

Kristina APPELL, Jürgen ROTH, Hans-Georg WEIGAND, Würzburg

## Experimentieren, Mathematisieren, Simulieren – Konzeption eines MATHEMATIK-Labors

Mathematik wird in der Schule häufig als formales und kalkülorientiertes Fach erlebt, dessen Inhalte im Alltag der Schülerinnen und Schüler praktisch keine Rolle spielen. Dieser Fehleinschätzung kann u. a. durch Lernumgebungen begegnet werden, in deren Mittelpunkt interessante Phänomene stehen, die Schülerinnen und Schüler durch einen selbsttätigen aktiv-experimentellen Umgang mit realen Modellen und Simulationen mathematisch durchdringen. Beim Aufbau eines MATHEMATIK-Labors am Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik der Universität Würzburg wird diese Idee gegenwärtig umgesetzt.

### 1 Grundkonzept des MATHEMATIK-Labors

Das MATHEMATIK-Labor ist als Lernort für Schülerinnen und Schüler außerhalb der Schule konzipiert. Es sollen Schulklassen der 10. bis 12. Jahrgangsstufe an die Universität Würzburg kommen und sich in Kleingruppen drei Stunden mit *einem* Thema intensiv auseinandersetzen. Inhaltlich gibt es Themen mit erkennbarem Alltagsbezug (z. B. Bewegungen einer Baggerschaufel, Gangschaltung beim Fahrrad, Einparken, Scheibenwischer) aber auch solche mit eher „innermathematischen“ Bezügen (z. B. „Gleichdicks“, „Kurvenerzeugende Sehnen“, Spiralen, Spiegel). Dem MATHEMATIK-Labor liegt eine „Drei-Phasen-Idee“ zugrunde, die im Folgenden exemplarisch anhand der Laborstation „Bewegungen einer Baggerschaufel“ erläutert wird.

#### 1. Phase: Experimentieren mit realen Modellen

Anhand von entsprechend aufbereiteten Echtmodellen (Fahrrad, Scheibenwischer, ...) und/oder Holz-, Plastik- bzw. Metallmodellen (Bagger, Spiralenzirkel, ...) werden Funktionsweisen des Modells erforscht, Erfahrungen gesammelt, Eigenschaften entdeckt und es wird die Mathematisierung vorbereitet. Am Baggermodell kann man z. B. entdecken, dass die Bewegungen des Baggerarms über Gelenkdreiecke (vgl. Abb. 1) mit einer Seite variabler Länge gesteuert werden und beim Baggerlöffel auch noch ein Gelenkviereck zum Einsatz



Abb. 1: Reales Baggermodell

kommt. Experimentell lässt sich erforschen, welche Bewegungen mit dieser Art der Steuerung möglich sind.

## 2. Phase: Mathematisieren

In dieser Phase werden Erfahrungen mit den Modellen aufbereitet, systematisiert und mathematische Darstellungen sowie analytische Beschreibungen entwickelt. Es geht also um das Auffinden und Darstellen mathematischer Zusammenhänge, die Klärung notwendiger mathematischer Grundlagen und evtl. die Überprüfung von Hypothesen. Die Bandbreite der dabei zu lösenden Probleme reicht von relativ überschaubaren

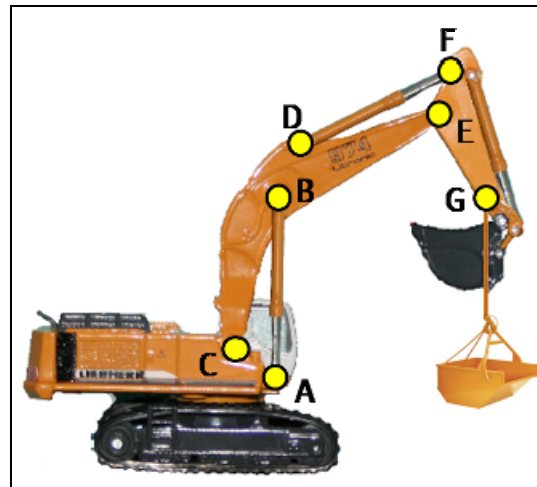


Abb. 2: Mathematisieren

Aufgabenstellungen bis hin zu sehr komplexen Problemen. Folgende Beispiele, die sich auf Abb. 2 beziehen, sollen diese Vielfalt verdeutlichen:

- Auf welcher Kurve bewegt sich der Punkt B, wenn der Zylinder [AB] die Länge ändert? Wie ist das zu erklären?
- Eine am Punkt G befestigte Last soll senkrecht nach oben bewegt werden. Welcher funktionale Zusammenhang muss dazu zwischen den Längen der Zylinder [AB] und [DF] bestehen?

## 3. Phase: Computersimulationen systematisch variieren

Gestützt auf die erkannten Prinzipien und die mathematische Durchdringung der Phänomene werden Computersimulationen der Konfigurationen systematisch variiert. Dadurch sollen Erfahrungen mit realen Modellen vertieft, die Angemessenheit der Mathematisierung geprüft, neue Einsichten gewonnen und Erkenntnisse vernetzt werden. Simulationen bieten dabei den Vorteil, dass einzelne Einflussgrößen gezielter und präziser variiert werden können als an einem realen Modell. Darüber hinaus lassen sich damit auch Grenzfälle ansteuern, was mit einem realen Modell häufig gar nicht möglich ist. Abb. 3 ist zu entnehmen, wie

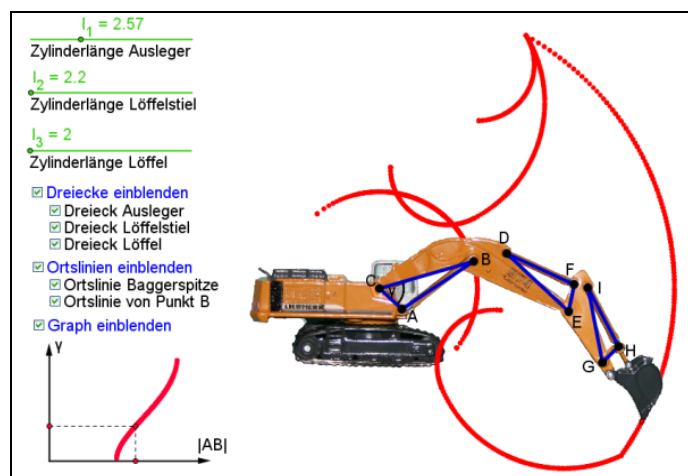


Abb. 3: Computersimulation (GeoGebra-Applet)

Simulationen bieten dabei den Vorteil, dass einzelne Einflussgrößen gezielter und präziser variiert werden können als an einem realen Modell. Darüber hinaus lassen sich damit auch Grenzfälle ansteuern, was mit einem realen Modell häufig gar nicht möglich ist. Abb. 3 ist zu entnehmen, wie

bei der Baggersimulation<sup>1</sup> Ortslinien zur Kennzeichnung und Analyse von Bewegungen sowie zur graphischen Darstellung von geometrisch gegebenen funktionalen Zusammenhängen genutzt werden können.

Wir möchten betonen, dass die drei Phasen des MATHEMATIK-Labors keine „Einbahnstraße“ darstellen, sondern wechselseitig miteinander vernetzt sind. So lassen sich etwa Erkenntnisse, die mit realen Modellen bzw. Simulationen gewonnen wurden gegenseitig aufeinander beziehen, Entdeckungen an der Simulation können Anlass zu neuen Mathematisierungen sein usw.

## **2 Zielgruppen**

Neben Schülerinnen und Schülern der 10. bis 13. Jahrgangsstufe möchten wir auch Studierende in Seminaren, Referendare während ihrer Ausbildung und Lehrkräfte in Fortbildungen dazu gewinnen, sich intensiv mit Laborstationen auseinanderzusetzen. Daneben ist es uns wichtig, Lehramtsstudierende während ihrer Ausbildung Lernumgebungen des MATHEMATIK-Labors gestalten und die Arbeit von Jugendlichen mit den Laborstationen betreuen zu lassen. Beides ermöglicht ihnen wichtige Erfahrungen im Hinblick auf ihr späteres Berufsleben.

## **3 Gestaltung des MATHEMATIK-Labors**

Das MATHEMATIK-Labor ist konzeptionell zwischen Experimentierausstellungen und Projekttagen einzuordnen. Experimentierausstellungen fokussieren stärker auf die Phänomene und weniger auf deren mathematische Durchdringung. Während der Projektstage, die wir jährlich an der Universität Würzburg anbieten, setzen sich Schülerinnen und Schüler vier Tage lang intensiv mit offenen mathematischen Fragestellungen auseinander. Bei der Konzeption der Stationen des MATHEMATIK-Labors nehmen wir aufgrund des beschränkten Zeitrahmens von drei Stunden Einschränkungen im Vergleich zu Projekttagen in Kauf. So werden z. B. Computersimulationen fertig vorgegeben und Arbeitswege weitgehend vorstrukturiert, um *allen* Schülerinnen und Schülern erfolgreiches Arbeiten zu ermöglichen. Es werden aber auch Reflexionen eingefordert und offene Aufträge integriert, zu denen bei Bedarf Hilfestellungen abgerufen werden können. Die Schülerinnen und Schüler können selbstbestimmt im individuellen Tempo arbeiten, Aufgabenstellungen variieren und sollen dazu angeregt werden, eigene Fragen zu stellen und ihnen nachzugehen.

---

<sup>1</sup> Damit Möglichkeiten und Grenzen der Simulation richtig eingeschätzt werden, ist es wichtig, dass die mathematischen Grundlagen der zu untersuchenden Phänomene und damit der Simulation erkannt und verstanden sind, bevor die Simulation intensive genutzt wird.

## **4 Forschungsfragen**

Im Rahmen der Entwicklung und Umsetzung des MATHEMATIK-Labors ergibt sich eine ganze Reihe von Forschungsfragen, die wir empirisch untersuchen wollen:

### **Verbindung von Experimenten mit realen Modellen und Simulationen**

Das „Drei-Phasen-Konzept“ des MATHEMATIK-Labors fußt auf der Hypothese, dass Zusammenhänge dann besonders effektiv gelernt werden, wenn sowohl mit realen Modellen als auch mit Simulationen gearbeitet wird. Offen ist, ob sich diese Hypothese empirisch belegen lässt, wo ggf. Effektivitätssteigerungen ansetzen und in wie fern sich daraus Kriterien für die Gestaltung von Lernumgebungen ableiten lassen.

### **Umgang mit den Lernumgebungen**

Uns interessiert, wie die Schülerinnen und Schüler mit den Lernumgebungen des MATHEMATIK-Labors umgehen. Insbesondere werden wir untersuchen, ob sie, wie intendiert, eigene Fragen stellen und diesen nachgehen oder „nur“ vorgegebene Arbeitsaufträge abarbeiten. Daneben wollen wir die Effektivität eines neuen Konzepts für die Partnerarbeitsphasen am Computer untersuchen. Uns interessiert in wie weit eine Rollenverteilung der beiden Partner positive Auswirkungen auf die Verarbeitungstiefe der mit den Simulationen gemachten Erfahrungen hat. Ein Partner bedient dabei in der Rolle des „Akteurs“ die Maus und damit die Simulation, während der andere Partner in der Rolle des „Mediators“ dafür sorgt, dass Arbeitsaufträge konsequent bearbeitet und Ergebnisse schriftlich festgehalten werden, also zwischen Arbeitsblatt und Computerumgebung vermittelt.

### **Vergleich zwischen Projektarbeit und MATHEMATIK-Labor**

In welcher Weise unterscheiden sich die Arbeitsweisen von Schülerinnen und Schülern an Projekttagen und im MATHEMATIK-Labor? Wie müssen die Lernumgebungen aufbereitet werden, dass möglichst viel von der an Projekttagen beobachtbaren selbstständigen und kreativen Arbeitsweise auch im MATHEMATIK-Labor auftritt?

### **Derartige Lernumgebungen auch im Unterricht?**

Welche Anpassungen sind notwendig, wenn man Lernumgebungen, wie sie im MATHEMATIK-Labor realisiert werden auch im „normalen“ Unterricht einsetzen möchte? Lassen sich solche Lernumgebungen im Unterricht nur zur Vertiefung und Vernetzung einsetzen oder auch zur Erarbeitung neuer Inhalte?

Informationen und Literaturangaben zum MATHEMATIK-Labor findet man im Internet unter der Adresse <http://www.mathematik-labor.org>. Nach und nach können dort auch die Simulationen abgerufen werden.