

Norbert RÖDER, Berlin

Das Vierfarbenspiel – Endliche Geometrie spielerisch erfahren

Es wird ein Spiel bestehend aus 15 Farbscheiben vorgestellt, bei dem verschiedene Aufgaben zu lösen sind, welche die Eigenschaften einer wohlbekannten Struktur der endlichen Geometrie widerspiegeln. Dabei sind keinerlei Kenntnisse des mathematischen Hintergrunds notwendig.

1. Der projektive dreidimensionale Raum der Ordnung 2.

Die 15 vom Nullvektor verschiedenen Vektoren des vierdimensionalen Vektorraums über dem Körper \mathbb{Z}_2 können als „Punkte“ eines (dreidimensionalen) projektiven Raumes aufgefasst werden. Dieser Raum enthält 35 „Geraden“ mit je drei Punkten, sowie 15 „Flächen“ mit je sieben Punkten und sieben Geraden, wobei „Punkte“ die eindimensionalen, „Geraden“ die zweidimensionalen und „Flächen“ die dreidimensionalen Unterräume des zugrundeliegenden vierdimensionalen Vektorraums sind.

2 Farbscheiben als Darstellung der Punkte des projektiven Raumes.

Vier Grundfarben werden den vier Dimensionen des Vektorraumes zugeordnet. Damit kann jedem der 15 Vektoren (und damit jedem Punkt des proj. Raumes) eine Farbscheibe zugeordnet werden, die mit einer eindeutigen Kombination der vier Farben gefärbt ist. Es gibt 4 einfarbige, 6 zweifarbige, 4 dreifarbigescheiben sowie eine vierfarbige Scheibe. Drei Scheiben entsprechen einer „Geraden“, wenn die Farben, die auf diesen drei Scheiben vorkommen, doppelt vertreten sind, also auf zwei der drei Scheiben vorkommen. Wir nennen diese drei Scheiben ein „TRIO“.

3. Spielmöglichkeiten

Es gibt eine überraschend große Anzahl von Aufgaben verschiedenen Schwierigkeitsgrades, die sich aus dieser Konstruktion ergeben.

Z.B. kann man zufällig 7 aus den 15 Scheiben ziehen und mehrere Spieler um die Wette Trios finden lassen, die in den gezogenen Scheiben enthalten sind.

Ferner kann man vorgegebene Strukturen aus mehreren Trios (Ketten, Ringe, Bäume usw.) legen lassen, entweder unter Verwendung aller 15 Scheiben oder (nach Beiseitelegen einer oder mehrerer Scheiben) aus 14 oder weniger Scheiben.

In dem Vortrag werden hauptsächlich die Spielmöglichkeiten vorgestellt, der mathematische Hintergrund wird nur kurz gestreift, da er bekannt und weitgehend trivial ist.

4. Einsatz des Spieles in Schule

Das Spiel ist leicht selbst herzustellen. Man kann den Schülern eine Schablone geben, die sie nach eigenem Geschmack mit 4 Farben ausmalen und schließlich ausschneiden können. Durch Laminieren der ausgemalten Schablone vor dem Ausschneiden erhält man haltbare Farbscheiben. Mit ansprechend gestalteten Arbeitsbögen können Schüler einzeln oder in Kleingruppen das Spiel selbständig spielen. Älteren Schülern könnte man in Arbeitsgemeinschaften oder Vertretungsstunden auch ohne weiteres die mathematischen Hintergründe offenbaren und sie anregen, Lösungsalgorithmen mathematisch zu begründen.