

Maren HIOB-VIERTLER, Weingarten, Andreas FEST, Schwäbisch Gmünd

## Entwicklung einer offenen Experimentierumgebung für das Lernfeld Funktionen

In dem BMBF-Projekt „SAiL-M – Semiautomatische Analyse individueller Lernprozesse in der Mathematik“ (<http://www.sail-m.de>) werden didaktische Beschreibungsmuster für aktivierende, kompetenzorientierte Umgebungen zum Mathematiklernen an der Hochschule formuliert und implementiert. Unterstützend werden prototypisch computergestützte Lernwerkzeuge mit einem intelligenten Assessment (vgl. Bescherer et al., 2009) für verschiedene mathematische Themenfelder entwickelt. Diese Tools implementieren den Ansatz der semiautomatischen Rückmeldung (Fest & Zimmermann, 2010) und werden in Einführungsveranstaltungen an mehreren Pädagogischen Hochschulen in Baden-Württemberg eingesetzt.

Im Rahmen des Projektes wurde eine Experimentierumgebung „SQUIGGLE-M“ für das Lernfeld Funktionen entwickelt. Wir diskutieren die Ausgangssituation, daraus resultierende Entwicklungsfragestellungen sowie deren interaktive Umsetzung.

### Probleme im Lernfeld Funktionen und Zuordnungen

Beobachtungen zeigen, dass Studierende häufig mit einer sehr engen Vorstellung des Funktionsbegriffs an die Hochschulen kommen. Funktionen sind für sie meist gleichbedeutend mit Funktionsgraphen und -gleichung (vgl. Malle, 1996). Auf Grund dieser eingeschränkten Sichtweise haben sie nach Untersuchungen von Kerslake (1981) und Weigand (1988) große Schwierigkeiten beim Übergang zwischen unterschiedlichen Darstellungsformen von Funktionen.

Da sich ein enges „*funktionales Denken*“ (vgl. Vollrath, 2003) in vertiefenden mathematischen Veranstaltungen als störend erweist, braucht es bereits in den Einführungsveranstaltungen gezielte Förderung. Die Beweglichkeit des funktionalen Denkens zu entwickeln benötigt nach Vollrath(2003) Zeit und sollte demnach in den ersten Semestern begonnen werden.

Befragungen in Einführungsveranstaltungen haben einzelne Begriffe signifikant als problematisch identifiziert. Begriffe aus dem Bereich der Funktionen, sogenannte „*definierte Begriffe*“, sind nach Gangé (vgl. Zech, 2002) nicht greifbar und demnach sehr schwierig zu verstehen. Vor allem der Funktionsbegriff an sich und damit verbundene Begriffe wie *Totalität*, *Eindeutigkeit*, *Surjektivität*, *Injektivität* und *Bijektivität* können von Studierenden selten auf konkrete Beispiele angewendet werden. Die Ursache da-

für liegt oftmals in einem Nichtverständnis der Begriffe sowie deren Transfer auf unterschiedliche Darstellungsformen und entsprechende Beispiele.

Vinner und Dreyfus sagen, dass „für das Verständnis des Funktionsbegriffs die Vorstellungen (*concept image*) entscheidend sind. Sie werden weitgehend durch Beispiele und ihre Darstellungen bestimmt[...]“ (vgl. Vollrath, 2003, S. 218).

Wird nun auf die „*Stufen des Verständnisses*“ bei der Begriffsbildung nach Vollrath (2003) zurückgegriffen, dann wird deutlich, dass gerade das Arbeiten mit unterschiedlichen Beispielen und Zusammenhängen für die Begriffsbildung eine aufbauende Entwicklung benötigt. Vollrath benennt vier aufeinander aufbauende Stufen, die zur Bildung des *intuitiven*, des *inhaltlichen*, des *integrierten* sowie des *formalen Begriffsverständnis* führen. Spezielle Beispiele zur Darstellung von Phänomenen und Eigenschaften, die Herstellung von Zusammenhängen sowie unterschiedliche Darstellungsformen unterstützen dabei den Begriffsbildungsprozess.

Entsprechend diesem Stufenmodell sollte das Konzept eines Computertools zur Unterstützung der Begriffsbildung folgende Dimensionen beinhalten. Es sollte ***experimentelles Arbeiten*** zulassen um das intuitive Verständnis zu fördern. Unterschiedliche Anschauungsbeispiele können experimentell entwickelt, bearbeitet, verändert, definiert und ausprobiert werden und bieten demnach individuelle Unterstützung in der Verständnisbildung und deren Beweglichkeit. In Verbindung mit ***verschiedenen Repräsentationsformen*** greift das Tool auf die Ausgangslage der ersten drei Stufen des Verständnisses zurück. Außerdem werden Übergänge zwischen einzelnen Darstellungsformen geübt und somit ein erweitertes funktionales Denken unterstützt und gefördert. Wird ein ***intelligentes Assessment*** mit lernprozessorientiertem Feedback implementiert, so fördert das Computerprogramm weiterhin die Selbstreflexion und somit eine Auseinandersetzung mit dem funktionalen Denken an sich. Dem Studierenden wird unter anderem ein bewusster Umgang mit der Thematik „Fehlerquellen und Fehlerbehebung“ während seines Lernprozesses nahegelegt. ***Offene Fragestellungen*** bieten Raum um individuelles Lernen überhaupt möglich zu machen.

### **Das Tool „Squiggle-M“**

Die Lernsoftware „SQUIGGLE-M“ (herunterzuladen auf [www.sail-m.de](http://www.sail-m.de)) wurde auf Grundlage des beschriebenen Konzepts entwickelt. „SQUIGGLE-M“ ist eine offene Experimentierumgebung mit eingebetteten „Cinderella“-Applets. Der laborbasierte Aufbau soll dazu beitragen das Verständnis des Funktionsbegriffs und dessen Eigenschaften zu vertiefen und zu erweitern. Studierende lernen, mit Hilfe der Definition des Funkti-

onsbegriffes zu begründen sowie Funktionseigenschaften an verschiedenen Beispielen zu erkennen, benennen und verdeutlichen. Die Möglichkeit, ein erweitertes funktionales Denken zu entwickeln, soll durch ein verbessertes Verständnis einzelner Zusammenhänge zwischen Urbildmengen, Bildmengen, Funktionsgraphen sowie Funktionsgleichungen in den einzelnen Laboren hergestellt werden. Der Begriffsbildungsprozess wird durch integrierte Experimentierfragen unterstützt.

### **Das Zuordnungslabor**

Das Zuordnungslabor gibt die Möglichkeit, individuelle Zuordnungsdiagramme interaktiv zu definieren. Dadurch können der Funktionsbegriff sowie weitere Eigenschaften an verschiedenen Beispielen verständlich gemacht und erlernt werden. Selbst definierte Zuordnungen können bei Bedarf auf ihre Eigenschaften überprüft werden. Das Labor gibt unterschiedliche u. a. fehlerbasierte Meldungen zurück, wie z.B. *„Dies ist keine Funktion da die Eindeutigkeit/Totalität verletzt wurde“*.

Die Farbwahl der Rückmeldung unterstützt den Lernprozess dabei visuell. So deutet eine grüne Rückmeldung auf die korrekte, eine rote auf eine falsche Definition, einer Funktion hin.

### **Das Repräsentationslabor**

Das Repräsentationslabor stellt zwei graphische Darstellungsarten von Funktionen nebeneinander und schafft so die Verbindung zwischen Zuordnungsdiagrammen, Funktionsgraphen und -gleichungen. Dieser Zusammenhang unterstützt v.a. das intuitive, das inhaltliche sowie das integrierte Begriffsverständnis. Funktionen, deren Term selbst eingegeben werden können, werden als Graph im Koordinatensystem sowie als Zuordnung in einem Leiterdiagramm dargestellt. Diese zweite Darstellungsform wurde von Goldenberg (1991) in Dynagraph erstmals interaktiv umgesetzt und soll helfen, „den Zuordnungs- und Kovariationsaspekt von Funktionen zu erfassen“ (vgl. Malle, 2000). In beiden Darstellungsformen können simultan dynamisch verschiebbare Punkte auf der x-Achse markiert werden, deren zugehörigen Bilder auf dem Graphen und der jeweiligen y-Achse gekennzeichnet werden. Anders als in den bisher veröffentlichten interaktiven Umsetzungen von Leiterdiagrammen können hierbei beliebig viele Punktepaare gesetzt werden.

Es werden – wie auch im Zuordnungslabor – Experimentieranregungen gegeben, die individuell vom Studierenden bearbeitet werden und die Begriffsbildung fördern. So könnte eine exemplarische Aufgabe für dieses Labor lauten: *„Welche Bedingungen benötigt eine bijektive Funktion, deren*

*Repräsentation als Leiterdiagramm parallel steigende Pfeile aufzeigt?*“  
Unterstützend können beide Darstellungsformen simultan nebeneinander oder – je nach Wahl des Lernenden – nur eine Form angezeigt werden, wobei ein dynamischer Übergang zwischen beiden Formen implementiert ist. Dem Lerner wird somit eine individuelle Lösungsstrategie ermöglicht.

## **Ausblick**

Das Toolkonzept beinhaltet eine semiautomatische Rückmeldung im Rahmen des intelligenten Assessments um den Lernprozess unterstützend zu begleiten. Die Integration konkreter Experimentierfragen sowie ein angepasstes Feedback sind in Bearbeitung. Dazu wird die Software den jeweiligen Experimentiervorgang aufzeichnen, analysieren und auf Grund dieser Ausgangslage Fehler rückmelden sowie Hinweise auf weiteres optimiertes Vorgehen geben. Werden unübliche Strategien oder Fehler vom System erkannt, die nicht automatisch analysiert werden können, so kann ein individuelles Feedback durch einen Tutor oder den Dozenten erfragt werden. Eine Evaluation wird weitere Ergebnisse bzgl. der Lernwirksamkeit liefern.

## **Literatur**

- Bescherer, C., Kortenkamp, U., Müller, W. & Spannagel, C. (2009). Intelligent Computer-Aided Assessment in Mathematics Classrooms. In A. McDougall, J. Murnane, A. Jones & N. Reynolds (Hrsg.), *Researching IT in Education: Theory, Practice and Future Directions*. (S. 200-205). Routledge.
- Fest, A. & Zimmermann, M. (in Druck). Werkzeuge für das individuelle Lernen in Mathematik. 27. *Herbsttagung des Arbeitskreises Mathematikunterricht & Informatik der GDM*, Soest.
- Goldenberg, P. et al. (1991): Dynamic representation and the development of an understanding of function. In: Harel, E. (Hrsg.): *The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, Bd. 25. Washington: MAA
- Kerslake, D. Graphs In: K. M. Hart u.a. (Hrsg.): *Children's Understanding of Mathematics*: 11-16, Oxford (Murray), 120-136.
- Malle, G. (1996). Aus der Geschichte lernen. *Mathematik lehren*, 75 (S. 4-8). Friedrich Verlag.
- Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *Mathematik lehren*, 103 (S. 8-11). Friedrich Verlag.
- Vollrath, H-J. (1984). *Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht*. Stuttgart: Klett Verlag.
- Vollrath, H-J. (2003). *Algebra in der Sekundarstufe*. Heidelberg/Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.
- Weigand, H.-G.(1988). Zur Bedeutung der Darstellungsform für das Entdecken von Funktionseigenschaften. *JMD* 9, 287-325.
- Zech, F. (2002). *Grundkurs Mathematikdidaktik: theoretische und praktische Anleitung für das Lehren und Lernen von Mathematik*. Weinheim /Basel: Beltz Verlag.