View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by Eldorado - Ressourcen aus und für Lehre, Studium und Forschung

Martin EPKENHANS, Münster

Computeralgebra- ein Werkzeug aus der Mathematik für die Mathematik- Entwicklung einer Leitidee für den Unterricht

1. Einleitung

Computeralgebrasysteme haben Einzug in Schulbücher, Lehrpläne und zentrale Prüfungen gefunden. In Anbetracht dieser Entwicklung gehört es zu den selbstverständlichen Aufgaben der Didaktik, diese unterrichtlichen Veränderung zu begleiten und Lehrkräften didaktische Konzepte zur Integration von Computeralgebrasystemen in den Unterricht an die Hand zu geben. Dabei muss aus Sicht der Mathematik beachtet werden, dass es sich bei Computeralgebrasystemen nicht nur um ein Werkzeug für den Unterricht handelt, sondern dass dieses Werkzeug viel Mathematik enthält. Das exemplarische Herausarbeiten der Computeralgebra im Unterricht vertieft das Verständnis von Mathematik und kann andere Zugänge zum mathematischen Arbeiten eröffnen.

2. Computeralgebra und Computeralgebrasysteme

Liest man die Kapitelüberschriften im Buch „Modern Computer Algebra“, [3] so glaubt man eher ein Buch über die Geschichte der Mathematik als ein Buch über ein modernes Arbeitsgebiet der Mathematik in der Hand zu halten. Die Überschriften lauten: Euclid, Newton, Gauß, Fermat und Hilbert. Auf dem Buchrücken heißt es „…(an) introduction to the algorithmic basis of the mathematical engine in computer algebra systems“. Die Fachgruppe Computeralgebra der GI, DMV und GAMM nennt als „Konkrete Beispiele für Problemstellungen in der Computeralgebra: das Rechnen mit beliebig langen Zahlen, mit Symbolen, Unbestimmten und Polynomen, das Faktorisieren von Zahlen und Polynomen, das Differenzieren von Polynomen und anderen Funktionen, das wesentlich schwierigere Auffinden von Stammfunktionen und das exakte Lösen polynomialer Gleichungssysteme oder von Differentialgleichungen“. Diese kurzen Beschreibungen zeigen deutlich, welch großer mathematischer Gehalt der Computeralgebra innewohnt. Oberschelp [2] spricht bei Computeralgebrasystemen von der „integrierten Implementierung mathematischer Theorien“. Neben den bekannten im Unterricht eingesetzten Systemen gibt es spezielle Systeme zur algebraischen Geometrie, algebraischen Zahlentheorie, kommutativen Algebra, Singularitätentheorie, Gruppentheorie… Die dynamische Geometrie wird teilweise auch im Bereich Computeralgebra eingeordnet.

3. Abgrenzung zur Tabellenkalkulation

Aktuell sind Tabellenkalkulationsprogramme, dynamische Geometriesoftware und Computeralgebrasysteme die speziellen Softwareprodukte, die im Mathematikunterricht zur Unterstützung der mathematischen Begriffsbildung und Problemlösung eingesetzt werden und daher einer didaktischen Analyse bedürfen. In der Verbreitung und Zielsetzung unterscheiden sich Tabellenkalkulationsprogramme stark von den anderen beiden Systemen. Sind letztere vornehmlich auf die Benutzung im Bereich der Mathematik (Ausbildung, Forschung, etc.) ausgerichtet, so sind Tabellenkalkulationsprogramme für die Anwendung außerhalb der Mathematik konzipiert. Ihre Aufgabe ist es, in wiederholten Anwendungssituationen die Benutzer von mathematischen Überlegungen und Rechnungen zu befreien (z.B. Rechnungen, Tilgungspläne, etc.). Daher bedarf der unterrichtliche Einsatz von Tabellenkalkulationsprogrammen einer anderen Akzentuierung und teilweise auch anderer didaktischer Orte.

4. Geschichte der CAS-Didaktik

Seit Entstehen der Computeralgebrasysteme und deren zunächst vereinzelten Einzug in den Unterricht hat sich die Didaktik speziell den Themen Aufgabenentwicklung mit CAS, neue Aufgabenkultur, Begriffsbildung mit CAS, Einbeziehung neuer Unterrichtsinhalte und Streichung bzw. neue Akzentuierung alter Inhalte durch die Nutzung von CAS, Vergleich der verschiedenen Systeme, CAS und zentrale Prüfungen und Veränderung von Unterrichtsmethoden durch CAS befasst. Teilweise sind auch die Diskussionen um die Einbeziehung informatischer Inhalte in den Mathematikunterricht an dieser Stelle zu nennen. Dabei steht die Betrachtung von Computeralgebrasystemen als existente Werkzeuge häufig im Vordergrund. Prägend in der didaktischen Diskussion waren dabei sicherlich die Fragen „Wie viel Termumformung braucht der Mensch?“, bzw. „Rettet die Ideen!- Rettet die Rezepte?“ Eine Antwort auf die letzte Frage lautet: „Rettet die Rezepte, die Ideen tragen“.[1]

5. Computeralgabrasysteme und das Bild von Mathematik

Hinter jeder Unterrichtsdidaktik für Mathematik steht ein Bild von Mathematik. Mathematik wurde und wird immer von innermathematischen Fragestellungen und Fragen aus Anwendungsgebieten vorangetrieben. Nicht immer ist die Antwort auf die Frage, in welchem Fachunterricht ein bestimmtes Problem, zu deren Lösung mathematische Kompetenzen gehören, behandelt werden soll, leicht zu entscheiden. Speziell in Bildungsgängen an Berufsschulen wird daher folgerichtig der eigenständige Mathematikunterricht zu Gunsten einer Lernfelddidaktik aufgehoben. Computeralgebra ist nun ein zutiefst innermathematischer Gegenstand. Eine exemplarische Behandlung ihrer Inhalte kann nur im Mathematikunterricht sinnvoll verwirklicht werden und fördert das Entstehen eines möglichst umfangreichen und aktuellen Bildes von Mathematik bei Schülerinnen und Schülern.

6. Eine Leitidee- Das Delegationsprinzip

Bei der Schaffung von Computeralgebrasystemen delegiert man mathematische Tätigkeiten an Computer. Welche Voraussetzungen müssen hierzu erfüllt sein? Welche Anforderungen werden an die Verfahren gestellt? Wie kann man ausgewählte mathematische Themen anders behandeln, wenn nicht das Üben am Ende der Entwicklung von Verfahren steht, sondern das Verfahren an eine Maschine delegiert wird? Welche Veränderungen ergeben sich, wenn man selbst nicht mehr Herr des Verfahrens ist?

7. Unterrichtsbeispiele

Das Delegationsprinzip soll nun am Lösen quadratischer Gleichungen illustriert werden. Quadratische Gleichungen werden traditionell durch die quadratische Ergänzung, die p-q Formel oder die a-b-c Formel gelöst. Bei der quadratischen Ergänzung lernen die Schülerinnen und Schülern ein Verfahren, das auf einem kleinen Trick basiert und die binomische Formel rückwärts benutzt. Führt die Rechnung auf einen Term der Form $(x-a)^2=b<0$, so bricht man das Verfahren ab, da keine reelle Lösung existiert. Führt man dieses Verfahren allgemein an einer (normierten) quadratischen Gleichung durch, erhält man als Ergebnis die a-b-c-Formel (p-q-Formel). Auch wenn man somit die Lösungen scheinbar direkt hinschreibt, empfinden Schülerinnen und Schüler diese Formeln nicht unbedingt als eine Verkürzung der Rechnung, da die Formeln gewöhnlich zwei Lösungen enthalten und nicht direkt in den Taschenrechner eingegeben werden können. Nach Einsetzen der konkreten Koeffizienten muss zunächst die Diskriminante berechnet werden, dann stellt man fest, ob es überhaupt Lösungen gibt, und im letzten Schritt werden die numerischen Werte dann bestimmt. Das Verfahren bricht man ab, sobald der Wert „unter der Wurzel" (Schülerjargon) negativ ist. Streng genommen haben die Schülerinnen und Schüler bis zu dieser Stelle Termumformungen außerhalb der reellen Zahlen, in den ihnen unbekannten komplexen Zahlen vorgenommen, eigentlich ein aus ihrer Sicht unzulässiger Weg. Ein auch im reellen Zahlbereich korrekter Weg ist die Bestimmung der Anzahl der Lösungen mit Hilfe der Diskriminanten vor Beginn der numerischen Bestimmung der Lösungen. Dieser Weg wird vielfach von Schülerinnen und Schülern als unnötig eingestuft.

Wie kann man nun den Unterricht anders gestalten, wenn man die Lösung quadratischer Gleichungen mit Hilfe von CAS durchführt? Ein CAS kann nur das, was der Mensch ihm beigebracht hat. Daher ist es weiterhin sinnvoll im Unterricht aus einer Problemstellung heraus Lösungen und Lösungswege zu finden. Computeralgebrasysteme erfordern allgemeine Verfahren bzw. Formeln. Die Lösung sollte sich möglichst deterministisch aus den Eingabedaten bestimmen lassen. Da man in der Schule gewöhnlich in den reellen Zahlen rechnet, kann die Gleichung keine, eine oder zwei Lösungen haben. Da man nach der Delegation der Bestimmung der Lösungsmenge nicht mehr Herr des Verfahrens ist, müssen entsprechende Tests bezgl. der Lösbarkeit, die zu einer benutzerfreundlichen Ausgabe führen, eingebaut werden. Der Diskriminantentest bekommt ebenso wie die Lösungsformeln einen neuen Sinn. Unterrichtlich realisieren könnte man dann dieses Verfahren mit einem Tabellenkalkulationsprogramm. Ebenso kann an dieser Stelle bei der Begründung der Korrektheit des Verfahrens der Sinn von Äquivalenzumformungen verdeutlicht werden.

In einem nächsten Schritt kann man Polynomgleichungen vom Grad <3 systematisch untersuchen lassen, um nachfolgend das Verfahren in einem Tabellenkalkulationsprogramm zu realisieren. Hierbei lernt man, dass quadratische Gleichungen und lineare Gleichungen verschiedene Verfahren benötigen und wie entschieden werden kann, welches zu wählen ist.

Nun kann man allgemeine mathematische Prinzipien zur Behandlung von Gleichungssystemen herausarbeiten, die als allgemeine Richtschnur bei der Entwicklung von Verfahren, die delegiert werden, dienen können.

Weitere unterrichtliche Themen, die in diesem Sinne bearbeitet werden, sind der Gaußalgorithmus, Schnittmengenbestimmung geometrischer Objekte und die Ableitung und Integration exemplarischer Funktionsklassen. Dabei muss vielfach eine Systematik zur Einordnung der vorliegenden Probleme in Teilproblemklassen entwickelt werden.

Literatur

[1] Herget, W. (1996). Rettet die Ideen! –Rettet die Rezepte?. *Rechenfertigkeiten und Begriffsbildung- zu wesentlichen Aspekten des Mathematikunterrichts vor dem Hintergrund von Computeralgebrasystemen: Bericht über die 13. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e.V. Franzbecker*.

[2] Oberschelp, W. (1996). Computeralgebrasysteme als Implementierung symbolischer Termalgorithmen. *Rechenfertigkeiten und Begriffsbildung- zu wesentlichen Aspekten des Mathematikunterrichts vor dem Hintergrund von Computeralgebrasystemen: Bericht über die Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e.V. Franzbecker.*

[3] Von zur Gathen, J. & Gerhard, J. (1999). Modern Computer Algebra. Cambridge: Cambridge University Press.