

Hanna GÄRTNER, Matthias LUDWIG, Frankfurt

## **Zeichnen im Mathematikunterricht**

Die Kompetenz „mathematische Darstellungen verwenden“ ist mittlerweile fest in den Bildungsstandards verankert. Hierzu zählen sowohl die einzelnen Darstellungsformen auszuwählen und anzuwenden als auch Beziehungen zwischen ihnen zu erkennen und zwischen ihnen zu wechseln. Dieser Wechsel ist auch im Mathematikunterricht wichtig, Hohn (2012) hat beispielsweise nachgewiesen, dass sich ein flexibler Darstellungswechsel positiv auf das mathematische Problemlösen auswirkt. Legt man den Fokus auf ikonische Darstellungen, so ist ein Grundbestandteil dieser Darstellungsform im Mathematikunterricht das Zeichnen. Im Geometrieunterricht ist das sofort einleuchtend, aber auch beim Erstellen von Funktionsgraphen oder von Baumdiagrammen wird gezeichnet. Zeichnungen entstehen dabei zum einen mit Stift und Papier, zum anderen auch mit Kreide an der Tafel, manchmal mit dem Computer. Van Essen und Hamaker (1990), die das Anfertigen von Zeichnungen mit Stift und Papier beim Lösen von Textaufgaben untersucht haben, fanden heraus, dass bei Fünftklässlern Zeichnungen bzw. Zeichenübungen einen positiven Einfluss auf die Mathematikleistung haben. Wie viel sollte also im Mathematikunterricht gezeichnet werden? Um zunächst Einblicke zu erhalten, wie viele Zeichnungen von Lernenden selbst angefertigt werden, wurde mittels einer Pilotstudie eine Bestandsaufnahme erstellt, wie viele Zeichnungen in den Heften von Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I innerhalb eines Schuljahres vorkommen.

### **Design der ZiM-Studie**

Die Pilotstudie ZiM (Zeichnungen in Mathematikheften) wurde im Herbst 2014 an 5 Regelschulen im Raum Frankfurt durchgeführt, bei der Hefte von Schülerinnen und Schülern von insgesamt zwanzig Klassen der Jahrgangsstufen 5 bis 9 untersucht wurden. Es wurde erhoben, welche Themen in den Heften der Schülerinnen und Schüler behandelt wurden, welchen Leitideen diese zuzuordnen waren und wie viele Zeichnungen zu den einzelnen Themen vorkamen. Als Zeichnung wurde hier jede selbstangefertigte, ikonische Darstellung verstanden, also neben obligatorischen Zeichnungen aus dem Bereich der Geometrie auch Funktionsgraphen oder Strukturskizzen wie Baumdiagramme. Eine freihändig erstellte Skizze wurde genauso gezählt wie eine Zirkel- und Linealkonstruktion.

## Ergebnisse der Pilotstudie

Es lässt sich feststellen, dass Hefte innerhalb einer Klasse eine homogene Anzahl an Zeichnungen aufweisen. Kleinere Unterschiede lassen sich mit dem Fehlen eines Lernenden in der jeweiligen Schulstunde erklären, in der die Zeichnung entstand. Da die Anzahlen und Anfertigungszeitpunkte so ähnlich sind, liegt die Vermutung nahe, dass die Zeichnungen nicht aus eigener Motivation der Lernenden entstanden, sondern nach Aufforderung der Lehrperson oder durch Vorgabe aus dem Aufgabentext angefertigt wurden. Als Beispiel für eine starke Aufforderung durch eine Lehrkraft sei eine fünfte Klasse angegeben, bei der die Lehrerin Textaufgaben nicht nach dem Schema Frage-Rechnung-Antwort bearbeiten ließ, sondern dieses Schema auf Frage- Zeichnung/Skizze/Tabelle-Rechnung-Antwort (vgl. Abb. 1) erweiterte.

**Abb. 1:** Bearbeitung einer Textaufgabe nach dem Schema Frage-Zeichnung/Skizze/Tabelle-Rechnung-Antwort

Frage: wie viel Heu brauchen 14 Ponys in einem Monat?

Zeichnung/Skizze/Tabelle

1 Sack Heu, 2 Sack Heu, 3 Sack Heu, 1 Pferd 3Kg am Tag

Rechnung: ~~3~~ 14 · 3Kg · 14 = 42

$$\begin{array}{r} 42 \cdot 30 \\ \hline 1260 \\ + \\ \hline 1260 \end{array}$$

Antwort: 14 Ponys benötigen in 1 Monat 1260 Kg Heu.

Vergleicht man dagegen die verschiedenen Klassen einer Jahrgangsstufe miteinander, variiert die Anzahl der Zeichnungen sehr stark. So fanden wir beispielsweise eine Klasse der fünften Jahrgangsstufe, bei der innerhalb eines Schuljahres keine einzige Zeichnung in den Heften der Schülerinnen und Schüler auftauchte. In einer anderen fünften Klasse dagegen wurden über 30 Zeichnungen be-

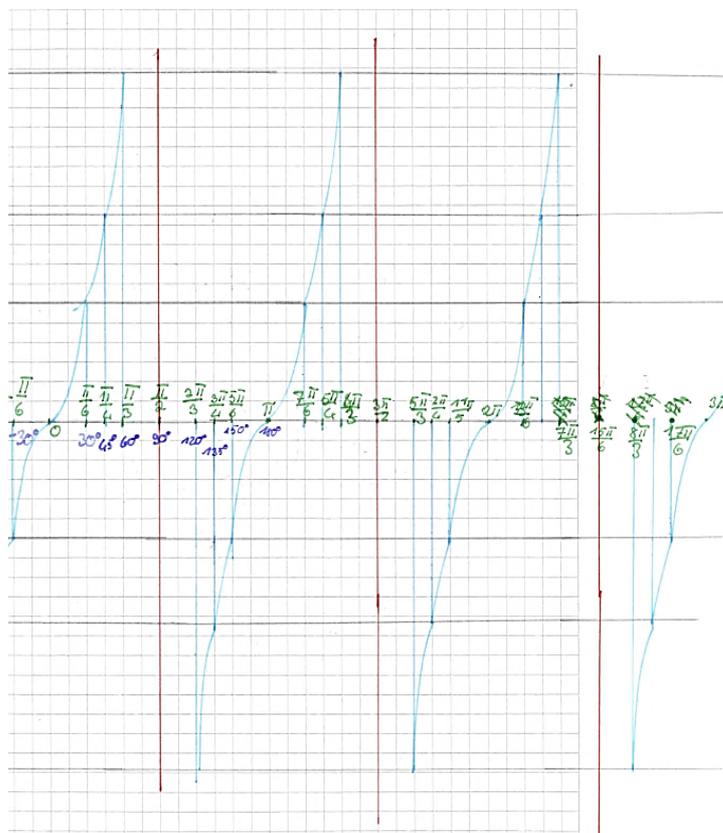
zogen auf ein Schuljahr gezählt. Dieser Befund der äußerst heterogenen Anzahlen an Zeichnungen trifft auf alle untersuchten Klassenstufen zu. Vergleicht man zudem nicht einzelne Klassen innerhalb einer Jahrgangsstufe sondern die Jahrgangsstufen untereinander, so fällt auf, dass hier die Höchstzahl der vorkommenden Zeichnungen ebenfalls stark variiert. Die höchste Anzahl an Zeichnungen in der siebten Jahrgangsstufe beträgt beispielsweise 16, in der achten Jahrgangsstufe wurden dagegen 48 Zeichnungen über ein Schuljahr als Maximalanzahl gezählt. Die Leitideen „Raum und Form“ und „Größen und Messen“ nehmen in dieser Klasse einen sehr großen Raum ein. Das sind genau die beiden Leitideen, denen erwartungs-

gemäß die höchste Anzahl an Zeichnungen zugeschrieben werden können. In den siebten Klassen dagegen wurden Themen dieser Leitideen viel weniger umfangreich behandelt, was vergleichsweise weniger Zeichnungen als in den achten Jahrgangsstufen erklärt. Die Schwankungen sprechen dafür, dass die einzelne Lehrkraft starken Einfluss auf die Häufigkeit des Anfertigens von Zeichnungen hat.

## Hypothesen

Die Beobachtungen der Studie lassen sich durch folgende mögliche Ursachen erklären. Zunächst setzt sich die eingangs angesprochene Kompetenz „Darstellungen verwenden“ bezogen auf den Mathematikunterricht aus verschiedenen Darstellungsformen und dem Wechsel dazwischen zusammen. Das Zeichnen an sich bildet dabei nur einen kleinen Bruchteil der ikonischen Darstellungen, werden doch die meisten ikonischen Darstellungen mit digitalen Werkzeugen erstellt, wie in Schulbüchern zu beobachten ist. Das Selbst-Zeichnen zwecks Visualisierung ist dann nicht mehr notwendig, weil Figuren, Situationen oder Sachverhalte bereits im Buch abgedruckt und somit für jeden Lernenden veranschaulicht sind.

Abb. 2 Graph der Tangensfunktion, Schülerin der Klasse 9



Greift man auf vorgefertigte Materialien zurück, so ergibt sich eine Zeiterparnis gegenüber selbstangefertigten Zeichnungen. Außerdem sind sie hilfreich für Lehrerinnen und Lehrer, die selbst unsicher im Zeichnen sind. Aufgaben zum Freihandzeichnen finden sich selten in Schulbüchern; generell ist zu beobachten, dass in Aufgabenstellungen zwar zum Zeichnen, jedoch ohne konkrete Anleitung aufgefordert wird. Wenn solche Aufgaben an die Lernenden gestellt werden, sollten die Lehr-

personen selbst in der Lage sein, solche (Freihand-) Zeichnungen anzufertigen. Sind diese unsicher im Zeichnen, kann es sein, dass Zeichenaufgaben

übersprungen werden. Neben dem Zeichnen an sich sollte aber gerade auch das Freihandzeichnen im Unterricht geübt werden, was an einem Beispiel der Tangensfunktion deutlich wird (Abb. 2). Die Schülerin hat erkannt, dass die einzelnen Punkte nicht mit dem Geodreieck verbunden werden können und benutzt stattdessen ein Parabellineal. Hätte sie dagegen eine Kurve freihändig durch die Punkte gelegt, wäre nicht nur ein geschmeidiger Graph entstanden. Sie hätte zudem direkt die Steigung der Tangensfunktion erfahren bzw. erfühlen können, die zur Nullstelle immer geringer wird und sich danach wieder vergrößert. Das Zeichnen ohne Hilfsmittel wie Lineal und Co. kann ein Erkennen ermöglichen, das durch die Konzentration auf die Hilfsmittel teilweise verloren geht. Es stellt sich also die Frage, welchen Einfluss die Werkzeuge auf den Verstehensprozess einer Aufgabe bzw. deren Lösungserfolg haben. Eine Zeichnung kann zur Darstellung der Aufgabe, der Lösung oder im Löseprozess selbst angefertigt werden. Je nachdem, wann die Zeichnung „falsch“ oder unvollständig ist: Lässt dieser Zustand auf Verständnis- oder Wissenslücken des Lernenden schließen? Eignen sich entstandene Zeichnungen also eventuell als Diagnosewerkzeug? Die oben angesprochene Studie von Van Essen und Hamaker ist von 1990. Existiert ein Zusammenhang zwischen dem Anfertigen von Zeichnungen und der Mathematikleistung überhaupt auch heute noch? Kann dieser Zusammenhang auch bei anderen Aufgaben als Textaufgaben festgestellt werden? Wenn das Anfertigen einer Zeichnung als gewinnbringend erkannt wird, wird diese Strategie auch selbst gewählt oder wird trotzdem nur nach Aufforderung gezeichnet?

### **Ausblick**

Zur Klärung der beschriebenen Fragestellungen und aufgestellten Hypothesen ist eine Interventionsstudie im Pre-/Post-Design mit abschließendem Followup-Test geplant, wobei von uns angeleitet festgelegte Zeichenübungen in den Unterricht integriert werden. Es soll der Frage nachgegangen werden, ob sich die Ausweitung der Integration von Freihandzeichnungen in den Mathematikunterricht der Sekundarstufe lohnt.

### **Literatur**

Hohn, K. (2012). *Gegeben, gesucht, Lösung? Selbstgenerierte Repräsentationen bei der Bearbeitung problemhaltiger Textaufgaben*. Dissertation. Universität Koblenz-Landau, Landau. Fachbereich Psychologie. Van Essen, G. & Hamaker, C. (1990). Using self-generated drawings to solve arithmetic word problems. *Journal of Educational Research*, 83 (6), 301–312.