

Bernd WOLLRING, Kassel

Den Zufall festhalten – Spielräume und Dokumente bei Zufallsexperimenten für die Grundschule

Lernumgebungen und Versuchsumgebungen zur Stochastik

Das Curriculum zur Mathematik ist in der Grundschule in der Regel durchzogen von einem „stochastischen Strang“, dessen Aktivitäten Erfahrungen zur Wahrscheinlichkeit und Techniken der beschreibenden Statistik anbahnen sollen. Eine besondere Schwierigkeit bei Experimenten zur Wahrscheinlichkeit besteht darin, die Idee der Normierung in Experimenten und Dokumenten darzustellen, denn formale Instrumente zum Beschreiben von Anteilen stehen nicht zur Verfügung. Vielmehr ist mit geeigneten geometrischen Darstellungen ein präformales Argumentieren mit Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten zu unterstützen.

Stochastische Kompetenzen sind in den Bildungsstandards für die Grundschule festgeschrieben. Sie betreffen im Wesentlichen frequentistische Wahrscheinlichkeit. Frequentistische Wahrscheinlichkeit wird durch Spielen und Experimentieren angeeignet. Es geht darum, das „Zufällige“ im Zufallsexperiment herauszuarbeiten mit der Akzentsetzung, dass zwar keine Einzelversuche wohl aber größere Versuchsserien zunehmend systematisch beschreibbar sind. Wesentlich ist dabei, dass Zufallsexperimente auch tatsächlich als Experimente durchgeführt werden, etwa eingebettet in Spielsituationen (vgl. [1]).

Systematisches Beschreiben der Ergebnisse von Zufallsexperimenten setzt Übersicht voraus. Die Ergebnisse von real durchgeführten Zufallsexperimenten fallen in der Regel zeitlich sequentiell an, daher kommt dem Festhalten in geeigneten Aufzeichnungen eine besondere Bedeutung zu. Wir unterscheiden zum einen den „Spielraum“, zum anderen den „Dokumentationsraum“ (siehe [5]). Der erste beschreibt den Zufallsgenerator und das Handeln damit. Der zweite beschreibt die Art und Weise der Aufzeichnung, die bei geeigneter Form Aussagen über Versuchsserien und den Zufallsgenerator im Ganzen zulässt.

Wir beschreiben ein Experiment zur Aneignung frequentistischer Wahrscheinlichkeitsvorstellungen bei Grundschulkindern und fragen, ob und inwieweit sich daraus Lernumgebungen ableiten lassen. Sein Der Focus besteht darin, den Zufallsgenerator als Ganzes zu betrachten und nicht nur Einzelereignisse und ihre Wahrscheinlichkeiten (siehe [4]).

Das Experiment: Eine Fallstudie zur Rekonstruktion von Würfeln

Gefragt ist, ob und inwieweit Grundschul Kinder imstande sind, die Struktur eines Zufallsgenerators, der in einem zu beschreibenden Sinne „verdeckt“ ist, aus Versuchsergebnissen zu rekonstruieren. Ein Experiment mit dieser Fragestellung nennen wir einen „stochastischen Rekonstruktionsversuch“.

Versuchspersonen sind sieben Kinder eines zweiten Schuljahres. Sie wurden in videodokumentierten klinischen Interviews im Rahmen eines größeren Projektes zur Ermittlung stochastischer Kompetenzen bei Grundschulkindern von einer Studierenden des Lehramtes befragt.

Zufallsgenerator ist ein Kartonwürfel, dessen Seitenflächen als Ergebnisse Rot oder Blau zeigen können. Damit werden Versuchsserien durchgeführt und auf einem Protokollbogen durch nach Farben sortierte farbig ausgefüllte Felder festgehalten. Die Protokollbögen sehen entweder fixierte Längen der Versuchsserien von 4, 8 oder 16 Würfeln vor oder Versuchsserien mit nicht festgelegter Länge. (siehe [3])

Bei den Rekonstruktionsversuchen sind wohl die Ergebnisse der Einzelversuche sichtbar, nicht aber der dazu benutzte Würfel als Ganzes. Dazu wird der Würfel in eine abgedunkelte Dose eingebracht, deren Deckel kleine Sichtfenster aufweist. Die Dose ist so groß, dass der Würfel darin frei fliegen kann, wenn man sie schüttelt. Sie wird mit dem Deckel nach unten gehalten. Durch einen Spiegel auf dem Tisch ist in einem Fenster die Farbe der unteren Fläche des Würfels sichtbar. Sie gilt als gewürfeltes Ergebnis.

Die Versuchsperson klebt nach dem Würfeln rote oder blaue Kärtchen passend auf einen gleich großen schwarzen Würfel, der den rekonstruierten Würfel darstellt. Zum Vergleich führt die Versuchsperson auch mit dem rekonstruierten Würfel eine Versuchsserie durch.

Die Versuchsergebnisse

Die Tabelle beschreibt die Ergebnisse der stochastischen Rekonstruktionsversuche. Die linke Zahl bezeichnet jeweils die Anzahl der roten Flächen auf den Würfeln, die rechte die der blauen. Bei den Versuchsserien bezeichnet die linke Zahl die Häufigkeit des Ergebnisses Rot, die rechte Zahl die des Ergebnisses Blau. Ein „R“ in der Spalte rechts bezeichnet eine zutreffende Rekonstruktion: Der gegebene Würfel und der rekonstruierte stimmen überein.

Die Ergebnisse in der Tabelle und die hier nicht dokumentierten Kommentare im Interview zeigen, dass eine frequentistische Intuition zur Wahrscheinlichkeit besteht, wenn auch überlagert von anderen Vorstellungen.

		Gegebener Würfel	Versuche Geg. Würfel	Reko- Würfel	Versuche Reko-W.	
1	Anke	4 2	5 <u>3</u>	3 <u>3</u>	5 3	D?
2	Florian	4 2	5 4	3 3	2 7	
3	Jan	4 2	5 <u>3</u>	3 <u>3</u>	6 2	D?
4	Nancy	4 2	5 4	4 2	6 3	R
5	Sven	4 2	5 <u>3</u>	3 <u>3</u>	4 4	D?
6	Thomas	4 2	6 2	2 4	1 7	
7	Thomas	4 2	6 <u>2</u>	4 <u>2</u>	4 4	D?, R
8	Vera	4 2	6 <u>2</u>	4 <u>2</u>	5 3	D?, R

Allerdings zeigen die Versuche auch Ergebnisse, die wir auf ungeschicktes Versuchsdesign zurückführen. Die Anzahl der Flächen auf dem Würfel und die Länge der Versuchsserien sind nicht aufeinander abgestimmt. In solchen Fällen neigen die Kinder dazu, eher mit einer „Differenzstrategie“ als mit einer „Verhältnisstrategie“ zu rekonstruieren. Die Differenz-Strategie besteht darin zunächst einen Teil der Versuchsergebnisse in die Anzahl der entsprechenden Würfelflächen zu übertragen. Diese übereinstimmenden Anzahlen sind dort, wo wir diese Strategie vermuten, in der Tabelle unterstrichen und der Versuch in der rechten Spalte mit einem „D?“ gekennzeichnet. Die verbleibenden Flächen des Würfels wurden dann mit der anderen Farbe aufgefüllt.

Der Würfel in der Dose ist ein langsamer Zufallsgenerator: Die Kinder haben keine Versuchsserien länger als acht durchgeführt. Statistisch sind diese Versuchsserien nicht brauchbar. Dennoch haben die Kinder ihm Vertrauen geschenkt und ihre Rekonstruktionen darauf begründet.

Befunde und Schlussfolgerungen

Dieses Experiment ist keine Vorlage für eine Lernumgebung im Unterricht, wohl aber geben die Versuchsergebnisse Hinweise, wie solche Lernumgebungen zu konzipieren sind. Um eine Intuition für das Gesetz der großen Zahlen auszubauen, sind Zufallsversuche geeignet und notwendig. Sie sollten aber bestimmte Bedingungen erfüllen.

Ein für uns unerwarteter Nachteil der verwendeten Würfel besteht zudem darin, dass nicht alle Flächen des Würfels simultan wahrzunehmen sind. Das erschwerte den Kindern ganz offensichtlich das Rekonstruieren.

Das Experiment indiziert andere Zufallsgeneratoren als geeigneter, etwa die später von uns entwickelten „Cassetten-Urnen“. Sie sind schneller, transparent und erlauben ein freies Variieren der Perlenzahlen. Damit sind die Längen der Versuchsserien und die Perlenzahlen so aufeinander abzustimmen, dass Verhältnisstrategien nicht durch Differenzstrategien supprimiert werden.

Ausblick

Zufallsexperimente erzeugen Lernumgebungen, die im klassischen Sinne durch Experimentieren und Entdecken gekennzeichnet sind. Sie lassen sich mit arithmetischen und geometrischen Zielsetzungen verbinden, in Spielsituationen einbauen und sind im besonderen Maße für selbständige Schülerarbeit geeignet. Darüber hinaus gestatten sie das langfristige Anbahnen der experimentellen Erfahrungen, ohne die eine spätere formale Behandlung stochastischer Themen meist arm an Erfolg bleibt (siehe [2]).

Literatur

- [1] Arbeitskreis Stochastik der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik: Empfehlungen zu Zielen und zur Gestaltung des Stochastikunterrichts. Dortmund 2002
- [2] Laura Martignon, Christoph Wassner: Schulung frühen stochastischen Denkens von Kindern. Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 8. Jahrgang, Heft 2/2005, S. 202-222
- [3] Doris Vietmeier: Frequentistische Spielinterviews mit Nachbauversuchen zu Würfeln. Wissenschaftliche Hausarbeit, Universität Münster 1993
- [4] Bernd Wollring: Fallstudien zu frequentistischen Kompetenzen von Grundschulkindern in stochastischen Situationen- Kinder rekonstruieren verdeckte Glücksräder. In: H. Maier, J. Vogt (Hrsg.): Verstehen und Verständigung. IDM-Reihe Untersuchungen zum Mathematikunterricht, Band 19, Köln 1994, S.144-181
- [5] Bernd Wollring: Zur Kennzeichnung von Lernumgebungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule. Erscheint in der Schriftenreihe der Arbeitsgruppe „Empirische Bildungsforschung“ an der Universität Kassel