Hans Niels JAHNKE, Essen

Zur Genese des Beweisens

In diesem Vortrag soll nicht über die Genese des deduktiven Argumentierens schlechthin geredet werden, sondern über die Herausbildung einer expliziten Konzeption des Beweisens, wie sie in den *Analytica Posteriora* des Aristoteles vorliegt und in Euklids *Elementen* als axiomatisch-deduktive Theorie realisiert ist. Dem entspricht, dass im abschließenden didaktischen Teil nicht allgemein über mathematisches Argumentieren gesprochen wird, sondern über die Frage, wie man in den Klassen 5 bis 10 thematisieren kann, was ein mathematischer Beweis ist und worin der Sinn des Beweisens liegt.

Wir diskutieren zunächst eine These des ungarischen Mathematikhistorikers Árpád Szabó (1913-2001), die dieser in den 60er Jahren des vorigen Jahrhunderts vorgeschlagen hat.

1. Die These von Szabó

Euklid unterteilt in seinen Elementen die am Anfang stehenden Grundlagen in drei Gruppen von Aussagen: (1) Definitionen (griechisch *Horoi*), (2) Postulate (*Aitemata*) und (3) Axiome (*Konai Ennoiai*). Ältere Euklid-Manuskripte enthielten die Termini (1) *Hypotheseis*, (2) *Aitemata* und (3) *Axiomata*.

Nach Szabo waren die Begriffe *Hypothesis*, *Aitema* und *Axioma* gängige Termini der voreuklidischen und vorplatonischen Dialektik und spielten auch in Platos Dialogen und den Abhandlungen des Aristoteles eine bedeutende Rolle. Unter Dialektik verstanden die Griechen die Kunst der Führung von Gesprächen, bei denen kontroverse Themen diskutiert werden. Als Kunstlehre war die Dialektik ein Teilgebiet der Rhetorik, bei Plato (427-348 v. Chr.) stellte sie eine Methode der philosophischen Erörterung und Erkenntnisgewinnung dar.

Von Plato und Aristoteles bis ins 19. Jh. verstanden die Mathematiker und Philosophen unter einem Axiom eine Aussage, die aus sich heraus evident und absolut wahr ist. Die absolute Wahrheit der Axiome garantiert die absolute Wahrheit der Mathematik. Die wichtigsten antiken Kronzeugen dieser Auffassung waren Aristoteles (384 – 322 v. Chr.), insbesondere seine Schrift *Analytica Posteriora*, und der spätantike Neu-Platoniker Proklos (412 – 585 n. Chr.) in seinem einflussreichen Kommentar zum Buch I der Elemente Euklids.

Die Auffassung der Axiome als selbstevidente Wahrheiten erfährt nun deutliche Modifikationen, wenn man Szabós etymologischen Untersuchungen folgt. Betrachten wir zunächst den Begriff der *Hypothesis*. Im Sinne des Wortes ist *Hypothesis* etwas, das *daruntergelegt* wird und folglich als *Grundlage* von etwas anderem dienen kann. Es handelt sich um eine unbewiesene Voraussetzung in einer Argumentation, deren Richtigkeit man unterstellt, um aus ihr andere Aussagen abzuleiten. Bei Plato findet man eine Vielfalt an Situationen und Verwendungsweisen für diesen Begriff. *Hypothesis* ist bei ihm zugleich ein mathematischer *und* ein dialektischer Begriff. Sokrates etwa „bittet" seinen Gesprächspartner, ihm „zu erlauben", diese oder jene Hypothese an den Anfang zu stellen. Das Gespräch kann nur weitergehen, wenn der Partner ihm dies gewährt. Bei Plato hießen Hypothesen deshalb häufig auch *Homologemata* (die „zugestandenen Dinge").

Im Rahmen einer Gesprächsführung wird man in der Regel solche Hypothesen einführen, die man für besonders stark hält und von denen man annimmt, dass sie vom Gesprächspartner akzeptiert werden. Sokrates reflektiert dies an verschiedenen Stellen der Dialoge und ermahnt seine Gesprächspartner, im Hinblick auf den Ausgangspunkt besondere Sorgfalt walten zu lassen.

Man kann eine Hypothese aber auch *probeweise* zum Zwecke ihrer kritischen Untersuchung aufstellen. Im philosophischen Diskurs leitet man dann Schlussfolgerungen ab, die entweder *erwünscht* oder plausibel sind - dann führen sie zur Stärkung der Hypothese- oder *unerwünscht* und daher die Ablehnung der Hypothese zur Folge haben. Z. B. stellt Sokrates im Dialog *Theaitetos* (164 b) die Hypothese auf, dass Wissen und sinnliches Wahrnehmen identisch sind. Im weiteren Verlauf des Dialogs ergibt sich daraus ein Widerspruch. Also kann die Hypothese nicht richtig sein, Wissen und sinnliches Wahrnehmen sind mithin nicht identisch. An dieser Stelle führt die Prüfung der Hypothese also auf einen Extremfall einer unerwünschten Folge, nämlich einen logischen Widerspruch.

Für den Begriff der Hypothese findet Szabó insgesamt drei verschiedene dialektische Bedeutungsvarianten:

> (1) Hypothese = möglichst starke, unbewiesene Aussage. Um seine Partner von einer bestimmten Behauptung zu überzeugen, schlägt Person A eine Hypothese vor, von der sie annimmt, dass ihre Gesprächspartner sie akzeptieren und aus der sich die Behauptung ableiten lässt. Extremfall: eine in sich evidente Aussage, deren Gültigkeit nur „eine streitsüchtige Person", wie Aristoteles formulierte, in Zweifel ziehen wird.
>
> (2) Hypothese = Aussage, deren Gültigkeit unterstellt wird, mit der Absicht, sie einer kritischen Untersuchung zu unterziehen. Es werden Folgerungen abgeleitet

> und geprüft, ob sie erwünscht oder unerwünscht sind. Extremfall: indirekter Beweis.
>
> (3) Hypothese = Definition. Das ist auch für die Mathematik ein relevanter Fall. Man beginnt etwa mit der Definition von „gerader und ungerader Zahl“ und kann daraus die Theorie vom „Geraden und Ungeraden“ deduzieren.

Die drei Begriffe *Hypothesis*, *Aitema* und *Axioma* hatten in der vorplatonischen und voraristotelischen Dialektik eine ähnliche Bedeutung (mit Ausnahme der Variante „Definition“). Sie bezeichneten jene Anfangssätze in der dialektischen Auseinandersetzung, deren Akzeptanz durch einen Gesprächsteilnehmer von seinem Partner *gefordert* wird. Wenn sich die Gesprächspartner auf einen solchen Satz geeinigt haben, dann hieß er häufig *Hypothesis*. Wird dagegen die Zustimmung des Partners in der Schwebe gelassen, so hieß ein solcher Satz *Aitema* oder *Axioma* (Szabó 1960, 399). Diese Bedeutung von *Aitema* kannte auch noch Aristoteles.

Geht man also auf die Genese des Begriffs *Axiom* in der Dialektik zurück, dann bezeichnete dieser Begriff keinesfalls von Anfang an eine unbezweifelbare, absolut wahre Aussage, sondern hatte lange Zeit eine Konnotation im Sinne des modernen Hypothesenbegriffs. Wahrscheinlich war man sich zur Zeit Euklids dieser hypothetischen Konnotation noch bewusst und hat daher den Begriff *Axioma* durch den der *Konai Ennoiai* (= *„die [allen Menschen] gemeinsamen Vorstellungen*“) ersetzt.

So durchlief der Begriff des Axioms in der griechischen Philosophie und Mathematik eine Karriere, deren Anfangspunkt in der Dialektik und deren Endpunkt in der Mathematik lag. In der Dialektik bezeichnete er eine Annahme, die man am Anfang eines Diskurses akzeptieren oder eben auch nicht akzeptieren kann, in der Mathematik eine unbewiesene Ausgangsaussage einer deduktiv organisierten Theorie, die nicht bezweifelt werden kann und den Status absoluter Sicherheit hat. Dies jedenfalls war seit Plato und Aristoteles die herrschende Meinung unter Mathematikern und Philosophen, für die die Mathematik zweitausend Jahre lang das Ideal einer sicheren Wissenschaft darstellte.

Aus Szabos terminologiegeschichtlicher Studie können zwei allgemeine Aussagen extrahiert werden:

(1) Erstens stand die *Praxis eines rationalen Diskurses* sozusagen Modell für die Organisation einer mathematischen Theorie gemäß der axiomatisch-deduktiven Methode. In den Termini *Hypothese*, *Aitema* und *Axiom* sind Verfahrensregeln kristallisiert, die die Verpflichtung der Gesprächspartner beinhalten, ihre Voraussetzungen offenzulegen.

(2) Die zweite Konsequenz betrifft die *Universalität* der Dialektik. Gegenstand eines durch Dialektik geleiteten Diskurses kann *jedes* Problem werden, ob es sich nun um eine Frage der Ethik oder der Mathematik handelt. Die Möglichkeit der axiomatisch-deduktiven Organisation einer Gruppe von Aussagen ist also nicht auf Geometrie und Arithmetik beschränkt, sondern lässt sich potentiell auf alle Gegenstandsbereiche menschlichen Nachdenkens anwenden. Das haben die Griechen zur Zeit Euklids begriffen. Innerhalb kurzer Zeit wandten Euklid und die auf ihn folgenden Wissenschaftler die axiomatische Organisation einer Theorie auf weite Bereiche der (Natur-)Wissenschaft an. Euklid hat eine axiomatische Optik und eine axiomatische Musiktheorie verfasst, von Archimedes stammen axiomatisch-deduktive Darstellungen der Statik und der Hydrostatik. So kann man sagen, dass die Erfindung des Beweisens und der theoretischen Physik Hand in Hand gingen und notwendig miteinander verknüpft waren (vgl. Jahnke 2009).

2. Die eleatische Philosophie und der indirekte Beweis

Platos Dialoge enthalten eine Fülle an Beispielen hypothetischen Denkens in der Philosophie. Darunter sind, wie wir gesehen haben, auch philosophische Argumentationen, die den indirekten Beweisen der Mathematik entsprechen. Generell ist plausibel, dass hypothetisches Argumentieren für die Kunst des Dialogs über streitige Fragen charakteristisch ist. Die Mathematiker haben, so Szabó, die axiomatisch-deduktive Verfahrensweise im Allgemeinen und den indirekten Beweis im Besonderen von den Philosophen gelernt. Doch wann könnte dies geschehen sein? Plato berief sich in seinen Schriften an vielen Stellen auf die Mathematik als Vorbild des Argumentierens. Er riet den Philosophen, von der Mathematik zu lernen. Wenn umgekehrt die Mathematiker von den Philosophen gelernt haben, dann muss dies zu einem früheren Zeitpunkt gewesen sein.

Szabó folgt nun einem Hinweis des Aristoteles, der den Eleaten Zenon als den „Erfinder der Dialektik“ bezeichnet hat. Zenon von Elea (490-430 v.C.) war der wichtigste Schüler des Parmenides (540-483 v.C.), der die sogenannte eleatische Philosophie begründet hat. Elea war eine griechische Stadt in Süditalien. In dieser Philosophie ging es darum, die Alltagswahrnehmung der Welt als eine Scheinwahrheit aufzudecken, während die wahre Welt ein unveränderliches, ungeschaffenes, unzerstörbares „Sein“ sei. In dem „Lehrgedicht“ des Parmenides, seinem einzigen noch erhaltenen Text, spielen indirekte Beweise eine wichtige Rolle. Sie sind Ausdruck seines Bestrebens, eine begriffsanalytische und logisch argumentierende Philosophie zu entwickeln. Ausdrücklich ermahnte er seine Anhänger:

> „Lass nicht die viel erfahrene Gewohnheit dich dorthin verführen! Nicht dem geblendeten Auge, dem tauben Gehör, noch der Zunge darfst Du vertrauen: Allein durch Vernunft entscheide die These, die so häufig umstritten und die von mir hier widerlegt wird!“ (zitiert nach Popper 2005, 127)

Zur Unterstützung der Lehre des Parmenides hat Zenon zahlreiche Paradoxien (40, von denen zehn überliefert sind) rund um den Bewegungsbegriff entwickelt. Das bekannteste ist das Paradoxon von Achilles und der Schildkröte, demzufolge ein schneller Läufer einen langsamen Läufer nicht überholen könne. Um ein solches Paradoxon zu verstehen und zu würdigen, ist eine bestimmte geistige Einstellung notwendig, die in dem angeführten Zitat von Parmenides wunderbar ausgedrückt ist. Man weiß ja, dass Achilles die Schildkröte überholt. Davon darf man sich aber nicht ablenken lassen, sondern muss seinem eigenen Denken vertrauen und den in den Voraussetzungen angelegten Gedankengang bis zu Ende fortführen. In der Mathematik wird diese Einstellung mit dem Begriff ‚Strenge’ bezeichnet.

In der eleatischen Schule meint Szabó nun die Entdecker des indirekten Beweises gefunden zu haben. Seine Schlussfolgerung ist: die Mathematiker haben den indirekten Beweis von den Philosophen gelernt, und zwar von Parmenides und Zenon!

Diese These ist spekulativ und dementsprechend nicht ohne Widerspruch geblieben (Knorr 1980). Die schwächere These, dass mathematisches und philosophisches Argumentieren sich in derselben Dialogkultur griechischer Philosophenschulen entwickelt haben, ist dagegen plausibel und wohl belegt.

Insgesamt zeichnet Szabó für die Genese des axiomatisch-deduktiven Verfahrens folgendes Bild. Nach einer Phase anschauungsgebundenen Beweisens, die im 6. vorchristlichen Jahrhundert begonnen habe und deren wichtigster Vertreter Thales gewesen sei, habe unter dem Einfluss der Philosophie in der Mitte des 5. Jh. v. Chr. ein Prozess der Abwendung von Empirie und Anschauung eingesetzt, der schließlich in den Elementen Euklids gipfelte. Dort werden Geometrie und Arithmetik als ein rein begriffliches System dargestellt - mit Beweisen, die von den beigegebenen Figuren, und damit von der Anschauung, letztlich unabhängig sind. Die Axiomatisierung der Mathematik bei den Griechen erfolgte also in einem eineinhalb Jahrhunderte währenden Prozess, der von der Dialogpraxis der Philosophenschulen nicht getrennt werden kann.

3. Die Rettung der Phänomene und die hypothetisch-deduktive Methode

Wir haben gesehen, dass die Griechen die Universalität des axiomatisch-deduktiven Verfahrens verstanden und für die Mathematisierung einer Reihe von Wissenschaftsdisziplinen genutzt haben. Die in diesem Zusammenhang notwendig auftretende Frage nach der Beziehung von Theorie und Empirie haben sie am Beispiel der Astronomie exemplarisch diskutiert, mit Folgewirkungen bis auf Kepler und Galilei. Die Hypothesen über die Bahnen der Planeten mussten etwa so beschaffen sein, dass sie einerseits den damaligen Überzeugungen über die Fundamentalität und Einfachheit der Kreisbewegung genügten, andererseits aber auch die Tatsache erklärten, dass die Planeten auf ihrem Weg durch den Fixsternhimmel in regelmäßigen Abständen eine rückläufige Bewegung ausführen. Das Schlagwort von der „Rettung der Phänomene“ ist griechischen Ursprungs („sozein ta phainomena“) und stammt aus einer wissenschaftstheoretischen Diskussion zur Astronomie, die erstmalig bei Plato erwähnt und bis in die frühe Neuzeit weitergeführt wurde (vgl. Mittelstrass 1962). Mit der „Rettung der Phänomene“ ist gemeint, dass die Hypothesen, mit deren Hilfe man die Bahnbewegung der Planeten beschrieb, so gestaltet werden müssen, dass sich aus ihnen die gemessenen Daten und insbesondere die Rückwärtsbewegung der Planeten ableiten lassen. Damit entspricht die „Rettung der Phänomene“ genau der zweiten Bedeutungsvariante, die Szabó für den Hypothesengebrauch in der Dialektik festgestellt hat: eine Hypothese wird aufgestellt, und man prüft, ob ihre Konsequenzen erwünscht sind, d.h. den Daten entsprechen, oder nicht. Im positiven Fall spricht dies für die Annahme der Hypothese, im negativen Fall muss sie verworfen werden.

Szabó stellt diese Verbindung nicht her. Die Formel der Rettung der Phänomene scheint in der Antike nur auf die Astronomie angewandt worden zu sein (Mittelstrass 1962). Dennoch sollte nicht übersehen werden, dass hier der Sache nach eine Querverbindung besteht (Jahnke 2009), und immerhin tritt diese Problematik in Platos (späten) Dialogen auf.

Im 16. und 17. Jahrhundert setzte, wiederum in der Astronomie, eine neue Diskussion über die Rolle von Hypothesen in den Wissenschaften ein. Diese Diskussion mündete bei Kepler, Galilei und Huygens in der Auffassung, dass Hypothesen am Anfang (natur-)wissenschaftlicher Theoriebildung nicht notwendig in sich evident sein müssen. Vielmehr erweist sich ihre Wahrheit/Angemessenheit dadurch, dass ihre Konsequenzen mit der Erfahrung (insbesondere mit Messungen) übereinstimmen. Am Ende des 19. Jahrhunderts hat man dann diese Auffassung als „hypothetisch-deduktive Methode“ bezeichnet.

Im Hinblick auf die Gültigkeit wissenschaftlicher Theorien findet man also schon in der Antike zwei verschiedene Begriffe von Evidenz. Den einen kann man als ‚direkte Evidenz’ bezeichnen. Er bezieht sich darauf, dass eine Aussage aus sich heraus evident und nicht bezweifelbar erscheint. Den zweiten Evidenzbegriff wollen wir als ‚indirekt' bezeichnen. Dies soll bedeuten, dass eine Hypothese auch dadurch an Akzeptabilität gewinnt, dass die aus ihr abgeleiteten Konsequenzen mit der Erfahrung übereinstimmen. Wir hatten diesen Typ von Evidenz in der griechischen Dialogpraxis ebenso gefunden wie in der Redeweise von der ‚Rettung der Phänomene' und der modernen ‚hypothetisch-deduktiven Methode'.

4. Beweisen in der Sekundarstufe

Für das Beweisen in der Sekundarstufe ergeben sich offensichtliche Konsequenzen, die unter Mathematikern und Didaktikern nicht umstritten sind. Die wichtigste ist: ohne eine Dialogkultur im mathematischen Klassenzimmer kann es keine Hinführung zum eigenständigen Beweisen geben. Erfahrene Lehrerinnen und Lehrer wissen auch, dass die Erörterung von Paradoxien (Zenon) und Gedankenexperimenten eine wichtige Möglichkeit ist, um den Schülern den inhärenten Reiz des logisch-spekulativen Denkens nahezubringen.

Darüber hinaus sollte im Unterricht *explizit thematisiert* werden, was ein Beweis ist und worin der Sinn des mathematischen Beweisens besteht. Dabei handelt es sich um Wissen über Beweise. Heinze & Reiss (2003) sprechen seit mehreren Jahren vom *Methodenwissen* zum Beweisen. Sie verstehen darunter den logischen Aufbau von Beweisen, die zulässige Verkettung zweier Argumente, die Vermeidung von Zirkelschlüssen, Lückenlosigkeit der Argumentation etc. (vgl. auch Ufer et al. 2009).

Parallel dazu müsste aber an substanziellen Beispielen immer wieder thematisiert werden, was der Sinn des Beweisens ist. Die Einsichten, um die es hierbei ginge, lassen sich in folgenden Punkten zusammenfassen:

1. Ein mathematischer Beweis beweist *keine Sachverhalte*, sondern „wenn-dann-Aussagen". Bewiesen wird nicht ein Sachverhalt B, sondern eine *Implikation* „Wenn A, dann B".

2. Die *Sicherheit* der Mathematik liegt nicht in ihren Aussagen, sondern in ihren Schlüssen.

3. Die *Akzeptabilität der Hypothesen*, die man in der Mathematik benutzt, ist eine Sache der Bewertung. Es gibt Hypothesen, die ein hohes Maß an unmittelbarer Evidenz haben und denen man daher hochgradig vertraut, und Hypothesen, denen man vertraut, weil die Folgerungen aus ihnen mit den Erfahrungen übereinstimmen. Letzteres ist die Denkfigur, die der hypothetisch-deduktiven Methode zugrunde liegt.

4. In der *Arithmetik* (und Kombinatorik) hat man es mit Gedankenobjekten zu tun, über die wir hohe Kontrolle haben. Dagegen streift man in der *Geo-*

metrie bereits den Bereich der Physik. Ihre Aussagen unterliegen daher im Prinzip der Kontrolle durch die Erfahrung. Die Zuverlässigkeit der Euklidischen Geometrie im Bereich „mittelgroßer Objekte“ ist eine Erfahrungstatsache und kein Faktum des reinen Denkens.

5. Gerade weil man in der Mathematik hypothetische Gedankengebäude errichtet, stellt das mathematische Schließen besondere Anforderungen der *Strenge*.

Um solche Einsichten zu ermöglichen, vertrete ich seit einiger Zeit den Ansatz, das Beweisen in den Kontext der hypothetisch-deduktiven Methode zu stellen (Jahnke 2007). Inhaltlich sind dazu besonders elementare physikalische Anwendungen geeignet. Dies sind für Schüler überschaubare empirische Theorien mit hohem deduktivem Potential.

Literatur

Heinze, A. & K. Reiss (2003). Reasoning and Proof: Methodological Knowledge as a Component of Proof Competence. *International Newsletter of Proof*: 4-6.

Jahnke, H. N. (2007). Proofs and Hypotheses. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 79-86.

Jahnke, H. N. (2009). The Conjoint Origin of Proof and Theoretical Physics. In: G. Hanna, H. N. Jahnke & H. Pulte (Hrsg.), *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives*. New York et al: Springer**,** 17-32

Knorr, W. R. (1980). On the early history of axiomatics: the interaction of mathematics and philosophy in Greek antiquity. In J. Hintikka & D. Gruender & E. Agazzi (Hrsg.), *Theory change, ancient axiomatics, and Galileo's methodology. Proccedings of the 1978 Pisa Conference on the History and Philosophy of Science*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 145 - 186.

Máté, A. (2006). Árpád Szabó and Imre Lakatos, or the relation between history and philosophy of mathematics. *Perspectives on Science*, *14*(3), 282-301.

Mittelstrass, J. (1962). Die Rettung der Phänomene. Ursprung und Geschichte eines antiken Forschungsprinzips. Berlin: Walter de Gruyter & Co.

Popper, K. R. (2005), *Die Welt des Parmenides. Der Ursprung des europäischen Denkens*. Hrsg. von Arne F. Petersen. München, Zürich: Piper

Szabó, Á. (1960). “Anfänge des Euklidischen Axiomensystems.” *Archive for History of Exact Sciences* 1: 38-106.

Ufer, S., Heinze, A., Kuntze, S., & Rudolph-Albert, F. (2009). Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht. Die Rolle von Methodenwissen für das Beweisen in der Geometrie. *Journal für Mathematik-Didaktik, 30*(1), 30-54.