

Christina DRÜKE-NOE, Kassel

Wer Kalküle kann, schafft eine Klassenarbeit. Stimmt das?

Nach einem kurzen Literaturüberblick über das Thema Kalküle wird dargestellt, wie diese hier mithilfe der mathematischen Tätigkeit *Technisches Arbeiten* untersucht werden. Anschließend wird die Rolle von Kalkülen anhand der Klassenarbeitsaufgaben aus dem COACTIV-Projekt untersucht.

1. Kalküle – Ein kurzer Literaturüberblick

Das Thema Kalküle wird in der Literatur vorwiegend aus zwei Perspektiven diskutiert. Eine erste ist eine kognitionstheoretische Perspektive. So leistet u. a. die Anzahl erforderlicher Zwischenrechnungen einen Beitrag zur Erklärung von Aufgabenschwierigkeiten (vgl. Neubrand et al., 2002); zudem steigt die kognitive Komplexität von Aufgaben mit einer zunehmenden Anzahl von Denkvorgängen, zu denen auch das Umgehen mit Kalkülen gehört (vgl. Sjuts, 2003). Wichtiger noch ist die zweite Perspektive, nämlich jene vielfach zu lesende Behauptung, Aufgaben im Mathematikunterricht seien kalkülgeprägt. Dies stellen u. a. Bromme et al. (1990) sowie Henn & Kaiser (2001) fest, aber auch Schupp (2002), der schreibt, besonders in der Algebra sei die Aufgabenkultur „logisch-kalkülhaft“. Ein empirischer Beleg findet sich bei Kunter & Baumert (2011), die die im COACTIV-Projekt untersuchten Unterrichtsaufgaben als „kognitiv eher anregungsarm“ bezeichnen. Auch von Klassenarbeitsaufgaben stellen viele fest, diese seien kalkülorientiert. So beklagt etwa Althoff (2001) den besonders hohen Anteil formaler Berechnungsaufgaben, Bruder & Weigand (2001) fehlen Anwendungs- und Begründungsaufgaben, Leuders (2004) kritisiert die große Zahl geschlossener Aufgaben, die primär mechanisch lernbare Kenntnisse und Fertigkeiten erfordern.

Es sei hier lediglich angemerkt, dass Kalküle durchaus ihre berechtigte Funktion haben (vgl. Sjuts, 2007; Hefendehl-Hebeker, 2004).

Die meisten Autoren lassen nicht immer genau erkennen, was sie unter Kalkülen verstehen bzw. geben – Kunter & Baumert bilden eine Ausnahme – meist keine empirischen Belege für eine festgestellte Kalkülorientierung. Hier setzt der vorliegende Artikel an. Im Folgenden wird ausgeführt, was unter Kalkülen verstanden und wie deren Vorkommen untersucht wird.

2. Kalküle und die mathematische Tätigkeit Technisches Arbeiten

Im COACTIV-Projekt umfasst der kognitive Blick auf Aufgaben u. a. das Stoffgebiet, die Aufgabenklasse und die vier Tätigkeiten *Inner- und Außermathematisches Modellieren*, *Argumentieren* und *Gebrauch mathemati-*

scher Darstellungen (auf je vier Niveaus mit 0: nicht, 1: niedrig, 2: mittel, 3: hoch). Dem Bearbeitungsprozess von Modellierungsaufgaben (in einem weiten Sinne gemeint) liegt in COACTIV ein vierschrittiges Prozessschema zugrunde, wobei der Teilschritt des „Verarbeitens“ vom Modell zum Resultat führt (vgl. auch Jordan et al., 2006). Dabei erfordert dieses „Verarbeiten“ bei zahlreichen Aufgaben auch den Umgang mit Kalkülen, weshalb neben den vier genannten eine weitere Tätigkeit fehlt, die niveaubezogen das Umgehen mit Kalkülen beim Aufgabenlösen erfasst.

Zur Analyse des vorstehend benannten Teils des Verarbeitens wurde die mathematische Tätigkeit *Technisches Arbeiten* gewählt, die ausschließlich das Umgehen mit der technischen Komplexität einer Aufgabe und ihrer zugrundeliegenden Verfahren erfassen und dabei u.a. das Zusammenspiel der verschiedenen Rechenarten und die Anwendung von Vorrangregeln berücksichtigen sollte. Diese neue Kategorie sollte in ihren Ausprägungen weitgehend überschneidungsfrei mit den übrigen Tätigkeiten sein, mit ihren vier Niveaus an jene in COACTIV anschließen, diese Niveaus sollten schulform- und klassenstufenunabhängig erreichbar und auf alle Stoffgebiete sowie alle Aufgabenklassen anwendbar sein. Mit diesen Setzungen wurde das *Technische Arbeiten* durch Analyse von Aufgabenmerkmalen und ergänzende systematische Aufgabenvariation operationalisiert, was zu nachstehendem Kategorienschema führte. Offenkundig ist, dass erfolgreiches *Technisches Arbeiten* zunächst die Kenntnis und anschließend die bewusste Auswahl und korrekte Durchführung eines Verfahrens voraussetzt.

Kategorie	Stoffgebiet	Bedeutung der Ausprägungen (Niveaus)
Technisches Arbeiten	Arithmetik	0= Nicht benötigt; 1= nur Punkt- oder nur Strichrechnen, einfache Potenzen; 2= einfache hierarchische Techniken (Punkt- vor Strich, Potenz vor Punkt), Potenzen multiplizieren/ dividieren, Wurzel aus Zahl; 3= komplexe hierarchische Techniken (Potenz- mit Punkt- und Strichrechnung kombiniert)
	Algebra	0= Nicht benötigt; 1= mit einer linearen Gleichung rechnen; 2= hierarchische Techniken mit mehreren linearen Gleichungen (Punkt- vor Strich), rein-quadrat. Gleichungen, Summe quadrier./ faktorisieren; 3= komplexe hierarchische Techniken (Potenz- mit Punkt- und Strichrechnung kombiniert), bel. gemischt-quadratische Gleichungen
	Geometrie	0= Nicht benötigt; 1= nur Punkt- oder nur Strichrechnen, z. B. <i>sin α errechnen</i> ; 2= einfache hierarchische Techniken (Potenz vor Punkt), z. B. <i>Größen mit Strahlensatz errechnen, Winkel mit Sinussatz errechnen</i> ; 3= komplexe hierarchische Techniken (Potenz- mit Punkt- und Strichrechnung kombiniert)
	Stochastik	0= Nicht benötigt, z. B. <i>alle Kombinationen notieren</i> ; 1= nur Punktrechnen; 2= zweistufig/ mehrstufige hierarchische Techniken (Punkt vor Strich, auch Potenz vor Punkt), Summen aus Produkten, z. B. <i>arithmet. Mittel</i> ; 3= komplexe hierarchische Techniken (Potenz- mit Punkt- und Strichrechnung kombiniert), z. B. <i>Bernoulliketten</i>

3. Auswertungen

Die jahrgangs- und schulformbezogenen (gymnasial/ nicht-gymnasial) Auswertungen zum *Technischen Arbeiten* erfolgen am repräsentativen Da-

tensatz der im COACTIV-Projekt in 2003 und 2004 eingesammelten Klassenarbeitsaufgaben (Klasse 9: 14744 Aufgaben, davon 25 % in Gymnasialklassen; Klasse 10: 10863 Aufgaben, davon 36 % in Gymnasialklassen).

Die Auswertungen zeigen, dass in allen vier Teilgruppen jenseits des *Technischen Arbeitens* kaum weitere mathematische Tätigkeiten zur Aufgabebearbeitung erforderlich sind (z. B. erfordern in nicht-gymnasialen 9. Klassen 66 % der Aufgaben kein *Innermathematisches Modellieren* und sogar 98 % der Aufgaben kein *Argumentieren*). Hingegen ist in allen Teilgruppen *Technisches Arbeiten* nahezu immer erforderlich, weshalb nachfolgend die Niveaus dieser Tätigkeit genauer analysiert werden (vgl. Tabelle):

	<i>Jeweils dominierendes Niveau beim Technischen Arbeiten (Anteile in Prozent)</i>			
	<i>9 Gym</i>	<i>10 Gym</i>	<i>9 Nicht-Gym</i>	<i>10 Nicht-Gym</i>
Techn. Aufgaben	N3: 53 %	N3: 70 %	N2: 39 % (N1: 37 %, N3: 20 %)	N3: 54 % (N1: 22 %, N2: 27 %)
Rechner. Aufgaben	N3: 51 %	N3: 61 %	N1: 47 % (N3: 35 %)	N3: 42 %
Begriff. Aufgaben	N3: 37 %	N3: 67 %	N1: 32 % (N2: 24 %, N3: 28%)	N3: 52 %
Arithmetik	N3: 41 % (N2: 33 %)	N3: 64 % (N2: 27 %)	N1: 52 % (N2: 31 %)	N3: 36 % (N1: 32 %, N2: 30 %)
Algebra	N3: 60 %	N3: 82 %	N2: 47 %	N3: 70 %
Geometrie	N1: 44 % (N3: 40 %)	N3: 51 % (N2: 27 %)	N3: 50 % (N1: 35 %)	N3: 43 % (N2: 35 %)

Die vorstehende Tabelle zeigt, dass in beiden Schulformen und Klassen (mit Ausnahme der neunten nicht-gymnasialen Klassen) in nahezu allen Stoffgebieten und Aufgabenklassen das höchste Komplexitätsniveau des *Technischen Arbeitens* dominiert. Ein Vergleich der Schulformen zeigt, dass die Anteile des höchsten Niveaus in den gymnasialen Klassen höher sind als in den nicht-gymnasialen; dies wird besonders im Stoffgebiet Algebra deutlich und passt zu Schupps Einschätzung (vgl. Abschnitt 1). Schulformübergreifend ist erkennbar, dass die technische Komplexität von Klasse 9 nach Klasse 10 sogar noch ansteigt, was zumindest in den nicht-gymnasialen Klassen sicherlich mit dem Wegfall der Hauptschulklassen erklärbar ist. Bedenkt man schließlich, dass deutlich mehr als die Hälfte aller Aufgaben ohnehin technische Aufgaben sind (mit Anteilen zwischen 53 % und 64 %, je nach Teilgruppe), wird deutlich, welche hohe Bedeutung das *Technische Arbeiten*, insbesondere auf hohem Niveau, hat.

4. Fazit und Ausblick

Die hier gezeigte Relevanz des *Technischen Arbeitens* bestätigt die in der Literatur beschriebene Kalkülorientierung und bestätigt auch, dass das Beherrschen von Kalkülen eine nahezu unabdingbare – bisweilen die alleinige – Voraussetzung für die Bearbeitung von Klassenarbeitsaufgaben ist. Es erscheint jedoch wünschenswert, dass dort viel mehr Tätigkeiten als fast ausschließlich *Technisches Arbeiten* berücksichtigt würden und der Grad an kognitiver Aktivierung, der sich auch in Klassenarbeiten zeigen soll, sich nicht vorwiegend über ein hohes Niveau dieser Tätigkeit definiert.

Literatur

- Althoff, H. (2001). Prüfungsaufgaben - Analysieren, Interpretieren und Argumentieren *mathematik lehren*, 107, 47-51.
- Bromme, R., Seeger, F., Steinbring, H. (1990). Aufgaben, Fehler und Aufgabensysteme. In: *Aufgaben als Anforderungen an Lehrer und Schüler* (Vol. 14, S. 1-30). Köln: Aulis Verlag Deubner.
- Bruder, R., & Weigand, H.-G. (2001). Leistungen bewerten - natürlich! Aber wie? *mathematik lehren*, 107, 4-8.
- Hefendehl-Hebeker, L. (2004). *Perspektiven für einen künftigen Mathematikunterricht*. Duisburg: Universität Duisburg-Essen.
- Henn, H.-W., & Kaiser, G. (2001). Mathematik - Ein polarisierendes Schulfach *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 4(3), 359-380.
- Jordan, A., Ross, N., Krauss, S., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., et al. (2006). *Klassifikationsschema für Mathematikaufgaben* (1. Auflage). Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung
- Kunter, M., & Baumert, J. (2011). Das COACTIV-Forschungsprogramm zur Unterstützung professioneller Kompetenz von Lehrkräften - Zusammenfassung und Diskussion. In: M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften - Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (S. 345-366). Münster: Waxmann.
- Leuders, T. (2004). Selbstständiges Lernen und Leistungsbewertung. *Der Mathematikunterricht*, 3, 63-79.
- Neubrand, M., Klieme, E., Lüdtke, O., & Neubrand, J. (2002). Kompetenzstufen und Schwierigkeitsmodelle für den PISA-Test zur mathematischen Grundbildung *Unterrichtswissenschaft*, 30(1), 100-119.
- Schupp, H. (2002). *Thema mit Variationen oder Aufgabenvariation im Mathematikunterricht* (1. Auflage). Hildesheim, Berlin: Verlag Franzbecker.
- Sjuts, J. (2003). Formalisierung von Wissen - ein probates Werkzeug zur Bewältigung komplexer Anforderungen. *mathematica didactica*, 26(2), 73-90.
- Sjuts, J. (2007). Kompetenzdiagnostik im Lernprozess - auf theoriegeleitete Aufgabengestaltung kommt es an. *mathematica didactica*, 30(2), 33-52.