Jana KREUßLER, Horst W. HAMACHER, Kaiserslautern

Wie Geometrie zu einem anwendungsbezogenen und alltagsrelevanten Mathematikunterricht beitragen kann

Geometrie ist ein Themenfeld, welches den Mathematikunterricht durch alle Jahrgangsstufen hinweg prägt. Dieses kann mit anwendungsnahen Optimierungsproblemen so verknüpft werden, dass die Schüler durch das alltagsrelevante Thema motiviert werden und interessante Anwendungen der Mathematik in Alltag, Industrie und Wirtschaft kennenlernen. Durch die Wahl der Unterrichtsform (z.B. Modellierungsprojekte oder klassischer Unterricht) kann der Schwerpunkt auf allgemeine oder inhaltliche Kompetenzen gelegt werden. Geometrische Optimierungsthemen bieten somit eine große Vielfalt an Gestaltungsmöglichkeiten und ermöglichen eine Einbettung der gleichen Thematik in mehreren Klassenstufen und Schwierigkeitsniveaus.

1. Verknüpfung von Geometrie und Optimierung

Optimierung gehört zum Bereich der angewandten Mathematik und beschäftigt sich mit Problemstellungen aus Alltag, Industrie und Wirtschaft. Die zu betrachtende Zielfunktion, wie beispielsweise der Profit eines Unternehmens oder die Entfernung zu bestimmten Orten, soll maximiert bzw. minimiert werden, um die Situation für den Auftraggeber zu optimieren. Die lineare, ganzzahlige und multikriterielle Optimierung, sowie die Standortplanung und Spieltheorie bilden einige der Forschungsschwerpunkte, welche in der Optimierung untersucht werden. In jedem dieser Teilbereiche gibt es eine Vielzahl an Problemstellungen, welche sich anhand geometrischer Methoden lösen lassen und sich daher hervorragend für die Einbettung in den Mathematikunterricht in der Schule eignen. Klassische geometrische Inhalte des Rahmenlehrplans können somit anhand einer anwendungsbezogenen Thematik eingeführt, erarbeitet oder wiederholt werden. Durch die Behandlung dieser realen Problemstellungen aus dem Alltag der Schüler kann ihre Motivation für den Mathematikunterricht erhöht und ihre Wahrnehmung für anwendungsnahe Problemstellungen geweckt werden (Hamacher et al., 2013). Wir möchten nun einige dieser Beispiele aus dem Bereich der Standortplanung vorstellen. Algorithmen zur Lösung planarer Standortprobleme können in (Hamacher, 1995) nachgelesen werden.

Kreisringprobleme: Standortplanung von Handymasten

Ein Kreisring besteht aus zwei Kreisen mit unterschiedlichen Radien, $0 \leq r \leq R$, aber dem gleichen Mittelpunkt. Seine Breite wird als die Differenz seiner Radien definiert. Ein minimal breiter Kreisring kann beispielsweise das Dilemma bei der Standortplanung von Handymasten lösen. Da die meisten Menschen rund um die Uhr erreichbar sein möchten, ist ein Handymast in näherer Umgebung notwendig. Auf der anderen Seite ist es bisher nicht erwiesen, ob Mobilfunkmasten gesundheitsschädlich sind, weshalb ein Handymast in unmittelbarer Nähe oder neben dem eigenen Grundstück unerwünscht ist. Durch die Berechnung eines minimal breiten Kreisrings (Rivlin, 1979), welcher alle Kunden umschließt und den Handymast im Mittelpunkt positioniert, kann garantiert werden, dass viele Kunden von der Reichweite des Masts überdeckt werden und gleichzeitig niemand zu nah an ihn herankommt (siehe Abb.1).

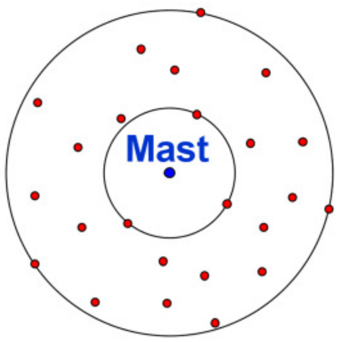

Abbildung 1: Kreisringprobleme

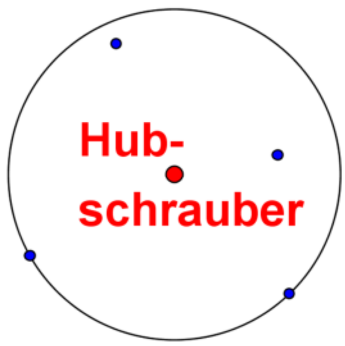

Abbildung 2: Euklidisches Botenproblem

Das Euklidische Botenproblem: Rettungshubschrauber

Das Euklidische Botenproblem beschäftigt sich mit der Suche nach einem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$, welcher die maximale euklidische Distanz zu einer endlichen Anzahl gegebener Standorte minimiert. Dies findet beispielsweise bei der Wahl eines Standortes für einen Rettungshubschrauber seine Anwendung (siehe Abb.2). In den Alpen seien mehrere Skigebiete markiert, welche von einem Rettungshubschrauber angeflogen werden sollen. Da es bei Skiunfällen oft um Leben und Tod geht, ist eine minimale Entfernung und Flugzeit zu den Unfallorten von großer Bedeutung. Es wird also der Mittelpunkt eines Kreises mit minimalem Radius gesucht, welcher alle Skigebiete überdeckt. Ein geometrischer Algorithmus zur Lösung dieses Problems wird in (Elzinga et al., 1972) präsentiert. Der Einsatz dieses Standortproblems für den Schulunterricht wird in Kapitel 3 in (Hamacher et al., 2004) diskutiert.

Haltestellenplanung

In einer Stadt, in welcher wichtige Kundenstandorte und Straßen markiert sind, sollen optimale Orte für Haltestellen markiert werden. Die Anzahl dieser Haltestellen soll minimiert werden, aber trotzdem für jeden Kunden eine Erreichbarkeit innerhalb einer gewissen Entfernung garantieren. Eine ausführliche Beschreibung und Diskussion dieses Optimierungsproblems und seine Einbettung in den Lehrplan kann in (Hamacher et al., 2013) nachgelesen werden.

Voronoi-Diagramme: Marktgebiete städtischer Supermärkte

Eine Supermarktkette möchte in einer Stadt eine neue Filiale eröffnen. Um einen optimalen Standort zu finden, welcher die Anzahl seiner Kunden und somit seinen Profit maximiert, muss zunächst die aktuelle Situation des Marktes dokumentiert werden. Wir nehmen an, dass Menschen im Allgemeinen die Filiale wählen, welche am nächsten zu ihnen liegt. Das Marktgebiet einer Filiale $X \in \mathbb{R}^2$ enthält demnach die Menge der Punkte in der Ebene, welche näher an X liegen als an jeder anderen Filiale. Die Unterteilung der Ebene in Marktgebiete wird in einem *Voronoi-Diagramm* (Okabe et al., 1992) dargestellt, welches im Fall der euklidischen Distanz durch die Generierung von Mittelsenkrechten entsteht (siehe Abb.3 links). Dieses geometrische Konstrukt kann nun beliebig erweitert werden, indem das Modell durch die Wahl der Rechteckdistanz (siehe Abb. 3 rechts) oder das Einbringen von Gewichtungen, welche das Preis-Leistungs-Verhältnis der Supermärkte beschreiben, verfeinert wird.

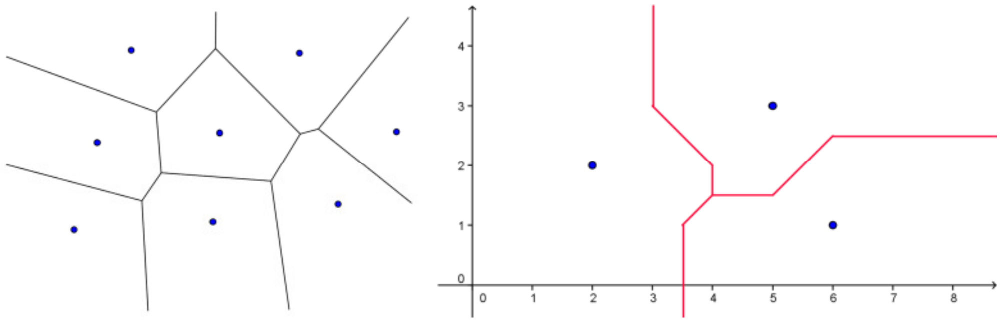

Abbildung 3: Voronoi-Diagramme
(Links: bzgl. der Euklidischen Distanz, Rechts: bzgl. der Rechteckdistanz)

2. Integration in den Schulalltag

Geometrische Optimierungsthemen können auf vielfältige Art und Weisen in den Mathematikunterricht des Schulalltages eingebettet werden. Dies wollen wir nun anhand des Beispiels der Voronoi-Diagramme demonstrieren. Mathematische Grundkenntnisse und Fähigkeiten, welche Schüler zur Bearbeitung von Voronoi-Diagrammen benötigen, werden zu großen Teilen bereits in Klassenstufe 5-7 erworben. Der rheinland-pfälzische Rahmenlehrplan Mathematik der Klassenstufen 5-9/10 (MBWJK, 2007) führt die Schüler in Klassenstufe 5/6 langsam an das Arbeiten mit dynamischer Geometriesoftware heran, um in Klassenstufe 7/8 den Betrag als Abstand vom Nullpunkt, sowie Grundkonstruktionen (z.B. Mittelsenkrechten und Winkelhalbierende) mit Zirkel und Lineal einzuführen. Im Verlauf der Unterrichtseinheit zum Thema der Voronoi-Diagramme können Begriffe wie die *Euklidische Distanz, Rechteckdistanz, Einheitskreis* und *Bisektor* eingeführt oder wiederholt werden. Je nach Altersgruppe, Leistungsniveau und den Vorerfahrungen der Schüler, kann der Schwerpunkt der Unterrichtseinheit angepasst werden. Dieser kann bei jüngeren Schülern auf den geometrischen Konstruktionen und der Bedienung dynamischer Geometriesoftware liegen, kann jedoch auch im Schwierigkeitsgrad beliebig erhöht werden, indem Gewichtungen eingeführt oder Beweise verlangt werden. Die Unterteilung einer Stadt in Marktgebiete kann sowohl als einführendes Beispiel zu einer neuen Thematik, als auch als roter Faden durch die ganze Unterrichtseinheit genutzt werden. Voronoi-Diagramme können ebenfalls genutzt werden, um den Schwerpunkt der Unterrichtseinheit auf die allgemeinen mathematischen Kompetenzen wie beispielsweise *K1: Mathematisch argumentieren, K3: Mathematisch modellieren* oder *K6:Kommunizieren* zu lenken, indem ein Modellierungsprojekt zum Thema der Markgebiete von Supermärkten durchgeführt wird. Hierfür wird eine Mindestanzahl von 5-6 Unterrichtsstunden benötigt. Das Feedback von Schülern gegenüber Modellierungsprojekten in der Schule ist bisher durchweg als positiv bewertet worden (siehe beispielsweise Kaiser et al., 2010). Geometrische Optimierungsthemen bieten somit eine Vielzahl an Implementierungsmöglichkeiten für den täglichen Mathematikunterricht.

Literatur

Elzinga, J., Hearn, D.W. (1972): Geometrical Solutions for Some Minimax Location Problems. In: Transportations Science 6, pp. 379-394.

Hamacher, H.W. (1995): Mathematische Lösungsverfahren für planare Standortprobleme. Vieweg Verlag Braunschweig/Wiesbaden.

Hamacher, H.W., Korn, E., Korn, R., Schwarze, S. (2004): Mathe und Ökonomie – Neue Ideen für den praxisnahen Unterricht. Universum Verlag.

Hamacher, H.W., Kreußler, J. (2013): Merging Educational and Applied Mathematics: The Example of Locating Bus Stops. Accepted and presented paper at CERME8 (Congress of European Research in Mathematics Education), Antalya, Turkey.

Kaiser, G., Schwarz, B. (2010): Authentic Modelling Problems in Mathematics Education – Examples and Experiences. In: Journal für Mathematikdidaktik 31/1, pp.51-76

Ministerium für Bildung, Wissenschaft, Jugend und Kultur (MBWJK) Rheinland-Pfalz (2007): Rahmenlehrplan Mathematik (Klassenstufen 5-9/10).

Okabe, A., Boots, B., Sugihara, K. (1992): Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams. John Wiley & Sons Ltd. Chichester.

Rivlin, T.J. (1979): Approximation by Circles. In: Computing, Vol. 21/2, pp. 93-104.

Schöbel, A., Hamacher, H.W., Liebers, A., Wagner, D. (2009): The Continuous Stop Location Problem in Public Transportation Networks. In: Asia-Pacific Journal of Operational Research, Vol. 26/1, pp. 13-30.