CIRPÉE
Centre interuniversitaire sur le risque, les politiques économiques et l'emploi

Cahier de recherche/Working Paper **05-05**

La dette obligataire dans un MÉGC dynamique séquentiel

(Version révisée)

André Lemelin

Mai/May 2005

Lemelin: Institut national de la recherche scientifique, Urbanisation, Culture et Société, 3465 rue Durocher, Montréal, QC H2X 2C6; Tél. (514) 499-4000 Fax (514) 499-4065
Andre.Lemelin@ucs.inrs.ca

.

Résumé:

Dans ce texte, nous présentons une version minimaliste d'un modèle de la dette obligataire qui s'inscrit dans un modèle d'équilibre général calculable dynamique séquentiel. La spécification proposée tient compte des caractéristiques suivantes des obligations :

- elles sont émises à une date donnée;
- elles ont une valeur nominale déterminée;
- elles portent intérêt à un taux déterminé par rapport à leur valeur nominale;
- elles ont une date d'échéance, à laquelle elles sont remboursées au détenteur par l'émetteur.

Les obligations sont en concurrence avec une autre catégorie d'actifs, les actions, de sorte que le rendement exigé par les acheteurs de nouvelles obligations augmente à mesure qu'augmente la dette obligataire par rapport au stock d'actions en circulation. Des restrictions imposées à la structure de maturité des obligations permettent de définir un compromis raisonnable entre le réalisme de la représentation de l'évolution de la dette obligataire et le poids des valeurs passées des variables que le modèle doit conserver en mémoire.

Dans le modèle proposé, l'État emprunteur rembourse les obligations arrivées à échéance et paie les intérêts sur la dette en cours. Le prix des obligations émises à différents moments avec des échéances différentes sont cohérentes avec un équilibre d'arbitrage. L'offre de nouvelles obligations et actions est déterminé par les besoins d'emprunt de l'État et des entreprises. La demande d'actifs reflète le comportement rationnel des ménages gestionnaires de portefeuille, conformément au modèle Decaluwé-Souissi.

Le modèle est présenté en deux versions, un modèle de base et un modèle qui, bien que dépourvu de monnaie, incorpore un mécanisme d'érosion de la valeur réelle des obligations sous l'effet de l'inflation.

Mots Clés: Modèles d'équilibre général concurrentiel; dynamique séquentielle; dette obligataire; actifs financiers

Classification JEL: C68, D58, G1, H63

Abstract :

In this paper, we present a minimalist version of a model of bond financing and debt, to be imbedded in a stepwise dynamic CGE model. The proposed specification takes into account the following characteristics of bond financing :

- bonds are issued at a given date;
- they have a given face value;
- they bear interest at a rate that is fixed relative to their face value;
- they have a fixed maturity date, at which they are reimbursed by the issuer to the holders.

Bonds compete on the securities market with shares, so that the yield demanded by the buyers of new bond issues increases as the cumulative bond debt grows relative to the stock of outstanding shares.

Restrictions are imposed on the maturity structure of bonds, so that it is possible to attain a

reasonable compromise between a realistic representation of the evolution of the debt, and the demands on model memory of past variables values which impinge on the current period.
In the proposed model, the borrowing government reimburses bonds that have reached maturity, and pays interest on the outstanding debt. The prices of bonds issued at different periods and with different maturities are consistent with an arbitrage equilibrium. The supply of new bonds and of new shares is determined by the government's and entreprises' borrowing needs. Security demand reflects the rational choices of portfolio managing households, as in the Decaluwé-Souissi model.
The model is presented in two versions : a basic model, and a model in which, although there is still no money, the real face value of bonds is eroded as it would due to inflation.

Key words : CGE models; stepwise dynamics; bond debt; financial assets

JEL codes : C68, D58, G1, H63

PLAN

PROLÉGOMÈNES

La dette obligataire...

Cet article traite de la dette obligataire dans un modèle d'équilibre général calculable dynamique séquentiel. L'objectif de la spécification proposée ici est de prendre en compte les caractéristiques suivantes des obligations :

- elles sont émises à une date donnée;
- elles ont une valeur nominale déterminée;
- elles portent intérêt à un taux déterminé par rapport à leur valeur nominale;
- elles ont une date d'échéance, à laquelle elles sont remboursées au détenteur par l'émetteur.

De plus, tout émetteur qui s'endette court le risque, au-delà d'un certain niveau d'endettement, de voir sa cote de crédit abaissée, ce qui l'oblige alors à augmenter le taux d'intérêt sur ses nouvelles émissions. Enfin, dans un contexte où le taux d'inflation à long terme, sans nécessairement être élevé, est néanmoins positif, la valeur réelle d'une émission s'érode au fil des années, de sorte que la valeur remboursée à l'échéance est moindre, en termes réels, que le fruit de l'émission.

dans un MÉGC dynamique séquentiel

Un modèle dynamique séquentiel se distingue d'un modèle intertemporel en ce que, dans ce dernier type de modèle, le comportement optimisant des agents économiques englobe simultanément tout l'horizon temporel, alors qu'en dynamique séquentielle, l'état du système à chaque période dépend uniquement des valeurs passées et courantes des variables, à l'exclusion des valeurs futures.

En principe, la « mémoire » du modèle à un moment donné pourrait s'étendre à chacune des périodes antérieures, à partir de la situation initiale. Mais pour peu qu'une simulation s'étende sur plus de quelques périodes, le nombre de variables deviendrait vite très élevé. En pratique donc, on cherche généralement à condenser la mémoire du passé dans un petit nombre de variables de stock. Par exemple, le stock de capital au début d'une période donnée résume à lui seul toute l'histoire des investissements et de la dépréciation.

S'agissant de la dette hypothécaire, trois phénomènes mettent en jeu la mémoire du modèle. D'abord, le montant des intérêts à payer sur une dette obligataire dépend des valeurs nominales et des taux d'intérêts (en un mot, des coupons) de toutes les émissions passées qui n'ont pas été remboursées. En second lieu, le montant de la dette à rembourser (ou à refinancer) dépend des valeurs nominales et des dates d'échéance de toutes les émissions passées encore en cours. Enfin, le niveau d'endettement de l'émetteur est la résultante de tout ce qui précède.

Dans cet essai, nous proposons une formulation qui permettra de traiter le service de la dette (paiement des intérêts et remboursement de la dette arrivée à échéance) et le niveau d'endettement, tout en maintenant à un niveau acceptable les exigences imposées à la mémoire du modèle.

Ajoutons que nous nous plaçons ici dans le cadre d'un modèle d'équilibre général calculable sans monnaie où, par conséquent, seuls importent les prix relatifs. Nous proposerons néanmoins une spécification qui permet de simuler une certaine érosion des valeurs nominales sous l'effet de l'inflation, sans pour autant exiger l'introduction de la monnaie dans le modèle.

Le cadre minimaliste de la formulation proposée

La formulation proposée ici ne se veut pas immédiatement opérationnelle. On aurait tort de traduire nos équations en code GAMS dans le but de les intégrer à un MÉGC. L'objectif poursuivi est plutôt d'exposer sous une forme minimaliste la forme générale de la spécification proposée.

Mais même une spécification minimaliste requiert la présence d'un actif concurrent aux obligations. Car pour représenter l’augmentation du coût et l’érosion de la capacité d’emprunt qu’entraîne une hausse du niveau d’endettement, il faut que le taux d’intérêt sur les nouveaux emprunts dépende du stock de la dette. Bien sûr, on pourrait représenter cela de manière *ad hoc* en imposant aux emprunts gouvernementaux une prime par rapport à un taux d’intérêt de référence, prime qui varierait en fonction du stock de la dette [1]. Mais nous avons choisi de le faire autrement, d'une manière à notre avis plus satisfaisante, en plaçant les titres de dette obligataire en concurrence avec d’autres actifs : plus grand est le stock de titres de dette en circulation, plus ces titres sont dévalués, c’est-à-dire plus les taux d’intérêts sur de nouveaux emprunts sont élevés. Cette stratégie de modélisation implique, d’abord, qu’il y ait des actifs concurrents et, ensuite, que la demande d'actifs reflète le comportement d'allocation de portefeuille des détenteurs d'actifs. En outre, c'est l'ensemble du portefeuille qui doit être mis en jeu à chaque période, et non pas seulement l'épargne nouvelle. Car si seule l'épargne nouvelle est allouée entre les nouveaux actifs couramment offerts, les prix d'équilibre des nouvelles émissions sont indépendants des stocks de titres déjà en circulation.

Cela dit, nous n'avons pas la prétention de proposer un modèle financier. Car notre modèle est sans monnaie. De plus, il ne fait aucune place à l'intermédiation financière. Et l'éventail des actif y est réduit à sa plus simple expression.

Nous supposons donc une économie à trois agents : les ménages, les entreprises et l'État. L'État émet des obligations pour financer son déficit. Les entreprises émettent des actions pour financer leurs investissements. Les ménages détiennent un portefeuille des deux types d'actifs, actions et obligations. Nous nous abstenons d'expliciter la structure du MÉGC dans lequel s'inscrit le modèle proposé de la dette hypothécaire. Qu'il suffise de dire que les éléments suivants sont déterminés « ailleurs dans le modèle » :

- les dépenses des ménages et leurs revenus, sauf leurs revenus de placements;
- les recettes et dépenses de l'État, sauf pour ce qui est du service de la dette;
- les revenus et dépenses des entreprises.

Structure temporelle

Nous verrons plus loin qu'il est proposé de représenter les marchés d'actifs financiers comme des transactions sur des stocks d'actifs. Il est donc de toute première importance de clarifier à quoi réfèrent les indices de temps attachés à des stocks. Cela est affaire de convention, mais il vaut mieux que la convention soit explicite !

Dans ce modèle, les agents (ménages, entreprises, gouvernement) prennent leurs décisions en début de période sous la forme de stratégies (comme des fonctions de demande ou d'offre), en fonction des valeurs d'équilibre des variables qu'ils tiennent pour données (comme les prix en concurrence parfaite). Les conditions d'équilibre déterminent les valeurs de fin de période.

Les titres émis au cours d'une période donnée commencent à produire un revenu (intérêt, dividende) à la période suivante. Les titres de dette remboursés au cours d'une période donnée

---

1 Étant donné la grande solvabilité de l'État et la liquidité de ses titres de dette, cette prime pourrait être négative à des niveaux d'endettement qui ne seraient pas « malsains ».

portent intérêt durant cette dernière période. Par contre, les titres de dette remboursés sont exclus du stock en circulation qui est offert aux détenteurs de portefeuille à cette période-là.

Structure de l'exposé

Le reste de ce texte est constitué de deux parties. Le modèle de base est présenté dans la première partie. Dans la seconde partie de l'exposé, le modèle est complété par un mécanisme d'érosion de la valeur réelle de la dette au fil du temps, sous l'effet de l'inflation. Les deux parties de l'exposé sont identiquement structurées; on y aborde successivement :

1. le prix des obligations
2. le remboursement de la dette arrivée à échéance
3. la valeur du stock des obligations en circulation
4. l'intérêt à payer sur les obligations
5. l'offre d'actifs
6. l'allocation du portefeuille des ménages et la demande d'actifs
7. l'équilibre

1. MODÈLE DE BASE

1.1 Le prix des obligations

Rappelons que les titres émis au cours d'une période donnée commencent à produire un revenu (intérêt, dividende) à la période suivante. Les titres de dette remboursés au cours d'une période donnée portent intérêt durant cette dernière période. Par contre, les titres de dette remboursés sont exclus du stock en circulation qui est offert aux détenteurs de portefeuille à cette période-là.

Une obligation émise au pair à la période t, arrivant à échéance à la période t+1 et portant intérêt au taux courant i_t^B a un coût d'acquisition en t de 1 et une valeur capitalisée en t+1 de $(1+i_t^B)$. Après le versement des intérêts dûs à la période t, une obligation émise à la période $t-\theta$, arrivant à échéance à la période t+1 et portant intérêt au taux $i_{t-\theta}^B$ a une valeur capitalisée en t+1 de $(1+i_{t-\theta}^B)$. À l'équilibre, le gestionnaire de portefeuille doit être indifférent entre ces deux titres. Leur prix relatif est donc donné par le rapport

$$\frac{1+i_{t-\theta}^B}{1+i_t^B}$$

Par ailleurs, une obligation émise à la période t au pair, arrivant à échéance à la période $t+\tau$ et portant intérêt au taux courant i_t^B a un coût d'acquisition en t de 1 et une valeur capitalisée en $t+\tau$ de $(1+i_t^B)^\tau$. Après le versement des intérêts dûs à la période t, obligation émise à la période $t-\theta$, arrivant à échéance à la période $t+\tau$ et portant intérêt au taux $i_{t-\theta}^B$ a une valeur capitalisée en $t+\tau$ de $(1+i_{t-\theta}^B)^\tau$. À l'équilibre, le gestionnaire de portefeuille doit être indifférent entre ces deux titres. Leur prix relatif au temps t est donc donné par le rapport

$$\frac{\left(1+i_{t-\theta}^B\right)^\tau}{\left(1+i_t^B\right)^\tau}$$

Comparons maintenant deux obligations émises à la période t au pair et portant intérêt au taux courant i_t^B, l'une arrivant à échéance en t+1 et l'autre, en $t+\tau$. Leur prix relatif dépend des anticipations quant aux taux d'intérêt qui prévaudront en t+1 et à chaque année jusqu'en $t+\tau-1$. Dans l'hypothèse d'anticipations stationnaires, le prix relatif de ces deux obligations sera de 1, puisque la valeur capitalisée est la même dans les deux cas : la valeur capitalisée de l'obligation arrivant à échéance en t+1 sera réinvestie de période en période au taux anticipé stationnaire de i_t^B, jusqu'en $t+\tau$.

En général, donc, sous l'hypothèse d'anticipations stationnaires quant aux taux d'intérêt, le prix de toutes les obligations émises à la période courante est le même. Mais le prix relatif des obligations déjà en circulation (à l'exclusion des obligations émises à la période courante) dépend du taux d'intérêt qui leur est attaché (et, donc, de la date d'émission) et du nombre de périodes qui restent à courir jusqu'à leur échéance. Le prix au temps t d'une obligation émise en $t-\theta$, arrivant à échéance à la période $t+\tau$ et portant intérêt au taux $i_{t-\theta}^B$ est donné par

$$PO_t\,(\theta,\theta+\tau)=\frac{\left(1+i_{t-\theta}^B\right)^{\tau}}{\left(1+i_t^B\right)^{\tau}} \qquad [1.1]$$

Comme il se doit, le prix des obligations émises à la période t (θ = 0) est égal à 1. Et le prix des obligations échéant à la période t (τ = 0), qui seront remboursées à leur valeur nominale, est aussi égal à 1.

Dans les développements qui suivent, les prix des obligations émises en t–1 et arrivant à échéance en t+1

$$PO_t\,(1{,}2)=\frac{\left(1+i_{t-1}^B\right)}{\left(1+i_t^B\right)}$$

joueront un rôle important. Nous exploiterons en effet la relation

$$\left(1+i_{t-1}^B\right)=\left(1+i_t^B\right)PO_t\,(1{,}2)$$

qui, par récurrence, conduit à

$$\left(1+i_{t-\theta}^B\right)=\left(1+i_{t-\theta+1}^B\right)PO_{t-\theta+1}(1{,}2)=\left(1+i_{t-\theta+2}^B\right)PO_{t-\theta+2}(1{,}2)PO_{t-\theta+1}(1{,}2)=\cdots$$

$$\left(1+i_{t-\theta}^B\right)=\left(1+i_t^B\right)\prod_{s=1}^{\theta}PO_{t-\theta+s}(1{,}2)$$

Pour alléger la notation, nous convenons que

$$P_t^B = PO_t\,(1,2) = \frac{\left(1+i_{t-1}^B\right)}{\left(1+i_t^B\right)} \qquad [1.2]$$

de sorte que

$$\left(1+i_{t-\theta}^B\right) = \left(1+i_t^B\right)\prod_{s=1}^{\theta} P_{t-\theta+s}^B \qquad [1.3]$$

On a par ailleurs l'équivalence

$$PO_t\,(\theta,\theta+\tau) = \frac{\left(1+i_{t-\theta}^B\right)^\tau}{\left(1+i_t^B\right)^\tau} = \left(\prod_{s=1}^{\theta} P_{t-\theta+s}^B\right)^\tau \qquad [1.4]$$

1.2 Remboursement de la dette arrivée à échéance

Dans le modèle de base, nous supposons que la structure de maturité des émissions de toutes les périodes est la même. Mais la fraction des obligations de chaque période d'émission qui arrive à échéance chaque année n'est pas constante. Cette fraction est définie distinctement pour *M* périodes, *M* étant la durée maximum des obligations.

On suppose donc qu'on connaît la fraction constante f_m des titres de dette émis à chaque période *t* qui sont de maturité $m \leq M$. La cohérence comptable exige évidemment

$$\sum_{m=1}^{M} f_m = 1$$

Soit ΔB_t^τ le stock d'obligations émis à la période *t* et arrivant à échéance à la période $t+\tau$ et ΔB_t, le nombre de nouvelles obligations, toutes échéances confondues, émises à la période *t*. On a donc

$$\Delta B_t^m = f_m \Delta B_t \text{ , pour } m \leq M \qquad [1.5]$$

et, bien sûr,

$$\sum_{m=1}^{M} \Delta B_t^M = \Delta B_t$$

Avec la structure de maturité ainsi définie, on peut calculer le montant à rembourser à la période *t*

$$REMB_t = \sum_{\theta=1}^{M} \Delta B_{t-\theta}^{\theta} = \sum_{m=1}^{M} f_m \Delta B_{t-m} \qquad [1.6]$$

Évidemment, il est quelque peu contraignant de fixer ainsi la durée maximum des obligations et la structure de maturité des émissions. Mais cette restriction est rendue nécessaire par la forme de la fonction de prix [1.1] ou [1.4] : en l'absence d'une échéance maximum, les équations, développées plus loin, du montant d'intérêts à payer et de la valeur des obligations en circulation feraient intervenir des sommations infinies. Malgré des efforts considérables, nous ne sommes pas parvenus à réduire ces sommations infinies à des formes analytiques fermées (comme on peut le faire, par exemple, pour une série géométrique convergente). Or les modèles dynamiques séquentiels s'accommodent mal de régressions infinies dans le passé. C'est pourquoi nous nous sommes résignés à accepter cette formulation particulière de la structure de maturité des obligations.

1.3 Calcul de la valeur du stock d'obligations en circulation

La valeur du stock d'obligations en circulation n'est pas la même chose que la dette nominale. La dette nominale est la somme des valeurs nominales des obligations émises dans le passé et non encore remboursées. La valeur du stock d'obligations, par contre, est mesurée sans référence à la valeur nominale des obligations émises dans le passé : c'est la valeur marchande courante de la totalité des obligations en circulation, y compris des nouvelles obligations émises à la période courante, après remboursement des obligations arrivées à échéance. C'est, en somme, la valeur totale du portefeuille d'obligations.

La valeur du stock d'obligations comprend deux composantes : la valeur des nouvelles obligations et celle des obligations déjà en circulation à la période précédente qui n'arrivent pas à échéance à la période courante. Les nouvelles obligations sont émises à un prix fixe, égal à 1; c'est le taux d'intérêt courant qui s'ajuste de manière à équilibrer l'offre et la demande. Comme nous l'avons déjà exposé, le prix des obligations mises en circulation avant la période courante s'ajuste en fonction du taux d'intérêt courant de façon à ce que les détenteurs soient indifférents entre les nouvelles obligations et celles qui étaient déjà en circulation.

Après remboursement des obligations qui arrivent à échéance, la valeur du stock d'obligations en circulation à la période *t* est donnée par

$$B_t = \Delta B_t + \sum_{\theta=1}^{M-1} \sum_{\tau=1}^{M-\theta} PO_t\left(\theta, \theta+\tau\right) \Delta B_{t-\theta}^{\theta+\tau} \qquad [1.7]$$

où le prix au temps t d'une obligation émise en $t{-}\theta$, arrivant à échéance à la période $t{+}\tau$ et portant intérêt au taux $i^B_{t-\theta}$ a déjà été défini comme

$$PO_t\left(\theta,\theta+\tau\right)=\frac{\left(1+i^B_{t-\theta}\right)^\tau}{\left(1+i^B_t\right)^\tau}=\left(\prod_{s=1}^{\theta}P^B_{t-\theta+s}\right)^\tau \qquad [1.4]$$

et où

$$\Delta B^m_t=f_m\Delta B_t\text{ , pour } m\leq M \qquad [1.5]$$

On a donc

$$B_t=\Delta B_t+\sum_{\theta=1}^{M-1}\sum_{\tau=1}^{M-\theta}\left(\prod_{s=1}^{\theta}P^B_{t-\theta+s}\right)^\tau f_{\theta+\tau}\Delta B_{t-\theta} \qquad [1.8]$$

À cause du τ qui apparaît comme exposant, il semble impossible d'exprimer B_t en fonction des prix courants et de B_{t-1}. C'est pourquoi il faut se résigner à une structure de maturité finie, faute de quoi la mémoire du modèle sera débordée.

1.4 L'intérêt à payer sur les obligations

Dans le modèle de base, l'intérêt que devra payer l'émetteur sur les obligations en circulation (y compris sur les obligations qui sont à rembourser à la période courante) est la somme des intérêts à payer sur le résidu non remboursé des émissions de toutes les périodes antérieures.

Il est démontré à l'annexe 1 que le montant de l'intérêt à payer sur les obligations est donné par :

$$\begin{aligned}INT_t&=\sum_{\theta=1}^{M}i^B_{t-\theta}\left(1-\sum_{m=0}^{\theta-1}f_m\right)\Delta B_{t-\theta}\\&=\sum_{\theta=1}^{M}\left[\left(1+i^B_t\right)\left(\prod_{s=0}^{\theta-1}P^B_{t-s}\right)\left(1-\sum_{m=0}^{\theta-1}f_m\right)\Delta B_{t-\theta}-\left(1-\sum_{m=0}^{\theta-1}f_m\right)\Delta B_{t-\theta}\right]\end{aligned}\text{ , avec } f_0=0 \qquad [1.9]$$

On définit la dette nominale au début de la période t, DN_t (avant remboursement de la dette arrivant à échéance à la période t et avant l'émission de nouveaux titres à la période t) :

$$DN_t=\sum_{\theta=1}^{M}\left(1-\sum_{m=0}^{\theta-1}f_m\right)\Delta B_{t-\theta}\text{ , avec } f_0=0 \qquad [1.10]$$

et on peut récrire le montant de l'intérêt à payer sur les obligations :

$$INT_t = \sum_{\theta=1}^{M} i_{t-\theta}^{B} \left(1 - \sum_{m=0}^{\theta-1} f_m \right) \Delta B_{t-\theta} = \sum_{\theta=1}^{M} \left[\left(1 + i_t^B\right) \left(\prod_{s=0}^{\theta-1} P_{t-s}^{B} \right) \left(1 - \sum_{m=0}^{\theta-1} f_m \right) \Delta B_{t-\theta} \right] - DN_t \qquad [1.11]$$

1.5 Offre d'actifs

Les prix relatifs des obligations émises à différentes périodes et ayant des échéances différentes ont été définis de façon à ce que le gestionnaire de portefeuille soit indifférent entre elles (sous l'hypothèse d'anticipations stationnaires quant aux taux d'intérêt et en l'absence de risque). Il s'ensuit que l'offre d'obligations peut être représentée comme un agrégat dont la mesure est donnée par la valeur totale des obligations sur le marché. Cette valeur est la somme de l'offre de nouvelles obligations (au pair) et de la valeur des obligations émises antérieurement qui sont encore en circulation. L'offre d'obligations est donc :

$$B_t = \Delta B_t + \sum_{\theta=1}^{M-1} \sum_{\tau=1}^{M-\theta} PO_t \left(\theta, \theta+\tau\right) \Delta B_{t-\theta}^{\theta+\tau} \qquad [1.7]$$

ou encore

$$B_t = \Delta B_t + \sum_{\theta=1}^{M-1} \sum_{\tau=1}^{M-\theta} \left(\prod_{s=1}^{\theta} P_{t-\theta+s}^{B} \right)^{\tau} f_{\theta+\tau} \Delta B_{t-\theta} \qquad [1.8]$$

L'offre de nouvelles obligations est déterminée par les besoins de financement du gouvernement. Les besoins nets sont donnés par la différence entre, d'une part, la somme de la valeur des investissements publics et du montant du remboursement de la dette arrivée à échéance et, d'autre part, l'épargne courante [2] :

$$\Delta B_t = P_t^K I_t^G + REMB_t - S_t^G \qquad [1.12]$$

où

I_t^G est l'investissement du gouvernement, en volume, à la période *t*

P_t^K est le prix des biens d'investissement à la période *t*

S_t^G est l'épargne du gouvernement à la période *t*

Ces trois variables sont considérées ici comme exogènes (déterminées ailleurs dans le MÉGC). Les nouvelles obligations sont souscrites à leur valeur nominale. Il n'est pas exclu *a priori* que l'offre de nouvelles obligations soit négative.

Au contraire des obligations, les actions n'ont ni valeur nominale, ni date d'échéance. Le volume des nouvelles émissions ΔA_t doit permettre de lever le financement requis, compte tenu du prix courant des actions P_t^A. Le financement requis est la différence entre la valeur des investissements des entreprises et leur épargne :

$$P_t^A \Delta A_t = P_t^K I_t^E - S_t^E$$

$$\Delta A_t = \frac{P_t^K I_t^E - S_t^E}{P_t^A} \qquad [1.13]$$

où

I_t^E est l'investissement des entreprises à la période t

S_t^E est l'épargne des entreprises à la période t

Ces deux variables sont considérées ici comme exogènes (déterminées ailleurs dans le MÉGC). Il n'est pas exclu *a priori* que l'offre de nouvelles actions soit négative.

Le stock d'actions évolue simplement de la façon suivante.

$$A_t = A_{t-1} + \Delta A_t \qquad [1.14]$$

où

A_t est le stock d'actions en circulation à la fin de la période t

1.6 Allocation du portefeuille des ménages et demande d'actifs

Les ménages détiennent un portefeuille composé d'obligations et d'actions. À chaque période, ils réallouent la totalité de leur portefeuille. Ce que nous appelons ici la richesse des ménages est en fait la valeur du portefeuille qu'ils ont à allouer au début de la période. La valeur de ce portefeuille est égale à la valeur des actions et des obligations non échues qu'ils possèdent en début de période, plus le montant reçu en remboursement de la dette arrivée à échéance, à quoi s'ajoute l'épargne courante. La valeur des obligations non échues que possèdent les ménages en début de période est égale à :

$$B_t - \Delta B_t = \sum_{\theta=1}^{M} \sum_{\tau=1}^{M-\theta} \left(\prod_{s=1}^{\theta} P_{t-\theta+s}^B \right)^{\tau} f_{\theta+\tau} \Delta B_{t-\theta}$$

---

2 Bien entendu, l'épargne est calculée en tenant compte du paiement des intérêts sur la dette !

La valeur du portefeuille à allouer à la période t est donc :

$$W_t = P_t^A A_{t-1} + \sum_{\theta=1}^{M} \sum_{\tau=1}^{M-\theta} \left(\prod_{s=1}^{\theta} P_{t-\theta+s}^B \right)^{\tau} \Delta B_{t-\theta}^{\theta+\tau} + REMB_t + S_t^M$$

$$W_t = P_t^A A_{t-1} + \left(B_t - \Delta B_t\right) + REMB_t + S_t^M \qquad [1.15]$$

où

S_t^M est l'épargne des ménages à la période t, considérée ici comme exogène (déterminée ailleurs dans le MÉGC)

et

$$REMB_t = \sum_{\theta=1}^{M} \Delta B_{t-\theta}^{\theta} = \sum_{m=1}^{M} f_m \Delta B_{t-m} \qquad [1.6]$$

L'allocation du portefeuille des ménages suit le modèle de Decaluwé et Souissi (1994; Souissi, 1994; Souissi et Decaluwé, 1997). Selon ce modèle, le gestionnaire de portefeuille maximise la valeur capitalisée de son avoir du début de la période suivante :

$$\underset{A_t, B_t}{MAX}\ VC = \left(1 + i_t^A\right) P_t^A A_t + \left(1 + i_t^B\right) B_t \qquad [1.16]$$

sous contrainte de la valeur totale de son portefeuille

$P_t^A A_t + B_t = W_t$, où W_t est donnée par [1.15] [1.17]

et de la fonction d'agrégation des actifs

$$W_t = A_W \left[\delta_A A_t^{\beta} + \delta_B B_t^{\beta} \right]^{\frac{1}{\beta}} \qquad [1.18]$$

avec l'élasticité de transformation

$$\tau = \frac{1}{1-\beta} \ (\beta > 1)$$

Il sied de dire quelques mots à propos de la fonction d'agrégation [1.18]. Remarquons d'abord qu'en l'absence de cette contrainte, la totalité du portefeuille serait allouée à l'actif dont le coefficient est le plus grand dans la fonction d'utilité [1.16]. La fonction d'agrégation [1.18], concave à l'origine, impose la diversification (sauf, éventuellement, pour les solutions de coin).

Mais la cohérence comptable du modèle exige que soit simultanément respectée la contrainte [1.17] de richesse des ménages. Il est démontré à l'annexe 2 que cela implique

$$A_W = \left\{ \delta_A{}^{\tau} P_t^A \left[P_t^A \left(1 + i_t^A \right) \right]^{-\tau} + \delta_B{}^{\tau} \left(1 + i_t^B \right)^{-\tau} \right\} \left\{ \delta_A{}^{\tau} \left[P_t^A \left(1 + i_t^A \right) \right]^{1-\tau} + \delta_B{}^{\tau} \left(1 + i_t^B \right)^{1-\tau} \right\}^{\frac{\tau}{1-\tau}} \qquad [1.19]$$

Il s'ensuit les fonctions de demande

$$A_t = W_t \frac{\delta_A{}^{\tau} \left[P_t^A \left(1 + i_t^A \right) \right]^{-\tau}}{\left\{ \delta_A{}^{\tau} P_t^A \left[P_t^A \left(1 + i_t^A \right) \right]^{-\tau} + \delta_B{}^{\tau} \left(1 + i_t^B \right)^{-\tau} \right\}} \qquad [1.20]$$

et

$$B_t = W_t \frac{\delta_B{}^{\tau} \left(1 + i_t^B \right)^{-\tau}}{\left\{ \delta_A{}^{\tau} P_t^A \left[P_t^A \left(1 + i_t^A \right) \right]^{-\tau} + \delta_B{}^{\tau} \left(1 + i_t^B \right)^{-\tau} \right\}} \qquad [1.21]$$

A_W n’a pas à figurer dans le modèle.

1.7 Équilibre

Le taux d’intérêt s’ajuste de façon à équilibrer le marché des obligations.

Le taux de rendement sur les actions est égal au taux de rendement sur le capital, comme dans Rosensweig et Taylor (1990) :

$$i_t^A = \bar{r}_t \qquad [1.22]$$

où $\bar{r}_t$ est considéré ici comme exogène (déterminées ailleurs dans le MÉGC)

Le prix des actions s’ajuste de façon à équilibrer le marché.

2. MODÈLE AVEC ÉROSION DE LA VALEUR RÉELLE DES OBLIGATIONS

Notre modèle est sans monnaie, et donc, sans inflation. Et pourtant... Tel que formulé ci-haut, le remboursement de la dette arrivée à échéance se fait à valeur réelle constante. Or, en réalité, les dettes sont remboursées à leur valeur nominale. Comment représenter une valeur nominale dans un modèle où il n'y en a pas ? Pour représenter ce phénomène, sans pour autant devoir introduire la monnaie dans le modèle, il est proposé que les montants réels des émissions ΔB_t soient soumis à une érosion similaire à la dépréciation du capital.

2.1 Le prix des obligations

Une obligation émise au pair à la période t, arrivant à échéance à la période t+1 et portant intérêt au taux courant [3] i_t^B a un coût d'acquisition en t de 1 et une valeur capitalisée en t+1 de $\left(1-\delta_{nom}\right)\left(1+i_t^B\right)$, où δ_{nom} est le taux d'érosion des valeurs nominales dû à l'inflation. Par contre, la valeur nominale d'une obligation émise ou pair à la période $t-\theta$ n'est plus que de $\left(1-\delta_{nom}\right)^{\theta}$ au début de la période t. Si cette obligation arrive à échéance à la période t+1 et porte intérêt au taux $i_{t-\theta}^B$, une fois empochés les intérêts de la période t, sa valeur capitalisée en t+1 sera de $\left(1-\delta_{nom}\right)^{\theta+1}\left(1+i_{t-\theta}^B\right)$. À l'équilibre, le gestionnaire de portefeuille doit être indifférent entre ces deux titres. Leur prix relatif est donc donné par le rapport

$$\frac{\left(1-\delta_{nom}\right)^{\theta+1}\left(1+i_{t-\theta}^B\right)}{\left(1-\delta_{nom}\right)\left(1+i_t^B\right)}=\left(1-\delta_{nom}\right)^{\theta}\ \frac{1+i_{t-\theta}^B}{1+i_t^B}$$

Par ailleurs, une obligation émise à la période t au pair, arrivant à échéance à la période $t+\tau$ et portant intérêt au taux courant i_t^B a un coût d'acquisition en t de 1 et une valeur capitalisée en $t+\tau$ de $\left(1-\delta_{nom}\right)^{\tau}\left(1+i_t^B\right)^{\tau}$. Après le versement des intérêts dûs à la période t, obligation émise à la période $t-\theta$, arrivant à échéance à la période $t+\tau$ et portant intérêt au taux $i_{t-\theta}^B$ a une valeur

---

[3] Il s'agit ici d'un taux d'intérêt nominal.

capitalisée en $t+\tau$ de $\left(1-\delta_{nom}\right)^{\theta+\tau}\left(1+i_{t-\theta}^{B}\right)^{\tau}$. À l'équilibre, le gestionnaire de portefeuille doit être indifférent entre ces deux titres. Leur prix relatif au temps t est donc donné par le rapport

$$\frac{\left(1-\delta_{nom}\right)^{\theta+\tau}\left(1+i_{t-\theta}^{B}\right)^{\tau}}{\left(1-\delta_{nom}\right)^{\tau}\left(1+i_{t}^{B}\right)^{\tau}}=\left(1-\delta_{nom}\right)^{\theta}\frac{\left(1+i_{t-\theta}^{B}\right)^{\tau}}{\left(1+i_{t}^{B}\right)^{\tau}}$$

Par ailleurs, comme dans le modèle de base, deux obligations émises à la période t au pair et portant intérêt au taux courant i_{t}^{B}, l'une arrivant à échéance en t+1 et l'autre, en $t+\tau$ auront le même prix dans l'hypothèse d'anticipations stationnaires, puisque la valeur capitalisée est la même dans les deux cas.

En général, le prix au temps t d'une obligation émise en $t-\theta$, arrivant à échéance à la période $t+\tau$ et portant intérêt au taux $i_{t-\theta}^{B}$ est maintenant donné par

$$PO_{t}\left(\theta,\theta+\tau\right)=\left(1-\delta_{nom}\right)^{\theta}\frac{\left(1+i_{t-\theta}^{B}\right)^{\tau}}{\left(1+i_{t}^{B}\right)^{\tau}} \qquad [2.1]$$

Dans les développements qui suivent, les prix des obligations émises en t–1 et arrivant à échéance en t+1

$$PO_{t}\left(1{,}2\right)=\left(1-\delta_{nom}\right)\frac{\left(1+i_{t-1}^{B}\right)}{\left(1+i_{t}^{B}\right)}$$

joueront un rôle important. Nous exploiterons en effet la relation

$$\left(1+i_{t-1}^{B}\right)=\frac{1}{\left(1-\delta_{nom}\right)}\left(1+i_{t}^{B}\right)PO_{t}\left(1{,}2\right)$$

qui, par récurrence, conduit à

$$\begin{aligned}\left(1+i_{t-\theta}^{B}\right)&=\frac{1}{\left(1-\delta_{nom}\right)}\left(1+i_{t-\theta+1}^{B}\right)PO_{t-\theta+1}\left(1{,}2\right)\\&=\frac{1}{\left(1-\delta_{nom}\right)^{2}}\left(1+i_{t-\theta+2}^{B}\right)PO_{t-\theta+2}\left(1{,}2\right)PO_{t-\theta+1}\left(1{,}2\right)=\cdots\end{aligned}$$

$$\left(1+i_{t-\theta}^{B}\right)=\frac{1}{\left(1-\delta_{nom}\right)^{\theta}}\left(1+i_{t}^{B}\right)\prod_{s=1}^{\theta}PO_{t-\theta+s}\left(1{,}2\right)$$

Pour alléger la notation, nous convenons que

$$P_t^B = PO_t\,(1{,}2) = \left(1-\delta_{nom}\right)\frac{\left(1+i_{t-1}^B\right)}{\left(1+i_t^B\right)} \qquad [2.2]$$

de sorte que

$$\left(1+i_{t-\theta}^B\right) = \frac{1}{\left(1-\delta_{nom}\right)^{\theta}}\left(1+i_t^B\right)\prod_{s=1}^{\theta} P_{t-\theta+s}^B \qquad [2.3]$$

On a par ailleurs l'équivalence

$$PO_t\,(\theta,\theta+\tau) = \left(1-\delta_{nom}\right)^{\theta}\frac{\left(1+i_{t-\theta}^B\right)^{\tau}}{\left(1+i_t^B\right)^{\tau}} = \left(\frac{1}{\left(1-\delta_{nom}\right)^{\theta}}\right)^{\tau-1}\left(\prod_{s=1}^{\theta} P_{t-\theta+s}^B\right)^{\tau} \qquad [2.4]$$

2.2 Remboursement de la dette arrivée à échéance

Comme dans le modèle de base, nous supposons que la structure de maturité des émissions de toutes les périodes est la même, définie par la fraction constante f_m des titres de dette émis à chaque période *t* qui sont de maturité $m \leq M$. La cohérence comptable exige évidemment

$$\sum_{m=1}^{M} f_m = 1$$

Soit ΔB_t^{τ} le stock d'obligations émis à la période *t* et arrivant à échéance à la période $t+\tau$ et ΔB_t, le nombre de nouvelles obligations, toutes échéances confondues, émises à la période *t*. On a donc

$$\Delta B_t^m = f_m \Delta B_t \text{, pour } m \leq M \qquad [2.5]$$

et, bien sûr,

$$\sum_{m=1}^{M} \Delta B_t^M = \Delta B_t$$

Avec l'érosion de la valeur réelle de la dette, le montant à rembourser à la période *t* devient

$$REMB_t = \sum_{\theta=1}^{M}\left(1-\delta_{nom}\right)^{\theta}\Delta B_{t-\theta}^{\theta} = \sum_{m=1}^{M} f_m\,(1-\delta)^m\,\Delta B_{t-m} \qquad [2.6]$$

2.3 Calcul de la valeur du stock d'obligations en circulation

La valeur du stock d'obligations en circulation n'est pas la même chose que la dette nominale. La dette nominale est la somme des valeurs nominales des obligations émises dans le passé et non encore remboursées. La valeur du stock d'obligations, par contre, est mesurée sans référence à la valeur nominale des obligations émises dans le passé : c'est la valeur courante de la totalité des obligations en circulation, y compris des nouvelles obligations émises à la période courante, après remboursement des obligations arrivées à échéance.

La valeur du stock d'obligations comprend deux composantes : la valeur des nouvelles obligations et celle des obligations déjà en circulation à la période précédente qui n'arrivent pas à échéance à la période courante. Les nouvelles obligations sont émises à un prix fixe, égal à 1; c'est le taux d'intérêt courant qui s'ajuste de manière à équilibrer l'offre et la demande. Comme nous l'avons déjà exposé, le prix des obligations mises en circulation avant la période courante s'ajuste en fonction du taux d'intérêt courant de façon à ce que les détenteurs soient indifférents entre les nouvelles obligations et celles qui étaient déjà en circulation.

Après remboursement des obligations qui arrivent à échéance, la valeur du stock d'obligations en circulation à la période *t* est donnée, comme dans le modèle de base, par

$$B_t = \Delta B_t + \sum_{\theta=1}^{M} \sum_{\tau=1}^{M-\theta} PO_t\,(\theta,\theta+\tau)\Delta B_{t-\theta}^{\theta+\tau} \qquad [2.7]$$

où le prix au temps t d'une obligation émise en $t-\theta$, arrivant à échéance à la période $t+\tau$ et portant intérêt au taux $i_{t-\theta}^{B}$ est donné par

$$PO_t\,(\theta,\theta+\tau) = (1-\delta_{nom})^{\theta}\,\frac{\left(1+i_{t-\theta}^{B}\right)^{\tau}}{\left(1+i_{t}^{B}\right)^{\tau}} = \left(\frac{1}{(1-\delta_{nom})^{\theta}}\right)^{\tau-1}\left(\prod_{s=1}^{\theta} P_{t-\theta+s}^{B}\right)^{\tau} \qquad [2.4]$$

et où

$$\Delta B_t^{m} = f_m \Delta B_t \text{ , pour } m \leq M \qquad [2.5]$$

On a donc

$$B_t = \Delta B_t + \sum_{\theta=1}^{M} \sum_{\tau=1}^{M-\theta} \left(\frac{1}{(1-\delta_{nom})^{\theta}}\right)^{\tau-1}\left(\prod_{s=1}^{\theta} P_{t-\theta+s}^{B}\right)^{\tau} f_{\theta+\tau}\Delta B_{t-\theta} \qquad [2.8]$$

2.4 L'intérêt à payer sur les obligations

L'intérêt que devra payer l'émetteur sur les obligations en circulation (y compris sur les obligations qui sont à rembourser à la période courante) est la somme des intérêts à payer sur le résidu non remboursé des émissions de toutes les périodes antérieures. Il est démontré à l'annexe 3 que le montant de l'intérêt à payer sur les obligations est donné par :

$$INT_t = \sum_{\theta=1}^{M} i^B_{t-\theta}\left(1-\sum_{m=1}^{\theta-1} f_m\right)(1-\delta_{nom})^{\theta}\,\Delta B_{t-\theta} = \sum_{\theta=1}^{M}\left[\begin{array}{l}\left(1+i^B_t\right)\left(\prod_{s=0}^{\theta-1} P^B_{t-s}\right)\left(1-\sum_{m=1}^{\theta-1} f_m\right)\Delta B_{t-\theta}\\ -\left(1-\delta_{nom}\right)^{\theta}\left(1-\sum_{m=1}^{\theta-1} f_m\right)\Delta B_{t-\theta}\end{array}\right] \qquad [2.9]$$

On définit la valeur réelle de la dette nominale au début de la période t, DN_t (avant remboursement de la dette arrivant à échéance à la période t et avant l'émission de nouveaux titres à la période t) :

$$DN_t = \sum_{\theta=1}^{M}\left(1-\sum_{m=1}^{\theta-1} f_m\right)(1-\delta_{nom})^{\theta}\,\Delta B_{t-\theta} \qquad [2.10]$$

et on peut récrire le montant de l'intérêt à payer sur les obligations :

$$INT_t = \sum_{\theta=1}^{M} i^B_{t-\theta}\left(1-\sum_{m=1}^{\theta-1} f_m\right)(1-\delta_{nom})^{\theta}\,\Delta B_{t-\theta} = \sum_{\theta=1}^{M}\left[\left(1+i^B_t\right)\left(\prod_{s=0}^{\theta-1} P^B_{t-s}\right)\left(1-\sum_{m=1}^{\theta-1} f_m\right)\Delta B_{t-\theta}\right] - DN_t \quad [2.11]$$

2.5 Offre d'actifs

Les prix relatifs des obligations émises à différentes périodes et ayant des échéances différentes ont été définis de façon à ce que le gestionnaire de portefeuille soit indifférent entre elles (sous l'hypothèse d'anticipations stationnaires quant aux taux d'intérêt et en l'absence de risque). Il s'ensuit que l'offre d'obligations peut être représentée comme un agrégat dont la mesure est donnée par la valeur totale des obligations sur le marché :

$$B_t = \Delta B_t + \sum_{\theta=1}^{M}\sum_{\tau=1}^{M-\theta} PO_t\left(\theta,\theta+\tau\right)\Delta B^{\theta+\tau}_{t-\theta} \qquad [2.7]$$

ou encore

$$B_t = \Delta B_t + \sum_{\theta=1}^{M}\sum_{\tau=1}^{M-\theta}\left(\frac{1}{(1-\delta_{nom})^{\theta}}\right)^{\tau-1}\left(\prod_{s=1}^{\theta} P^B_{t-\theta+s}\right)^{\tau} f_{\theta+\tau}\Delta B_{t-\theta} \qquad [2.8]$$

L'offre de nouvelles obligations est déterminée par les besoins de financement du gouvernement. Les besoins nets sont donnés par la différence entre, d'une part, la somme de la valeur des investissements publics et du montant du remboursement de la dette arrivée à échéance et, d'autre part, l'épargne courante [4] :

$$\Delta B_t = P_t^K I_t^G + REMB_t - S_t^G \qquad [2.12]$$

où

I_t^G est l'investissement du gouvernement, en volume, à la période t

P_t^K est le prix des biens d'investissement à la période t

S_t^G est l'épargne du gouvernement à la période t

Ces trois variables sont considérées ici comme exogènes (déterminées ailleurs dans le MÉGC). Les nouvelles obligations sont souscrites à leur valeur nominale. Il n'est pas exclu *a priori* que l'offre de nouvelles obligations soit négative.

Au contraire des obligations, les actions n'ont ni valeur nominale, ni date d'échéance. Le volume des nouvelles émissions ΔA_t doit permettre de lever le financement requis, compte tenu du prix courant des actions P_t^A. Le financement requis est la différence entre la valeur des investissements des entreprises et leur épargne :

$$P_t^A \Delta A_t = P_t^K I_t^E - S_t^E$$

$$\Delta A_t = \frac{P_t^K I_t^E - S_t^E}{P_t^A} \qquad [2.13]$$

où

I_t^E est l'investissement des entreprises à la période t

S_t^E est l'épargne des entreprises à la période t

Ces deux variables sont considérées ici comme exogènes (déterminées ailleurs dans le MÉGC). Il n'est pas exclu *a priori* que l'offre de nouvelles actions soit négative.

Le stock d'actions évolue simplement de la façon suivante.

---

4 Bien entendu, l'épargne est calculée en tenant compte du paiement des intérêts sur la dette !

$$A_t = A_{t-1} + \Delta A_t \qquad [2.14]$$

où

A_t est le stock d'actions en circulation à la fin de la période t

2.6 Allocation du portefeuille des ménages et demande d'actifs

Les ménages détiennent un portefeuille composé d'obligations et d'actions. À chaque période, ils réallouent la totalité de leur portefeuille. La valeur à allouer est :

$$W_t = P_t^A A_{t-1} + \left(B_t - \Delta B_t\right) + REMB_t + S_t^M \qquad [2.15]$$

où

S_t^M est l'épargne des ménages à la période t, considérée ici comme exogène (déterminée ailleurs dans le MÉGC)

et

$$REMB_t = \sum_{\theta=1}^{M} \left(1 - \delta_{nom}\right)^{\theta} \Delta B_{t-\theta}^{\theta} = \sum_{m=1}^{M} f_m \left(1 - \delta\right)^m \Delta B_{t-m} \qquad [2.6]$$

L'allocation du portefeuille des ménages suit le modèle de Decaluwé et Souissi (1994; Souissi, 1994; Souissi et Decaluwé, 1997) : le gestionnaire maximise la valeur capitalisée de son avoir du début de la période suivante :

$$\underset{A_t, B_t}{MAX}\ VC = \left(1 + i_t^A\right) P_t^A A_t + \left(1 - \delta_{nom}\right)\left(1 + i_t^B\right) B_t \qquad [2.16]$$

sous contrainte de la valeur totale de son portefeuille

$P_t^A A_t + B_t = W_t$, où W_t est donnée par [1.15] [2.17]

et de la fonction d'agrégation des actifs

$$W_t = A_W \left[\delta_A A_t^{\beta} + \delta_B B_t^{\beta}\right]^{\frac{1}{\beta}} \qquad [2.18]$$

avec l'élasticité de transformation

$$\tau = \frac{1}{1 - \beta}$$

Comme dans le modèle de base, la contrainte comptable de richesse des ménages exige

$$A_W = \left\{ \delta_A{}^{\tau} P_t^A \left[P_t^A \left(1 + i_t^A \right) \right]^{-\tau} + \delta_B{}^{\tau} \left(1 + i_t^B \right)^{-\tau} \right\} \left\{ \delta_A{}^{\tau} \left[P_t^A \left(1 + i_t^A \right) \right]^{1-\tau} + \delta_B{}^{\tau} \left(1 + i_t^B \right)^{1-\tau} \right\}^{\frac{\tau}{1-\tau}} \qquad [2.19]$$

Cela conduit aux fonctions de demande

$$A_t = W_t \frac{\delta_A{}^{\tau} \left[P_t^A \left(1 + i_t^A \right) \right]^{-\tau}}{\left\{ \delta_A{}^{\tau} P_t^A \left[P_t^A \left(1 + i_t^A \right) \right]^{-\tau} + \delta_B{}^{\tau} \left(1 + i_t^B \right)^{-\tau} \right\}} \qquad [2.20]$$

et

$$B_t = W_t \frac{\delta_B{}^{\tau} \left(1 + i_t^B \right)^{-\tau}}{\left\{ \delta_A{}^{\tau} P_t^A \left[P_t^A \left(1 + i_t^A \right) \right]^{-\tau} + \delta_B{}^{\tau} \left(1 + i_t^B \right)^{-\tau} \right\}} \qquad [2.21]$$

A_W n'a pas à figurer dans le modèle.

2.7 Équilibre

Le taux d'intérêt s'ajuste de façon à équilibrer le marché des obligations.

Le taux de rendement sur les actions est égal au taux de rendement sur le capital, comme dans Rosensweig et Taylor (1990) :

$$i_t^A = \bar{r}_t \qquad [2.22]$$

où $\bar{r}_t$ est considéré ici comme exogène (déterminées ailleurs dans le MÉGC)

Le prix des actions s'ajuste de façon à équilibrer le marché.

RÉSUMÉ ET CONCLUSION

Dans ce texte, nous avons présenté une version minimaliste d'un modèle de la dette obligataire qui s'inscrit dans un modèle d'équilibre général calculable dynamique séquentiel. La spécification proposée tient compte des caractéristiques suivantes des obligations :

- elles sont émises à une date donnée;
- elles ont une valeur nominale déterminée;
- elles portent intérêt à un taux déterminé par rapport à leur valeur nominale;
- elles ont une date d'échéance, à laquelle elles sont remboursées au détenteur par l'émetteur.

Les obligations sont en concurrence avec une autre catégorie d'actifs, les actions, de sorte que le rendement exigé par les acheteurs de nouvelles obligations augmente à mesure qu'augmente la dette obligataire par rapport au stock d'actions en circulation.

Des restrictions imposées à la structure de maturité des obligations permettent de définir un compromis raisonnable entre le réalisme de la représentation de l'évolution de la dette obligataire et le poids des valeurs passées des variables que le modèle doit conserver en mémoire.

Dans le modèle proposé, l'État emprunteur rembourse les obligations arrivées à échéance et paie les intérêts sur la dette en cours. Le prix des obligations émises à différents moments avec des échéances différentes sont cohérentes avec un équilibre d'arbitrage. L'offre de nouvelles obligations et actions est déterminé par les besoins d'emprunt de l'État et des entreprises. La demande d'actifs reflète le comportement rationnel des ménages gestionnaires de portefeuille, conformément au modèle Decaluwé-Souissi.

Le modèle est présenté en deux versions, un modèle de base et un modèle qui, bien que dépourvu de monnaie, incorpore un mécanisme d'érosion de la valeur réelle des obligations sous l'effet de l'inflation.

RÉFÉRENCES

Collange, Gérard (1993) *Un modèle de l'économie ivoirienne. Vol. 1: Synthèse et présentation économique*, CERDI.

Decaluwé, Bernard et Yvan Decreux (2004) Rapport de mission d'appui au Ministère des Finances, Rabat, Maroc : développement du modèle M3S.

Decaluwé, Bernard, André Martens, et Luc Savard (2001) *La politique économique du développement et les modèles d'équilibre général calculable*, Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal.

Decaluwé, Bernard, Marie-Claude Martin, et Mokhtar Souissi (1993) *École PARADI de modélisation de politiques économiques de développement. Vol. 3 – Les modèles calculables d'équilibre général : les aspects financiers*, Université Laval, Québec.

Decaluwé, Bernard, et Mokhtar Souissi (1994) *Libéralisation financière en Tunisie : une étude rétrospective et prospective*, CRÉFA, Université Laval.

Fargeix, A., et E. Sadoulet (1994) « A Financial Computable General Equilibrium Model for the Analysis of Stabilisation Programs », chapitre 4 dans Jean Mercenier et T. N. Srinivasan (1994) *Applied general equilibrium and economic development: present achievements and future trends*, University of Michigan Press.

Rosensweig, Jeffrey A., and Lance Taylor (1990) « Devaluation, capital flows and crowding-out : A CGE model with portfolio choice for Thailand », Chap. 11 dans Taylor, Lance (1990) *Socially relevant policy analysis : structuralist computable general equilibrium models for the developing world*, MIT Press, Cambridge, Mass.

Souissi, Mokhtar (1994) *Libéralisation financière, structure du capital et investissement: un MCEG avec actifs financiers appliqué à la Tunisie*, thèse de doctorat, Université Laval, Québec.

Souissi, Mokhtar et Bernard Decaluwé (1997), « Financial deregulation in Tunisia : A prospective end retrospective analysis », CRÉFA, Université Laval, mai.

Thissen, Mark (1999) « Financial CGE models : Two decades of research », SOM research memorandum 99C02, SOM (Systems, Organizations and Management), Reijksuniversiteit Groningen, Groningen, juin.

ANNEXE 1 : L'INTÉRÊT À PAYER SUR LES OBLIGATIONS DANS LE MODÈLE DE BASE

L'intérêt que devra payer l'émetteur sur les obligations émises à la période t–1 est égal à

$$i_{t-1}^{B}\Delta B_{t-1} = \left[\left(1+i_{t-1}^{B}\right)-1\right]\Delta B_{t-1} = \left[\left(1+i_{t}^{B}\right)\frac{\left(1+i_{t-1}^{B}\right)}{\left(1+i_{t}^{B}\right)}-1\right]\Delta B_{t-1} = \left[\left(1+i_{t}^{B}\right)P_{t}^{B}-1\right]\Delta B_{t-1}$$

L'intérêt qu'il devra payer sur les obligations émises à la période t–2 est égal à

$$\begin{aligned}
i_{t-2}^{B}\left(1-f_{1}\right)\Delta B_{t-2} &= \left[\left(1+i_{t-2}^{B}\right)-1\right]\left(1-f_{1}\right)\Delta B_{t-2} \\
&= \left[\left(1+i_{t-1}^{B}\right)\frac{\left(1+i_{t-2}^{B}\right)}{\left(1+i_{t-1}^{B}\right)}-1\right]\left(1-f_{1}\right)\Delta B_{t-2} \\
&= \left[\left(1+i_{t-1}^{B}\right)P_{t-1}^{B}-1\right]\left(1-f_{1}\right)\Delta B_{t-2} \\
&= \left[\left(1+i_{t}^{B}\right)\frac{\left(1+i_{t-1}^{B}\right)}{\left(1+i_{t}^{B}\right)}P_{t-1}^{B}-1\right]\left(1-f_{1}\right)\Delta B_{t-2} \\
&= \left[\left(1+i_{t}^{B}\right)P_{t}^{B}P_{t-1}^{B}-1\right]\left(1-f_{1}\right)\Delta B_{t-2}
\end{aligned}$$

L'intérêt qu'il devra payer sur les obligations émises à la période t–3 est égal à

$$\begin{aligned}
& i_{t-3}^{B}\left(1-f_{1}-f_{2}\right)\Delta B_{t-3} \\
&= \left[\left(1+i_{t-3}^{B}\right)-1\right]\left(1-f_{1}-f_{2}\right)\Delta B_{t-3} \\
&= \left[\left(1+i_{t-2}^{B}\right)\frac{\left(1+i_{t-3}^{B}\right)}{\left(1+i_{t-2}^{B}\right)}-1\right]\left(1-f_{1}-f_{2}\right)\Delta B_{t-3} \\
&= \left[\left(1+i_{t-2}^{B}\right)P_{t-2}^{B}-1\right]\left(1-f_{1}-f_{2}\right)\Delta B_{t-3} \\
&= \left[\left(1+i_{t-1}^{B}\right)\frac{\left(1+i_{t-2}^{B}\right)}{\left(1+i_{t-1}^{B}\right)}P_{t-2}^{B}-1\right]\left(1-f_{1}-f_{2}\right)\Delta B_{t-3} \\
&= \left[\left(1+i_{t-1}^{B}\right)P_{t-1}^{B}P_{t-2}^{B}-1\right]\left(1-f_{1}-f_{2}\right)\Delta B_{t-3} \\
&= \left[\left(1+i_{t}^{B}\right)\frac{\left(1+i_{t-1}^{B}\right)}{\left(1+i_{t}^{B}\right)}P_{t-1}^{B}P_{t-2}^{B}-1\right]\left(1-f_{1}-f_{2}\right)\Delta B_{t-3} \\
&= \left[\left(1+i_{t}^{B}\right)P_{t}^{B}P_{t-1}^{B}P_{t-2}^{B}-1\right]\left(1-f_{1}-f_{2}\right)\Delta B_{t-3}
\end{aligned}$$

Plus généralement, l'intérêt à payer sur les obligations émises à la période $t-\theta$, pour $\theta \leq M$, est égal à

$$i_{t-\theta}^{B}\left(1-\sum_{m=1}^{\theta-1}f_m\right)\Delta B_{t-\theta}=\left[\left(1+i_{t-\theta}^{B}\right)-1\right]\left(1-\sum_{m=1}^{\theta-1}f_m\right)\Delta B_{t-\theta}$$

$$i_{t-\theta}^{B}\left(1-\sum_{m=1}^{\theta-1}f_m\right)\Delta B_{t-\theta}=\left[\left(1+i_{t}^{B}\right)\left(\prod_{s=0}^{\theta-1}P_{t-s}^{B}\right)-1\right]\left(1-\sum_{m=1}^{\theta-1}f_m\right)\Delta B_{t-\theta}$$

$$i_{t-\theta}^{B}\left(1-\sum_{m=1}^{\theta-1}f_m\right)\Delta B_{t-\theta}=\left(1+i_{t}^{B}\right)\left(\prod_{s=0}^{\theta-1}P_{t-s}^{B}\right)\left(1-\sum_{m=1}^{\theta-1}f_m\right)\Delta B_{t-\theta}-\left(1-\sum_{m=1}^{\theta-1}f_m\right)\Delta B_{t-\theta}$$

Au total, l'intérêt à payer est égal à

$$\begin{aligned}INT_t &= \sum_{\theta=1}^{M} i_{t-\theta}^{B}\left(1-\sum_{m=0}^{\theta-1}f_m\right)\Delta B_{t-\theta}\\ &= \sum_{\theta=1}^{M}\left[\left(1+i_{t}^{B}\right)\left(\prod_{s=0}^{\theta-1}P_{t-s}^{B}\right)\left(1-\sum_{m=0}^{\theta-1}f_m\right)\Delta B_{t-\theta}-\left(1-\sum_{m=0}^{\theta-1}f_m\right)\Delta B_{t-\theta}\right]\end{aligned}, \text{ avec } f_0=0 \qquad [1.9]$$

On définit la dette nominale au début de la période t, DN_t (avant remboursement de la dette arrivant à échéance à la période t et avant l'émission de nouveaux titres à la période t) :

$$DN_t=\sum_{\theta=1}^{M}\left(1-\sum_{m=0}^{\theta-1}f_m\right)\Delta B_{t-\theta}\text{ , avec } f_0=0 \qquad [1.10]$$

On peut donc écrire

$$INT_t=\sum_{\theta=1}^{M} i_{t-\theta}^{B}\left(1-\sum_{m=0}^{\theta-1}f_m\right)\Delta B_{t-\theta}=\sum_{\theta=1}^{M}\left[\left(1+i_{t}^{B}\right)\left(\prod_{s=0}^{\theta-1}P_{t-s}^{B}\right)\left(1-\sum_{m=0}^{\theta-1}f_m\right)\Delta B_{t-\theta}\right]-DN_t \qquad [1.11]$$

ANNEXE 2 : CONTRAINTE COMPTABLE DE RICHESSE DES MÉNAGES

Le problème d'allocation du portefeuille des ménages est donné par

$$\underset{A_t, B_t}{MAX}\ VC = \left(1 + i_t^A\right) P_t^A A_t + \left(1 + i_t^B\right) B_t \qquad [1.16]$$

sous contrainte que

$$P_t^A A_t + B_t = W_t \qquad [1.17]$$

$$W_t = A_w \left[\delta_A A_t^{\beta} + \delta_B B_t^{\beta}\right]^{\frac{1}{\beta}} \qquad [1.18]$$

avec l'élasticité de transformation

$\tau = \dfrac{1}{1-\beta}$, qui varie de moins l'infini à zéro. On a réciproquement $\beta = \dfrac{\tau - 1}{\tau}$, avec β qui varie de un à l'infini.

(On se rappelle que le stock d'obligations B_t est défini de telle manière que le prix des obligations en circulation soit égal à 1)

Dans un premier temps, on résout le problème d'allocation de portefeuille en ne tenant compte que de la contrainte [1.18]; on ignore temporairement la contrainte [1.17].

La solution de ce problème conduit aux fonctions de demande

$$A_t = \frac{W_t}{A_w} \left(\frac{\delta_A}{P_t^A \left(1 + i_t^A\right)} \right)^{\tau} \left\{ \delta_A{}^{\tau} \left[P_t^A \left(1 + i_t^A\right)\right]^{1-\tau} + \delta_B{}^{\tau} \left(1 + i_t^B\right)^{1-\tau} \right\}^{\frac{\tau}{1-\tau}}$$

et

$$B_t = \frac{W_t}{A_w} \left(\frac{\delta_B}{1 + i_t^B} \right)^{\tau} \left\{ \delta_A{}^{\tau} \left[P_t^A \left(1 + i_t^A\right)\right]^{1-\tau} + \delta_B{}^{\tau} \left(1 + i_t^B\right)^{1-\tau} \right\}^{\frac{\tau}{1-\tau}}$$

La démonstration est donnée à la fin de l'annexe.

On remplace A_t et B_t dans [1.17] par leur valeur optimale selon les fonctions de demande et on trouve

$$W_t = P_t^A \frac{W_t}{A_w}\left(\frac{\delta_A}{P_t^A\left(1+i_t^A\right)}\right)^{\tau} \left\{\delta_A{}^{\tau}\left[P_t^A\left(1+i_t^A\right)\right]^{1-\tau} + \delta_B{}^{\tau}\left(1+i_t^B\right)^{1-\tau}\right\}^{\frac{\tau}{1-\tau}}$$

$$+\frac{W_t}{A_w}\left(\frac{\delta_B}{1+i_t^B}\right)^{\tau} \left\{\delta_A{}^{\tau}\left[P_t^A\left(1+i_t^A\right)\right]^{1-\tau} + \delta_B{}^{\tau}\left(1+i_t^B\right)^{1-\tau}\right\}^{\frac{\tau}{1-\tau}}$$

$$1 = P_t^A \frac{1}{A_w}\left(\frac{\delta_A}{P_t^A\left(1+i_t^A\right)}\right)^{\tau} \left\{\delta_A{}^{\tau}\left[P_t^A\left(1+i_t^A\right)\right]^{1-\tau} + \delta_B{}^{\tau}\left(1+i_t^B\right)^{1-\tau}\right\}^{\frac{\tau}{1-\tau}}$$

$$+\frac{1}{A_w}\left(\frac{\delta_B}{1+i_t^B}\right)^{\tau} \left\{\delta_A{}^{\tau}\left[P_t^A\left(1+i_t^A\right)\right]^{1-\tau} + \delta_B{}^{\tau}\left(1+i_t^B\right)^{1-\tau}\right\}^{\frac{\tau}{1-\tau}}$$

$$A_w = P_t^A\left(\frac{\delta_A}{P_t^A\left(1+i_t^A\right)}\right)^{\tau} \left\{\delta_A{}^{\tau}\left[P_t^A\left(1+i_t^A\right)\right]^{1-\tau} + \delta_B{}^{\tau}\left(1+i_t^B\right)^{1-\tau}\right\}^{\frac{\tau}{1-\tau}}$$

$$+\left(\frac{\delta_B}{1+i_t^B}\right)^{\tau} \left\{\delta_A{}^{\tau}\left[P_t^A\left(1+i_t^A\right)\right]^{1-\tau} + \delta_B{}^{\tau}\left(1+i_t^B\right)^{1-\tau}\right\}^{\frac{\tau}{1-\tau}}$$

c'est-à-dire

$$A_w = \left\{\delta_A{}^{\tau} P_t^A\left[P_t^A\left(1+i_t^A\right)\right]^{-\tau} + \delta_B{}^{\tau}\left(1+i_t^B\right)^{-\tau}\right\}\left\{\delta_A{}^{\tau}\left[P_t^A\left(1+i_t^A\right)\right]^{1-\tau} + \delta_B{}^{\tau}\left(1+i_t^B\right)^{1-\tau}\right\}^{\frac{\tau}{1-\tau}}$$

On peut alors récrire les fonctions de demande d'actifs comme

$$A_t = W_t \frac{\delta_A{}^{\tau}\left[P_t^A\left(1+i_t^A\right)\right]^{-\tau}}{\left\{\delta_A{}^{\tau} P_t^A\left[P_t^A\left(1+i_t^A\right)\right]^{-\tau} + \delta_B{}^{\tau}\left(1+i_t^B\right)^{-\tau}\right\}} \qquad [1.20]$$

et

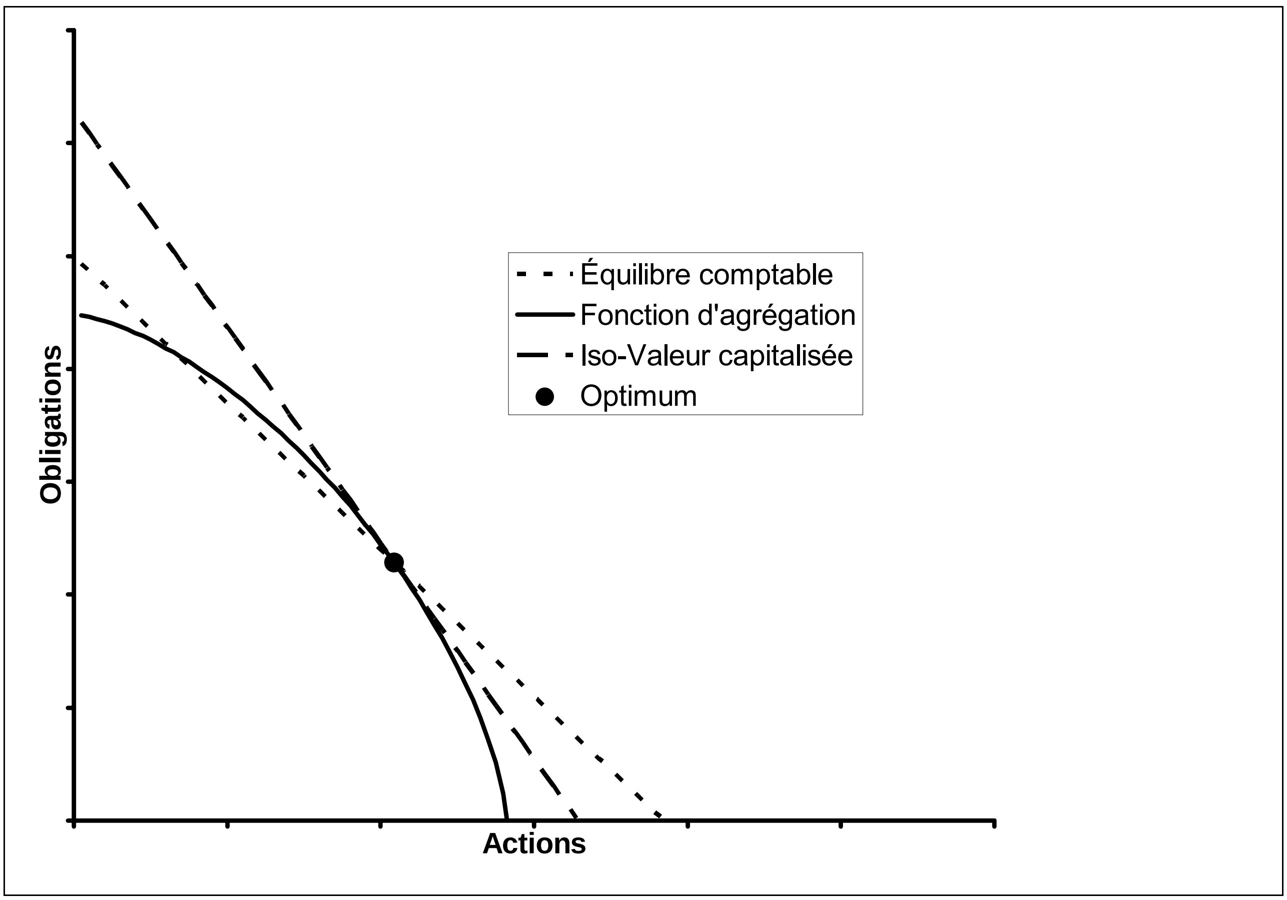
$$B_t = W_t \frac{\delta_B{}^{\tau}\left(1+i_t^B\right)^{-\tau}}{\left\{\delta_A{}^{\tau} P_t^A\left[P_t^A\left(1+i_t^A\right)\right]^{-\tau} + \delta_B{}^{\tau}\left(1+i_t^B\right)^{-\tau}\right\}} \qquad [1.21]$$

Le paramètre A_w n'est pas un paramètre : c'est une variable dont la valeur dépend des taux de rendement et du prix des actions. Cette variable n'a pas à figurer dans le modèle : les fonctions de demande d'actifs [1.20] et [1.21] respectent automatiquement la contrainte de richesse [1.17].

Géométriquement, A_w détermine la position de la contrainte [1.18] dans le plan A_t, B_t. Pour que soit respecté l'équilibre comptable, la valeur de A_w doit être telle que le point d'intersection entre la contrainte comptable [1.17] et la courbe d'indifférence [1.16] coïncide avec le point d'équilibre où la courbe d'indifférence [1.16] est tangente à la fonction d'agrégation [1.18]. La pente de la courbe d'indifférence [1.16] est, en valeur absolue, supérieure ou inférieure à celle de [1.17] selon que i_t^A $>$ ou $<$ i_t^B .

Le cas où $i_t^A > i_t^B$ est illustré à la figure 1.

Figure 1 – Allocation de portefeuille des ménages



Démonstration des fonctions de demande dérivées sans la contrainte [1.17]

On forme le lagrangien

$$\Lambda = \left(1+i_t^A\right)P_t^A A_t + \left(1+i_t^B\right)B_t - \lambda\left[A_w\left(\delta_A A_t^\beta + \delta_B B_t^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}} - W_t\right]$$

Les conditions premières sont

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial A_t} = \left(1+i_t^A\right)P_t^A - \lambda\left[A_w \frac{1}{\beta}\left(\delta_A A_t^\beta + \delta_B B_t^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}-1} \delta_A \beta A_t^{\beta-1}\right] = 0$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial B_t} = \left(1+i_t^B\right) - \lambda\left[A_w \frac{1}{\beta}\left(\delta_A A_t^\beta + \delta_B B_t^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}-1} \delta_B \beta B_t^{\beta-1}\right] = 0$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial A_t} = \left(1+i_t^A\right)P_t^A - \lambda\left[A_w\left(\delta_A A_t^\beta + \delta_B B_t^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}-1} \delta_A A_t^{\beta-1}\right] = 0$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial B_t} = \left(1+i_t^B\right) - \lambda\left[A_w\left(\delta_A A_t^\beta + \delta_B B_t^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}-1} \delta_B B_t^{\beta-1}\right] = 0$$

où la contrainte [1.18] équivaut à

$$\left(\frac{W_t}{A_w}\right)^\beta = \left[\delta_A A_t^\beta + \delta_B B_t^\beta\right]$$

de sorte que

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial A_t} = \left(1+i_t^A\right)P_t^A - \lambda\left[A_w\left(\frac{W_t}{A_w}\right)^{1-\beta} \delta_A A_t^{\beta-1}\right] = 0$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial B_t} = \left(1+i_t^B\right) - \lambda\left[A_w\left(\frac{W_t}{A_w}\right)^{1-\beta} \delta_B B_t^{\beta-1}\right] = 0$$

On développe :

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial A_t} = \left(1+i_t^A\right)P_t^A - \lambda A_w\left(\frac{W_t}{A_w}\right)^{1-\beta} \delta_A A_t^{\beta-1} = 0$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial B_t} = \left(1+i_t^B\right) - \lambda A_w \left(\frac{W_t}{A_w}\right)^{1-\beta} \delta_B B_t^{\beta-1} = 0$$

$$\left(1+i_t^A\right)P_t^A = \lambda A_w \left(\frac{W_t}{A_w}\right)^{1-\beta} \delta_A A_t^{\beta-1}$$

$$\left(1+i_t^B\right) = \lambda A_w \left(\frac{W_t}{A_w}\right)^{1-\beta} \delta_B B_t^{\beta-1}$$

$$A_t^{\beta-1} = \frac{\left(1+i_t^A\right)P_t^A}{\lambda \delta_A A_w} \left(\frac{W_t}{A_w}\right)^{\beta-1}$$

$$B_t^{\beta-1} = \frac{\left(1+i_t^B\right)}{\lambda \delta_B A_w} \left(\frac{W_t}{A_w}\right)^{\beta-1}$$

$$A_t = \left[\frac{\left(1+i_t^A\right)P_t^A}{\lambda \delta_A A_w}\right]^{\frac{1}{\beta-1}} \left(\frac{W_t}{A_w}\right)$$

$$B_t = \left[\frac{\left(1+i_t^B\right)}{\lambda \delta_B A_w}\right]^{\frac{1}{\beta-1}} \left(\frac{W_t}{A_w}\right)$$

En substituant dans [1.18], on trouve

$$W_t = A_w \left\{ \delta_A \left[\frac{\left(1+i_t^A\right)P_t^A}{\lambda \delta_A A_w}\right]^{\frac{\beta}{\beta-1}} \left(\frac{W_t}{A_w}\right)^{\beta} + \delta_B \left[\frac{\left(1+i_t^B\right)}{\lambda \delta_B A_w}\right]^{\frac{\beta}{\beta-1}} \left(\frac{W_t}{A_w}\right)^{\beta} \right\}^{\frac{1}{\beta}}$$

$$W_t = A_w W_t \left\{ \delta_A \left[\frac{\left(1+i_t^A\right)P_t^A}{\lambda \delta_A A_w}\right]^{\frac{\beta}{\beta-1}} \left(\frac{1}{A_w}\right)^{\beta} + \delta_B \left[\frac{\left(1+i_t^B\right)}{\lambda \delta_B A_w}\right]^{\frac{\beta}{\beta-1}} \left(\frac{1}{A_w}\right)^{\beta} \right\}^{\frac{1}{\beta}}$$

$$1 = A_w \left\{ \delta_A \left[\frac{\left(1+i_t^A\right)P_t^A}{\lambda \delta_A A_w} \left(\frac{1}{A_w} \right)^{\beta-1} \right]^{\frac{\beta}{\beta-1}} + \delta_B \left[\frac{\left(1+i_t^B\right)}{\lambda \delta_B A_w} \left(\frac{1}{A_w} \right)^{\beta-1} \right]^{\frac{\beta}{\beta-1}} \right\}^{\frac{1}{\beta}}$$

$$A_w \left\{ \delta_A \left[\frac{\left(1+i_t^A\right)P_t^A}{\lambda \delta_A} \left(\frac{1}{A_w} \right)^{\beta} \right]^{\frac{\beta}{\beta-1}} + \delta_B \left[\frac{\left(1+i_t^B\right)}{\lambda \delta_B} \left(\frac{1}{A_w} \right)^{\beta} \right]^{\frac{\beta}{\beta-1}} \right\}^{\frac{1}{\beta}} = 1$$

$$A_w \left\{ \delta_A \left[\frac{\left(1+i_t^A\right)P_t^A}{\lambda \left(A_w\right)^{\beta} \delta_A} \right]^{\frac{\beta}{\beta-1}} + \delta_B \left[\frac{\left(1+i_t^B\right)}{\lambda \left(A_w\right)^{\beta} \delta_B} \right]^{\frac{\beta}{\beta-1}} \right\}^{\frac{1}{\beta}} = 1$$

$$A_w \left[\frac{1}{\lambda \left(A_w\right)^{\beta}} \right]^{\frac{1}{\beta-1}} \left\{ \delta_A \left[\frac{\left(1+i_t^A\right)P_t^A}{\delta_A} \right]^{\frac{\beta}{\beta-1}} + \delta_B \left[\frac{\left(1+i_t^B\right)}{\delta_B} \right]^{\frac{\beta}{\beta-1}} \right\}^{\frac{1}{\beta}} = 1$$

$$A_w \left[\frac{1}{\lambda \left(A_w\right)^{\beta}} \right]^{\frac{1}{\beta-1}} \left\{ \left(\delta_A\right)^{-\frac{1}{\beta-1}} \left[\left(1+i_t^A\right)P_t^A \right]^{\frac{\beta}{\beta-1}} + \left(\delta_B\right)^{-\frac{1}{\beta-1}} \left(1+i_t^B\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}} \right\}^{\frac{1}{\beta}} = 1$$

$$\left(A_w\right)^{-\frac{1}{\beta-1}} \lambda^{-\frac{1}{\beta-1}} \left\{ \left(\delta_A\right)^{-\frac{1}{\beta-1}} \left[\left(1+i_t^A\right)P_t^A \right]^{\frac{\beta}{\beta-1}} + \left(\delta_B\right)^{-\frac{1}{\beta-1}} \left(1+i_t^B\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}} \right\}^{\frac{1}{\beta}} = 1$$

$$\lambda^{\frac{1}{\beta-1}} = \left(A_w\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \left\{ \left(\delta_A\right)^{-\frac{1}{\beta-1}} \left[\left(1+i_t^A\right)P_t^A \right]^{\frac{\beta}{\beta-1}} + \left(\delta_B\right)^{-\frac{1}{\beta-1}} \left(1+i_t^B\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}} \right\}^{-\frac{1}{\beta}}$$

On peut maintenant écrire les équations de demande

$$A_t = \left[\frac{\left(1+i_t^A\right)P_t^A}{\delta_A A_w} \right]^{\frac{1}{\beta-1}} \left(\frac{W_t}{A_w} \right) \left(A_w\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \left\{ \left(\delta_A\right)^{-\frac{1}{\beta-1}} \left[\left(1+i_t^A\right)P_t^A \right]^{\frac{\beta}{\beta-1}} + \left(\delta_B\right)^{-\frac{1}{\beta-1}} \left(1+i_t^B\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}} \right\}^{-\frac{1}{\beta}}$$

$$B_t = \left[\frac{\left(1+i_t^B\right)}{\delta_B A_w} \right]^{\frac{1}{\beta-1}} \left(\frac{W_t}{A_w} \right) \left(A_w\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \left\{ \left(\delta_A\right)^{-\frac{1}{\beta-1}} \left[\left(1+i_t^A\right)P_t^A\right]^{\frac{\beta}{\beta-1}} + \left(\delta_B\right)^{-\frac{1}{\beta-1}} \left(1+i_t^B\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}} \right\}^{-\frac{1}{\beta}}$$

$$A_t = \left[\frac{\left(1+i_t^A\right)P_t^A}{\delta_A} \right]^{\frac{1}{\beta-1}} \left(\frac{W_t}{A_w} \right) \left\{ \left(\delta_A\right)^{-\frac{1}{\beta-1}} \left[\left(1+i_t^A\right)P_t^A\right]^{\frac{\beta}{\beta-1}} + \left(\delta_B\right)^{-\frac{1}{\beta-1}} \left(1+i_t^B\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}} \right\}^{-\frac{1}{\beta}}$$

$$B_t = \left[\frac{\left(1+i_t^B\right)}{\delta_B} \right]^{\frac{1}{\beta-1}} \left(\frac{W_t}{A_w} \right) \left\{ \left(\delta_A\right)^{-\frac{1}{\beta-1}} \left[\left(1+i_t^A\right)P_t^A\right]^{\frac{\beta}{\beta-1}} + \left(\delta_B\right)^{-\frac{1}{\beta-1}} \left(1+i_t^B\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}} \right\}^{-\frac{1}{\beta}}$$

c’est-à-dire, étant donné

$$\tau = \frac{1}{1-\beta} \text{ et } \beta = \frac{\tau - 1}{\tau}$$

on a

$$A_t = \left[\frac{\left(1+i_t^A\right)P_t^A}{\delta_A} \right]^{-\tau} \left(\frac{W_t}{A_w} \right) \left\{ \left(\delta_A\right)^{\tau} \left[\left(1+i_t^A\right)P_t^A\right]^{1-\tau} + \left(\delta_B\right)^{\tau} \left(1+i_t^B\right)^{1-\tau} \right\}^{\frac{\tau}{1-\tau}}$$

$$B_t = \left[\frac{\left(1+i_t^B\right)}{\delta_B} \right]^{-\tau} \left(\frac{W_t}{A_w} \right) \left\{ \left(\delta_A\right)^{\tau} \left[\left(1+i_t^A\right)P_t^A\right]^{1-\tau} + \left(\delta_B\right)^{\tau} \left(1+i_t^B\right)^{1-\tau} \right\}^{\frac{\tau}{1-\tau}}$$

Q.E.D.

ANNEXE 3 : L'INTÉRÊT À PAYER SUR LES OBLIGATIONS DANS LE MODÈLE AVEC ÉROSION DE LA VALEUR RÉELLE DES OBLIGATIONS

L'intérêt que devra payer l'émetteur sur les obligations émises à la période t–1 est égal à

$$\begin{aligned}
i_{t-1}^{B}(1-\delta_{nom})\Delta B_{t-1} &= \left[\left(1+i_{t-1}^{B}\right)-1\right](1-\delta_{nom})\Delta B_{t-1} \\
&= \left[\left(1+i_{t}^{B}\right)(1-\delta_{nom})\frac{\left(1+i_{t-1}^{B}\right)}{\left(1+i_{t}^{B}\right)}-(1-\delta_{nom})\right]\Delta B_{t-1} \\
&= \left[\left(1+i_{t}^{B}\right)P_{t}^{B}-(1-\delta_{nom})\right]\Delta B_{t-1}
\end{aligned}$$

L'intérêt qu'il devra payer sur les obligations émises à la période t–2 est égal à

$$\begin{aligned}
i_{t-2}^{B}(1-f_1)(1-\delta_{nom})^2\Delta B_{t-2} &= \left[\left(1+i_{t-2}^{B}\right)-1\right](1-f_1)(1-\delta_{nom})^2\Delta B_{t-2} \\
&= \left[\left(1+i_{t-1}^{B}\right)(1-\delta_{nom})^2\frac{\left(1+i_{t-2}^{B}\right)}{\left(1+i_{t-1}^{B}\right)}-(1-\delta_{nom})^2\right](1-f_1)\Delta B_{t-2} \\
&= \left[\left(1+i_{t-1}^{B}\right)(1-\delta_{nom})P_{t-1}^{B}-(1-\delta_{nom})^2\right](1-f_1)\Delta B_{t-2} \\
&= \left[\left(1+i_{t}^{B}\right)(1-\delta_{nom})\frac{\left(1+i_{t-1}^{B}\right)}{\left(1+i_{t}^{B}\right)}P_{t-1}^{B}-(1-\delta_{nom})^2\right](1-f_1)\Delta B_{t-2} \\
&= \left[\left(1+i_{t}^{B}\right)P_{t}^{B}P_{t-1}^{B}-(1-\delta_{nom})^2\right](1-f_1)\Delta B_{t-2}
\end{aligned}$$

L'intérêt qu'il devra payer sur les obligations émises à la période t–3 est égal à

$$\begin{aligned}
i_{t-3}^{B}(1-f_1-f_2)(1-\delta_{nom})^3\Delta B_{t-3} &= \left[\left(1+i_{t-3}^{B}\right)-1\right](1-f_1-f_2)(1-\delta_{nom})^3\Delta B_{t-3} \\
&= \left[\left(1+i_{t-2}^{B}\right)(1-\delta_{nom})^3\frac{\left(1+i_{t-3}^{B}\right)}{\left(1+i_{t-2}^{B}\right)}-(1-\delta_{nom})^3\right](1-f_1-f_2)\Delta B_{t-3} \\
&= \left[\left(1+i_{t-2}^{B}\right)(1-\delta_{nom})^2P_{t-2}^{B}-(1-\delta_{nom})^3\right](1-f_1-f_2)\Delta B_{t-3} \\
&= \left[\left(1+i_{t-1}^{B}\right)(1-\delta_{nom})^2\frac{\left(1+i_{t-2}^{B}\right)}{\left(1+i_{t-1}^{B}\right)}P_{t-2}^{B}-(1-\delta_{nom})^3\right](1-f_1-f_2)\Delta B_{t-3} \\
&= \left[\left(1+i_{t-1}^{B}\right)(1-\delta_{nom})P_{t-1}^{B}P_{t-2}^{B}-(1-\delta_{nom})^3\right](1-f_1-f_2)\Delta B_{t-3} \\
&= \left[\left(1+i_{t}^{B}\right)(1-\delta_{nom})\frac{\left(1+i_{t-1}^{B}\right)}{\left(1+i_{t}^{B}\right)}P_{t-1}^{B}P_{t-2}^{B}-(1-\delta_{nom})^3\right](1-f_1-f_2)\Delta B_{t-3} \\
&= \left[\left(1+i_{t}^{B}\right)P_{t}^{B}P_{t-1}^{B}P_{t-2}^{B}-(1-\delta_{nom})^3\right](1-f_1-f_2)\Delta B_{t-3}
\end{aligned}$$

Plus généralement, l'intérêt à payer sur les obligations émises à la période $t-\theta$, pour $\theta \leq M$, est égal à

$$i_{t-\theta}^{B}\left(1-\sum_{m=1}^{\theta-1} f_m\right)\left(1-\delta_{nom}\right)^{\theta}\Delta B_{t-\theta}=\left[\left(1+i_{t-\theta}^{B}\right)-1\right]\left(1-\sum_{m=1}^{\theta-1} f_m\right)\left(1-\delta_{nom}\right)^{\theta}\Delta B_{t-\theta}$$

$$i_{t-\theta}^{B}\left(1-\sum_{m=1}^{\theta-1} f_m\right)\left(1-\delta_{nom}\right)^{\theta}\Delta B_{t-\theta}=\left[\left(1+i_{t}^{B}\right)\left(\prod_{s=0}^{\theta-1} P_{t-s}^{B}\right)-\left(1-\delta_{nom}\right)^{\theta}\right]\left(1-\sum_{m=1}^{\theta-1} f_m\right)\Delta B_{t-\theta}$$

$$\begin{aligned} i_{t-\theta}^{B}\left(1-\sum_{m=1}^{\theta-1} f_m\right)\left(1-\delta_{nom}\right)^{\theta}\Delta B_{t-\theta} &= \left(1+i_{t}^{B}\right)\left(\prod_{s=0}^{\theta-1} P_{t-s}^{B}\right)\left(1-\sum_{m=1}^{\theta-1} f_m\right)\Delta B_{t-\theta} \\ &\quad -\left(1-\delta_{nom}\right)^{\theta}\left(1-\sum_{m=1}^{\theta-1} f_m\right)\Delta B_{t-\theta} \end{aligned}$$

Au total, l'intérêt à payer est égal à

$$INT_t=\sum_{\theta=1}^{M} i_{t-\theta}^{B}\left(1-\sum_{m=1}^{\theta-1} f_m\right)\left(1-\delta_{nom}\right)^{\theta}\Delta B_{t-\theta}=\sum_{\theta=1}^{M}\left[\begin{array}{l}\left(1+i_{t}^{B}\right)\left(\prod_{s=0}^{\theta-1} P_{t-s}^{B}\right)\left(1-\sum_{m=1}^{\theta-1} f_m\right)\Delta B_{t-\theta} \\ -\left(1-\delta_{nom}\right)^{\theta}\left(1-\sum_{m=1}^{\theta-1} f_m\right)\Delta B_{t-\theta}\end{array}\right] \quad [2.9]$$

On définit la valeur réelle de la dette nominale au début de la période t, DN_t (avant remboursement de la dette arrivant à échéance à la période t et avant l'émission de nouveaux titres à la période t) :

$$DN_t=\sum_{\theta=1}^{M}\left(1-\sum_{m=1}^{\theta-1} f_m\right)\left(1-\delta_{nom}\right)^{\theta}\Delta B_{t-\theta} \quad [2.10]$$

On peut donc écrire

$$INT_t=\sum_{\theta=1}^{M} i_{t-\theta}^{B}\left(1-\sum_{m=1}^{\theta-1} f_m\right)\left(1-\delta_{nom}\right)^{\theta}\Delta B_{t-\theta}=\sum_{\theta=1}^{M}\left[\left(1+i_{t}^{B}\right)\left(\prod_{s=0}^{\theta-1} P_{t-s}^{B}\right)\left(1-\sum_{m=1}^{\theta-1} f_m\right)\Delta B_{t-\theta}\right]-DN_t \quad [2.11]$$

TABLEAU DES SYMBOLES

Variables

i_t^B : taux d'intérêt payé sur les obligations à la période t

$PO_t(\theta,\theta+\tau)$: prix au temps t d'une obligation émise en $t-\theta$, arrivant à échéance à la période $t+\tau$

$P_t^B = PO_t(1,2)$

ΔB_t^τ : stock d'obligations émis à la période t et arrivant à échéance à la période $t+\tau$

ΔB_t : valeur des nouvelles obligations émises à la période t

$REMB_t$: montant de la dette arrivée à échéance et à rembourser à la période t

INT_t : montant des intérêts à payer sur la dette à la période t

DN_t : valeur de la dette nominale au début de la période t (avant remboursement de la dette arrivant à échéance à la période t et avant l'émission de nouveaux titres à la période t)

B_t : valeur du stock d'obligations en circulation à la période t

I_t^G : volume des investissements du gouvernement à la période t

P_t^K : prix des biens d'investissement à la période t

S_t^G : épargne du gouvernement à la période t

ΔA_t : quantité de nouvelles actions mises en circulation à la période t

I_t^E : volume des investissements des entreprises à la période t

S_t^E : épargne des entreprises à la période t

A_t : stock d'actions en circulation à la fin de la période t

P_t^A : prix des actions à la période t

W_t : richesse des ménages (valeur du portefeuille à allouer à la période t)

S_t^M : épargne des ménages à la période t

A_w : variable de position de la fonction de transformation des actifs

$\bar{r}_t$: taux de rendement sur le capital, net des taxes et de la dépréciation

Paramètres

f_m : fraction des obligations émises à chaque période t qui sont de maturité m, pour $m < M$

δ_A, δ_B, β : paramètres de la fonction de transformation des actifs

τ : élasticité de transformation de la fonction d'agrégation des actifs

δ_{nom} : taux d'érosion des valeurs nominales dû à l'inflation

LISTE DES ÉQUATIONS

$$PO_t\left(\theta,\theta+\tau\right)=\frac{\left(1+i_{t-\theta}^B\right)^\tau}{\left(1+i_t^B\right)^\tau} \quad [1.1]$$

$$P_t^B = PO_t\,(1{,}2) = \frac{\left(1+i_{t-1}^B\right)}{\left(1+i_t^B\right)} \quad [1.2]$$

$$\left(1+i_{t-\theta}^B\right)=\left(1+i_t^B\right)\prod_{s=1}^{\theta}P_{t-\theta+s}^B \quad [1.3]$$

$$PO_t\left(\theta,\theta+\tau\right)=\frac{\left(1+i_{t-\theta}^B\right)^\tau}{\left(1+i_t^B\right)^\tau}=\left(\prod_{s=1}^{\theta}P_{t-\theta+s}^B\right)^\tau \quad [1.4]$$

$\Delta B_t^m = f_m \Delta B_t$, pour $m \leq M$ [1.5]

$$REMB_t = \sum_{\theta=1}^{M}\Delta B_{t-\theta}^{\theta} = \sum_{m=1}^{M} f_m \Delta B_{t-m} \quad [1.6]$$

$$B_t = \Delta B_t + \sum_{\theta=1}^{M-1}\sum_{\tau=1}^{M-\theta} PO_t\left(\theta,\theta+\tau\right)\Delta B_{t-\theta}^{\theta+\tau} \quad [1.7]$$

$$B_t = \Delta B_t + \sum_{\theta=1}^{M-1}\sum_{\tau=1}^{M-\theta}\left(\prod_{s=1}^{\theta}P_{t-\theta+s}^B\right)^\tau f_{\theta+\tau}\Delta B_{t-\theta} \quad [1.8]$$

$$\begin{aligned} INT_t &= \sum_{\theta=1}^{M} i_{t-\theta}^B\left(1-\sum_{m=0}^{\theta-1}f_m\right)\Delta B_{t-\theta} \\ &= \sum_{\theta=1}^{M}\left[\left(1+i_t^B\right)\left(\prod_{s=0}^{\theta-1}P_{t-s}^B\right)\left(1-\sum_{m=0}^{\theta-1}f_m\right)\Delta B_{t-\theta}-\left(1-\sum_{m=0}^{\theta-1}f_m\right)\Delta B_{t-\theta}\right], \text{ avec } f_0=0 \end{aligned} \quad [1.9]$$

$$DN_t = \sum_{\theta=1}^{M}\left(1-\sum_{m=0}^{\theta-1}f_m\right)\Delta B_{t-\theta}, \text{ avec } f_0 = 0 \quad [1.10]$$

$$INT_t = \sum_{\theta=1}^{M} i_{t-\theta}^B\left(1-\sum_{m=0}^{\theta-1}f_m\right)\Delta B_{t-\theta} = \sum_{\theta=1}^{M}\left[\left(1+i_t^B\right)\left(\prod_{s=0}^{\theta-1}P_{t-s}^B\right)\left(1-\sum_{m=0}^{\theta-1}f_m\right)\Delta B_{t-\theta}\right]-DN_t \quad [1.11]$$

$$\Delta B_t = P_t^K I_t^G + REMB_t - S_t^G \quad [1.12]$$

$$\Delta A_t = \frac{P_t^K I_t^E - S_t^E}{P_t^A} \quad [1.13]$$

$$A_t = A_{t-1} + \Delta A_t \quad [1.14]$$

$$W_t = P_t^A A_{t-1} + \left(B_t - \Delta B_t\right) + REMB_t + S_t^M \quad [1.15]$$

$$\underset{A_t, B_t}{MAX}\ VC = \left(1 + i_t^A\right) P_t^A A_t + \left(1 + i_t^B\right) B_t \quad [1.16]$$

$$P_t^A A_t + B_t = W_t \quad [1.17]$$

$$W_t = A_W \left[\delta_A A_t^{\beta} + \delta_B B_t^{\beta}\right]^{\frac{1}{\beta}} \quad [1.18]$$

$$A_W = \left\{\delta_A{}^{\tau} P_t^A \left[P_t^A \left(1 + i_t^A\right)\right]^{-\tau} + \delta_B{}^{\tau} \left(1 + i_t^B\right)^{-\tau}\right\} \left\{\delta_A{}^{\tau} \left[P_t^A \left(1 + i_t^A\right)\right]^{1-\tau} + \delta_B{}^{\tau} \left(1 + i_t^B\right)^{1-\tau}\right\}^{\frac{\tau}{1-\tau}} \quad [1.19]$$

$$A_t = W_t \frac{\delta_A{}^{\tau} \left[P_t^A \left(1 + i_t^A\right)\right]^{-\tau}}{\left\{\delta_A{}^{\tau} P_t^A \left[P_t^A \left(1 + i_t^A\right)\right]^{-\tau} + \delta_B{}^{\tau} \left(1 + i_t^B\right)^{-\tau}\right\}} \quad [1.20]$$

$$B_t = W_t \frac{\delta_B{}^{\tau} \left(1 + i_t^B\right)^{-\tau}}{\left\{\delta_A{}^{\tau} P_t^A \left[P_t^A \left(1 + i_t^A\right)\right]^{-\tau} + \delta_B{}^{\tau} \left(1 + i_t^B\right)^{-\tau}\right\}} \quad [1.21]$$

$$i_t^A = \bar{r}_t \quad [1.22]$$

$$PO_t\ (\theta, \theta + \tau) = \left(1 - \delta_{nom}\right)^{\theta} \frac{\left(1 + i_{t-\theta}^B\right)^{\tau}}{\left(1 + i_t^B\right)^{\tau}} \quad [2.1]$$

$$P_t^B = PO_t\ (1{,}2) = \left(1 - \delta_{nom}\right) \frac{\left(1 + i_{t-1}^B\right)}{\left(1 + i_t^B\right)} \quad [2.2]$$

$$\left(1 + i_{t-\theta}^B\right) = \frac{1}{\left(1 - \delta_{nom}\right)^{\theta}} \left(1 + i_t^B\right) \prod_{s=1}^{\theta} P_{t-\theta+s}^B \quad [2.3]$$

$$PO_t\ (\theta, \theta + \tau) = \left(1 - \delta_{nom}\right)^{\theta} \frac{\left(1 + i_{t-\theta}^B\right)^{\tau}}{\left(1 + i_t^B\right)^{\tau}} = \left(\frac{1}{\left(1 - \delta_{nom}\right)^{\theta}}\right)^{\tau - 1} \left(\prod_{s=1}^{\theta} P_{t-\theta+s}^B\right)^{\tau} \quad [2.4]$$

$\Delta B_t^m = f_m \Delta B_t$, pour $m \leq M$ [2.5]

$$REMB_t = \sum_{\theta=1}^{M} \left(1-\delta_{nom}\right)^{\theta} \Delta B_{t-\theta}^{\theta} = \sum_{m=1}^{M} f_m \left(1-\delta\right)^m \Delta B_{t-m} \qquad [2.6]$$

$$B_t = \Delta B_t + \sum_{\theta=1}^{M} \sum_{\tau=1}^{M-\theta} PO_t \left(\theta, \theta+\tau\right) \Delta B_{t-\theta}^{\theta+\tau} \qquad [2.7]$$

$$B_t = \Delta B_t + \sum_{\theta=1}^{M} \sum_{\tau=1}^{M-\theta} \left(\frac{1}{\left(1-\delta_{nom}\right)^{\theta}} \right)^{\tau-1} \left(\prod_{s=1}^{\theta} P_{t-\theta+s}^{B} \right)^{\tau} f_{\theta+\tau} \Delta B_{t-\theta} \qquad [2.8]$$

$$INT_t = \sum_{\theta=1}^{M} i_{t-\theta}^{B} \left(1 - \sum_{m=1}^{\theta-1} f_m\right) \left(1-\delta_{nom}\right)^{\theta} \Delta B_{t-\theta} = \sum_{\theta=1}^{M} \left[\begin{array}{l} \left(1+i_t^B\right) \left(\prod_{s=0}^{\theta-1} P_{t-s}^{B} \right) \left(1 - \sum_{m=1}^{\theta-1} f_m\right) \Delta B_{t-\theta} \\ -\left(1-\delta_{nom}\right)^{\theta} \left(1 - \sum_{m=1}^{\theta-1} f_m\right) \Delta B_{t-\theta} \end{array} \right] \qquad [2.9]$$

$$DN_t = \sum_{\theta=1}^{M} \left(1 - \sum_{m=1}^{\theta-1} f_m\right) \left(1-\delta_{nom}\right)^{\theta} \Delta B_{t-\theta} \qquad [2.10]$$

$$INT_t = \sum_{\theta=1}^{M} i_{t-\theta}^{B} \left(1 - \sum_{m=1}^{\theta-1} f_m\right) \left(1-\delta_{nom}\right)^{\theta} \Delta B_{t-\theta} = \sum_{\theta=1}^{M} \left[\left(1+i_t^B\right) \left(\prod_{s=0}^{\theta-1} P_{t-s}^{B} \right) \left(1 - \sum_{m=1}^{\theta-1} f_m\right) \Delta B_{t-\theta} \right] - DN_t \qquad [2.11]$$

$$\Delta B_t = P_t^K I_t^G + REMB_t - S_t^G \qquad [2.12]$$

$$\Delta A_t = \frac{P_t^K I_t^E - S_t^E}{P_t^A} \qquad [2.13]$$

$$A_t = A_{t-1} + \Delta A_t \qquad [2.14]$$

$$W_t = P_t^A A_{t-1} + \left(B_t - \Delta B_t\right) + REMB_t + S_t^M \qquad [2.15]$$

$$\underset{A_t, B_t}{MAX}\ VC = \left(1+i_t^A\right) P_t^A A_t + \left(1-\delta_{nom}\right)\left(1+i_t^B\right) B_t \qquad [2.16]$$

$P_t^A A_t + B_t = W_t$, où W_t est donnée par [1.15] [2.17]

$$W_t = A_W \left[\delta_A A_t^{\beta} + \delta_B B_t^{\beta} \right]^{\frac{1}{\beta}} \qquad [2.18]$$

$$A_W = \left\{ \delta_A{}^{\tau} P_t^A \left[P_t^A \left(1+i_t^A\right) \right]^{-\tau} + \delta_B{}^{\tau} \left(1+i_t^B\right)^{-\tau} \right\} \left\{ \delta_A{}^{\tau} \left[P_t^A \left(1+i_t^A\right) \right]^{1-\tau} + \delta_B{}^{\tau} \left(1+i_t^B\right)^{1-\tau} \right\}^{\frac{\tau}{1-\tau}} \qquad [2.19]$$

$$A_t = W_t \frac{\delta_A{}^{\tau}\left[P_t^A\left(1+i_t^A\right)\right]^{-\tau}}{\left\{\delta_A{}^{\tau}P_t^A\left[P_t^A\left(1+i_t^A\right)\right]^{-\tau}+\delta_B{}^{\tau}\left(1+i_t^B\right)^{-\tau}\right\}} \quad [2.20]$$

$$B_t = W_t \frac{\delta_B{}^{\tau}\left(1+i_t^B\right)^{-\tau}}{\left\{\delta_A{}^{\tau}P_t^A\left[P_t^A\left(1+i_t^A\right)\right]^{-\tau}+\delta_B{}^{\tau}\left(1+i_t^B\right)^{-\tau}\right\}} \quad [2.21]$$

$$i_t^A = \bar{r}_t \quad [2.22]$$

VARIABLES ET ÉQUATIONS DU MODÈLE

Variables endogènes

i_t^B : taux d'intérêt payé sur les obligations à la période *t*

P_t^B : prix au temps *t* d'une obligation émise en *t*–1, arrivant à échéance à la période *t*+1

ΔB_t : valeur des nouvelles obligations émises à la période *t*

$REMB_t$: montant de la dette arrivée à échéance et à rembourser à la période *t*

INT_t : montant des intérêts à payer sur la dette à la période *t*

DN_t : valeur de la dette nominale au début de la période *t* (avant remboursement de la dette arrivant à échéance à la période *t* et avant l'émission de nouveaux titres à la période *t*)

B_t : valeur du stock d'obligations en circulation à la période *t*

ΔA_t : quantité de nouvelles actions mises en circulation à la période *t*

A_t : stock d'actions en circulation à la fin de la période *t*

P_t^A : prix des actions à la période *t*

W_t : richesse des ménages (valeur du portefeuille à allouer à la période *t*)

A_w : variable de position de la fonction de transformation des actifs

Variables endogènes retardées

i_{t-1}^B : taux d'intérêt payé sur les obligations à la période *t*–1

$P_{t-\theta}^B$: prix au temps *t* d'une obligation émise en $t-\theta$, arrivant à échéance à la période $t-\theta+1$, pour $\theta = 1,..., M-1$

$\Delta B_{t-\theta}$: valeur des nouvelles obligations émises à la période *t*, pour $\theta = 1,..., M$

A_{t-1} : stock d'actions en circulation à la fin de la période *t*–1

Variables exogènes

I_t^G : volume des investissements du gouvernement à la période *t*

P_t^K : prix des biens d'investissement à la période *t*

S_t^G : épargne du gouvernement à la période *t*

I_t^E : volume des investissements des entreprises à la période *t*

S_t^E : épargne des entreprises à la période *t*

S_t^M : épargne des ménages à la période *t*

$\bar{r}_t$: taux de rendement sur le capital, net des taxes et de la dépréciation

Équations du modèle

Équations du modèle de base	Équations du modèle avec érosion de la valeur réelle des obligations
$P_t^B = \frac{\left(1+i_{t-1}^B\right)}{\left(1+i_t^B\right)}$	$P_t^B = \left(1-\delta_{nom}\right)\frac{\left(1+i_{t-1}^B\right)}{\left(1+i_t^B\right)}$
$REMB_t = \sum_{m=1}^{M} f_m \Delta B_{t-m}$	$REMB_t = \sum_{m=1}^{M} f_m (1-\delta)^m \Delta B_{t-m}$
$B_t = \Delta B_t + \sum_{\theta=1}^{M}\sum_{\tau=1}^{M-\theta}\left(\prod_{s=1}^{\theta} P_{t-\theta+s}^B\right)^{\tau} f_{\theta+\tau}\Delta B_{t-\theta}$	$B_t = \Delta B_t + \sum_{\theta=1}^{M}\sum_{\tau=1}^{M-\theta}\left(\frac{1}{\left(1-\delta_{nom}\right)^{\theta}}\right)^{\tau-1}\left(\prod_{s=1}^{\theta} P_{t-\theta+s}^B\right)^{\tau} f_{\theta+\tau}\Delta B_{t-\theta}$
$DN_t = \sum_{\theta=1}^{M}\left(1-\sum_{m=1}^{\theta-1} f_m\right)\Delta B_{t-\theta}$	$DN_t = \sum_{\theta=1}^{M}\left(1-\sum_{m=1}^{\theta-1} f_m\right)\left(1-\delta_{nom}\right)^{\theta}\Delta B_{t-\theta}$
$INT_t = \sum_{\theta=1}^{M}\left[\left(1+i_t^B\right)\left(\prod_{s=0}^{\theta-1} P_{t-s}^B\right)\left(1-\sum_{m=1}^{\theta-1} f_m\right)\Delta B_{t-\theta}\right]-DN_t$	
$\Delta B_t = P_t^K I_t^G + REMB_t - S_t^G$	
$\Delta A_t = \frac{P_t^K I_t^E - S_t^E}{P_t^A}$	
$A_t = A_{t-1} + \Delta A_t$	
$W_t = P_t^A A_{t-1} + \left(B_t - \Delta B_t\right) + REMB_t + S_t^M$	

$A_t = W_t \dfrac{\delta_A{}^{\tau}\left[P_t^A\left(1+i_t^A\right)\right]^{-\tau}}{\left\{\delta_A{}^{\tau}P_t^A\left[P_t^A\left(1+i_t^A\right)\right]^{-\tau} + \delta_B{}^{\tau}\left(1+i_t^B\right)^{-\tau}\right\}}$
$B_t = W_t \dfrac{\delta_B{}^{\tau}\left(1+i_t^B\right)^{-\tau}}{\left\{\delta_A{}^{\tau}P_t^A\left[P_t^A\left(1+i_t^A\right)\right]^{-\tau} + \delta_B{}^{\tau}\left(1+i_t^B\right)^{-\tau}\right\}}$
$i_t^A = \bar{r}_t$