DIETMAR HILDENBRAND, REINHARD OLDENBURG, VERENA REMBOWSKI, Darmstadt und Frankfurt

Schnittstellenaktivität S6 „Geometrische Algebra“

1. Einführung

Die Vektorrechnung hat eine lange und von Zufällen bestimmte Geschichte hinter sich (einen Überblick gibt Wittmann). Grassmannalgebren fanden zunächst nicht viele Unterstützer. Eine Variante, bestimmte Clifford-Algebren, wurden von Hestenes (1991) als geometrische Algebra neu interpretiert und propagiert. Diese Algebren erfahren in den letzen Jahren einen bemerkenswerten Boom in der Fachwissenschaft, insbesondere in angewandten Disziplinen. In der hier beschrieben Schnittstellenveranstaltung werden die Leistungen der Geometrischen Algebra aus fachwissenschaftlicher Sicht dargestellt und aus didaktischer Sicht bewertet.

2. Dreidimensionale Geometrische Algebra

Geometrische Algebra kann über Vektorräumen unterschiedlicher Dimension und unterschiedlicher metrischer Struktur betrieben werden. Am nächsten an der üblichen analytischen Geometrie der Schule ist die geometrische Algebra über dem dreidimensionalen euklidischen Vektorraum.

Vektoren sind in der geometrischen Algebra entsprechend den Vektoren der traditionellen Vektoralgebra als eine Äquivalenzklasse gleichlanger und gleichgerichteter Pfeile oder als eine Äquivalenzklasse aller Translationen gleicher Länge und gleicher Richtung definiert. Somit sind Vektoren eindimensionale Ausdehnungsbilde. Ihre Notation erfolgt in Summenform: $v = v_1\ e_1+v_2\ e_2+v_3\ e_3$. Die elementare Vektorrechnung funktioniert in der geometrischen Algebra analog zur Vektoralgebra. Auch das Konzept des Skalarprodukts wird übertragen, es wird jedoch als inneres Produkt bezeichnet und auf weitere, noch einzuführende, Elemente erweitert.

Über Vektoren, als Elemente ersten Grades, hinaus existieren in der geometrischen Algebra zudem Elemente höheren Grades. Solche zweiten Grades werden Bivektoren *B* genannt. Bivektoren sind, anknüpfend an die Vektordefinitionen, als eine Äquivalenzklasse gleichgroßer und gleichorientierter Parallelogramme definiert, welche durch zwei Pfeile aufgespannt werden oder aus zwei hintereinander ausgeführten Translationen entstehen. Damit sind Bivektoren zweidimensionale Ausdehnungsgebilde.

Bivektoren entstehen über das äußere Produkt zweier Vektoren. Dieses ist über seine Antikommutativität, Verträglichkeit unter der Multiplikation mit Skalaren, Distributivität, Assoziativität und die Eigenschaft $v \wedge w = 0$, wenn die Vektoren parallel sind, definiert. In Koordinatendarstellung folgt für das äußere Produkt der Vektoren v und w: v^w = $(v_1 w_2 - w_1 v_2) e_1$^$e_2 + (v_2 w_3 - w_2 v_3) e_2$^$e_3 + (v_3 w_1 - v_1 w_3) e_3$^$e_1$. Damit stimmt das äußere Produkt in seiner Darstellung mit dem Vektorprodukt überein, es ist jedoch das orthogonale Komplement zu diesem. Weiterhin können Bivektoren miteinander verrechnet werden, wobei hierfür die den Vektoren entsprechenden Gesetze gelten.

Die geometrische Algebra erlaubt zudem die Addition von Elementen verschiedenen Grades, wobei ein Multivektor M resultiert. Der aus dem inneren und dem äußeren Produkt zweier Vektoren bestehende Multivektor wird als geometrisches Produkt dieser Vektoren bezeichnet: $vw=v\cdot w+v$^w. Dieses ist nach Definition in seiner parallelen Komponente kommutativ, in seiner orthogonalen Komponente antikommutativ, verträglich unter der Multiplikation mit Skalaren, distributiv und assoziativ. Das geometrische Produkt kann umgekehrt auch axiomatisch definiert werden durch die Relationen der Basisvektoren ($e_i^2=1$, $e_ie_j=-e_je_i$), und dann kann daraus das innere Produkt als dessen kommutative Komponente und das äußere Produkt als dessen antikommutative Komponente definiert werden.

Zusätzlich zu Vektoren und Bivektoren existieren in der geometrischen Algebra Trivektoren als Elemente dritten Grades. Diese sind als eine Äquivalenzklasse gleichgroßer und gleichorientierter Parallelotope definiert, und sind somit dreidimensionale Ausdehnungsgebilde. Trivektoren entstehen durch das äußere Produkt dreier Vektoren oder eines Bivektors und eines Vektors, welches mit dem Spatprodukt übereinstimmt.

Die geometrische Algebra über dem dreidimensionalen euklidischen Vektorraum ist folglich als Vektorraum achtdimensional mit der Basis 1, e_1, e_2, e_3, e_1^e_2, e_2^e_3, e_3^e_1, e_1^e_2^e_3. Des Weiteren sind Vektoren und Bivektoren, da das geometrische Produkt assoziativ und eindeutig ist, bezüglich dessen invertierbar, was auch die Division durch diese ermöglicht. Es existiert zudem ein Dualitätsoperator, der es erlaubt, zu Elementen beliebigen Grades das jeweilige orthogonale Komplement zu berechnen.

Zur Behandlung der analytischen Geometrie können Geraden und Ebenen über eine Parallelitätsbedingung beziehungsweise eine Komplanaritätsbedingung implizit beschrieben werden. Eine beliebige Gerade mit Richtung v ist somit gegeben als g:=v^$(x-v_P)=0$. Eine beliebige Ebene mit aufspannendem Bivektor B ist analog gegeben als E:=B^$(x-v_P)=0$.

Für Untersuchungen von Lagebeziehungen im Raum werden neben den gegebenen impliziten Formen nur die daraus ablesbaren Parameterdarstellungen benötigt. Die Lageuntersuchungen lassen sich schließlich, wegen der Eindeutigkeit der Geraden- und Ebenendarstellungen nach allgemeingültigen Methoden durchführen, wobei für sämtliche Kalkulationen koordinatenfreie Rechenausdrücke existieren.

Die beschriebene geometrische Algebra bietet, verglichen mit der traditionellen Vektoralgebra, einige Vorteile. So ist ein konsistenter Unterrichtsaufbau möglich, wobei die Struktur des dreidimensionalen Raumes zunächst anschaulich eingeführt wird. Anschließend werden die verschiedenen Produkte koordinatenfrei entwickelt, und schließlich wird die analytische Geometrie anschaulich behandelt.

Darüber hinaus gelten für Elemente verschiedenen Grades die gleichen konzeptuellen Grundlagen. Die Orientierung ist zudem ein wichtiges Merkmal der Bivektoren und Trivektoren, und wird auch zu einem natürlichen Kennzeichen des gesamten Raums. Des Weiteren stimmen die Methoden zur Längen-, Flächen- und Volumenmessung, basierend auf den Beträgen einzelner Elemente, überein. Auch die weiteren elementaren Rechenoperationen mit den verschiedenen Elementen funktionieren analog.

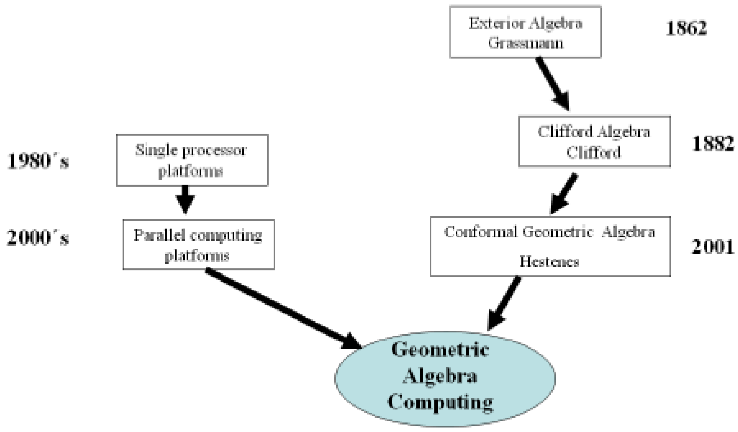
Das geometrische Produkt bietet außerdem konzeptuelle und rechnerische Vorteile gegenüber den anderen Produkten, da es die Beziehung zweier Elemente zueinander lückenlos beschreibt, und sich leicht durch herkömmliches Multiplizieren berechnen lässt. Darüber hinaus bedingt es die Möglichkeit zur Invertierung und zur Division. Zudem lässt sich die Dualitätsoperation auf Elemente jeden Grades und in beliebigen Dimensionen anwenden.

Schließlich werden Geraden und Ebenen anschaulich beschrieben, wobei eine vollständige Analogie zwischen den Geraden- und Ebenendarstellungen vorliegt. Die geometrische Algebra erlaubt letztlich die Verknüpfung einer Vielzahl inner- und außermathematischer Themengebiete.

Allerdings hat die geometrische Algebra auch, im Vergleich zur traditionellen Vektoralgebra, einige Nachteile. So kann die Vielfalt der neuen Konzepte irritieren, wobei Bivektoren und Trivektoren aufgrund ihrer Orientierung von den Parallelogrammen und Parallelotopen der elementaren Geometrie abweichen, sowie dem Trivektor als raumausfüllendes Element eine besondere Rolle zukommt. Zudem sind die elementaren Operationen mit Bivektoren und Trivektoren schwer anschaulich zu machen, und die Vielzahl der Produkte und weiteren Operatoren kann verwirren. Letztlich können bei der Behandlung der analytischen Geometrie Rechenausdrücke sehr unübersichtlich werden.

3. Konforme Geometrische Algebra

Seit der Veröffentlichung der konformen geometrischen Algebra durch David Hestenes (2001) erkennt man ihr immenses Potenzial in vielen Bereichen des Engineering und der Naturwissenschaften. Im Engineering gibt es aktuell hauptsächlich Anwendungen im Bereich von Computergrafik, Computer Vision und Robotik. Aus Sicht der Informatik besonders interessant ist die Kombination der einfachen, eleganten mathematischen Beschreibung von Algorithmen mit hoher Performanz durch die neuen parallelen Rechnerarchitekturen. Diese beiden Trends (s. folgende Abbildung) führen zur „Geometric Algebra Computing“ Technologie,



die beispielsweise Ausdruck findet in den Tools CLUCalc (Perwass, 2010) und Gaalop (Hildenbrand et al. 2010). CLUCalc bietet die Möglichkeit, Algorithmen in geometrischer Algebra auf eine interaktive und visuelle Art und Weise zu entwickeln und zu testen. Gaalop kompiliert diese Algorithmen in optimierte Implementierungen. Diese Technologie soll in Zukunft für hoch performante, spezifische Implementierungen für die unterschiedlichsten parallelen Rechnerarchitekturen ausgebaut werden.

Mit der konformen geometrischen Algebra steht generell eine übergreifende mathematische Sprache zur Verfügung, die es erlaubt, sehr direkt aus der geometrischen Anschauung heraus zu rechnen. So kann beispielsweise mit geometrischen Objekten wie Kugeln, Ebenen und Kreisen sowie mit geometrischen Operationen wie Schnitten von verschiedenen Objekten oder mit Transformationen sehr einfach und direkt gerechnet werden.

Algebraisch kommen zu den drei euklidschen Basisvektoren die beiden Basisvektoren e_0 für den Ursprung und e_∞ für die Unendlichkeit hinzu. Alle Kombinationen dieser Basisvektoren ergeben die 32 algebraischen Basiselementen, die als Blades bezeichnet werden. Ein Multivektor ist eine Linearkombination all dieser Blades, die selbst eine Dimension zwischen 0 für einen Skalar und 5 für den sogenannten Pseudoskalar besitzen.

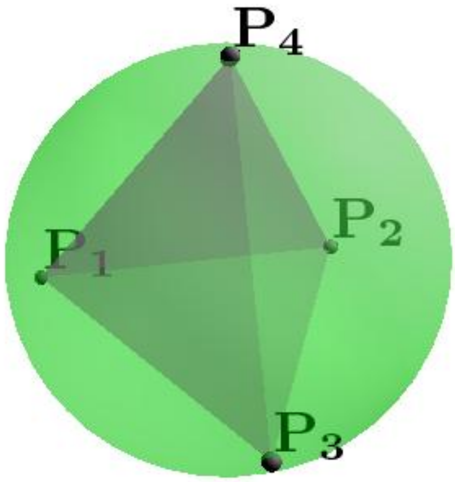
Die folgende Tabelle zeigt die geometrischen Basisobjekte der konformen geometrischen Algebra, die sich als einfache algebraische Ausdrücke ausdrücken lassen.

Entität	**IPNS**	**OPNS**
Punkt	$P = \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2 e_\infty + e_0$	
Kugel	$s = P - \frac{1}{2}r^2 e_\infty$	$s^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4$
Ebene	$\pi = \mathbf{n} + d e_\infty$	$\pi^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge e_\infty$
Kreis	$z = s_1 \wedge s_2$	$z^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$
Gerade	$l = \pi_1 \wedge \pi_1$	$l^* = P_1 \wedge P_2 \wedge e_\infty$
Punktpaar	$P_p = s_1 \wedge s_2 \wedge s_3$	$P_p^* = P_1 \wedge P_2$

Dies sind Punkte, Kugeln, Ebenen, Kreise, Geraden und Punktpaare. Ein Punkt P wird bspw. repräsentiert als Linearkombination aus dem 3D-Punkt $\mathbf{x} = x_1\ e_1 + x_2\ e_2 + x_3\ e_3$ (3D-Vektoren bzw. -Punkte werden in konformer geometrischer Algebra normalerweise fett gekennzeichnet) und der zusätzlichen Basisvektoren e_0 und e_∞($\mathbf{x}^2$ bedeutet das bekannte Skalarprodukt).

Für die geometrischen Objekte gibt es zwei Repräsentationen, nämlich das IPNS (Inner Product Null Space) und das OPNS (Outer Product Null Space), siehe (Perwass 2009). Will man bspw. die Menge aller Punkte wissen, die bezüglich des inneren Produkts mit dem algebraischen Ausdruck e_0 eine 0 ergeben (IPNS von e_0), ergibt sich die implizite Gleichung $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, welche nur vom 3D-Ursprung erfüllt wird. Die beiden Repräsentationen sind dual zueinander. Um zwischen den beiden Repräsentationen wechseln zu können, wird der dual-Operator '*' benutzt.

In der IPNS-Repräsentation wird eine Kugel repräsentiert mit Hilfe des Mittelpunkts P und des Radius r. In dieser Repräsentation ist die Bedeutung des äußeren Produktes gleichbedeutend mit dem Schnitt von geometrischen Objekten. Beispielsweise ist der Kreis definiert als Schnitt von zwei Kugeln ($s_1 \wedge s_2$). In der OPNS-Repräsentation konstruiert man eine Kugel mit Hilfe des äußeren Produktes '^' von vier Punkten P_i, die auf der Oberfläche der Kugel liegen. Quadriert man die algebraischen Ausdrücke für Kugeln, Kreise oder Punktpaare erhält man das Quadrat ihrer Radien.



Will man bspw. den Radius der einen Tetraeder umhüllenden Kugel berechnen, kann man das sehr einfach in 2 Schritten tun. Zunächst berechnet man die Kugel S als äußeres Produkt der Eckpunkte des Tetraeders

$$S = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4 ,$$

deren Quadrat direkt dem Quadrat des Radius entspricht.

$$r^2 = S^2$$

Neben der einfachen und direkten Beschreibung von geometrischen Objekten bietet die geometrische Algebra eine große Menge an Möglichkeiten, geometrische Operationen zu beschreiben. Neben den Schnitten von geometrischen Objekten gehören dazu die einfache Bestimmung von Abständen und Winkeln sowie Rotationen, Translationen, Projektionen oder Spiegelungen. Den Mittelpunkt einer Kugel kann man bspw. als eine Spiegelung der Unendlichkeit an der Kugel ausdrücken. Aus didaktischer Sicht ergibt sich damit die Notwendigkeit, das große, mathematische System in kleine, sinnvoll verarbeitbare Einheiten zu strukturieren.

Mit konformer geometrischer Algebra ist prinzipiell ein Rechnen im Raum, analog zum Konstruieren in 2D mit Lineal und Zirkel, möglich (CLUCalc). Für die Ausbildung sehr hilfreich wäre eine dynamisches Geometrie-System, welches diese interaktiven und visuellen Möglichkeiten verbindet mit der Möglichkeit des symbolischen Rechnens von Computeralgebra-Systemen.

Generell sind für die Ausbildung auch Strategien zu entwickeln für Lernende, die bereits einen gewissen Background durch andere mathematische Systeme haben. Wichtig ist außerdem, einheitliche Notationen zu finden, wo zurzeit noch ein Wildwuchs von unterschiedlichen Notationen herrscht.

Die TU Darmstadt hat die geometrische Algebra als ein interessantes, interdisziplinäres Projekt identifiziert. Nähere Informationen und Links finden sich unter http://www.fif.tu-darmstadt.de/forschung/spotlight/spotlight_1.de.jsp

4. Computeralgebra

Die Rechnungen in der geometrischen Algebra sind zwar transparent und Dank der Assoziativität des geometrischen und des äußeren Produktes nicht so ungewohnt wie zB Rechnungen mit dem Kreuzprodukt, trotzdem können sie zu viel Schreibarbeit führen. Diesen Kleinkram kann man sich durch ein Computeralgebrasystem (CAS) abnehmen lassen. Es gibt bereits für verschiedene professionelle CAS (Maple, Mathematica) GA-Bibliotheken. Für das Freeware-System Maxima wurde eine neue Bibliothek entwickelt und hier soll exemplarisch dargestellt werden, wie damit der Lotfußpunkt Q von einem Punkt P auf einer Geraden $x=A+t\cdot r$. (In diesem System steht · für das geometrische Produkt).

(%i37) `eq1: IPv(Q-P,r)=0;` (%o37) $\frac{Q\ .\ r}{2}-\frac{P\ .\ r}{2}+\frac{r\ .\ Q}{2}-\frac{r\ .\ P}{2}=0$	Q-P soll auf dem Richtungsvektor r senkrecht stehen (IPv=Inneres Produkt)
(%i38) `eq2: APv(r,A-Q)=0;` (%o38) $\frac{Q\ .\ r}{2}-\frac{A\ .\ r}{2}-\frac{r\ .\ Q}{2}+\frac{r\ .\ A}{2}=0$	R und A-Q sollen parallel sein (APv= Äußeres Produkt)
(%i39) `eq1+eq2;` (%o39) $Q\ .\ r-\frac{P\ .\ r}{2}-\frac{A\ .\ r}{2}-\frac{r\ .\ P}{2}+\frac{r\ .\ A}{2}=0$	Summe beider Gleichungen
(%i40) `Q . r = -(-P . r/2-A . r/2-r . P/2+r . A/2);` (%o40) $Q\ .\ r=\frac{P\ .\ r}{2}+\frac{A\ .\ r}{2}+\frac{r\ .\ P}{2}-\frac{r\ .\ A}{2}$	Auflösen nach Qr
(%i41) `Q=(P . r/2+A . r/2+r . P/2-r . A/2).inv(r);` (%o41) $Q=\left(\frac{P\ .\ r}{2}+\frac{A\ .\ r}{2}+\frac{r\ .\ P}{2}-\frac{r\ .\ A}{2}\right)\ .\ \frac{r}{r^2}$	Expliziter Ausdruck für Q

Vektoren können auch als Linearkombinationen von Basisvektoren dargestellt werden. Mit diesem Werkzeugkasten lassen sich alle schulüblichen Berechnungen der analytischen Geometrie durchführen und oft ergeben sich – wie im Beispiel – explizite Formeln.

5. Fazit

Geometrische Algebra besitzt ein enormes Potential, weil sie einen großen Anwendungsbereich durch einen effizienten Kalkül abdeckt. Optimal nutzbar wäre das, wenn sie sowohl in der Schule als auch an Fachhochschulen und Universitäten gelehrt würde. Aber auch solange dies nicht der Fall ist sollte daran gearbeitet, die Realisierbarkeit eines GA-Curriculums zu untersuchen.

Literatur

Calvet, R. G. (2007). *Treatise of Plane Geometry through Geometric Algebra*. Cerdanyola del Valles: Timsac No 1.

Hestenes, D. (1991). *Mathematical Viruses*. http://geocalc.clas.asu.edu/pdf-preAdobe8/MathViruses.pdf.

Hestenes, D. (2001). *Old Wine in New Bottles: A New Algebraic Framework for Computational Geometry*. Geometric Algebra with Applications in Science and Engineering, Bayro-Corrochano E. und Sobczyk (Hrsg.) , Birkhäuser.

Hildenbrand, D. , Pitt J. und Koch A. (2010). *Gaalop- High Performance Parallel Computing based on Conformal Geometric Algebra*. Geometric Algebra Computing for Engineering and Computer Science, Bayro-Corrochano E. und Scheuermann G. (Hrsg.), Springer Verlag.

Horn, M. E. (2004). *Grass, Mann! Das Clifford-Kinder-Rechenbuch*. Nordmeier, Oberländer (Hrsg.) Didaktik der Physik der DPG, Beiträge zur Frühjahrstagung Düsseldorf.

Perwass, Ch. (2009) *Geometric Algebra with Applications in Engineering*. Springer Verlag.

Perwass, Ch. (2010) *CLUCalc.* Homepage www.clucalc.info.

Tietze, U.-P.; Klika, M.; Wolpers, H. (2000) *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II*. Band 2. Braunschweig: Vieweg.

Vince, J. (2008) *Geometric Algebra for Computer Graphics*. London: Springer.

Wittmann, G. (2003) *Schülerkonzepte zur Analytischen Geometrie*. Hildesheim: Franzbecker.