HAL
archives-ouvertes.fr

Analyse a posteriori d'algorithmes itératifs pour des problèmes non linéaires.

Jad Dakroub

▶ **To cite this version:**

Jad Dakroub. Analyse a posteriori d'algorithmes itératifs pour des problèmes non linéaires.. Mathématiques générales [math.GM]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2014. Français. <NNT : 2014PA066259>. <tel-01088654>

HAL Id: tel-01088654

https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01088654

Submitted on 28 Nov 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Pierre et Marie Curie
UPMC LJLL

Université Saint-Joseph
FS Départ. Maths

Analyse *a posteriori* d'algorithmes itératifs pour des problèmes non linéaires

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 07 Octobre 2014

pour l'obtention du grade du

Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie - Paris 6
et
Docteur de l'Université Saint-Joseph - Liban
(Spécialité Mathématiques)

par

Jad DAKROUB

Composition du jury

Rapporteurs : BECKER Roland
RAPPETTI Francesca

Examinateurs : BERNARDI Christine (Directrice de thèse)
HECHT Frederic
MADAY Yvon
MANSOUR Gihane (Codirectrice de thèse)
SAYAH Toni (Directeur de thèse)
WEHBE Ali

Laboratoire Jacques Louis Lions – UMR 7598

Faculté des sciences

Table des matières

Introduction **1**

1 Motivations 2

2 Espaces fonctionnels et notations 4

3 La méthode des éléments finis 6

4 L'analyse d'erreur *a posteriori* 7

4.1 Principes généraux et propriétés 7

4.2 Estimations d'erreur *a posteriori* pour la méthode des éléments finis 9

5 Les équations de Navier-Stokes 10

6 Plan de la thèse 12

Chapitre 1
Étude *a posteriori* d'un modèle de problème non linéaire **15**

1.1 Problème continu 16

1.2 Existence et Unicité 17

1.3 Problème discret et estimation d'erreur *a priori* 18

1.3.1 Discrétisation 18

1.3.2 Existence et estimation d'erreur 19

1.3.3 Estimation d'erreur *a posteriori* du problème non linéaire 25

1.3.4 Efficacité 32

1.4 Problème itératif 36

1.4.1 Existence et Unicité 36

1.4.2 Convergence 37
1.4.3 Estimation d'erreur *a posteriori* du problème linéarisé 39
1.4.4 Efficacité 43
1.5 Méthode de Newton 47
1.5.1 Existence et Unicité 48
1.5.2 Convergence 48
1.5.3 Estimation d'erreur *a posteriori* 50
1.5.4 Efficacité 53

Chapitre 2
Simulations numériques du problème modèle 56

2.1 Problème itératif 57
2.1.1 Estimation d'erreur *a priori* 57
2.1.2 Estimation d'erreur *a posteriori* 64
2.2 Méthode de Newton 71
2.2.1 Estimation d'erreur *a priori* 71
2.2.2 Estimation d'erreur *a posteriori* 74
2.3 Algorithme mixte 80

Chapitre 3
Étude *a posteriori* des équations de Navier-Stokes 81

3.1 Introduction 82
3.2 Estimation d'erreur *a posteriori* du problème non linéaire 86
3.2.1 Estimation d'erreur pour des petites données 87
3.2.2 Une approche moins restrictive pour calculer l'estimation d'erreur *a posteriori* 91
3.2.3 Efficacité 96
3.3 Algorithme itératif 100

3.3.1 Convergence 100
3.3.2 Estimation d'erreur *a posteriori* du problème linéarisé 103
3.3.3 Efficacité 108

Chapitre 4
Simulations numériques des équations de Navier-Stokes

4.1 Problème itératif 114
4.1.1 Estimation d'erreur *a priori* 114
4.1.2 Estimation d'erreur *a posteriori* 117

Bibliographie **122**

Bibliographie **123**

Introduction

1 Motivations

La compréhension des phénomènes du monde réel et de notre technologie est aujourd'hui en grande partie basée sur les équations aux dérivées partielles qui modélisent de nombreux phénomènes (problèmes de la mécanique, de la physique, de la biologie, etc.). Nous rencontrons de telles équations dès qu'on s'intéresse à des questions de modélisation : en physique, en électromagnétisme, en mécanique du solide et des fluides, en biologie, en chimie, en économie, en finance, etc. Nous y sommes naturellement confrontés quand nous nous intéressons à des problèmes de calcul des variations ou plus généralement d'optimisation. Savoir manipuler des équations aux dérivées partielles fait de nos jours partie du quotidien de l'ingénieur. En effet, beaucoup de mathématiciens se sont concentrés sur les méthodes numériques afin de fournir des solutions approchées des problèmes qui se posent (équations differentielles, interpolation, résolution d'équations non linéaires, etc.). L'interêt des scientifiques pour les méthodes et l'analyse numérique en général, n'a donc cessé d'augmenter. Deux notions s'avèrent alors importantes : l'*erreur numérique* et la *stabilité*. L'étude des erreurs forme une partie importante de l'analyse numérique, les sources d'erreurs dans les calculs proviennent de plusieurs origines : erreur d'arrondi et de troncature, erreur de discrétisation, erreur de linéarisation, etc. Une fois que l'erreur est générée, elle se propage tout au long du calcul. Cela conduit à la notion de *stabilité numérique* : un algorithme est numériquement *stable* si une erreur ne croit pas trop durant le calcul, la croissance de l'erreur conduit à la divergence de l'algorithme. En particulier, pour les mathématiciens, les méthodes numériques sont le seul moyen de simuler ou de modéliser les phénomènes que nous observons, de les interpréter et de les comprendre. Deux aspects fondamentaux constituent la base de l'utilisation ou la mise en place de toute méthode numérique : la *précision* souhaitée d'une part, et le *temps de calcul* d'autre part.

Les estimations d'erreur *a priori* sont des estimations qui fournissent des bornes sur l'écart de la solution approchée u_h à la solution exacte u. En effet, ces estimations d'erreur permettent de justifier théoriquement la convergence de la méthode numérique. Par contre, comme la régulatité de la solution exacte u est en général inconnue, cette analyse ne permet pas le calcul de la norme de cette solution et par suite ne permet pas le contrôle de l'erreur.

L'analyse *a posteriori* est l'analyse qui satisfait plusieurs objectifs. En premier lieu, elle contrôle globalement l'erreur de discrétisation du problème posé. De plus, cette analyse permet d'utiliser les ressources informatiques d'une manière convenable et efficace. En effet, l'avantage de l'analyse *a posteriori* est de fournir des bornes explicites sur l'erreur entre la solution numérique et la solution exacte dès que la solution approchée est connue. Cette analyse a été initiée par Babuška [3, 4] pour des problèmes paraboliques et développée par Verfürth [21, 22]. Nous citons aussi Ainsworth et Oden [2], Zienkiewicz et Zhu [23, 24], Strouboulis et Hague [19] et Repin [18]. L'analyse *a posteriori* peut fournir des critères d'arrêt qui garantissent le contrôle global de l'erreur. Par conséquence, une étape importante sera de concevoir des estimations d'erreur *a posteriori* en distinguant les erreurs de linéarisation et de discrétisation. Ce type d'analyse a été initialisé par Chaillou et

Suri [9, 10] pour une certaine classe de problèmes non linéaires et a été développé (dans le cadre d'un algorithme itératif) par L. El Alaoui, A. Ern et M. Vohralík [11].

Objectif de la thèse

La résolution numérique de n'importe quelle discrétisation d'équations aux dérivées partielles non linéaires requiert le plus souvent un algorithme itératif. En général, la discrétisation des équations aux dérivées partielles donne lieu à des systèmes de grandes dimensions. Comme la résolution des grands systèmes est très coûteuse en terme de temps de calcul, une question importante se pose.

Afin d'obtenir une solution approchée de bonne qualité, quand est-ce qu'il faut arrêter l'itération afin d'éviter les itérations inutiles ?

Plusieurs publications permettant de résoudre ce point clé sont apparues récemment. Nous référons entre autres aux articles de Chaillou A. L., Suri M. [9] et El Alaoui L., Ern A., Vohralík M., [11].

L'objectif de cette thèse est alors d'appliquer, à différentes équations, une méthode qui nous permet de diminuer le nombre d'itérations de la résolution des systèmes en gardant toujours une bonne précision de la méthode numérique. En d'autres termes, notre but est d'appliquer une nouvelle méthode qui fournira un gain remarquable en terme de temps de calcul. L'analyse d'erreur *a posteriori* est à la base de notre travail. En effet, cette analyse fournit des critères d'arrêt qui permettent le contrôle global de l'erreur. Cette erreur, n'est pas majorée en fonction de la régularité de la solution exacte comme dans le cas des estimations *a priori* mais en fonction de la solution discrète que nous pouvons calculer. L'analyse *a posteriori* est l'outil de base pour la construction d'un maillage adaptatif, en effet, cette analyse est basée sur des outils locaux appelés indicateurs d'erreur. Parmi les différents types d'indicateurs d'erreur qui existent, nous choisissons de travailler avec ceux dits "par résidu". De plus, les estimations d'erreur *a posteriori* permettent aussi de distinguer les erreurs de linéarisation et de discrétisation, ce qui est une étape assez importante dans notre analyse. Notons que les deux erreurs de linéarisation et de discrétisation sont deux composantes de l'erreur totale qui dérivent de deux sources différentes.

Tout d'abord, nous appliquons cette méthode pour un problème non linéaire modèle. Nous proposons une discrétisation par éléments finis de ce problème et nous montrons, en premier lieu, les estimations *a priori* pour prouver la convergence de l'algorithme. En second lieu, notre but sera d'effectuer l'analyse *a posteriori* de cette discrétisation. Nous proposons par la suite deux algorithmes de résolution itératif du problème et nous étudions la convergence de ces algorithmes vers la solution du problème discret. Notre but sera de dériver des estimations d'erreur *a posteriori* de nos algorithmes itératifs proposés. Nous présentons ensuite quelques résultats d'expérience numériques afin de comparer ces deux algorithmes.

De même, nous appliquerons cette approche pour les équations de Navier-Stokes que nous discrétisons avec la méthode des éléments finis (Voir [12]).

Tout d'abord, nous considérons le problème discret non linéaire et nous rappellons les estimations d'erreur *a priori*. Nous nous intéressons à l'analyse d'erreur *a posteriori* (Voir [22]). Ensuite, nous proposons un schéma itératif et nous étudions la convergence et l'analyse *a priori* et *a posteriori* correspodantes (toujours en distinguant les deux différentes composantes de l'erreur). Finalement, nous présentons des simulations numériques montrant l'éfficacité de notre méthode.

2 Espaces fonctionnels et notations

Dans cette partie, nous donnons quelques notations et nous introduisons les espaces fonctionnels que nous utiliserons par la suite. Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3, de frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne. Nous définissons, pour tout réel $p \geq 1$ l'espace

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}^d;\ f \text{ mesurable et } \int_\Omega |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\| f \|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p}.$$

Nous définissons, pour tout entier m positif et tout réel $r \geq 1$, l'espace de Sobolev

$$W^{m,r}(\Omega) = \left\{ v \in L^r(\Omega); \partial^k v \in L^r(\Omega), \forall |k| \leq m \right\},$$

où $k = (k_1, ..., k_d)$ est un d-uplet d'entiers positifs tel que $|k| = k_1 + ... + k_d$ et

$$\partial^k v = \frac{\partial^{|k|} v}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_d^{k_d}}.$$

L'espace $W^{m,r}(\Omega)$ est muni de la semi-norme

$$|v|_{m,r,\Omega} = \left(\sum_{|k|=m} \int_\Omega |\partial^k v|^r d\mathbf{x} \right)^{1/r}.$$

$W^{m,r}(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\| v \|_{m,r,\Omega} = \left(\sum_{\ell=0}^{m} |v|_{\ell,r,\Omega}^r d\mathbf{x} \right)^{1/r}.$$

Si $r = 2$, l'espace $W^{m,2}(\Omega)$ est noté $H^m(\Omega)$. De plus, $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Nous considérons en particulier l'espace

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), v_{|\partial\Omega} = 0\}$$

et son espace dual $H^{-1}(\Omega)$.

Lemme 0.2.1. *En dimension $d = 2$, l'injection de Sobolev nous donne l'existence d'une constante S_r telle que, pour tout $1 \leq r < \infty$, nous ayons l'inégalité suivante*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \| v \|_{L^r(\Omega)} \leq S_r |v|_{1,\Omega}. \tag{1}$$

Lemme 0.2.2. *En dimension $d = 2$, l'injection de Sobolev nous donne l'existence d'une constante S_j^* telle que, pour tout $1 \leq j < \infty$, nous ayons*

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \| v \|_{L^j(\Omega)} \leq S_j^* \| v \|_{1,\Omega} . \tag{2}$$

Remarque 0.2.3. *En dimension $d = 3$, les inégalités (1) et (2) restent valables pour $r \leq 6$ et $j \leq 6$, d'où l'intérêt de travailler en dimension $d = 2$.*

Finalement, nous énonçons le théorème de trace :

Théorème 0.2.4. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière lipschitzienne Γ. Alors l'application trace*

$$\begin{cases} D(\bar{\Omega}) & \to & C^0(\Gamma) \\ v & \mapsto & \gamma_0(v) = v_{|\Gamma} \end{cases}$$

se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$. Cela implique en particulier l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \| \gamma_0(v) \|_{L^2(\Gamma)} \leq C \| v \|_{1,\Omega} .$$

Pour des raisons de calcul, nous introduisons la proposition suivante que nous utiliserons souvent dans les techniques de démonstration.

Proposition 0.2.5. *Soient a, b et p trois réels positifs. Nous avons l'inégalité suivante*

$$||a|^p - |b|^p| \leq p|a - b|\big(|a|^{p-1} + |b|^{p-1}\big).$$

Preuve

Nous posons $f(x) = x^p$ avec $x > 0$. Comme f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ il en résulte

$$|f(a) - f(b)| \leq \sup_{\tau \in [a,b]} |p\tau^{p-1}||a - b|.$$

Si $|a| \leq \tau \leq |b|$ ou $|b| \leq \tau \leq |a|$,

alors nous avons

$$|\tau|^{p-1} \leq \max(|a|^{p-1}, |b|^{p-1}) \leq |a|^{p-1} + |b|^{p-1}.$$

Nous déduisons alors

$$||a|^p - |b|^p| \leq p|a - b|\big(|a|^{p-1} + |b|^{p-1}\big). \tag{3}$$

3 La méthode des éléments finis

De nombreuses techniques sont utilisées pour la discrétisation des équations aux dérivées partielles modélisant les problèmes de la mécanique, physique, etc. Les méthodes les plus connues sont la méthode des *différences finies*, la méthode des *éléments finis*, la méthode des *volumes finis* et la méthode *spectrale*. Dans cette thèse, nous nous intéressons à la méthode des éléments finis qui est la méthode numérique de référence pour le calcul des solutions de problémes aux limites elliptiques.

En effet, nous supposons que Ω est un domaine polygonal en dimension $d = 2$ ou polyédrique en dimension $d = 3$, partitionné en un nombre fini de triangles ou de tétraèdres $\mathcal{T}_h = \{K\}$ tel que

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K.$$

$(\mathcal{T}_h)_h$ est dite une famille régulière de triangulations de $\overline{\Omega}$ si elle vérifie les conditions suivantes :

a) l'intersection de deux éléments distincts est soit une arête, soit un sommet, soit le vide. En dimension $d = 3$, l'intersection peut être aussi une face.

b) Soit ρ_K le rayon du cercle ou de la sphère inscrite dans K, il existe une constante σ indépendante de h telle que

$$\max_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma.$$

Le principe de la méthode est directement issu de l'approche variationnelle. L'idée de base de la méthode des éléments finis est de remplacer l'espace de Hilbert V sur lequel est posée la formulation variationnelle par un sous-espace de dimension finie V_h. Cette méthode est connue sous le nom de la méthode de Galerkin. Le problème approché, posé sur V_h, se ramène à la résolution d'un système linéaire ou non linéaire qu'on résout en uilisant un algorithme iératif. La solution est alors approchée par

$$u_h = \sum a_i \varphi_i(x),$$

où les φ_i sont les restrictions à chaque éléments K de polynômes (le plus souvent, des fonctions de Lagrange).

La méthode des éléments finis impose plus de calcul que la méthode des différences finis mais elle est utilisable sur des géométries plus complexes. En effet, la méthode des différences finies se limite à des géométries simples.

La méthode des volumes finis se base sur la forme dite forte de l'équation à résoudre, alors que la méthode des éléments finis se fonde sur une formulation variationnelle de l'équation. D'autre part, la méthode des éléments finis possède une propriété de conservativité locale sur une maille et l'ensemble des éléments autour de cette maille alors que la méthode des volumes finis possède cette propriété sur chaque volume.

Historiquement, les premières prémisses de la méthode des éléments finis ont été proposés par Richard Courant dans les années 1940 mais ce sont les mécaniciens qui ont développé et démontré l'éfficacité de cette méthode dans les années 1950. Les premières références citées sont celles d'Argyris (1954-1955), Turner, Clough, Martin et Topp (1956).

4 L'analyse d'erreur *a posteriori*

4.1 Principes généraux et propriétés

L'analyse *a posteriori* est l'outil de base pour l'adaptation automatique de maillages en éléments finis et volumes finis. En effet, l'adaptation automatique de maillage n'est autre que le raffinement et le déraffinement d'une triangulation. La construction du maillage est une phase assez délicate. Si le maillage est très grossier, le résultat ne sera pas satisfaisant bien que la durée des calculs soit courte. Par contre, si le maillage est très fin, nous faisons face à un problème majeur : certaines zônes ne nécessitent pas un maillage fin, ce qui conduit à un calcul inutile assez long. Pour cela, il faut raffiner le maillage uniquement

là où cela est nécessaire afin de diminuer autant que possible le temps que peut prendre une simulation numérique.

Les estimations d'erreur *a priori* fournissent des bornes sur l'écart de la solution approchée u_h à la solution exacte u comme suit

$$\| u_h - u \| \leq C h^{\alpha} \| u \|,$$

où $\| \, . \, \|$ est la norme associé à l'espace de travail choisi et α est un réel qui dépend du choix des éléments finis considéré et de la régularité de la solution u. La constance C est en général inconnue ou difficile à calculer. D'autre part, comme la régulatité de la solution exacte u est en général inconnue, nous ne pouvons pas calculer la norme de cette solution. Donc nous pouvons remarquer que la borne supérieure ne permet pas le contrôle de l'erreur et par suite ne peut pas servir comme critère d'arrêt pour un algorithme de résolution. Les estimations d'erreur *a priori* sont très importantes ; elles sont utilisées afin de justifier théoriquement la convergence de la méthode numérique. De plus, les estimations d'erreur *a priori* permettent de déterminer l'ordre de la méthode qui est un critère pour le choix de la discrétisation.

L'avantage des estimations d'erreur *a posteriori* est de fournir des bornes sur l'erreur faciles à calculer dès que la solution approchée u_h est connue. En effet, ces bornes sont evaluées uniquement en fonction de la solution calculée, des données du problème et des données du maillage. ainsi nous avons

$$\| u_h - u \| \leq \eta(\mathcal{T}_h, \mathcal{D}, u_h),$$

où $\mathcal{T}_h$ est le maillage et $\mathcal{D}$ est l'ensemble des données du problème. Dans le paragraphe suivant, nous définissons $\eta(\mathcal{T}_h, \mathcal{D}, u_h)$ comme étant la somme d'indicateurs d'erreur locaux.

Propriétés des estimations d'erreur *a posteriori*

• Un indicateur d'erreur *a posteriori* doit fournir une borne supérieure entièrement calculable. Une telle borne est dite *borne supérieure garantie.*

• Nous définissons l'indice d'efficacité comme suit

$$\mathcal{I}_{eff} = \frac{\| u_h - u \|}{\eta(\mathcal{T}_h, \mathcal{D}, u_h)}.$$

Une erreur n'est pas surévaluée si l'indice d'efficacité est proche de 1. De plus, quand $\lim_{h \to 0} \mathcal{I}_{eff} = 1$, on parle d'une *exactitude asymptotique.*

• Un indicateur d'erreur *a posteriori* est localisé sur chaque élément du maillage le plus souvent sous la forme suivante

$$\eta(\mathcal{T}_h, \mathcal{D}, u_h) = \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_K(h_K, \mathcal{D}, u_h))^2 \right\}^{1/2}.$$

Les indicateurs locaux de l'erreur ne sont utiles que s'ils fournissent une borne inférieure de l'erreur locale à une constante multiplicative près. En d'autre termes, les indicateurs locaux de l'erreur ne doivent pas surestimer trop l'erreur localement. En effet, nous majorons l'indicateur local par l'erreur locale $\| u_h - u \|_K$ en considérant les éléments autour de l'élément de maillage K.

$$\eta_K(\mathcal{T}_h, \mathcal{D}, u_h) \leq C \sum_{K \in \Delta_K} \| u_h - u \|_K .$$

où Δ_K représente l'ensemble des éléments autour de K (les éléments partageant avec K un sommet, un côté en dimension $d = 2$ ou une face en dimension $d = 3$). Nous pouvons maintenant parler de l'adaptation du maillage. En effet, le maillage est raffiné là où la valeur des indicateurs locaux est grande et déraffiné lorsque la valeur des indicateurs est petite.

• L'estimateur d'erreur *a posteriori* est dit *robuste* si la constante C est indépendante des paramètres du problème. En effet, les paramètres et coefficients des problèmes réels (viscosité, densité, diffusivité, convection, ...) varient sur plusieurs ordre de grandeur. De plus, la constante C es difficile à calculer en dimension plus grande ou égale à 2 mais, une fois calculée elle est importante pour des raisons de sécurité. Un estimateur d'erreur *robuste* assure que l'estimation d'erreur *a posteriori* va être de la même qualité dans toutes les situations.

Pour réaliser une stratégie adaptative efficace, il faut distinguer entre les différentes composantes de l'erreur. En particulier, pour un problème stationnaire, il s'agit de distinguer et estimer séparement l'erreur provenant de la discrétisation et l'erreur provenant de la linéarisation.

4.2 Estimations d'erreur *a posteriori* pour la méthode des éléments finis

Jusqu'à aujourdhui, différentes stratégies d'estimation d'erreur *a posteriori* pour la méthode des éléments finis ont été traitées. Nous référons sur ce sujet aux articles de Babuška et Rheinboldt [3, 4] et aussi, aux livres de Verfürth [21], [22]. Nous pouvons les diviser en plusieurs classes. Les classes d'estimations *a posteriori* les plus populaires sont les *estimations par résidu*. En fait, les premiers travaux sont ceux de Babuška [3, 4]. Cette classe d'estimation a été développé plus tard par Verfürth [21, 22]. En effet, les bornes supérieures sont calculables et multipliées par une constante indépendante de la solution exacte et du pas du maillage. Cette constante est en général difficile à calculer explicitement en dimension $d \geq 2$. C'est pourquoi l'estimation n'est pas garantie ; citons aussi

sur ce sujet le travail de Veeser et Verfürth [20]. Les *estimations par résidu équilibré*, cf. Ainsworth et Oden [2], donnent l'estimation d'erreur de la forme suivante :

soit $F(u) = 0$ le problème continue et $F_h(u_h) = 0$ le problème discretisé, nous avons

$$\begin{aligned} \| u - u_h \|_X &\leq \| F(u) - F(u_h) \|_Y \\ &\leq \| F(u_h) \|_Y \end{aligned}$$

où X est un espace de Banach et Y son espace dual.

Les *estimations par moyenne*, développées par Zienkiewicz et Zhu [23, 24], Strouboulis et Hague [19], sont basées sur des moyennes locales facilement calculables. Ces estimations ne sont pas garanties, elles sont par contre asymptotiquement exactes. Les *estimations fonctionnelles*, cf. Neittaanmäki et Repin [15] et Repin [18] donnent des bornes garanties par construction. Toutefois, il est difficile d'assurer l'exactitude asymptotique avec un petit coût de calcul.

Nous référons aussi à l'article de L. El Alaoui, A. Ern et M. Vohralík [11]. L'idée principale est de calculer des estimations d'erreur *a posteriori* du problème non linéaire $-\nabla.\sigma(\nabla u) = f$. En effet, le problème discret génère un système d'équations non linéaires qui sera résolu en utilisant un algorithme itératif. Etant donnée une solution approchée u_h, nous avons à un niveau donné du processus itératif et sur un maillage donné, deux sources d'erreur, l'erreur de linéarisation et l'erreur de discrétisation. Distinguer ces deux sources d'erreurs est d'une importance majeure, il va permettre d'éviter beaucoup d'itérations inutiles. Par conséquent, l'objectif de cette thèse est de concevoir des estimations d'erreur *a posteriori* en distinguant les erreurs de linéarisation et de discrétisation dans le cadre d'une procédure adaptative.

Dans un second article, celui de A.L. Chaillou et M. Suri [9], les auteurs sont intéréssés à analyser le problème non linéaire $Au = f$ où A est un opérateur non linéaire fortement monotone. En effet, ils présentent deux méthodes différentes afin de dériver des estimations d'erreur *a posteriori*. Dans le but de réaliser des calculs efficaces, les différentes composantes de l'erreur seront distinguées et estimées séparement. L'erreur totale est la somme de l'erreur de linéarisation et de l'erreur de discrétisation. Nous utiliserons cette stratégie plus tard dans notre travail.

5 Les équations de Navier-Stokes

La mécanique des fluides est l'étude du comportement des fluides (liquides et gaz) et des forces internes associées. Elle admet de nombreuses applications dans divers domaines comme l'ingénierie navale, l'aéronautique, l'étude de l'écoulement du sang ou encore la météorologie. Par exemple, la mécanique des fluides est un outil indispensable pour les ingénieurs hydrauliciens. Son utilisation permet d'obtenir des prévisions détaillées concernant l'écoulement d'eau dans différentes configurations, sans avoir la nécessité de prendre

de nombreuses mesures de terrain, qui sont nécessairement coûteuses et gourmandes en temps.

Les équations qui gouvernent les fluides incompressibles visqueux sont celles de Navier-Stokes. Ces équations constituent un modèle mathématique qui décrit l'écoulement d'un tel fluide. Elles modélisent par exemple les mouvements de l'air de l'atmosphère, les courants océaniques, l'écoulement de l'eau dans un tuyau, et de nombreux autres phénomènes d'écoulement de fluides. Dans le cas d'un mouvement non turbulent ou écoulement rampant, nous utilisons les équations de l'écoulement de Stokes qui correspond à un faible nombre de Reynolds. Le nombre de Reynolds est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides. Il caractérise les écoulements, en particulier la nature de son régime (de Stokes, turbulent, laminaire et transitoire). L'équation de transport est l'équation mathématique qui modélise le comportement des particules.

Les équations de Navier-Stokes gouvernent l'évolution du champ de vitesse $\mathbf{u}$ ainsi que la pression p dans un fluide homogène soumis à des forces extérieures. Ce phénomène se traduit mathématiquement par l'introduction du coefficient de viscosité $\nu > 0$ et le paramètre de densité $\rho > 0$.

Nous disons qu'un écoulement est turbulent lorsque la vitesse du fluide présente en tout point un caractère tourbillonnaire. D'autre part, nous appellons laminaire le caractère d'un écoulement non turbulent. Nous définissons alors le *nombre de Reynolds* comme suit :

$$Re = \frac{\rho \overline{v}\, \overline{r}}{\nu},$$

où $\overline{v}$ est la vitesse moyenne du fluide et $\overline{r}$ est la dimension moyenne du domaine d'écoulement. Ce nombre permet de détecter l'apparition de la turbulence : plus il est élevé, plus la viscosité est faible, et plus les tourbillons pourront se développer.

Nous supposons que la densité ρ est constante, alors le fluide est *incompressible*. En d'autre termes, la masse du fluide varie faiblement avec la pression et la température. Nous avons alors

$$\text{div } \mathbf{u} = 0.$$

Dans le cas d'un fluide *incompressible*, nous obtenons le système suivant :

Soit Ω un polygone de $\mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3 de frontière $\partial\Omega$,

$$(4) \qquad \begin{cases} \rho \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{u} &= 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

avec $\mathbf{f} \in H^{-1}(\Omega)$.

6 Plan de la thèse

Dans le chapitre 1, nous nous intéressons à la résolution du problème non linéaire défini comme suit :

Soit Ω un polygone de $\mathbb{R}^2$, de frontière $\partial\Omega$,

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda |u|^{2p} u &= f \qquad \text{dans } \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec $f \in H^{-1}(\Omega)$, $\lambda > 0$ et $p > 0$.

Remarque 0.6.1. *En dimension* 3*, la formulation variationnelle du problème non linéaire n'est pas valable que pour* $2p + 2 \leq 6$*. Pour cette raison, nous ne travaillons qu'en dimension* $d = 2$*.*

En premier lieu, nous discrétisons par éléments finis l'équation dans le domaine Ω et nous traitons le problème discret non linéaire. En effet, nous utilisons le théorème de Brezzi-Rappaz-Raviart afin de montrer l'existence de la solution du problème et l'estimation d'erreur *a priori*.

En second lieu, nous résolvons le problème discret à l'aide d'une méthode itérative. Dans ce but, nous considérons le problème itératif suivant :

$$(\nabla u_h^{i+1}, \nabla v_h) + \lambda(|u_h^i|^{2p} u_h^{i+1}, v_h) = \langle f, v_h \rangle.$$

Dans une première étape, nous montrons l'existence et l'unicité de la solution du problème. Par la suite, nous énonçons un théorème qui montre la convergence de ce problème vers la solution du problème discret non linéaire.

Après avoir établi l'estimation d'erreur *a priori* , nous calculons les estimations d'erreur *a posteriori* du problème non linéaire ainsi que du problème linéarisé en distinguant les deux composantes de l'erreur : l'erreur de linéarisation et l'erreur de discrétisation. Nous vérifions enfin que ces estimations sont optimales.

Par la suite, nous proposons de comparer la performance de notre méthode itérative avec l'algorithme de Newton suivant :

$$(\nabla u_h^{i+1}, \nabla w_h) + \lambda(2p+1)({u_h^i}^{2p} u_h^{i+1}, w_h) = 2\lambda p((u_h^i)^{2p+1}, w_h) + (f, w_h).$$

Pour cela, nous commençons par montrer l'existence et l'unicité de la solution de l'algorithme de Newton et nous énonçons un théorème qui montre une convergence conditionnée de cet algorithme vers la solution du problème discret non linéaire.

Par la suite, nous calculons les estimations d'erreur *a posteriori* du problème de Newton toujours en distinguant les deux différentes composantes de l'erreur. Nous vérifions ensuite que ces estimations sont optimales.

Dans le chapitre 2, afin de valider les résultats théoriques obtenus dans le chapitre 1, nous justifions notre analyse en utilisant le logiciel $FreeFem++$, créé et développé par F. Hecht, O. Pironneau et K. Ohtsuka [13]. Nous effectuons l'analyse *a priori* et *a posteriori* des deux algorithmes itératifs déjà introduit dans le chapitre 1(la méthode itérative initiale et l'algorithme de Newton). De plus, nous proposons et nous comparons deux critères d'arrêts différents : le critère d'arrêt classique ($\eta_i^{(L)} \leq \epsilon$) et un nouveau critère d'arrêt ($\eta_i^{(L)} \leq \gamma\eta_i^{(D)}$), où $\eta_i^{(L)}$ et $\eta_i^{(D)}$ sont les indicateurs d'erreur de linéarisation et de discrétisation respectivement, ϵ est une tolérance et γ un paramètre positif.

Dans le chapitre 3, nous nous intéressons à la résolution des équations de Navier-Stokes stationnaires. Nous considérons alors le système suivant :

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{rcll} -\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} + \nabla p & = & \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{u} & = & 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} & = & \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3.

En permier lieu, nous rappelons l'existence et les conditions d'unicité du problème (5).

Par la suite, afin de résoudre ces équations nous proposons l'algorithme itératif suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} Trouver\ \mathbf{u}_h^{i+1} \in X_h,\ p_h^{i+1} \in M_h; \\ \forall \mathbf{v}_h \in X_h,\ \displaystyle\int_\Omega \nabla\mathbf{u}_h^{i+1}\nabla\mathbf{v}_h\, d\mathbf{x} + \int_\Omega (\mathbf{u}_h^i.\nabla)\mathbf{u}_h^{i+1}\mathbf{v}_h\, d\mathbf{x} + \int_\Omega p_h^{i+1}\,\text{div}\,\mathbf{v}_h\, d\mathbf{x} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h\rangle \\ \forall q_h \in M_h,\ \displaystyle\int_\Omega q_h\,\text{div}\,\mathbf{u}_h^{i+1}\, d\mathbf{x} = 0. \end{array} \right.$$

Nous introduisons à cette étape un théorème qui montre la convergence de cet algorithme itératif. Par la suite, nous dérivons une estimation d'erreur *a posteriori* pour la discrétisation du problème de Navier-Stokes par la méthode des éléments finis. Comme précédemment, nous distinguons les deux composantes d'erreur : l'erreur de discrétisation

et l'erreur de linéarisation. Après avoir établi ces estimations, nous montrons qu'elles sont optimales.

Finalement, dans le chapitre 4 nous présentons des essais numériques afin de valider les résultats théoriques. Ces expériences numériques montrent bien l'éfficacité et l'importance de distinguer les erreurs de linéarisation et de discrétisation. Nous présentons des résultats numériques qui montrent une comparaison des deux critères d'arrêt introduit dans le chapitre 2.

Chapitre 1

Étude *a posteriori* d'un modèle de problème non linéaire

Sommaire

1.1 Problème continu 16
1.2 Existence et Unicité 17
1.3 Problème discret et estimation d'erreur *a priori* 18
1.3.1 Discrétisation 18
1.3.2 Existence et estimation d'erreur 19
1.3.3 Estimation d'erreur *a posteriori* du problème non linéaire . . . 25
1.3.4 Efficacité 32
1.4 Problème itératif 36
1.4.1 Existence et Unicité 36
1.4.2 Convergence 37
1.4.3 Estimation d'erreur *a posteriori* du problème linéarisé 39
1.4.4 Efficacité 43
1.5 Méthode de Newton 47
1.5.1 Existence et Unicité 48
1.5.2 Convergence 48
1.5.3 Estimation d'erreur *a posteriori* 50
1.5.4 Efficacité 53

1.1 Problème continu

Soit Ω un ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^2$, de frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne. Dans ce chapitre nous nous intéressons à la résolution du problème non linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u + \lambda |u|^{2p} u & = & f & \text{dans } \Omega \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{1.1}$$

avec $f \in H^{-1}(\Omega)$, $\lambda > 0$ et $p \in \mathbb{R}^+$.

Proposition 1.1.1. *Le problème non linéaire* (1.1) *pris au sens des distributions admet la formulation variationelle suivante : Trouver $u \in X$ tel que*

$$\forall v \in X, \quad \int_\Omega \nabla u \nabla v d\mathbf{x} + \int_\Omega \lambda |u|^{2p} uv d\mathbf{x} = \langle f, v \rangle \tag{1.2}$$

avec $X = H_0^1(\Omega)$.

Preuve

Notre but est d'établir l'équivalence entre le problème non linéaire et la formulation variationnelle. En effet, soit u une solution du problème (1.1), nous avons au sens de distribution

$$\forall v \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle -\Delta u, v \rangle + \langle \lambda |u|^{2p} u, v \rangle = \langle f, v \rangle, \tag{1.3}$$

d'où,

$$-\int_\Omega u.\Delta v \; d\mathbf{x} + \int_\Omega \lambda |u|^{2p} uv \; d\mathbf{x} = \langle f, v \rangle. \tag{1.4}$$

Nous obtenons alors l'équation suivante

$$\forall v \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \int_\Omega \nabla u \nabla v \; d\mathbf{x} + \int_\Omega \lambda |u|^{2p} uv \; d\mathbf{x} = \langle f, v \rangle. \tag{1.5}$$

La densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans X nous permet de déduire que u est une solution de (1.2).

Réciproquement, soit u une solution du problème (1.2), si nous prenons $v = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ comme fonction test, l'équation (1.2) donne

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi d\mathbf{x} + \int_\Omega \lambda |u|^{2p} u \varphi d\mathbf{x} = \int_\Omega f \varphi d\mathbf{x}. \tag{1.6}$$

La fonction u est donc bien solution du problème $-\Delta u + \lambda |u|^{2p} u = f$ au sens de distribution. Le problème (1.1) est alors equivalent à la formulation variationelle (1.2).

1.2 Existence et Unicité

Dans cette partie, notre but est de montrer l'éxistence et l'unicité de la solution du problème non linéaire (1.1). Pour cela, nous commençons par rappeler le résultat de minimisation de l'énergie suivant (voir [14], Chapitre 3) :

Théorème 1.2.1. *Soient X un espace de Banach reflexif, K un convexe fermé de X et $J : K \to \mathbb{R}$ une fonction convexe semi-continue inférieurement. Lorsque K est non borné, supposons qu'on a $J(x_n) \to +\infty$ pour toute suite $(x_n)_n$ de K telle que $\| x_n \| \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$. Alors J est bornée inférieurement et elle atteint son minimum sur K :*

$$\exists u \in K, \quad J(u) = \inf_{v \in K} J(v) = \min_{v \in K} J(v).$$

De plus, si J est strictement convexe alors u est unique.

Avant d'énonçer le théorème qui montre l'existence et l'unicité de la solution du problème (1.1), nous faisons la remarque suivante :

Remarque 1.2.2. *Si f est une fonction puissance $f : x \mapsto x^q$ alors f est strictement convexe pour $q > 1$.*

Théorème 1.2.3. *Le problème non linéaire* (1.1) *admet une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$.*

Preuve

Pour commençer, nous associons au problème (1.1) la fonctionnelle d'énergie :

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 d\mathbf{x} + \frac{\lambda}{2p+2} \int_\Omega |u(x)|^{2p} u(x)^2 d\mathbf{x} - \langle f, u(x) \rangle.$$

Nous déduisons de la **Remarque 1.2.2** que $E(u)$ strictement convexe de classe C^1 sur $H_0^1(\Omega)$ comme étant la somme de fonctions convexes et strictement convexe.

Par ailleurs, comme

$$\langle f, u\rangle \ \leq \| f \|_{-1,\Omega} \| u \|_{1,\Omega}, \tag{1.7}$$

nous obtenons alors la minoration suivante :

$$E(u) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{\lambda}{2p+2}\int_\Omega |u|^{2p+2} - \| f \|_{-1,\Omega} \| u \|_{1,\Omega} \ .$$

Par suite, $E(u)$ tend vers l'infini lorsque $\| u \|_{1,\Omega} + \| u \|_{L^{2p+2}(\Omega)}$ tend vers l'infini.

Comme $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, nous déduisons d'après le théorème 1.2.1 que E atteint son minimum sur $H_0^1(\Omega)$ en un unique point u, et nous avons

$$E'(u) = -\Delta u + \lambda |u|^{2p} u - f = 0, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Comme par ailleurs $u = 0$ au sens des traces nous obtenons ainsi une solution faible du problème (1.1).

1.3 Problème discret et estimation d'erreur *a priori*

Dans cette partie nous traitons le problème discret. En premier lieu, nous introduisons la discrétisation, pour démontrer par la suite l'existence d'une solution unique du problème discret et calculer l'estimation d'erreur *a priori*.

1.3.1 Discrétisation

Désormais, nous supposons que Ω est un domaine polygonal tel que :

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K,$$

où K est un triangle arbitraire. Nous notons h_K le diamètre de K et $h > 0$ le paramètre de discrétisation

$$h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \ h_K.$$

Nous considérons une suite $(X_h)_h$ d'espaces de dimension finie N_h (N_h tend vers l'infini quand h tend vers zéro) constituant une approximation interne de X i.e :

a) $\forall h, \ X_h \subset X$,

b) $\forall \phi \in X; \exists \phi_h \in X_h; \lim_{h \to 0} \| \phi - \phi_h \|_X = 0.$

Le problème variationnel discret associé à la formulation variationnelle (1.2) est alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} Trouver\ u_h \in X_h; \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u_h \nabla v_h d\mathbf{x} + \int_\Omega \lambda |u_h|^{2p} u_h v_h d\mathbf{x} = \langle f, v_h \rangle \quad \forall v_h \in X_h. \end{array} \right. \tag{1.8}$$

1.3.2 Existence et estimation d'erreur

Dans cette partie, notre objectif est de démontrer l'existence de la solution du problème variationnel discrétisé (1.8) et de calculer l'estimation d'erreur *a priori* correspondante. Dans ce but, nous utilisons le théorème de Brezzi-Rappaz-Raviart [8]

Théorème de Brezzi-Rappaz-Raviart

Soient V et W deux espaces de Banach, G une application définie sur V à valeurs dans W et S une application linéaire continue définie sur W à valeurs dans V.

Posons

$$F(u) = u - SG(u).$$

Nous faisons les hypothèses suivantes :

(i) DG est une application lipschitzienne.

(ii) Pour tout $u \in V$ l'opérateur $SDG(u) \in \mathcal{L}(V)$ est compact.

(iii) Pour tout $u \in V$, $DF(u)$ est un isomorphisme dans V.

Posons, pour tout $u_h \in V_h \subset V$

$$F_h(u_h) = u_h - S_h G(u_h),$$

où S_h est une application linéaire continue définie sur W à valeurs dans V_h. De plus, nous introduisons un opérateur linéaire continu Π_h définie sur V à valeurs dans V_h tel que

$$\lim_{h \to 0} \| v - \Pi_h v \|_V = 0 \quad \text{pour tout } v \in V. \tag{1.9}$$

Théorème 1.3.1. *Soit G une application de V dans W de classe C^1, telle que l'opérateur DG soit borné sur tout sous-ensemble borné de V. Nous supposons de plus que* **(i)**,**(ii)**,**(iii)** *et* (1.9) *soient satisfaites. S'il existe une constante $C > 0$ tel que,*

$$\|S_h\|_{\mathcal{L}(W,V)} \leq C, \tag{1.10}$$

et, si nous avons

$$\lim_{h\to 0} \| S_h - S \|_{\mathcal{L}(W,V)} = 0, \tag{1.11}$$

alors, il existe un voisinage $\mathcal{O}$ dans V et il existe $h_0 > 0$ tels que, pour tout $h \leq h_0$, le problème $F_h(u_h) = 0$ admet une solution unique tel que $u_h - u \in \mathcal{O}$.
De plus, nous avons

$$\| u_h - u \|_V \leq K\Big(\| u - \Pi_h u \|_V + \| (S_h - S)G(u) \|_V \Big). \tag{1.12}$$

où K est une constante indépendante de h.

Application du Théorème de Brezzi-Rappaz-Raviart

Nous considérons le problème (1.1)

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u + \lambda |u|^{2p} u & = & f & \text{dans } \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

avec $f \in H^{-1}(\Omega)$, $\lambda > 0$.

Nous introduisons les espaces

$$V = H_0^1(\Omega),\ W = H^{-1}(\Omega).$$

Nous définissons l'opérateur S linéaire continu, comme suit

$$\begin{array}{rccl} S: & W & \to & V \\ & f & \mapsto & Sf = w, \end{array}$$

où w est solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta w & = & f & \text{dans } \Omega, \\ w & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

En effet, le théorème de Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité de la solution w.

Nous définissons de même l'opérateur G par

$$\begin{array}{rccl} G: & V & \to & W \\ & w & \mapsto & G(w) = f - \lambda|w|^{2p}w. \end{array}$$

Nous remarquons que la solution $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème (1.1) s'écrit de façon equivalente comme suit

$$F(u) = u - SG(u) = 0.$$

Dans le but d'appliquer le théorème de Brezzi-Rappaz-Raviart, nous montrons en premier lieu que $SDG(u)$ est un opérateur compact. En effet, S est une application continue. De plus,

$$\begin{array}{rccl} DG(u): & V & \to & W \\ & v & \mapsto & DG(u).v \end{array}$$

est une application compacte. En effet, c'est la composée des deux applications suivantes

$$\begin{array}{ccccc} & & & & DG(u) \\ V = H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & L^2(\Omega) & \longrightarrow & W = H^{-1}(\Omega). \\ & \textit{injection} & & \textit{application} & \\ & \textit{compacte} & & \textit{continue} & \end{array}$$

Nous pouvons ainsi conclure que $SDG(u) \in \mathcal{L}(V)$ est compact puisque c'est la composition d'un opérateur compact et d'un opérateur linéaire continu.

Montrons de plus que $DF(u)$ est un isomorphisme dans V.

En effet,

$$DF(u) = I - SDG(u).$$

Comme $SDG(u) \in \mathcal{L}(V)$ est compact, l'Alternative de Fredholm nous affirme que $DF(u)$ est un isomorphisme dans V si l'équation $\big(I - SDG(u)\big).w = 0$ admet une solution unique $w = 0$.

Comme,

$$DG(u).w = -\lambda\big(2p+1\big)|u|^{2p}w,$$

nous considérons le problème suivant

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta w + \lambda\big(2p+1\big)|u|^{2p}w & = & 0 & \text{dans } \Omega, \\ w & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{1.13}$$

avec $\lambda > 0$.

Corollaire 1.3.2. *L'équation* $(I - SDG(u)).w = 0$ *admet une solution unique* $w = 0$.

Preuve

Pour commençer, nous posons

$$\begin{array}{rcl} a(w,v) & = & \displaystyle\int_\Omega \nabla w \nabla v + \lambda\big(2p+1\big)|u|^{2p}wv, \\ l(v) & = & 0. \end{array}$$

En effet, la forme $a(.,.)$ est bilinéaire continue et coercive sur $V \times V$. D'après le théorème de Lax-Milgram, le problème (1.13) admet une unique solution w dans V. Comme $w = 0$ est bien solution du problème (1.13) nous déduisons finalement que c'est la solution unique de ce problème.

Nous avons alors d'après le Corollaire 1.3.2 que l'opérateur $DF(u)$ est un isomorphisme dans V.

Par ailleurs, nous définissons l'opérateur S_h linéaire et continu

$$\begin{array}{rccl} S_h: & W & \to & V_h \\ & f & \mapsto & S_h f = w_h, \end{array}$$

où w_h vérifie

$$\forall v_h \in V_h, \qquad \int_\Omega \nabla w_h \nabla v_h d\mathbf{x} = \int_\Omega f v_h d\mathbf{x}. \tag{1.14}$$

V_h est un espace de dimension finie inclus dans V et approchant ce dernier ; c'est le principe de la méthode de Galerkin. Le paramètre h fait référence à la taille de maillage ou plus précisément à la qualité de l'approximation de V par V_h. En effet, l'espace V_h approchera de mieux en mieux l'espace V avec la diminution du paramètre h. Nous considérons

$$V_h = \Big\{ v_h \in V;\ \forall K \in \mathcal{T}_h,\ v_{h_{|K}} \in \mathcal{P}_1 \Big\},$$

où $\mathcal{P}_1$ désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à un.

Nous posons, pour tout $w_h \in V_h$,

$$F_h(w_h) = w_h - S_h G(w_h).$$

Nous remarquons que $F_h(u_h) = 0$ pour la solution discrète u_h du problème (1.8).

À cette étape, nous vérifions que

$$\lim_{h\to 0} \| S_h - S \|_{\mathcal{L}(W,V)} = 0.$$

En effet,

$$\| S_h - S \|_{\mathcal{L}(W,V)} = \sup_{f\in W/\{0\}} \frac{\| (S_h - S)f \|_V}{\| f \|_W},$$

Or,

$$\| (S_h - S)f \|_V = \| w - w_h \|_{1,\Omega}\ .$$

Comme $\| w - w_h \|_V$ tend vers 0 quand h tend vers 0 pour le problème de Laplacien avec conditions de Dirichlet, nous obtenons le résultat.

Lemme 1.3.3. *Soit u la solution du problème* (1.2)*. L'application $\mathcal{S}_h DG(u)$ est lipschitzienne. En effet, il existe un réel $L > 0$ tel que*

$$\forall w \in X,\ \ \| \mathcal{S}_h \big(DG(u) - DG(w) \big) \|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega))} \leq L |u - w|_{1,\Omega}.$$

Preuve

Pour tout $w,\ z \in X$ nous avons

$$\| \mathcal{S}_h \big(DG(u).z - DG(w).z \big) \|_{1,\Omega} \leq \| DG(u).z - DG(w).z \|_{-1,\Omega}\ . \tag{1.15}$$

Or,

$$\| DG(u).z - DG(w).z \|_{-1,\Omega} = \sup_{v\in X} \frac{|\langle DG(u).z - DG(w).z, v\rangle|}{|v|_{1,\Omega}},$$

et

$$DG(u).z - DG(w).z = \lambda(2p+1)\big(|w|^{2p} - |u|^{2p}\big).z \tag{1.16}$$

Nous nous référons à l'équation (1.29) dans la preuve du Théorème 1.3.7 pour la majoration

(1.17)
$$\lambda(2p+1)\int_\Omega \big(|w|^{2p}-|u|^{2p}\big).zvd\mathbf{x} \leq \lambda(2p+1)4pS_2S_4S_8S_{8(2p-1)}^{2p-1} \parallel f \parallel_{-1,\Omega}^{2p-1} |u-w|_{1,\Omega}|z|_{1,\Omega}|v|_{1,\Omega}.$$

d'où, nous obtenons

$$\parallel DG(u).z - DG(w).z \parallel_{-1,\Omega} \leq L|u-w|_{1,\Omega}|z|_{1,\Omega}.$$

Nous énonçons maintenant le corollaire suivant qui dérive du Théorème 1.3.1 et qui donne l'estimation d'erreur *a priori*.

Corollaire 1.3.4. *Soit u la solution du problème* (1.2) *et $\Pi_h \in L(V, V_h)$ un opérateur linéaire qui vérifie*

$$\lim_{h\to 0} \parallel v - \Pi_h v \parallel_{1,\Omega} = 0.$$

Il existe alors un voisinage $\mathcal{O}$ d'origine dans V et un nombre réel $h_0 > 0$, tel que, pour tout $h \leq h_0$, le problème (1.8) *admet une unique solution u_h avec $u_h - u \in \mathcal{O}$. De plus, nous avons l'estimation d'erreur a priori suivante*

$$\parallel u_h - u \parallel_V \leq K_0 \Big\{ \parallel u - \Pi_h u \parallel_V + \parallel (S_h - S)G(u) \parallel_V \Big\},$$

où K_0 est une constante indépendante de h.

Corollaire 1.3.5. *Soit Ω un domaine convexe, si les éléments finis utilisés sont des éléments de Lagrange du premier ordre $\mathcal{P}_1$ et si $u \in H^2(\Omega)$, nous avons alors l'estimation suivante*

$$\parallel u - \Pi_h u \parallel_{1,\Omega} \leq Ch.$$

De plus, nous avons

$$\parallel (S_h - S)G(u) \parallel_{1,\Omega} \leq Ch$$

comme étant l'estimation d'erreur de discrétisation du problème de Laplacien avec conditions de Dirichlet. D'où, nous obtenons l'estimation suivante

$$\parallel u - u_h \parallel_{1,\Omega} \leq Ch.$$

Remarque 1.3.6. *Désormais, $A \lesssim B$ représente l'inégalité $A \leq CB$ où C est une constante positive arbitraire indépendante de h.*

1.3.3 Estimation d'erreur *a posteriori* du problème non linéaire

Nous rappelons tout d'abord notre problème non linéaire défini sur un polygône Ω ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^2$, de frontière $\partial\Omega$:

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda |u|^{2p} u &= f \qquad \text{dans } \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec $f \in H^{-1}(\Omega)$ et $\lambda > 0$. Nous considérons par la suite que p est un réel positif.

Notre but dans ce paragraphe est de calculer l'estimation d'erreur *a posteriori* du problème. Nous utilisons les éléments finis de Lagrange du premier ordre $\mathcal{P}_1$, par suite le terme Δu_h s'annule sur chaque triangle $K \in \mathcal{T}_h$. Nous définissons l'indicateur d'erreur par résidu η_K et la constante S provenant des injections de Sobolev :

$$\begin{aligned} (\eta_K)^2 &= h_K^2 \parallel f_h - \lambda |u_h|^{2p} u_h \parallel^2_{L^2(K)} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_{K,\Omega}} h_e \parallel [\frac{\partial u_h}{\partial n}] \parallel^2_{L^2(e)}, \\ S &= S_2 S_4 S_{8p}^{2p} + 4p S_2 S_4 S_8 S_{8(2p-1)}^{2p-1}, \end{aligned}$$

où $\mathcal{E}_{K,\Omega}$ est l'ensemble des côtés d'un élément K de $\mathcal{T}_h$ qui ne sont pas contenus dans $\partial\Omega$.

Dans ce qui suit, nous présentons deux approches différentes afin d'établir les estimations d'erreur *a posteriori*. En effet, la première approche correspond aux petites données du problème λ et p, alors que la seconde stratégie consiste à calculer une estimation d'erreur *a posteriori* sans avoir des conditions sur les données mais en ayant u_h dans un voisinage de la solution u.

Nous introduisons le théorème suivant :

Théorème 1.3.7. *Soit u une solution du problème non linéaire* (1.1) *et u_h une solution du problème discret. Si $\lambda S \parallel f \parallel^{2p}_{-1,\Omega} < 1$, nous obtenons l'estimation suivante*

$$|u - u_h|_{1,\Omega} \leq C(1 - \lambda S \parallel f \parallel^{2p}_{-1,\Omega})^{-1} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_K^2 + h_K^2 \parallel f - f_h \parallel^2_{L^2(K)}) \right)^{1/2}.$$

Preuve

Tout d'abord, nous montrons que la solution du problème (1.8) vérifie l'estimation :

$$|u_h|_{1,\Omega} \leq \parallel f \parallel_{-1,\Omega}. \tag{1.18}$$

En effet, nous obtenons le résultat en remplaçant v_h par u_h dans l'équation (1.8). Commençons maintenant par considérer l'équation suivante :

$$\int_\Omega \nabla(u-u_h)\nabla v d\mathbf{x} = \int_\Omega \nabla(u-u_h)\nabla(v-v_h)d\mathbf{x} + \int_\Omega \nabla(u-u_h)\nabla v_h d\mathbf{x}. \tag{1.19}$$

Calculons le premier terme $\int_\Omega \nabla(u-u_h)\nabla(v-v_h)d\mathbf{x}$.

En effet,

$$\int_\Omega \nabla(u-u_h)\nabla(v-v_h)d\mathbf{x} = \int_\Omega \nabla u\nabla(v-v_h)d\mathbf{x} - \int_\Omega \nabla u_h\nabla(v-v_h)d\mathbf{x}, \tag{1.20}$$

or,

$$\int_\Omega \nabla u\nabla(v-v_h)d\mathbf{x} = \int_\Omega f(v-v_h)d\mathbf{x} - \int_\Omega \lambda|u|^{2p}u(v-v_h)d\mathbf{x}. \tag{1.21}$$

En utilisant (1.21) dans l'équation (1.20), nous obtenons

(1.22)

$$\int_\Omega \nabla(u-u_h)\nabla(v-v_h)d\mathbf{x} = \int_\Omega f(v-v_h)d\mathbf{x} - \int_\Omega \lambda|u|^{2p}u(v-v_h)d\mathbf{x} - \int_\Omega \nabla u_h\nabla(v-v_h)d\mathbf{x}.$$

Nous considérons la fonction $f_h \in \mathcal{Z}_h = \{\ g \in L^2(\Omega)\ ; \forall K \in \mathcal{T}_h,\ g_{\ell_K} \in \mathcal{P}_0(K)\ \}$ où $\mathcal{P}_l(K)$ est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à ℓ sur le triangle K.

Nous intercalons $\pm\int_\Omega f_h(v-v_h)d\mathbf{x}$ et $\pm\lambda\int_\Omega |u_h|^{2p}u_h(v-v_h)d\mathbf{x}$ dans l'équation (1.22), et nous faisons une intégration par parties. Nous obtenons alors la relation suivante

$$\int_\Omega \nabla(u-u_h)\nabla(v-v_h)d\mathbf{x} = \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K (f-f_h)(v-v_h)d\mathbf{x} + \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\Big\{\int_K (f_h-\lambda|u_h|^{2p}u_h)(v-v_h)d\mathbf{x}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}}\int_e [\frac{\partial u_h}{\partial n}](v-v_h)d\tau\Big\} + \lambda\int_\Omega (|u_h|^{2p}u_h - |u|^{2p}u)(v-v_h)d\mathbf{x}, \tag{1.23}$$

où τ est la coordonée tangentielle sur ∂K.

D'autre part, nous avons

$$\int_\Omega \nabla(u-u_h)\nabla v_h d\mathbf{x} = \lambda\int_\Omega (|u_h|^{2p}u_h - |u|^{2p}u)v_h d\mathbf{x}. \tag{1.24}$$

Finalement, en insérant (1.23) et (1.24) dans l'équation (1.19), nous obtenons

$$\int_\Omega \nabla(u-u_h)\nabla v d\mathbf{x} = \int_\Omega (f-f_h)(v-v_h)d\mathbf{x} + \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\Big\{ \int_K (f_h-\lambda|u_h|^{2p}u_h)(v-v_h)d\mathbf{x} - \frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}}\int_e [\frac{\partial u_h}{\partial n}](v-v_h)d\tau\Big\} + \lambda\int_\Omega (|u_h|^{2p}u_h-|u|^{2p}u)vd\mathbf{x}. \tag{1.25}$$

Nous majorons en premier lieu le dernier terme $\lambda\int_\Omega (|u_h|^{2p}u_h-|u|^{2p}u)vd\mathbf{x}$.

En effet,

$$\lambda\int_\Omega (|u_h|^{2p}u_h-|u|^{2p}u)vd\mathbf{x} = \lambda\int_\Omega |u_h|^{2p}(u_h-u)vd\mathbf{x} + \lambda\int_\Omega u(|u_h|^{2p}-|u|^{2p})vd\mathbf{x}. \tag{1.26}$$

Commençons par estimer $\lambda\int_\Omega |u_h|^{2p}(u_h-u)vd\mathbf{x}$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$\lambda\int_\Omega |u_h|^{2p}(u_h-u)vd\mathbf{x} \leq \lambda \parallel u_h^{2p}\parallel_{L^4(\Omega)}\parallel u_h-u\parallel_{L^4(\Omega)}\parallel v\parallel_{L^2(\Omega)}.$$

Or, nous avons

$$\parallel u_h^{2p}\parallel_{L^4(\Omega)} = \left(\int_\Omega u_h^{8p}d\mathbf{x}\right)^{1/4} = \left[\left(\int_\Omega u_h^{8p}d\mathbf{x}\right)^{1/8p}\right]^{2p} = \parallel u_h\parallel^{2p}_{L^{8p}(\Omega)}.$$

D'après l'inégalité (1.18) nous obtenons,

$$\parallel u_h^{2p}\parallel_{L^4(\Omega)} \leq S_{8p}^{2p}\parallel f\parallel^{2p}_{-1,\Omega},$$

par suite,

$$\lambda\int_\Omega (|u_h|^{2p}(u_h-u)vd\mathbf{x} \leq \lambda S_2S_4S_{8p}^{2p}\parallel f\parallel^{2p}_{-1,\Omega}|u-u_h|_{1,\Omega}|v|_{1,\Omega}. \tag{1.27}$$

D'autre part, nous majorons le second terme du second membre de l'équation (1.26). En effet, en utilisant la proposition 0.2.5, nous trouvons

$$||u_h|^{2p}-|u|^{2p}| \leq 2p\big(|u_h|^{2p-1}+|u|^{2p-1}\big)|u_h-u|. \tag{1.28}$$

Nous appliquons la relation (1.28). Il en resulte

$$\int_\Omega (|u_h|^{2p} - |u|^{2p}) uv d\mathbf{x} \;\leq\; 2p \int_\Omega \left(|u_h|^{2p-1} + |u|^{2p-1}\right) |u_h - u||u||v| d\mathbf{x}.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la relation (1) nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_\Omega (|u_h|^{2p} - |u|^{2p}) uv d\mathbf{x} &\leq 2p \,\| \,|u_h|^{2p-1} + |u|^{2p-1} \,\|_{L^8(\Omega)} \| \,u_h - u \,\|_{L^8(\Omega)} \| \,u \,\|_{L^4(\Omega)} \| \,v \,\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq 2pS_2S_4S_8 \,\| \,|u_h|^{2p-1} + |u|^{2p-1} \,\|_{L^8(\Omega)} \,|u_h - u|_{1,\Omega} |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega}.\end{aligned}$$

Or,

$$\| \,{u_h}^{2p-1} \,\|^8_{L^8(\Omega)} = \int_\Omega ({u_h}^{2p-1})^8 d\mathbf{x} = \int_\Omega (u_h)^{8(2p-1)} d\mathbf{x} = \| \,u_h \,\|^{8(2p-1)}_{L^{8(2p-1)}(\Omega)},$$

et,

$$\| \,u^{2p-1} \,\|^8_{L^8(\Omega)} = \int_\Omega (u^{2p-1})^8 d\mathbf{x} = \int_\Omega (u)^{8(2p-1)} d\mathbf{x} = \| \,u \,\|^{8(2p-1)}_{L^{8(2p-1)}(\Omega)},$$

D'où, nous trouvons la majoration suivante du second terme de l'équation (1.26).

$$\lambda \int_\Omega (|u_h|^{2p} - |u|^{2p}) uv d\mathbf{x} \leq 4\lambda p S_2 S_4 S_8 S^{2p-1}_{8(2p-1)} \,\| \,f \,\|^{2p}_{-1,\Omega} \,|u_h - u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega}. \tag{1.29}$$

Finalement, en utilisant les estimations (1.27) et (1.29) nous trouvons

$$\lambda \int_\Omega (|u_h|^{2p} u_h - |u|^{2p} u) v d\mathbf{x} \leq \lambda S_2 S_4 \left(S^{2p}_{8p} + 4pS_8 S^{2p-1}_{8(2p-1)} \right) \| \,f \,\|^{2p}_{-1,\Omega} \,|u - u_h|_{1,\Omega} \,\| \,v \,\|_{L^2(\Omega)} \,. \tag{1.30}$$

Par suite, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Shwarz pour l'équation (1.25), nous obtenons la majoration suivante

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla(u - u_h) \nabla v d\mathbf{x} \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} &\left(\,\| \,f - f_h \,\|_{L^2(K)} + \| \,f_h - \lambda |u_h|^{2p} u_h \,\|_{L^2(K)} \right) \| \,v - v_h \,\|_{L^2(K)} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_{K,\Omega}} \| \,[\frac{\partial u_h}{\partial n}] \,\|_{L^2(e)} \| \,v - v_h \,\|_{L^2(e)} + \lambda S \,\| \,f \,\|^{2p}_{-1,\Omega} \,|u - u_h|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega}\end{aligned}$$

avec, $S = S_2 S_4 S^{2p}_{8p} + 4pS_2 S_4 S_8 S^{2p-1}_{8(2p-1)}$.

Nous remplaçons v_h par l'opérateur de Clément R_h à valeurs dans V_h appliqué à v. Cet opérateur vérifie pour toute fonction v de $H_0^1(\Omega)$ les approximations locales suivantes :

$$\| v - R_h v \|_{L^2(K)} \leq C h_K |v|_{1,\Delta_K}, \tag{1.31}$$

$$\| v - R_h v \|_{L^2(e)} \leq C h_e^{1/2} |v|_{1,\Delta_e}, \tag{1.32}$$

où Δ_K et Δ_e désignent l'union des éléments de $\mathcal{T}_h$ dont l'intersection avec K et e (respectivement) est non vide.

Par suite, il en résulte

$$\int_\Omega \nabla(u-u_h)\nabla v d\mathbf{x} \leq \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \left\{ h_K \left(\| f_h - \lambda |u_h|^{2p} u_h \|_{L^2(K)} + \| f - f_h \|_{L^2(K)} \right) |v|_{1,\Delta_K} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}} h_e^{1/2} \| [\frac{\partial u_h}{\partial n}] \|_{L^2(e)} |v|_{1,\Delta_e} \right\} + \lambda S \| f \|_{-1,\Omega}^{2p} |u-u_h|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega}. \tag{1.33}$$

Sous la condition $\lambda S \| f \|_{-1,\Omega}^{2p} < 1$, en prenant $v = u - u_h$ dans l'équation (1.33), nous trouvons

$$|u-u_h|_{1,\Omega} \lesssim (1 - \lambda S \| f \|_{-1,\Omega}^{2p})^{-1} \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\eta_K^2 + h_K^2 \| f - f_h \|_{L^2(K)}^2) \right)^{1/2}.$$

Une approche moins restrictive pour calculer l'estimation d'erreur *a posteriori*

Dans cette partie, notre but sera de calculer une estimation d'erreur *a posteriori* lorsque u_h est dans un voisinage de la solution u mais sans avoir des conditions sur les données. Pour celà, nous posons

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v \, d\mathbf{x} + \lambda \int_\Omega |u|^{2p} uv \, d\mathbf{x}.$$

Notre problème alors sera de la forme suivante

$$a(u,v) = \langle f, v \rangle \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{1.34}$$

avec $f \in H^{-1}(\Omega)$.

Nous définissons l'opérateur $\mathcal{S}$, comme suit

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{S}: & H^{-1}(\Omega) & \to & H_0^1(\Omega) \\ & f & \mapsto & \mathcal{S}f = w, \end{array}$$

où w est une solution du problème

$$\int_\Omega \nabla w \nabla v \, d\mathbf{x} = \langle f, v \rangle.$$

Remarque 1.3.8. *Nous avons, pour tout f dans $H^{-1}(\Omega)$, la relation suivante*

$$|\mathcal{S}f|_{1,\Omega} \leq \| f \|_{-1,\Omega} .$$

Nous définissons de même l'opérateur G par

$$\begin{array}{rccl} G: & H_0^1(\Omega) & \to & H^{-1}(\Omega) \\ & w & \mapsto & G(w) = f - \lambda \displaystyle\int_\Omega |w|^{2p} w \, d\mathbf{x}. \end{array}$$

Lemme 1.3.9. *L'application $Id + \mathcal{S}DG(w)$ est lipschitzienne. En effet, il existe un réel $L > 0$ tel que, pour tout v, w dans un ouvert borné de $H_0^1(\Omega)$*

$$\| \mathcal{S}\big(DG(v) - DG(w)\big) \|_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega))} \leq L|v - w|_{1,\Omega}.$$

Preuve

Nous considérons un ouvert borné $\mathcal{W}$. Pour tous $v,\ w, \in \mathcal{W}$ nous avons

$$\| \mathcal{S}\big(DG(v) - DG(w)\big) \|_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega))} \leq \| DG(v) - DG(w) \|_{-1,\Omega} . \tag{1.35}$$

Nous savons que

$$\| DG(v) - DG(w) \|_{-1,\Omega} = \sup_{z \in H_0^1(\Omega)} \frac{|\langle DG(v) - DG(w), z \rangle|}{|z|_{1,\Omega}}.$$

D'où, comme

$$DG(v).z - DG(w).z = 2\lambda p\big(|w|^{2p} - |v|^{2p}\big)z - \lambda\big(|w|^{2p} - |v|^{2p}\big)z, \tag{1.36}$$

nous obtenons le résultat suivant en utilisant (1.35) et (1.36)

$$\| \mathcal{S}\big(DG(v) - DG(w)\big) \|_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega))} \leq \big(4\lambda p^2 + 2\lambda p\big)\big(|w|^{2p} + |v|^{2p}\big)|v - w|_{1,\Omega}.$$

D'où, nous trouvons que l'applicaion $Id + \mathcal{S}DG(u)$ est une application lipschitzienne.

Nous introduisons maintenant le problème suivant equivalent au problème (3.26)

$$F(u) = u + \mathcal{S}G(u) = 0.$$

Hypothèse 1.3.10. *Nous considérons une solution u du problème* (1.2) *tel que l'opérateur $Id + \mathcal{S}DG(u)$ soit un isomorphisme dans $H_0^1(\Omega)$.*

Remarque 1.3.11. *L'hypothèse* 1.3.10 *nous assure l'unicité locale de la solution u.*

Dans le but de calculer une borne supérieure de l'erreur, nous commençons par considérer l'équation suivante, dite équation du résidu,

$$a(u, v) - a(u_h, v) = \langle f, v - v_h \rangle - a(u_h, v - v_h). \tag{1.37}$$

En faisant une intégration par parties, il en résulte

$$\begin{aligned} &a(u, v) - a(u_h, v) \\ &\quad = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (f - f_h)(v - v_h)\, d\mathbf{x} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Big\{ \int_K (f_h - \lambda |u_h|^{2p} u_h)(v - v_h)\, d\mathbf{x} \\ &\qquad - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_{K,\Omega}} \int_e [\frac{\partial u_h}{\partial n}](v - v_h)\, d\tau \Big\}. \end{aligned} \tag{1.38}$$

Théorème 1.3.12. *Soit u la solution du problème non linéaire et u_h la solution du problème discret. nous avons l'estimation suivante*

$$|u - u_h|_{1,\Omega} \leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_K^2 + h_K^2 \, \| f - f_h \|_{L^2(K)}^2) \right)^{1/2}.$$

Preuve

En utilisant le Lemme 1.3.9 et l'Hypothèse 1.3.10, nous avons d'après [16] l'existence d'un voisinage $\mathcal{O}$ de u tel que, pour tout $u_h \in \mathcal{O}$ nous avons

$$|u - u_h|_{1,\Omega} \leq C \, \| u_h + \mathcal{S}G(u_h) \|_{-1,\Omega} \, . \tag{1.39}$$

En introduisant $F(u)$ dans (1.39), et en utilisant l'equation (1.38), il en résulte

$$|u - u_h|_{1,\Omega} \leq C \left(\sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \inf_{v_h \in H_{0,h}^1(\Omega)} \frac{\langle f - f_h, v - v_h \rangle + \langle \mathcal{J}, v - v_h \rangle}{|v|_{1,\Omega}} \right) \tag{1.40}$$

où

$$\langle \mathcal{J}, v - v_h \rangle = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_K (f_h - \lambda |u_h|^{2p} u_h)(v - v_h) \, d\mathbf{x} \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_{K,\Omega}} \int_e [\frac{\partial u_h}{\partial n}](v - v_h) \, d\mathbf{x} \right\}.$$

En remplaçant v_h par l'opérateur de Clément R_h appliqué à v, nous trouvons le résultat suivant

$$|u - u_h|_{1,\Omega} \leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_K^2 + h_K^2 \, \| f - f_h \|_{L^2(K)}^2) \right)^{1/2} . \tag{1.41}$$

1.3.4 Efficacité

Dans cette partie, notre but est de montrer que l'estimation d'erreur démontrée dans la partie précédente est optimale.

Théorème 1.3.13. *Soit u la solution du problème non linéaire* (1.1) *et u_h la solution du problème discret* (1.8)*. Nous avons pour chaque indicateur η_K l'estimation suivante*

$$\eta_K \leq C \left(\| u - u_h \|_{1,\omega_K} + \sum_{\kappa \subset \omega_K} h_\kappa \, \| f - f_h \|_{L^2(\kappa)} \right),$$

où ω_K est l'union des triangles partageant au moins un côté avec K.

Preuve

Nous rappelons tout d'abord l'indicateur d'erreur η_K

$$\eta_K = h_K \parallel f_h - \lambda|u_h|^{2p}u_h \parallel_{L^2(K)} + \frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}} h_e^{1/2} \parallel [\frac{\partial u_h}{\partial n}] \parallel_{L^2(e)} .$$

Nous commençons par majorer le premier terme $h_K \parallel f_h - \lambda|u_h|^{2p}u_h \parallel_{L^2(K)}$.

En effet,

$$\int_\Omega \nabla(u-u_h)\nabla v d\mathbf{x} = \int_\Omega f v d\mathbf{x} - \lambda\int_\Omega |u|^{2p}uv d\mathbf{x} - \int_\Omega \nabla u_h \nabla v d\mathbf{x}. \tag{1.42}$$

Nous intercalons $\pm\displaystyle\int_\Omega f_h v d\mathbf{x}$ et $\pm\lambda\displaystyle\int_\Omega |u_h|^{2p}u_h v d\mathbf{x}$ dans l'équation (1.42), et nous intégrons par parties. Nous obtenons alors la relation suivante

$$\begin{aligned}\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K (f_h - \lambda|u_h|^{2p}u_h)v d\mathbf{x} &= \int_\Omega \nabla(u-u_h)\nabla v d\mathbf{x} - \int_\Omega (f-f_h)v d\mathbf{x} \\ &+\frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}}\int_e \left[\frac{\partial u_h}{\partial n}\right] v d\tau - \lambda\int_\Omega (|u_h|^{2p}u_h - |u|^{2p}u)v d\mathbf{x}.\end{aligned} \tag{1.43}$$

Nous remplaçons v par v_K dans l'équation (1.43) avec

$$v_K = \begin{cases} (f_h - \lambda|u_h|^{2p}u_h)\psi_K & \text{sur } K \\ 0 & \text{sur } \Omega\setminus K \end{cases}$$

où ψ_K désigne la fonction bulle sur le triangle K (produit des coordonées barycentriques associées aux sommets du triangle K).

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned}&\int_K (f_h - \lambda|u_h|^{2p}u_h)^2\psi_K d\mathbf{x} \\ &= \int_K \nabla(u-u_h)\nabla v_K d\mathbf{x} - \int_K (f-f_h)v_K d\mathbf{x} - \lambda\int_K (|u_h|^{2p}u_h - |u|^{2p}u)v d\mathbf{x}.\end{aligned} \tag{1.44}$$

Nous commençons par majorer $\lambda \int_K (|u_h|^{2p}u_h - |u|^{2p}u)vd\mathbf{x}$. Nous décomposons ce terme comme dans l'équation (1.26) et nous utilisons la proposition 0.2.5. Il en résulte

$$\begin{aligned}
\int_K |u_h|^{2p}(u_h - u)vd\mathbf{x} &\leq \| u_h \|^{2p}_{L^{8p}(K)} \| u_h - u \|_{L^4(K)} \| v \|_{L^2(K)}, \\
\int_K u(|u_h|^{2p} - |u|^{2p})vd\mathbf{x} &\leq 2p \, \| \, |u_h|^{2p-1} + |u|^{2p-1} \, \|_{L^8(\Omega)} \| u_h - u \|_{L^8(\Omega)} \| u \|_{L^4(\Omega)} \| v \|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

Par suite, en utilisant (2), nous trouvons l'estimation suivante

$$\lambda \int_K (|u_h|^{2p}u_h - |u|^{2p}u)vd\mathbf{x} \leq \lambda C \, \| f \|^{2p}_{-1,\Omega} \| u - u_h \|_{1,K} \| v \|_{L^2(K)} \, . \tag{1.45}$$

Soit r un entier positif, nous rappelons pour tout polynôme v de $P_r(K)$ les inégalités inverses suivantes (R. Verfürth, [21], Chapitre 1).

$$C \, \| v \|_{L^2(K)} \leq \| v\psi_K^{1/2} \|_{L^2(K)} \leq \| v \|_{L^2(K)} \, , \tag{1.46}$$

$$|v|_{1,K} \leq Ch_K^{-1} \, \| v \|_{L^2(K)} \, . \tag{1.47}$$

En appliquant les relations (1.45), (1.46) et (1.47) à l'inégalité (1.44), nous obtenons l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
&\| (f_h - \lambda|u_h|^{2p}u_h)\psi^{1/2} \|^2_{L^2(K)} \\
&\qquad \leq (1 + \lambda C \, \| f \|^{2p}_{-1,\Omega}) \, \| u - u_h \|_{1,K} \, |v_K|_{1,K} + \| f - f_h \|_{L^2(K)} \| v_K \|_{L^2(K)}
\end{aligned}$$

Par suite, nous obtenons la majoration suivante du premier terme de l'indicateur η_K

$$h_K \, \| f_h - \lambda|u_h|^{2p}u_h \|_{L^2(K)} \leq C\big(\, \| u - u_h \|_{1,K} + h_K \, \| f - f_h \|_{L^2(K)} \, \big). \tag{1.48}$$

Après avoir calculé une majoration du premier terme de l'indicateur d'erreur, notre but est de calculer la borne supérieure du second terme $\dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{e \in \mathcal{E}_{K,\Omega}} h_e^{1/2} \, \| \, [\frac{\partial u_h}{\partial n}] \, \|_{L^2(e)}$.

Comme précédement nous déduisons de l'égalité (1.43) la relation suivante

$$\frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}}\int_e [\frac{\partial u_h}{\partial n}]v d\tau = \int_\Omega \nabla(u_h-u)\nabla v d\mathbf{x} + \sum_{K\in\tau_h}\int_K (f_h-\lambda|u_h|^{2p}u_h)v d\mathbf{x} + \int_\Omega (f-f_h)v d\mathbf{x} + \lambda\int_\Omega (|u_h|^{2p}u_h-|u|^{2p}u)v d\mathbf{x}. \tag{1.49}$$

Pour tout K dans $\mathcal{T}_h$ et e côté de K, si K' désigne l'autre élément de $\mathcal{T}_h$ qui contient l'arête e, nous remplaçons v par v_e dans l'équation (1.49) avec

$$v_e = \begin{cases} L_{e,\kappa}\left(\left[\dfrac{\partial u_h}{\partial n}\right]\psi_e\right) & \kappa\in\{K,K'\} \\ 0 & \text{sur } \Omega\setminus(K\cup K') \end{cases}$$

où ψ_e désigne la fonction bulle sur l'arrête e et $L_{e,\kappa}$ est un opérateur de relèvement des polynômes de $P_{l-1+d}(e)$ s'annulant sur ∂e en des polynômes sur κ s'annulant sur $\partial\kappa\setminus e$, construit à partir d'un opérateur $\hat{L}$ fixé sur le triangle de référence.

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inéquation (1.30), nous obtenons l'estimation suivante

$$\| [\frac{\partial u_h}{\partial n}]\psi_e^{1/2} \|_{L^2(e)}$$

$$\leq (1+\lambda C \| f \|_{-1,\Omega}^{2p}) \| u-u_h \|_{1,K\cup K'} |v_e|_{1,K\cup K'} + \| f-f_h \|_{L^2(K\cup K')} \| v_e \|_{L^2(K\cup K')} + \| (f_h-\lambda|u_h|^{2p}u_h) \|_{L^2(K\cup K')} \| v_e \|_{L^2(K\cup K')}, \tag{1.50}$$

Nous avons les inégalités inverses suivantes (R. Verfürth, [21]) :

pour tout polynôme v de $P_r(e)$

$$C \| v \|_{L^2(e)} \leq \| v\psi_e^{1/2} \|_{L^2(e)} \leq \| v \|_{L^2(e)}, \tag{1.51}$$

et, pour tout polynôme v de $P_r(e)$ s'annulant sur ∂e, nous avons par passage à l'élément de référence

$$\| L_{e,\kappa} v \|_{L^2(\kappa)} + h_e |L_{e,\kappa} v|_{1,\kappa} \leq C h_e^{1/2} \| v \|_{L^2(e)}, \tag{1.52}$$

En utilisant l'inéquation (1.50) et les inégalités inverses, il en résulte

$$\begin{aligned} & h_e^{1/2} \| [\frac{\partial u_h}{\partial n}] \|^2_{L^2(e)} \\ & \leq (1+\lambda C \| f \|^{2p}_{-1,\Omega}) \| u-u_h \|_{1,K\cup K'} \| v_e \|_{L^2(e)} + h_e \| f-f_h \|_{L^2(K\cup K')} \| v_e \|_{L^2(e)} \\ & \quad + h_e \| f_h - \lambda |u_h|^{2p} u_h \|_{L^2(K\cup K')} \| v_e \|_{L^2(e)} \end{aligned} \tag{1.53}$$

D'où, nous obtenons la majoration suivante

$$\begin{aligned} & h_e^{1/2} \| [\frac{\partial u_h}{\partial n}] \|_{L^2(e)} \\ & \leq C\big(\| u - u_h \|_{1,K\cup K'} + h_e \| f - f_h \|_{L^2(K\cup K')} + h_e \| f_h - \lambda |u_h|^{2p} u_h \|_{L^2(K\cup K')} \big) \end{aligned} \tag{1.54}$$

Finalement, nous obtenons le résultat en utilisant la définition de l'indicateur d'erreur η_K et les deux inéquations (1.48) et (1.54).

1.4 Problème itératif

Dans cette partie, nous utilisons une méthode itérative afin de résoudre le problème discret (1.8). Dans une première étape, nous montrons l'existence et l'unicité de la solution du problème itératif. Par la suite, nous montrons la convergence de cette méthode. Finalement, nous calculons l'estimation d'erreur *a posteriori* du problème linéarisé.

1.4.1 Existence et Unicité

Nous commençons par rappeler le problème itératif. Soit u_h^0 une approximation initiale arbitraire, nous considérons pour tout v_h dans V_h

$$(\nabla u_h^{i+1}, \nabla v_h) + \lambda (|u_h^i|^{2p} u_h^{i+1}, v_h) = \langle f, v_h \rangle. \tag{1.55}$$

Nous remarquons que le problème (1.55) est linéarisé puisque la solution u_h^i est calculée à l'étape précédente. Comme c'est un système linéaire carré de dimension finie, la coercivité de la forme bilinéaire induit l'existence et l'unicité de la solution. Nous posons

$$\begin{aligned} a(u_h^{i+1}, v_h) &= \int_\Omega \nabla u_h^{i+1} \nabla v_h d\mathbf{x} + \lambda \int_\Omega |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1} v_h d\mathbf{x}, \\ l(v_h) &= \langle f, v_h \rangle. \end{aligned}$$

Il suffit de montrer que $a(.,.)$ est coercive :

$$\begin{aligned} a(u_h^{i+1}, u_h^{i+1}) &= \int_\Omega (\nabla u_h^{i+1})^2 d\mathbf{x} + \lambda \int_\Omega |u_h^i|^{2p} (u_h^{i+1})^2 d\mathbf{x} \\ &\geq |u_h^{i+1}|^2_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

D'où, nous déduisons l'existence et l'unicité de la solution du problème.

1.4.2 Convergence

Dans ce paragraphe, nous étudions la convergence du problème itératif vers la solution du problème discret. Dans ce but, nous utilisons les équations (1.8) et (1.55) qui correspondent respectivement aux problèmes discret et itératif. Nous énonçons alors le théorème suivant

Théorème 1.4.1. *Soit u_h^{i+1} la solution du problème itératif et u_h la solution du problème discret. Soit p un réel positif, si $C_1 > 0$, le problème itératif* (1.55) *vérifie l'estimation suivante*

$$|u_h^{i+1} - u_h|_{1,\Omega} \leq C_1^{-1} C_2 |u_h^i - u_h|_{1,\Omega} \tag{1.56}$$

avec,

$$\begin{aligned} C_1 &= 1 - S_2 S_4 S_{8p}^{2p} \parallel f \parallel^{2p}_{-1,\Omega}, \\ C_2 &= 4\lambda p S_2 S_4 S_8 S_{8(2p-1)}^{2p-1} \parallel f \parallel^{2p}_{-1,\Omega}. \end{aligned}$$

De plus, (1.55) *converge si $C_1^{-1} C_2 < 1$, au sens que $\lim_{i \to +\infty} u_h^{i+1} = u_h$.*

Preuve

Tout d'abord, nous montrons que la solution du probème (1.55) vérifie l'estimation suivante :

$$|u_h^{i+1}|_{1,\Omega} \leq \parallel f \parallel_{-1,\Omega}. \tag{1.57}$$

En effet, nous obtenons le résultat en remplaçant v_h par u_h^{i+1} dans l'équation (1.55).

Commençons maintenant par étudier la convergence du problème itératif. En premier lieu, nous retranchons les équations (1.8) et (1.55). Il en résulte

$$\big(\nabla(u_h^{i+1}-u_h),\nabla v_h\big)=\lambda\big(|u_h|^{2p}u_h-|u_h^i|^{2p}u_h^{i+1},v_h\big). \tag{1.58}$$

En intercalant $\pm|u_h^i|^{2p}u_h$ dans (1.58), nous obtenons l'égalité suivante :

$$\lambda\big(|u_h|^{2p}u_h-|u_h^i|^{2p}u_h^{i+1},v_h\big)=\lambda\big((|u_h|^{2p}-|u_h^i|^{2p})u_h,v_h\big)+\lambda\big(|u_h^i|^{2p}(u_h-{u_h}^{i+1}),v_h\big). \tag{1.59}$$

Nous déduisons de la proposition 0.2.5 la relation suivante

$$||u_h|^{2p}-|u_h^i|^{2p}|\leq 2p\big(|u_h^i|^{2p-1}+|u_h|^{2p-1}\big)|u_h^i-u_h|. \tag{1.60}$$

(i) Nous commençons par majorer le premier terme de l'inéquation (1.59). Nous appliquons la relation (1.60). Il en résulte

$$\int_\Omega(|u_h|^{2p}-|u_h^i|^{2p})u_hv_hd\mathbf{x}\ \leq\ 2p\int_\Omega\big(|u_h^i|^{2p-1}+|u_h|^{2p-1}\big)|u_h^i-u_h||u_h||v_h|d\mathbf{x}.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la relation (1) nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_\Omega(|u_h|^{2p}-|u_h^i|^{2p})u_hv_hd\mathbf{x}\ &\leq\ 2p\,\|\,|u_h^i|^{2p-1}+|u_h|^{2p-1}\,\|_{L^8(\Omega)}\|\,u_h^i-u_h\,\|_{L^8(\Omega)}\|\,u_h\,\|_{L^4(\Omega)}\|\,v_h\,\|_{L^2(\Omega)}\\ &\leq\ 2pS_2S_4S_8\,\|\,|u_h^i|^{2p-1}+|u_h|^{2p-1}\,\|_{L^8(\Omega)}\,|u_h^i-u_h|_{1,\Omega}|u_h|_{1,\Omega}|v_h|_{1,\Omega}.\end{aligned}$$

Nous prenons v_h égale à $u_h^{i+1}-u_h$ dans l'équation précédente et nous utilisons les inégalités (1.18) et (1.57). Nous trouvons alors la majoration suivante du premier terme

$$\lambda\big((|u_h|^{2p}-|u_h^i|^{2p})u_h,v_h\big)\leq 4\lambda pS_2S_4S_8S_{8(2p-1)}^{2p-1}\,\|\,f\,\|_{-1,\Omega}^{2p}\,|u_h^i-u_h|_{1,\Omega}|u_h^{i+1}-u_h|_{1,\Omega}. \tag{1.61}$$

(ii) Reste à majorer le second terme de l'équation (1.59). Nous avons

$$\int_\Omega|u_h^i|^{2p}(u_h-{u_h}^{i+1})v_hd\mathbf{x}\leq\|\,{u_h^i}^{2p}\,\|_{L^4(\Omega)}\|\,u_h-{u_h}^{i+1}\,\|_{L^4(\Omega)}\|\,v_h\,\|_{L^2(\Omega)}\ .$$

Or,

$$\|\,{u_h^i}^{2p}\,\|_{L^4(\Omega)}^4=\int_\Omega({u_h^i}^{2p})^4d\mathbf{x}=\int_\Omega(u_h^i)^{8p}d\mathbf{x}=\|\,u_h^i\,\|_{L^{8p}(\Omega)}^{8p},$$

en prenant $v_h=u_h^{i+1}-u_h$ et en utilisant les inégalités (1), (1.18) et (1.57), il en résulte

$$\lambda\big(|u_h^i|^{2p}(u_h - {u_h}^{i+1}), v_h\big) \leq \lambda S_2 S_4 S_{8p}^{2p} \parallel f \parallel_{-1,\Omega}^{2p} |{u_h}^{i+1} - u_h|_{1,\Omega}^2. \tag{1.62}$$

Pour finir, en utilisant (1.61) et (1.62) nous trouvons

$$|u_h^{i+1} - u_h|_{1,\Omega} \leq C_1^{-1} C_2 |u_h^i - u_h|_{1,\Omega} \tag{1.63}$$

avec,

$$\begin{aligned} C_1 &= 1 - \lambda S_2 S_4 S_{8p}^{2p} \parallel f \parallel_{-1,\Omega}^{2p}, \\ C_2 &= 4\lambda p S_2 S_4 S_8 S_{8(2p-1)}^{2p-1} \parallel f \parallel_{-1,\Omega}^{2p}. \end{aligned}$$

D'où, le problème itératif (1.55) converge si $C_1 > 0$ et $(C_1^{-1} C_2) < 1$. En effet, la preuve de convergence ne marche que pour des petites données.

1.4.3 Estimation d'erreur *a posteriori* du problème linéarisé

Dans cette partie, notre objectif est de calculer l'estimation d'erreur *a posteriori* du problème linéarisé.

$$\int_\Omega \nabla(u_h^{i+1} - u)\nabla v = \int_\Omega \nabla u_h^{i+1} \nabla v + \lambda \int_\Omega |u|^{2p} uv - \int_\Omega fv. \tag{1.64}$$

Nous définissons l'indicateur d'erreur de linéarisation, l'indicateur d'erreur de discrétisation et la constante S provenant des injections de Sobolev :

$$\begin{aligned} \eta_{K,i}^{(L)} &= |u_h^{i+1} - u_h^i|_{1,K}, \\ \eta_{K,i}^{(D)} &= \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \parallel f_h - \lambda |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1} \parallel_{L^2(K)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_{K,\Omega}} h_e \parallel [\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n}] \parallel_{L^2(e)}^2 \right)^{1/2}. \\ S &= S_2 S_4 S_{8p}^{2p} + 4p S_2 S_4 S_8 S_{8(2p-1)}^{2p-1}. \end{aligned}$$

Théorème 1.4.2. *Soit u solution du problème non linéaire* (1.1) *et u_h^{i+1} solution du problème linéarisé* (1.55)*. Si $\lambda S \parallel f \parallel_{-1,\Omega}^{2p} < 1$, nous obtenons l'estimation suivante*

$$|u - u_h^{i+1}|_{1,\Omega} \leq C(1 - \lambda S \parallel f \parallel_{-1,\Omega}^{2p})^{-1} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\left(\eta_{K,i}^{(D)}\right)^2 + h_K^2 \parallel f - f_h \parallel_{L^2(K)}^2 \right) \right)^{1/2} + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\eta_{K,i}^{(L)}\right)^2 \right)^{1/2},$$

Preuve

Nous intercalons $\pm\lambda\int_\Omega |u_h^i|^{2p}u_h^{i+1}vd\mathbf{x}$ et $\pm\lambda\int_\Omega |u_h^{i+1}|^{2p}u_h^{i+1}vd\mathbf{x}$ dans l'équation (1.64), et nous faisons une intégration par parties. Nous obtenons alors la relation suivante

$$\int_\Omega \nabla(u_h^{i+1}-u)\nabla v d\mathbf{x} = \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K (f-f_h)(v-v_h)d\mathbf{x} + \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\Big\{\int_K (f_h-\lambda|u_h^i|^{2p}u_h^{i+1})(v-v_h)d\mathbf{x}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}}\int_e [\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n}](v-v_h)d\tau\Big\} + \lambda\int_\Omega (|u|^{2p}u-|u_h^{i+1}|^{2p}u_h^{i+1})vd\mathbf{x} \tag{1.65}$$

$$+\lambda\int_\Omega u_h^{i+1}(|u_h^{i+1}|^{2p}-|u_h^i|^{2p})vd\mathbf{x}.$$

Comme dans la preuve du Théorème 1.4.1, nous majorons le terme $\lambda\int_\Omega (|u|^{2p}u-|u_h^{i+1}|^{2p}u_h^{i+1})vd\mathbf{x}$. Nous obtenons

$$\lambda\int_\Omega (|u|^{2p}u-|u_h^{i+1}|^{2p}u_h^{i+1})vd\mathbf{x} \le \lambda S \parallel f\parallel_{-1,\Omega}^{2p} |u-u_h^{i+1}|_{1,\Omega}|v|_{1,\Omega}$$

avec, $S = S_2S_4S_{8p}^{2p} + 4pS_2S_4S_8S_{8(2p-1)}^{2p-1}$.

D'autre part, nous calculons une estimation du second terme $\lambda\int_\Omega u_h^{i+1}(|u_h^{i+1}|^{2p}-|u_h^i|^{2p})vd\mathbf{x}$. En effet, comme précédemment, en utilisant la proposition 0.2.5 et en faisant les même étapes que dans la preuve du théorème de convergence (1.4.1), il en résulte

$$\int_\Omega (|u_h^{i+1}|^{2p}-|u_h^i|^{2p})u_h^{i+1}v_h d\mathbf{x}$$

$$\le 2p\parallel |u_h^i|^{2p-1}+|u_h^{i+1}|^{2p-1}\parallel_{L^8(\Omega)}\parallel u_h^i-u_h^{i+1}\parallel_{L^8(\Omega)}\parallel u_h^{i+1}\parallel_{L^4(\Omega)}\parallel v_h\parallel_{L^2(\Omega)}$$

$$\le 2pS_2S_4S_8 \parallel |u_h^i|^{2p-1}+|u_h^{i+1}|^{2p-1}\parallel_{L^8(\Omega)} |u_h^i-u_h^{i+1}|_{1,\Omega}|u_h^{i+1}|_{1,\Omega}|v_h|_{1,\Omega}. \tag{1.66}$$

Par suite, en utilisant les inégalités (1.18) et (1.57), nous trouvons la majoration suivante

$$\lambda\int_\Omega (|u_h^{i+1}|^{2p}-|u_h^i|^{2p})u_h^{i+1}vd\mathbf{x} \le 4\lambda pS_2S_4S_8S_{8(2p-1)}^{2p-1}\parallel f\parallel_{-1,\Omega}^{2p}|u_h^i-u_h^{i+1}|_{1,\Omega}|v_h|_{1,\Omega}. \tag{1.67}$$

Par suite, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour l'équation (1.65), nous obtenons la majoration suivante

$$\int_\Omega \nabla(u-u_h^{i+1})\nabla v d\mathbf{x}$$

$$\leq \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\left(\| f-f_h\|_{L^2(K)} + \| f_h - \lambda|u_h^i|^{2p}u_h^{i+1}\|_{L^2(K)} \right) \| v-v_h\|_{L^2(K)}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}} \| [\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n}]\|_{L^2(e)} \| v-v_h\|_{L^2(e)} + \lambda S \| f\|_{-1,\Omega}^{2p} |u-u_h^{i+1}|_{1,\Omega}|v|_{1,\Omega} \tag{1.68}$$

$$+4\lambda p S_2S_4S_8S_{8(2p-1)}^{2p-1} \| f\|_{-1,\Omega}^{2p} |u_h^{i+1}-u_h^i|_{1,\Omega}|v|_{1,\Omega}.$$

Nous remplaçons v_h par l'image de v par l'opérateur de Clément à valeurs dans V_h. Il en résulte

$$\int_\Omega \nabla(u-u_h^{i+1})\nabla v d\mathbf{x}$$

$$\leq \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\Big\{ h_K \left(\| f_h - \lambda|u_h^i|^{2p}u_h^{i+1}\|_{L^2(K)} + \| f-f_h\|_{L^2(K)}\right)|v|_{1,\Delta_K}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}} h_e^{1/2} \| [\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n}]\|_{L^2(e)} |v|_{1,\Delta_e}\Big\} + \lambda S \| f\|_{-1,\Omega}^{2p} |u-u_h^{i+1}|_{1,\Omega}|v|_{1,\Omega} \tag{1.69}$$

$$+4\lambda p S_2S_4S_8S_{8(2p-1)}^{2p-1} \| f\|_{-1,\Omega}^{2p} |u_h^{i+1}-u_h^i|_{1,\Omega}|v|_{1,\Omega}.$$

En prenant $v=u-u_h^{i+1}$ dans l'équation (1.69), nous trouvons

(1.70)

$$(1-\lambda S \| f\|_{-1,\Omega}^{2p})|u-u_h^{i+1}|_{1,\Omega} \lesssim \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\left(\eta_{K,i}^{(D)}\right)^2 + h_K^2 \| f-f_h\|_{L^2(K)}^2)\right)^{1/2} + \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\left(\eta_{K,i}^{(L)}\right)^2\right)^{1/2},$$

avec,

$$\begin{aligned}
\eta_{K,i}^{(L)} &= |u_h^{i+1}-u_h^i|_{1,K},\\
\eta_{K,i}^{(D)} &= \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2 \| f_h - \lambda|u_h^i|^{2p}u_h^{i+1}\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}} h_e \| [\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n}]\|_{L^2(e)}^2\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Une approche moins restrictive pour calculer l'estimation d'erreur *a posteriori*

Dans cette partie, notre but sera d'améliorer l'estimation d'erreur *a posteriori* du problème linéarisé. En effet, nous énonçons un théorème qui n'exige pas des conditions sur les données. Pour commencer, nous considérons l'équation suivante

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v d\mathbf{x} + \lambda \int_\Omega |u|^{2p} uv d\mathbf{x} - \int_\Omega \nabla u_h^{i+1} \nabla v d\mathbf{x} + \lambda \int_\Omega |u^i|^{2p} u^{i+1} v d\mathbf{x}$$

$$= \int_K (f - f_h)(v - v_h) d\mathbf{x} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Big\{ \int_K (f_h + \Delta u_h^{i+1} - \lambda |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1})(v - v_h) d\mathbf{x} \tag{1.71}$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_{K,\Omega}} \int_e [\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n}](v - v_h) d\tau \Big\}.$$

En intercalant $\pm\lambda \int_\Omega |u_h^{i+1}|^{2p} u_h^{i+1} v d\mathbf{x}$, nous trouvons

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v d\mathbf{x} + \lambda \int_\Omega |u|^{2p} uv d\mathbf{x} - \int_\Omega \nabla u_h^{i+1} \nabla v d\mathbf{x} + \lambda \int_\Omega |u_h^{i+1}|^{2p} u_h^{i+1} v d\mathbf{x}$$

$$= \int_K (f - f_h)(v - v_h) d\mathbf{x} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Big\{ \int_K (f_h + \Delta u_h^{i+1} - \lambda |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1})(v - v_h) d\mathbf{x} \tag{1.72}$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_{K,\Omega}} \int_e [\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n}](v - v_h) d\tau \Big\} + \lambda \int_\Omega \big(|u_h^i|^{2p} - |u_h^{i+1}|^{2p} \big) u_h^{i+1} v d\mathbf{x}.$$

Hypothèse 1.4.3. *Nous considérons une solution u_h^{i+1} du problème* (1.55) *tel que l'opérateur $Id + \mathcal{S}DG(u_h^{i+1})$ soit un isomorphisme dans $H_0^1(\Omega)$.*

Remarque 1.4.4. *L'hypothèse* 1.4.3 *nous assure l'unicité locale de la solution u_h^{i+1}. Elle est plus faible que celle exigée dans la partie précédente.*

Théorème 1.4.5. *Soit u une solution du problème non linéaire* (1.1) *et u_h^{i+1} une solution du problème linéarisé* (1.55)*. Si l'Hypothèse* 1.4.3 *est bien vérifiée, alors il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de u tel que, pour tout $u_h^{i+1} \in \mathcal{O}$, nous avons*

$$|u - u_h^{i+1}|_{1,\Omega} \leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \big((\eta_{K,i}^{(D)})^2 + h_K^2 \, \| f - f_h \|_{L^2(K)}^2 \big) \right)^{1/2} + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_{K,i}^{(L)})^2 \right)^{1/2}.$$

Preuve

En effet, en utilisant le Lemme 1.3.9 et l'Hypothèse 1.4.3, nous avons d'après [16], voir aussi [22] l'existence d'un voisinage $\mathcal{O}$ de u tel que, pour tout $u_h^{i+1} \in \mathcal{O}$ nous avons

$$|u - u_h^{i+1}|_{1,\Omega} \leq C \parallel u_h^{i+1} + \mathcal{S}G(u_h^{i+1}) \parallel_{-1,\Omega} . \tag{1.73}$$

En introduisant $F(u)$ dans (1.73), et en utilisant l'equation (1.72), nous trouvons

$$|u - u_h^{i+1}|_{1,\Omega} \leq C\Bigg(\sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \inf_{v_h \in H_{0,h}^1(\Omega)} \frac{\langle f - f_h, v - v_h\rangle + \langle \mathcal{J}, v - v_h\rangle}{|v|_{1,\Omega}}$$

$$+ \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{\lambda \int_\Omega \big(|u_h^i|^{2p} - |u_h^{i+1}|^{2p}\big) u_h^{i+1} v \; d\mathbf{x}}{|v|_{1,\Omega}} \Bigg) \tag{1.74}$$

où

$$\langle \mathcal{J}, v - v_h\rangle = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Bigg\{ \int_K (f_h + \Delta u_h^{i+1} - \lambda |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1})(v - v_h) \; d\mathbf{x}$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_{K,\Omega}} \int_e [\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n}](v - v_h) \; d\tau \Bigg\}.$$

En remplaçant v_h par l'image de v par l'opérateur de Clément, nous trouvons l'estimation suivante

$$|u_h^{i+1} - u|_{1,\Omega} \leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\big(\eta_{K,i}^{(D)}\big)^2 + h_K^2 \parallel f - f_h \parallel_{L^2(K)}^2 \right) \right)^{1/2} + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \big(\eta_{K,i}^{(L)}\big)^2 \right)^{1/2} . \tag{1.75}$$

1.4.4 Efficacité

Nous nous intéressons dans cette partie à calculer une borne inférieure de l'erreur. Pour celà, nous introduisons le théorème suivant afin de trouver une majoration de l'indicateur de l'erreur de linéarisation $\eta_{K,i}^{(L)}$ et de discrétisation $\eta_{K,i}^{(D)}$.

Théorème 1.4.6. *Soit u la solution du problème non linéaire* (1.1) *et u_h^{i+1} la solution du problème linéarisé* (1.55)*. nous avons pour chaque indicateur $\eta_{K,i}^{(L)}$ et $\eta_{K,i}^{(D)}$ les estimations suivantes*

$$\begin{aligned}\eta_{K,i}^{(L)} &\leq \| u - u_h^i \|_{1,\omega_K} + \| u - u_h^{i+1} \|_{1,\omega_K},\\ \eta_{K,i}^{(D)} &\leq C\left(\| u - u_h^i \|_{1,\omega_K} + \| u - u_h^{i+1} \|_{1,\omega_K} + \sum_{\kappa \subset \omega_K} h_\kappa \| f - f_h \|_{L^2(\kappa)} \right),\end{aligned}$$

où ω_K est l'union des triangles partageant au moins un côté avec K.

Preuve

Nous remarquons que la première majoration est évidente en intercalant $\pm u$ dans $\eta_{K,i}^{(L)}$. Dans le but de majorer $\eta_{K,i}^{(D)}$, nous intercalons $\pm\lambda \int_\Omega |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1} v d\mathbf{x}$ et $\pm\lambda \int_\Omega |u_h^{i+1}|^{2p} u_h^{i+1} v d\mathbf{x}$ dans l'équation (1.64), et nous faisons une intégration par parties. Nous obtenons alors la relation suivante

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K (f_h - \lambda |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1}) v d\mathbf{x} =$$

$$\int_\Omega \nabla(u_h^{i+1} - u)\nabla v d\mathbf{x} - \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K (f - f_h) v d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}} \int_e [\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n}] v d\tau$$

$$-\lambda \int_\Omega (|u|^{2p} u - |u_h^{i+1}|^{2p} u_h^{i+1}) v d\mathbf{x} - \lambda \int_\Omega u_h^{i+1} (|u_h^{i+1}|^{2p} - |u_h^i|^{2p}) v d\mathbf{x}. \tag{1.76}$$

Nous remplaçons v par v_K dans l'équation (1.76) avec

$$v_K = \begin{cases} (f_h - \lambda |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1}) \psi_K & \text{sur } K \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus K \end{cases}$$

où ψ_K désigne la fonction bulle sur le triangle K.

Alors, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inéquation (2), nous obtenons l'estimation suivante

$$\begin{aligned}&\| (f_h - \lambda |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1}) \psi_K^{1/2} \|_{L^2(K)}^2 \\ &\leq (1 + \lambda C \| f \|_{-1,\Omega}^{2p}) \| u - u_h^{i+1} \|_{1,K} |v_K|_{1,K} + \| f - f_h \|_{L^2(K)} \| v_K \|_{L^2(K)} \\ &\quad + 4\lambda p C \| f \|_{-1,\Omega}^{2p} \| u_h^i - u_h^{i+1} \|_{1,K} |v_K|_{1,K}.\end{aligned} \tag{1.77}$$

En appliquant les inégalités (1.46) et (1.47) à l'inéquation (1.77), nous obtenons l'estimation suivante

$$h_K \| f_h - \lambda |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1} \|^2_{L^2(K)}$$
$$\leq (1 + \lambda C \| f \|^{2p}_{-1,\Omega}) \| u - u_h^{i+1} \|_{1,K} \| v_K \|_{L^2(K)} + h_K \| f - f_h \|_{L^2(K)} \| v_K \|_{L^2(K)}$$

$$+4\lambda p C \| f \|^{2p}_{-1,\Omega} \| u_h^i - u_h^{i+1} \|_{1,K} \| v_K \|_{L^2(K)} \, . \tag{1.78}$$

Par suite, nous obtenons la majoration suivante du premier terme de l'indicateur $\eta^{(D)}_{K,i}$

$$h_K \| f_h - \lambda |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1} \|_{L^2(K)} \leq C(\| u - u_h^{i+1} \|_{1,K} + h_K \| f - f_h \|_{L^2(K)}) + C' \eta^{(L)}_{K,i}. \tag{1.79}$$

avec $C' = \lambda C \| f \|^{2p}_{-1,\Omega}$.

D'autre part, nous calculons la borne supérieure du second terme $\frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_{K,\Omega}} h_e^{1/2} \| [\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n}] \|_{L^2(e)}$.

Comme précédemment nous déduisons de l'équation (1.65) la relation suivante

$$\frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_{K,\Omega}} \int_e [\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n}] v d\tau = \int_\Omega \nabla(u - u_h^{i+1}) \nabla v d\mathbf{x} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (f_h - \lambda |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1}) v d\mathbf{x}$$
$$+ \int_\Omega (f - f_h) v d\mathbf{x} + \lambda \int_\Omega u_h^{i+1} (|u_h^{i+1}|^{2p} - |u_h^i|^{2p}) v d\mathbf{x}$$
$$+ \lambda \int_\Omega (|u|^{2p} u - |u_h^{i+1}|^{2p} u_h^{i+1}) v d\mathbf{x}. \tag{1.80}$$

Pour une arrête e, soient K et K' les éléments de $\mathcal{T}_h$ qui contiennent e, nous remplaçons v par v_e dans l'équation (1.80) avec

$$v_e = \begin{cases} L_{e,\kappa} \left([\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n}] \psi_e \right) & \kappa \in \{K, K'\} \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus (K \cup K') \end{cases}$$

où ψ_e désigne la fonction bulle sur l'arrête e et $L_{e,\kappa}$ étant l'opérateur de relèvement défini comme précédemment.

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inéquation (2), nous obtenons l'estimation suivante

$$
\begin{aligned}
&\| \big[\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n}\big] \psi_e^{1/2} \|_{L^2(e)} \\
&\leq (1+\lambda C \| f \|_{-1,\Omega}^{2p}) \| u - u_h^{i+1} \|_{1,K\cup K'} |v_e|_{1,K\cup K'} + \| f - f_h \|_{L^2(K\cup K')} \| v_e \|_{L^2(K\cup K')} \\
&\quad + \| (f_h - \lambda |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1}) \|_{L^2(K\cup K')} \| v_e \|_{L^2(K\cup K')} + C' \eta_{K,i}^{(L)} |v_e|_{1,K\cup K'}.
\end{aligned} \tag{1.81}
$$

De même, en utilisant les inégalités inverses (1.51) et (1.52), nous obtenons

$$
\begin{aligned}
&h_e^{1/2} \| \big[\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n}\big] \|_{L^2(e)}^2 \\
&\leq (1 + \lambda C \| f \|_{-1,\Omega}^{2p}) \| u - u_h^{i+1} \|_{1,K\cup K'} \| v_e \|_{L^2(e)} + h_e \| f - f_h \|_{L^2(K\cup K')} \| v_e \|_{L^2(e)} \\
&\quad + h_e \| (f_h - \lambda |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1}) \|_{L^2(K\cup K')} \| v_e \|_{L^2(K\cup K')} + C' \eta_{K,i}^{(L)} \| v_e \|_{L^2(e)} .
\end{aligned} \tag{1.82}
$$

Ainsi, en utilisant les deux relations (1.79) et (1.82), nous trouvons la majoration suivante

$$
\eta_{K,i}^{(D)} \leq C \left(\| u - u_h^{i+1} \|_{1,\omega_K} + \sum_{\kappa \subset \omega_K} h_\kappa \| f - f_h \|_{L^2(\kappa)} \right) + 2C' \eta_{K,i}^{(L)}.
$$

Or, comme nous avons

$$
\eta_{K,i}^{(L)} \leq \| u - u_h^i \|_{1,\omega_K} + \| u - u_h^{i+1} \|_{1,\omega_K},
$$

nous obtenons le résultat suivant

$$
\eta_{K,i}^{(D)} \leq C \left(\| u - u_h^i \|_{1,\omega_K} + \| u - u_h^{i+1} \|_{1,\omega_K} + \sum_{\kappa \subset \omega_K} h_\kappa \| f - f_h \|_{L^2(\kappa)} \right).
$$

1.5 Méthode de Newton

La méthode de Newton est une méthode numérique utilisée pour résoudre des systèmes d'équations non linéaires. Cette méthode suggère le problème itératif suivant

$$u_{i+1} = u_i - Df(u_i)^{-1} f(u_i),$$

pour approcher la solution u de l'équation $F(u) = 0$.

Nous appliquons la méthode de Newton pour notre problème non linéaire. Nous posons

$$F(u_h) = -\Delta u_h + \lambda |u_h|^{2p} u_h - f. \tag{1.83}$$

La formulation variationnelle associée à (1.83) sera

$$\langle F(u_h), w_h \rangle = (\nabla u_h, \nabla w_h) + \lambda (u_h^{2p} u_h, w_h) - (f, w_h). \tag{1.84}$$

Comme nous remarquons, la méthode de Newton nécéssite le calcul de la différentielle F' de F, soit

$$\langle F'(u_h) v_h, w_h \rangle = (\nabla v_h, \nabla w_h) + 2\lambda p (u_h^{2p} v_h, w_h) + \lambda (u_h^{2p} v_h, w_h). \tag{1.85}$$

Pour le problème non linéaire $F(u_h) = 0$, l'algorithme de Newton est :

$$\begin{cases} \text{Connaissant } u_h^i, \text{ trouver } u_h^{i+1} \text{ tel que} \\ \\ \forall w_h \in V_h, \quad \langle F'(u_h^i)(u_h^{i+1} - u_h^i), w_h \rangle = \langle -F(u_h^i), w_h \rangle. \end{cases} \tag{1.86}$$

En remplaçant (1.84) et (1.85) dans (1.86), nous obtenons

$$(\nabla u_h^{i+1}, \nabla w_h) + \lambda(2p+1)((u_h^i)^{2p} u_h^{i+1}, w_h) = 2\lambda p ((u_h^i)^{2p+1}, w_h) + (f, w_h). \tag{1.87}$$

1.5.1 Existence et Unicité

Afin de montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (1.87), nous utilisons le théorème de Lax-Milgram. Pour $\lambda \geq 0$, nous posons

$$\begin{aligned} B_{w_h}(u_h, v_h) &= (\nabla u_h, \nabla v_h) + \lambda(2p+1)(w_h^{2p} u_h, v_h), \\ l_{w_h}(v_h) &= 2\lambda p(w_h^{2p+1}, v_h) + (f, v_h). \end{aligned}$$

Montrons que $B_{w_h}(.,.)$ est une forme bilinéaire continue sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.
En effet, en utilisant l'injection de Sobolev et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$B_{w_h}(u_h, v_h) \leq \left(1 + \lambda(2p+1)S_4^2 \parallel w_h^{2p} \parallel_{L^2(\Omega)}\right) |u_h|_{1,\Omega} |v_h|_{1,\Omega}.$$

D'autre part,

$$l_{w_h}(v_h) \leq \left(2\lambda p S_2 \parallel w_h^{2p+1} \parallel_{L^2(\Omega)} + \parallel f \parallel_{-1,\Omega}\right) |v_h|_{1,\Omega}.$$

D'où, $l_{w_h}(.)$ est linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$. Reste à montrer que $B_{w_h}(.,.)$ est une forme coercive. En effet, en prenant $u_h = v_h$ dans $B_{w_h}(u_h, v_h)$, nous obtenons

$$B_{w_h}(v_h, v_h) \geq |v_h|_{1,\Omega}^2,$$

d'où le résultat.

1.5.2 Convergence

Théorème 1.5.1. *Soit u_h^{i+1} la solution du problème itératif et u_h la solution du problème discret* (1.8)*. L'algorithme de Newton vérifie l'estimation suivante*

$$(C_3 - C_5)|u_h^{i+1} - u_h|_{1,\Omega} \leq (C_4 + C_5)|u_h^i - u_h|_{1,\Omega} \tag{1.88}$$

avec,

$$\begin{aligned} C_3 &= 1 - C\lambda S_2 S_4 S_{8p}^{2p}, \\ C_4 &= 4C\lambda p S_2 S_4 S_8 S_{8(2p-1)}^{2p-1}, \\ C_5 &= 2C\lambda p S_2 S_4 S_{8p}^{2p}. \end{aligned}$$

De plus, la méthode de Newton converge si $C_3 - C_5 > 0$ et $(C_3 - C_5)^{-1}(C_4 + C_5) < 1$.

Preuve

Tout d'abord, nous commençons par retrancher (1.86) de (1.84), il en résulte que

$$(\nabla(u_h^{i+1}-u_h),w_h)=\lambda(u_h^{2p}u_h-(u_h^i)^{2p}u_h^{i+1},w_h)+2\lambda p((u_h^i)^{2p}(u_h^{i+1}-u_h^i),w_h). \tag{1.89}$$

L'estimation du premier terme du second membre de l'équation (1.89) a été déjà calculé dans la preuve du Théorème 1.4.1. Nous avons

$$\begin{aligned}\lambda(u_h^{2p}u_h-(u_h^i)^{2p}u_h^{i+1},w_h)\leq 4C\lambda pS_2S_4S_8S_{8(2p-1)}^{2p-1}|u_h^i-u_h|_{1,\Omega}|w_h|_{1,\Omega}\\ +C\lambda S_2S_4S_{8p}^{2p}|{u_h}^{i+1}-u_h|_{1,\Omega}|w_h|_{1,\Omega}.\end{aligned} \tag{1.90}$$

Il suffit alors de majorer le second terme $2\lambda p((u_h^i)^{2p}(u_h^{i+1}-u_h^i),w_h)$. En effet, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'injection de Sobolev nous obtenons

$$2\lambda p((u_h^i)^{2p}(u_h^{i+1}-u_h^i),w_h)\leq 2\lambda pS_2\,\|\,(u_h^i)^{2p}(u_h^{i+1}-u_h^i)\,\|_{L^2(\Omega)}\,|w_h|_{1,\Omega}. \tag{1.91}$$

Or,

$$\|\,(u_h^i)^{2p}(u_h^{i+1}-u_h^i)\,\|_{L^2(\Omega)}\leq\|\,(u_h^i)^{2p}\,\|_{L^4(\Omega)}\|\,u_h^{i+1}-u_h^i\,\|_{L^4(\Omega)}\,.$$

D'après l'algorithme (1.87) nous déduisons la majoration suivante

$$(\nabla u_h^{i+1},\nabla u_h^{i+1})\leq 2\lambda p((u_h^i)^{2p+1},u_h^{i+1})+(f,u_h^{i+1}). \tag{1.92}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous trouvons

$$|u_h^{i+1}|_{1,\Omega}\leq 2\lambda p|(u_h^i)^{2p+1}|_{1,\Omega}+\|\,f\,\|_{-1,\Omega}\,. \tag{1.93}$$

Alors, nous déduisons de (1.93) que la solution du problème itératif vérifie l'estimation suivante

$$|u_h^{i+1}|_{1,\Omega}\leq C(\lambda,p,f,u_0). \tag{1.94}$$

L'estimation du second terme est alors

$$2\lambda p((u_h^i)^{2p}(u_h^{i+1}-u_h^i),w_h)\leq 2C\lambda pS_2S_4S_{8p}^{2p}|u_h^{i+1}-u_h^i|_{1,\Omega}|w_h|_{1,\Omega}. \tag{1.95}$$

Finalement, nous intercalons $\pm u_h$, nous utilisons (1.90) et (1.95) et nous prenons $w_h = u_h^{i+1} - u_h$. Il en résulte

$$(C_3 - C_5)|u_h^{i+1} - u_h|_{1,\Omega} \leq (C_4 + C_5)|u_h^i - u_h|_{1,\Omega} \tag{1.96}$$

Nous déduisons alors que le problème converge si $(C_3 - C_5)^{-1}(C_4 + C_5) < 1$.

Remarque 1.5.2. *Nous remarquons que le théorème* 1.5.1 *donne une convergence conditionnée par la relation* $(C_3 - C_5)^{-1}(C_4 + C_5) < 1$.

1.5.3 Estimation d'erreur *a posteriori*

Dans cette partie, notre but est de calculer l'estimation d'erreur *a posteriori* du problème itératif en utilisant l'algorithme de Newton.

$$\int_\Omega \nabla(u_h^{i+1} - u)\nabla v d\mathbf{x} = \int_\Omega \nabla u_h^{i+1}\nabla v d\mathbf{x} + \lambda \int_\Omega |u|^{2p} uv d\mathbf{x} - \int_\Omega f v d\mathbf{x}. \tag{1.97}$$

Nous définissons l'indicateur d'erreur de linéarisation, l'indicateur d'erreur de discrétisation :

$$\begin{aligned}
\eta_{K,i}^{(L)} &= |u_h^{i+1} - u_h^i|_{1,K}, \\
\eta_{K,i}^{(D)} &= \Bigg(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2 \parallel f_h + \lambda(2p+1)|u_h^i|^{2p}u_h^{i+1} - 2\lambda p (u_h^i)^{2p+1} \parallel_{L^2(K)}^2 \\
&\qquad + \sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}} h_e \parallel [\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n}] \parallel_{L^2(e)}^2 \Bigg)^{1/2},
\end{aligned}$$

Nous définissons aussi la constante S provenant des injections de Sobolev :

$$S = S_2 S_4 S_{8p}^{2p} + 4pS_2S_4S_8S_{8(2p-1)}^{2p-1}.$$

Théorème 1.5.3. *Soit u une solution du problème non linéaire et* u_h^{i+1} *une solution du problème itératif. Si* $\lambda SC < 1$*, nous obtenons l'estimation suivante*

$$|u - u_h^{i+1}|_{1,\Omega} \lesssim (1-\lambda SC)^{-1} \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \left(\left(\eta_{K,i}^{(D)}\right)^2 + h_K^2 \parallel f - f_h \parallel_{L^2(K)}^2 \right) \right)^{1/2} + \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \left(\eta_{K,i}^{(L)}\right)^2 \right)^{1/2},$$

où C est la constante définit dans (1.94).

Preuve

Nous intercalons les termes suivants $\pm 2\lambda p \int_\Omega |u_h^i|^{2p+1} v d\mathbf{x}$, $\pm\lambda(2p+1)\int_\Omega |u_h^i|^{2p}u_h^{i+1} v d\mathbf{x}$ et $\pm\lambda(2p+1)\int_\Omega |u_h^i + 1|^{2p}u_h^{i+1} v d\mathbf{x}$ dans l'équation (1.97), et nous faisons une intégration par parties. Il en résulte

$$\int_\Omega \nabla(u_h^{i+1}-u)\nabla v d\mathbf{x}$$

$$= \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K (f-f_h)(v-v_h)d\mathbf{x} + \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\Big\{\int_K (f_h+\lambda(2p+1)|u_h^i|^{2p}u_h^{i+1}-2\lambda p(u_h^i)^{2p+1})(v-v_h)d\mathbf{x}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}}\int_e [\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n}](v-v_h)d\tau\Big\} + \lambda(2p+1)\int_\Omega u_h^{i+1}(|u_h^{i+1}|^{2p}-|u_h^i|^{2p})v d\mathbf{x} \tag{1.98}$$

$$+\lambda\int_\Omega (|u|^{2p}u-|u_h^{i+1}|^{2p}u_h^{i+1})v d\mathbf{x} + 2\lambda p\int_\Omega ((u_h^i)^{2p+1}-(u_h^{i+1})^{2p+1})v d\mathbf{x}.$$

Nous majorons le terme $\lambda\int_\Omega (|u|^{2p}u-|u_h^{i+1}|^{2p}u_h^{i+1})v d\mathbf{x}$ de la même façon que précédemment

$$\lambda\int_\Omega (|u|^{2p}u-|u_h^{i+1}|^{2p}u_h^{i+1})v d\mathbf{x} \leq \lambda SC|u-u_h^{i+1}|_{1,\Omega}|v|_{1,\Omega}$$

avec, $S = S_2S_4S_{8p}^{2p} + 4pS_2S_4S_8S_{8(2p-1)}^{2p-1}$.

D'autre part, nous majorons $2\lambda p\int_\Omega ((u_h^i)^{2p+1}-(u_h^{i+1})^{2p+1})v d\mathbf{x}$. En effet, il suffit d'utiliser la proposition 0.2.5 pour obtenir la majoration suivante

$$\int_\Omega ((u_h^i)^{2p+1}-(u_h^{i+1})^{2p+1})v d\mathbf{x} \leq \int_\Omega \big(|u_h^{i+1}|^{2p+1}+|u_h^i|^{2p+1}\big)|u_h^{i+1}-u_h^i||v|d\mathbf{x}. \tag{1.99}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la relation (1), il en résulte

$$2\lambda p\int_\Omega ((u_h^i)^{2p+1}-(u_h^{i+1})^{2p+1})v d\mathbf{x} \leq 2(2p+1)C\lambda pS_2S_4^2|u_h^{i+1}-u_h^i|_{1,\Omega}|v|_{1,\Omega}. \tag{1.100}$$

Reste alors à majorer $\lambda(2p+1)\int_\Omega u_h^{i+1}(|u_h^{i+1}|^{2p}-|u_h^i|^{2p})v d\mathbf{x}$.

En effet, ce terme a été étudié dans des étapes précédentes. Nous avons l'estimation suivante

$$\lambda(2p+1)\int_\Omega u_h^{i+1}(|u_h^{i+1}|^{2p}-|u_h^i|^{2p})v d\mathbf{x} \leq \lambda(2p+1)S'C|u_h^{i+1}-u_h^i|_{1,\Omega}|v|_{1,\Omega} \tag{1.101}$$

avec, $S' = 4pS_2S_4S_8S_{8(2p-1)}^{2p-1}$.

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour l'équation (1.98), nous obtenons la majoration suivante

$$\int_\Omega \nabla(u-u_h^{i+1})\nabla v \leq \lambda SC|u-u_h^{i+1}|_{1,\Omega}|v|_{1,\Omega}+\Big(2C\lambda pS_2S_4^2+\lambda(2p+1)S'C\Big)|u_h^{i+1}-u_h^i|_{1,\Omega}|v|_{1,\Omega}$$

$$+\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\Big(\,\|f-f_h\|_{L^2(K)}+\|f_h-\lambda(2p+1)|u_h^i|^{2p}u_h^{i+1}-2\lambda p(u_h^i)^{2p+1}\|_{L^2(K)}\,\Big)\,\|v-v_h\|_{L^2(K)}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}}\|[\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n}]\|_{L^2(e)}\|v-v_h\|_{L^2(e)}\,. \tag{1.102}$$

Nous remplaçons v_h par l'image de v par l'opérateur de Clément. Nous trouvons alors

$$\int_\Omega \nabla(u-u_h^{i+1})\nabla v \leq \lambda SC|u-u_h^{i+1}|_{1,\Omega}|v|_{1,\Omega}+\Big(2C\lambda pS_2S_4^2+\lambda(2p+1)S'C\Big)|u_h^{i+1}-u_h^i|_{1,\Omega}|v|_{1,\Omega}$$

(1.103)

$$+C\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\Big\{h_K\left(\|f_h-2\lambda p(u_h^i)^{2p+1}+\lambda(2p+1)|u_h^i|^{2p}u_h^{i+1}\|_{L^2(K)}+\|f-f_h\|_{L^2(K)}\right)|v|_{1,\Delta_K}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}}h_e^{1/2}\,\|[\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n}]\|_{L^2(e)}\,|v|_{1,\Delta_e}\Big\}.$$

En prenant $v = u - u_h^{i+1}$ dans l'équation (1.103) et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous trouvons

(1.104)

$$(1-\lambda SC)|u-u_h^{i+1}|_{1,\Omega} \lesssim \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\left(\left(\eta_{K,i}^{(D)}\right)^2+h_K^2\,\|f-f_h\|_{L^2(K)}^2\,\right)\right)^{1/2}+\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\left(\left(\eta_{K,i}^{(L)}\right)^2\right)^{1/2}$$

avec,

$$\begin{aligned}\eta_{K,i}^{(L)} &= |u_h^{i+1}-u_h^i|_{1,K},\\ \eta_{K,i}^{(D)} &= h_K^2\,\|f_h+\Delta u_h^{i+1}-2\lambda p(u_h^i)^{2p+1}+\lambda(2p+1)|u_h^i|^{2p}u_h^{i+1}\|_{L^2(K)}^2\\ &\quad +h_e\,\|[\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n}]\|_{L^2(e)}^2\,.\end{aligned}$$

1.5.4 Efficacité

Dans cette partie, notre but est de montrer l'optimalité de l'estimation d'erreur trouvée dans le paragraphe précédent. Pour celà, nous introduisons le théorème suivant

Théorème 1.5.4. *Soit u la solution du problème non linéaire* (1.1) *et u_h^{i+1} la solution du problème linéarisé* (1.55)*. nous avons pour chaque indicateur $\eta_{K,i}^{(L)}$ et $\eta_{K,i}^{(D)}$ les estimations suivantes*

$$\begin{aligned}\eta_{K,i}^{(L)} &\leq \| u - u_h^i \|_{1,\omega_K} + \| u - u_h^{i+1} \|_{1,\omega_K},\\ \eta_{K,i}^{(D)} &\leq C\left(\| u - u_h^i \|_{1,\omega_K} + \| u - u_h^{i+1} \|_{1,\omega_K} + \sum_{\kappa\subset\omega_K} h_\kappa \| f - f_h \|_{L^2(\kappa)} \right).\end{aligned}$$

Où ω_K est l'union des triangles partageant au moins un côté avec K.

Preuve

Nous remarquons que la première majoration est evidente en intercalant $\pm u$ dans $\eta_{K,i}^{(L)}$. D'autre part, nous commençons à majorer l'indicateur d'erreur de discrétisation $\eta_{K,i}^{(D)}$. Nous intercalons les termes suivants $\pm 2\lambda p \int_\Omega |u_h^i|^{2p+1} v d\mathbf{x}$, $\pm\lambda(2p+1)\int_\Omega |u_h^i|^{2p} u_h^{i+1} v d\mathbf{x}$ et $\pm\lambda(2p+1)\int_\Omega |u_h^i+1|^{2p} u_h^{i+1} v d\mathbf{x}$ dans l'équation (1.97), et nous faisons une intégration par parties. Nous trouvons

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K (f_h + \lambda(2p+1)|u_h^i|^{2p}u_h^{i+1} - 2\lambda p (u_h^i)^{2p+1}) v d\mathbf{x}$$

$$= \int_\Omega \nabla(u_h^{i+1}-u)\nabla v d\mathbf{x} - \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K (f-f_h) v d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}}\int_e [\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n}] v d\tau \tag{1.105}$$

$$-\lambda(2p+1)\int_\Omega u_h^{i+1}(|u_h^{i+1}|^{2p} - |u_h^i|^{2p}) v d\mathbf{x} - 2\lambda p \int_\Omega \big((u_h^i)^{2p+1} - (u_h^{i+1})^{2p+1}\big) v d\mathbf{x}$$

$$-\lambda\int_\Omega (|u|^{2p}u - |u_h^{i+1}|^{2p}u_h^{i+1}) v d\mathbf{x}.$$

Nous remplaçons v par v_K dans l'équation (1.105) avec

$$v_K = \begin{cases} (f_h + \lambda(2p+1)|u_h^i|^{2p}u_h^{i+1} - 2\lambda p (u_h^i)^{2p+1})\psi_K & \text{sur } K \\ 0 & \text{sur } \Omega\setminus K \end{cases}$$

où ψ_K désigne la fonction bulle sur le triangle K. Nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le théorème d'injection de Sobolev, il en résulte

$$\begin{aligned}
&\| (f_h + \lambda(2p+1)|u_h^i|^{2p}u_h^{i+1} - 2\lambda p(u_h^i)^{2p+1})\psi_K^{1/2} \|^2_{L^2(K)} \\
&\leq (1+\lambda C) \| u - u_h^{i+1} \|_{1,K} |v_K|_{1,K} + \| f - f_h \|_{L^2(K)} \| v_K \|_{L^2(K)} \qquad (1.106) \\
&\qquad + \lambda C(4p+1) \| u_h^i - u_h^{i+1} \|_{1,K} |v_K|_{1,K}.
\end{aligned}$$

En appliquant les inégalités inverses (1.46) et (1.47) à la relation (1.106), nous obtenons l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
&\| f_h + \lambda(2p+1)|u_h^i|^{2p}u_h^{i+1} - 2\lambda p(u_h^i)^{2p+1} \|^2_{L^2(K)} \\
&\leq (1+\lambda C) \| u - u_h^{i+1} \|_{1,K} |v_K|_{1,K} + \| f - f_h \|_{L^2(K)} \| v_K \|_{L^2(K)} \\
&\qquad + \lambda C(4p+1) \| u_h^i - u_h^{i+1} \|_{1,K} |v_K|_{1,K}. \qquad (1.107)
\end{aligned}$$

Nous trouvons alors la majoration suivante du premier terme de l'indicateur $\eta_{K,i}^{(D)}$

$$\begin{aligned}
&h_K \| (f_h + \lambda(2p+1)|u_h^i|^{2p}u_h^{i+1} - 2\lambda p(u_h^i)^{2p+1}) \|_{L^2(K)} \\
&\leq C(\| u - u_h^{i+1} \|_{1,K} + h_K \| f - f_h \|_{L^2(K)}) + \lambda C(4p+1)\eta_{K,i}^{(L)}. \qquad (1.108)
\end{aligned}$$

D'autre part, nous calculons une estimation de $\frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}} h_e^{1/2} \| [\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n}] \|_{L^2(e)}$.

Comme précédemment nous déduisons de l'équation (1.98) ce qui suit

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}} \int_e [\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n}] v d\tau \\
&= \int_\Omega \nabla(u - u_h^{i+1})\nabla v d\mathbf{x} + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K (f_h + \lambda(2p+1)|u_h^i|^{2p}u_h^{i+1} - 2\lambda p(u_h^i)^{2p+1}) v d\mathbf{x} \qquad (1.109) \\
&+ \int_\Omega (f - f_h) v d\mathbf{x} + \lambda \int_\Omega (|u|^{2p}u - |u_h^{i+1}|^{2p}u_h^{i+1}) v d\mathbf{x} + 2\lambda p \int_\Omega ((u_h^i)^{2p+1} - (u_h^{i+1})^{2p+1}) v d\mathbf{x} \\
&+ \lambda(2p+1) \int_\Omega u_h^{i+1}(|u_h^{i+1}|^{2p} - |u_h^i|^{2p}) v d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Pour une arrête e, soient K et K' les éléments de $\mathcal{T}_h$ qui contiennent e, nous remplaçons v par v_e dans l'équation (1.109) avec

$$v_e = \begin{cases} L_{e,\kappa}\left([\dfrac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n}]\psi_e\right) & \kappa \in \{K, K'\} \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus (K \cup K') \end{cases}$$

où ψ_e désigne la fonction bulle sur l'arrête e et $L_{e,\kappa}$ étant l'opérateur de relèvement défini comme précédamment.

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les inégalités inverses (1.51) et (1.52), nous obtenons

$$h_e^{1/2} \,\| [\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n}] \|^2_{L^2(e)}$$

$$\begin{aligned} (1.110) \qquad \leq\ & (1+\lambda C)\,\| u - u_h^{i+1} \|_{1,K\cup K'} \| v_e \|_{L^2(e)} + h_e \,\| f - f_h \|_{L^2(K\cup K')} \| v_e \|_{L^2(e)} \\ & + h_e \,\| (f_h + \lambda(2p+1)|u_h^i|^{2p} u_h^{i+1} - 2\lambda p (u_h^i)^{2p+1}) \|_{L^2(K\cup K')} \| v_e \|_{L^2(e)} \\ & + \lambda C(4p+1)\eta_{K,i}^{(L)} \,\| v_e \|_{L^2(e)} \,. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant les deux relations (1.108) et (1.110), nous trouvons la majoration suivante

$$\eta_{K,i}^{(D)} \leq C \left(\| u - u_h^{i+1} \|_{1,\omega_K} + \sum_{\kappa \subset \omega_K} h_\kappa \,\| f - f_h \|_{L^2(\kappa)} \right) + 2\lambda C(4p+1)\eta_{K,i}^{(L)}.$$

Comme nous avons

$$\eta_{K,i}^{(L)} \leq \| u - u_h^i \|_{1,\omega_K} + \| u - u_h^{i+1} \|_{1,\omega_K},$$

nous obtenons le résultat suivant

$$\eta_{K,i}^{(D)} \leq C \left(\| u - u_h^i \|_{1,\omega_K} + \| u - u_h^{i+1} \|_{1,\omega_K} + \sum_{\kappa \subset \omega_K} h_\kappa \,\| f - f_h \|_{L^2(\kappa)} \right).$$

Nous trouvons alors que la majoration de l'estimation d'erreur démontrée dans le paragraphe précédent (Théorème 1.5.3) est bien une majoration optimale.

Chapitre 2

Simulations numériques du problème modèle

Sommaire

2.1 Problème itératif 57
2.1.1 Estimation d'erreur *a priori* 57
2.1.2 Estimation d'erreur *a posteriori* 64
2.2 Méthode de Newton 71
2.2.1 Estimation d'erreur *a priori* 71
2.2.2 Estimation d'erreur *a posteriori* 74
2.3 Algorithme mixte 80

2.1 Problème itératif

Dans ce chapitre, afin de valider les résultats théoriques, nous proposons en premier lieu un algorithme de résolution itératif de notre problème non linéaire suivant :

Soit Ω un polygone de $\mathbb{R}^2$, de frontière $\partial\Omega$,

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u + \lambda |u|^{2p} u & = & f & \text{dans } \Omega \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{2.1}$$

avec $f \in H^{-1}(\Omega)$, $\lambda > 0$.

En second lieu, nous effectuons l'analyse *a priori* de cet algorithme en prenant comme solution

$$u(x,y) = x(x-1)y(y-1)(x^2+y^2)\mathrm{e}^{xy}. \tag{2.2}$$

Par la suite, nous faisons l'analyse *a posteriori* de l'algorithme proposé en considérant la solution théorique

$$u(x,y) = e^{-100(x^2+y^2)}. \tag{2.3}$$

Dans la section "Estimation d'erreur *a posteriori*" nous proposons deux algorithmes itératifs ayant deux critères d'arrêts différents. Le premier algorithme correspond à un critère d'arrêt classique ($\eta_i^{(L)} \leq 10^{-5}$), alors que le second correspond à un nouveau critère ($\eta_i^{(L)} \leq \gamma \eta_i^{(D)}$). Nous comparons ces deux méthodes afin de mettre en valeur l'avantage du nouveau critère d'arrêt ($\eta_i^{(L)} \leq \gamma \eta_i^{(D)}$).

Nous utilisons le logiciel $FreeFem++$, créé et développé par F. Hecht, O. Pironneau et K. Ohtsuka [13]. Les éléments finis utilisés sont des éléments de Lagrange du premier ordre $\mathcal{P}_1$.

2.1.1 Estimation d'erreur *a priori*

Dans une première étape, nous discrétisons le problème (2.1). Nous proposons une triangulation $\mathcal{T}_h$ du domaine Ω avec un maillage de pas h. Nous obtenons alors, le problème discrétisé suivant

Trouver $u_h \in V_h = H^1_{0,h}$ tel que, pour tout $v_h \in V_h$, nous avons :

$$\int_\Omega \nabla u_h \nabla v_h + \int_\Omega \lambda |u_h|^{2p} u_h v_h \;=\; \int_\Omega f v_h. \tag{2.4}$$

Le domaine Ω considéré dans $\mathbb{R}^2$, est le carré unité $]0,1[^2$. Nous divisons chaque arête en N segments (voir Figure 2.1). Par la suite, nous considérons la solution théorique (2.2) qui vérifie la condition au bord, et nous implémentons le schéma itératif suivant

$$(\nabla u_h^{i+1}, \nabla v_h) + \lambda(|u_h^i|^{2p} u_h^{i+1}, v_h) = (f, v_h). \tag{2.5}$$

avec le critère d'arrêt classique défini par

$$err_L = \frac{|u_h^{i+1} - u_h^i|_{1,\Omega}}{|u_h^{i+1}|_{1,\Omega}} \leq 10^{-7}.$$

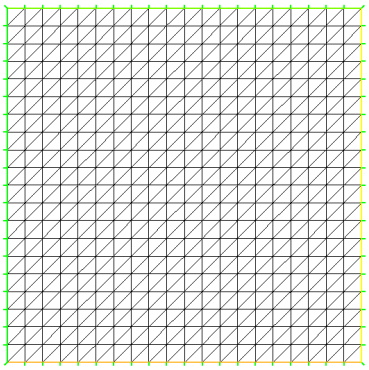

FIGURE 2.1 – Géométrie du domaine

Nous présentons dans les Figures 2.2 et 2.3 une comparaison entre les solutions exacte et numérique pour $N = 120,\ \lambda = 1$ et $p = 1$.

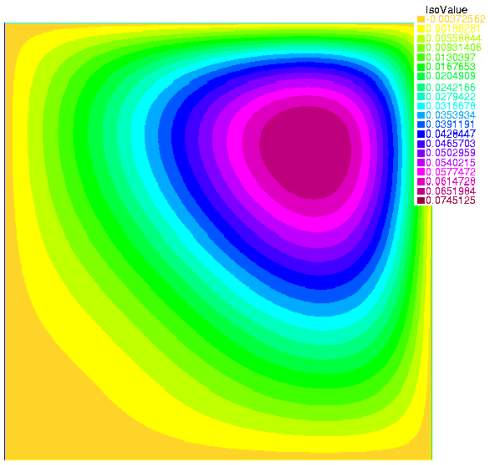

FIGURE 2.2 – Solution exacte

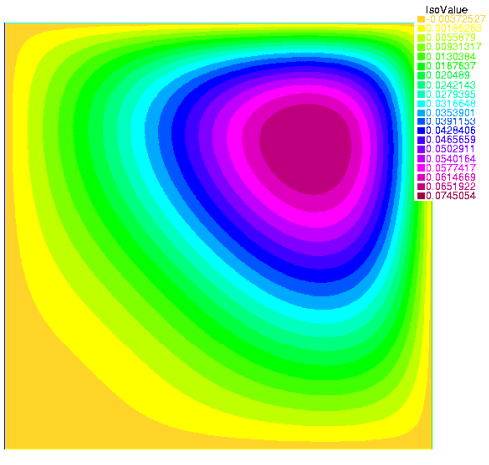

FIGURE 2.3 – Solution numérique

Pour le calcul de l'estimation d'erreur, nous définissons l'erreur suivante :

$$err = \frac{|u_h^{i+1} - u|_{1,\Omega}}{|u|_{1,\Omega}}. \tag{2.6}$$

Nous présentons dans la Figure 2.4 la courbe d'erreur en fonction du pas de maillage h en échelle logarithmique. Nous testons l'algorithme pour N allant de 80 à 120, par pas de 10 et nous prenons $\lambda = 1$ et $p = 1$. La pente est de l'ordre de $1,018$.

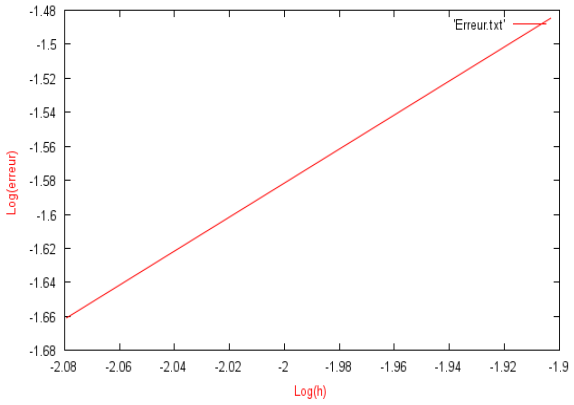

FIGURE 2.4 – Courbe d'erreur en échelle logarithmique

Remarque 2.1.1. *Nous remarquons que la pente est à peu près égale à* 1*, ce qui vérifie l'estimation d'erreur théorique.*

Nous représentons maintenant les estimations de l'erreur dans trois tableaux qui correspondent à trois maillages différents : $N = 50$, $N = 100$ et $N = 200$.

Remarque 2.1.2. *Dans la suite, nous parlons de divergence quand l'erreur ne décroit pas. Lorsque le schéma diverge, nous notons* div.

$N = 50$

λ \ p	1	2	3	4	5	10
10^{-2}	0,0523764	0,0523754	0,0523754	0,0523754	0,0523754	0,0523754
10^{-1}	0,0523846	0,0523755	0,0523754	0,0523754	0,0523754	0,0523754
1	0,0523755	0,0523758	0,0523757	0,0523754	0,0523754	0,0523754
5	0,0523759	0,0523770	0,0523754	0,0523754	0,0523754	0,0523754
10	0,0523774	0,0523786	0,0523754	0,0523754	0,0523754	0,0523754
50	0,0524245	0,0523914	0,0523755	0,0523754	0,0523754	0,0523754
10^2	0,0523796	0,0524074	0,0523756	0,0523754	0,0523754	0,0523754
10^3	0,0523057	0,0523767	0,0523767	0,0523754	0,0523754	0,0523754
10^4	div	0,0524237	0,0523878	0,0523754	0,0523754	0,0523754
10^5	div	0,0523919	0,0523755	0,0523754	0,0523754	0,0523754
10^6	div	div	0,0523865	0,0523754	0,0523754	0,0523754
10^7	div	div	0,0523847	0,0523754	0,0523754	0,0523754
10^8	div	div	0,0524212	0,0523754	0,0523754	0,0523754
10^9	div	div	div	0,0523754	0,0523754	0,0523754

$N = 100$

λ \ p	1	2	3	4	5	10
10^{-2}	0,0262069	0,026206	0,026206	0,026206	0,026206	0,026206
10^{-1}	0,0262152	0,026206	0,026206	0,026206	0,026206	0,026206
1	0,026206	0,0262063	0,026206	0,026206	0,026206	0,026206
5	0,0262065	0,0262076	0,026206	0,026206	0,026206	0,026206
10	0,026208	0,0262092	0,026206	0,026206	0,026206	0,026206
50	0,0262065	0,0262221	0,026206	0,026206	0,026206	0,026206
10^2	0,0262102	0,026206	0,0262061	0,026206	0,026206	0,026206
10^3	0,0262118	0,0262065	0,0262072	0,026206	0,026206	0,026206
10^4	div	0,0262067	0,0262185	0,026206	0,026206	0,026206
10^5	div	0,0262225	0,0262061	0,026206	0,026206	0,026206
10^6	div	div	0,0262172	0,026206	0,026206	0,026206
10^7	div	div	0,0262154	0,026206	0,026206	0,026206
10^8	div	div	0,0262286	0,026206	0,026206	0,026206
10^9	div	div	div	0,026206	0,026206	0,026206

$N = 200$

λ \ p	1	2	3	4	5	10
10^{-2}	0,0131062	0,0131053	0,0131053	0,0131053	0,0131053	0,0131053
10^{-1}	0,0131145	0,0131053	0,0131053	0,0131053	0,0131053	0,0131053
1	0,0131053	0,0131056	0,0131053	0,0131053	0,0131053	0,0131053
5	0,0131058	0,0131069	0,0131053	0,0131053	0,0131053	0,0131053
10	0,0131073	0,0131085	0,0131053	0,0131053	0,0131053	0,0131053
50	0,0131058	0,0131053	0,0131053	0,0131053	0,0131053	0,0131053
10^2	0,0131095	0,0131053	0,0131053	0,0131053	0,0131053	0,0131053
10^3	0,0131111	0,0131058	0,0131053	0,0131053	0,0131053	0,0131053
10^4	div	0,013106	0,0131053	0,0131053	0,0131053	0,0131053
10^5	div	0,0131077	0,0131053	0,0131053	0,0131053	0,0131053
10^6	div	div	0,0131165	0,0131053	0,0131053	0,0131053
10^7	div	div	0,0131148	0,0131053	0,0131053	0,0131053
10^8	div	div	0,0131161	0,0131053	0,0131053	0,0131053
10^9	div	div	div	0,0131053	0,0131053	0,0131053

Remarque 2.1.3. *Dans les trois tableaux précédents ($N = 50$, $N = 100$ et $N = 200$), pour la même solution u, nous présentons la convergence du schéma pour différentes valeurs de λ, p et N.*

Afin de bien illustrer la divergence dans le cas $p = 1$, $\lambda = 10^6$ et $N = 100$, nous présentons la courbe d'erreur dans la Figure 2.5.

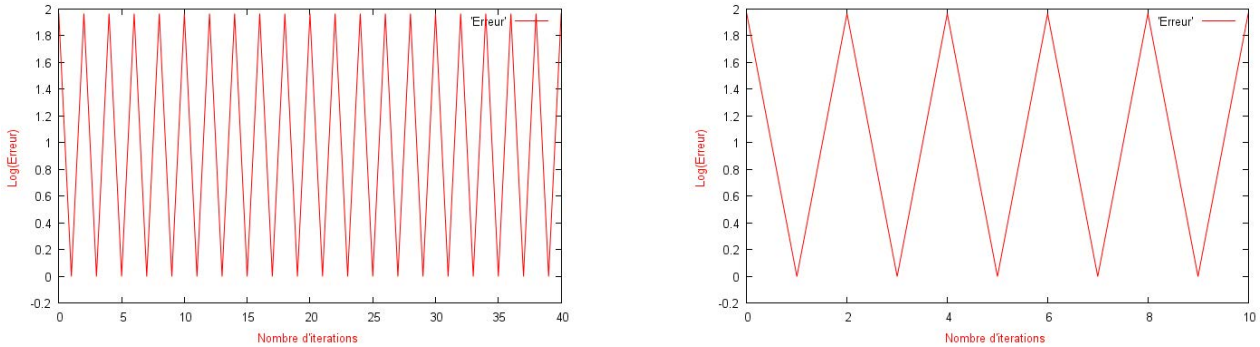

FIGURE 2.5 – Courbe d'erreur

Etude de l'erreur pour différentes solutions théoriques

Dans ce qui précède, nous avons considéré la solution théorique

$$u(x,y) = x(x-1)y(y-1)(x^2+y^2)\mathrm{e}^{xy}.$$

Nous remarquons que pour $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$, la solution u est assez petite. Dans ce qui suit, afin d'étudier la convergence du problème (2.1) pour des solutions plus grandes, nous considérons les solutions théoriques suivantes

$$\begin{aligned} u_1 &= 20u, \\ u_2 &= 50u, \\ u_3 &= 100u. \end{aligned}$$

Nous représentons les estimations d'erreur dans trois tableaux qui correspondent au maillage $N = 50$.

$u_1 = 20u$

λ \ p	1	2	3	4	5	10
10^{-2}	0,0523757	0,0523767	0,0523799	0,0523922	0,0523772	div
10^{-1}	0,0524068	0,0523784	0,0524023	0,0524053	0,0524184	div
1	0,0523975	0,0524142	0,0524264	div	div	div
5	0,052398	0,0524315	div	div	div	div
10	0,0524306	div	div	div	div	div
50	div	div	div	div	div	div
10^2	div	div	div	div	div	div
10^3	div	div	div	div	div	div
10^4	div	div	div	div	div	div
10^5	div	div	div	div	div	div
10^6	div	div	div	div	div	div
10^7	div	div	div	div	div	div
10^8	div	div	div	div	div	div
10^9	div	div	div	div	div	div
10^{10}	div	div	div	div	div	div

$u_2 = 50u$

λ \ p	1	2	3	4	5	10
10^{-2}	0,0523754	0,0523924	div	div	div	div
10^{-1}	0,0523789	0,0523213	div	div	div	div
1	0,052402	div	div	div	div	div
5	div	div	div	div	div	div
10	div	div	div	div	div	div
50	div	div	div	div	div	div
10^2	div	div	div	div	div	div
10^3	div	div	div	div	div	div
10^4	div	div	div	div	div	div
10^5	div	div	div	div	div	div
10^6	div	div	div	div	div	div
10^7	div	div	div	div	div	div
10^8	div	div	div	div	div	div
10^9	div	div	div	div	div	div

$u_3 = 100u$

λ \ p	1	2	3	4	5	10
10^{-2}	0,0523796	div	div	div	div	div
10^{-1}	0,0524057	div	div	div	div	div
1	div	div	div	div	div	div
5	div	div	div	div	div	div
10	div	div	div	div	div	div
50	div	div	div	div	div	div
10^2	div	div	div	div	div	div
10^3	div	div	div	div	div	div
10^4	div	div	div	div	div	div
10^5	div	div	div	div	div	div
10^6	div	div	div	div	div	div
10^7	div	div	div	div	div	div
10^8	div	div	div	div	div	div
10^9	div	div	div	div	div	div

Interprétation

Tout d'abord, nous remarquons dans les trois premiers tableaux correspondant aux trois maillages différents $N = 50$, $N = 100$ et $N = 200$, que pour $p = 1$, $p = 2$ et $p = 3$, le problème (2.1) diverge pour une valeur de λ plus grande ou égale à 10^4, 10^6 et 10^8 respectivement. De plus, dans les trois tableaux correspondant aux trois solutions théoriques différentes u_1, u_2 et u_3 nous remarquons que notre problème ne converge que pour des petites valeurs de λ et p. Par suite, nous pouvons conclure que la convergence dépend des deux paramètres λ et p. En effet, pour des grandes valeurs de $|u|^{2p}$ et λ le terme non linéaire $\lambda|u|^{2p}u$ atteint une valeur de plus en plus élevée ce qui conduit à une divergence de notre problème. Nous remarquons que les résultats expérimentaux s'accordent avec les résultats théoriques. En effet, le théorème 1.4.1 assure la convergence de la solution du problème itératif pour des petites valeurs de λ et p.

2.1.2 Estimation d'erreur *a posteriori*

Dans cette partie, afin de résoudre notre problème, nous proposons deux algorithmes itératifs ayant deux critères d'arrêts différents. Le premier algorithme correspond à un critère d'arrêt classique ($\eta_i^{(L)} \leq 10^{-5}$), alors que le second correspond à un nouveau critère ($\eta_i^{(L)} \leq \gamma\eta_i^{(D)}$) que nous allons définir par la suite. Dans ce but, nous considérons la solution théorique $u(x, y) = \mathrm{e}^{-100(x^2+y^2)}$ définie sur le domaine $\Omega =]-1, 1[^2$. Notons que u est presque nulle au bord.

Nous implémentons le schéma itératif suivant

$$(\nabla u_h^{i+1}, \nabla v_h) + \lambda(|u_h^i|^{2p}u_h^{i+1}, v_h) = (f, v_h).$$

Nous définissons l'indicateur d'erreur de discrétisation $\eta_i^{(D)}$ comme suit

$$\eta_i^{(D)} = \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \left(\eta_{K,i}^{(D)}\right)^2 \right)^{1/2}, \tag{2.7}$$

avec

$$\eta_{K,i}^{(D)} = h_K^2 \parallel f_h - \lambda|u_h^i|^{2p}u_h^{i+1} \parallel_{L^2(K)}^2 + \sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}} h_e \parallel [\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n}] \parallel_{L^2(e)}^2 .$$

De même, nous définissons l'indicateur d'erreur de linéarisation $\eta_i^{(L)}$ comme suit

$$\eta_i^{(L)} = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\eta_{K,i}^{(L)}\right)^2 \right)^{1/2}, \tag{2.8}$$

avec

$$\eta_{K,i}^{(L)} = |u_h^{i+1} - u_h^i|_{1,K}.$$

Soit γ un paramètre positif, nous posons le nouveau critère d'arrêt de linéarisation suivant

$$\eta_i^{(L)} \leq \gamma \eta_i^{(D)}, \tag{2.9}$$

et le critère d'arrêt classique

$$\eta_i^{(L)} \leq 10^{-5}. \tag{2.10}$$

Par la suite, nous choisissons une approximation initiale arbitraire ($u_h^0 = 0$), et nous introduisons l'algorithme itératif suivant : Pour $i \geq 0$,

(1) Connaissant u_h^i
  - **(a)** nous résolvons le problème pour calculer u_h^{i+1}.
  - **(b)** nous calculons $\eta_i^{(D)}$ et $\eta_i^{(L)}$ définis en (2.7) et (2.8) respectivement.

(2) Si l'erreur de linéarisation vérifie le critère d'arrêt (2.9) ou (2.10), nous arrêtons la boucle d'itération et nous passons à l'étape **(3)**, sinon nous recommençons l'étape **(1)**.

(3)
  - **(a)** Si $\eta_i^{(D)}$ est inférieur à une tolérence ϵ fixée, nous arrêtons l'algorithme,
  - **(b)** sinon nous effectuons l'adaptation du maillage qui peut être décrite comme suit :

    Sur un triangle K du maillage,
    - si $\eta_{K,i}^{(D)}$ est très petite, on déraffine le maillage autour de K.
    - si $\eta_{K,i}^{(D)}$ est très grande, on raffine le maillage autour de K.

    Par la suite nous repassons à l'étape **(1)**.

Remarque 2.1.4. *Dans l'algorithme précédent, il y a plusieurs techniques pour exprimer le test "si $\eta_{K,i}^{(D)}$ est très petite" (respectivement "si $\eta_{K,i}^{(D)}$ est très grande"). Cette comparaison peut par exemple se faire avec la moyenne de tous les indicateurs du maillage :*

$$\bar{\eta}_i^{(D)} = \frac{1}{n_t} \sum_{K \in \tau_h} \eta_{K,i}^{(D)} \qquad \textit{(où } n_t \textit{ est le nombre de triangles dans le maillage),}$$

ou par rapport à l'indicateur maximal du maillage multilplié par une constante choisie ε strictement inférieure à 1 :

$$\varepsilon \max_{K \in \tau_h} \eta_{K,i}^{(D)}.$$

Nous nous intéressons à étudier l'évolution de l'adaptation du maillage (Figures 2.6 et 2.7) pour le premier algorithme correspondant au critère d'arrêt classique ($\eta_i^{(L)} \leq 10^{-5}$). Pour celà, nous commençons avec le même maillage initial (carré dont les arêtes sont divisés en 10 segments). Les Figures 2.6 et 2.7 montrent l'évolution du maillage au cours des itérations. Nous remarquons que le maillage se concentre de plus en plus au centre du carré là où la solution n'est pas nulle.

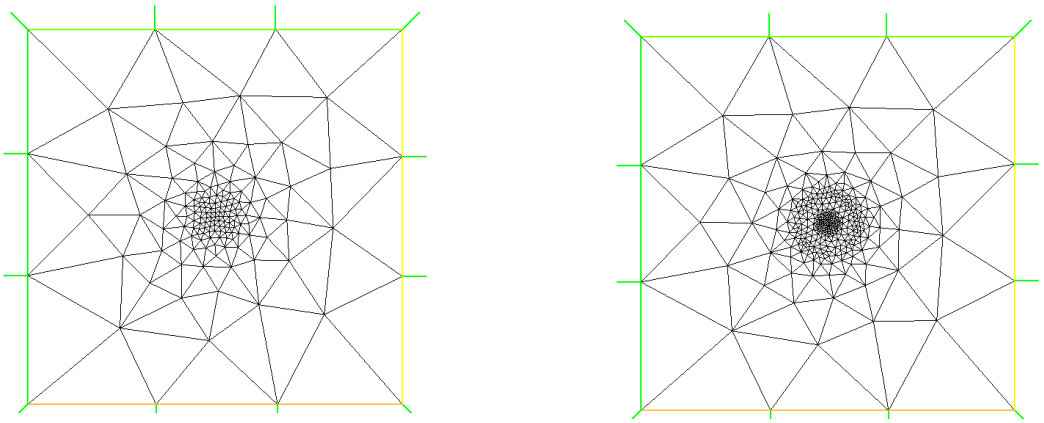

FIGURE 2.6 – Evolution de l'adaptation du maillage.

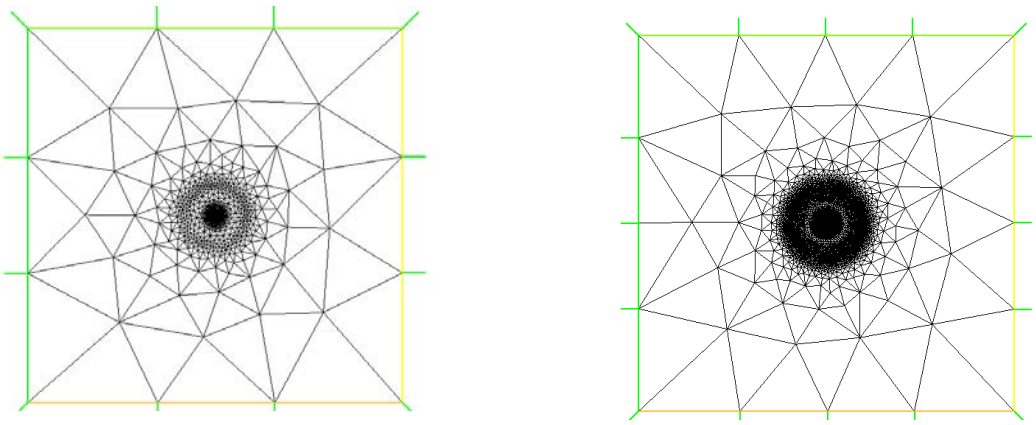

FIGURE 2.7 – Evolution de l'adaptation du maillage.

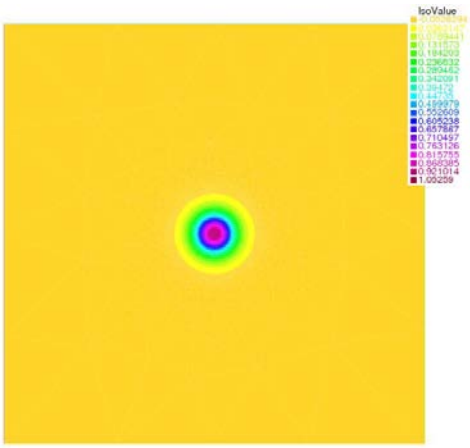

FIGURE 2.8 – Solution théorique

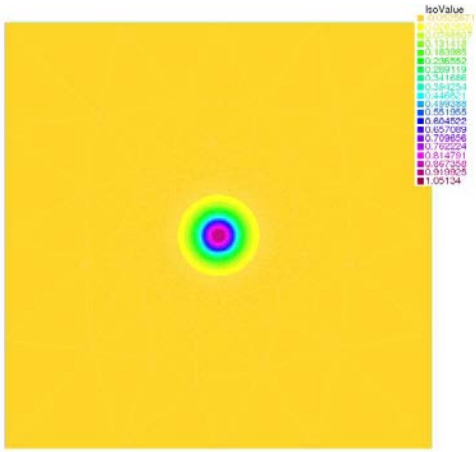

FIGURE 2.9 – Solution numérique

Nous présentons dans les Figures 2.8 et 2.9 la solution théorique et la solution numérique correspondante au dernier maillage de la Figure 2.7. Nous prenons $\lambda = 2$ et $p = 1$.

Notre but à cette étape est d'étudier l'évolution de l'adaptation du maillage pour le second algorithme correspodant au nouveau critère d'arrêt ($\eta_i^{(L)} \leq \gamma \eta_i^{(D)}$). Pou celà nous commençons de nouveau avec le même maillage initial (voir Figure 2.1) et nous utilisons l'indicateur $\eta_i^{(D)}$ dans l'adaptation du maillage (voir Figures 2.10 à 2.15).

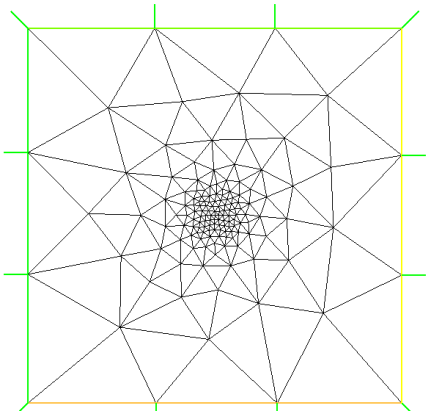

FIGURE 2.10 – 148 sommets

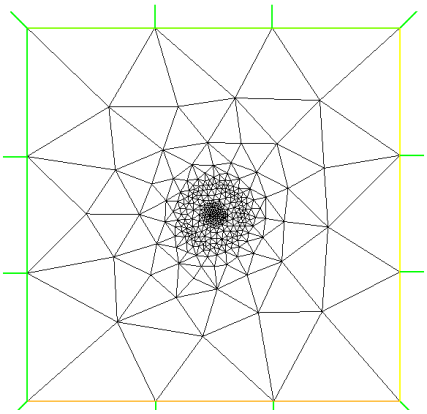

FIGURE 2.11 – 334 sommets

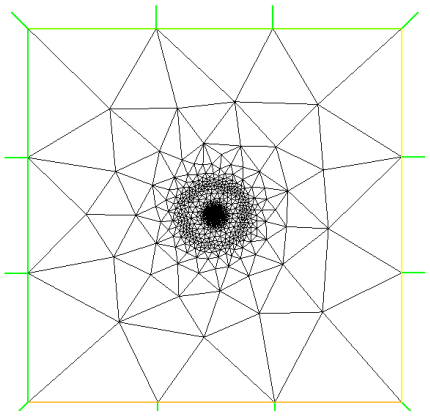

FIGURE 2.12 – 803 sommets

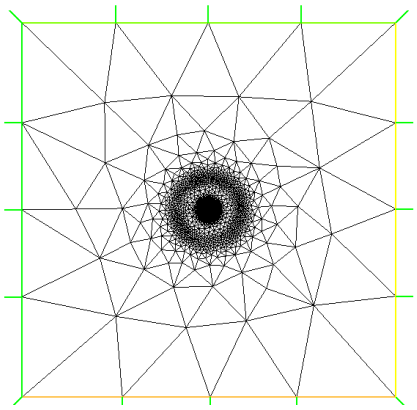

FIGURE 2.13 – 2229 sommets

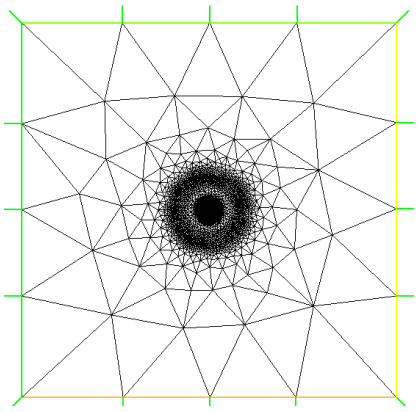

FIGURE 2.14 – 5083 sommets

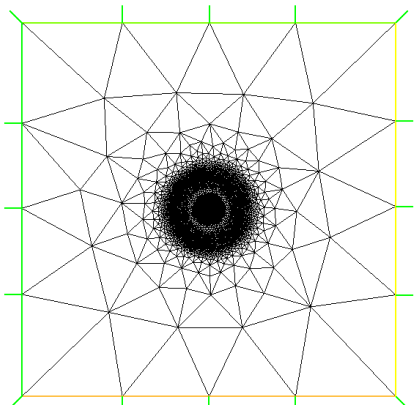

FIGURE 2.15 – 9963 sommets

Nous présentons dans la Figure 2.16 les deux courbes relatives à l'estimation de l'erreur en fonction du nombre de sommets. La première courbe (bleue) correspond à un critère d'arrêt classique ($\eta_i^{(L)} \leq 10^{-5}$), alors que la second courbe (rouge) correspond à un nouveau critère d'arrêt ($\eta_i^{(L)} \leq \gamma \eta_i^{(D)}$). Nous prenons $\lambda = 50$, $p = 10$ et $\gamma = 0,01$. Nous remarquons que par rapport aux nombres de sommets l'erreur reste la même pour les deux critères d'arrêt, alors que nous verrons par la suite l'avantage du second critère d'arrêt par rapport aux nombre d'itérations.

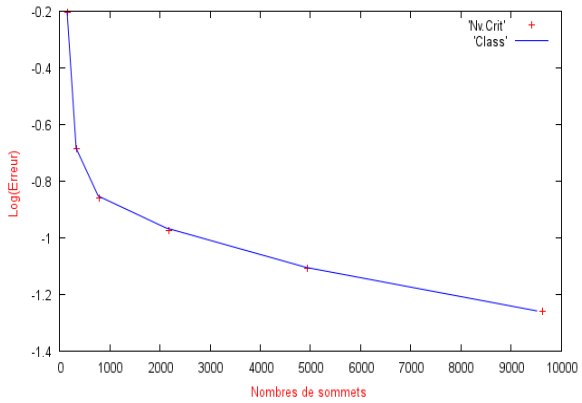

FIGURE 2.16 – Courbe d'erreur en fonction du nombres de sommets

Nous présentons dans la Figure 2.17 deux courbes relatives à l'estimation de l'erreur en fonction du nombre de sommets. La première courbe (rouge) corrrespond à un maillage uniforme avec N allant de 10 à 100 par pas de 10, alors que la seconde (bleue) correspond à un maillage adaptatif avec le critère d'arrêt de linéarisation $\eta_i^{(L)} \leq \gamma \eta_i^{(D)}$. Nous testons l'algorithme en prenant $\lambda = 50$, $p = 10$ et $\gamma = 10^{-3}$. Nous remarquons qu'avec un maillage adaptatif, l'erreur est beaucoup plus petite que celle avec un maillage uniforme, d'où l'efficacité de notre méthode.

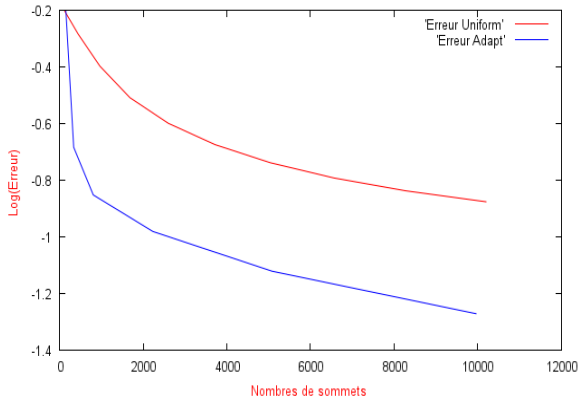

FIGURE 2.17 – Courbes d'erreur en fonction du nombres de sommets

Dans la Figure 2.18, nous illustrons la performance de notre nouveau critère d'arrêt avec $\gamma = 0,01$. En effet, nous comparons le nombre d'itérations en fonction du niveau de raffinement pour les deux critères d'arrêt $\eta_i^{(L)} \leq \gamma \eta_i^{(D)}$ et $\eta_i^{(L)} \leq 10^{-5}$. Cette nouvelle méthode nous permet de diminuer le nombre d'itérations. En effet, comme nous remarquons dans la Figure 2.18, au 5^{eme} niveau de raffinement la méthode classique nécessite 27 itérations alors que le nouveau critère d'arrêt (2.9) nécessite juste de 2 itérations. D'où l'avantage de ce nouveau critère.

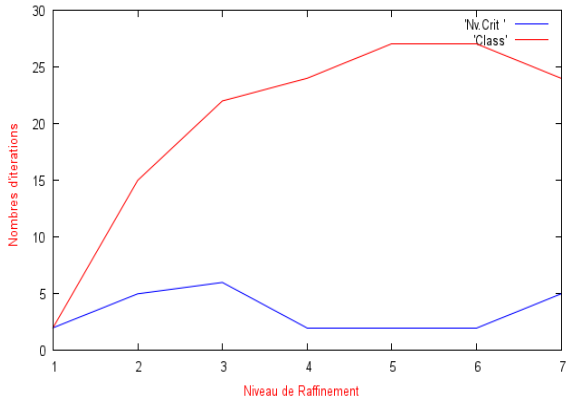

FIGURE 2.18 – Nombres d'itération en fonction du niveau de raffinement

Nous présentons finalement le tableau suivant associé à la Fiqure 2.18. Ce tableau présente le gain fournit par le nouveau critère d'arrêt par rapport au critère classique en terme de temps de calcul CPU, pour chaque niveau de raffinement. En effet, pour le sixième niveau de raffinement le coût du temps de l'algorithme classique est environ 22s alors que celui du nouveau critère est environ 3s. Il est claire que la méthode classique nécéssite beaucoup plus de temps que la nouvelle méthode. En effet, le nouveau critère d'arrêt fournit un gain remarquable en temps.

Niv. de raffinement / Méthode	4	5	6
Critère classique	4,949s	11,703s	21,528s
Nouveau Critère	0,593s	1,263s	3,2912s

2.2 Méthode de Newton

2.2.1 Estimation d'erreur *a priori*

Dans cette partie, nous proposons le même maillage que nous avons déjà utilisé et nous considérons la solution théorique (2.2) qui vérifie la condition au bord. La méthode de Newton suggère l'itération suivante pour déterminer u_{i+1} connaissant u_i :

$$u_{i+1} = u_i - Df(u_i)^{-1} f(u_i).$$

D'où, nous implémentons l'algorithme de Newton suivant avec $u_h^0 = 0,03$:

$$(\nabla u_h^{i+1}, \nabla w_h) + \lambda(2p+1)((u_h^i)^{2p} u_h^{i+1}, w_h) = 2\lambda p((u_h^i)^{2p+1}, w_h) + (f, w_h). \tag{2.11}$$

avec le critère d'arrêt classique défini par

$$err_L = \frac{|u_h^{i+1} - u_h^i|_{1,\Omega}}{|u_h^{i+1}|_{1,\Omega}} \leq 10^{-7}.$$

Nous présentons dans la Figure 2.19 la courbe d'erreur en fonction du pas de maillage h en échelle logarithmique. Nous testons l'algorithme pour N allant de 80 à 120, par pas de 10 et nous prenons $\lambda = 1$ et $p = 1$. La pente est de l'ordre de $0,999$.

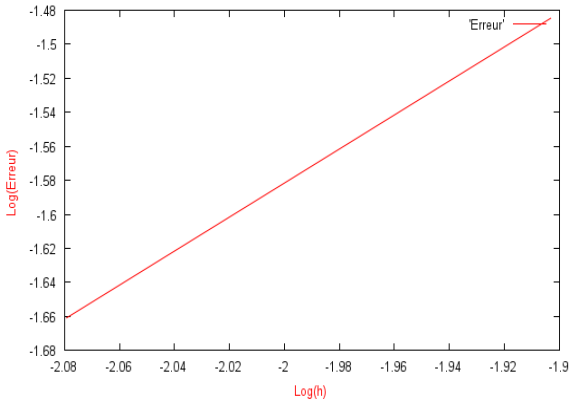

FIGURE 2.19 – Courbe d'erreur en échelle logarithmique

Nous représentons les estimations de l'erreur dans trois tableaux qui correspondent à trois maillages différents : $N = 50$, $N = 100$ et $N = 200$.

$N = 50$

λ \ p	1	2	3	4	5	10
10^{-2}	0,0523754	0,0523754	0,0523754	0,0523754	0,0523754	0,0523754
10^{-1}	0,0523754	0,0523755	0,0523754	0,0523754	0,0523754	0,0523754
1	0,0523758	0,0523758	0,0523757	0,0523754	0,0523754	0,0523754
5	0,0523759	0,0523770	0,0523754	0,0523754	0,0523754	0,0523754
10	0,0524081	0,0523786	0,0523754	0,0523754	0,0523754	0,0523754
50	0,053207	0,0523914	0,0523755	0,0523754	0,0523754	0,0523754
10^2	0,055735	0,0524074	0,0523754	0,0523754	0,0523754	0,0523754
10^3	div	0,0523913	0,0523754	0,0523754	0,0523754	0,0523754
10^4	div	0,0541072	0,0523755	0,0523754	0,0523754	0,0523754
10^5	div	div	0,0523808	0,0523754	0,0523754	0,0523754
10^6	div	div	0,0529614	0,0523755	0,0523754	0,0523754
10^7	div	div	div	0,052377	0,0523754	0,0523754
10^8	div	div	div	0,0525471	0,0523754	0,0523754
10^9	div	div	div	div	0,0523754	0,0523754

$N = 100$

λ \ p	1	2	3	4	5	10
10^{-2}	0,0262069	0,026206	0,026206	0,026206	0,026206	0,026206
10^{-1}	0,0262152	0,026206	0,026206	0,026206	0,026206	0,026206
1	0,026206	0,0262063	0,026206	0,026206	0,026206	0,026206
5	0,0262065	0,0262076	0,026206	0,026206	0,026206	0,026206
10	0,026208	0,0262092	0,026206	0,026206	0,026206	0,026206
50	0,0262065	0,0262221	0,026206	0,026206	0,026206	0,026206
10^2	0.0262102	0,026206	0,0262061	0,026206	0,026206	0,026206
10^3	div	0,0262065	0,0262072	0,026206	0,026206	0,026206
10^4	div	0.026067	0,0262185	0,026206	0,026206	0,026206
10^5	div	div	0,0262061	0,026206	0,026206	0,026206
10^6	div	div	0,0262172	0,026206	0,026206	0,026206
10^7	div	div	div	0,026206	0,026206	0,026206
10^8	div	div	div	0,026206	0,026206	0,026206
10^9	div	div	div	div	0,026206	0,026206

$N = 200$

λ \ p	1	2	3	4	5	10
10^{-2}	0,0131062	0,0131053	0,0131053	0,0131053	0,0131053	0,0131053
10^{-1}	0,0131145	0,0131053	0,0131053	0,0131053	0,0131053	0,0131053
1	0,0131053	0,0131056	0,0131053	0,0131053	0,0131053	0,0131053
5	0,0131058	0,0131069	0,0131053	0,0131053	0,0131053	0,0131053
10	0,0131073	0,0131085	0,0131053	0,0131053	0,0131053	0,0131053
50	0,0131058	0,0131053	0,0131053	0,0131053	0,0131053	0,0131053
10^2	0,0131095	0,0131053	0,0131053	0,0131053	0,0131053	0,0131053
10^3	div	0,0131053	0,0131053	0,0131053	0,0131053	0,0131053
10^4	div	0,0131055	0,0131053	0,0131053	0,0131053	0,0131053
10^5	div	div	0,013127	0,0131053	0,0131053	0,0131053
10^6	div	div	0,0153185	0,0131053	0,0131053	0,0131053
10^7	div	div	div	0,0131053	0,0131053	0,0131053
10^8	div	div	div	0,0131053	0,0131053	0,0131053
10^9	div	div	div	div	0,0131053	0,0131053
10^{10}	div	div	div	div	0,0131053	0,0131053

Remarque 2.2.1. *Dans les trois tableaux précédents ($N = 50$, $N = 100$ et $N = 200$), pour la même solution u, nous présentons la convergence du schéma pour différentes valeurs de λ, p et N.*

Remarque 2.2.2. *Nous remarquons dans les trois tableaux précédent que pour $p = 1$, $p = 2$, $p = 3$ et $p = 4$ l'utilisation de l'algorithme de Newton conduit à la divergence de notre problème pour une valeur de λ plus grande ou égale à 10^3, 10^4, 10^6 et 10^9 respectivement. En effet, en utilisant le premier algorithme* $\left((\nabla u_h^{i+1}, \nabla v_h) + \lambda(|u_h^i|^{2p} u_h^{i+1}, v_h) = (f, v_h)\right)$ *notre problème diverge pour les valeurs de p et λ suivantes :*

- $p = 1$ et $\lambda = 10^4$,
- $p = 2$ et $\lambda = 10^6$,
- $p = 3$ et $\lambda = 10^9$.

2.2.2 Estimation d'erreur *a posteriori*

Dans cette partie, afin de résoudre notre problème non linéaire, nous utilisons l'algorithme de Newton ayant un critère d'arrêt ($\eta_i^{(L)} \leq \gamma\eta_i^{(D)}$) que nous allons définir par la suite. Dans ce but, nous considérons la solution théorique $u = \mathrm{e}^{-100(x^2+y^2)}$ définie sur le domaine $\Omega =]-1,1[^2$. Notons que u est presque nulle au bord. Nous implémentons alors le schéma de Newton itératif (2.11) et nous définissons l'indicateur d'erreur $\eta_i^{(D)}$ comme suit

$$\eta_i^{(D)} = \Bigg(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K^2 \parallel f_h + \Delta u_h^{i+1} + \lambda(2p+1)|u_h^i|^{2p} u_h^{i+1} - 2\lambda p (u_h^i)^{2p+1} \parallel_{L^2(K)}^2 + \sum_{e\in\Upsilon_K} h_e \parallel [\frac{\partial u_h^{i+1}}{\partial n}] \parallel_{L^2(e)}^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.12}$$

Soit γ un paramètre positif, nous posons le critère d'arrêt de linéarisation suivant

$$\eta_i^{(L)} \leq \gamma\eta_i^{(D)}, \tag{2.13}$$

Par la suite, nous choisissons une approximation initiale arbitraire ($u_h^0 = 0.03$), et nous utilisons le même algorithme itératif que nous avons déjà introduit dans la partie précédente.

Nous nous intéréssons à étudier l'évolution de l'adaptation du maillage pour l'algorithme de Newton. Nous commençons avec un maillage initial (carré dont les arêtes sont divisés en 10 segments). Par la suite, nous utiliserons l'indicateur $\eta_i^{(D)}$ dans l'adaptation du maillage (voir Figure 2.20 à 2.25).

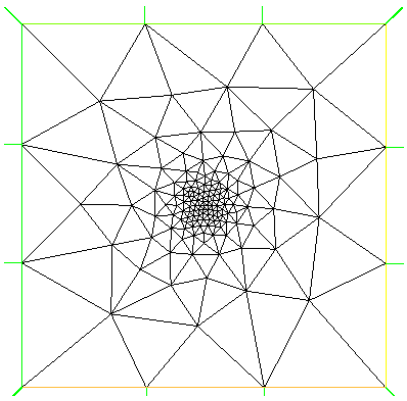

FIGURE 2.20 – 147 sommets

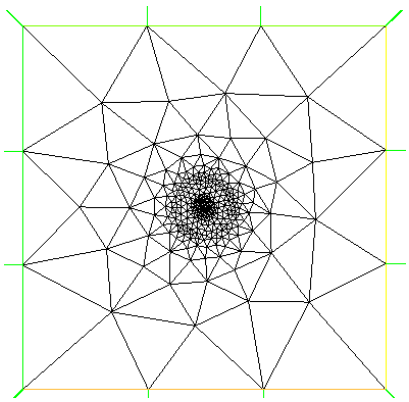

FIGURE 2.21 – 320 sommets

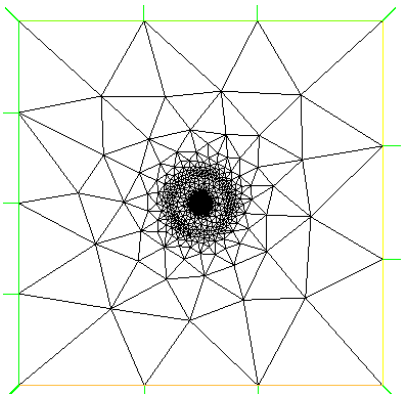

FIGURE 2.22 – 787 sommets

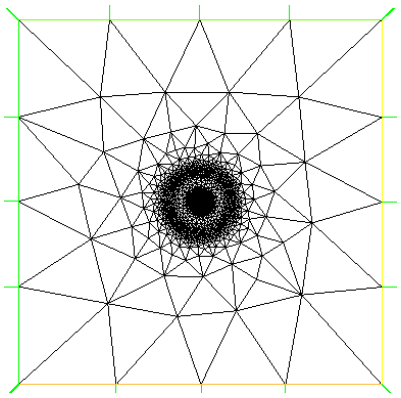

FIGURE 2.23 – 2149 sommets

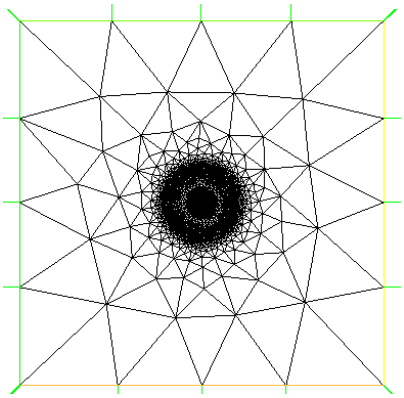

FIGURE 2.24 – 4896 sommets

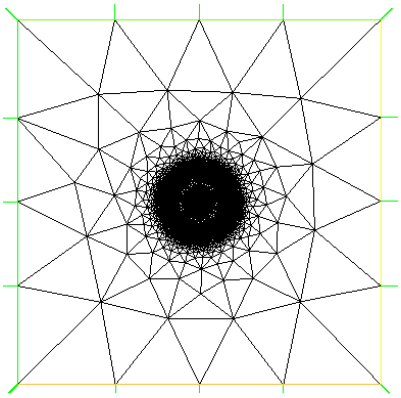

FIGURE 2.25 – 9599 sommets

Nous présentons dans la Figure 2.26 la solution théorique et la solution numérique correspondante au maillage de la Figure 2.25. Nous prenons $\lambda = 10$ et $p = 1$.

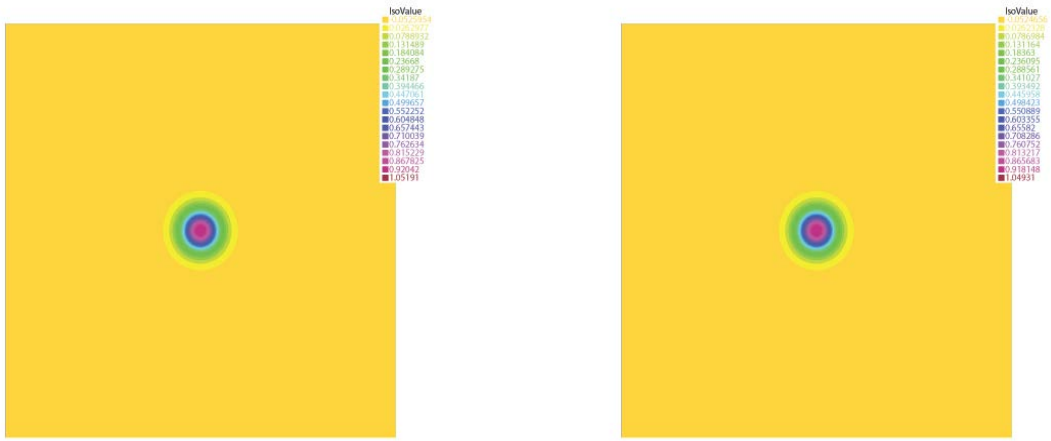

FIGURE 2.26 – Solution théorique (à gauche) et solution numérique (à droite) après adaptation du maillage.

Nous présentons dans la Figure 2.27 deux courbes en échelle logarithmique relatives à l'estimation de l'erreur en fonction du nombre de sommets. La première courbe (rouge) corrrespond à un maillage uniforme avec N allant de 10 à 100 par pas de 10, alors que la seconde (bleue) correspond à un maillage adaptatif avec le critère d'arrêt de linéarisation $\eta_i^{(L)} \leq \gamma \eta_i^{(D)}$. Nous testons l'algorithme en prenant $\lambda = 10$, $p = 1$ et $\gamma = 10^{-3}$. Nous remarquons clairement l'avantage du maillage adaptatif. En effet, l'erreur avec un maillage uniforme est beaucoup plus grande.

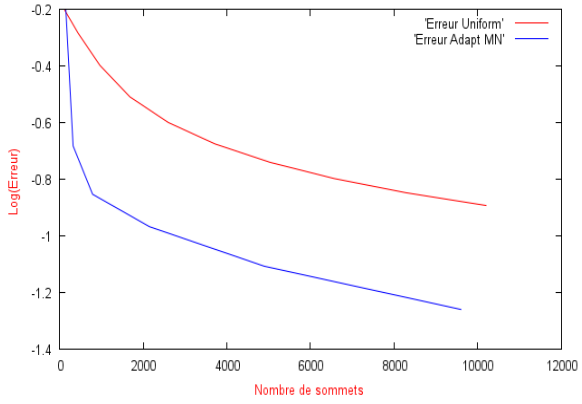

FIGURE 2.27 – Courbes d'erreur en fonction du nombres de sommets

Dans la Figure 2.28, nous illustrons la performance de notre nouveau critère d'arrêt avec $\lambda = 100$, $p = 10$ et $\gamma = 0,01$. Nous comparons le nombre d'itérations en fonction du niveau de raffinement pour les deux critères d'arrêt $\eta_i^{(L)} \leq \gamma \eta_i^{(D)}$ et $\eta_i^{(L)} \leq 10^{-5}$. Comme précédemment, nous remarquons clairement l'efficacité du nouveau critère d'arrêt. En effet, au delà du 4^{eme} niveau de raffinement la méthode classique nécéssite 11 itérations alors que le nouveau critère d'arrêt nécéssite juste 2 itérations. La nouvelle méthode nous fournit un gain en nombre d'itérations.

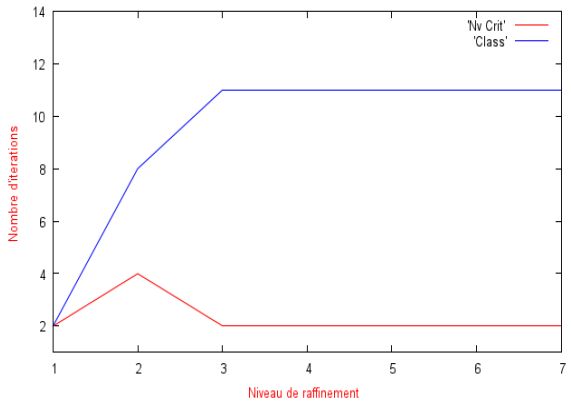

FIGURE 2.28 – Nombres d'itération en fonction du niveau de raffinement

De même, pour la méthode de Newton, nous remarquons dans le tableau suivant le gain en terme de temps de calcul à chaque niveau de raffinement. En effet, pour le septième niveau de raffinement le coût du temps de l'algorithme classique est environ $3,5$s alors que celui du nouveau critère est environ $1,5$s. Il est claire que le nouveau critère d'arrêt $\eta_i^{(L)} \leq \gamma \eta_i^{(D)}$ est beaucoup plus efficace que le critère d'arrêt classique $\eta_i^{(L)} \leq 10^{-5}$.

Niv. de raffinement / Méthode	4	5	6
Critère classique	3,263s	4,91s	3,59s
Nouveau critère	0,655s	1,373s	1,402s

Différence entre la méthode de Newton et le problème itératif initial

Nous présentons dans la Figure 2.29 deux courbes relatives à l'estimation de l'erreur en fonction du nombre de sommets. La première courbe (rouge) corrrespond à l'algorithme de Newton, alors que la seconde (bleue) correspond au problème itératif initial (2.5). Nous testons l'algorithme en prenant $\lambda = 10$, $p = 1$ et $\gamma = 10^{-3}$. Nous remarquons que par rapport aux nombres de sommets l'erreur reste à peu près la même pour les deux algorithmes adaptatifs, alors que nous verrons par la suite l'avantage et l'inconvénient de l'algorithme de Newton par rapport aux nombre d'itérations.

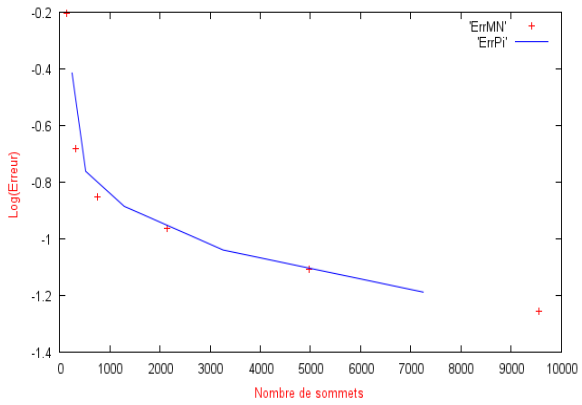

FIGURE 2.29 – Courbes d'erreur en fonction du nombres de sommets

Dans la Figure 2.30, nous illustrons la performance de l'algorithme de Newton avec le nouveau critère d'arrêt pour $\gamma = 0,01$ et $u_h^0 = 0,03$. En effet, nous comparons le nombre d'itérations en fonction du niveau de raffinement pour les deux algorithmes. Il est clair que la méthode de Newton nécessite un nombre d'itérations plus petit que notre problème itératif initial.

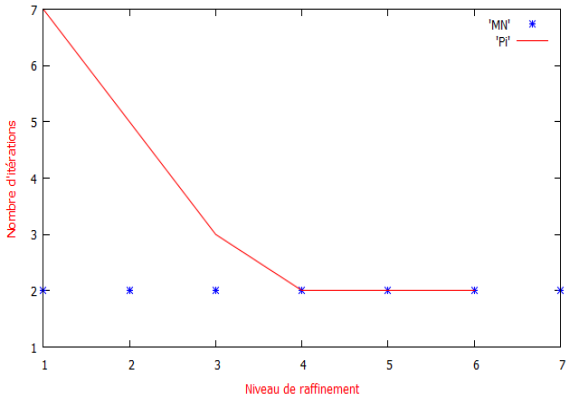

FIGURE 2.30 – Nombre d'itérations en fonction du niveau de raffinement

De même, dans la Figure 2.31, nous comparons le nombre d'itérations pour $\gamma = 0,001$.

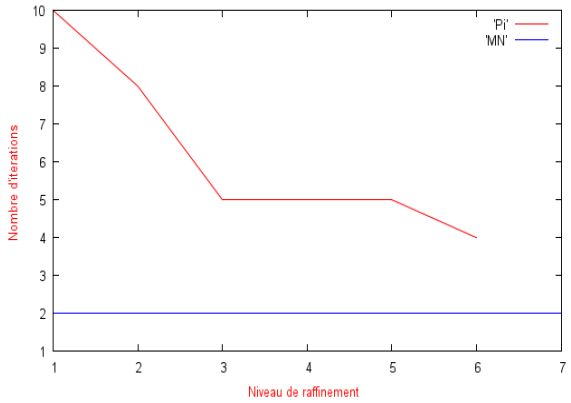

FIGURE 2.31 – Nombre d'itérations en fonction du niveau de raffinement

La méthode de Newton bénéficie d'une convergence généralement plus rapide que le problème itératif initial (2.5) et c'est là son principal avantage. Comme pour toutes les méthodes du type récurrent, il suffit d'un seul point de départ pour initialiser le processus itératif. Par contre, le choix de la donnée initiale dans la méthode de Newton est assez important. En effet, une donnée initiale u_h^0 qui n'est pas proche de la solution peut conduire à la divergence de notre problème. Afin de bien illustrer cette divergence, nous présentons la courbe d'erreur dans la Figure 2.32. Nous prenons $\lambda = 50$, $p = 10$, $\gamma = 10^{-2}$ et $u_h^0 = 1,5$.

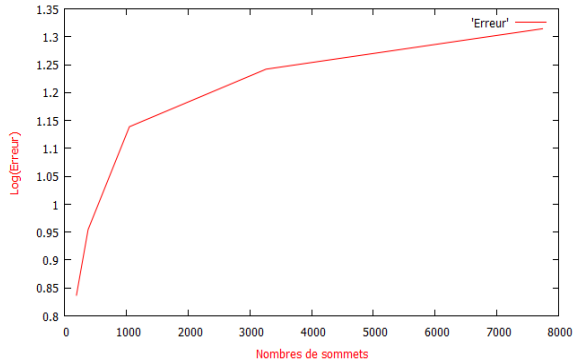

FIGURE 2.32 – Courbe d'erreur en échelle logarithmique

2.3 Algorithme mixte

Dans le but d'éliminer cet inconvénient, nous proposons un algorithme mixte. En effet, nous bénéficions des avantages des deux problèmes itératifs précédents, la méthode de Newton et le problème itératif initial. Nous commençons la première itération par la méthode du problème initial et nous continuons le processus itératif en utilisant l'algorithme de Newton. Nous considérons la solution théorique $u = \mathrm{e}^{-100(x^2+y^2)}$ définie sur le domaine $\Omega =]-1,1[^2$ et nous définissons l'erreur relative suivante :

$$err = \frac{|u_h^{i+1} - u|_{1,\Omega}}{|u|_{1,\Omega}} \leq 3,10^{-2}. \tag{2.14}$$

Nous présentons dans ce qui suit un tableau qui donne la durée de temps de la convergence des algorithmes par rapport au choix de la donnée initiale u_h^0. Nous prenons $\gamma = 10^{-2}$.

Donnée initiale $\mathbf{u_h^0}$	**Méthode de Newton**	**Problème initial**	**Algorithme mixte**
0,5	3,33 s	8,145 s	4,866 s
1,5	div	8,142 s	4,812 s
1,6	div	8,149 s	4,81 s
1,7	div	8,162 s	4,787 s
1,8	div	8,147 s	4,796 s
1,9	div	8,163 s	4,797 s
2	div	8,149 s	4,799 s
2,5	div	8,145 s	4,784 s

D'après le tableau ci-dessus, nou remarquons que pour une donnée initiale $u_h^0 = 0,5$ la méthode de Newton converge après $3,33$ s alors que le problème initial et l'algorithme mixte nécessite $8,145$ s et $4,866$ s respectivement. Ce résultat valide le fait que la méthode de Newton bénéficie d'une convergence généralement plus rapide que les autres algorithmes. Par contre, pour une donnée initiale u_h^0 plus grande ou égale à $1,5$ la méthode de Newton diverge alors que le problème initial et l'algorithme mixte convergent. En effet, le problème initial converge après à peu près $8,15$ s alors que l'algorithme mixte nécéssite à peu près $4,8$ s. En conclusion, l'avantage de l'algorithme mixte est d'éliminer l'inconvenient de la méthode de Newton et d'améliorer le temps de la convergence du problème initial.

Chapitre 3

Étude *a posteriori* des équations de Navier-Stokes

Sommaire

3.1 Introduction 82
3.2 Estimation d'erreur *a posteriori* du problème non linéaire . . 86
3.2.1 Estimation d'erreur pour des petites données 87
3.2.2 Une approche moins restrictive pour calculer l'estimation d'erreur *a posteriori* 91
3.2.3 Efficacité 96
3.3 Algorithme itératif 100
3.3.1 Convergence 100
3.3.2 Estimation d'erreur *a posteriori* du problème linéarisé 103
3.3.3 Efficacité 108

3.1 Introduction

Les équations de Navier-Stokes sont l'ensemble des équations les plus utilisées dans le domaine de la modélisation des écoulements de fluide. Ces équations gouvernent l'évolution du champ de vitesse $\mathbf{u}$ et la pression p dans les fluides incompressibles visqueux soumis à des forces extérieures. Mathématiquement, ce phénomène se traduit par l'introduction du coefficient de viscosité $\nu > 0$ et le paramètre de densité $\rho > 0$.

Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3, de frontière $\partial\Omega$. Nous nous intéressons alors à la résolution des équations de Navier-Stokes stationnaires suivantes :

$$\text{(3.1)} \qquad \begin{cases} -\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega \\ \text{div } \mathbf{u} &= 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où $\mathbf{f} = (f_1, ..., f_d) \in H^{-1}(\Omega)^d$ désigne le champ de forces appliquées au fluide.

Les opérateurs différentiels intervenant dans les équations de Navier-Stokes sont définis comme suit :

$$\nabla = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_d}\Big), \quad (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{d} u_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}, \quad \Delta\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial^2 x_i} \text{ et } \text{div } \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

Notons que $(\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u}$ est le terme de convection non linéaire.

Dans le but d'introduire la formulation variationelle associée au problème (3.1), nous considérons l'espace

$$X = H_0^1(\Omega)^d,$$

ainsi que l'espace des fonctions de carré intégrable à moyenne nulle

$$M = L_0^2(\Omega) = \Big\{ q \in L^2(\Omega); \quad \int_\Omega q \, d\mathbf{x} = 0 \Big\}.$$

La formulation variationelle correspondante au problème (3.1) est la suivante :

$$\text{(3.2)} \qquad \begin{cases} \textit{Trouver } \mathbf{u} \in X,\ p \in M \textit{ tels que} \\ \forall \mathbf{v} \in X, \quad \nu \displaystyle\int_\Omega \nabla\mathbf{u}\nabla\mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_\Omega (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u}\mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_\Omega p \, \text{div } \mathbf{v} \, d\mathbf{x} &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \\ \forall q \in M, \quad \displaystyle\int_\Omega q \, \text{div } \mathbf{u} \, d\mathbf{x} &= 0. \end{cases}$$

Afin de résoudre le problème (3.2), nous introduisons l'espace

$$V = \Big\{ \mathbf{v} \in X; \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 \Big\},$$

et son espace orthogonal

$$V^{\perp} = \Big\{ \mathbf{v} \in X;\ \forall \mathbf{w} \in X, \quad \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} \nabla \mathbf{w}\ d\mathbf{x} = 0 \Big\}.$$

Nous obtenons alors le problème qui suit, équivalent au problème (3.2), ([12], Chapitre 4)

$$\text{(3.3)} \qquad \begin{cases} \textit{Trouver } \mathbf{u} \in V \textit{ tel que} \\ \forall \mathbf{v} \in V, \quad \nu \displaystyle\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u}\mathbf{v} d\mathbf{x} \ = \ \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle. \end{cases}$$

Dans le but de montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.3) nous introduisons la norme

$$\mathcal{N} = \sup_{\substack{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in V \\ \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_{\Omega} (\mathbf{w}.\nabla)\mathbf{u}\mathbf{v}\ d\mathbf{x}}{|\mathbf{u}|_{1,\Omega} |\mathbf{v}|_{1,\Omega} |\mathbf{w}|_{1,\Omega}}.$$

Nous énonçons alors le théorème suivant ([12], Chapitre 4, Section 2) qui assure l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.3).

Théorème 3.1.1. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, $d \leq 4$, de frontière $\partial\Omega$ continue et Lipschitzienne. Si $\boldsymbol{f} \in H^{-1}(\Omega)^d$, le problème* (3.3) *admet au moins une solution $(\boldsymbol{u}, p) \in V \times M$ qui vérifie*

$$|\boldsymbol{u}|_{1,\Omega} < \frac{1}{\nu} \|\boldsymbol{f}\|_{-1,\Omega}\ .$$

De plus, le problème (3.3) *admet une unique solution si*

$$\frac{\mathcal{N}}{\nu^2} \|\boldsymbol{f}\|_{-1,\Omega} < 1.$$

Dans le but d'établir l'estimation d'erreur *a posteriori* de notre problème, nous introduisons le problème de Stokes. En effet, nous l'utiliserons plus tard pour calculer l'estimation d'erreur *a posteriori* du problème de Navier-Stokes.

Équations de Stokes

Nous considérons le problème de Stokes de la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\nu\Delta\mathbf{u}+\nabla p &=& \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \text{div } \mathbf{u} &=& 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} &=& \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega \end{array}\right. \tag{3.4}$$

où $\mathbf{f} \in H^{-1}(\Omega)$ et $\nu > 0$.

Le problème non linéaire (3.4) admet la formulation variationelle suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{Trouver } \mathbf{u} \in X,\ p \in M \textit{ tels que} \\ \forall \mathbf{v} \in X, \quad \nu \displaystyle\int_\Omega \nabla\mathbf{u}\nabla\mathbf{v}\ d\mathbf{x} - \int_\Omega p \text{ div } \mathbf{v}\ d\mathbf{x} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle, \\ \forall q \in M, \quad \displaystyle\int_\Omega q \text{ div } \mathbf{u}\ d\mathbf{x} = 0. \end{array}\right. \tag{3.5}$$

Nous posons, pour tous $\mathbf{u},\ \mathbf{v}, \in X$ et $p \in M$, les formes

$$\begin{array}{rcl} a(\mathbf{u},\mathbf{v}) &=& \nu \displaystyle\int_\Omega \nabla\mathbf{u}\nabla\mathbf{v}\ d\mathbf{x}, \\ b(\mathbf{v},p) &=& -\displaystyle\int_\Omega p \text{ div } \mathbf{v}\ d\mathbf{x}. \end{array} \tag{3.6}$$

Avec ces notations, la formulation variationnelle mixte du problème de Stokes s'écrit

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{Trouver } \mathbf{u} \in X,\ p \in M \textit{ tels que} \\ \forall \mathbf{v} \in X, \quad a(\mathbf{u},\mathbf{v}) + b(\mathbf{v},p) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle \\ \forall q \in M, \quad b(\mathbf{u},q) = 0. \end{array}\right. \tag{3.7}$$

Nous énonçons alors le théorème suivant ([12], Chapitre 1, Section 4) que nous utilisons pour assurer l'existence et l'unicité du problème de Stokes.

Théorème 3.1.2. *Soient E et F deux espaces de Hilbert et a et b deux formes bilinéaires. Si la forme a est coercive sur E et la forme b satisfait la condition "inf-sup" suivante*

$$\inf_{q\in F}\sup_{\boldsymbol{v}\in E}\frac{b(\boldsymbol{v},q)}{\|\boldsymbol{v}\|_E\|q\|_F} = \beta > 0,$$

alors le problème (3.7) *admet une unique solution $(\boldsymbol{u},p) \in E \times F$.*

En effet, nous appliquons le Théorème 3.1.2 au problème de Stokes. Notre but est alors de vérifier que la forme $a(.,.)$ est coercive et que la forme $b(.,.)$ vérifie la condition "inf-sup". En premier lieu, il est claire que la forme $a(.,.)$ définie en (3.6) est coercive. Reste à montrer que la forme $b(.,.)$ vérifie la condition "inf-sup".

En effet, soit $q \in M$, il existe une unique fonction $\mathbf{v} \in V^{\perp}$ ([12], Chapitre 1, Section 2) tel que

$$\text{div } \mathbf{v} = q, \quad |\mathbf{v}|_{1,\Omega} \leq C \, \| q \|_{L^2(\Omega)} \, .$$

Nous avons alors,

$$\frac{(q, \text{div } \mathbf{v})}{|\mathbf{v}|_{1,\Omega}} = \frac{\| q \|^2_{L^2(\Omega)}}{|\mathbf{v}|_{1,\Omega}} \geq (1/C) \, \| q \|_{L^2(\Omega)},$$

par suite,

$$\forall q \in M, \quad \sup_{\mathbf{v} \in X} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{|\mathbf{v}|_{1,\Omega}} \geq \beta \, \| q \|_{L^2(\Omega)} \tag{3.8}$$

avec $\beta = 1/C$.

Approximation par Éléments Finis et condition "inf-sup" discrète

Désormais, nous supposons que Ω est un domaine polygonal. Soit (X_h, M_h) une paire d'espaces d'éléments finis tels que $X_h \subset X$ et $M_h \subset M$. Les éléments finis utilisés pour la discrétisation de la vitesse $\mathbf{u}$ sont des éléments de Lagrange $\mathcal{P}_1$"*bulle*", alors que nous approchons la pression par des éléments de Lagrange du premier ordre $\mathcal{P}_1$. En raison de la contrainte d'incompressibilité, les deux espaces X_h et M_h vérifient la condition "inf-sup" (condition de Babuška-Brezzi) suivante :

$$\inf_{q_h \in M_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in X_h} \frac{-\int_{\Omega} q_h div \ \mathbf{v}_h \ d\mathbf{x}}{\| q_h \|_{L^2(\Omega)} \| \nabla \mathbf{v}_h \|_{L^2(\Omega)}} = \beta_h > 0, \tag{3.9}$$

où β_h est minorée par une constante indépendante de h.

Le problème variationnel discretisé par la méthode de Galerkin, associé à la formulation variationnelle (3.2) s'écrit :

(3.10)
$$\left\{\begin{array}{ll} \textit{Trouver } \mathbf{u}_h \in X_h, p_h \in M_h \textit{ tels que} & \\ \forall \mathbf{v}_h \in X_h, \quad \nu \displaystyle\int_\Omega \nabla \mathbf{u}_h \nabla \mathbf{v}_h d\mathbf{x} + \int_\Omega (\mathbf{u}_h.\nabla)\mathbf{u}_h \mathbf{v}_h d\mathbf{x} - \int_\Omega p_h \text{div } \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} & = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle \\ \forall q_h \in M_h, \quad \displaystyle\int_\Omega q_h \text{ div } \mathbf{u}_h \, d\mathbf{x} & = 0 \end{array}\right.$$

Comme précédemment, dans le but de résoudre le problème (3.10) nous introduisons l'espace

$$V_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in X_h; \forall q_h \in M_h, \ -\int_\Omega q_h \text{div } \mathbf{v}_h d\mathbf{x} = 0 \right\},$$

et nous obtenons le problème discrétisé suivant équivalent au problème (3.10)

(3.11)
$$\left\{\begin{array}{l} \textit{Trouver } \mathbf{u}_h \in V_h \textit{ tel que} \\ \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \ \ \nu \displaystyle\int_\Omega \nabla \mathbf{u}_h \nabla \mathbf{v}_h d\mathbf{x} + \int_\Omega (\mathbf{u}_h.\nabla)\mathbf{u}_h \mathbf{v}_h d\mathbf{x} \ = \ \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle. \end{array}\right.$$

Le problème (3.10) admet au moins une solution $(\mathbf{u}_h, p_h) \in X_h \times M_h$ ([12], Chapitre 4, Théorème 4.1). Cette solution vérifie l'estimation

$$|\mathbf{u}_h|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{\nu} \, \|\mathbf{f}\|_{-1,\Omega} \, .$$

De plus, si $\mathbf{u} \in H^2(\Omega)^2$ et $p \in H^1(\Omega)$, nous avons l'estimation d'erreur suivante ([12], Chapitre 4, Théorème 4.1)

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq Ch,$$

où C est une constante indépendante de h.

3.2 Estimation d'erreur *a posteriori* du problème non linéaire

Dans cette partie nous présentons deux stratégies différentes pour le calcul des estimations d'erreur *a posteriori* du problème non linéaire. En effet, le Théorème 3.2.2 présente une estimation d'erreur pour des petites données du problème, alors que le Théorème 3.2.7 fournit une estimation d'erreur *a posteriori* dans un voisinage $\mathcal{O}$ de la solution théorique

u sans aucune condition sur les données. Désormais, nous supposons que **f** appartient à $L^2(\Omega)^d$ et nous définissons $\mathbf{f}_h$ comme étant l'approximation de **f**.

Nous définissons en premier lieu l'indicateur d'erreur de discrétisation suivant

$$\begin{aligned}\eta_K &= h_K \,\|\, \mathbf{f}_h + \nu\Delta\mathbf{u}_h - (\mathbf{u}_h.\nabla)\mathbf{u}_h - \nabla p_h \,\|_{L^2(K)} \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}} h_e^{1/2} \,\|\, [\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial n} - p_h n] \,\|_{L^2(e)} + \|\, \text{div } \mathbf{u}_h \,\|_{L^2(K)} \,.\end{aligned}$$

3.2.1 Estimation d'erreur pour des petites données

Dans cette partie notre but est de calculer une estimation d'erreur *a posteriori* du problème non linéaire. Nous introduisons un théorème qui fournit une estimation d'erreur pour des petites données. Dans ce but, nous posons la forme $A(.,.)$ définie comme suit

Pour $U = (\mathbf{u}, p)$, $V = (\mathbf{v}, q) \in Y = X \times M$,

$$A(U,V) = \nu \int_\Omega \nabla\mathbf{u}\nabla\mathbf{v}\, d\mathbf{x} - \int_\Omega p \,\text{div } \mathbf{v}\, d\mathbf{x} - \int_\Omega q \,\text{div } \mathbf{u}\, d\mathbf{x}.$$

Lemme 3.2.1. *La forme $A(.,.)$ vérifie la condition de Babuška-Brezzi.*

Preuve

Soit $U = (\mathbf{u}, p) \in Y$, nous avons

$$\|\, U \,\|_Y = |\mathbf{u}|_{1,\Omega} + \|\, p \,\|_{L^2(\Omega)} = \sup_{\mathbf{g}\in H^{-1}(\Omega)^d} \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{g}\rangle}{\|\, \mathbf{g} \,\|_{-1,\Omega}} + \sup_{h\in L^2_0(\Omega)} \frac{(p,h)}{\|\, h \,\|_{L^2(\Omega)}}.$$

Or, pour tout couple $(\mathbf{g}, h)$ de $H^{-1}(\Omega)^d \times L^2_0(\Omega)$, il existe un unique couple $V = (\mathbf{v}, q) \in Y$ solution du problème de Stokes

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\nu\Delta\mathbf{v} + \nabla q &=& \mathbf{g} & \text{dans } \Omega \\ -\text{div } \mathbf{v} &=& h & \text{dans } \Omega. \end{array}\right. \tag{3.12}$$

Notons que la solution $V = (\mathbf{v}, q)$ du problème de Stokes (3.12) dépend continûment du couple $(\mathbf{g}, h)$ [12]. En effet, nous avons

$$\begin{aligned}\|\, V \,\|_Y &= |\mathbf{v}|_{1,\Omega} + \|\, q \,\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C\big(\, \|\, \mathbf{g} \,\|_{-1,\Omega} + \|\, h \,\|_{L^2(\Omega)} \,\big).\end{aligned} \tag{3.13}$$

Comme

$$\| U \|_Y \leq 2 \sup_{(\mathbf{g},h)\in H^{-1}(\Omega)^d \times L^2_0(\Omega)} \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{g} \rangle + (p, h)}{\| \mathbf{g} \|_{-1,\Omega} + \| h \|_{L^2(\Omega)}}, \tag{3.14}$$

par conséquent, en remplaçant (3.12) et (3.13) dans l'inégalité (3.14), nous trouvons

$$\| U \|_Y \leq 2C \sup_{V\in Y} \frac{A(U,V)}{\| V \|_Y}. \tag{3.15}$$

D'où la forme $A(.,.)$ vérifie la relation

$$\frac{1}{2C} \| U \|_Y \leq \sup_{V\in Y} \frac{A(U,V)}{\| V \|_Y}. \tag{3.16}$$

Nous introduisons alors le théorème suivant qui fournit l'estimation d'erreur *a posteriori* pour des petites données :

Théorème 3.2.2. *Soient* $(\boldsymbol{u}, p) \in X \times M$ *une solution du problème non linéaire* (3.2) *et* $(\boldsymbol{u}_h, p_h) \in X_h \times M_h$ *une solution du problème discret* (3.10). *Si* $\nu > \dfrac{2S_4^2}{\beta} \| \boldsymbol{f} \|_{0,\Omega}$, *avec* $\beta > 0$, *nous obtenons alors l'estimation*

$$|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}|_{1,\Omega} + \| p_h - p \|_{L^2(\Omega)} \leq \left(\beta - \frac{2S_4^2}{\nu} \| \boldsymbol{f} \|_{0,\Omega} \right)^{-1} \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\eta_K^2 + h_K^2 \| \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_h \|^2_{L^2(K)}) \right)^{1/2}.$$

Preuve

Soient $(\mathbf{u}, p)$ une solution du problème non linéaire (3.2) et $(\mathbf{u}_h, p_h)$ une solution du problème discret (3.10).

Les problèmes (3.2) et (3.10) nous donnent l'égalité suivante :

$$\nu \int_\Omega \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_\Omega (p_h - p) \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} =$$

$$(\mathbf{f}, \mathbf{v}) - \int_\Omega (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u}\mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \nu \int_\Omega \nabla \mathbf{u}_h \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_\Omega p_h \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x}. \tag{3.17}$$

Nous ajoutons et nous retranchons les termes $\int_\Omega \mathbf{f}_h(\mathbf{v}-\mathbf{v}_h)\ d\mathbf{x}$, $\int_\Omega (\mathbf{u}_h.\nabla)\mathbf{u}\mathbf{v}\ d\mathbf{x}$ et $\int_\Omega (\mathbf{u}_h.\nabla)\mathbf{u}_h\mathbf{v}\ d\mathbf{x}$ dans l'équation (3.17), et nous appliquons la formule de Green dans chaque triangle K. Nous obtenons alors en utilisant le problème (3.10),

$$\nu\int_\Omega \nabla(\mathbf{u}-\mathbf{u}_h)\nabla\mathbf{v}\ d\mathbf{x}+\int_\Omega (p_h-p)\ \mathrm{div}\ \mathbf{v}\ d\mathbf{x}=$$

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K(\mathbf{f}-\mathbf{f}_h)(\mathbf{v}-\mathbf{v}_h)\ d\mathbf{x}+\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\Big\{\int_K(\mathbf{f}_h+\nu\Delta\mathbf{u}_h-(\mathbf{u}_h.\nabla)\mathbf{u}_h-\nabla p_h)(\mathbf{v}-\mathbf{v}_h)\ d\mathbf{x}$$

(3.18)
$$-\frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}}\int_e[\frac{\partial\mathbf{u}_h}{\partial n}-p_hn].(\mathbf{v}-\mathbf{v}_h)\ d\tau\Big\}+\int_\Omega(\mathbf{u}_h.\nabla)(\mathbf{u}_h-\mathbf{u})\mathbf{v}\ d\mathbf{x}+\int_\Omega\big((\mathbf{u}_h-\mathbf{u}).\nabla\big)\mathbf{u}\mathbf{v}\ d\mathbf{x}.$$

Par suite, pour $U_h=(\mathbf{u}_h,p_h)$, nous avons pour tout $V\in Y$

$$A(U-U_h,V)=\nu\int_\Omega\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{u}_h)\nabla\mathbf{v}\ d\mathbf{x}+\int_\Omega(p_h-p)\ \mathrm{div}\ \mathbf{v}\ d\mathbf{x}-\int_\Omega q\ \mathrm{div}\ (\mathbf{u}-\mathbf{u}_h)\ d\mathbf{x} \tag{3.19}$$

De plus, pour tout $q\in M$, nous avons

$$\int_\Omega q\ \mathrm{div}\ (\mathbf{u}-\mathbf{u}_h)\ d\mathbf{x}=-\int_\Omega q\ \mathrm{div}\ \mathbf{u}_h\ d\mathbf{x}. \tag{3.20}$$

Nous obtenons alors en remplaçant (3.18) et (3.20) dans l'égalité (3.19) la relation suivante

$$A(U-U_h,V)=$$

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K(\mathbf{f}-\mathbf{f}_h)(\mathbf{v}-\mathbf{v}_h)\ d\mathbf{x}+\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\Big\{\int_K(\mathbf{f}_h+\nu\Delta\mathbf{u}_h-(\mathbf{u}_h.\nabla)\mathbf{u}_h-\nabla p_h)(\mathbf{v}-\mathbf{v}_h)\ d\mathbf{x}$$

$$+\int_K q\ \mathrm{div}\ \mathbf{u}_h\ d\mathbf{x}-\frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}}\int_e[\frac{\partial\mathbf{u}_h}{\partial n}-p_hn].(\mathbf{v}-\mathbf{v}_h)\ d\tau\Big\} \tag{3.21}$$

$$+\int_\Omega(\mathbf{u}_h.\nabla)(\mathbf{u}_h-\mathbf{u})\mathbf{v}\ d\mathbf{x}+\int_\Omega\big((\mathbf{u}_h-\mathbf{u})\nabla\big)\mathbf{u}\mathbf{v}\ d\mathbf{x}.$$

Nous commençons par majorer les deux derniers termes de l'équation (3.21). En effet, nous avons les relations suivantes

$$\int_\Omega (\mathbf{u}_h.\nabla)(\mathbf{u}_h-\mathbf{u})\mathbf{v}\,d\mathbf{x} \le \frac{S_4^2}{\nu}\,\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}\,|\mathbf{u}_h-\mathbf{u}|_{1,\Omega}|\mathbf{v}|_{1,\Omega}, \tag{3.22}$$

$$\int_\Omega \big((\mathbf{u}_h-\mathbf{u}).\nabla\big)\mathbf{u}\mathbf{v}\,d\mathbf{x} \le \frac{S_4^2}{\nu}\,\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}\,|\mathbf{u}_h-\mathbf{u}|_{1,\Omega}|\mathbf{v}|_{1,\Omega}. \tag{3.23}$$

En utilisant (3.21), (3.22) et (3.23) , il en résulte que

$$\begin{aligned} &A(U-U_h,V)\\ &\le \beta^{-1}\Bigg(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\Big(\,\|\mathbf{f}-\mathbf{f}_h\|_{L^2(K)}+\|\mathbf{f}_h+\nu\Delta\mathbf{u}_h-(\mathbf{u}_h.\nabla)\mathbf{u}_h-\nabla p_h\|_{L^2(K)}\Big)\,\|\mathbf{v}-\mathbf{v}_h\|_{L^2(K)}\\ &\quad+\frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}}\|\,[\frac{\partial\mathbf{u}_h}{\partial n}-p_h n]\,\|_{L^2(e)}\|\,\mathbf{v}-\mathbf{v}_h\,\|_{L^2(e)}+\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|\,\mathrm{div}\;\mathbf{u}_h\,\|_{L^2(K)}\|\,q\,\|_{L^2(K)}\\ &\quad+2\frac{S_4^2}{\nu}\,\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}\,|\mathbf{u}_h-\mathbf{u}|_{1,\Omega}|\mathbf{v}|_{1,\Omega}\Bigg). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Nous appliquons alors le Lemme 3.2.1 pour $U-U_h$. Nous obtenons

$$\beta\,\|\,U-U_h\,\|_Y \le \sup_{V\in Y}\frac{A(U-U_h,V)}{\|\,V\,\|_Y}, \tag{3.25}$$

avec $\beta = 1/2C$.

En utilisant (3.25) et en prenant $\mathbf{v}_h$ égal à l'opérateur de Clément R_h appliqué à $\mathbf{v}$ dans l'équation (3.24), nous trouvons le résultat suivant à l'aide des inégaltés (1.31) et (1.32)

$$\Big(1-\frac{2S_4^2}{\nu\beta}\,\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}\Big)|\mathbf{u}_h-\mathbf{u}|_{1,\Omega}+\|\,p_h-p\,\|_{L^2(\Omega)}\le\beta^{-1}\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\big(\eta_K^2+h_K^2\,\|\,\mathbf{f}-\mathbf{f}_h\,\|^2_{L^2(K)}\,\big)\right)^{1/2},$$

où

$$\begin{aligned}\eta_K &= h_K \,\|\, \mathbf{f}_h + \nu\Delta\mathbf{u}_h - (\mathbf{u}_h.\nabla)\mathbf{u}_h - \nabla p_h \,\|_{L^2(K)} \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}} h_e^{1/2} \,\|\, [\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial n} - p_h n] \,\|_{L^2(e)} + \|\, \mathrm{div}\ \mathbf{u}_h \,\|_{L^2(K)}\ .\end{aligned}$$

Finalement, comme

$$1 - \frac{2S_4^2}{\nu\beta} \,\|\, \mathbf{f}\|_{0,\Omega} < 1,$$

nous trouvons l'estimation suivante

$$|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}|_{1,\Omega} + \|\, p_h - p \,\|_{L^2(\Omega)} \leq \left(\beta - \frac{2S_4^2}{\nu} \,\|\, \mathbf{f}\|_{0,\Omega}\right)^{-1} \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\eta_K^2 + h_K^2 \,\|\, \mathbf{f} - \mathbf{f}_h \,\|_{L^2(K)}^2)\right)^{1/2}.$$

3.2.2 Une approche moins restrictive pour calculer l'estimation d'erreur *a posteriori*

Après avoir établi l'estimation d'erreur dans le Théorème 3.2.2, nous présentons dans cette section une nouvelle méthode pour calculer l'estimation d'erreur *a posteriori*. En effet, cette nouvelle approche est moins restrictive, elle n'impose pas des conditions sur les données. Dans ce but, nous posons, pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in X$, la forme

$$c(\mathbf{w}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega (\mathbf{w}.\nabla)\mathbf{u}\mathbf{v}\ d\mathbf{x}.$$

En utilisant les notations introduites antérieurement, le problème de Navier-Stokes s'écrit alors sous la forme

$$\left\{\begin{array}{lll} \textit{Trouver } \mathbf{u} \in X,\ p \in M \textit{ tels que} & & \\ \forall \mathbf{v} \in X, \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) & = & \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle, \\ \forall q \in M, \qquad b(\mathbf{u}, q) & = & 0. \end{array}\right. \tag{3.26}$$

Afin de calculer l'estimation d'erreur *a posteriori*, nous définissons l'application $\mathcal{S}$, comme suit

$$\begin{aligned} \mathcal{S}: \quad H^{-1}(\Omega)^d &\to X \\ \mathbf{f} &\mapsto \mathcal{S}\mathbf{f} = \mathbf{w}, \end{aligned}$$

où $\mathbf{w}$ est la partie de la solution $(\mathbf{w}, p)$ du problème de Stokes (3.5).

Remarque 3.2.3. *Nous avons, pour tout $\boldsymbol{f}$ dans $H^{-1}(\Omega)^d$, la relation suivante*

$$|\, \mathcal{S}\boldsymbol{f}\,|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{\nu}\, \|\boldsymbol{f}\|_{-1,\Omega}\,.$$

Nous définissons de même l'application G par

$$\begin{aligned} G: \quad X &\to H^{-1}(\Omega)^d \\ \mathbf{w} &\mapsto G(\mathbf{w}) = (\mathbf{w}.\nabla)\mathbf{w} - \mathbf{f}. \end{aligned}$$

Lemme 3.2.4. *Soit $(\boldsymbol{u}, p)$ la solution du problème* (3.2)*. L'application $Id + \mathcal{S}DG(\boldsymbol{u})$ est lipschitzienne. En effet, il existe un réel $L > 0$ tel que*

$$\forall \boldsymbol{w} \in X, \quad \|\,\mathcal{S}\big(DG(\boldsymbol{u}) - DG(\boldsymbol{w})\big)\,\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega))} \leq L|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}|_{1,\Omega}.$$

Preuve

Pour tous $\mathbf{w},\ \mathbf{z} \in X$ nous avons

$$\|\,\mathcal{S}\big(DG(\mathbf{u}).\mathbf{z} - DG(\mathbf{w}).\mathbf{z}\big)\,\|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{\nu}\, \|\,DG(\mathbf{u}).\mathbf{z} - DG(\mathbf{w}).\mathbf{z}\,\|_{-1,\Omega}\,. \tag{3.27}$$

Or,

$$\|\,DG(\mathbf{u}).\mathbf{z} - DG(\mathbf{w}).\mathbf{z}\,\|_{-1,\Omega} = \sup_{\mathbf{v}\in X} \frac{|\langle DG(\mathbf{u}).\mathbf{z} - DG(\mathbf{w}).\mathbf{z}, \mathbf{v}\rangle|}{|\mathbf{v}|_{1,\Omega}},$$

et

$$DG(\mathbf{u}).\mathbf{z} - DG(\mathbf{w}).\mathbf{z} = \mathbf{z}\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{w}) + (\mathbf{u} - \mathbf{w})\nabla\mathbf{z}. \tag{3.28}$$

Nous obtenons alors

$$\|\,\big(DG(\mathbf{u}) - DG(\mathbf{w})\big).\mathbf{z}\,\|_{-1,\Omega} \leq 2S_4^2|\mathbf{u} - \mathbf{w}|_{1,\Omega}|\mathbf{z}|_{1,\Omega},$$

d'où le résultat.

Nous introduisons maintenant le problème suivant équivalent au problème (3.2)

$$F(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathcal{S}G(\mathbf{u}) = 0.$$

Hypothèse 3.2.5. *Nous considérons une solution* $(\boldsymbol{u}, p)$ *du problème* (3.2) *tel que l'opérateur* $Id + \mathcal{S}DG(\boldsymbol{u})$ *soit un isomorphisme dans* X.

Remarque 3.2.6. *L'hypothèse* 3.2.5 *nous assure l'unicité locale de la solution* $\boldsymbol{u}$.

Dans le but d'établir une borne supérieure de l'erreur, nous considérons la solution $(\mathbf{u}, p)$ du problème (3.2) et la solution $(\mathbf{u}_h, p_h)$ du problème (3.10). L'équation (3.18) nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} &a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) - c(\mathbf{u}_h; \mathbf{u}_h, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}, p_h) \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)\, d\mathbf{x} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Big\{ \int_K (\mathbf{f}_h + \nu \Delta \mathbf{u}_h - (\mathbf{u}_h.\nabla)\mathbf{u}_h - \nabla p_h)(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)\, d\mathbf{x} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_{K,\Omega}} \int_e [\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial n} - p_h n].(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)\, d\tau \Big\}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Par ailleurs, nous rappelons que

$$b(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, q) = \int_\Omega q \ \mathrm{div}\ \mathbf{u}_h \, d\mathbf{x}. \tag{3.30}$$

Théorème 3.2.7. *Soient* $(\boldsymbol{u}, p) \in X \times M$ *une solution du problème* (3.2) *et* $(\boldsymbol{u}_h, p_h) \in X_h \times M_h$ *une solution du problème discret* (3.10). *Si l'hypothèse* 3.2.5 *est vérifiée, alors il existe un voisinage* $\mathcal{O}$ *de* $\boldsymbol{u}$ *tel que, pour tout* $\boldsymbol{u}_h \in \mathcal{O}$, *nous avons*

$$|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}|_{1,\Omega} + \| p_h - p \|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_K^2 + h_K^2 \, \| \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_h \|^2_{L^2(K)}) \right)^{1/2},$$

où

$$\eta_K = h_K \,\|\, \mathbf{f}_h + \nu\Delta\mathbf{u}_h - (\mathbf{u}_h.\nabla)\mathbf{u}_h - \nabla p_h \,\|_{L^2(K)}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}} h_e^{1/2} \,\|\, [\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial n} - p_h n] \,\|_{L^2(e)} + \|\,\mathrm{div}\ \mathbf{u}_h\,\|_{L^2(K)}\ .$$

Preuve

(i) En utilisant le Lemme 3.2.4 et l'Hypothèse 3.2.5, nous avons d'après [16], voir aussi [22] l'existence d'un voisinage $\mathcal{O}$ de $\mathbf{u}$ tel que, pour tout $\mathbf{u}_h \in \mathcal{O}$ l'on ait

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} \leq C \,\|\, \mathbf{u}_h + \mathcal{S}G(\mathbf{u}_h) \,\|_{-1,\Omega}\ . \tag{3.31}$$

Or, Comme $F(\mathbf{u}) = 0$, nous écrivons (3.31) comme suit

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} \leq C \,\|\, F(\mathbf{u}_h) - F(\mathbf{u}) \,\|_{-1,\Omega}\ . \tag{3.32}$$

En utilisant les équations (3.29) et (3.30), nous avons pour tout $\mathbf{v}_h \in X_h$,

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} \leq C\Bigg(\sup_{\substack{\mathbf{v}\in X\\ \mathbf{v}\neq 0}} \frac{\langle \mathbf{f} - \mathbf{f}_h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h\rangle + \langle \mathcal{R}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h\rangle}{|\mathbf{v}|_{1,\Omega}} + \sup_{\substack{q\in M\\ q\neq 0}} \frac{\displaystyle\int_\Omega q\ \mathrm{div}\ \mathbf{u}_h\ d\mathbf{x}}{\|\, q\,\|_{L^2(\Omega)}} \Bigg) \tag{3.33}$$

où

$$\langle \mathcal{R}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h\rangle = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \Bigg\{ \int_K (\mathbf{f}_h + \nu\Delta\mathbf{u}_h - (\mathbf{u}_h.\nabla)\mathbf{u}_h - \nabla p_h)(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)\ d\mathbf{x}$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}} \int_e [\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial n} - p_h n].(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)\ d\tau \Bigg\}.$$

En choisissant $\mathbf{v}_h$ égal à $R_h\mathbf{v}$, où R_h est l'opérateur de Clément à valeurs dans V_h, nous trouvons le résultat suivant en utilisant les inégaltés (1.31) et (1.32)

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} \leq C \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\eta_K^2 + h_K^2 \,\|\, \mathbf{f} - \mathbf{f}_h \,\|^2_{L^2(K)}) \right)^{1/2}\ . \tag{3.34}$$

(ii) Nous calculons maintenant une borne supérieure de $\| p-p_h \|_{L^2(\Omega)}$. En effet, l'équation (3.18) nous donne :

$$b(\mathbf{v}, p-p_h) = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K (\mathbf{f}-\mathbf{f}_h)(\mathbf{v}-\mathbf{v}_h)\, d\mathbf{x} + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \Big\{ \int_K (\mathbf{f}_h+\nu\Delta\mathbf{u}_h-(\mathbf{u}_h.\nabla)\mathbf{u}_h-\nabla p_h)(\mathbf{v}-\mathbf{v}_h)\, d\mathbf{x}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}} h_e^{1/2} \int_e [\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial n} - p_h n].(\mathbf{v}-\mathbf{v}_h)\, d\tau \Big\} + \nu \int_\Omega \nabla(\mathbf{u}_h-\mathbf{u})\nabla\mathbf{v}\, d\mathbf{x} \tag{3.35}$$

$$+ \int_\Omega \big((\mathbf{u}_h-\mathbf{u}).\nabla\big)\mathbf{u}\mathbf{v}\, d\mathbf{x} + \int_\Omega (\mathbf{u}_h.\nabla)(\mathbf{u}_h-\mathbf{u})\mathbf{v}\, d\mathbf{x}.$$

Or, nous avons

$$\nu \int_\Omega \nabla(\mathbf{u}_h-\mathbf{u})\nabla\mathbf{v}\, d\mathbf{x} + \int_\Omega \big((\mathbf{u}_h-\mathbf{u}).\nabla\big)\mathbf{u}\mathbf{v}\, d\mathbf{x} + \int_\Omega (\mathbf{u}_h.\nabla)(\mathbf{u}_h-\mathbf{u})\mathbf{v}\, d\mathbf{x}$$

$$\leq \big(\nu + 2\frac{S_4^2}{\nu}\, \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}\big) |\mathbf{u}_h-\mathbf{u}|_{1,\Omega}|\mathbf{v}|_{1,\Omega}. \tag{3.36}$$

En utilisant (3.36) et l'inégalité de Cauchy-Swcharz, nous trouvons

$$b(\mathbf{v}, p-p_h) \leq \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \Big\{ \big(\|\mathbf{f}-\mathbf{f}_h\|_{L^2(K)} + \|\mathbf{f}_h+\nu\Delta\mathbf{u}_h-(\mathbf{u}_h.\nabla)\mathbf{u}_h-\nabla p_h\|_{L^2(K)} \big)\, \|\mathbf{v}-\mathbf{v}_h\|_{L^2(K)}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}} \|[\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial n} - p_h n]\|_{L^2(e)} \|\mathbf{v}-\mathbf{v}_h\|_{L^2(K)} \Big\} + \big(\nu + 2\frac{S_4^2}{\nu}\, \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}\big) |\mathbf{u}_h-\mathbf{u}|_{1,\Omega}|\mathbf{v}|_{1,\Omega}. \tag{3.37}$$

Nous prenons $\mathbf{v}_h = R_h\mathbf{v}$ et nous utilisons les inégalités (1.31) et (1.32). Il en résulte alors

$$b(\mathbf{v}, p-p_h) \leq \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \Big\{ h_K \big(\|\mathbf{f}-\mathbf{f}_h\|_{L^2(K)} + \|\mathbf{f}_h+\nu\Delta\mathbf{u}_h-(\mathbf{u}_h.\nabla)\mathbf{u}_h-\nabla p_h\|_{L^2(K)} \big)\, \|\mathbf{v}\|_{1,\Delta_K}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}} h_e^{1/2}\, \|[\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial n} - p_h n]\|_{L^2(e)} \|\mathbf{v}\|_{1,\Delta_e} \Big\} + \big(\nu + 2\frac{S_4^2}{\nu}\, \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}\big) |\mathbf{u}_h-\mathbf{u}|_{1,\Omega}|\mathbf{v}|_{1,\Omega}. \tag{3.38}$$

Par suite, en utilisant l'inégalité "inf-sup" (3.8), nous trouvons

$$\beta \| p - p_h \|_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Big\{ h_K \big(\| \mathbf{f} - \mathbf{f}_h \|_{L^2(K)} + \| \mathbf{f}_h + \nu \Delta \mathbf{u}_h - (\mathbf{u}_h . \nabla) \mathbf{u}_h - \nabla p_h \|_{L^2(K)} \big)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_{K,\Omega}} h_e^{1/2} \| [\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial n} - p_h n] \|_{L^2(e)} \Big\} + \big(\nu + 2 \frac{S_4^2}{\nu} \| \mathbf{f} \|_{0,\Omega} \big) |\mathbf{u}_h - \mathbf{u}|_{1,\Omega}. \tag{3.39}$$

Finalement, nous obtenons d'après (3.34) et (3.39) le résultat suivant

$$|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}|_{1,\Omega} + \| p_h - p \|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_K^2 + h_K^2 \| \mathbf{f} - \mathbf{f}_h \|_{L^2(K)}^2) \right)^{1/2}.$$

3.2.3 Efficacité

Dans cette partie, notre but est de montrer que l'estimation d'erreur trouvée dans la partie précédente est optimale.

Théorème 3.2.8. *Soit* $(\boldsymbol{u}, p) \in X \times M$ *une solution du problème non linéaire* (3.2) *et* $(\boldsymbol{u}_h, p_h) \in X_h \times M_h$ *une solution du problème discret* (3.10). *Nous avons, pour chaque indicateur* η_K*, l'estimation suivante*

$$\eta_K \leq C \left(\| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h \|_{1,\omega_K} + \| p - p_h \|_{L^2(\omega_K)} + \sum_{\kappa \subset \omega_K} h_\kappa \| \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_h \|_{L^2(\kappa)} \right),$$

où ω_K *est l'union des triangles partageant au moins un côté* ($d = 2$) *ou une face* ($d = 3$) *avec* K.

Preuve

Nous rappelons tout d'abord l'indicateur d'erreur de discrétisation

$$\eta_K = h_K \| \mathbf{f}_h + \nu \Delta \mathbf{u}_h - (\mathbf{u}_h . \nabla) \mathbf{u}_h - \nabla p_h \|_{L^2(K)} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_{K,\Omega}} h_e^{1/2} \| [\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial n} - p_h n] \|_{L^2(e)} + \| \operatorname{div} \mathbf{u}_h \|_{L^2(K)}.$$

Nous commençons par majorer le premier terme $h_K \| \mathbf{f}_h + \nu \Delta \mathbf{u}_h - (\mathbf{u}_h . \nabla) \mathbf{u}_h - \nabla p_h \|_{L^2(K)}$.

Nous considérons l'équation (3.29). En effet, en prenant $\mathbf{v}_h = 0$, il en résulte que

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K(\mathbf{f}_h+\nu\Delta\mathbf{u}_h-(\mathbf{u}_h.\nabla)\mathbf{u}_h-\nabla p_h)\mathbf{v}\;d\mathbf{x}$$

$$=\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K(\mathbf{f}_h-\mathbf{f})\mathbf{v}\;d\mathbf{x}+\nu\int_\Omega\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{u}_h)\nabla\mathbf{v}\;d\mathbf{x}+\int_\Omega(p_h-p)\;\mathrm{div}\;\mathbf{v}\;d\mathbf{x}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}}h_e^{1/2}\int_e[\frac{\partial\mathbf{u}_h}{\partial n}-p_hn].\mathbf{v}\;d\tau+\int_\Omega\big((\mathbf{u}-\mathbf{u}_h).\nabla\big)\mathbf{u}\mathbf{v}\;d\mathbf{x} \tag{3.40}$$

$$+\int_\Omega(\mathbf{u}_h.\nabla)(\mathbf{u}-\mathbf{u}_h)\mathbf{v}\;d\mathbf{x}.$$

Dans le but d'éliminer le terme du saut sur chaque arête ou face e, nous remplaçons $\mathbf{v}$ par $\mathbf{v}_K$ dans l'équation (3.40) avec

$$\mathbf{v}_K=\begin{cases}(\mathbf{f}_h+\nu\Delta\mathbf{u}_h-(\mathbf{u}_h.\nabla)\mathbf{u}_h-\nabla p_h)\psi_K & \text{sur } K\\ 0 & \text{sur } \Omega\setminus K\end{cases}$$

où ψ_K désigne la fonction bulle sur le triangle K.

Nous obtenons alors,

$$\int_K(\mathbf{f}_h+\nu\Delta\mathbf{u}_h-(\mathbf{u}_h.\nabla)\mathbf{u}_h-\nabla p_h)^2\psi_K\;d\mathbf{x}$$

$$=\nu\int_K\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{u}_h)\nabla\mathbf{v}_K\;d\mathbf{x}+\int_K(p_h-p)\;\mathrm{div}\;\mathbf{v}_K\;d\mathbf{x}+\int_K(\mathbf{f}_h-\mathbf{f})\mathbf{v}_K\;d\mathbf{x} \tag{3.41}$$

$$+\int_K\big((\mathbf{u}-\mathbf{u}_h).\nabla\big)\mathbf{u}\mathbf{v}_K\;d\mathbf{x}+\int_K(\mathbf{u}_h.\nabla)(\mathbf{u}-\mathbf{u}_h)\mathbf{v}_K\;d\mathbf{x}.$$

Nous commençons par majorer les deux derniers termes de l'equation (3.41). En effet, nous avons

$$\int_K\big((\mathbf{u}-\mathbf{u}_h).\nabla\big)\mathbf{u}\mathbf{v}_K\;d\mathbf{x}+\int_K(\mathbf{u}_h.\nabla)(\mathbf{u}-\mathbf{u}_h)\mathbf{v}_K\;d\mathbf{x}\le C\;\|\,\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\,\|_{1,K}\;|\mathbf{v}_K|_{1,K}. \tag{3.42}$$

A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et des inégalités inverses (1.46) et (1.47) ([21]. R.Verfürth.) appliquées à (3.41), nous obtenons

$$h_K \,\|\, \mathbf{f}_h + \nu\Delta\mathbf{u}_h - (\mathbf{u}_h.\nabla)\mathbf{u}_h - \nabla p_h \,\|_{L^2(K)}$$

$$\leq C\Big(\,\|\, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \,\|_{1,K} + \,\|\, p - p_h \,\|_{L^2(K)} + h_K \,\|\, \mathbf{f} - \mathbf{f}_h \,\|_{L^2(K)} \Big) \tag{3.43}$$

Par ailleurs, nous calculons une estimation du terme $\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}} h_e^{1/2}\int_e [\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial n} - p_h n].\mathbf{v} d\tau$.

De l'équation (3.29), en prenant $\mathbf{v}_h = 0$, nous écrivons

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}}\int_e [\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial n} - p_h n].\mathbf{v}\; d\tau \\
&\qquad = \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K (\mathbf{f}-\mathbf{f}_h)\mathbf{v}\; d\mathbf{x} + \nu\int_\Omega \nabla(\mathbf{u}_h - \mathbf{u})\nabla\mathbf{v}\; d\mathbf{x} + \int_\Omega (p_h - p)\;\mathrm{div}\;\mathbf{v}\; d\mathbf{x} \\
&\qquad + \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K (\mathbf{f}_h + \nu\Delta\mathbf{u}_h - (\mathbf{u}_h.\nabla)\mathbf{u}_h - \nabla p_h)\mathbf{v}\; d\mathbf{x} + \int_\Omega \big((\mathbf{u}_h - \mathbf{u}).\nabla\big)\mathbf{u}\mathbf{v}\; d\mathbf{x} \\
&\qquad + \int_\Omega (\mathbf{u}_h.\nabla)(\mathbf{u}_h - \mathbf{u})\mathbf{v}\; d\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Pour une arête e, soient K et K' les éléments de $\mathcal{T}_h$ qui contiennent e. Nous remplaçons $\mathbf{v}$ par $\mathbf{v}_e$ dans l'équation (3.44) avec

$$\mathbf{v}_e = \begin{cases} L_{e,\kappa}\left([\dfrac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial n} - p_h n].\psi_e\right) & \kappa \in \{K, K'\} \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus (K \cup K') \end{cases}$$

où ψ_e désigne la fonction bulle sur l'arrête e et $L_{e,\kappa}$ étant l'opérateur de relèvement défini comme précédemment.

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\|\,[\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial n} - p_h n]\psi_e^{1/2}\,\|^2_{L^2(e)} \\
&\qquad \leq \|\,\mathbf{f}_h + \nu\Delta\mathbf{u}_h - (\mathbf{u}_h.\nabla)\mathbf{u}_h - \nabla p_h\,\|_{L^2(K\cup K')} \|\,\mathbf{v}_e\,\|_{L^2(K\cup K')}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

$$+ \| \mathbf{f} - \mathbf{f}_h \|_{L^2(K\cup K')} \| \mathbf{v}_e \|_{L^2(K\cup K')} + \| p - p_h \|_{L^2(K\cup K')} |\mathbf{v}_e|_{1,K\cup K'}$$

$$+C \| \mathbf{u}_h - \mathbf{u} \|_{1,K\cup K'} |\mathbf{v}_e|_{1,K\cup K'}.$$

Nous trouvons alors la relation suivantes en appliquant les inégalités inverses (1.51) et (1.52),

$$h_e^{1/2} \| [\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial n} - p_h n] \|^2_{L^2(e)}$$

$$\leq h_e \| \mathbf{f}_h + \nu \Delta \mathbf{u}_h - (\mathbf{u}_h.\nabla)\mathbf{u}_h - \nabla p_h \|_{L^2(K\cup K')} \| \mathbf{v}_e \|_{L^2(e)} \tag{3.46}$$

$$+h_e \| \mathbf{f} - \mathbf{f}_h \|_{L^2(K\cup K')} \| \mathbf{v}_e \|_{L^2(e)} + \| p - p_h \|_{L^2(K\cup K')} \| \mathbf{v}_e \|_{L^2(e)}$$

$$+C \| \mathbf{u}_h - \mathbf{u} \|_{1,K\cup K'} \| \mathbf{v}_e \|_{L^2(e)} .$$

D'où, nous obtenons la majoration suivante

$$h_e^{1/2} \| [\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial n} - p_h n] \|_{L^2(e)}$$

$$\leq C \Big(\| \mathbf{u}_h - \mathbf{u} \|_{1,K\cup K'} + \| p - p_h \|_{L^2(K\cup K')} + h_e \| \mathbf{f} - \mathbf{f}_h \|_{L^2(K\cup K')} \tag{3.47}$$

$$+h_e \| \mathbf{f}_h + \nu \Delta \mathbf{u}_h - (\mathbf{u}_h.\nabla)\mathbf{u}_h - \nabla p_h \|_{L^2(K\cup K')} \Big).$$

De plus, pour majorer le dernier terme $\| \text{div } \mathbf{u}_h \|_{L^2(K)}$ de l'indicateur, nous prenons $q = q_K$ dans l'équation (3.30) tel que

$$q_K = \begin{cases} \text{div } \mathbf{u}_h & \text{sur } K \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus K \end{cases}$$

D'où, en utilisant les relations (3.43) et (3.45), nous trouvons la majoration suivante

$$\eta_K \leq C \left(\| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \|_{1,\omega_K} + \| p - p_h \|_{L^2(\omega_K)} + \sum_{\kappa \subset \omega_K} h_\kappa \, \| \mathbf{f} - \mathbf{f}_h \|_{L^2(\kappa)} \right).$$

Nous déduisons alors que l'estimation d'erreur *a posteriori* déjà démontrée dans le Théorème 3.2.7 est parfaitement optimale.

3.3 Algorithme itératif

Dans cette partie, nous proposons une méthode itérative afin de résoudre les équations de Navier-Stokes. Notre but est d'étudier la convergence de l'algorithme proposé vers la solution du problème discret (3.2). Pour cela, nous considérons une approximation $\mathbf{u}_h^0$ initiale et nous posons le problème suivant

(3.48)
$$\begin{cases} \textit{Trouver } \mathbf{u}_h^{i+1} \in X_h, \; p_h^{i+1} \in M_h \textit{ tels que} \\ \forall \mathbf{v}_h \in X_h, \;\; \nu \displaystyle\int_\Omega \nabla \mathbf{u}_h^{i+1} \nabla \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \int_\Omega (\mathbf{u}_h^i . \nabla) \mathbf{u}_h^{i+1} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \int_\Omega p_h^{i+1} \text{ div } \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle, \\ \forall q_h \in M_h, \; \displaystyle\int_\Omega q_h \text{ div } \mathbf{u}_h^{i+1} \, d\mathbf{x} &= 0. \end{cases}$$

Notons que le problème (3.48) est équivalent au problème suivant

(3.49)
$$\begin{cases} \textit{Trouver } \mathbf{u}_h^{i+1} \in V_h, \textit{ tel que} \\ \forall \; \mathbf{v}_h \in V_h, \quad \nu \displaystyle\int_\Omega \nabla \mathbf{u}_h^{i+1} \nabla \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \int_\Omega (\mathbf{u}_h^i . \nabla) \mathbf{u}_h^{i+1} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle. \end{cases}$$

3.3.1 Convergence

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à étudier la convergence de la solution du problème itératif vers le problème discret. Pour cela, nous énonçons le théorème suivant

Théorème 3.3.1. *Soient* $(\boldsymbol{u}_h^{i+1}, p_h^{i+1}) \in X_h \times M_h$ *la solution du problème itératif* (3.48) *et* $(\boldsymbol{u}_h, p_h) \in X_h \times M_h$ *la solution du problème discret* (3.10). *Pour* $\nu > S_4 \sqrt{\| \boldsymbol{f} \|_{-1,\Omega}}$, *nous avons les estimations suivantes*

$$|\boldsymbol{u}_h^{i+1} - \boldsymbol{u}_h|_{1,\Omega} \leq C_1 C_2^{-1} |\boldsymbol{u}_h^i - \boldsymbol{u}_h|_{1,\Omega}, \tag{3.50}$$

$$\| p_h^{i+1} - p_h \|_{L^2(\Omega)} \leq C_3 |\boldsymbol{u}_h^i - \boldsymbol{u}_h|_{1,\Omega}, \tag{3.51}$$

avec

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{S_4^2}{\nu}\,\|\boldsymbol{f}\|_{-1,\Omega}, \\ C_2 &= \nu - C_1, \\ C_3 &= \alpha^{-1}\big((1+C_1)C_1C_2^{-1}+C_1\big). \end{aligned}$$

S_4 étant la constante provenant des injections de Sobolev et α une constante strictement positive.

De plus, (3.48) *converge si $C_1C_2^{-1} < 1$, dans le sens que $\lim_{i\to+\infty} \boldsymbol{u}_h^{i+1} = \boldsymbol{u}_h$ dans X et $\lim_{i\to+\infty} p_h^{i+1} = p_h$ dans M.*

Preuve

Tout d'abord, nous rappelons que la solution du problème discret admet l'estimation suivante

$$|\mathbf{u}_h|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{\nu}\,\|\mathbf{f}\|_{-1,\Omega}\,.$$

Nous montrons de même, en remplaçant $\mathbf{v}_h$ par $\mathbf{u}_h^{i+1}$ dans (3.49) que la solution du problème itératif vérifie l'estimation suivante

$$|\mathbf{u}_h^{i+1}|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{\nu}\,\|\mathbf{f}\|_{-1,\Omega}\,.$$

Afin de montrer la convergence du problème itératif, nous retranchons l'équation (3.11) de (3.49). Nous obtenons alors

$$\nu\int_\Omega \nabla(\mathbf{u}_h^{i+1}-\mathbf{u}_h)\nabla\mathbf{v}_h\,d\mathbf{x} + \int_\Omega \big((\mathbf{u}_h^i.\nabla)\mathbf{u}_h^{i+1} - (\mathbf{u}_h.\nabla)\mathbf{u}_h\big)\mathbf{v}_h\,d\mathbf{x} = 0. \tag{3.52}$$

En intercalant $\pm\int_\Omega (\mathbf{u}_h^i.\nabla)\mathbf{u}_h\mathbf{v}_h\,d\mathbf{x}$, nous trouvons l'égalité suivante

$$\nu\int_\Omega \nabla(\mathbf{u}_h^{i+1}-\mathbf{u}_h)\nabla\mathbf{v}_h\,d\mathbf{x} = \int_\Omega \big((\mathbf{u}_h-\mathbf{u}_h^i).\nabla\big)\mathbf{u}_h\mathbf{v}_h\,d\mathbf{x} + \int_\Omega (\mathbf{u}_h^i.\nabla)(\mathbf{u}_h-\mathbf{u}_h^{i+1})\mathbf{v}_h\,d\mathbf{x}. \tag{3.53}$$

Nous remplaçons $\mathbf{v}_h$ par $\mathbf{u}_h^{i+1}-\mathbf{u}_h$ dans l'équation précédente et nous appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Nous obtenons alors la relation suivante

$$\nu|\mathbf{u}_h^{i+1}-\mathbf{u}_h|_{1,\Omega} \leq \frac{S_4^2}{\nu}\,\|\mathbf{f}\|_{-1,\Omega}\,|\mathbf{u}_h^i-\mathbf{u}_h|_{1,\Omega} + \frac{S_4^2}{\nu}\,\|\mathbf{f}\|_{-1,\Omega}\,|\mathbf{u}_h^{i+1}-\mathbf{u}_h|_{1,\Omega}.$$

Par suite, nous avons

$$|\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} \leq C_1 C_2^{-1} |\mathbf{u}_h^i - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} \tag{3.54}$$

avec

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{S_4^2}{\nu} \, \|\mathbf{f}\|_{-1,\Omega}, \\ C_2 &= \nu - C_1. \end{aligned}$$

Nous passons maintenant à l'estimation (3.51). En effet, nous retranchons l'équation (3.10) de (3.48). Nous obtenons alors

$$\int_\Omega \big(p_h^{i+1} - p_h\big) \text{div } \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} = \int_\Omega \nabla(\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h) \nabla \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \big((\mathbf{u}_h^i.\nabla)\mathbf{u}_h^{i+1} - (\mathbf{u}_h.\nabla)\mathbf{u}_h\big)\mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}. \tag{3.55}$$

En intercalant $\pm \int_\Omega (\mathbf{u}_h^i.\nabla)\mathbf{u}_h \mathbf{v}_h d\,\mathbf{x}$, nous trouvons l'équation suivante

$$\begin{aligned} \int_\Omega \big(p_h^{i+1} - p_h\big) \text{div } \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} = \int_\Omega \nabla(\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h) \nabla \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \big((\mathbf{u}_h^i - \mathbf{u}_h).\nabla\big)\mathbf{u}_h \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \\ + \int_\Omega (\mathbf{u}_h^i.\nabla)(\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h)\mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Or, d'après la condition "inf-sup" (3.9), nous avons

$$\alpha \, \| p_h^{i+1} - p_h \|_{L^2(\Omega)} \, |\mathbf{v}_h|_{1,\Omega} < \int_\Omega \big(p_h^{i+1} - p_h\big) \text{div } \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}, \tag{3.57}$$

où α est une constante strictement positive.

D'où, en utilisant (3.56) et (3.57), en remplaçant $\mathbf{v}_h$ par $\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h$ et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il en résulte

$$\alpha \, \| p_h^{i+1} - p_h \|_{L^2(\Omega)} \leq \big(1 + C_1\big) |\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} + C_1 |\mathbf{u}_h^i - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega}. \tag{3.58}$$

Or, d'après l'inégalité (3.50) nous trouvons

$$\alpha \, \| p_h^{i+1} - p_h \|_{L^2(\Omega)} \leq \big((1+C_1)C_1C_2^{-1} + C_1\big) |\mathbf{u}_h^i - \mathbf{u}_h|_{1,\Omega} \tag{3.59}$$

Finalement, si $C_1C_2^{-1} < 1$, l'équation (3.54) nous permet de déduire que $\lim_{i\to+\infty} \mathbf{u}_h^{i+1} = \mathbf{u}_h$ et $\lim_{i\to+\infty} p_h^{i+1} = p_h$.

3.3.2 Estimation d'erreur *a posteriori* du problème linéarisé

Dans cette partie, notre but est de calculer l'estimation d'erreur *a posteriori* du problème itératif. Nous définissons l'indicateur d'erreur de linéarisation et l'indicateur d'erreur de discrétisation :

$$\eta_{K,i}^{(L)} = |\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^i|_{1,K},$$

$$\begin{aligned}\eta_{K,i}^{(D)} = {} & h_K \, \| \mathbf{f}_h + \nu\Delta\mathbf{u}_h^{i+1} - (\mathbf{u}_h^i.\nabla)\mathbf{u}_h^{i+1} - \nabla p_h^{i+1} \|_{L^2(K)} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}} h_e^{1/2} \, \| [\frac{\partial \mathbf{u}_h^{i+1}}{\partial n} - p_h^{i+1} n] \|_{L^2(e)} + \| \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{i+1} \|_{L^2(K)} \, .\end{aligned}$$

Soient $(\mathbf{u}, p)$ une solution du problème non linéaire (3.2) et $(\mathbf{u}_h^{i+1}, p_h^{i+1})$ une solution du problème itératif (3.48). Nous avons alors l'équation suivante :

$$\begin{aligned}&\nu \int_\Omega \nabla\mathbf{u}\nabla\mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_\Omega (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u}\mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ &\qquad -\nu \int_\Omega \nabla\mathbf{u}_h^{i+1}\nabla\mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_\Omega (\mathbf{u}_h^i.\nabla)\mathbf{u}_h^{i+1}\mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_\Omega p_h^{i+1} \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}-\mathbf{v}_h\rangle - \nu \int_\Omega \nabla\mathbf{u}_h^{i+1}\nabla(\mathbf{v}-\mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x} - \int_\Omega (\mathbf{u}_h^i.\nabla)\mathbf{u}_h^{i+1}(\mathbf{v}-\mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x} + \int_\Omega p_h^{i+1} \operatorname{div} (\mathbf{v}-\mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x}.\end{aligned} \tag{3.60}$$

Nous faisons une intégration par parties, il en résulte que

$$\nu \int_\Omega \nabla\mathbf{u}\nabla\mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_\Omega (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u}\mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x}$$

$$-\nu\int_\Omega \nabla\mathbf{u}_h^{i+1}\nabla\mathbf{v}\ d\mathbf{x}-\int_\Omega(\mathbf{u}_h^i.\nabla)\mathbf{u}_h^{i+1}\mathbf{v}\ d\mathbf{x}+\int_\Omega p_h^{i+1}\ \mathrm{div}\ \mathbf{v}\ d\mathbf{x}$$

$$=\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K(\mathbf{f}-\mathbf{f}_h)(\mathbf{v}-\mathbf{v}_h)\ d\mathbf{x}+\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\Big\{\int_K(\mathbf{f}_h+\nu\Delta\mathbf{u}_h^{i+1}-(\mathbf{u}_h^i.\nabla)\mathbf{u}_h^{i+1}-\nabla p_h^{i+1})(\mathbf{v}-\mathbf{v}_h)\ d\mathbf{x}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}}\int_e[\frac{\partial\mathbf{u}_h^{i+1}}{\partial n}-p_h^{i+1}n].(\mathbf{v}-\mathbf{v}_h)\ d\tau\Big\}. \tag{3.61}$$

D'autre part, en intercalant $\pm\displaystyle\int_\Omega(\mathbf{u}_h^{i+1}.\nabla)\mathbf{u}_h^{i+1}\mathbf{v}\ d\mathbf{x}$, nous obtenons la relation

$$\nu\int_\Omega\nabla\mathbf{u}\nabla\mathbf{v}\ d\mathbf{x}+\int_\Omega(\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u}\mathbf{v}\ d\mathbf{x}-\int_\Omega p\ \mathrm{div}\ \mathbf{v}\ d\mathbf{x}$$

$$-\nu\int_\Omega \nabla\mathbf{u}_h^{i+1}\nabla\mathbf{v}\ d\mathbf{x}-\int_\Omega(\mathbf{u}_h^{i+1}.\nabla)\mathbf{u}_h^{i+1}\mathbf{v}\ d\mathbf{x}+\int_\Omega p_h^{i+1}\ \mathrm{div}\ \mathbf{v}\ d\mathbf{x}$$

$$=\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K(\mathbf{f}-\mathbf{f}_h)(\mathbf{v}-\mathbf{v}_h)\ d\mathbf{x}+\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\Big\{\int_K(\mathbf{f}_h+\nu\Delta\mathbf{u}_h^{i+1}-(\mathbf{u}_h^i.\nabla)\mathbf{u}_h^{i+1}-\nabla p_h^{i+1})(\mathbf{v}-\mathbf{v}_h)\ d\mathbf{x}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}}\int_e[\frac{\partial\mathbf{u}_h^{i+1}}{\partial n}-p_h^{i+1}n].(\mathbf{v}-\mathbf{v}_h)\ d\tau\Big\}+\int_\Omega\big((\mathbf{u}_h^i-\mathbf{u}_h^{i+1}).\nabla\big)\mathbf{u}_h^{i+1}\mathbf{v}\ d\mathbf{x}. \tag{3.62}$$

D'autre part, nous avons

$$b(\mathbf{u}-\mathbf{u}_h^{i+1},q)=\int_\Omega q\ \mathrm{div}\ \mathbf{u}_h^{i+1}\ d\mathbf{x}. \tag{3.63}$$

Théorème 3.3.2. *Soient $(\boldsymbol{u},p)\in X\times M$ une solution du problème* (3.2) *et $(\boldsymbol{u}_h^{i+1},p_h^{i+1})\in X_h\times M_h$ une solution du problème linéarisé* (3.48)*. Si l'hypothèse* 3.2.5 *est vérifiée, alors il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de $\boldsymbol{u}$ tel que, pour tout $\boldsymbol{u}_h^{i+1}\in\mathcal{O}$, nous avons*

$$|\boldsymbol{u}_h^{i+1}-\boldsymbol{u}|_{1,\Omega}+\|p_h^{i+1}-p\|_{L^2(\Omega)}\leq C\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\big((\eta_{K,i}^{(D)})^2+h_K^2\ \|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_h\|_{L^2(K)}^2\big)\right)^{1/2}+\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}(\eta_{K,i}^{(L)})^2\right)^{1/2}. \tag{3.64}$$

Preuve

(i) Comme dans la preuve du Théorème 3.2.7, nous utilisons le Lemme 3.2.4 et l'Hypothèse 3.2.5. En effet, d'après [16] il existe un voisinage $\mathcal{O}$ tel que, pour tout $\mathbf{u}_h^{i+1} \in \mathcal{O}$ nous avons

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}|_{1,\Omega} \leq C \, \| \, \mathbf{u}_h^{i+1} + \mathcal{S}G(\mathbf{u}_h^{i+1}) \, \|_{-1,\Omega} \, . \tag{3.65}$$

Or, comme $F(\mathbf{u}) = 0$, nous écrivons

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}|_{1,\Omega} \leq C \, \| \, F(\mathbf{u}_h^{i+1}) - F(\mathbf{u}) \, \|_{-1,\Omega} \, . \tag{3.66}$$

En utilisant les équations (3.62) et (3.63), nous trouvons pour tout $\mathbf{v}_h \in X_h$

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}|_{1,\Omega} \leq C \Bigg(& \sup_{\substack{\mathbf{v} \in X \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\langle \mathbf{f} - \mathbf{f}_h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \rangle + \langle \mathcal{R}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \rangle}{|\mathbf{v}|_{1,\Omega}} \\ & + \sup_{\substack{\mathbf{v} \in X \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_\Omega \big((\mathbf{u}_h^i - \mathbf{u}_h^{i+1}).\nabla \big) \mathbf{u}_h^{i+1} \mathbf{v} \, d\mathbf{x}}{|\mathbf{v}|_{1,\Omega}} + \sup_{\substack{q \in M \\ q \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_\Omega q \, \mathrm{div} \, \mathbf{u}_h^{i+1} \, d\mathbf{x}}{\| \, q \, \|_{L^2(\Omega)}} \Bigg) \end{aligned} \tag{3.67}$$

où

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \rangle = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Bigg\{ & \int_K (\mathbf{f}_h + \nu \Delta \mathbf{u}_h^{i+1} - (\mathbf{u}_h^i.\nabla) \mathbf{u}_h^{i+1} - \nabla p_h^{i+1})(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \, d\mathbf{x} \\ & - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_{K,\Omega}} \int_e [\frac{\partial \mathbf{u}_h^{i+1}}{\partial n} - p_h^{i+1} n].(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \, d\tau \Bigg\}. \end{aligned}$$

En remplaçant $\mathbf{v}_h$ par l'image de $\mathbf{v}$ par l'opérateur de Clément, nous trouvons l'estimation suivante à l'aide des inégalités (1.31) et (1.32)

$$|\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}|_{1,\Omega} \leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \big((\eta_{K,i}^{(D)})^2 + h_K^2 \, \| \, \mathbf{f} - \mathbf{f}_h \, \|_{L^2(K)}^2 \big) \right)^{1/2} + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_{K,i}^{(L)})^2 \right)^{1/2} . \tag{3.68}$$

(ii) Notre but est maintenant de calculer une borne supérieure de $\| \, p - p_h^{i+1} \, \|_{L^2(\Omega)}$.

D'après (3.62), nous avons la relation

$$b(\mathbf{v}, p - p_h^{i+1}) =$$

$$\nu \int_\Omega \nabla(\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u})\nabla\mathbf{v}\ d\mathbf{x} + \int_\Omega \big((\mathbf{u}_h^{i+1}.\nabla)\mathbf{u}_h^{i+1} - (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u}\big)\mathbf{v}\ d\mathbf{x} + \int_\Omega \big((\mathbf{u}_h^{i} - \mathbf{u}_h^{i+1}).\nabla\big)\mathbf{u}_h^{i+1}\mathbf{v}\ d\mathbf{x}$$

(3.69)

$$+ \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)\ d\mathbf{x} + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \Big\{ \int_K (\mathbf{f}_h + \nu\Delta\mathbf{u}_h^{i+1} - (\mathbf{u}_h^i.\nabla)\mathbf{u}_h^{i+1} - \nabla p_h^{i+1})(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)\ d\mathbf{x}$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}} \int_e [\frac{\partial \mathbf{u}_h^{i+1}}{\partial n} - p_h^{i+1} n].(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)\ d\tau \Big\}.$$

En intercalant le terme $\pm \int_\Omega (\mathbf{u}_h^{i+1}.\nabla)\mathbf{u}\mathbf{v}\ d\mathbf{x}$ dans l'équation (3.69), nous trouvons

$$b(\mathbf{v}, p - p_h^{i+1}) = \nu \int_\Omega \nabla(\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u})\nabla\mathbf{v}\ d\mathbf{x} + \int_\Omega (\mathbf{u}_h^{i+1}.\nabla)(\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u})\mathbf{v}\ d\mathbf{x} + \int_\Omega (\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u})\nabla\mathbf{u}\mathbf{v}\ d\mathbf{x}$$

(3.70)

$$+ \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)\ d\mathbf{x} + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \Big\{ \int_K (\mathbf{f}_h + \nu\Delta\mathbf{u}_h^{i+1} - (\mathbf{u}_h^i.\nabla)\mathbf{u}_h^{i+1} - \nabla p_h^{i+1})(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)\ d\mathbf{x}$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}} \int_e [\frac{\partial \mathbf{u}_h^{i+1}}{\partial n} - p_h^{i+1} n].(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)\ d\tau \Big\} + \int_\Omega \big((\mathbf{u}_h^{i} - \mathbf{u}_h^{i+1}).\nabla\big)\mathbf{u}_h^{i+1}\mathbf{v}\ d\mathbf{x}.$$

Or, nous avons les deux majorations suivantes

$$\nu \int_\Omega \nabla(\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u})\nabla\mathbf{v}\ d\mathbf{x} + \int_\Omega (\mathbf{u}_h^{i+1}.\nabla)(\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u})\mathbf{v}\ d\mathbf{x} + \int_\Omega \big((\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}).\nabla\big)\mathbf{u}\mathbf{v}\ d\mathbf{x}$$

$$\leq \left(2\frac{S_4^2}{\nu}\ \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} + \nu\right) |\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}|_{1,\Omega} |\mathbf{v}|_{1,\Omega}, \tag{3.71}$$

$$\int_\Omega \big((\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i}).\nabla\big)\mathbf{u}_h^{i+1}\mathbf{v}\ d\mathbf{x} \leq \frac{S_4^2}{\nu}\ \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}\ |\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^{i}|_{1,\Omega} |\mathbf{v}|_{1,\Omega}. \tag{3.72}$$

D'où, en utilisant (3.71), (3.72) et l'inégalité de Cauchy-Schawrz , nous obtenons

$$b(\mathbf{v}, p-p_h^{i+1}) \leq \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \Big(\| \mathbf{f}-\mathbf{f}_h \|_{L^2(K)} + \| \mathbf{f}_h+\nu\Delta\mathbf{u}_h^{i+1}-(\mathbf{u}_h^i.\nabla)\mathbf{u}_h^{i+1}-\nabla p_h^{i+1} \|_{L^2(K)} \Big) \| \mathbf{v}-\mathbf{v}_h \|_{L^2(K)}$$

$$+\frac{1}{2} \sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}} \| [\frac{\partial \mathbf{u}_h^{i+1}}{\partial n} - p_h^{i+1} n] \|_{L^2(e)} \| \mathbf{v}-\mathbf{v}_h \|_{L^2(K)} + \frac{S_4^2}{\nu} \| \mathbf{f} \|_{0,\Omega} |\mathbf{u}_h^{i+1}-\mathbf{u}_h^i|_{1,\Omega} |\mathbf{v}|_{1,\Omega} \tag{3.73}$$

$$+\left(2\frac{S_4^2}{\nu} \| \mathbf{f} \|_{0,\Omega} + \nu\right) |\mathbf{u}_h^{i+1}-\mathbf{u}|_{1,\Omega} |\mathbf{v}|_{1,\Omega}.$$

Nous choisissons à cette étape $\mathbf{v}_h = R_h\mathbf{v}$ et nous déduisons des inégalités (1.31) et (1.32) ce qui suit

$$b(\mathbf{v}, p-p_h^{i+1}) \leq \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \Big\{ h_K \big(\| \mathbf{f}-\mathbf{f}_h \|_{L^2(K)} + \| \mathbf{f}_h+\nu\Delta\mathbf{u}_h^{i+1}-(\mathbf{u}_h^i.\nabla)\mathbf{u}_h^{i+1}-\nabla p_h^{i+1} \|_{L^2(K)} \big) \| \mathbf{v} \|_{1,\Delta_K}$$

$$+\frac{1}{2} \sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}} h_e^{1/2} \| [\frac{\partial \mathbf{u}_h^{i+1}}{\partial n} - p_h^{i+1} n] \|_{L^2(e)} \| \mathbf{v} \|_{1,\Delta_e} \Big\} + \frac{S_4^2}{\nu} \| \mathbf{f} \|_{0,\Omega} |\mathbf{u}_h^{i+1}-\mathbf{u}_h^i|_{1,\Omega} |\mathbf{v}|_{1,\Omega} \tag{3.74}$$

$$+\left(2\frac{S_4^2}{\nu} \| \mathbf{f} \|_{0,\Omega} + \nu\right) |\mathbf{u}_h^{i+1}-\mathbf{u}|_{1,\Omega} |\mathbf{v}|_{1,\Omega}.$$

D'où, en utilisant l'inégalité "inf-sup" (3.9), il en résulte que

$$\beta \| p-p_h^{i+1} \|_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \Big\{ h_K \big(\| \mathbf{f}-\mathbf{f}_h \|_{L^2(K)} + \| \mathbf{f}_h+\nu\Delta\mathbf{u}_h^{i+1}-(\mathbf{u}_h^i.\nabla)\mathbf{u}_h^{i+1}-\nabla p_h^{i+1} \|_{L^2(K)} \big)$$

$$+\frac{1}{2} \sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}} h_e^{1/2} \| [\frac{\partial \mathbf{u}_h^{i+1}}{\partial n} - p_h^{i+1} n] \|_{L^2(e)} \Big\} + \frac{S_4^2}{\nu} \| \mathbf{f} \|_{0,\Omega} |\mathbf{u}_h^{i+1}-\mathbf{u}_h^i|_{1,\Omega} \tag{3.75}$$

$$+\left(2\frac{S_4^2}{\nu} \| \mathbf{f} \|_{0,\Omega} + \nu\right) |\mathbf{u}_h^{i+1}-\mathbf{u}|_{1,\Omega}.$$

Finalement, nous obtenons d'après (3.68) et (3.75) le résultat suivant

$$|\mathbf{u}_h^{i+1}-\mathbf{u}|_{1,\Omega} + \| p_h^{i+1}-p \|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \big((\eta_{K,i}^{(D)})^2 + h_K^2 \| \mathbf{f}-\mathbf{f}_h \|_{L^2(K)}^2 \big) \right)^{1/2} + \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\eta_{K,i}^{(L)})^2 \right)^{1/2}.$$

3.3.3 Efficacité

Dans cette partie, nous montrons l'optimalité de l'estimation d'erreur trouvée dans la partie précédente.

Théorème 3.3.3. *Soient* $(\boldsymbol{u}, p) \in X \times M$ *une solution du problème non linéaire* (3.2) *et* $(\boldsymbol{u}_h^{i+1}, p_h^{i+1}) \in X_h \times M_h$ *une solution du problème itératif* (3.48)*. Nous avons les estimations suivantes*

$$
\begin{aligned}
\eta_{K,i}^{(L)} &\leq \| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h^{i+1} \|_{1,\omega_K} + \| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h^{i} \|_{1,\omega_K} \\
\eta_{K,i}^{(D)} &\leq C \Big(\| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h^{i+1} \|_{1,\omega_K} + \| \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h^{i} \|_{1,\omega_K} + \| p_h^{i+1} - p \|_{L^2(\omega_K)} \\
&\qquad + \sum_{\kappa \subset \omega_K} h_\kappa \, \| \boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}_h \|_{L^2(\kappa)} \Big).
\end{aligned} \tag{3.76}
$$

où ω_K *est l'union des triangles partageant au moins un côté* ($d = 2$) *ou une face* ($d = 3$) *avec* K*.*

Preuve

La première majoration est évidente en intercalant $\pm\mathbf{u}$ dans $\eta_{K,i}^{(L)}$ et en utilisant l'inégalité triangulaire. Dans le but de majorer l'indicateur de discretisation $\eta_{K,i}^{(D)}$, nous intercalons $\pm \int_\Omega \mathbf{u}_h^{i+1} \nabla \mathbf{u} \, d\mathbf{x}$ dans l'équation (3.62) et nous prenons $\mathbf{v}_h = 0$. Il en résulte que

$$
\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\int_K (\mathbf{f}_h + \nu \Delta \mathbf{u}_h^{i+1} - (\mathbf{u}_h^i . \nabla) \mathbf{u}_h^{i+1} - \nabla p_h^{i+1}) \mathbf{v} \right) d\mathbf{x}
$$

$$
= \nu \int_\Omega \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}) \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \big((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}) . \nabla \big) \mathbf{u} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h) \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \tag{3.77}
$$

$$
+ \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_{K,\Omega}} \int_e [\frac{\partial \mathbf{u}_h^{i+1}}{\partial n} - p_h^{i+1} n] . \mathbf{v} \, d\tau \Big\} + \int_\Omega \big(\mathbf{u}_h^{i+1} . \nabla \big) (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1}) \mathbf{v} \, d\mathbf{x}
$$

$$
+ \int_\Omega \big((\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^i) . \nabla \big) \mathbf{u}_h^{i+1} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_\Omega (p_h^{i+1} - p) \, \mathrm{div} \, \mathbf{v} \, d\mathbf{x}.
$$

Nous remplaçons $\mathbf{v}$ par $\mathbf{v}_K$ dans l'équation (3.77) avec

$$\mathbf{v}_K = \begin{cases} (\mathbf{f}_h + \nu\Delta\mathbf{u}_h^{i+1} - (\mathbf{u}_h^i.\nabla)\mathbf{u}_h^{i+1} - \nabla p_h^{i+1})\psi_K & \text{sur } K \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus K \end{cases}$$

où ψ_K désigne la fonction bulle sur le triangle K.
Nous obtenons alors l'équation

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K (\mathbf{f}_h + \nu\Delta\mathbf{u}_h^{i+1} - (\mathbf{u}_h^i.\nabla)\mathbf{u}_h^{i+1} - \nabla p_h^{i+1})^2\psi_K \, d\mathbf{x}$$

$$= \nu \int_\Omega \nabla(\mathbf{u}-\mathbf{u}_h^{i+1})\nabla\mathbf{v}_K \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \big((\mathbf{u}-\mathbf{u}_h^{i+1}).\nabla\big)\mathbf{u}\mathbf{v}_K \, d\mathbf{x} - \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K (\mathbf{f}-\mathbf{f}_h)\mathbf{v}_K \, d\mathbf{x} \tag{3.78}$$

$$+ \int_\Omega (\mathbf{u}_h^{i+1}.\nabla)(\mathbf{u}-\mathbf{u}_h^{i+1})\mathbf{v}_K \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \big((\mathbf{u}_h^{i+1}-\mathbf{u}_h^i).\nabla\big)\mathbf{u}_h^{i+1}\mathbf{v}_K \, d\mathbf{x}$$

$$+ \int_\Omega (p_h^{i+1} - p) \text{ div } \mathbf{v}_K \, d\mathbf{x}.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inéquation (2), nous trouvons l'estimation

$$\| (\mathbf{f}_h + \nu\Delta\mathbf{u}_h^{i+1} - (\mathbf{u}_h^i.\nabla)\mathbf{u}_h^{i+1} - \nabla p_h^{i+1})\psi_K^{1/2} \|^2_{L^2(K)}$$

$$\leq (\nu + \frac{2C}{\nu} \| \mathbf{f}\|_{0,\Omega}) \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1} \|_{1,K} \, |\mathbf{v}_K|_{1,K} + \| \mathbf{f} - \mathbf{f}_h \|_{L^2(K)} \| \mathbf{v}_K \|_{L^2(K)} \tag{3.79}$$

$$+ \| p_h^{i+1} - p \|_{L^2(\Omega)} \, |\mathbf{v}_K|_{1,K} + \frac{C}{\nu} \| \mathbf{f}\|_{0,\Omega} \| \mathbf{u}_h^i - \mathbf{u}_h^{i+1} \|_{1,K} \, |\mathbf{v}_K|_{1,K}.$$

Nous appliquons les inégalités inverses (1.46) et (1.47) à l'inéquation (3.79). Il en résulte que

$$h_K \, \| \mathbf{f}_h + \nu\Delta\mathbf{u}_h^{i+1} - (\mathbf{u}_h^i.\nabla)\mathbf{u}_h^{i+1} - \nabla p_h^{i+1} \|^2_{L^2(K)}$$

$$\leq (\nu + \frac{2C}{\nu} \| \mathbf{f}\|_{0,\Omega}) \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1} \|_{1,K} \| \mathbf{v}_K \|_{L^2(K)} + h_K \, \| \mathbf{f} - \mathbf{f}_h \|_{L^2(K)} \| \mathbf{v}_K \|_{L^2(K)} \tag{3.80}$$

$$+ \| p_h^{i+1} - p \|_{L^2(\Omega)} \| \mathbf{v}_K \|_{L^2(K)} + \frac{C}{\nu} \| \mathbf{f}\|_{0,\Omega} \| \mathbf{u}_h^i - \mathbf{u}_h^{i+1} \|_{1,K} \| \mathbf{v}_K \|_{L^2(K)} \, .$$

Nous trouvons alors la majoration suivante du premier terme de l'indicateur d'erreur de discrétisation

$$h_K \,\|\, \mathbf{f}_h + \nu\Delta\mathbf{u}_h^{i+1} - (\mathbf{u}_h^i.\nabla)\mathbf{u}_h^{i+1} - \nabla p_h^{i+1} \,\|_{L^2(K)}$$

$$\leq C\Big(\,\|\, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1} \,\|_{1,K} + \|\, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^i \,\|_{1,K} + h_K \,\|\, \mathbf{f} - \mathbf{f}_h \,\|_{L^2(K)} \tag{3.81}$$

$$+ \,\|\, p_h^{i+1} - p \,\|_{L^2(\Omega)} + \eta_{K,i}^{(L)}\Big).$$

D'autre part, nous calculons la borne supérieure du second terme de l'indicateur d'erreur de discrétisation. De même, en prenant $\mathbf{v}_h = 0$, nous déduisons de l'équation (3.77) la relation suivante

$$\frac{1}{2}\sum_{e\in\mathcal{E}_{K,\Omega}}\int_e [\frac{\partial\mathbf{u}_h^{i+1}}{\partial n} - p_h^{i+1}n].\mathbf{v}\; d\tau = \int_K (\mathbf{f}_h + \nu\Delta\mathbf{u}_h^{i+1} - (\mathbf{u}_h^i.\nabla)\mathbf{u}_h^{i+1} - \nabla p_h^{i+1})\mathbf{v}\; d\mathbf{x}$$

$$+\nu\int_\Omega \nabla(\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u})\nabla\mathbf{v}\; d\mathbf{x} + \int_\Omega \big((\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}).\nabla\big)\mathbf{u}\mathbf{v}\; d\mathbf{x} + \sum_{K\in\mathcal{T}_h}\int_K (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)\mathbf{v}\; d\mathbf{x} \tag{3.82}$$

$$+\int_\Omega (\mathbf{u}_h^{i+1}.\nabla)(\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u})\mathbf{v}\; d\mathbf{x} + \int_\Omega \big((\mathbf{u}_h^i - \mathbf{u}_h^{i+1}).\nabla\big)\mathbf{u}_h^{i+1}\mathbf{v}\; d\mathbf{x}$$

$$+\int_\Omega (p - p_h^{i+1})\;\mathrm{div}\;\mathbf{v}\; d\mathbf{x}.$$

Pour une arête ou une face e, soient K et K' les éléments de $\mathcal{T}_h$ qui contiennent e. Nous remplaçons $\mathbf{v}$ par $\mathbf{v}_e$ dans l'équation (3.82) avec

$$v_e = \begin{cases} L_{e,\kappa}\left(\big[\dfrac{\partial\mathbf{u}_h^{i+1}}{\partial n} - p_h^{i+1}n\big]\psi_e\right) & \kappa \in \{K, K'\} \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus (K \cup K') \end{cases}$$

où ψ_e désigne la fonction bulle sur l'arrête e et $L_{e,\kappa}$ étant l'opérateur de relèvement defini comme précédemment.

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inéquation (2), nous obtenons

$$\| \big[[\frac{\partial \mathbf{u}_h^{i+1}}{\partial n} - p_h^{i+1} n \big] \psi_e^{1/2} \|_{L^2(e)}$$

$$\leq (\nu + \frac{2C}{\nu} \| \mathbf{f} \|_{0,\Omega}) \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1} \|_{1,K\cup K'} |\mathbf{v}_e|_{1,K\cup K'} + \| \mathbf{f} - \mathbf{f}_h \|_{L^2(K\cup K')} \| \mathbf{v}_e \|_{L^2(K\cup K')}$$

$$+ \| \mathbf{f}_h + \nu \Delta \mathbf{u}_h^{i+1} - (\mathbf{u}_h^i . \nabla) \mathbf{u}_h^{i+1} - \nabla p_h^{i+1} \|_{L^2(K\cup K')} \| \mathbf{v}_e \|_{L^2(K\cup K')} \tag{3.83}$$

$$+ \| p_h^{i+1} - p \|_{L^2(K\cup K')} |\mathbf{v}_e|_{1,K\cup K'} + \frac{C}{\nu} \| \mathbf{f} \|_{0,\Omega} \eta_{K,i}^{(L)} |\mathbf{v}_e|_{1,K\cup K'}.$$

En appliquant les inégalités inverses (1.51) et (1.52), nous trouvons

$$h_e^{1/2} \| \big[[\frac{\partial \mathbf{u}_h^{i+1}}{\partial n} - p_h^{i+1} n \big] \|_{L^2(e)}^2$$

$$\leq (\nu + \frac{2C}{\nu} \| \mathbf{f} \|_{0,\Omega}) \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1} \|_{1,K\cup K'} \| \mathbf{v}_e \|_{L^2(e)} + h_e \| \mathbf{f} - \mathbf{f}_h \|_{L^2(K\cup K')} \| \mathbf{v}_e \|_{L^2(e)}$$

$$+ h_e \| \mathbf{f}_h + \nu \Delta \mathbf{u}_h^{i+1} - (\mathbf{u}_h^i . \nabla) \mathbf{u}_h^{i+1} - \nabla p_h^{i+1} \|_{L^2(K\cup K')} \| \mathbf{v}_e \|_{L^2(e)} \tag{3.84}$$

$$+ \| p_h^{i+1} - p \|_{L^2(K\cup K')} \| \mathbf{v}_e \|_{L^2(e)} + \frac{C}{\nu} \| \mathbf{f} \|_{0,\Omega} \eta_{K,i}^{(L)} \| \mathbf{v}_e \|_{L^2(e)} .$$

De plus, pour majorer le dernier terme de l'indicateur d'erreur de discrétisation $\eta_{K,i}^{(D)}$, nous prenons $q = q_K$ dans l'équation (3.63) tel que

$$q_K = \begin{cases} \text{div } \mathbf{u}_h^{i+1} & \text{sur } K \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus K \end{cases}$$

Ainsi, en utilisant les deux relations (3.81) et (3.84), nous trouvons la majoration

$$\eta_{K,i}^{(D)} \leq C \Big(\| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1} \|_{1,\omega_K} + \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^i \|_{1,\omega_K} + \sum_{\kappa \subset \omega_K} h_\kappa \| \mathbf{f} - \mathbf{f}_h \|_{L^2(\kappa)}$$

$$+ \| p_h^{i+1} - p \|_{L^2(\omega_K)} + \eta_{K,i}^{(L)} \Big).$$

Or, comme nous avons

$$\eta_{K,i}^{(L)} \leq \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^i \|_{1,\omega_K} + \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1} \|_{1,\omega_K},$$

nous obtenons le résultat suivant

$$\eta_{K,i}^{(D)} \leq C \Bigg(\| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{i+1} \|_{1,\omega_K} + \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^i \|_{1,\omega_K} + \| p - p_h^{i+1} \|_{L^2(\omega_K)} + \sum_{\kappa \subset \omega_K} h_\kappa \| \mathbf{f} - \mathbf{f}_h \|_{L^2(\kappa)} \Bigg).$$

Nous trouvons finalement que la majoration de l'estimation d'erreur *a posteriori* que nous avons démontré dans le Théorème 3.3.2 est une majoration optimale.

Remarque 3.3.4. *La formule* (3.64) *constitue la borne supérieure de notre estimation d'erreur a posteriori, alors que les formules* (3.76) *constituent les bornes inférieures correspondantes.*

Chapitre 4

Simulations numériques des équations de Navier-Stokes

Sommaire

4.1 Problème itératif 114
4.1.1 Estimation d'erreur *a priori* 114
4.1.2 Estimation d'erreur *a posteriori* 117

4.1 Problème itératif

Nous validons dans ce chapitre les résultats théoriques obtenus dans le chapitre 4. Nous nous intéressons à la résolution des équations de Navier-Stokes stationnaire en dimension $d = 2$. Nous travaillons dans l'espace $\mathbb{R}^2$ et nous considérons le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} + \nabla p &=& \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \text{div } \mathbf{u} &=& 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} &=& 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array}\right. \tag{4.1}$$

Les éléments finis utilisés pour la discrétisation de la vitesse $\mathbf{u}$ sont des éléments de Lagrange $\mathcal{P}_1$"*bulle*", alors que nous approchons la pression p par des éléments de Lagrange du premier ordre $\mathcal{P}_1$.

4.1.1 Estimation d'erreur *a priori*

Afin de discrétiser le problème (4.1), nous proposons une triangulation $\mathcal{T}_h$ du domaine Ω avec un maillage de pas h. Nous notons $H^1_{0,h}$ et M_h les espaces discrets correspondant respectivement à la vitesse et à la pression. Le problème variationnel discretisé par la méthode de Galerkin sera alors :

Trouver $\mathbf{u}_h \in X_h = H^1_{0,h}$ et $p_h \in M_h$ tel que

$$\left\{\begin{array}{lll} \forall \mathbf{v}_h \in X_h, & \displaystyle\int_\Omega \nabla\mathbf{u}_h\nabla\mathbf{v}_h d\mathbf{x} + \int_\Omega (\mathbf{u}_h.\nabla)\mathbf{u}_h\mathbf{v}_h d\mathbf{x} - \int_\Omega p_h \text{div } \mathbf{v}_h d\mathbf{x} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h\rangle \\ \forall q_h \in M_h, & \displaystyle\int_\Omega q_h \text{div } \mathbf{u}_h d\mathbf{x} = 0. \end{array}\right. \tag{4.2}$$

Le domaine Ω considéré dans $\mathbb{R}^2$, est le carré unité $]0,1[^2$. Nous divisons chaque arête en N segments (voir Figure 4.1). Par la suite, nous considérons la solution exacte $(\mathbf{u}, p) = (\text{rot } \psi, p)$ où ψ et p sont définies comme suit :

$$\psi(x,y) = \mathrm{e}^{-30\left((x-1)^2+(y-1)^2\right)},$$

$$p(x,y) = cos(2\pi x)cos(2\pi y).$$

Nous implémentons par la suite le schéma itératif suivant :

$$\begin{cases} \forall \mathbf{v}_h \in X_h, & \displaystyle\int_\Omega \nabla \mathbf{u}_h^{i+1} \nabla \mathbf{v}_h d\mathbf{x} + \int_\Omega (\mathbf{u}_h^i . \nabla) \mathbf{u}_h^{i+1} \mathbf{v}_h d\mathbf{x} - \int_\Omega p_h^{i+1} \text{div } \mathbf{v}_h d\mathbf{x} &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle \\ \forall q_h \in M_h, & \displaystyle\int_\Omega q_h \text{ div } \mathbf{u}_h^{i+1} d\mathbf{x} &= 0 \end{cases}$$

avec le critère d'arrêt classique défini par

$$err_L = \frac{|\mathbf{u}_h^{i+1} - \mathbf{u}_h^i|_{1,\Omega}}{|\mathbf{u}_h^{i+1}|_{1,\Omega}} \leq 10^{-7}.$$

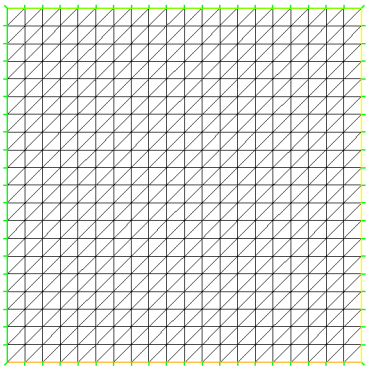

FIGURE 4.1 – Géométrie du domaine

Nous présentons dans les Figures 4.2 et 4.3 une comparaison entre les solutions numérique et exacte de la pression p pour $N = 100$.

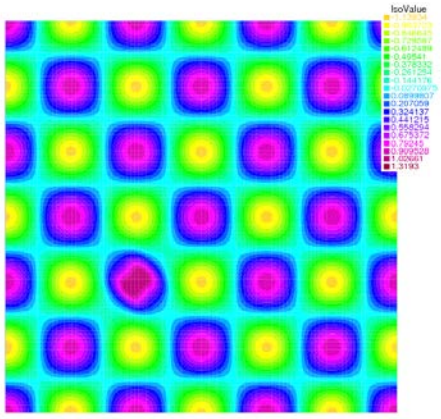

FIGURE 4.2 – Pression numérique

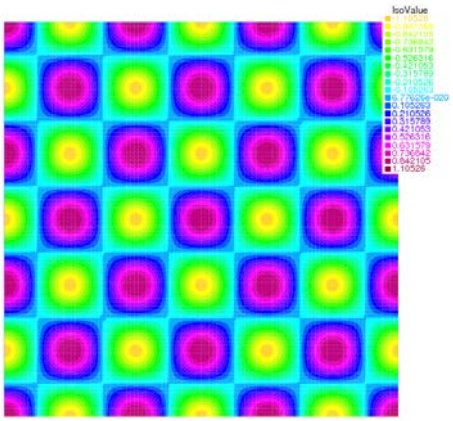

FIGURE 4.3 – Pression exacte

De même, dans les Figures 4.4, 4.5, 4.6 et 4.7 nous illustrons les différentes composantes des solutions numériques et exactes de la vitesse $\mathbf{u}$ pour $N = 100$.

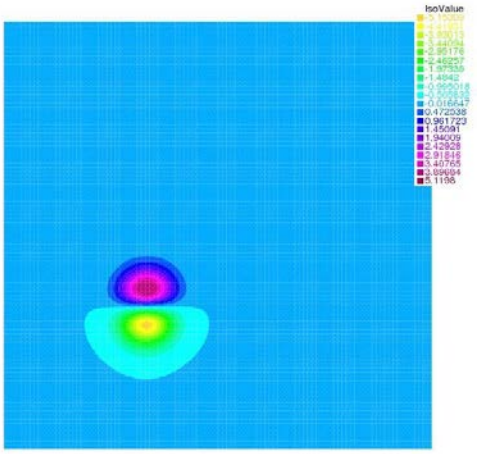

FIGURE 4.4 – Première composante de la vitesse numérique

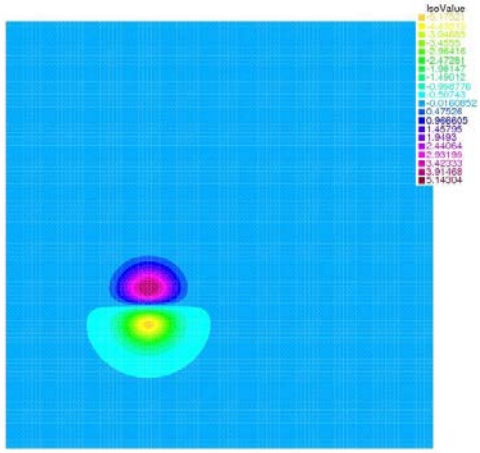

FIGURE 4.5 – Première composante de la vitesse exacte

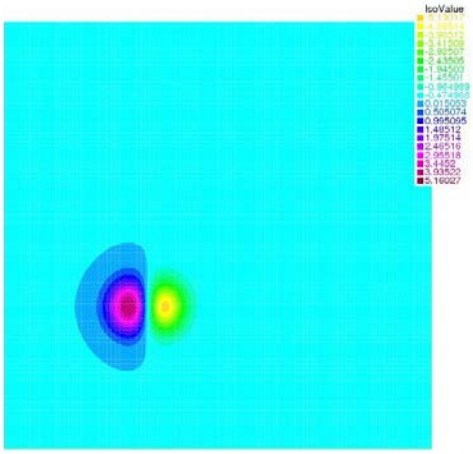

FIGURE 4.6 – Deuxième composante de la vitesse numérique

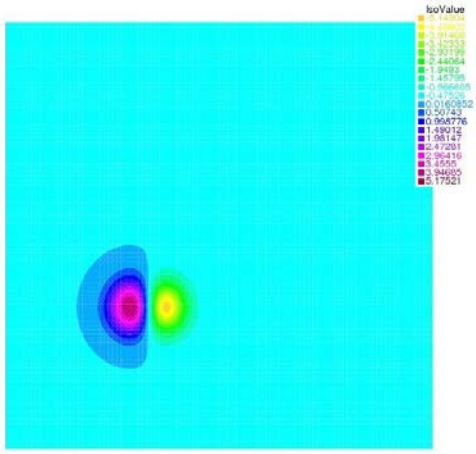

FIGURE 4.7 – Deuxième composante de la vitesse exacte

Nous présentons dans les Figures 4.8 et 4.9 les courbes d'erreur de la vitesse et de la pression en fonction du pas de maillage h en échelle logarithmique. Nous testons l'algorithme pour N allant de 60 à 100, par pas de 10. La pente de la courbe d'erreur de la vitesse est de l'ordre de $0,92$, alors que celle de la pression est de l'ordre de $1,08$.

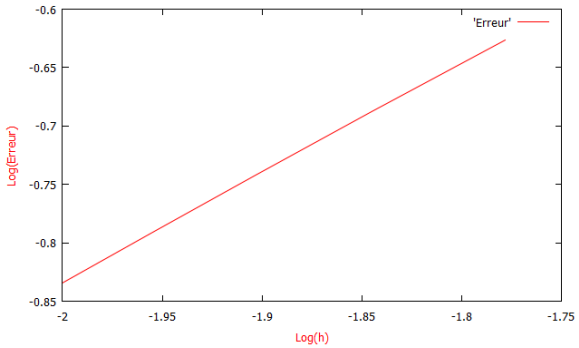

FIGURE 4.8 – Courbe d'erreur de la vitesse en échelle logarithmique

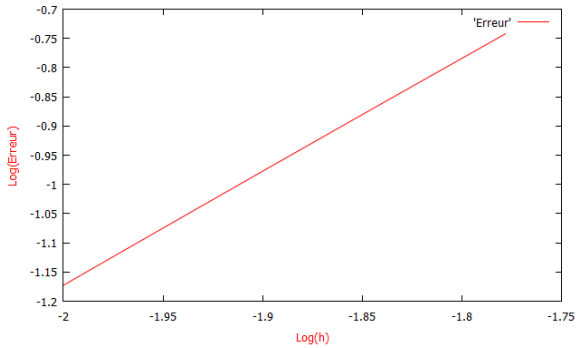

FIGURE 4.9 – Courbe d'erreur de la pression en échelle logarithmique

4.1.2 Estimation d'erreur *a posteriori*

Dans cette partie, afin de valider les résultats théoriques, nous implémentons l'algorithme itératif utilisé dans la section précédente. En effet, nous proposons deux critères d'arrêts différents, le premier algorithme correspond à un critère d'arrêt classique ($\eta_i^{(L)} \leq 10^{-5}$), alors que le second correspond à un nouveau critère ($\eta_i^{(L)} \leq \gamma\eta_i^D$). Dans ce but, nous considérons la solution théorique $(\mathbf{u}, p) = (\text{rot } \psi, p)$ où ψ et p sont définies comme suit :

$$\psi(x,y) = \mathrm{e}^{-30\left((x-1)^2+(y-1)^2\right)},$$

$$p(x,y) = cos(2\pi\frac{x}{3})cos(2\pi\frac{y}{3}).$$

Nous définissons l'indicateur d'erreur η_i^D par

$$\begin{aligned}\eta_i^D \quad = \quad & \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K \,\|\, \mathbf{f}_h + \nu\Delta\mathbf{u}_h^{i+1} - (\mathbf{u}_h^i.\nabla)\mathbf{u}_h^{i+1} - \nabla p_h^{i+1} \,\|_{L^2(K)} \\ & + \frac{1}{2}\sum_{e\in\Upsilon_K} h_e \,\|\, [\frac{\partial \mathbf{u}_h^{i+1}}{\partial n} - p_h^{i+1} n] \,\|_{L^2(e)} + \|\, \text{div } \mathbf{u}_h^{i+1} \,\|_{L^2(K)} \,.\end{aligned}$$

Soit γ un paramètre positif, nous posons le critère d'arrêt de linéarisation suivant

$$\eta_i^{(L)} \leq \gamma\eta_i^D. \tag{4.3}$$

Nous choisissons une approximation initiale arbitraire ($\mathbf{u}_h^0 = 0$), et nous utilisons le même algorithme itératif introduit dans la section 2.1.2. En premier lieu, nous nous intéréssons à étudier l'évolution de l'adaptation du maillage. Nous commençons avec un maillage initial (carré dont les arêtes sont divisés en 10 segments). Par la suite, nous utilisons l'indicateur η_i^D dans l'adaptation du maillage (voir Figures 4.10 à 4.13). En effet, nous remarquons dans ces figures que le maillage adaptatif suit bien la solution.

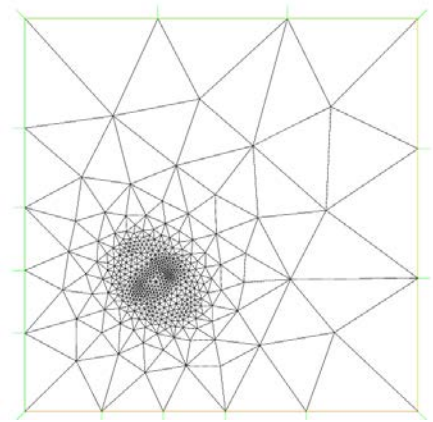

FIGURE 4.10 – 273 sommets

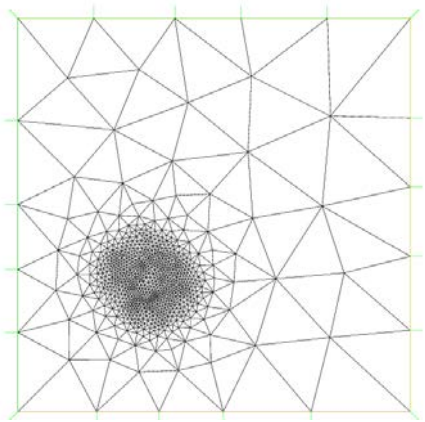

FIGURE 4.11 – 507 sommets

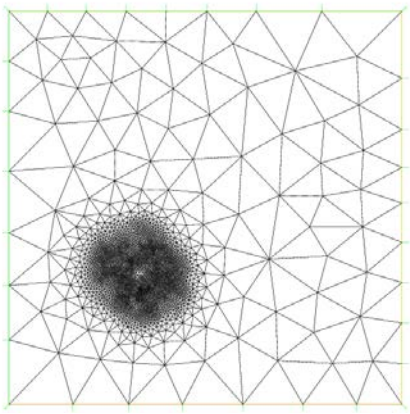

FIGURE 4.12 – 891 sommets

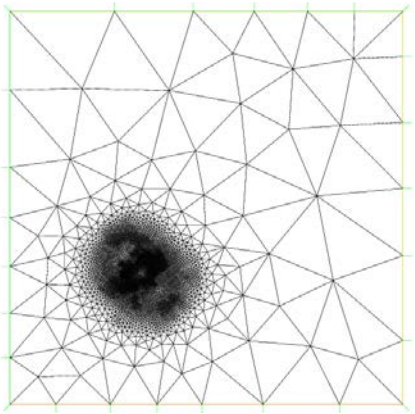

FIGURE 4.13 – 1615 sommets

Nous présentons dans les Figures 4.14 et 4.15 les deux solutions, numérique et exacte, de la vitesse correspondante au maillage de la Figure 4.13. Nous remarquons que la vitesse numérique et la vitesse exacte sont cohérantes.

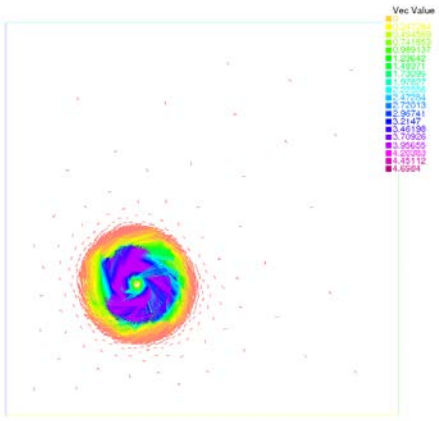

FIGURE 4.14 – Vitesse numérique

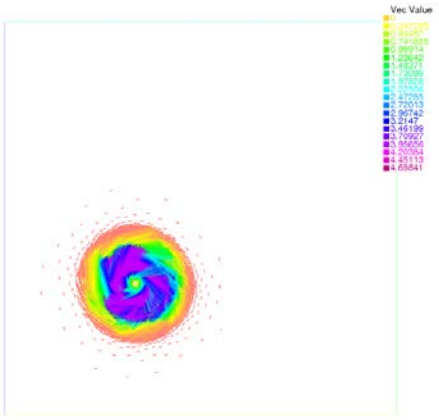

FIGURE 4.15 – Vitesse exacte

Dans la Figure 4.16 nous présentons deux courbes en échelle logarithmique relatives à l'estimation de l'erreur en fonction du nombre de sommets. La première courbe (rouge) correspond à un critère d'arrêt classique ($\eta_i^{(L)} \leq 10^{-10}$), alors que la seconde courbe (bleue) correspond à un nouveau critère d'arrêt ($\eta_i^{(L)} \leq \gamma \eta_i^D$). Il est clair que l'erreur ne varie pas pour les deux critères d'arrêt. Nous verrons par la suite l'avantage du second critère d'arrêt par rapport aux nombre d'itérations.

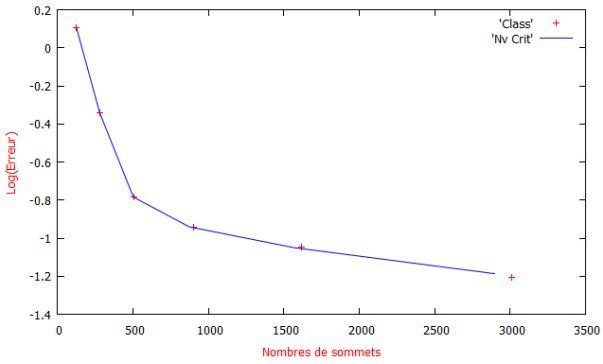

FIGURE 4.16 – Courbe d'erreur en fonction du nombre de sommets

La Figure 4.17 présente deux courbes relatives à l'estimation de l'erreur en fonction du nombre de sommets. La première courbe (rouge) corrrespond à un maillage uniforme avec N allant de 10 à 60 par pas de 10, alors que la seconde (bleue) correspond à un maillage adaptatif avec le critère d'arrêt de linéarisation $\eta_i^{(L)} \leq \gamma \eta_i^D$ où $\gamma = 10^{-3}$. Nous remarquons dans cette figure que l'erreur d'un maillage adaptatif est beaucoup plus petite qu'un maillage uniforme pour un nombre de sommets fixé. En effet, un des avantages de cette nouvelle méthode est d'améliorer la précision correspondante à un même nombre de sommets.

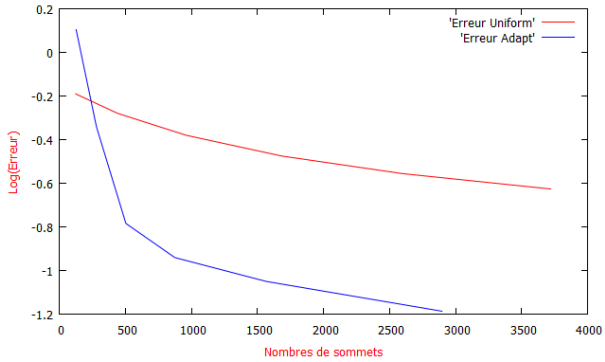

FIGURE 4.17 – Courbes d'erreur en fonction du nombre de sommets

Dans la Figure 4.18, nous illustrons la performance de notre nouveau critère d'arrêt avec $\gamma = 0,01$. En effet, nous comparons le nombre d'itérations en fonction du niveau de raffinement pour les deux critères d'arrêt $\eta_i^{(L)} \leq \gamma \eta_i^D$ et $\eta_i^{(L)} \leq 10^{-10}$. Nous remarquons dans la Figure 4.18, au 4^{eme} niveau de raffinement par exemple, la méthode classique nécessite 16 itérations alors que le niveau critère d'arrêt nécessite juste 2 itérations. D'où l'efficacité de cette nouvelle méthode.

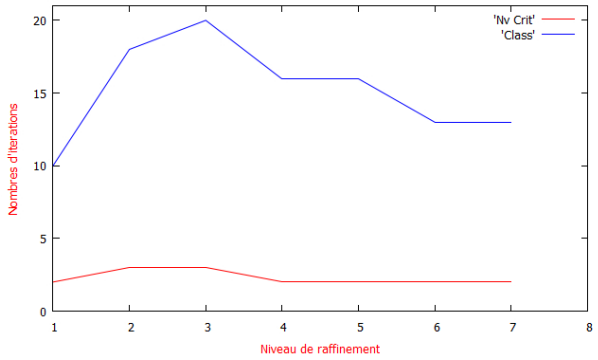

FIGURE 4.18 – Nombres d'itération en fonction du niveau de raffinement

Finalement, nous présentons dans le tableau suivant la durée de temps de calcul correspondante à chaque niveau de raffinement pour les deux critères d'arrêt. Nous remarquons clairement l'efficacité du nouveau critère avec $\gamma = 0,01$. En effet, pour le septième niveau de raffinement le coût du temps de l'algorithme classique est environ 50s alors que celui du nouveau critère est environ 15s. En conclusion, la nouvelle méthode améliore le temps de convergence de l'algorithme.

Niv. de raffinement / Méthode	3	4	5	6	7
Nouveau critère	6,466s	8,331s	14,439s	11,591s	15,351s
Critère classique	30,609s	13,104s	21,279s	29,25s	49,483s

.

Bibliographie

Bibliographie

[1] Adams R.A., Sobolev Spaces, *Acadamic Press, INC, 1978.*

[2] Ainsworth M., Oden J.-T., A posteriori error estimation in finite element analysis, *Computable Methods in Applied Mechanics and Engineering, 142,* ***1*** *(1997), 1–88..*

[3] Babuška I., Rheinboldt W.C., Error estimates for adaptive finite element computations, *SIAM J. Numer. Anal.* ***4*** *(1978), 736–754.*

[4] Babuška I., Rheinboldt W.C., Error estimates for adaptive finite element method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* ***10*** *(1978), 1597-1615.*

[5] Babuška I., Rodriguez R., The problem of the selection of an a-posteriori error indicator based on smoothing techniques, *Internat. J. Numer. Methods. Engrg, 36,* ***4*** *(1993), 539–567.*

[6] Bernardi C., Hecht F., Verfürth R., A finite element discretization of the three-dimensional Navier-Stokes equations with mixed boundary conditions, *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 43,* ***6*** *(2009), 1185–1201.*

[7] Brezis H., Analyse fonctionnelle Théorie et application, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, *Masson, Paris (1983)* .

[8] Brezzi F., Rappaz J., Raviart P.-A., Finite dimensional approximation of nonlinear problems, Part I : Branches of nonsingular solutions, *Numer. Math.* ***36*** *(1980), 1–25.*

[9] Chaillou A.-L., Suri M., Computable error estimators for the approximation of nonlinear problems by linearized models, *Computable Methods in Applied Mechanics and Engineering* ***196*** *(2006), 210–224.*

[10] Chaillou A.-L., Suri M., A posteriori estimation of the linearization error for strongly monotone nonlinear operators, *Computable Methods in Applied Mechanics and Engineering* ***205*** *(2007), 72–87.*

[11] El Alaoui L., Ern A.,Vohralík M., Guaranteed and robust a posteriori error estimate and balancing discretization and linearization errore for monotone non linear problems, *Computable Methods in Applied Mechanics and Engineering* ***200*** *(2011), 2782–2795.*

[12] Girault V., Raviart P.-A., *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Springer-Verlag (1986).*

[13] Hecht F., New development in FreeFem++, *Journal of Numerical Mathematics **20** (2012), 251–266.*

[14] Kavian O., Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques, *Springer-Verlag (1993).*

[15] Neittaanmäki P., Repin S. Reliable methods for computer simulation error control and a posteriori estimates, vol.33 of Studies in Mathematics and its Applications., *Elsevier Science B.V., Amsterdam (2004).*

[16] Poussin J., Rappaz J., Consistency, stability, a priori and a posteriori errors for Petrov-Galerkin methods applied to nonlinear problems, *Numer. Math. **69** (1994), no. 2, 213–231.*

[17] Raviart P.-A., Thomas J.-M., Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, *Dunod.*

[18] Repin S. A posteriori estimates for partial differential equations, vol. 4 of Radon Series onCoputational and Applied Mathematics, *Walter de Gruyter GmbH and Co, Berlin (2008).*

[19] Stroubolis T. and Hague K.-A., Recent experiences with error estimation and adaptivity I : Review of error estimators for scalar elliptic problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **97** (1992), 399–436.*

[20] Veeser A., Verfürth R., Explicit upper bound for dual norms of residuals, *SIAM J. Numer. Anal. 47, **3** (2009), 2387–2405.*

[21] Verfürth R., A Posteriori Error Estimates for Non Linear Problems, *Dunod (1994).*

[22] Verfürth R., A Posteriori Error Estimation Techniques For Finite Element Methods, *Numerical Mathematics And Scientific Computation, Oxford (2013).*

[23] Zhu J.-Z., Zienkiewicz O.-C., Adaptive techniques in the finite element method, *Comm. Appl. Numer. Methods **4** (1988), 197–204.*

[24] Zienkiewicz O.-C., Zhu J.-Z. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis, *Internat. J. Numer. Methods Engrg. **24** (1987), 337–357.*

Analyse *a posteriori* d'algorithmes itératifs pour des problèmes non linéaires

Résumé

La résolution numérique de n'importe quelle discrétisation d'équations aux dérivées partielles non linéaires requiert le plus souvent un algorithme itératif. En général, la discrétisation des équations aux dérivées partielles donne lieu à des systèmes de grandes dimensions.
Comme la résolution des grands systèmes est très coûteuse en terme de temps de calcul, une question importante se pose : afin d'obtenir une solution approchée de bonne qualité, quand est-ce qu'il faut arrêter l'itération afin d'éviter les itérations inutiles ?
L'objectif de cette thèse est alors d'appliquer, à différentes équations, une méthode qui nous permet de diminuer le nombre d'itérations de la résolution des systèmes en gardant toujours une bonne précision de la méthode numérique. En d'autres termes, notre but est d'appliquer une nouvelle méthode qui fournira un gain remarquable en terme de temps de calcul.
Tout d'abord, nous appliquons cette méthode pour un problème non linéaire modèle. Nous effectuons l'analyse *a priori* et *a posteriori* de la discrétisation par éléments finis de ce problème et nous proposons par la suite deux algorithmes de résolution itérative correspondants. Nous calculons les estimations d'erreur *a posteriori* de nos algorithmes itératifs proposés et nous présentons ensuite quelques résultats d'expérience numériques afin de comparer ces deux algorithmes.
Nous appliquerons, de même, cette approche pour les équations de Navier-Stokes. Nous proposons un schéma itératif et nous étudions la convergence et l'analyse *a priori* et *a posteriori* correspondantes. Finalement, nous présentons des simulations numériques montrant l'efficacité de notre méthode.

Mots Clés : Equations aux dérivées partielles, analyse *a posteriori*, algorithmes itératifs, problème non linéaire, discrétisation, linéarisation, critère d'arrêt.

A posteriori analyses of iterative algorithm for nonlinear problems.

Abstract

The numerical resolution of any discretization of nonlinear PDEs most often requires an iterative algorithm. In general, the discretization of partial differential equations leads to large systems.
As the resolution of large systems is very costly in terms of computation time, an important question arises: to obtain an approximate solution of good quality, when is it necessary to stop the iteration in order to avoid unnecessary iterations?

A posteriori error indicators have been studied in recent years owing to their remarkable capacity to enhance both speed and accuracy in computing. This thesis deals with *a posteriori* error estimation for the finite element discretization of nonlinear problems. Our purpose is to apply a new method that allows us to reduce the number of iterations of the resolution system while keeping a good accuracy of the numerical method. In other words, our goal is to apply a new method that provides a remarkable gain in computation time.
For a given nonlinear equation we propose a finite element discretization relying on the Galerkin method. We solve the discrete problem using two iterative methods involving some kind of linearization. For each of them, there are actually two sources of error, namely discretization and linearization. Balancing these two errors can be very important, since it avoids performing an excessive number of iterations. Our results lead to the construction of computable upper indicators for the full error.
Similarly, we apply this approach to the Navier-Stokes equations.
Several numerical tests are provided to evaluate the efficiency of our indicators.

Keywords: Partial derivatives equations, a *posteriori* analyses, iterative algorithm, nonlinear problem, discretization linearization, stopping criterion.

.