View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Eldorado - Ressourcen aus und für Lehre, Studium und Forschung

Bernd ZIMMERMANN, Jena

György Pólya, 1887 – 1985. Zur Biographie, zum Lebenswerk und zu seiner Wirkung auf die Mathematikdidaktik

1 Einleitung

Neben Hans Freudenthal gehört György Pólya zweifellos zu den Persönlichkeiten, die seit dem letzten Jahrhundert bis heute mit den stärksten Einfluss auf die Mathematikdidaktik ausüben. Die erste GDM-Tagung in Ungarn ist ein guter Anlass, über seine Bedeutung näher zu reflektieren. Der Autor dankt dem ungarischem Organisationskomitee dieser Tagung sowie dem Vorstand der GDM für die große Ehre, einige Bemerkungen zu dieser bedeutenden Persönlichkeit machen zu dürfen.

Die folgenden Informationen wurden oft der sehr lesenswerten Biographie von Alexanderson 2000 entnommen. Auf diese Quelle wird in der Form (A, x - x) Bezug genommen.

2 Kindheit und Familie

Györge Pólya wurde am 13.12.1887 in Budapest geboren. Unter den zwei Brüder und zwei Schwestern war der elf Jahre ältere Bruder Jenő ebenfalls sehr an Mathematik interessiert. Er wurde aber später dann ein berühmter Chirurg.

Die Familie war jüdischer Herkunft und trug ursprünglich den Namen Pollák. Weil er sich hierdurch besserer Aufstiegschancen versprach, ließ der Vater Jakab diesen Namen 1882 in Pólya ändern. Noch vor der Geburt von Györge trat die Familie aus ähnlichen Gründen zum Katholizismus über.

Die Mutter Anna, geb. Deutsch, war von gehobener Herkunft und eine starke Persönlichkeit. Der Vater war zunächst Jurist und arbeitete später bei einer Versicherung, beides mit mäßigem Erfolg. Nachts schrieb er oft an Büchern - insgesamt erstellte er zehn - in der Hoffnung, so eher eine Stelle an der Universität zu erhalten. Schließlich erreichte er auch dort die Position eines Lektors, starb aber leider kurz danach, erst 53 Jahre alt (A, 9 - 13).

3 Ausbildung

Pólya verbrachte seine gesamte Schul- und Studienzeit in Budapest. Schon an der Grundschule wurden ihm Fleiß und ordentliches Benehmen bestätigt. Am nach deutschem Vorbild geprägten Dániel Berzsenyi Gymnasium war er mehr an Geisteswissenschaften (Noten: ausgezeichnet) interessiert als an Mathematik; dort hatte er nicht so gute Noten (Geometrie: überwiegend befriedigend!). Das hing vermutlich auch mit nicht so guten Mathematiklehrern zusammen. Am berühmten Eötvös-(Mathematik)Wettbewerb (später Kürschák-Wettbewerb) nahm er zwar teil, traute sich aber nicht, den Test abzugeben. So war während seiner Schulzeit noch nicht die Karriere eines bedeutenden Mathematikers zu erkennen.

Auch mit Studienbeginn änderte sich daran zunächst nichts. Gemäß dem Wunsche seiner Mutter studierte Pólya zunächst Jura. Das hat er aber nur ein Semester lang ausgehalten, da ihn dieses Studium entsetzlich langweilte. Hieran schloss er zwei Jahre lang ein Latein- und Ungarisch-Studium an, das er mit einem Lehrerabschlussexamen beendete, worauf er sehr stolz war. In diesem Zusammenhang bekam er auch seine erste Ehrung, nämlich für eine Übersetzung eines Werkes von Heinrich Heine ins Ungarische. Schließlich gelangte er über Philosophiestudien beim bekannten ungarischen Naturphilosophen Alexander zur Physik - hier hörte er vor allem Eötvös - und so schließlich zur Mathematik. Er beantwortete einmal die Frage, warum er sich dann für die Mathematik entschieden hätte, so:

“I thought I am not good enough for physics and I am too good for philosophy. Mathematics is in between.” (Albers/Alexanderson 1985, 248)

Einmal bei der Mathematik, wurde er sofort sehr beeindruckt und dauerhaft beeinflusst von dem bekannten Mathematiker Lipót Fejér, der mit am Anfang stand einer ganzen Reihe hervorragender ungarischer Mathematiker am Ende des neunzehnten und am Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts. Unter dessen Betreuung schloss Pólya im Jahre 1913 seine Dissertation mit dem Titel „Über einige Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und gewisse damit zusammenhängende bestimmte Integrale“ ab (A, 15 - 24).

4 Laufbahn

Nach seiner Promotion ging Pólya für zwei Jahre nach Göttingen, das zu jener Zeit ein weltweit führendes Zentrum der Mathematik war. Hier traf er u. a. F. Klein, D. Hilbert, E. Landau, O. Toeplitz, H. Weyl, C. Carathéodory, E. Hecke, C. Runge, L. Prandtl, die seine weitere Arbeit beeinflussten.

Im Jahre 1914 schloss sich ein kurzer Aufenthalt in Paris an, das kaum hinter Göttingen zurückstand, wovon Namen wie H. Poincaré, J. Hadamard, É. Picard, É. Borel, É. Cartan, M. Frécher, H. Lebesgues zeugen. Durch Hadamard ließ er sich dort am meisten anregen.

1914 ging Pólya als Privatdozent an die ETH Zürich und blieb dort bis

1940. Hier hatte er eine erste lange produktive Zeit. Er arbeitete dort u. a. mit A. Hurwitz zusammen und traf auch H. Weyl wieder. Spätestens seit 1919 machte Pólya auch schon Lehrerfortbildungen. Ein erneuter Versuch, 1921 nach Deutschland zurückzukommen, blieb (in Anbetracht der späteren bekannten Ereignisse in Deutschland) glücklicherweise erfolglos. Im Jahre 1924 erschienen z. B. die immer noch insbesondere für Doktoranden hervorragend geeigneten „Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis“ zusammen mit Szegő (Pólya/Szegő 1970/1971).

Im Jahre 1918 heiratete er Stella Vera Weber, eine sehr gebildete Tochter des Physikprofessors Weber aus Neuchâtel.

Ein Aufenthalt in Oxford und Cambridge von 1924 bis 1925 hatte u. a. das Standardwerk „Inequalities“ zum Ergebnis (Hardy/Littlewood/Pólya 1985).

Nach einem ersten kurzen Aufenthalt in den USA 1933 folgte er 1940 einer Einladung von Szegő, die ihn zunächst nach Princeton und 1942 endgültig bis zu seinem Tode 1985 nach Stanford brachte (A, 25 ff).

5 Pólya als Mathematiker

Von Pólya sind insgesamt ca. 250 Veröffentlichungen bekannt. Davon können über 200 zur Mathematik oder zu Anwendungen hiervon gerechnet werden. Zu seinen sehr weit gefächerten Arbeitsgebieten gehörten:

Analysis, Funktionentheorie (dort insbesondere die Untersuchung von Potenzreihen und Nullstellen), Zahlentheorie, Geometrie, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kombinatorik und Mathematische Physik.

In der Funktionentheorie/Zahlentheorie faszinierte ihn sehr die Riemannsche Hypothese.

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung hat er neben vielen Konzepten auch das der „Irrfahrten“ erfunden und Folgendes nachgewiesen: Startet man in einem ganzzahligen Gitter (des $\mathbb{Z}^n$) von einem beliebigen Punkt P aus und bewegt sich zu einem Nachbarpunkt immer mit der Wahrscheinlichkeit 1/2n, so kommt man (wenn man „genügend“ Zeit hat!) im Falle von n=1 und n=2 mit der Wahrscheinlichkeit 1 nach P zurück! Das ist für $n \geq 3$ nicht der Fall (A, 195).

Rehlich (2007) hat ein sehr instruktives Simulationsprogramm entwickelt, das u. a. erlaubt, bei n=1 und n=2 und für eine Ebene bei n=3 durch Variationen der „Maschenweite“ und der Anzahl von Irrfahrten sich an entsprechende Vermutungen heranzuarbeiten.

Im Bereich der Kombinatorik ist wohl das nach Pólya benannte Abzähltheorem am bekanntesten.

Das folgende Zitat von H. Weyl verdeutlicht, wie dieser Pólya schätzte, obwohl seine Interessen und Arbeitsweisen völlig verschieden waren:

“His way of doing mathematics is really completely foreign to me. He is to a lesser degree concerned with knowledge rather with the joy of hunt. However, I admire his brilliance extraordinarily …. He is full of problems, and an exceptionally stimulating person in mathematical circles. …he cares about his students in a way that is best described as a ‘sincere fellowship’. As far as applied mathematics is concerned, he is especially strong in probability theory…. he is very knowledgeable in applications (physics, statistics, etc.). Overall, he is a very versatile guy…; he is straightforward and doesn’t wear blinders.… He is not particularly close to me; however, he is really one of those people whom I respect the most.” (A, 38 - 41)

6 Pólya als Didaktiker

Seine erste bekannte didaktische Veröffentlichung stammt aus dem Jahre 1919. Danach legte er immer wieder auch didaktische Arbeiten vor. Am bekanntesten sind seine Bücher Pólya 1963 - 1969. Pólyas fundamentales Interesse am Entdecken und an Entdeckungen zeigt sich insbesondere auch hierin. Entsprechende Äußerungen findet man schon in einem Vortrag, den er 1931 vor schweizerischen Mathematiklehrern hielt:

„Der Mathematikunterricht kann zur allgemeinen Bildung der Schüler nichts Wertvolleres beitragen, als eine Ausbildung in selbständiger Lösung von Aufgaben.“ (Pólya 1932).

Anlässlich dieser Gelegenheit legte Pólya den Lehrern ein Arbeitsblatt vor, das man als eine Vorbereitung zu seinem bekannten in Pólya (1967a) vorgestellten vierstufigen Vorgehen beim Lösen von Problemen ansehen kann.

Bekannt geworden ist Pólya - insbesondere dank der genannten Bücher - nicht nur durch Präsentation substanzieller Beispiele zum Problemlösen und Entdecken sondern natürlich auch durch die damit in Verbindung stehenden „heuristischen Strategien“ wie z. B. sukzessive Approximation, Zerlegen in Teilprobleme, Rückwärtsarbeiten, Vorwärtsarbeiten, Verallgemeinern, Spezialisieren, Analogisieren, Wechseln der Repräsentation usw.. Hierbei orientierte er sich auch immer wieder an Beispielen aus der Geschichte und fasste seine Erfahrungen und Überlegungen auch in „Zehn Gebote für den Lehrer“ zusammen. Sein Einfluss auf die Analyse von Denkprozessen wie auch die Gestaltung von Curricula zum Mathematikunterricht war und ist weltweit erheblich.

7 Pólyas Wirkung - Rückschau

Dank der Überlegungen Pólyas hat es bedeutende Fortschritte bei der Analyse und dem Verstehen mathematischer Problemlöseprozesse gegeben. Diese dokumentieren z. B. die Arbeiten von Kilpatrick 1967, Kantowski 1974, Bell 1976, Burton 1979, Mason/Burton/Stacey 1985, Schoenfeld 1985, Silver 1985, Kießwetter 1983, Winter 1991, Stein 1996 und viele weitere.

Nicht geringer war Pólyas Einfluss auf die Entwicklung von Leitlinien für den Mathematikunterricht. So führt ein recht deutlicher Weg von der „Agenda for Action“ des NCTM aus dem Jahre 1980 über dessen Standards von 1989 und 2000 bis zu den in Deutschland entwickelten „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss“ von 2003, wobei letztere durch die bekannten Ergebnisse internationaler Vergleichsstudien wie TIMSS und PISA in ihrer Entwicklung forciert wurden.

Auch im Bereich der Schulbuchentwicklung ist der Einfluss von Pólya nicht zu übersehen. So wurde z. B. schon vor über 30 Jahren mit „PLUS“ von Schupp/Schönbeck 1976ff eine Schulbuchserie herausgegeben, die sich in vielfacher Hinsicht auch an den Leitideen Pólyas orientierte. In den letzten 10 Jahren hat es auch in diesem Bereich eine Intensivierung der Entwicklung gegeben, was durch mehrere ähnlich orientierte Schulbuchserien dokumentiert wird (siehe z. B. Cukrowicz/Zimmermann 2000ff, Lergenmüller/Schmidt 2003ff).

Von Kilpatrick 1987 und auch von Schoenfeld 1987, 1987a werden Kritiker angeführt, die die Pólyaschen Vorschläge zur Lehr- und Lernbarkeit von Problemlösen und von heuristischen Strategien in Zweifel ziehen. Insbesondere nach Schoenfeld 1987 hat es aber erhebliche Fortschritte in dreifacher Hinsicht gegeben (nach A, 235):

- Heuristische Strategien werden heute erheblich differenzierter und vielschichtiger gesehen.

- Insbesondere das verstärkte Nachdenken (Metakognition und Kontrolle) über ihren sinnvollen Einsatz kann ihren Nutzen verbessern.

- Ein besseres bereichsspezifisches Verständnis kann auch Auswahl und Wirksamkeit geeigneter Strategien verbessern.

Grundsätzliche Schwierigkeiten beim Lehren und Lernen von Strategien (insbesondere in Verbindung mit dem Lehren metakognitiven Verhaltens) werden z. B. von Bauersfeld 1993, 79, gesehen:

„Every learning … is specific to the actual situation… Every direct attempt at organizing meta-learning…is doomed to failure. … There is no direct meta-learning through teaching. (A problem which, by the way, all too many people face when trying to 'apply' Pólya's famous strategies.)"

So bleiben insbesondere in Zusammenhang mit der Metakognition noch einige Fragen offen.

8 Pólyas Wirkung - einige Desiderata

- Weitere Untersuchungen zur Rolle der Metakognition:

Es scheint klar, dass metakognitive Fähigkeiten altersabhängig sind. Jüngere Kinder haben in der Regel mehr Schwierigkeiten über ihr Vorgehen explizit nachzudenken und dieses zu steuern. In diesem Sinne kann man z. B. auch einige Ergebnisse einer Untersuchung von Kretschmer 1983 interpretieren. Überdies scheint es individuelle Unterschiede in der Bereitschaft und Fähigkeit zur Metakognition zu geben (vgl. Zimmermann 1993).

- Wann und inwieweit können (welche?) heuristische Strategien eher implizit oder explizit unterrichtet werden?

Diese Problematik steht in Verbindung mit der vorangegangenen Ausführung und wurde auch am Ende von Abschnitt 7 schon angesprochen. In der Geschichte der Mathematik wurden heuristische Strategien lange vor ihrer expliziten Formulierung immer zunächst implizit genutzt. Leibniz vergleicht das Erlernen des Problemlösens mit dem Erlernen einer Sprache (vgl. Gerhardt 1890, 523): Auch in der Mathematik sollte man zuerst das „Mathematik-Betreiben" lernen, später dann darüber reflektieren und sich mit Heuristik befassen, wodurch man dann die Problemlösekompetenz vielleicht weiter verbessern kann. Auch eine Sprache lernt man zunächst durch Sprechen, erst später reflektiert man über sie und befasst sich mit ihrer Grammatik. Auch Grammatik *kann* man in der Regel früher als dass man sie *kennt* (vgl. auch Aussagen der modernen Hirnforschung, z. B. Spitzer 2002). An gleicher Stelle bemerkt Leibniz: „…wie will der die gedancken ordnen, der noch wenig bedacht?"

- Welchen Nutzen kann eine Geschichte mathematischer Heuristik und mathematischen Problemlösens für das Lernen und Lehren des Problemlösens haben?

Zuvor wurde schon implizit auf einen möglichen Nutzen verwiesen: Die Form des Auftauchens, der Verwendung und des Gebrauchs heuristischer Strategien kann eine zusätzliche Hilfe für heutigen Unterricht sein - ohne dass man deswegen ein Anhänger historisch-genetischen Unterrichtens sein muss. Überdies kann das Kennen historischer Denkprozesse eine zusätzliche Hilfe beim Erfassen und Interpretieren aktueller Prozesse von Schülern sein (vgl. z. B. die „Wiederentdeckung“ einer Version des „Falschen Ansatzes“ durch Sechstklässler, in Zimmermann 2004, Scholz et al. 2005). - Historische Untersuchungen zeigen ferner, dass zur Heuristik nicht nur Archimedes (insbesondere mit seiner Methodenschrift, siehe die Ankündigung einer Neubearbeitung in Netz/Noel 2008), Pappos, Viète, Descartes und Leibniz Wesentliches beigetragen haben, sondern z. B. auch schon vor ca. 1000 Jahren im arabischen Sprachraum al Haytham, ibn Sinan und al Sijzi. Näheres dazu z. B. in Zimmermann 1991.

- Problemlöseprozesse junger Kinder analysieren und verstehen

Bis heute dominiert die Untersuchung von Problemlöseprozessen bei Schülern der Sekundarstufe I oder II. Jüngere Schüler wurde lange Zeit - auch wegen größerer Schwierigkeiten bei der Datenbeschaffung - kaum untersucht. Dieses hat sich seit geraumer Zeit geändert (siehe z. B. die Untersuchungen in der Arbeitsgruppe um Stein 1996) und sollte weiter intensiviert werden. Die Methoden und die Qualität der Datenbeschaffung bei entsprechenden Prozessen können u. a. in Zusammenhang mit der auch noch am Anfang stehenden Sprachkompetenz der Schüler stehen.

- Untersuchungen zum anspruchsvollen Problemlösen

Es mangelt nicht an Untersuchungen älterer Schüler und (Selbst-) Beobachtungen professioneller Mathematiker. Zusätzlich könnte es interessant sein, z. B. die heuristischen Gestaltungsprinzipien der Organisation der Probleme in Pólya/Szegő 1970/1971 freizulegen, um so noch mehr über Prozesse und Methoden anspruchsvollen mathematischen Problemlösen zu erfahren und um dieses noch besser zu verstehen.

- Beziehungen zwischen Verstehen von Mathematik und mathematischem Problemlösen genauer untersuchen

Von Pólya wurde immer wieder die enge Verbindung zwischen Problemlösen und mathematischem Verständnis betont (vgl. Pólya/Szegő 1970, VI). Diese Beziehung sollte in verschiedenen Alters- und auf verschiedenen Niveaustufen noch näher untersucht werden (vgl. z. B. Sierpinska 1994).

- Entwicklung von Mess- und Bewertungsverfahren für Problemlöseprozesse

Die Auswertung von Tests (TIMSS, PISA) hat - wenn es sich nicht um die einer Prozessanalyse wenig dienliche Multiple-Choice-Form handelt - oft mit Textfragmenten zu tun, bei denen der Auswerter keine Möglichkeit hat, durch Rückfragen mögliche (Miss-)Verständnisse zu klären. So sind die Möglichkeiten einer genauen Prozessanalyse auch bei offeneren Testformen sehr begrenzt. Rehlich 2003 versucht diesen Mangel durch die Simulation von Aspekten einer mündlichen Prüfung (z. B. gezieltes Nachfragen) mit Hilfe eines Computers, dem der Proband seine Antworten zu geben hat, zu reduzieren. So kann man sich mehr Informationen zum Problemlöseprozess und zum mathematischen Verständnis der Probanden erhoffen.

- Unterrichten von Problemlösen als komplexes Problemlösen

Dietrich Dörner hat sich mit dem Lösen komplexer Probleme befasst (vgl. z. B. Dörner 1989). Das Unterrichten von Mathematik - insbesondere von Problemlösen - kann selber als ein komplexes Problem aufgefasst werden (siehe z. B. Kießwetter 1994). Erfahrungen z. B. aus den USA zeigen (vgl. Kilpatrick 1987), dass manche Lehrer geneigt sind - ähnlich wie manche Schüler die Lösung von Problemen - den Unterricht eher mittels bewährter Verfahren und Schrittfolgen (die vier Stufen Pólyas quasi „schematisierend“) durchzuführen, was mit einer zwar verständlichen, aber nicht immer qualitätssteigernden Reduktion von Komplexität verbunden sein kann. Eine Sensibilität bzw. Sensibilisierung für die Komplexität von Unterricht kann als eine wichtige Voraussetzung für einen erfolgreichen, anspruchsvollen und effektiven Unterricht im mathematischen Problemlösen angesehen werden. Eine erste interessante Untersuchung dazu gibt es von Fritzlar 2004. Durch derartige Untersuchungen könnte die Lehrerausbildung weiter verbessert werden.

- Analyse von „Meisterstunden“

Da es beim Unterrichten von Problemlösen auch sehr auf die Kompetenzen der Lehrperson ankommt, scheint eine sorgfältige Analyse von „Meisterstunden“ eine weitere Möglichkeit, die Lehrerausbildung zu verbessern. Es bietet sich z. B. die von Pólya 1966a gehaltene Stunde an. Sie wurde erst kürzlich von Truxaw/DeFranco 2007 sehr gründlich untersucht.

Pólya in der Einleitung des Filmes „Let Us Teach Guessing“ (Pólya 1966a)

- Steigerung der Qualität von Problemen/Aufgaben

Die didaktischen Bücher Pólyas geben Orientierungshilfen für Qualitätsstandards bei der Wahl von Problemen und Aufgaben für den Unterricht, die noch intensiver genutzt werden sollten.

- Problemlösen für alle

Dieses ist ein weiteres fundamentales Anliegen. Hierfür hat sich u. A. sehr stark András Ambrus (siehe z. B. Ambrus 2004) engagiert. Derartige Bestrebungen sind weiter zu verfolgen.

- Beziehungen zwischen Problemlösen und Computern

Auch derartige Beziehungen werden seit geraumer Zeit weltweit verfolgt. In Ungarn hat sich hier insbesondere sehr erfolgreich Éva Vásárhelyi engagiert. In Kooperation mit der Informatikdidaktik sind erst vor kurzem sehr interessante Beiträge veröffentlicht worden (Fuchs/Vásárhelyi 2007, Fuchs/Siller/Vásárhelyi 2008).

- Moderne Theorien mathematischen Problemlösens

Derartige Theorien sollten durch Verknüpfung von bisherigen Theorien zum Problemlösen mit modernen kognitiven, affektiven und sozialen Theorien sowie moderner Hirnforschung entwickelt werden. Folgendes Zitat von Schoenfeld 1987 (A, 236) lässt sich in diesem Zusammenhang sehen: "… research will provide the tools to implement Pólya's intuitions about problem solving, which will serve as a true science of thought."

Literatur

Albers, D. J.; Alexanderson, G. L. (eds.) 1985: *Mathematical People. Profiles and Interviews*. Birkhäuser: Boston, Basel, Stuttgart.

Alexanderson, G. L. 2000. *The Random Walks of George Pólya.* The Mathematical Association of America: Washington, D.C..

Ambrus, A. 2004. Schüler durch Verallgemeinern zu neuen Erkenntnissen führen - Ein Beispiel aus der Arithmetik. In: Heinze/Kuntze 2004.

Bauersfeld, H. 1993. Fundamental Theories for Elementary Mathematics Education. In: Lange/Keitel/Huntley/Niss 1993.

Bell, A. W. 1976. *The Learning of General Mathematical Strategies*. Dissertation. Shell Center for Mathematical Education, Nottingham.

Boas, R. P. Jr. (ed.) 1974. *George Pólya: Collected Papers*. Vol. I. *Singularities of Analytic Functions*. MIT Press: Cambridge (Mas.) and London (England).

Boas, R. P. Jr. (ed.) 1974. *George Pólya: Collected Papers*. Vol. II. Location of Zeros. MIT Press: Cambridge (Mas.) and London (England).

Burton, L. 1979. The Classification of Problem-Solving Skills and Procedures. - *Presentation of an Inventory*. In: *Proceedings of the 3rd International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Warwick.

Cukrowicz, J.; Theilenberg, J.; Zimmermann, B. 2000ff. *MatheNetz Klasse 5 - 11; Gymnasien*. Westermann Schulbuchverlag: Braunschweig.

Dörner, D. 1989. *Die Logik des Mißlingens*. Rowohlt: Reinbek.

Fritzlar, T. 2004. *Zur Sensibilität von Studierenden für die Komplexität problemorientierten Mathematikunterrichts*. Hamburg: Kovač.

Gerhardt, C. J. (Hrsg.) 1978. *Die Philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz.* Siebenter Band. Weidmannsche Buchhandlung, Berlin 1890. Als Nachdruck erschienen bei G. Olms, Hildesheim - New York.

Hardy, G.; Littlewood, J. E., Pólya, G. 1952. *Inequalities*. Second Edition. Cambridge University Press: Cambridge.

Heinze, A.; Kuntze, S. 2004. *Beiträge zum Mathematikunterricht*. DIV

Verlag Franzbecker: Hildesheim und Berlin.

Hersch, J.; Rota, G.-C. (eds.) 1984. *George Pólya: Collected Papers*. Vol. III. *Analysis*. MIT Press: Cambridge (Mas.) and London (England).

Heinrich, F. 2004. *Strategische Flexibilität beim Lösen mathematischer Probleme. Theoretische Analysen und empirische Erkundungen über das Wechseln von Lösungshilfen*. Hamburg: Verlag Dr. Kovaĉ.

Kantowski, M. G. 1974. *Processes involved in Mathematical Problem Solving*. Dissertation Athens.

Kießwetter, K. 1983 Modellierung von Problemlöseprozessen. In: *Der Mathematikunterricht*, 3/1983, 71 - 101.

Kießwetter, K. 1994. Unterrichtsgestaltung als Problemlösen in komplexen Konstellationen - Welche Ansatzpunkte liefern die Untersuchungen des Kognitionspsychologen D. Dörner für das Verständnis der dabei auftretenden Anforderungen und Phänomene und für eine Revision der Lehrerausbildung? In: F. Padberg, *Beiträge zum Lernen und Lehren von Mathematik*, Kallmeyer: Seelze,

Kilpatrick, J. 1967. *Analyzing the Solution of Word Problems: An Exploratory Study*. Advisor: G. Pólya. Dissertation Stanford.

Kilpatrick, J. 1987. George Pólya's Influence on Mathematics Education. *Mathematics Magazine*, Vol. 60, No. 5, December (1987), 299 - 300.

Kretschmer, I. F. 1983. *Problemlösendes Denken.* Peter Lang: Frankfurt a. M., Bern, New York, Paris.

Kultusministerkonferenz 2003. *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss.* KMK: Bonn.

de Lange, J.; Keitel, C.; Huntley, I.; Niss, M. (Hrsg.) 1993: *Innovations in Maths Education by Modelling and Applications*. Ellis Horwood: New York, London, Toronto, Sydney, Tokyo, Singapore.

Lergenmüller, A.; Schmidt, G. 2003ff. *Mathematik Neue Wege*. Klasse 5-10. Schroedel: Hannover.

Mason, J.; Burton, L.; Stacey, K. 1985. *Hexeneinmaleins: kreativ mathematisch Denken*. Oldenbourg: München, Wien.

NCTM 1980. *An Agenda for Action. Recommendations for school mathematics of the 1980s*. Dale Seymour Publication: Palo Alto.

NCTM 1989. *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* National Council of Teachers of Mathematics: Reston.

NCTM 2000. *Principles and Standards for School Mathematics*. National

Council of Teachers of Mathematics:Reston.

Netz, R.; Noel, W. 2008. Der Kodex des Archimedes. Das berühmteste Palimpsest der Welt wird entschlüsselt. Dritte Auflage. C. H. Beck: München.

Pólya, G. 1932. Wie sucht man die Lösung mathematischer Aufgaben? *Zeitschr. f. mathem. u. naturw. Unterr.*, LXIII, Heft 4, 159 - 169.

Pólya, G. 1967a: *Schule des Denkens*. Zweite Auflage. Francke Verlag: Bern.

Pólya, G. 1966. *Vom Lösen mathematischer Aufgaben. Einsicht und Entdeckungen, Lernen und Lehren*. Band 1. Birkhäuser: Basel - Boston - Stuttgart.

Pólya, G. 1967. *Vom Lösen mathematischer Aufgaben. Einsicht und Entdeckungen, Lernen und Lehren.* Band 2. Birkhäuser: Basel - Boston - Stuttgart.

Pólya, G. 1969. *Mathematik und plausibles Schließen. Band 1. Induktion und Analogie in der Mathematik*. Zweite Auflage. Birkhäuser: Basel - Boston - Stuttgart.

Pólya, G. 1963. Mathematik und plausibles Schließen. Band 2. Typen und Strukturen plausibler Folgerungen. Birkhäuser: Basel - Boston - Stuttgart.

Pólya, G.; Szegő, G. 1970. *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I*. Vierte Auflage. Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, New York.

Pólya, G.; Szegő, G. 1971. *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis II*. Vierte Auflage. Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, New York.

Pólya, G. 1966a. *Let Us Teach Guessing*. Film auf DVD. Mathematical Association of America (MAA): Washington D. C.

Rehlich, H. 2004. Beyond PISA - analyzing and evaluating thought processes by support of computers. In: Rehlich & Zimmermann 2004.

Rehlich, H.; Zimmermann B. (2004). *ProMath Jena 2003*. DIV Verlag Franzbecker: Hildesheim und Berlin.

Rehlich, H. 2007. Irrfahrten. Programm zur Simulation symmetrischer Irrfahrten für die Dimensionen 1, 2, und 3. h.rehlich@tu-braunschweig.de

http://www.minet.uni-jena.de/~hrehlich/Programme/exes/Irrfahrt.exe , letzter Zugriff am 29.03.2008.

Rota, G.-C. (ed.) 1984. *George Pólya: Collected Papers*. Vol. IV. *Probability, Combinatorics, Teaching and Learning of Mathematics*. MIT Press: Cambridge (Mas.) and London (England).

Schoenfeld, A. H. 1985. *Mathematical Problem Solving*. Academic Press: Orlando.

Schoenfeld, A. H. 1987. George Pólya and Mathematics Education. *Bulletin of the London Mathematical Society* 19, (1987), 559 - 608. Wiederabgedruckt in Alexanderson 2000 als Appendix 7.

Schoenfeld, A. H. 1987a. Pólya, Problem Solving, and Education. *Mathematics Magazine*, Vol. 60, No. 5, December 1987, 283 - 291.

Scholz, K.; Macheleid, S., Mörstedt, A.; Reinhold, R., Schach, A.; Rehlich, H.; Zimmermann, B. 2005. On Productive Mathematical Thought Processes and Understanding. Two case studies from teaching fractions. In: Jalonen Lasse & Keranto Tapio & Kaila Kari (eds.), *Matemaattisten aineiden optettajan taitotieto - haste vai mahdollisuus? (Competence of Mathematics and Science Teachers—a challenge or opportunity?)* XXII annual symposium of the Finnish mathematics and science education research association, November 25–26, 2004, Oulu, Finland. University of Oulu: Oulu, 139-148.

Schupp, H.; Schönbeck, J. 1976 ff. Mathematisches Unterrichtswerk *PLUS*. 6 Bde. Schöningh: Paderborn.

Sierpinska, A. 1994. *Understanding Mathematics.* The Falmer Press: London, Washington D. C..

Silver, E. A. (Hrsg.) 1985. *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives.* Lawrence Erlbaum Associates: Hillsdale.

Spitzer, M. 2002. Lernen. Gehirnforschung und die Schule des Lebens. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.

Stein, M. 1996. Elementare Bausteine der Problemlösefähigkeit: Problemlösetechniken. In: *Journal für Mathematikdidaktik* 17 (1996) 2, 123 - 146.

Truxaw, M. P.; DeFranco, T. C. 2007. Mathematics in the making: Mapping verbal discourse in Pólya's "Let Us Teach Guessing" lesson. *The Journal of Mathematical Behavior*. Vol. 26, No. 2, (2007), 96 - 114.

Fuchs, K. J.; Vásárhelyi, É. 2007. *Informatics with CASIO CP 300+. Part I: Basics in Imperative Programming*. English-Hungarian. CASIO Europe GmbH: Norderstedt.

Fuchs, K. J.; Siller, H.-S.; Vásárhelyi, É. 2008. *Informatics with CASIO CP 300+. Part II: Basics in Functional Modelling.* English-Hungarian. CASIO Europe GmbH: Norderstedt.

Winter, H. 1991. *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblick* *in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung in der Pädagogik.* Zweite Auflage. Vieweg: Braunschweig.

Zimmermann, B. 1991. Heuristik als ein Element mathematischer Denk- und Lernprozesse. Fallstudien zur Stellung mathematischer Heuristik im Bild von Mathematik bei Lehrern und Schülern sowie in der Geschichte der Mathematik. Habilitation. Universität Hamburg: Hamburg.

Zimmermann, B. 1992. Profile mathematischer Begabung. Fallstudien aus dem Hamburger Projekt sowie aus der Geschichte der Mathematik. In: *Der Mathematikunterricht* 1/1992, 19 - 41.

Zimmermann, B. 2004. *On Mathematical Problem Solving Processes and History of Mathematics*. Manuskript eines Vortrags, gehalten in der TSG 18 Untergruppe (Problem Solving) auf dem ICME 10, 4. - 11. Juli in Kopenhagen, Dänemark 2004.