

André KRUG, Stanislaw SCHUKAJLOW, Paderborn

Prozedurales und konzeptuelles Wissen zum Inhaltsbereich Lineare Funktionen und multiple mathematische Lösungswege

Theoretischer Hintergrund

Bei der Verbesserung des deutschen Mathematikunterrichts gibt es schon lange die Forderung multiple Lösungen im Unterricht zu behandeln (Neubrand, 2006). Dabei stützt man sich auf theoretische Überlegungen, wie bspw. eine Vertiefung der Einsicht in die Struktur des Lerngegenstandes (Wittmann, 1995). Zudem zeigt die Behandlung verschiedener Lösungswege Möglichkeiten auf, eine Lösung zu optimieren. Durch die Erstellung multipler Lösungswege kommt es zur kognitiven Vernetzungen und sie helfen bei der Förderung des Aufbaus eines intelligenten, verstehenden Wissens und selbstregulativer Fähigkeiten der Schüler (Fennema & Romberg, 1999). Bisher liegen allerdings nur vereinzelte, empirisch abgesicherte Ergebnisse vor (Große, 2005; Rittle-Johnson & Star, 2007). An bisher vorhandenen Forschungslücken bzgl. Leistungen, strategischer und motivational-affektiver Merkmale setzt das DFG Forschungsprojekt MultiMa (Multiple Lösungen im selbständigkeitsorientiertem Mathematikunterricht) an. In der aktuellen Projektphase stehen multiple mathematische Lösungswege im Mittelpunkt, die durch die Anwendung verschiedener mathematischer Verfahren erstellt werden können. Ergebnisse der ersten Projektphase deuten auf positive Wirkungen der Behandlung von multiplen Lösungen auf Selbstregulation, Interesse und Präferenzen für die Bearbeitung von Aufgaben mit mehreren Lösungen hin (Schukajlow & Krug, 2012a, 2012b, 2013).

Die Fähigkeit multiple mathematische Lösungswege zu erstellen hängt zum einen mit prozeduralem Wissen und zum anderen mit konzeptuellem Wissen zusammen. Prozedurales und konzeptuelles Wissen lässt sich nach (Rittle-Johnson et al., 2001) wie folgt definieren: „Procedural knowledge is the ability to execute action sequences to solve problems. This type of knowledge is tied to specific problem types and therefore is not widely generalizable.“ Dagegen ist konzeptuelles Wissen “the implicit or explicit understanding of the principles that govern a domain and the interrelations between units of knowledge in a domain.“ In beiden Definitionen wird deutlich, dass beide Wissensbereiche domänenspezifisch sind.

In der Literatur findet sich kein einheitliches Bild zu den Zusammenhängen von prozeduralem und konzeptuellem Wissen (Rittle-Johnson & Siegler, 1998). Tiefe Kenntnis der beiden Wissensbereiche scheint eine wichtige

Voraussetzung zu sein, um Aufgaben zu lösen. Speziell das konzeptuelle Wissen spielt bei der Auswahl von Lösungsverfahren, für Kontrollstrategien und dem Transfer von prozeduralem Wissen auf neuen Aufgaben eine große Rolle (Hiebert & Lefevre, 1986). Darüber hinaus ist konzeptuelles Wissen elementar für die Konstruktion und die Flexibilisierung des Einsatzes von Lösungsverfahren (Blöte et al. 2001).

Forschungsfragen und Methode der Studie

Die Erstellung von multiplen Lösungen verlangt sowohl prozedurales als auch konzeptuelles Wissen. Um diese Zusammenhänge zu erfassen bedarf es eines Instrumentes, welches die Konstrukte zum Inhaltsbereich „lineare Funktion“ erfasst. Die Forschungsfragen lauten:

1. Wie lassen sich prozedurales und konzeptuelles Wissen zum Inhaltsbereich lineare Funktionen operationalisieren?
2. Gibt es Zusammenhänge zwischen prozeduralem und konzeptuellem Wissen?
3. Welche Zusammenhänge bestehen zwischen prozeduralem, konzeptionellem Wissen und der Fähigkeit multiple mathematische Lösungswege zu erstellen?

Es haben 204 Realschüler aus Jahrgangsstufe 9 an der Untersuchung teilgenommen. Die Testzeit lag bei 60 Minuten. Um die Konstrukte prozedurales und konzeptuelles Wissen zu erfassen wurden 23 Items zum Inhaltsbereich lineare Funktionen eingesetzt. Die Items verteilten sich im Leistungstest auf: prozedurales Wissen zu linearen Funktionen (11 Items), konzeptuelles Wissen zu linearen Funktionen (6 Items), Lesen und Erstellen von Tabellen (7 Items) und die Entwicklung von multiplen Lösungen zu linearen Funktionen (2 Items).

Ergebnisse und Diskussion

Um die erste Forschungsfrage zu beantworten und die Güte der Operationalisierung zu prüfen, wurden zwei Messmodelle mit einander verglichen: 1- und 3-dimensionales Fähigkeitskonstrukt. Beim 3-dimensionalen Modell wurde jedes Item zu einer von den drei Dimensionen (prozedurales Wissen zu linearen Funktionen, konzeptuelles Wissen zu linearen Funktionen und Lesen und Erstellen von Tabellen) zugeordnet. Zur Bewertung beider Modelle wurden die Anzahl schlecht fittender Items (INFIT), Varianz innerhalb der Dimensionen, der Likelihood-Quotiententest (LQT) und die Reliabilität herangezogen (Rost, 2004). Analysen beider Modelle zeigen gute INFIT-Werte (zwischen 0.8 und 1.2). Die Varianz, welche auch ein Indika-

tor für die Trennschärfe ist, lag für das 1-dimensionale Modell bei $\sigma^2 = .45$ und damit unter den Varianzen der Dimensionen prozedurales Wissen ($\sigma^2 = .60$) und konzeptuelles Wissen ($\sigma^2 = .59$) im 3-dimensionalen Modell. Allerdings beträgt die Varianz im 3-dimensionalen Modell für die Dimension Lesen und Erstellen von Tabellen nur $\sigma^2 = .12$. Der LQT zeigt ein signifikant bessere Passung des 3-dimensionalen Modells im Vergleich zum 1-dimensionalen Modell (Δ Deviance (df) = 66.27(5); $p < .001$). Die Reliabilitäten der Modelle sind mit Werten zwischen .41 und .54 beim 3-dimensionalen Modell und .52 bei 1-dimensionalen Modell allerdings eher unbefriedigend. Des Weiteren ist anhand der Verteilung der Schülerparameter und der Schwierigkeiten der Aufgaben im Test eine deutlich Rechtsverschiebung zu erkennen, sodass davon ausgegangen werden muss, dass der Test für die Schülerpopulation zu schwer war. Dieses Ergebnis zeigt die Notwendigkeit im weiteren Forschungsprozess leichtere Items zu entwickeln.

Zur Beantwortung der zweiten Forschungsfrage, wird die latente Korrelation zwischen beiden Wissensbereichen betrachtet. Diese Korrelation liegt messfehlerbereinigt bei .906 und ist somit sehr hoch. Wie andere Studien zeigen, ist eine solche Korrelation nicht ungewöhnlich. In der PISA-Studie korrelieren die mathematischen Inhaltsbereiche Arithmetik und Algebra auf latenter Ebene ebenfalls mit .91 (PISA-Konsortium Deutschland & Prenzel, 2005). Schneider und Stern (2010) berichten in ihrer Studie Korrelationen von .93 und .97 zwischen prozeduralem und konzeptuellem Wissen.

Die dritte Forschungsfrage kann an dieser Stelle nicht beantwortet werden, da kein Schüler zwei Lösungen zu einer der zwei Aufgaben erstellen konnte. Eine Analyse der Schülerlösungen deutet darauf hin, dass auch wenn einzelne Schüler zwei Lösungsverfahren bei verschiedenen Aufgaben beherrschen, sie nicht in der Lage sind, beide Verfahren innerhalb einer Aufgabe anzuwenden. Eine mögliche Ursache für dieses Ergebnis könnten Gewöhnungseffekte sein. Lernende sind es nicht gewöhnt, mehrere Lösungswege im Unterricht zu besprechen bzw. selbst zu erstellen (Baumert & Lehmann, 1997). Ein weiterer Grund könnte sein, dass der Impuls „Finde zwei verschiedene Lösungswege“ innerhalb der Aufgabenstellung missverstanden wurde.

Literaturverzeichnis

- Baumert, J., & Lehmann, R. (1997). TIMSS – Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich. Opladen: Leske + Budrich.
- Blöte-Aanhane, A.W. & Burg, E., van der & Klein, A.S. (2001) Student's Flexibility in Solving Two-Digit Addition and Subtraction Problems: Instructing Effects. *Journal of Educational Psychology*, 93, S. 627-638.

- Fennema, E. H., & Romberg, T. A. (Eds.) (1999). *Classrooms that promote mathematical understanding*. Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Große, C. S. (2005). *Lernen mit multiplen Lösungswegen*. Pädagogische Psychologie und Entwicklungspsychologie. Münster: Waxmann.
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (S. 1-27). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Neubrand, M. (2006). Multiple Lösungswege für Aufgaben: Bedeutung für Fach, Lernen, Unterricht und Leistungserfassung. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung, & O. Köller (Eds.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichts Anregungen, Fortbildungsideen* (S. 162–177). Berlin: Cornelsen Scriptor.
- PISA-Konsortium Deutschland, & Prenzel, M. (2005). *PISA 2003. Der zweite Vergleich der Länder in Deutschland. Was wissen und können Jugendliche?* Münster: Waxmann.
- Rittle-Johnson, B.; Siegler, R. S. (1998). The relation between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review. In: C. Donlan (Hg.): *The development of mathematical skills*. Hove: Psychology Press (Studies in developmental psychology), S. 75–110.
- Rittle-Johnson, B.; Siegler, R. S.; Alibali, M.W.(2001). Developing conceptual understanding and Developing Conceptual Understanding Developing conceptual understanding and an procedural skill in mathematics: An iterative process. In: *Journal of Educational Psychology* (93(2)), S. 346–362.
- Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge?: An experimental study on learning to solve equations. *Journal of Educational Psychology*, 99(3), S. 561–574.
- Rost, J. (2004). *Lehrbuch Testtheorie - Testkonstruktion*. Bern: Huber.
- Schneider, M., & Stern, E. (2010). The developmental relations between conceptual and procedural knowledge: A multimethod approach. *Developmental Psychology*, (46(1)), S. 178–192.
- Schukajlow, S., & Krug, A. (2012a). Effects of treating multiple solutions on students' self-regulation, self-efficacy and value. *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, S. 59-66). Taipei, Taiwan: PME.
- Schukajlow, S., & Krug, A. (2012b). Multiple Lösungen beim Modellieren: Wirkungen auf Leistungen, kognitive Aktivierung, Kontrollstrategien, Selbstregulation, Interesse und Selbstwirksamkeit. In M. Kleine & M. Ludwig (Eds.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011*.
- Schukajlow, S., & Krug, A. (2013). Uncertainty orientation, preferences for solving tasks with multiple solutions and modelling. Paper presented at the CERME 8, Antalya, Turkey.
- Wittmann, E. C. (1995). Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen im Rechenunterricht - vom Kind und vom Fach aus. In E. C. Wittmann & G. N. Müller (Eds.), *Mit Kindern rechnen* (S. 10–41). Frankfurt: Arbeitskreis Grundschule.