Johannes BECK, Würzburg

Ein Entwicklungsmodell zum Dokumentieren beim Einsatz von digitalen Technologien

Beim Einsatz digitaler Technologien wie Computeralgebrasystemen (CAS) ist es Gegenstand zahlreicher Diskussionen, wie Lösungen im Unterricht und in Prüfungen auf Papier notiert oder dokumentiert werden sollen.

Lösungsdokumentationen als Texte

Zunächst einmal sind Lösungsdokumentationen Texte mit mathematischem Inhalt gemäß der Definition von Text nach Paul Ricoeur, die als konstitutives Merkmal die „schriftliche Fixierung von Sinn“ (Beck / Maier 1994a, S.43) sieht. Dies erstreckt sich nach Beck und Maier auch auf Bilder und Graphiken (vgl. Beck / Maier 1994b, S.48). Einen Text zu verstehen, bedeutet demgemäß also den fixierten Sinn zu rekonstruieren. Busse weist darauf hin, dass man „den Kern des Verstehens von Schrifttexten auf die Zuordnug von Elementen des verfügbaren Wissens zu Elementen des Textformulars [reduzieren kann]“ (Busse 2015, S. 320). In der speziellen Situation der Prüfung ist der Lehrer gleichzeitig Leser und Korrektor des mathematischen Inhalts des Textes und daher sollten Verständnisschwierigkeiten nicht auf fehlendes Wissen seitens des Lehrers zurückzuführen sein. Folglich sind die Elemente des Textes (der Lösungsdokumentation) das Entscheidungsmoment des Verständnisses.

Modell zur Beschreibung von Schülerlösungen

Daraus ergibt sich die Frage, wie man die Elemente des Textes genauer beschreiben und ggf. klassifizieren kann. Ein erster Vorschlag dazu (vgl. Beck 2015) wurde anhand weiterer Schülerlösungen überarbeitet und in seiner Ausrichtung angepasst. Die Leitfrage der Analyse lautet: „Mit welchen Darstellungsmitteln wird auf welche Tätigkeiten im Lösungsprozess verwiesen?“ Diese Frage trägt einerseits dem obigen, weit gefassten Textverständnis Rechnung, andererseits wird aber auch versucht, die veränderte Unterrichtskultur durch den CAS-Einsatz nicht aus dem Blick zu verlieren. Die Grundüberzeugung diesbezüglich ist, dass die Schülerinnen und Schüler Tätigkeiten auf andere Art (z.B. das Lösen von Gleichungen mit dem symbolischen Rechner per Knopfdruck) und als Folge dessen auch andere Tätigkeiten an sich (z.B. das experimentelle Verändern von Variablen mittels Schieberegler) ausführen (vgl. Barzel ea. 2005). Wie diese veränderten Tätigkeiten zu dokumentieren sind, ist offen: es gibt keine aus der Mathematik heraus begründbaren Sachzwänge, die das Aufschreiben regeln könnten. Daher ist der Blick in die Praxis wichtig, da Schülerinnen und

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

Schüler (und auch Lehrerinnen und Lehrer) angesichts der gegenwärtigen Situation einer fehlenden normativen Setzung im Schulalltag ihre eigenen Methoden entwickeln (vgl. auch Ball 2014).

Um die Art, wie Schülerinnen und Schüler dokumentieren, genauer zu beleuchten und Besonderheiten festzustellen, wurden 36 bzw. 18 authentische Abiturlösungen aus dem bayerischen CAS-Abitur von 2014 und 2015 im Bereich der Analysis entsprechend der oben genannten Analysefrage untersucht und Bedeutungselemente entsprechend der qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring in Kategorien eingeteilt (vgl. Mayring 2015). Durch eine Kombination der beiden wesentlichen Dimensionen ergibt sich das in Abbildung 1 dargestellte zweidimensionale Raster.

Darstellungsbezogene Dimension

Rechnereinsatz	Input / Output	unspezifisch	nur wenn Zeichnung gefordert
Mathematisieren/ Interpretieren	unterstützend	ja	
Erklärungen	unterstützend	ja	unterstützend
Ergebnisse	ja	ja	nur wenn Zeichnung gefordert
Mathematischer Ansatz	ja	ja	
Strukturierungs-elemente	ja	ja	
	formelsprachliche Ausdrücke • mathematische Symbole • Rechnersyntax	Verbalisierungen	sonstige Darstellungen: • Graphen • Tabellen • Skizzen etc.

Tätigkeitsorientiere Dimension

Abbildung 1 – Deskriptives Raster

In der darstellungsbezogenen Dimension werden formelsprachliche Ausdrücke, Verbalisierungen und sonstige Darstellungen unterschieden. Durch den CAS-Einsatz tritt neben der traditionellen mathematischen Formelsprache auch eine rechnerspezifische Syntax – wie etwa solve(f‘(x)=0, x) – auf. Verbalisierungen umfassen alle Äußerungen, die „mit Worten“ festgehalten sind. Dies können einzelne Wörter, Versatzstücke oder auch Passagen ausformulierter Sätze sein, wie sie etwa bei einigen Schülerdokumentationen auftreten. Es liegt auf der Hand, dass in verbalisierten, mathematischen Texten formelsprachliche Ausdrücke auftreten. An dieser Stelle entsteht für die Kategorisierung die Schwierigkeit der nicht eindeutigen Zuordnung, die jedoch dadurch gelöst werden kann, dass jedes Element als „Box" aufgefasst werden kann, die weitere Elemente beinhalten darf. Beispielsweise ist das Element „$f_1(x)$ ableiten" eine Verbalisierung, enthält aber mit $f_1(x)$ auch einen formelsprachlichen Ausdruck.

Alle anderen Darstellungsarten wurden in der Kategorie „sonstige Darstellungen" zusammengefasst.

Die tätigkeitsbezogene Dimension enthält die Kategorien Rechnereinsatz, Mathematisierungen / Interpretationen, Erklärungen, mathematischer Ansatz, Ergebnisse und Strukturierungselemente, die weitestgehend bei Beck (2015) erklärt wurden.

Ein Entwicklungsmodell

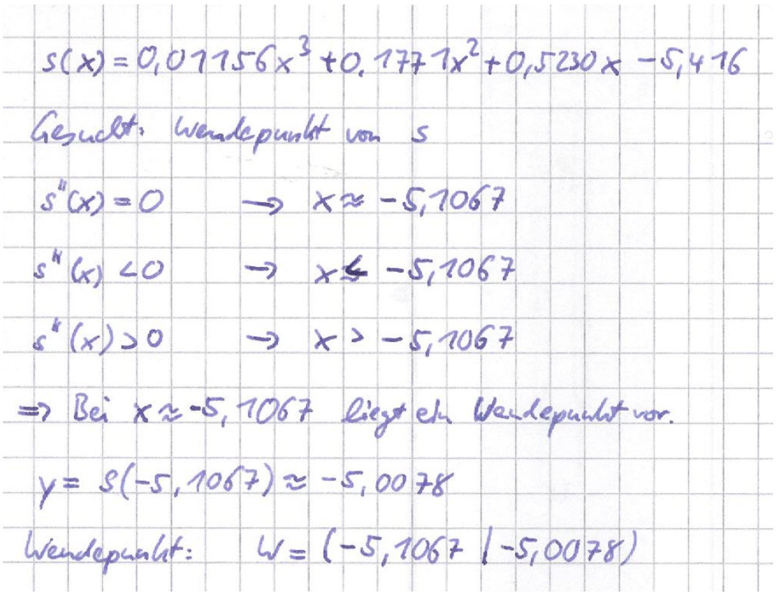
Auf Grundlage des obigen deskriptiven Rasters wird derzeit ein Modell entwickelt, das Entwicklungslinien aufzeigen soll, wie Dokumentationen im Laufe der Oberstufe entwickelt werden könnten. Das Modell umfasst drei Stufen: Novize, Fortgeschrittener, Experte. Für Novizen (gemeint sind Schüler, die das CAS gerade erst bekommen haben) ist es wichtig, neben neuen mathematischen Inhalten den Umgang mit dem CAS zu erlernen. Die Dokumentationen fokussieren daher auf diese beiden Aspekte, d.h. die Kategorien „mathematischer Ansatz" und „Rechnereinsatz" müssen sinnvoll verbunden werden.

Fortgeschrittene sollten keine grundsätzlichen Schwierigkeiten mehr mit der Bedienung des Werkzeugs haben. Daher kann die Dokumentationen auf die Kommunikation von mathematischem Inhalt fokussiert werden.

Grundsätzliches Ziel sollte es sein, dass Schülerinnen und Schüler, die die Stufe der Experten erreicht haben, in verbalisierter Form den Lösungsweg im Großen erklären können (vgl. Beck 2015), dabei formelsprachliche Ausdrücke zur Präzisierung und Formalisierung heranziehen und in angemessener Weise den Einsatz des Werkzeugs dokumentieren.

Neben dem deskriptiven Raster sollen auch Theorien zum Lernen mit digitalen Werkzeugen mit berücksichtigt werden, etwa die Theorie der instrumentellen Genese (vgl. Drijvers ea. 2010), um das Erlernen des Dokumentierens mit dem Lernen von Mathematik mit digitalen Werkzeugen zu verknüpfen.

Beispiellösungen



$s(x)=0{,}01156x^3+0{,}1771x^2+0{,}5230x-5{,}416$

Gesucht: Wendepunkt von s

$s''(x)=0 \rightarrow x\approx-5{,}1067$

$s''(x)<0 \rightarrow x<-5{,}1067$

$s''(x)>0 \rightarrow x>-5{,}1067$

$\Rightarrow$ Bei $x\approx-5{,}1067$ liegt ein Wendepunkt vor.

$y=s(-5{,}1067)\approx-5{,}0078$

Wendepunkt: $W=(-5{,}1067\,|\,-5{,}0078)$

Abbildung 2 – Beispiellösung als Diskussionsgrundlage

Anhand von Beispiellösungen (vgl. Abb. 2) sollen verschiedene Möglichkeiten der Dokumentation aufgezeigt und diskutiert werden. Dies soll es Lehrerinnen und Lehrern ermöglichen, ihr eigenes Wissen über Lösungsdokumentationen zu vertiefen und Schülerinnen und Schülern zu helfen, Schwierigkeiten beim Dokumentieren zu überwinden.

Literatur

Ball, L. (2014). Use of Computer Algebra Systems (CAS) and written solutions in a CAS allowed Year 12 mathematics subject: Teachers’ beliefs and students’ practices. PhD-Thesis. Graduate School of Education. The University of Melbourne.

Barzel, B., Hußmann, S. & Leuders, T. (2005). Computer, Internet & Co. im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Beck, C. & Maier, H. (1996). Zu Methoden der Textinterpretation in der empirischen mathematikdidaktischen Forschung. In Maier, H., Voigt, J. Arbeiten zur interpretativen Unterrichtsforschung. (p. 43 – 76). Köln: Aulis-Verlag Deubner.

Beck, J. (2015). Schülererklärungen in Lösungsdokumentationen beim Einsatz von CAS in Prüfungen. In Caluori, F. Linneweber-Lammerskitten, H. Streit, C. Beträge zum Mathematikunterricht 2015. Münster: WTM-Verlag.

Busse, D. (2015). Sprachverstehen und Textinterpretation. Grundzüge einer verstehenstheoretisch reflektierten interpretativen Semantik. Wiesbaden: Springer.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P. & van Gisbergen, S. (2010). Instrumental Orchestration: Theory and Practise. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, F. Arzarello (Eds.), Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. January 28th – February 1st 2009, Lyon. Lyon: INRP.

Mayring, P. (2015). Qualitative Inhaltsanalyse – Grundlagen und Techniken. 12. Auflage. Weinheim: Beltz.