

Mathias HATTERMANN, Bielefeld

Einführung und erste Rechenoperationen mit ganzen Zahlen: Ein Erfahrungsbericht

Die Zahlbereichserweiterungen zu den ganzen bzw. rationalen Zahlen stellen einen aus erkenntnistheoretischer Sicht fundamentalen Umbruch bei Schülerinnen und Schülern dar. Zwar sind die zu erlernenden Rechenregeln wesentlich einfacher als beim Rechnen mit Brüchen, jedoch sind die aufzubauenden Grundvorstellungen (vom Hofe 1995) zur inhaltlichen Verknüpfung wesentlich abstrakter. Um dieses Phänomen besser verstehen zu können, genügt ein Blick in die Vergangenheit und die Genese der negativen Zahlen (Glaeser 1981). So waren die Vorzeichenregeln bereits seit Diophant (um 250 n. Chr.) bekannt. Bis zur vollständigen Akzeptanz der negativen Zahlen in der mathematischen Kommunität dauerte es jedoch bis zum Jahr 1867, in dem sich Hermann Hankel vollständig von der Interpretation der ganzen bzw. rationalen Zahlen als Größen löste und deren Existenz durch abstrakte Permanenzforderungen begründete (Hefendehl-Hebeker 1989). Die folgende Aussage von Blaise Pascal belegt die sich über Jahrhunderte erstreckende Problematik beim Umgang mit negativen Zahlen: „Ich kenne Leute, die nicht begreifen können, daß Null übrigbleibt, wenn man von Null Vier wegnimmt“ (Blaise Pascal zitiert nach Hefendehl-Hebeker 1989). Dieser Satz des anerkannten Mathematikers vermittelt eindrucksvoll, dass der Umgang mit negativen Zahlen einen Abstraktionsprozess erfordert, der alles andere als einfach ist und bereits Generationen von namhaften Mathematikern vor große Hürden stellte. So ist es nicht verwunderlich, dass sich auch noch viele Erwachsene an die Regel ‚minus mal minus ist plus‘ erinnern, jedoch keine inhaltliche Vorstellung hierzu besitzen.

Theoretischer Rahmen

Die Behandlung der negativen Zahlen ist aus Sicht der Theorie zu Grundvorstellungen deshalb schwierig, da eine durchgehende Behandlung mit dem Aufbau primärer Grundvorstellungen, also an konkreten Handlungen und Objekten aufgebauten Vorstellungen, nur schwer möglich ist. Es müssen sekundäre Vorstellungen aufgebaut werden, welche bereits mathematische Darstellungen wie bspw. die Zahlengerade, eine symbolische Schreibweise oder das Pfeilmodell erfordern. Man vergleiche solche Modelle mit dem gerechten Teilen einer Pizza durch die konkrete Handlung am Gegenstand zum Aufbau einer Anteilvorstellung, wodurch der Aufbau einer primären Grundvorstellung möglich ist. Malle (2007) identifiziert weiterhin vier Stadien der Objektivierung der negativen Zahlen, welche

sich grob in Vorkenntnisse und Alltagsverständnis, Ordnung, Addition bzw. Subtraktion und Multiplikation einteilen lassen. Hierbei warnt er davor, dass im ersten Stadium Schüler zwar mit negativen Zahlen umgehen, diese jedoch als natürliche Zahlen in speziellen Verwendungssituationen wie Temperaturen oder Schulden deuten und daher keineswegs als eigenständige Objekte betrachtet werden (Malle 2007, vgl. auch Malle (1988)).

Projekt in Kooperation mit der Laborschule Bielefeld

Die Laborschule Bielefeld ist eine staatliche Versuchsschule des Landes Nordrhein-Westfalen mit einem pädagogischen Entwicklungsauftrag. Hierbei wird sie von der wissenschaftlichen Einrichtung unterstützt, die der Fakultät für Erziehungswissenschaft der Universität Bielefeld angegliedert ist. Im System der Laborschule sind die Lehrerinnen und Lehrer Praxisforscher und entwickeln ihren Unterricht mit Kolleginnen und Kollegen bzw. auch Wissenschaftlern in Forschungs- und Entwicklungsprojekten weiter, wobei Ergebnisse u.a. in der Reihe *Impuls Laborschule* (Klinkhardt Verlag) publiziert werden.

Auf der methodologischen Grundlage von *Lesson Studies* (z.B. Hart et al. 2011), einer ursprünglich in Japan vor über 100 Jahren entwickelten und weit verbreiteten Methode zur Lehrerprofessionalisierung bzw. Praxisforschung, arbeiten Lehrerinnen und Lehrer im vorgestellten Projekt mit Wissenschaftlern zusammen, um Literatur zu sichten, Unterricht zu planen und diesen gemeinsam zu reflektieren.¹ Im Projekt wird ein kompletter Lehrgang zur Behandlung der rationalen Zahlen durchgeführt, welcher bei der Zahlbereichserweiterung zu den ganzen Zahlen ansetzt. Hierbei werden die gemeinsamen Sitzungen zur Vor- und Nachbereitung des Unterrichts protokolliert und Tonaufnahmen angefertigt. Darüber hinaus erfolgt eine Videographierung des Unterrichts. Nach Behandlung der Addition/Subtraktion bzw. der Multiplikation/Division rationaler Zahlen werden schriftliche Schülerevaluationen zur Selbsteinschätzung und zu mathematischen Kenntnissen durchgeführt, deren Ergebnisse durch einzelne halbstandardisierte Interviews zu ergänzen sind. Im Anschluss an die jeweiligen Sequenzen dienen die Hefte der Schülerinnen und Schüler als weitere Datenquelle zur Analyse. Die allgemeinen Ziele des Projekts bestehen in der Feststellung schülerspezifischer Präferenzen für gewisse Modelle, der Identifikation personenspezifischer bzw. modellspezifischer Lernhürden und Empfehlungen sowohl für die Kombination von Modellen als auch für deren Konventionen zur Interpretation.

¹ Weitere Projektbeteiligte, neben dem Autor: Paula G. Althoff, Reto Friedli, Rudolf vom Hofe, Harry Kullmann und Janine Lukas.

Erfahrungen zur Handlung mit didaktischen Modellen

Sowohl national wie auch international werden negative Zahlen mit didaktischen Modellen behandelt. Hierbei muss die Tragfähigkeit der einzelnen Modelle für die jeweilige Operation und deren Interpretation im Sachkontext zuvor genau analysiert werden, um akrobatische Handlungen zur künstlichen Erklärung von Rechengesetzen auf dem Spielbrett, der Zahlengeraden oder am Thermometer zu vermeiden. Im Folgenden wird ein Beispiel aus dem Forschungsprojekt gegeben, das aufzeigt, wie eine kleine Fehlinterpretation zu erheblichen Schwierigkeiten beim Umgang mit dem Modell führen kann. Zur Einführung der Addition wurde im beschriebenen Projekt das Plus-Minus-Spiel verwendet, bei dem die Schülerinnen und Schüler würfeln und anhand einfacher Regeln grüne Karten (Plus-Karten) bzw. rote Karten (Minus-Karten) auf bzw. abgeben. Die grünen Karten sind mit den Zahlen von 0 bis +10, die roten Karten von -10 bis 0 beschriftet. Hierbei trafen wir folgende Konventionen, um nach Malle (2007) die Klammerschreibweise und die Unterscheidung von Rechen- und Vorzeichen zu motivieren. Die Rechnung $+5 + (-7) = -2$ ist so zu deuten, dass der jeweilige Spieler einen Punktestand von +5 aufwies, dann die rote Karte -7 bekam und schließlich mit -2 Punkten in die nächste Runde ging. Analog ist die Aufgabe $-3 - (-6) = +3$ zu interpretieren, dass beim ursprünglichen Punktestand von -3 eine rote Karte mit -6 abgegeben werden konnte und der Punktestand sich somit auf +3 Punkte erhöhte. Das Spiel wurde sowohl nur zur Addition als auch zu einem späteren Zeitpunkt zur Einführung der Subtraktion verwendet, wobei jedoch uneinheitliche Schreibweisen während des Unterrichts auftraten. So schrieben sowohl Lehrer als auch Schüler den eigentlichen Punktestand gelegentlich in Klammern, was aus mathematischer Sicht völlig legitim ist und zunächst auch nicht sofort als Problem erkannt wurde. Die Schülerinnen und Schüler identifizieren bei dieser Schreibweise jedoch auch die erste Zahl als Karte, was bei der Addition kein Problem darstellt. So ist die Aufgabe $(+3) + (+4) + (-8) = -1$ problemlos mit der mehrmaligen Aufnahme von Karten zu deuten. Jedoch erweist sich die Interpretation von $(-5) - (-7) = +2$ in der jeweiligen Schreibweise als nicht mehr interpretierbar. Besitzt man nur die Karte -5, kann man nicht die Karte -7 abgeben und somit auch nicht weiterrechnen. Hier ist die Interpretation des Minuenden als Punktestand für die Aufrechterhaltung des Modells fundamental. So kann die Aufgabe $-5 - (-7) = +2$ inhaltlich gedeutet werden. Wie die Schülerinnen und Schüler auch im Spiel erfahren haben, fasst man seinen Punktestand zusammen, um bei vielen Karten den Überblick über den Gesamtspielstand zu erhalten. So kann der individuelle Punktestand von -5 durch den Besitz der Karten +8, -7, -4 und -2 zustande gekommen sein, sodass die Abgabe der Karte -7 problem-

los interpretiert werden kann. Der neue Punktestand von +2 ergibt sich somit durch den Besitz der Karten +8, -4 und -2. Im Interview mit Manuel (Pseudonym), ergibt sich diese Problematik beiläufig. Manuel arbeitet an der Aufgabe: $(-2) \cdot (+3) - (-4) = -2$ und löst diese auch korrekt, ohne jedoch insbesondere die Rechnung $-6 - (-4) = -3$ erklären zu können. Auf die Frage wie Manuel sein Ergebnis begründet, entsteht die folgende Konversation: Manuel: „-6 minus die -4, dann geht die -4 halt weg und dann rechne ich bei -6 minus -4 und dann sind da -2 weil die Vier ja weggeht, weil ich sie ja abgebe.“ Interviewer: „Das hab ich jetzt noch nicht verstanden, was bedeutet das, die Vier geht weg?“ Manuel: „Ja hier, das war ja das mit den Karten was wir da gemacht haben. Ich hab hier ne -6 [Manuel legt eine -6 Karte und eine -4 Karte vor sich]...ja ok, aber das kann man hieran nicht erklären, weil wenn ich die [Karte mit -4] jetzt abgeben würde, wären's ja immer noch -6 und so hätte ich ja -10 und deswegen geht's ja nicht, wenn ich die [-4] jetzt abgebe.“ In diesem Beispiel wird deutlich, wie kleine Ungenauigkeiten in der Interpretationsstruktur ein komplettes Modell versagen lassen und kein Rückgriff auf möglichst konkrete Handlungen mehr möglich ist, falls die Rechenregeln nach gewisser Zeit nicht mehr auswendig beherrscht werden.

Ausblick

Im Verlauf des weiteren Projekts wird mit den gleichen Methoden die Verwendung des Vektormodells zur Multiplikation untersucht, welches sich vom Kartenmodell grundlegend unterscheidet. Darüber hinaus ist die Behandlung der ganzen Zahlen auf propädeutischer Ebene in der Jahrgangsmischung 3/4/5 der Laborschule Bielefeld geplant.

Literatur

- Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(3), 303–346.
- Hefendehl-Hebeker, L.(Hg.) (1989). Minuszahlen; mathematik lehren, (35).
- Hofe, R. v. (1995). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. *Texte zur Didaktik der Mathematik*. Heidelberg: Spektrum Akad. Verl.
- Malle, G. (2007). Die Entstehung negativer Zahlen: Der Weg vom ersten Kennenlernen bis zu eigenständigen Denkobjekten. *mathematik lehren*, (142), 52–57.
- Malle, G. (1988). Die Entstehung neuer Denkgegenstände - untersucht am Beispiel der negativen Zahlen. In W. Dörfler (Ed.), *Kognitive Aspekte mathematischer Begriffsentwicklung. Arbeiten aus dem Projekt "Entwicklung formaler Qualifikationen im Mathematikunterricht"* (pp. 259–319). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky; Stuttgart; B.G. Teubner.
- Hart, L. C., Alston, A. S., & Murata, A. (2011). *Lesson study research and practice in mathematics education: Learning together*. Dordrecht; New York: Springer.