Matthias LUDWIG, Weingarten und Reinhard OLDENBURG, Frankfurt

Moderierte Sektion: Raumgeometrie Lernen: Die Bedeutung realer und mentaler Modelle von Körpern und deren Konstruktion

Reinhard OLDENBURG, Frankfurt

Vorstellungen von Konfigurationen und raumgeometrischen Konstruktionen

Es gibt mittlerweile zwei erfolgreiche dynamische Raumgeometrieprogramme: Archimedes Geo 3D und Cabri 3D. Trotz ihres Erfolges soll hier gefragt werden, welche Alternativen Zugänge es zu raumgeometrischen Konstruktionen gibt und welche Vorstellungen diese bei den Lernenden ausbilden aber auch erfordern. Die Perspektive dabei ist die der didaktischen Softwareentwicklung (Didaktik als design science im engeren Sinne).

Mentale Modelle von Software

Man kann Software nur sinnvoll nutzen, wenn man ein mentales Modell ihrer Arbeitsweise entwickelt. Mentale Modelle sind dabei (nach Dutke 1994) hypothetische Konstrukte, die grundsätzlich die gleichen Merkmale wie allgemeine Modelle besitzen. Sie sind schwer revidierbar, wenn sie nützlich, aber offensichtlich unzureichend sind. Häufig stützen sich häufig auf Analogien. Weigand (2007) findet für die Didaktik der Informatik vor allem den Spezialfall „Intuitiver Mentaler Modelle“ nützlich, die über ihre Selbstevidenz zu einer intrinsischen Gewissheit aufgrund ihrer Persistenz und Zwanghaftigkeit führen. Es ist naheliegend, dass Geometrieprogramme schnell zur Bildung von intuitiven mentalen Modellen führen, auch wenn diese nicht immer dauerhaft sind.

Bei Mathematikprogrammen sollte man unterscheiden zwischen:

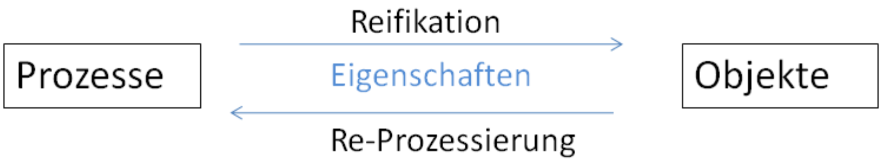
- Mentalen Modellen zum Gegenstand (Mental Model of Mathematical content M^3C)
- Mentalen Modellen zur informatischen Modellierung der mathematischen Objekte (Mental Model of Content Model M^2CM)

Dies soll am Beispiel der reellen Zahlen erläutert werden: Das M^3C könnte das eines Punktes auf dem Zahlenstrahl oder einer beliebige Dezimalzahl sein, während das M^2CM das einer 15-stelligen-Fließpunktzahl sein könnte.

Auch jeder Entwickler eines Mathematikprogramms braucht mentale Modelle. Das Programm als sein Produkt kodiert seine mentalen Modelle und der Benutzer (re)konstruiert seine eigenen Modelle in dessen Rahmen. Es liegt die Hypothese nahe, dass die Raumgeometriesoftware wesentlich bestimmt, welche mentalen Modelle von geometrischen Objekten viabel sind.

Im weiteren Beitrag werden vor allem zwei Fragestellungen diskutiert: Die Modellierung des Konstruktionsbegriffs (was ist mein M³C von Raumgeometrischer Konstruktion?) und die Implementation (CM= content model).

Dabei spielt die bekannte Objekt-Prozess-Dualität eine interessante Rolle: Während nach der Reifikationstheorie Prozesse verdinglicht werden und so Objekte bilden, setzt die Arbeit mit einem Raumgeometrieprogramm genau die umgekehrte Richtung voraus: Vorstellungen von Objekten müssen in Konstruktionsprozesse rückübersetzt werden. Für diesen Vorgang schlage ich den Begriff der Re-Prozessierung vor.



Der klassische Konstruktionsbegriff: Objekte mit Relationen

Schon zweidimensionale dynamische Geometrieprogramme realisieren (leicht) unterschiedliche Konstruktionsbegriffe. Wenn man von diesen Unterschieden absieht, erkennt man als Gemeinsamkeit, dass eine Folge von Objekten konstruiert wird, bei denen das jeweils neue Objekt funktional von den bereits konstruierten abhängt (Goebel & Oldenburg 2008), und dieser Konstruktionsbegriff überträgt sich problemlos in den Raum.

Konstruktion als Gleichungssystem: Algebraische Modellierung

Geometrische Beziehungen können als algebraisches Gleichungssystem modelliert werden wie im System FeliX des Autors. Dann bilden sowohl die Objekte als auch die Relationen Mengen, die in beliebiger Reihenfolge erstellt werden können. Man hat so eine „Konstruktion ohne Konstruktion“, was zwar (wie ein Prototyp von FeliX3D zeigt) schnelle Konstruktionserfolge bringt, was aber die schöne Möglichkeit, Konstruktionsaufgaben zur Förderung des Problemlösens einzusetzen, zerstört. FeliX wurde ja auch primär zur Förderung des algebraischen Denkens entwickelt.

Konstruktion als Reihenfolge von Objekten

Die oben dargestellten Schwierigkeiten mit halbfreien Objekten können ausgeräumt werden, wenn der Konstruktionsbegriff so geändert wird, dass es keine prinzipielle Unterscheidung mehr zwischen freien, halbfreien und eindeutig konstruierten Objekten gibt. Ein solcher Konstruktionsbegriff soll hier dargestellt werden. Dabei wird eine Konstruktion verstanden als eine Tabelle der folgenden Art:

Name	**Art**	**Relationen**
P	Punkt	-
Q	Punkt	Abstand zu Q=5
T	Punkt	Koordinaten=(1,2,3)
g	Gerade	Geht durch P und Q
s	Strecke	Anfangspunkt=P; senkrecht zu g
E	Ebene	Parallel zu s; parallel zu g

Der zeilenweise Aufbau stellt die Schritte der Konstruktion dar. Jedem Objekt können Relationen auferlegt werden, die es erfüllen soll. Vorteil dieses Ansatzes ist, dass die Reihenfolge, in der die Relationen eingetragen werden, offen ist. Man braucht nicht gleich bei der Erzeugung eines Objektes alle Eigenschaften kennen, sondern es können schrittweise Relationen hinzugefügt werden, bis das Objekt so festgelegt ist, wie es der Intention des Benutzers entspricht. Entscheidend dafür, dass es sich trotz dieser Freiheit um einen effektiv ausführbaren Konstruktionsbegriff handelt ist die Einhaltung der folgenden Regel: Die Relationen, die zu jedem Objekt angegeben werden, dürfen das Objekt nur durch Verweis auf andere Objekte spezifizieren, die in der Tabelle vorher spezifiziert worden sind, also oberhalb stehen. Durch diese Vorschrift bleibt die Konstruktion leicht berechenbar.
Dieser Konstruktionsbegriff ist implementierbar (eine proof-of-concept-Implementation existiert, siehe Goebel&Oldenburg 2008) und effektiv ausführbar, denn der Zeitbedarf steigt nur linear mit der Zahl der Objekte solange die Zahl der Relationen für jedes einzelne Objekt beschränkt ist.
Mit einem 3D-DGS, das auf diesem Konstruktionsbegriff aufbaut, kann effektiv gearbeitet werden. Allerdings erfordert es durchaus ein planvolles Vorgehen: Wenn man etwa zwei Punkte erzeugt und *s* als die Strecke zwischen ihnen definiert, dann ist es sinnlos, die Länge von *s* durch eine Relation an *s* zu spezifizieren, denn man würde dann nichterfüllbare Relationen postulieren: Die Lage von *s* ist nämlich schon durch die Endpunkte eindeutig gegeben. Stattdessen könnte man eine Abstandsbedingung an die beiden Punkte stellen. Im nahe liegenden mentalen Modell ist aber die Strecke Träger Abstandseigenschaft, nicht das Punktepaar, d.h. dass dieser Konstruktionsbegriff zumindest in dieser Hinsicht nicht intuitiv ist.

Konstruktion als Reihenfolge von Relationen

Es erscheint natürlich, dass Konstruktionen im Wesentlichen vorgeben, in welcher Reihenfolge die Objekte konstruiert werden. Die algebraische Modellierung zeigt aber schon, dass das nicht denknotwendig ist, und in der

Tat könnte man sogar den Standpunkt vertreten, bei Konstruktionen sollten nicht die Objekte eine Konstruktionsreihenfolge haben, sondern die Relationen eine Erfüllungsreihenfolge. Wenn man reale Konstruktionen mit einem Baukasten durchführt, dann existieren alle verfügbaren Objekte von Anfang an, sie liegen ungeordnet im Kasten. Indem man zwei Objekte fasst und zusammensteckt stellt man eine Relation zwischen ihnen her. Jeder Bauschritt bestimmt also eine neue Relation von Objekten die schon vorher ungeordnet existierten.

Erste Experimente zeigen, dass sich ein solcher Konstruktionsbegriff nur mit großen Schwierigkeiten realisieren lässt. Der Prototyp (noch?) zeigt viele Artefakte, die das Bilden eines M²CM erschweren. Ein zentrales Problem ist zu entscheiden, welche Variablen (Freiheitsgrade) benutzt werden, um eine Relation zu erfüllen. Wenn etwa ein Punkt auf eine Kugel gesetzt wird, reduziert das die Wahl seiner Freiheitsgrade von drei auf zwei. Wenn der Punt in kartesischen Koordinaten beschreiben wird, muss man ggf. alle drei Koordinaten setzen, um die Relation zu erfüllen.

Trotz dieser technischen Schwierigkeiten könnte dieser Zugang ein großes didaktisches Potential haben, weil er eine Re-Prozessierung in natürlichen Teilprozessen ermöglicht.

Fazit

Die Wahl der zugelassenen elementaren Konstruktionsschritte war schon immer ein Thema der Didaktik (Diskussion ums Geodreieck). In der Raumgeometrie sind die Möglichkeiten noch vielfältiger. Die Frage, welche M²CM Lernende bilden, ist ebenso offen wie die stoffdidaktische Frage, welcher Konstruktionsbegriff logisch konsistent, technisch realisierbar und kognitiv herausfordernd ist. Der Beitrag sollte aufzeigen, wie vielfältig und unerschlossen dieses Forschungsgebiet ist.

Literatur

Dutke, St. (1994). *Mentale Modelle: Konstrukte des Wissens und Verstehens. Kognitionspsychologische Grundlagen für die Software-Ergonomie*. Göttingen: Verl. für Angewandte Psychologie.

Goebel, A., Oldenburg, R. (2008). *Konstruktionsbegriffe für die 3D-Raumgeoetrie*. Tagungsband des AK Mathematikunterricht und Informatik.

Weigend, M. (2007). *Intuitive Modelle der Informatik*. Potsdam: Universitätsverlag.