ANDREA HOFFKAMP, Berlin

Empirische Befunde und neue Gestaltungsprinzipien für einen inhaltlichen Zugang zur Analysis durch Computereinsatz

Funktionales Denken und Analysispropädeutik

In der Meraner Reform (1905) wurde die ‚Erziehung zum funktionalen Denken' als Sonderaufgabe herausgestellt. Es ging um ein gebietsübergreifendes Denken in Variationen und funktionalen Abhängigkeiten im Sinne einer fundamentalen Idee. Die Differential- und Integralrechnung sollte Höhepunkt in einem organisch aufgebauten Mathematikunterricht sein und nicht Zusatzstoff. Die Erziehung zum funktionalen Denken kann dabei als Propädeutik zur Analysis gesehen werden (Krüger 2000). Vollrath (1989) beschreibt drei Aspekte funktionalen Denkens: Zuordnungsaspekt (punktweise, statische Sicht), Änderungsaspekt (dynamische Sicht) und Objektaspekt (Sicht auf Funktion als Ganzes). Änderungsaspekt und Objektaspekt kommen hierbei dem Meraner Begriff am nächsten und sind für die Analysis, in der Funktionen als Ganzes im Zusammenhang betrachtet werden und deren Änderungsverhalten untersucht wird, essentiell.

Änderungsaspekt und Objektaspekt bereiten den Schülerinnen und Schülern am meisten Schwierigkeiten. Das zeigt sich zum Beispiel darin, dass Weg-Zeit-Graphen als Bewegung in der Ebene interpretiert werden bzw. Graphen als fotographische Bilder von Realsituationen gesehen werden (Graph-als-Bild-Fehler, Vogel 2006).

Ein oft bemängelter Zustand des Analysisunterrichts ist seine Kalkülorientierung und sein Verharren in Berechnungen losgelöst von inhaltlichen Vorstellungen. Viele Didaktiker plädieren deswegen immer wieder für einen qualitativ-inhaltlichen Zugang zur Analysis (z.B. Hahn/Prediger 2008).

Gestaltungsprinzipien am Beispiel der Lernumgebung ‚Die Reise'

Insgesamt wurden drei interaktive Lernumgebungen unter Nutzung der DGS Cinderella (Kortenkamp/Richter-Gebert 2006) entwickelt. Sie sind unter http://www.math.tu-berlin.de/~hoffkamp zusammen mit Unterrichtsmaterial frei zugänglich und können mit einem Standardinternetbrowser ohne spezielle Softwarekenntnisse benutzt werden (**geringer technischer Overhead, Praktikabilität**). Die Lernumgebungen verstehen sich als ein Beitrag zu einem inhaltlich-qualitativen Zugang zur Analysis. Am Beispiel der Lernumgebung ‚Die Reise' werden Gestaltungsprinzipien, zugrunde liegende Ideen und ausgewählte Ergebnisse einer Studie verkürzt dargestellt (siehe dazu auch Hoffkamp 2009).

Grundidee ist eine experimentell-interaktive Computernutzung mit dem Ziel die dynamische Komponente funktionalen Denkens zu akzentuieren. Ausgangspunkt ist jeweils eine **simultane dynamische Verknüpfung zwischen einer Situation und einem Funktionsgraphen**. Im Falle der ‚Reise' zwischen einer Landkarte und einem Weg-Zeit-Graphen (Abb. 1).

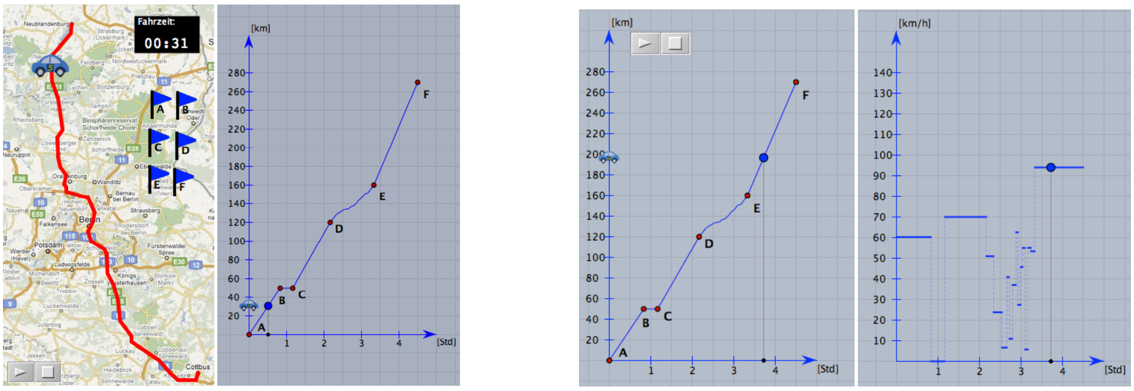

Abb.1: Verknüpfung Situation-Graph (links) und Variation innerhalb der Situation simultan in st- und vt-Graph (rechts). Es kann die Animation benutzt werden oder die blauen Punkte auf den Graphen und Fähnchen bewegt werden. (Quelle: Google Maps)

Die Lernenden markieren mit den Fähnchen die Stationen der Fahrt auf der Landkarte und verschaffen sich einen Überblick über die Situation. In einem zweiten Schritt werden Weg-Zeit Graph und dazugehöriger Geschwindigkeits-Zeit Graph dynamisch verknüpft (**Variation innerhalb der Situation**). Die Lernenden sollen untersuchen und verbalisieren, wie sich die beiden Darstellungen zueinander verhalten, indem sie z.B. die Frage beantworten, ob man mit Hilfe des vt-Graphen die zurückgelegte Wegstrecke bestimmen kann. In der Dynamik ist dies offensichtlich: Fährt man 50 Minuten lang eine Geschwindigkeit von 60 km/h, so hat man eine Strecke von 5/6 [h]·60 [km/h]=50 [km] zurückgelegt, was genau dem Flächeninhalt unter dem ersten Balken entspricht. Mit anderen Worten: Hier soll eine idealisierte Darstellung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung erkundet werden. Dabei ist der Gedanke der Supplantation (Vogel 2006), nämlich die visuelle Unterstützung mentaler Simulationsprozesse, wesentlich. Eine zweite Variationsstufe (**Metavariation**, ohne Abb.) erlaubt dann das Ändern der Situation und damit der Funktion als Ganzes. Dabei können die Lernenden in einem vt-Graphen die Balkenbreite und -höhe von fünf vorgegebenen Balken ändern und die Auswirkungen dieser Änderungen auf den st-Graphen untersuchen. Metavariation bezieht sich insbesondere auf den Objektaspekt und macht diesen Aspekt nutzbar. Darüber hinaus bewirkt Metavariation die Loslösung von konkreten Werten und richtet den Blick auf qualitative Betrachtungen der funktionalen Abhängigkeiten.

Qualitative Studie und ausgewählte Ergebnisse

Die Lernumgebung wurde im Rahmen einer qualitativen Studie in Jahrgangsstufe 10 im regulären Unterricht an zwei Berliner Gymnasien eingesetzt. Forschungsfragen sind: Welche Vorstellungen/Begriffe bezogen auf eine dynamische Sicht funktionaler Abhängigkeiten und im Hinblick auf Konzepte der Analysis werden bei der Arbeit mit der Lernumgebung entwickelt? Wie sehen die Interaktionsprozesse aus und welche Rolle spielen die Möglichkeiten der Applikationen (Variation/Metavariation)? Welche epistemologischen Hürden sind erkennbar?

Es wurden vier Schülerpaare bei der Arbeit mit der Lernumgebung und das Unterrichtsgespräch mit der gesamten Klasse videographiert. Von den Videos der Schülerpaare wurden basierend auf Rohanalysedokumenten gewisse Episoden zum Transkript und zur Analyse ausgewählt. Dabei wurde das Material sequentiell durchgegangen. Die Analyse basiert auf den Grundsätzen der interpretativen Unterrichtsforschung (Maier/Voigt 1991) und wurde in der Analyse ergänzt durch Daten von Arbeitsbögen, Test und Fragebögen.

Ausgewählte Ergebnisse: Folgender Auszug zeigt die Bearbeitung der Frage ‚Was passiert zwischen B und C?' Die Schülerinnen benutzen hierbei die linke Applikation aus Abb. 1. Zuvor haben sie die Fähnchen B und C an verschiedenen Stellen auf der Landkarte platziert, obwohl zwischen B und C eine 20-minütige Fahrtpause vorliegt. Sie haben also spontan zunächst einen Graph-als-Bild Fehler gemacht (‚B und C sind im Graph auch an verschiedenen Stellen').

S2:	*(bewegt den blauen Punkt zwischen B und C hin und her)* Der bleibt doch da irgendwie, oder? [..]
S2:	Macht der eine Pause, oder so? *(lächelt)*
S1:	Nee, warte mal, wie viele Minuten vergeudet er denn?
S2:	*(schiebt den blauen Punkt auf D)* Ach so, guck mal, dann ist ja, dann sind die beide auf einem Punkt *(schiebt Fähnchen C auf Fähnchen B)* [..]
S2:	Weil guck doch mal. Die sind doch, guck mal *(schiebt den blauen Punkt zw. B und C hin und her)* der ist doch immer auf der gleichen Stelle.
S1:	Ja, er bewegt sich nicht ( )
S2:	[Aber die Zeit verändert sich nur

Die Schülerinnen erlangen Einsicht nur durch inhaltliche Überlegungen (‚Pause') und durch eine dynamische Sicht, die sich in zeitabhängiger Änderung des Weges ausdrückt (‚Ja, er bewegt sich nicht.' ‚Aber die Zeit verändert sich nur.') Dazu bewegen sie P ein paar mal zwischen B und C hin und her, sie *erleben* die Situation virtuell und erlangen Erkenntnisse durch dynamische graphische Abstraktion.

Wirkung von Metavariation: Die Ergebnisse lassen vermuten, dass Metavariation eine abschnittweise Sicht des Graphen fördert – eine Sache die SuS i.a. schwer fällt und die sich darin äußert, dass Graphen nicht abschnittweise gelesen werden können und Punkte nicht miteinander in Beziehung gesetzt werden können, was man aber für die Bestimmung von Änderungsraten benötigt. Insbesondere formulieren SuS einen qualitativen Transfer zwischen Bestandsgraph (st-Graph) und Änderungsgraph (vt-Graph).

Epistemologische Hürde ‚Kontinuierlicher Durchschnittsbegriff': Unerwarteterweise gab es Probleme bei der Berechnung der durchschnittlichen Reisegeschwindigkeit (hier: 270 [km]/4.5 [h]=60 [km/h]). Ursache war einerseits das umgangssprachliche ‚Stundenkilometer', weshalb die SuS ‚auf einen Kilometer' ausrechnen wollten. Andererseits lag ein *Problem der Verkürzung* vor. Obwohl die Formel v=s/t allen bekannt war, war nicht klar, dass hierfür eine gleichförmige Bewegung und somit eine Proportionalität, also Quotientengleichheit (270/4.5=60/1) unterstellt wird. Tatsächlich wurde aber eine weitere Ursache v.a. im Verlaufe der Unterrichtsgespräche deutlich: Hier liegt ein kontinuierlicher Durchschnittsbegriff vor und SuS scheitern immer wieder an Aufgaben der Form: Wie hoch ist die Durchschnittsgeschwindigkeit, wenn man eine Stunde lang 30km/h und vier Stunden lang 100km/h fährt. Ein typischer Fehler zeigt sich in der Rechnung: (30+100)/2. Richtig wäre (1·30+4·100)/5, was gerade das Integral über die Geschwindigkeitsfunktion geteilt durch das Zeitintervall ist. Anders gesagt: Das kontinuierliche Analogon zum diskreten Durchschnittsbegriff ist der Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Literatur

Hahn, S., Prediger, S. (2008). Bestand und Änderung – Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. *JMD*, 29(3/4), 163-198.

Hoffkamp, A. (2009). Funktionales Denken mit dem Computer unterstützen – Empirische Untersuchungen im Rahmen des propädeutischen Unterrichts der Analysis. Erscheint in: *Bericht über die 27. Arbeitstagung des AK 'MU&I' in Soest.* Franzbecker.

Hoffkamp, A. (2009). Enhancing functional thinking using the computer for representational transfer. *Proceedings of CERME 6, Lyon.*

Kortenkamp, U., Richter-Gebert, J. (2006). The Interactive Geometry Software Cinderella, Version 2.0 Springer, Online unter http://cinderella.de

Krüger, K. (2000). Kinematisch-funktionales Denken als Ziel des höheren Mathematikunterrichts – das Scheitern der Meraner Reform. *Mathematische Semesterberichte*, 47, 221-241.

Maier, H., Voigt, J. (Hg.) (1991): Interpretative Unterrichtsforschung. Aulis Verlag.

Vogel, M. (2006). Mathematisieren funktionaler Zusammenhänge mit multimediabasierter Supplantation. Franzbecker: Hildesheim.

Vollrath, H.J. (1989). Funktionales Denken. *JMD,* 10(1), 3-37.