Ingolf SCHÄFER, Bremen

FABEL - Ein begleitendes Aufgabenkonzept für die Eingangsphase an der Universität

Das Beweisen im Mathematikstudium bereitet den Studierenden gerade zu Beginn große Probleme. Aber auch beim Begriffebilden gibt es große Schwierigkeiten. Dreyfus (2002, S. 18) stellt beispielsweise fest, dass in der linearen Algebra "students tend to avoid this high level of abstraction by performing actions on a purely formal level" und schließt, dass "... even the most basic notions of linear algebra, including the very essence of linearity are often poorly mastered and understood by the students." (ebd.).

In ähnlicher Weise äußern sich auch (Dorier, Robert, Robinet & Rogalsiu, 2002, S. 95): „For a majority of the students, linear algebra is no more than a catalogue of very abstract notions that they represent with great difficulty. In addition, they are submerged under an avalanche of new words, new symbols, new definitions, and new theorems."

Um diese Probleme anzugehen wurde an der Universität Bremen das FABEL-Aufgabenkonzept (Bikner-Ahsbahs & Schäfer, 2013) etabliert, das hauptsächlich im Rahmen einer einstündigen Begleitveranstaltung zur Analysis und linearen Algebra umgesetzt wurde.

Was ist FABEL?

FABEL steht (fast) als Akronym für die Aufgabentypen **F**ingerübungen, **A**nwenden und Algorithmen abarbeiten, **B**egriffe bilden und **B**eweise realisieren, **E**insatz von Heuristiken lernen und **L**ese- und Schreibübungen. Damit ist allerdings nicht eine vollständige Kategorisierung von Aufgaben gemeint: gute Aufgaben im Sinne des FABEL-Konzepts decken vielmehr mehrere der Bereiche ab. Andererseits gibt es sehr wohl Mathematikaufgaben, die keinen der Aspekte bedienen. Wie im Folgenden erläutert, lassen sich die einzelnen Typen innerhalb von FABEL mit Hilfe von Boeros Beweismodell mit Teilaspekten von Beweisprozessen identifizieren, die wechselseitig voneinander abhängig sind.

Boeros Phasenmodell des Beweisens

Boeros Modell der Phasen des Beweisens (Boero, 1999) postuliert sechs Phasen und wurde erfolgreich in empirischen Untersuchungen eingesetzt (Heinze, 2004; Reiss & Renkl, 2002). Nach diesem Modell beginnen Beweisprozesse mit einer Problemstellung; aus der zunächst durch *unspezifisches Erkunden eine Vermutung entwickelt* wird. In der nächsten Phase wird die *Vermutung gemäß der üblichen Konventionen formuliert* und dann

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1055–1058). Münster: WTM-Verlag

spezifisch die Vermutung erkundet. Es folgt das *Auswählen von Argumenten und das Aneinanderfügen der Argumente zu einer Argumentationskette.* Die fünfte Phase stellt die *Niederschrift der Beweiskette gemäß der gültigen Standards* dar (beispielsweise in einer mathematischen Zeitschrift). Abschließend könnte in einer sechsten Phase noch *der formal-logische Beweis* stehen, der dann rigideren Beweisstandards von Logik und Metamathematik genügt. Diese sechste Phase findet aber laut Boero häufig nicht mehr statt, sondern stellt eher das anzustrebende Ideal dar. Diese Phasen sind in realisierten Beweisprozessen häufig nicht linear geordnet, sondern es findet Vor- und Zurückgehen statt.

Die traditionellen Beweisaufgaben in den Vorlesungen zur Analysis und linearen Algebra sind in ihrer Aufgabenstellung allerdings nicht geeignet, Studierende beim Durcharbeiten dieser Phasen zu unterstützen. Üblicherweise wird eine fertig formaliserte Vermutung präsentiert (Ende von Phase 2) und lediglich die niedergeschriebene Beweis als Lösung erwartet (Ende von Phase 5). Diese Aufgabenstellung kann zu dem von Dreyfus eingangs kritisierten Handeln auf einer rein formalen Ebene führen, also einem rein syntaktischen Arbeiten durch mehr oder minder zielgerichtete Termumformungen.

FABEL im Einzelnen

Im Folgenden werden die einzelnen Aspekte des Konzepts näher erläutert.

Fingerübungen: Unter Fingerübungen werden in Anlehnung an das Musizieren solche Übungen verstanden, die von kurzer Dauer und kurzem Aufwand sind und die Automatisierung von Routinen für den jeweiligen Bereich unterstützen. So werden Lernende für komplexe kognitive Anforderungen in anderen Bereichen entlastet (Stern, 2009). Solche Aufgaben schaffen also die notwendige Voraussetzung um überhaupt spezifisch und unspezifisch in einem Bereich explorieren zu können. Beipielaufgaben: *Geben Sie eine 2x2 Matrix vom Rang 1 an. Geben Sie eine stetige, reelle Funktion mit genau zwei Nullstellen an.*

Anwenden und Algorithmen abarbeiten: Dies ist der bekannte klassische Aufgabentyp, bei dem das Anwenden von Definitionen, Regeln oder bestimmter Algorithmen geübt wird. Dabei handelt es sich um Aufgaben, die nicht direkt aus Boeros Phasen heraus begründet sind, sondern innerhalb konkreter Beweise auftreten können. Beispiel: *Bestimmen Sie Kern und Bild der folgenden linearen Abbildungen zwischen* $\boldsymbol{R}^2$ *und* $\boldsymbol{R}^3$ *mit den Zuordnungsvorschriften:* $f(x,y)=(x+y,x-y,0)$, *und* $g(x,y)=(x+y,x-y,0)$.

Begriffe bilden: Aufgaben in dieser Kategorie sind dazu gedacht, Begriffe zu reflektieren, in Kontexte zu stellen oder voneinander abzugrenzen. Dies ist in allen Phasen von Boeros Modell sinnvoll, speziell aber in der ersten und dritten. Beispiel: *Geben Sie in eigenen Worten eine Definition der Begriffe Grenzwert einer Folge, Cauchy-Folge und Folgenkonvergenz. Geben Sie jeweils drei Beispiele und Nicht-Beispiele an. Wie hängen diese Begriffe zusammen? Könnte man auf einen der Begriffe verzichten?*

Beweise realisieren: Hier geht es darum, dass bei den Beweisaufgaben die Phasen von Boeros Modell explizit angesprochen, eigene Vermutungen und Explorationen eingefordert werden. Beispiel: *Welche Drehungen und Spiegelungen führen ein regelmäßiges Viereck (Sechseck, Achteck) in einander über? Wie viele könnten es beim regelmäßigen Dreieck sein? Nimmt man die Komposition von Abbildungen als Verknüpfung, welche algebraischen Eigenschaften haben diese Mengen von Drehungen und Spiegelungen?*

Einsatz von Heuristiken: Heuristiken sinnvoll einzusetzen bildet einen Kernbereich des Problemlösens. Aufgaben zum Einsatz von Heuristiken sind solche, die Gelegenheit für Vorwärts- oder Rückwärtsarbeiten, das Betrachten von Grenzfällen, o.ä. geben. Diese spielen bei Boero eine zentrale Rolle beim Finden der Hypothese und beim Finden der Argumente, also in Phase 1 und 3. Beispiel (als Fortsetzung des letzten Beipiels): *Was ist anders, wenn man an ein „Zwei-Eck", also eine Linie betrachtet? Welche Grenzeigenschaft zeigt sich dann?*

Lese- und Schreibübungen: Das Schreiben der Übungsaufgaben bietet Gelegenheit, das Verfassen mathematischer Texte zu üben, aber zunächst müssen Definitionen und mathematische Aussagen erfasst werden. Das ist für Phase 2 und 5 unerlässlich, spielt aber auch in den anderen Phasen eine Rolle. Beispiel: *Vergleichen Sie die Definition einer linearer Abbildung aus der Vorlesung mit der folgenden: „Eine Funktion mit der Gleichung f(x)=ax+b heißt lineare Funktion. Ihr Graph ist eine Gerade mit der Steigung a." Sind die Definitionen äquivalent oder gibt es Unterschiede?*

Die aufgeführten Bespiele dienen hauptsächlich zur Erläuterung der Typen. Eine Aufgabe nach dem FABEL-Konzept wird normalerweise mehrere solche Typen beinhalten. Ausführliche Beispielaufgaben zum FABEL-Konzept finden sich in Bikner-Ahsbahs und Schäfer (2013)

Zur Umsetzung

Das FABEL-Konzept wurde seit WiSe 2011 in Bremen im Rahmen von wöchentlichen zweistündigen Vertiefungen zur Linearen Algebra und Analysis eingesetzt. Dabei wurde eine Stunde für ein Projekt zum „forschenden Lernen" eingesetzt und die andere Stunde für das Bearbeiten und Besprechen von Aufgaben nach dem FABEL-Konzept in Präsenzübungen genutzt.

Innerhalb der normalen Tutorien wurde das FABEL-Konzept durch zusätzlichen Beispielen und Eigenaktivitäten der Studierenden eingesetzt, je nach Tutor in unterschiedlichem Umfang. Die Tutoren wurden hierzu vorab zum Einsatz von Heuristiken und Boeros Modell geschult. Ziel war es bei den traditionellen Beweisaufgaben, die Studierenden zum Explorieren und selbstständigen Bearbeiten der Phase 1 und 3 zu bringen.

Erfahrungen

Die zusätzlichen Aufgaben wurden laut Veranstaltungsevaluationen hauptsächlich als Hilfe und nicht als zusätzliche Arbeit wahrgenommen. So waren in der letzten Umsetzung im ersten Semester ohne Anwesenheitspflicht zur Veranstaltungszeit Montags von 8 bis 10 Uhr kontinuierlich um 90% der Anfänger anwesend. Eine umfassendere Auswertung ist geplant.

Literatur

Bikner-Ahsbahs, A., & Schäfer, I. (2013). Ein Aufgabenkonzept für die Anfängervorlesung im Lehramt Mathematik. In C. Ableitinger, J. Kramer, & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 57–76). Springer Fachmedien Wiesbaden. Abgerufen von http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-658-01360-8_4

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, (7(8)). Abgerufen von http://www - didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/990708Theme/990708 ThemeUK.html

Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalsiu, M. (2002). The Obstacle of Formalism in Linear Algebra. In J.-L. Dorier (Hrsg.), *On the Teaching of Linear Algebra* (S. 85–124). Springer Netherlands. Abgerufen von http://link.springer.com/chapter/10.1007/0-306-47224-4_2

Dreyfus, T. (2002). Computer-rich learning environments and the construction of abstract algebraic concepts. In *Technology in mathematics teaching* (S. 17–32). öbv & hpt Verlagsges., Wien.

Heinze, A. (2004). The Proving Process in Mathematics Classroom-Method and Results of a Video Study. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Reiss, K., & Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *34*(1), 29–35.

Stern, E. (2009). Intelligentes Wissen als der Schlüssel zum Können. In M. Neubrand (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009*. Abgerufen von http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/BzMU/BzMU2009/Beitraege/Hauptvortraege/STERN_Elsbeth_2009_IntelligentesWissen.pdf