Stefan SCHUMACHER, Jürgen ROTH

Bruchzahlbegriff und Bruchrechnung Grundvorstellungen im Schülerlabor erarbeiten

1. Das Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“

Das Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ der Universität Landau ist ein außerschulischer Lernort mit direktem Bildungsauftrag (Rasfeld/Scherer 2010). Hier stehen nach Jahrgangsstufen und Inhalt gegliederte Laborstationen zur Verfügung, in denen Schülerinnen und Schüler selbstständig Lehrplaninhalte erarbeiten können.

Das Ziel des Mathematik-Labors ist die Breitenförderung. Es sollen möglichst alle Schülerinnen und Schüler gefördert und für Mathematik begeistert werden. Ein Besuch im Mathematik-Labor erfolgt demnach immer im Klassenverband, wobei die Schüler/innen im Labor in Kleingruppen arbeiten. Die einzelnen Laborstationen werden dabei in drei Teilen bearbeitet, für die jeweils eine Doppelstunde à 90 Minuten zur Verfügung steht.

Einschlägige empirische Untersuchungen zeigen, dass der im Rahmen von Laborbesuchen erreichte Lernerfolg oft hinter den Erwartungen zurück bleibt (z.B. Rasfeld/Scherer 2010, Schmidt/Di Fuccia/Ralle 2011). Dies ist unter anderem auf die Tatsache zurückzuführen, dass Schülerlabore oft nur unzureichend mit dem Lernort Schule vernetzt werden. Aus diesem Grund enthält jede Laborstation des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“ Vernetzungselemente, die eine adäquate Vor- und Nachbereitung im Unterricht unterstützen und so die Nachhaltigkeit des Lernerfolgs sichern sollen. Im Folgenden werden am Beispiel der Station „Mathematik und Kunst“ die Konzeption einer Laborstation vorgestellt und Vernetzungsmöglichkeiten mit dem schulischen Unterricht aufgezeigt.

2. Laborstation „Mathematik und Kunst“

An der Station „Mathematik und Kunst“ des Mathematik-Labors werden anhand von Kunstwerken der „konkreten Kunst“ folgende Grundvorstellungen zum Bruchzahlbegriff und der Bruchrechnung selbstständig durch Schüler/innen in forschend-entdeckenden Lernprozessen erarbeitet:

- Teil eines Ganzen
- Teil mehrerer Ganzer
- Quasikardinalzahlaspekt
- Anschauliche Größenvergleiche
- Verfeinern von Brüchen
- Inhaltlich-anschauliche Addition von Brüchen

Um eigenständiges Entdecken zu ermöglichen, wurde ein anschaulicher Zugang über Flächenmodelle in Form von Kunstwerken der konkreten Kunst gewählt. Dies ist insofern legitim, als Künstler dieser Kunstrichtung, wie etwa Max Bill, der Auffassung sind, „es sei möglich, eine kunst weitgehend aufgrund einer mathematischen denkweise zu entwickeln.“ (Bill 1977) In der konkreten Kunst werden also mathematische Strukturen mit künstlerischen Mittel visualisiert.

Abb. 1: Max Bill:„progression in fünf quadraten“ (Nachkonstruktion des Erstautors)

Das Kunstwerk „progression in fünf quadraten“ von Max Bill besteht aus fünf übereinander angeordneten Quadrate, die nach unten hin immer feiner unterteilt werden. Dieser Sachverhalt wird in der ersten Doppelstunde der Laborarbeit genutzt um anhand der Struktur des Kunstwerks, erste Entdeckungen zu Bruchzahlen zu ermöglichen. Es wurden zu jedem eingesetzten Kunstwerk entsprechende „Kunstwerk-Puzzles“ entworfen. So kann z. B. die Grundvorstellung „Teil eines Ganzen“ durch das gleichmäßige Zerlegen in bzw. Auslegen mit entsprechenden Puzzleteilen mit einer Bedeutung, einer konkreten Handlung verknüpft werden. Durch das flexible Wechseln zwischen den verschiedenen Repräsentationen, soll die Bedeutung der Handlung des Auslegens über das Beschreiben dieser Handlung durch Schriftsprache und Skizzen zu einer Bedeutungszuweisung der mathematisch-symbolischen Bruchschreibweise führen.

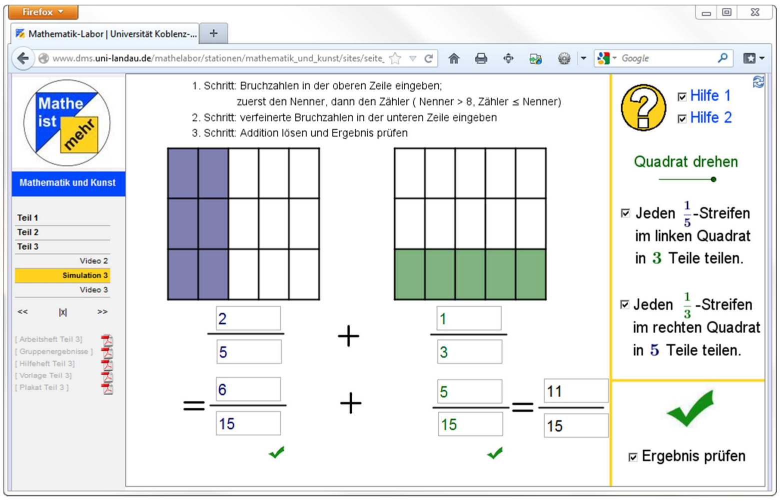

Abb. 2: Simulation zur Addition

Die im zweiten Stationsteil anschaulich problematisierte Addition wird im dritten Stationsteil losgelöst von der konkreten Kunst vertieft. Diese Vertiefung wird durch ein Instruktionsvideo eingeleitet. Dort wird die Idee präsentiert, eine gemeinsame Unterteilung für zwei unterschiedlich geteilte Quadrate zu finden, in dem die Unterteilungen der beiden Quadrate gegenseitig übertragen werden. Dieses Prinzip wenden die Schüler/innen im Anschluss auf neue Additionsprobleme an, die sie mit Hilfe von selbst erstellten entsprechenden Skizzen lösen. Im nächsten Schritt können sie Additionen mit größeren Nennern nach dem gleichen Prinzip anhand einer Computersimulation (vgl. Abb. 2) lösen. Entscheidend ist dabei, das inhaltliche Verständnis für die Vorgehensweise zu vertiefen. Deshalb ist die Simulation so gestaltet, dass bei jeder neuen Aufgabe das inhaltliche Lösungskonzept noch einmal abgearbeitet und damit der Wechsel zum syntaktischen Arbeiten hinausgezögert wird.

Zum Abschluss des dritten Stationsteil, können die Schüler/innen ihr bisher erworbenes Wissen über Bruchzahlen und die Bruchrechnung produktiv einsetzen um eigene Kunstwerke nach Gestaltungsprinzipien zu entwerfen. Dabei wird indirekt neues Wissen über Bruchzahlen generiert, sowie vorhandenes Wissen gefestigt. Als Grundlage dient hier eine „Kunstwerkreihe“ von Max Bill mit dem Titel „$8\left(2\frac{4}{4}\right) = 8$“. Diese Reihe besteht aus acht Kunstwerken, die jeweils aus zwei deckungsgleichen Rechtecken bestehen. Auf die beiden Rechtecke hat Max Bill je vier Farben gleichmäßig verteilt. Dieses Prinzip soll von den Schüler/innen durch das Verteilen von drei Farben auf zwei deckungsgleiche, regelmäßige Sechsecke übertragen werden. Zu jedem Kunstwerk, fertigen die Schüler/innen ein Poster an, auf dem neben dem Kunstwerk auch das zugrundeliegende mathematische Konzept dargestellt wird. So können die entstandenen Kunstwerke im Anschluss an den Laborbesuch im Rahmen einer Klassenzimmervernisage präsentiert werden. Die Gestaltung des Posters stellt eine für die Laborstation „Mathematik und Kunst“ besondere Form der Vernetzung der Lernorte dar. Weitere Vernetzungselemente werden im Folgenden vorgestellt.

3. Vernetzung der Lernorte

Es werden vielfältige Möglichkeiten zur Vernetzung des Lernorts Mathematik-Labor mit dem Lernort Schule genutzt. So werden die Lernvoraussetzungen sowie die durch den Laborbesuch angestrebten Lernziele im Vorfeld des Laborbesuchs mit den betreuenden Lehrkräften besprochen und zusätzlich durch ein entsprechendes Informationsdokument offengelegt. Einen weiteren Aspekt der Vernetzung bilden Hausaufgaben, die zu jedem der drei Stationsteile inhaltlich passend angeboten werden. Die Hausaufgaben werden am Ende jedes Stationsteils ausgeteilt und durch die Lehrkraft in einer Unterrichtsstunde zwischen den Laborbesuchen besprochen. Darüber hinaus erfolgt eine Vernetzung über die Nachbereitung des Laborbesuchs bzw. die Weiterführung der Laborarbeit im Unterricht. Die Schüler/innen nehmen aus der Laborarbeit ein gemeinsam geführtes „Gruppenergebnisheft“ mit, in dem zentrale, in der Kleingruppe erarbeitete Inhalte festgehalten werden. Dieses Heft kann von der betreuenden Lehrkraft gezielt zur Nachbereitung der Inhalte des Laborbesuchs genutzt werden. Zu einigen Laborstationen stehen Zusatzmaterialien wie z.B. „Exi-Bastelbögen“ (Legematerial auf der Basis eines regulären Sechsecks als dem Ganzen; vgl. Roth 2009) und dazu passende Aufgabenvorschläge zur Verfügung. Diese erlauben die strukturgleiche Weiterführung der Laborarbeit im Unterricht im Rahmen der Vertiefung und ggf. der Erarbeitung neuer Inhalte. Darüber hinaus werden den Lehrkräften die Ergebnisse von durchgeführten Leistungstests zur Verfügung gestellt, die sie für die Diagnose und gezielte Förderung nutzen können. Das Mathematik-Labor-Team trägt also durch die Bereitstellung von Materialien und Anregungen zur Vernetzung der Lernorte bei, während die konkrete Vernetzungsarbeit von der Mathematiklehrkraft der Klasse getragen wird.

4. Erste Empirische Ergebnisse

Die Laborstation Mathematik und Kunst wurde von insgesamt 127 Schüler/innen besucht und erprobt. Um vergleichende Informationen über die Wirksamkeit des Laborbesuchs zu erhalten wurden 42 Schüler/innen zeit- und inhaltsgleich wie gewohnt in der Schule unterrichtet. Die Untersuchung war nach dem Pre-/ Post-/ und Follow-up-Test Design aufgebaut. Die Ergebnisse des Pre- sowie des Posttests liegen bereits vor und zeigen, dass sich die Schüler/innen der Laborklassen und der Kontrollklassen hinsichtlich ihres erzielten Lernzuwachses nicht signifikant unterscheiden. Durch die Vernetzung der Lernorte und die gezielt angebahnten Wechsel der Repräsentationsebenen werden die Schüler/innen also in die Lage versetzt, eigenständig Lehrplaninhalte im Labor zu erarbeiten. Wie nachhaltig der durch das Durchlaufen einer Station des Schülerlabors erreichbare Lernerfolg ist, wird der Follow-Up Test zeigen, der sich gegenwärtig noch in der Auswertung befindet.

Sämtliche Materialien der Station könnten unter folgender Adresse heruntergeladen werden: www.mathe-labor.de/stationen/mathematik_und_kunst/

Literatur

Bill, M. (1977): die mathematische denkweise in der kunst unserer zeit. In: E. Hüttinger, M. Bill. Zürich. S. 105-116

Roth, J. (2009): Eine geometrische Lernumgebung -Entwicklung von Verständnisgrundlagen für Bruchzahlen und das Rechnen mit Brüche. In: Fritz-Stratmann, A.; Schmidt, S. (Hrsg.): Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I − Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden, Weinheim: Beltz Verlag, S. 186-200

Scherer, P; Rasfeld, P. (2010): Außerschulische Lernorte – Chancen und Möglichkeiten für den Mathematikunterricht. In: Mathematik lehren 160, S. 4-10

Schmidt,I.; Di Fuccia, D. S.; Ralle, B. (2011): Außerschulische Lernstandorte- Erwartungen, Erfahrungen und Wirksamkeit aus der Sicht von Lehrkräften und Schulleitungen. In MNU 20112 Heft 64/6. S. 362-369