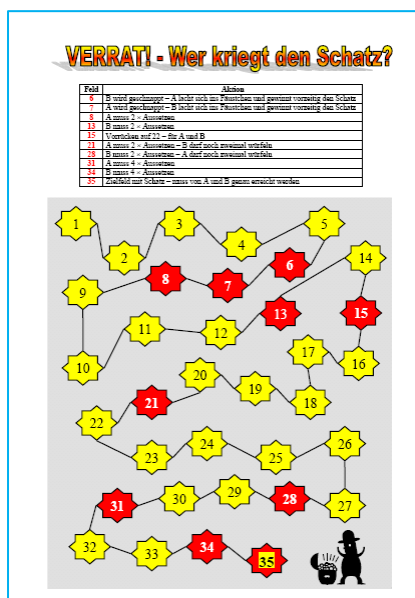


Andreas EICHLER, Münster & Frank FÖRSTER, Braunschweig

Verrat! – Stochastische Modellbildung bei einem merkwürdigen Brettspiel

Spielend in die stochastische Modellbildung? Ein Ansatz dazu wird im Folgenden skizziert.



VERRAT! ist ein Würfelspiel für 2 Personen. Die Schülerinnen und Schüler kriegen den Auftrag, paarweise jeweils 10 Partien zu spielen. Wie bei einem Würfelspiel zu erwarten, gewinnt manchmal der eine Spieler (A), manchmal der andere (B). Fasst man aber alle Spiele einer Klasse zusammen, so zeigt sich, dass A wesentlich häufiger gewinnt als B – beispielsweise bei 20 Schülern, also 100 Spielen: 58 Siege von A, 34 Siege von B und 8 Unentschieden (d.h. A und B kommen mit der gleichen Wurfzahl ins Ziel). Dieses Ergebnis lässt sich unterschiedlich interpretieren. Glück bzw. Zufall oder ein unfaires Spiel?

Feld	Aktion
6	B wird geschnappt – A lacht sich ins Fäustchen und gewinnt vorzeitig den Schatz
7	A wird geschnappt – B lacht sich ins Fäustchen und gewinnt vorzeitig den Schatz
8	B muss 2 × Aussetzen
13	A muss 2 × Aussetzen
15	Vorrücken auf 22 – für A und B
21	A muss 2 × Aussetzen – B darf noch zweimal würfeln
28	B muss 2 × Aussetzen – A darf noch zweimal würfeln
31	A muss 4 × Aussetzen
34	B muss 4 × Aussetzen
35	Zielfeld mit Schatz – muss von A und B genau erreicht werden

Tabelle 1: Spielregeln des Brettspiels „Verrat!“

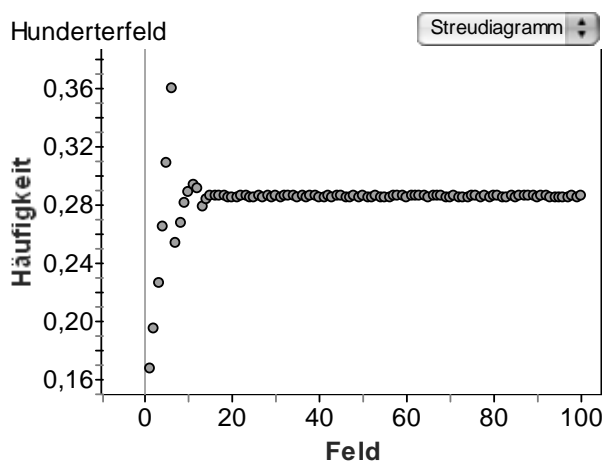
Der zunächst einzig feststellbare Unterschied ist, dass beide Mitspieler die jeweils identischen Aktionsfelder an unterschiedlichen Stellen des Spielplans haben. Eine Simulation (1 Mio. Versuche) des Spiels zeigt dennoch:

- A gewinnt 53,0% der Spiele,
- B gewinnt 35,5% der Spiele,
- Unentschieden in 11,4% der Spiele.

Woran kann das trotz gleicher Aktionsfelder liegen? Die einzige schlüssige Antwort lautet, dass es unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten geben muss,

die Aktionsfelder zu erreichen. Das wirft die Frage auf, wie groß diese Wahrscheinlichkeiten, ein bestimmtes Feld zu treffen, eigentlich sind.

Wir haben zunächst die Fragestellung vereinfacht, indem wir alle Aktionsfelder und das Zielfeld zunächst vernachlässigt haben (leeres Spielfeld). Wie groß ist die nun Wahrscheinlichkeit, das 1., 2., 3., ... Feld im Verlaufe des Spiels zu treffen?



Man sieht anhand des Ergebnisses einer Simulation: Es gibt zu Beginn starke Schwankungen in den relativen Häufigkeiten. Die relative Häufigkeit für das Treffen des ersten Feldes liegt wie erwartet bei $1/6$ (rund 17%). Die Häufigkeit wächst zunächst von Feld zu Feld, erreicht bei Feld 6 einen Maximalwert von rund 36% und fällt bei Feld 7 auf rund 25% drastisch ab. Das 7. Feld

wird also bis auf die drei Anfangsfelder deutlich seltener getroffen. Dies steht in deutlichem Widerspruch zur Intuition der meisten Befragten, die der 7 als wahrscheinlichster Zahl bei zweimaligem Würfeln auch eine hohe Treffer-Wahrscheinlichkeit zusprechen. Ab Feld 7 erfolgt ein erneutes Anwachsen. Einen Einbruch in den Häufigkeiten gibt es auch zwischen Feld 12 und 13, wenn dieser auch geringer ist als zwischen Feld 6 und 7.

Die Wahrscheinlichkeiten lassen sich für die ersten Felder auch berechnen:

- $P(1) = \mathbf{1/6}$
- $P(2) = \mathbf{1/6 + 1/6^2}$
- $P(3) = \mathbf{1/6 + 2/6^2 + 1/6^3}$
- $P(4) = \mathbf{1/6 + 3/6^2 + 3/6^3 + 1/6^4}$
- $P(5) = \mathbf{1/6 + 4/6^2 + 6/6^3 + 4/6^4 + 1/6^5}$
- $P(6) = \mathbf{1/6 + 5/6^2 + 10/6^3 + 10/6^4 + 5/6^5 + 1/6^6}$

Das Erreichen des 1. Feldes ist allein mit einer 1 im ersten Wurf möglich, das Erreichen des 2. Feldes mit einer 2 im ersten Wurf oder jeweils einer 1 in den ersten beiden Würfeln, das Erreichen des 3. Feldes mit den Wurffolgen (3), (1,2), (2,1), (1,1,1). Das bedeutet, dass sich die Wahrscheinlichkeit, ein bestimmtes Feld zu erreichen, additiv zusammensetzt aus verschiedenen Wahrscheinlichkeiten, das Feld in einer *festen* Wurfzahl zu erreichen. Dadurch lässt sich auch der „Einbruch“ der Wahrscheinlichkeiten

nach dem 6. Feld erklären. Hier fällt in der Summe der Wahrscheinlichkeiten ein Summand weg. So ist es möglich, das 6. Feld mit 1 bis 6 Würfeln zu erreichen, für das 7. Feld benötigt man dagegen mindestens zwei Würfe. Das Phänomen, dass sich die Mindestwurfanzahl erhöht, wiederholt sich alle sechs Felder. Bei den ersten dieser Übergänge, wie von Feld 6 auf Feld 7, sind diese Sprünge deutlich, dagegen später kaum noch sichtbar.

In den Formeln scheint zunächst die folgende einfache Struktur sichtbar zu werden: Die Wahrscheinlichkeit, das Feld m zu erreichen, ist für die Felder 1 bis 6 (wenn man die Summanden geeignet zusammenfasst),

$$\frac{1}{6} \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} \cdot \frac{1}{6^i} \quad \left[= \frac{1}{6} \cdot \left(1 + \frac{1}{6}\right)^{m-1} \right].$$

Die Wahrscheinlichkeit, das Feld 7 zu erreichen ist

$$\frac{1}{6} \sum_{i=1}^{7-1} \binom{7-1}{i} \cdot \frac{1}{6^i} = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{7-1} \binom{7-1}{i} \cdot \frac{1}{6^i} - \frac{1}{6}.$$

Die Möglichkeit einer expliziten, direkten Berechnung der Wahrscheinlichkeiten scheint in den Bereich des Möglichen gerückt zu sein. Die naheliegende Vermutung, dass beim Übergang vom 12. auf das 13. Feld allein der zweite Summand der obigen Summe wegfällt, erweist sich aber als falsch. Die Struktur ist (leider) deutlich komplexer, wie bereits die Berechnung der Wahrscheinlichkeit, das 8. Feld zu treffen, zeigt. Die (falsche) Vermutung für die Wahrscheinlichkeit, das Feld 8 zu erreichen wäre:

$$\frac{1}{6^1} + 7 \cdot \frac{1}{6^2} + 21 \cdot \frac{1}{6^3} + 35 \cdot \frac{1}{6^4} + 35 \cdot \frac{1}{6^5} + 21 \cdot \frac{1}{6^6} + 7 \cdot \frac{1}{6^7} + 1 \cdot \frac{1}{6^8}.$$

Tatsächlich setzt diese Formel aber einen „7-seitigen Würfel“ voraus, da hier sieben Möglichkeiten, mit zwei Würfeln eine 8 zu erhalten, berücksichtigt werden: (1,7), (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2), (7,1). Die beiden Möglichkeiten (1,7) und (7,1), jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $1/6$, müssen daher gestrichelt werden (vgl. folgende Formel). Mit dem normalen Würfel hat die korrekte Berechnungsformel für Feld 8 daher folgende Gestalt:

$$\frac{1}{6^1} + 2 \cdot \frac{1}{6^2} + 5 \cdot \frac{1}{6^2} + 21 \cdot \frac{1}{6^3} + 35 \cdot \frac{1}{6^4} + 35 \cdot \frac{1}{6^5} + 21 \cdot \frac{1}{6^6} + 7 \cdot \frac{1}{6^7} + 1 \cdot \frac{1}{6^8}$$

Die naheliegende Idee, alle diese „Korrekturterme“ ebenfalls in Form einer Summe zusammenzufassen, führt zu einer expliziten Darstellung der Wahrscheinlichkeiten für die Felder 1 bis 12. Ab dem 13. Feld werden aber „Korrekturen für die Korrekturterme“ nötig, da auch diese Korrekturterme von $(n - 1)$ -seitigen Würfeln ausgehen. Kurz gesagt: Alle 6 Felder kommt ein weiterer Korrekturterm (in Form einer Summe) hinzu.

Da die explizite Darstellung dieser Summe von Summen zwar möglich, aber komplex ist (für Schüler zu komplex) und die damit mögliche Berechnung der Wahrscheinlichkeiten, ein bestimmtes Feld zu treffen, nur von einem Computer-Algebra-System zu leisten ist, haben wir nach alternativen Formen gesucht, diese Wahrscheinlichkeiten exakt zu berechnen. Hierbei haben wir sowohl das Hunderterfeld als auch komplexere Brettspiele mit Hilfe rekursiver (Excel) und iterativer (Markov-Ketten) Berechnungen analysiert (zu den Ergebnissen vgl. Eichler/Förster, 2008).

Diese Ergebnisse dieser Analyse haben wir genutzt um unser unfaires Spiel „Verrat!“ zu konstruieren: Ein wesentlicher Unterschied ergibt sich bereits durch die Platzierung des Ausscheidenfeldes auf Feld 6 bzw. Feld 7.

Durch das unterschiedliche Feld für das Ausscheiden, haben sich aber auch die Trefferwahrscheinlichkeiten für die folgenden Felder verändert – und zwar unterschiedlich für Spieler A und B. Wir sind prinzipiell so vorgegangen, dass wir „positive“ Aktionsfelder für A auf Felder mit einer relativ hohen und für B mit einer relativ geringen Trefferwahrscheinlichkeit gelegt haben. Insgesamt ergaben sich somit die folgenden simulierten Trefferwahrscheinlichkeiten (Die Angaben in Klammern sind die bedingten Wahrscheinlichkeiten, das Feld zu treffen, wenn die Figur zuvor nicht ausgeschieden ist.):

Aktion	Feld für A	Treffer-WK (%)	Feld für B	Treffer-WK (%)
Spielende	7	25,4	6	36,0
2 × Aussetzen	13	18,7 (25,1)	8	19,4 (30,3)
7 Felder vor	15 (auf 22)	21,8 (29,2)	15 (auf 22)	18,4 (28,8)
2 × Aussetzen	21	13,5 (18,1)	28	19,7 (30,8)
Noch 2 × Würfeln	28	23,1 (31,0)	21	11,7 (18,3)
4 × Aussetzen	31	21,6 (29,0)	34	33,5 (52,3)

Tabelle 2: Trefferwahrscheinlichkeiten beim Brettspiel „Verrat!“

Die Werte der Simulation konnten auch theoretisch bestätigt werden. Das Spiel ist zwar nicht optimiert, d.h. es ließen sich noch „heimtückischere“ Varianten erstellen. Allerdings haben wir auch Wert darauf gelegt, dass die Ungleichheit nicht allzu deutlich in den Regeln abzulesen ist.

Weitere, über diese Eingangsskizze hinausgehende Ergebnisse der stochastischen Modellbildung zur Analyse von Brettspielen, sind in der nachfolgend genannten Literatur enthalten.

Literatur

Eichler, A., Förster, F. (2008): „Ein Märchenspiel“ - Stochastische Modellbildungen bei einem „merkwürdigen“ Brettspiel. In: Eichler, A./Förster, F. (Hrsg.) (2008): ISTRON - Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht - Band 12: Die Kompetenz Modellieren: Konkret oder kürzer. Hildesheim: Franzbecker, S. 107-139