

Anna-Katharina ROOS, Würzburg

Fehlvorstellungen Mathematikstudierender im Hinblick auf reelle Funktionen

Verständnis- und Lernschwierigkeiten begegnet man beim Lehren von Mathematik an der Hochschule häufig, u. a. bei der Korrektur von Klausuren oder in Übungen und Tutorien. Auch beim Arbeiten mit reellen Funktionen (im Fachgebiet Analysis), die sowohl am Gymnasium zentral sind als auch in der Hochschulmathematik eine Grundlage für weitere Gebiete darstellen, treten immer wieder gleiche oder ähnliche Fehler beim Bearbeiten von Aufgaben auf, worauf u. a. Dreyfus und Eisenberg (1983) hinweisen. Die Bedeutung der Fehleranalyse allgemein unterstreicht Oser et al. (1999) durch die Theorie des „negativen“ Wissens. Er bezeichnet das Wissen über mögliche Fehler („negatives“ Wissen) als Schutzwissen, da es angibt, was in einer Situation nicht getan werden darf. Auch Schoy-Lutz (2005) behauptet im Hinblick auf die Schule, dass Fehler, die auf Grund von Fehlvorstellungen entstehen, nur vermieden werden können, wenn man die Denkstrategien der Schüler beachtet. Auch hinsichtlich Lernschwierigkeiten an der Hochschule erscheint es somit sinnvoll, Fehler genauer zu betrachten und eventuell einen Überblick über typische Denkmuster bzw. Fehler und Fehlvorstellungen zu gewinnen. Denn wie schon Vinner und Dreyfus (1989) feststellen „The knowledge of these particular cognitive schemes may make the teacher more sensitive to students' reactions and thus improve communication.“

Dreyfus und Eisenberg (1983) bemerken zum Funktionsbegriff: „The function concept is one of the most fundamental in all of mathematics and one for which students seldom develop a satisfactory understanding.“ Sie haben sich daher mit Intuitionen Studierender (der Fächer Wirtschaft, Geographie etc.) zum Begriff der Funktion beschäftigt und bestätigen, dass die Studierenden Schwierigkeiten mit den Begriffen Linearität, Differenzierbarkeit und Periodizität haben. Außerdem haben Dreyfus und Eisenberg (1984) die Intuitionen von Junior High School Schülern bzgl. des Funktionsbegriffs mit Hilfe eines Fragebogens geprüft. Wie beide (1982) beschreiben, verstehen sie unter Intuitionen geistige Repräsentationen von Tatsachen, die offensichtlich und selbstverständlich erscheinen.

Auch Vinner und Dreyfus (1989) haben sich mit dem Funktionsbegriff beschäftigt. Sie haben zu Beginn einer Analysis Vorlesung Vorstellungen

¹Gemeint sind jene Denkschemata, die bei derselben Person in unterschiedlichen, zeitnahen Situationen auftreten können.

Studierender mit von diesen gegebenen Definitionen vom Funktionsbegriff verglichen und Übereinstimmungen und Unterschiede aufgezeigt.

Besondere Beachtung haben Tsamir und Ovodenko (2013) Schwierigkeiten bzgl. Wendepunkten geschenkt. Sie haben sowohl auf der sprachlichen, als auch auf der graphischen Ebene untersucht, inwieweit Mathematikstudierende diesen Begriff verinnerlicht haben und anwenden können. Dabei haben sie vier Fehler ermittelt, die in Beziehung mit Wendepunkten stehen und Schwierigkeiten, die in Beziehung mit den Beweistechniken der Studierenden stehen. Insgesamt wurde gezeigt, dass die Probanden fehlerhafte concept images (s. Tall und Vinner (1981)) von Wendepunkten besitzen.

Im Gegensatz zu dieser speziellen Betrachtung des Begriffs des Wendepunktes, sollen im Folgenden die allgemeineren Begriffe Monotonie, Differenzierbarkeit und Extremwerte untersucht werden. Diese sind zentral im Umgang mit Funktionen und spielen gerade für die geometrische Interpretation von Funktionseigenschaften eine wichtige Rolle.

Es gilt zu beachten, dass die nachfolgende Arbeit noch im Entstehen ist und daher noch keine endgültigen Ergebnisse präsentiert werden können.

Ziele und Forschungsfragen sind die Folgenden: Welche Fehler und Fehlvorstellungen lassen sich im Hinblick auf die Themengebiete Monotonie, Extremwerte und Differenzierbarkeit bei den Studierenden nachweisen? Wie verbreitet ist der jeweilige Fehler? Welche Ursachen könnten die identifizierten Fehlerphänomene haben? Beeinflusst die Repräsentationsebene der Aufgabenstellung die Lösungen der Studierenden?

Um Fehlvorstellungen aufzudecken, gibt es viele Möglichkeiten. Im Rahmen dieser Untersuchung wurden – bzw. werden – Fragebögen und Interviews verwendet. Die Fragebögen sollen dabei zwei verschiedene Repräsentationsebenen ansprechen: Zum einen die symbolische Ebene durch einen sprachlichen Test, zum anderen die graphische Ebene durch einen graphischen Test. Inhaltlich sollen dieselben Themen angesprochen werden, um gezielt die möglicherweise unterschiedliche Bearbeitung der beiden Tests vergleichen zu können.

Bisher wurde der sprachliche Test entwickelt. Dieser besteht aus 20 Aussagen (die je ein Item darstellen) über Funktionen, die die Studierenden auf ihren Wahrheitsgehalt hin untersuchen sollen. Es sind dabei 15 Aussagen falsch und fünf Aussagen wahr. Die Aussagen behandeln die Gebiete Monotonie, Extremwerte, Differenzierbarkeit (diese können jedoch nicht immer scharf voneinander getrennt werden). Der graphische Test ist noch in Entwicklung.

Im sprachlichen Test sollen sich die Studierenden zum einen entscheiden,

ob sie eine Aussage als wahr oder falsch annehmen, zum anderen ist zusätzlich eine Begründung gefordert für die Entscheidung, ob die Studierenden denken, dass eine Aussage wahr oder falsch ist. Die Antwort wird hierbei gelenkt durch die Möglichkeiten: „wahr, aus der Vorlesung bekannt“, „wahr, intuitiv klar“, „wahr, sonstiges“ und „falsch, ein Gegenbeispiel ist“. Auf dem Fragebogen ist außerdem viel Platz, damit die Studierenden ihre Begründungen anhand von Zeichnungen illustrieren können. Für die Bearbeitung haben sie 60 Minuten Zeit. Dieser Test wurde in der Bachelorveranstaltung Analysis II im Sommersemester 2014 in Würzburg durchgeführt.

Quantitative Ergebnisse

Folgende Tabelle zeigt den Anteil der richtigen Antworten der Studierenden zu den Items der Gebiete Monotonie, Extremwerte, Differenzierbarkeit und wahre Items, wobei in der Spalte „Ankreuzen“ lediglich die Entscheidung wahr oder falsch berücksichtigt wurde, d. h. die Tatsache, ob die Studierenden richtig angekreuzt haben, dass eine Aussage wahr bzw. falsch ist. In der Spalte „Begründung“ wurde untersucht, ob die notierten Begründungen der Studierenden mathematisch korrekt sind.

	Ankreuzen	Begründung
wahre Items	86 %	37 %
Monotonie	35 %	18 %
Extremwerte	37 %	17 %
Differenzierbarkeit	21 %	4 %

Die Tabelle zeigt beispielsweise, dass die Studierenden die falschen Items, die primär die Monotonie betreffen, zu 35 % als falsche Aussagen erkannt haben, aber nur 18 % dies begründen konnten. Man sieht, dass insgesamt die wahren Items am besten bearbeitet wurden. Außerdem ist schnell klar, dass es den Studierenden – wie erwartet – schwer gefallen ist, ihre Entscheidungen zu begründen. Weitere Auswertungen sind noch in Arbeit.

Qualitative Ergebnisse

Eine qualitative Auswertung bestand in der Bildung von Antwortkategorien zu jedem Item. Im Anschluss wurden die einzelnen Kategorien miteinander verglichen und Oberkategorien dadurch gebildet, dass die Kategorien der jeweiligen Items zusammengefasst wurden. Es trat z. B. die Verwechslung von Voraussetzung und Folgerung bei drei Items auf, wodurch eine Oberkategorie dazu erstellt wurde.

Zu den Oberkategorien gehören u. a. methodische Fehler etwa, wie oben genannt, die Verwechslung von Voraussetzung und Folgerung, Nichtbeach-

tung gewisser Voraussetzungen und Zusatzannahmen. Diese Art von Fehler stellt auch Radatz (1980) dar. Außerdem lassen sich inhaltliche Fehler zur Differenzierbarkeit, zu Extremwerten und zur Monotonie finden. Bezüglich der Monotonie sind das z. B. dass konstante Funktionen nicht als monoton erkannt werden, dass die Addition zweier monotoner Funktionen wieder eine monotone Funktion ergibt und dass monoton mit injektiv gleichgesetzt wird. Ein weiteres spannendes Feld für mögliche unzureichende Vorstellungen ist die Oberkategorie Probleme mit der Oszillationsvorstellung.

Ovodenko und Tsamir (2013) bemerken „[...] more research is needed to study students' intuitions, concept images, visualization, definitions, proofs, and comprehension of conversions from certain semiotic representations to other“. Es könnte auch hier interessant sein zu vergleichen, ob Studierende auf ähnliche Problemstellungen auf der graphischen Ebene anders als auf der symbolischen Ebene reagieren.

In einem graphischen Test sollen daher in nächster Zeit dieselben Inhalte getestet werden wie im sprachlichen Test. Neben der Entwicklung und dem Einsatz eines graphischen Tests, sind die Durchführung von Interviews sowie die Fertigstellung der Auswertung des sprachlichen Tests geplant.

Literatur

- Dreyfus, T., Eisenberg, T. (1982). Intuitive functional concepts: A baseline study on intuitions, *Journal for Research in Mathematics Education*, 13 (5), 360-380.
- Dreyfuß, T., Eisenberg, T. (1983). The Function Concept in College Students: Linearity, Smoothness and Periodicity. *Focus on learning problems in mathematics*, 5, 119-132.
- Dreyfus, T., Eisenberg, T. (1984). Intuitions on functions. *The Journal of Experimental Educational*, 77-85.
- Oser, F., Hascher, T., & Spychiger, M. (1999). Lernen aus Fehlern. Zur Psychologie des „negativen“ Wissens. In W. Althof (Hrsg.), *Fehlerwelten* (S. 11-41). Opladen: Leske+Budrich.
- Radatz, H. (1980). *Fehleranalysen im Mathematikunterricht*. Braunschweig: Vieweg.
- Schoy-Lutz, M. (2005). *Fehlerkultur im Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franz-Becker Verlag.
- Tall, D., Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, 12(2), 151-169.
- Tsamir, P., Ovodenko, R. (2013). University students' grasp of inflection points. *Educational Studies in Mathematics*, 83(3), 409-427.
- Vinner, S., Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 356-366.