Marie TICHÁ, Praha

Wir lernen die Missverständnisse und Fehlvorstellungen der Studenten zu beheben

Einleitende Anmerkungen

Mathematik wird zum Bestandteil vieler Lebensbereiche. Deswegen wächst der Wert der Erreichung der mathematischen Kultur. Dies stellt hohe Ansprüche an die Lehrer. Deshalb versuchen wir die Wege, wie die professionelle Kompetenzen der Lehrer zu kultivieren. In der bisherigen Forschung haben wir gezeigt, dass eine bedeutende Rolle der fachdidaktischen Kompetenz, also der Kenntnis des Inhaltes und des didaktischen Zugriffes zum Inhalt und der Geltendmachung dieser Kenntnisse in der Schulpraxis zugemessen wird (Tichá, Hošpesová, 2006).

Über eine Episode aus dem Unterricht

Die Notwendigkeit der hochrangigen fachdidaktischen Kompetenz manifestierte sich deutlich in Experimenten die innerhalb des Milieus der Brüche durchgeführt waren. Zum Beispiel die Lehrerin schlug ein Experiment vor: „Ich verteile an jeden Schüler einen Papierstreifen, der in vier gleich grosse Teile geteilt wird. Dann frage ich, was die Schüler sehen. Ich werde feststellen, ob beim allmählichen Papierfalten die Schüler über Brüche sprechen anfangen. Und auch ob die Schüler denselben Teil bezeichnen, z. B. eine Hälfte und zwei Viertel, vier Achtel“ (näher in Hošpesová, Tichá, 2005). Die Lehrerin stellte den Schülern Fragen, die man auf verschiedene Weise beantworten konnte, sie aber selbst akzeptierte nur einige und lehnte Antworten, die Möglichkeiten weiterer Überlegungen und einer tieferer Einsicht in die Situation boten, ab. Sie war nicht fähig an die Antworten der Schüler zu reagieren, die Vorschläge die darin beinhaltet waren auszunützen und die Schüler zum Fazit, zu Begründung/Argumentation zu leiten. Das Thema des Experiments selbst ist sehr stimulierend, deswegen wird mit diesem Thema in Seminaren gearbeitet. Die Studenten der Fachrichtung Grundschullehrer erfahren, dass wenn die Kenntnisse des Lehrers nicht ausreichend gründlich sind, kann man das Potential der Vorlage nicht auslasten.

„Die Kraft“ der Aufgabenbildung

Die Notwendigkeit der Entwicklung der Fähigkeit die Aufgaben zu bilden heben viele Didaktiker hervor, z.B. als Attribut „der konstruktivischen Sicht“, einige andere sprechen über die nötigen Routinefähigkeit (z. B. English, 1997; Silver, Cai, 1996). Oft wird dabei die Charakteristik des Prozesses „der Aufgabenbildung (problem posing)“ von Silver als (a) Bildung der neuen Fragen und Aufgaben (welche aus bestimmten „mathematischen“ oder „nichtmathematischen“ Situation entstehen; auch Koman, Tichá, 1998) oder als (b) Umformulierung einer gewissen Aufgabe, zum Beispiel durch Frage „Und wenn (nicht)?“, durch die „Freisetzung der Parameter“ usw. zitiert.

Die Bildung der Aufgaben wird als eine wichtige Tätigkeit aller vorgestellt. Das Lernen durch Bildung der Aufgaben ist sehr bereichernd. Das Ergebnis dieses Verfahrens ist eine Verbesserung der Fähigkeit die Aufgaben lösen zu können, Entfaltung des schöpferischen und flexiblen Denkens, Verbesserung der Beziehung zur Mathematik und auch das größere Vertrauen in eigene Fähigkeiten. Die Bildung der Aufgaben ist einerseits als Ziel aufgefasst, andrerseits als ein Mittel der mathematischen Bildung. Ähnlich kann man sagen, dass die Fähigkeit, die Fragen zu formulieren und die Aufgaben zu bilden, ein wichtiger Bestandteil der fachdidaktischen Kompetenz des Lehrers ist. Gleichzeitig ist es auch möglich, die Bildung der Aufgaben als ein Weg der Steigerung der professionellen Kompetenz des Lehrers aufzufassen.

Es wird sichtbar, dass die Bildung der Aufgaben ein sehr gutes diagnostisches und reedukatives Mittel darstellt. Die Analyse der gebildeten Aufgaben ist ein Weg zur der Feststellung des Niveaus des Verständnisses diesen Aufgaben und gleichzeitig auch eine Weise der Entdeckung der eventuellen Misskonzeptionen und falschen Erwägungen bei jedem Respondent (Silver, Cai, 1996; Tichá, 2003; Prediger 2006).

Studenten bilden und bewerten die Aufgaben

Mehrere Jahre nacheinander haben wir den Schülern (die Altersgruppe 9-14 Jahre) folgende Aufgabe gegeben*: Bilde eine Sachaufgabe so, dass zu deren Lösung man nur 1/4 + 2/3 (oder 3/4•20, oder 1/4•2/3 usw.) errechnen muss*. Diese Aufgabe haben wir später den Studenten der Mittelschulen und Universitäten gegeben. Selbe Misskonzeptionen, die wir bei den Schülern der fünften Klasse gefunden haben, auch in den Arbeiten der älteren Schüler und Studenten auftauchen, sogar auch bei den Studenten der Universitäten.

Eine Enttäuschung stellten für uns die Aufgaben zum Errechnen *3/4•20* da. Vor allem überraschten und verwarnten uns Probleme, die Studenten (und manchmal auch Grundschullehrer) mit dieser Aufgabe hatten und ihre Verlegenheit und Ratlosigkeit. Wir haben gedacht, dass sie sich leicht mit dieser Aufgabe abfinden. Es war ein Irrtum.

Noch schwierigere war die Bildung der Aufgabe zur Multiplikation zweier Brüche. Zur Errechnung *1/4•2/3* hatte eine Studentin drei Aufgaben gebildet:

1. *Auf dem Tisch lagen 2/3 Kuchen. Dušan hat 1/4 von den 2/3 des Kuchens gegessen. Wieviel Kuchen blieb es übrig?*
2. *Auf dem Tisch lagen 2/3 kg Mandarinen. Veronika hat 1/4 kg gegessen. Wieviel Mandarinen (kg) blieben übrig?*
3. *Das Glas war von 2/3 voll. Gabriel hat 1/4 getrunken. Von wieviel war das Glas voll?*

Gespräch der Forscherin (F) mit Studentin (S) folgt:

S: Hier rechne ich keinen Teil von etwas, hier nehme ich ab *(sie zeigt Aufgaben 2 und 3),* gebe weg. Ich weiß eigentlich nicht, wie ich es gedacht habe.

F: Wie hätten Sie das gemeint?

S: Etwa so (*sie zeichnet ein Bild*) – das teile ich auf die Viertel und ein Viertel gebe ich weg. Aber eigentlich, jemand könnte es so verstehen, dass er ein Viertel des ganzen Glases getrunken hat. Ich habe eigentlich nur eins gut gemacht. Ich sollte mich überzeugen.

F: Wie können Sie sich überzeugen?

S: Na ja, ich sollte es vielleicht irgendwie ausrechnen. Oder ich sollte es jemanden, der das besser kennt geben.

Die gebildeten Aufgaben 1. und 2. haben wir zur Beurteilung den Studenten gegeben. Meistens haben sie zwar aufgeführt, dass die Aufgabe 2. nicht der Aufgabenstellung entspricht. Die Begründung des Urteiles hat aber gezeigt, dass sie selbst mit dem Begreifen Probleme haben. Führen wir einige Beispiele auf, wie die Studenten die Aufgabe 2. bewertet haben:

- *Die Aufgabe 2 ist nicht richtig.*
  2/3 kg Mandarinen lagen auf dem Tisch = 2/3 von Einem (von 3/3).
  Veronika hatte 1/4 kg gegessen – aber von was? aus 2/3? aus 1/3?
  Die Frage: Wieviel kg Mandarinen blieben? – ist nicht richtig. Es sollte heissen: Wieviel kg Mandarinen hatte sie gegessen?
- *Die Aufgabe ist nicht richtig.*
  Insgesamt 2/3 kg Mandarinen, sie hatte 1/4 kg gegessen.
  Sie hatte 1/4 gegessen, aber es ist nicht aufgeführt von was.
- *Die zweite Aufgabe ist nicht richtig, sie ist nicht geeignet.*
  Ich wollte nicht die Zahl der Mandarinen, aber das Gewicht. Die Mandarinen müssten dann in kleine Stücke geschnitten werden.

Zum Abschluss

Aus den Formulierungen der Sachaufgaben kann man viele interessante und wertvolle Informationen entnehmen. Das Untersuchen, die wir durchgeführt haben, hatte bestätigt, dass die Studenten Probleme mit der Interpretation der Brüche haben (besonders sie nahmen nicht wahr, dass sie abwechselnd den Bruch als Operator und Größe benutzten). Wir haben festgestellt, dass viele Studenten nicht die Vorstellung haben, was sich eigentlich hinter einer einfachen Errechnung „versteckt". Sie sind nicht fähig die Errechnung im gewissen Kontext zu praktizieren.

Es zeigt sich, dass zur Feststellung der Qualität des Verständnisses die Aufgabe zu bilden nicht genügend ist. Es ist notwendig, die Aufgaben auch zu lösen und die Möglichkeit darüber zu diskutieren zu haben. Es bestätigt sich hier die Notwendigkeit der Durchführung der gemeinsamen Reflexion (Tichá, Hošpesová, 2006). Wenn die Autoren die Möglichkeit haben, gegenseitig die Aufgaben zu bewerten, wird das der Einblick in die Situation vertieft und die Fähigkeit die Situation zu begreifen, aufzufassen, verbessert. Die Bildung der Aufgaben, die um eine Reflexion (individuelle und vor allem kollektive) erweitert ist, stellt also den Weg zur Entfaltung und Steigerung der Qualität der professionellen Kompetenz da.

Literatur

English, L.D. (1997). The development of fifth-grade children's problem-posing abilities. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 183-217.

Hošpesová, A., Tichá, M. (2005) Developing mathematics teachers' competence. In M. *Bosch* (ed.) *CERME 4.* Sant Feliu de Guíxols, , Spain. 1483 – 1493, CD ROM

Koman, M., Tichá, M. (2001). Von der spielerischen Untersung der Situation zum Rechnen. In: *Mathematik lernen und gesunder Menschenverstand (Festschrift für G. N. Müller*), ed. Ch. Selter, G. Walther. Ernst Klett, Düsseldorf, Leipzig, , p. 100-111.

Prediger, S. (2006). Continuities and discontinuities for fractions: a proposal for analysing in different levels. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.). *Proceedings 30th PME Conference,* vol.4, 377-384. Prague: PME

Silver, E. A., Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education,* 27, 5, 521-539.

Tichá, M. (2003). Following the path of discovering fractions. In J. Novotná (ed.) *Proceedings of SEMT '03*. Praha: UK PedF, 17-27.

Tichá, M., Hošpesová, A. (2006). Qualified Pedagogical Reflection as a Way to Improve Mathematics Education. *Journal for Mathematics Teachers Education. Special Issue: Inter-Relating Theory and Practice in Mathematics Teacher Education.* Springer Netherlands, 9, 2, 129-156.

Anmerkung: Diese Untersuchung wurde durch das Förderungsprojekt GACR 406/08/0710 und durch AdW CR Institutional Research Plan No. AV0Z10190503 unterstützt.