), *The Genesis of Point Set Topology*, Pergamon Press.

MAUREY B., TACCHI J.P. (2005), La Genèse du Théorème de Recouvrement de Borel, *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 11, 163–204.

MOORE G.H. (2008), The emergence of open sets, closed sets, and limit points in analysis and topology, *Historia Mathematica*, 35, 220 – 241.

PEANO G. (1887), *Applicazioni geometrische del calcolo infinitesimale*, Fratelli Bocca editori, Torino.

PIER J.P. (1980), Historique de la notion de compacité, *Historia Mathematica*, 7, 425–443.

PIER J.P. (1994), *Development of Mathematics, 1900-1950*, Basel-Boston-Berlin : Birkhäuser Verlag.

POINCARÉ H. (1883), Mémoire sur les groupes kleinéens, *Acta Mathematica*, 3, 49–92.

POINCARÉ H. (1898), L'oeuvre mathématique de Weierstrass, *Acta Mathematica*, 22, 1–18.

RIEMANN B. (1854), *Grunglagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse* (Inauguraldissertation, 1851), *Ges. math. Werke*, 3–43.

RIEMANN B. (1892), *Gesammelte mathematische werke*, 2e édition, Leipzig.

ROUCHE N., GILBERT T. (2001), *La notion d'infini, l'infini mathématique entre mystère et raison*, Ellipses, Paris.

SCHOENFLIES A. (1900), Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 8, 1–251.

WEIERSTRASS K. (1865), *Prinzipien der Theorie der analytischen Functionen*, Unpublished lecture notes taken by Moritz Pasch at the University of Berlin.

WEIERSTRASS K. (1868), *Einfürhrung in die Theorien der analytischen Functionen*, Lectures notes taken by Wilhem Killing in 1868.

WEIERSTRASS K. (1894) *Mathematische Werke*, Band I. Berlin : Layer und Müller.

WEIERSTRASS K. (1895) *Mathematische Werke*, Band II. Berlin : Layer und Müller.

Manuels consultés

CHOQUET G. (1969), *Cours de topologie*, 1re édition, Masson, Paris.

GOSTIAUX B. (1993), *Cours de mathématiques spéciales*, Presses universitaires de France.

LEHMANN D. (2004), *Initiation à la topologie générale*, Ellipses.

REVUZ A. ET L. (1964), *Cours de l'APM*, Paris, APMEP.

RUDIN W. (1964), *Principles of Mathematical Analysis*, International Student Edition.

SCHWARTZ L. (1967), *Cours d'analyse*, Hermann.

SKANDALIS G. (2001), *Mathématiques pour la licence, Topologie et Analyse*, Dunod, Paris.