Winfried MÜLLER, Potsdam

Entdeckungen am Billard - ein Unterrichtsprojekt

Ausgehend vom (unterstellten) Interesse von SchülerInnen am Billardspiel wird ein Projekt vorgestellt, das sich im Bereich figurierter Zahlen und zwei- und dreidimensionaler Geometrie bewegt und arithmetische und kombinatorische Fragen berührt.Das Projekt ist jahrgangsunabhängig konzipiert, für die Sekundarstufe gedacht und teilerprobt. Mögliche Impulse im Unterricht sind i. f. *kursiv* geschrieben.

1. Wir springen im Dreieck

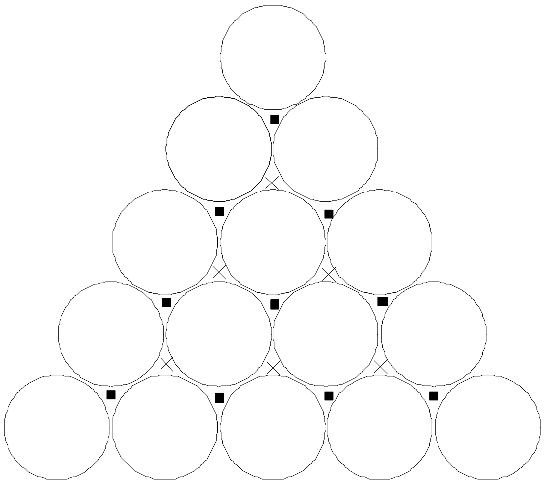
Die Beliebtheit des Billardspiels kann für Unterrichtende Anlass sein, sich auch „mathematisch" damit anzufreunden. So wird die Version Pool-Billard von zwei Spielenden mit 15 nummerierten Kugeln (plus weißem Spielball) gespielt, die Nrn.1-7 sind die „Ganzen" oder „Vollen", die Nrn.9-15 die „Halben", die schwarze "8" (❽) gilt es als letzte in eines der Löcher zu spielen, zuvor die eigenen sieben. Die Ausgangsaufstellung der 15 Kugeln erfolgt in einem dreieckigen Rahmen; die ❽ gehört dabei in die Mitte.
❽*Was ist überhaupt die Mitte?* ❽*Ginge es auch beim Start einer Snooker-Partie?* [Snooker, eine weitere Billard-Variante, wird mit 21 Kugeln plus Spielball gespielt, davon 15 rote und sechs andersfarbige.]

Das Bild zeigt eine Kinderspielvariante vom Poolbillard.

Warum kann man die ❽ hier in die Mitte legen? ❽Für wie viel Kugeln geht das überhaupt? [1; 4; 7; 10; ..]❽*Wieviele Kugeln lassen sich in ein Dreieck packen?* Plötzlich beschäftigen wir uns mit Dreieckszahlen! Der Zusammenhang zwischen der Kugelzahl n an den Seiten des gleichschenkligen Dreiecks – bisher tauchten ja 4, 5 und 6 auf – und ihrer Gesamtzahl S(n) im Dreieck führt bekanntlich auf die gaußsche Summenformel; ein Beweis wird sich i. f. ergeben, s. a. [2].

2. Ab in höhere Dimensionen

Am Ende der letzten Partie Pool wird aufgeräumt, der Spielball auf das gefüllte Dreieck gelegt (er rollt in eine Lücke).
❽*Wie viele Plätze gibt es dafür generell?*
❽*Wie viele Kugeln können wir also in eine zweite Schicht packen?*



Mit n neuen Kugeln kommen n-2 (x) und n-1 (■) weitere Plätze hinzu.
Sie schließen sich z. T. aus!

Insgesamt sind es (n-1)² [dazu fügen wir die beiden (■)- und (x)-Dreiecke aneinander und formen diese Raute zum Quadrat um, womit sich leicht die gaußsche Formel ergibt].

Maximal sind es S((n-1)).

Führen wir das fort, erhalten wir ein Tetraeder. Für die Kugelanzahl A(n) darin bei der „Seitenlänge“ n gilt $A(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ [sogen. Tetraederzahl, nach den Dreieckszahlen ein weiteres Bsp. figurierter Zahlen (vgl. [6]); sie tauchen als 3./4. Schräge im pascalschen Dreieck auf].
Je nach Vorkenntnissen der SchülerInnen kann diese Formel z.B. durch Induktion bewiesen werden [es gilt ja A(n+1) = A(n) + S(n+1)] oder durch

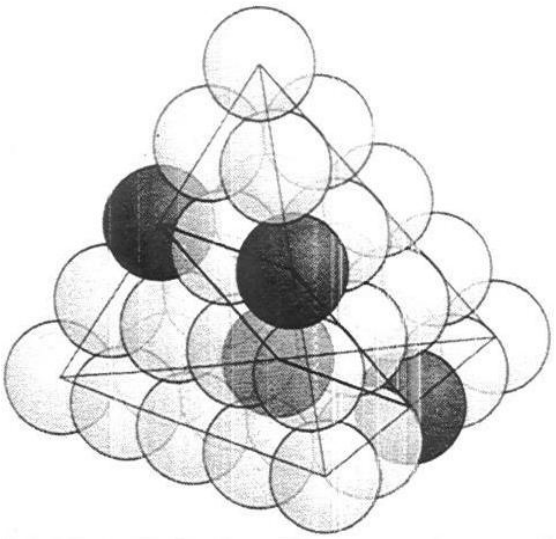
$A(n) = \sum_{i=1}^{n} S(i)$ und $S(i) = \frac{(i^2+i)}{2}$, was ergibt $2 \cdot A(n) = \sum_{i=1}^{n} (i^2+i) = \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i$ = $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$ usw. [die Formel für die Quadratesumme ist evtl. von der Herleitung der Volumenformel der Pyramide bekannt (Treppenkörper) und wird bei den riemannschen Summen gebraucht zur Berechnung von $\int_0^1 x^2 \ldots$].

❽ *Wieso ist das für jede natürliche Zahl n überhaupt eine natürliche Zahl? Vergleichen wir das Resultat mit S(n), der Kugelzahl im Dreieck: Was fällt auf? Wie könnte die Formel für vier Dimensionen lauten? Wie allgemein?*

Überraschenderweisende landen wir so bei den k-dimensionalen Simplexen S_k [und haben „unterwegs“ mathematiktypische Aktivitäten wie z. B. Verallgemeinern angesprochen]: die Strecke S_1 wird von 2 Punkten begrenzt, das gleichschenklige Dreieck S_2 von 3 Strecken; S_3 ist das reguläre Tetraeder, wovon 5 Exemplare die Begrenzung des S_4 bilden …

3. 3D ist schwer genug

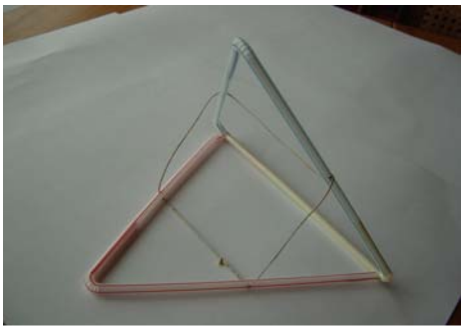
Der Zugang zu geometrischen Sachverhalten geht im Dreidimensionalen weiter:



Wir betrachten eine Reihe aus 3 Kugeln in halber Höhe der Figur. Ihre Randkugeln verbinden wir mit den Mitten der beiden benachbarten Grundflächenkanten, was wiederum zwei Dreireiher gibt; deren Verbindung innerhalb der Grundfläche ist wieder ein Dreireiher, alle vier bilden also eine Raute, und da in ihrem Innern noch eine Kugel in der zweiten Kugelschicht von unten liegt, sogar ein Quadrat!

Dahinter verbirgt sich ein Spezialfall des Satzes von VARIGNON:
Die Mitten eines beliebigen Vierecks bilden ein Parallelogramm. Ein elementarer Beweis (vgl. etwa [5], es geht natürlich auch vektoriell) benutzt nur eine Diagonale im Viereck, die doppelt so lang ist wie die Verbindungsstrecken der Seitenmitten in den entstandenen Teildreiecken (2. Strahlensatz). Das gilt auch für „räumliche“ Vierecke! Ist das Ausgangsviereck ein Drachen, so bilden die Verbindungsstrecken der Seitenmitten als Parallelen zu den orthogonalen Diagonalen ein Rechteck; sind seine Diagonalen gleich lang, handelt es sich um eine Raute. Gilt beides, haben wir ein Quadrat als Seitenmitte.

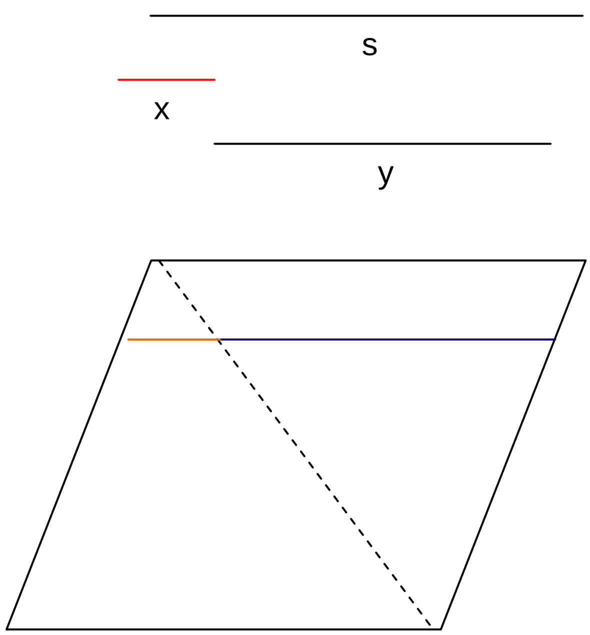
Dass Gleiches im als räumliches Viereck aufgefassten regulären Tetraeder gilt (zwei Kanten sind jetzt „Diagonalen“), ergibt sich schon aus Symmetriegründen; unterrichtsnäher sind folgende drei Wege:



Das nebenstehende Modell aus Trinkhalmen und Büroklammern zeigt den Sachverhalt deutlich; es bietet außerdem „dynamische“ Möglichkeiten (Drehung an der gelben Diagonalen der Raute); auch 3D-DGS-Einsatz ist denkbar.

Ein anderer Weg ist ein Gegenstück zu der bekannten Schnittaufgabe senkrecht zur Raumdiagonalen im Würfel [1]:
Die Verbindung ihrer Mitten ist eine gemeinsame Orthogonale der windschiefen Kanten k_1 und k_2 im Tetraeder. Lassen wir eine Schnittebene senkrecht zu dieser Orthogonalen laufen, schneidet sie aus dem Tetraeder Rechtecke aus mit den Seitenlängen x und y, wobei zunächst $0 \leqq x,y \leqq s$, wenn s die Kantenlänge des Tetraeders ist.
Aus „Stetigkeitsgründen“ muss x = y in der Mitte, also bei x = y = ½s gelten.
[Die Diagonale im Mittenquadrat – s.o. - zeigt elegant den Abstand der windschiefen Kanten $d(k_1, k_2)= \frac{\sqrt{2}}{2}s$ **].**

Betrachtet man schließlich zwei benachbarte Seitenflächen des Tetraeders, die x und y entsprechende Strecken enthalten, so sieht man sofort x+y = s ein, also tatsächlich den Quadratfall für x = y =½s:



Literatur:

[1] KMK (Hrsg.): Einheitliche Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung Mathematik i. d. F. vom 24. 5. 2002, II 1.1.3 (S. 37 ff.)

[2] W. Müller: Am Wegesrand - Ein anschaulicher Beweis der gaußschen Summenformel, in: Praxis der Mathematik (**PM)** 44 (2002), Heft 2 S. 87

[3] W. Müller: Entdeckungen am Billard, in: Mathematik Lehren (**ML),** Heft 149 (2008)

[4] M. Nieger: Ein Kandidat für den schwersten begreifbaren Beweis der Schulmathematik, in **PM** 45 (2003), Heft 1

[5] H. Schupp: Thema mit Variationen, Hildesheim-Berlin, 2002, Anhang Nr. 35 S. 175 ff.

[6] A. S. Steinweg: … sich ein Bild machen. Terme und figurierte Zahlen, in (**ML),** Heft 136 (2006), S. 14-17.