

Peter BARDY, Halle

Fragen, Vermutungen, Behauptungen und Beweise leistungsstarker Grundschulkinder zu den Problemfeldern „Primzahlen“ und „Summenzahlen“

1. Vorbemerkungen

In diesem Beitrag zeige ich anhand von zwei Beispielen auf, wie mathematisch begabte Grundschulkinder, ausgehend von vorgegebenen Aufgabenstellungen, umfangreiche Problemfelder (hier „Primzahlen“ und „Summenzahlen“) sich weitgehend selbstständig erschließen können. Dieses Konzept beruht darauf, „Forschungssituationen im elementarmathematischen Bereich zu simulieren“ ([3], S. 130).

Bei dem folgenden Erfahrungsbericht stütze ich mich auf Erlebnisse in vier Kinderakademien und einer „Auswertungsveranstaltung“ eines Mathematischen Korrespondenzzirkels (Problemfeld „Primzahlen“) bzw. auf Erlebnisse in drei Kinderakademien (Problemfeld „Summenzahlen“). In beiden Fällen war der Ausgangspunkt eine Aufgabe, die – nach Einzel- bzw. Partnerarbeit – in der gesamten Fördergruppe besprochen wurde.

Ein kurzer Theorieteil schloss sich an, in dem entweder ein spezielles Verfahren thematisiert (hier „Sieb des Eratosthenes“) oder eine Definition (hier „Summenzahl“) erarbeitet wurde (unter Einschluss von Beispielen und Gegenbeispielen). Dann sollten die Kinder zu den jeweiligen Themen selbst Fragen formulieren. Diese wurden an die Tafel geschrieben (einschließlich des Namens des Kindes, welches die jeweilige Frage gestellt hatte). Nachdem keine Fragen mehr auftauchten, wurden diejenigen Fragen ausgesondert, die von den Kindern sehr schnell beantwortet werden konnten, bzw. solche, deren Beantwortung für die Kinder aus meiner Sicht zu schwierig oder gar nicht möglich war. Die anderen Fragen wurden besonders gekennzeichnet. Nun bildeten die Kinder nach eigener Wahl Arbeitsgruppen („Forschergruppen“), die die Bearbeitung spezieller Fragen in Angriff nahmen.

2. Das Problemfeld „Primzahlen“

Nachdem der Begriff „Primzahl“ geklärt war und auch Beispiele und Gegenbeispiele genannt worden waren, wurde folgende Aufgabe als Ausgangspunkt genommen:

- a) Wie viele Primzahlen liegen zwischen 10 und 20?
- b) Wie viele Primzahlen liegen zwischen 20 und 30?
- c) Wie viele Primzahlen können zwischen zwei aufeinander folgenden Zehnerzahlen immer nur höchstens liegen? ([2], S. 37)

Die Fragen a) und b) wurden sehr schnell beantwortet, und auch Begründungen zur richtigen Lösung 4 bei c) ließen nicht lange auf sich warten.

Dann kamen schon Fragen der Kinder, z. B. von Lea: Wie viele Primzahlen gibt es bis 100?

Dies war für mich Anlass, das Sieb des Eratosthenes vorzustellen, und zwar wegen der bereits aus der Ausgangsaufgabe gewonnenen Erkenntnisse in verkürzter Form.

Nun wurden die Fragen der Kinder gesammelt. Es folgt eine inhaltlich geordnete Auswahl der Kinderfragen. Zu den Fragen sind jeweils die Namen der Fragesteller notiert.

- Kann es sein, dass zwischen zwei aufeinander folgenden Zehnerzahlen keine Primzahl liegt? (Mandy)
- Wie viele Primzahlen können zwischen zwei Zehnerzahlen höchstens liegen, deren Differenz 30 ist? (Johanna)
- Kann es sein, dass zwischen zwei aufeinander folgenden Hunderterzahlen mehr als 20 Primzahlen liegen? (Fabienne)
- Welche Zahl ist die 50. Primzahl? (Simon)
- Wie viele Primzahlen gibt es von 1 bis 1000? (Peter)
- Gibt es mehr als 200 Primzahlen? (Tom und Dennis)
- Welche Zahl ist die kleinste Primzahl größer als 1000? (Jan Niklas)
- Gibt es eine Primzahl, die größer als 1 000 000 ist? (Stephanie)
- Wie viele Primzahlen liegen zwischen 1 000 000 und 1 000 000 000? (Marvin)
- Wie viele Primzahlen gibt es? (Kevin)
- Wie viele Primzahlen mit der Endziffer 7 gibt es? (Samir)
- Wie lautet die größte (derzeit bekannte) Primzahl? (Galan)
- Wie viele Primzahlzwillinge gibt es? (Karsten)
- Gibt es Primzahltrillinge oder Primzahlvierlinge? (Thomas)
- Wie viele Primzahlzwillinge gibt es mit Primzahlen, die kleiner als 100 sind? (Anne-Sophie)
- Gibt es von einer Hunderterzahl zur nächsten immer weniger Primzahlen? (Malik)
- In welchen Abständen treten die Primzahlen auf? (Anne-Sophie)
- Wie groß ist der größte Zwischenraum zwischen zwei Primzahlen? (Anna)
- Gibt es ein Muster, das alle Nicht-Primzahlen bis 100 erfasst? (Anne-Sophie)
- Gibt es eine Regel, mit der man Primzahlen finden kann? (Galan)
- Ist die Differenz von zwei Primzahlen immer auch eine Primzahl? (Anne-Sophie)
- Kann die Summe von zwei Nicht-Primzahlen eine Primzahl sein? (Tabea)
- Wie lautet die Primfaktorzerlegung von 1268? (Tabea)

3. Das Problemfeld „Summenzahlen“

Startaufgabe:

Begründe durch Zusammenfassen von jeweils zwei Summanden, dass

$$55+56+57+\dots+69+\dots+81+82+83=2001 \text{ und}$$

$$6+7+8+\dots+34+35+\dots+61+62+63=2001 \text{ gilt.}$$

Es gibt weitere fünf Summen aufeinander folgender natürlicher Zahlen, die alle die Zahl 2001 darstellen. Finde vier davon. ([2], S. 23)

Definition: Eine Zahl heißt *Summenzahl* genau dann, wenn sie als Summe aufeinander folgender natürlicher Zahlen geschrieben werden kann.

Beispiele: $3 = 1 + 2$; $5 = 2 + 3$; $6 = 1 + 2 + 3$;

$$7 = 3 + 4; 9 = 4 + 5 = 2 + 3 + 4$$

Gegenbeispiele: 4; 8

Nach der Beschäftigung mit der Startaufgabe, der Definition für den Begriff „Summenzahl“ sowie Beispielen und Gegenbeispielen hatten die Kinder Gelegenheit, Fragen, Vermutungen und Behauptungen zu formulieren. Hier eine Auswahl:

- Ist 8326 eine Summenzahl? (Tabea)
- Wie viele Summenzahlen gibt es von 1 bis 100? (Galan)
- Welche Zahl ist die größte Summenzahl, die kleiner als 10 000 000 ist? (Tabea)
- Wie viele Summenzahlen gibt es? (Roman) Dazu Vermutung von Samuel: Es gibt unendlich viele Summenzahlen.
- Ist jede Primzahl ab 3 eine Summenzahl? (Anne-Sophie)
- Behauptung: Jede ungerade Zahl ab 3 ist eine Summenzahl. (Hanna)
- Lässt sich keine gerade Zahl als Summenzahl mit zwei Summanden darstellen? (Johannes)
- Vermutung: Bei 1 beginnend, erhält man jeweils durch Verdoppeln (1; 2; 4; 8; 16; 32; 64 usw.) immer Zahlen, die keine Summenzahlen sind. (Maximilian)
- Vermutung: Je höher man in den Zahlenraum geht, desto größer ist die Lücke von einem Gegenbeispiel zum nächsten. (Johannes)
- Vermutung: Unter den Zahlen mit der Endziffer 6 ist jede siebzehnte Zahl eine Summenzahl. (Niklas)
- Ist 500 eine Summenzahl? Wenn ja, wie viele Möglichkeiten gibt es, sie als Summenzahl darzustellen? (Hanna)
- Ist 1 000 930 eine Summenzahl? Und wenn ja, wie viele Möglichkeiten gibt es, sie darzustellen? (Johannes)
- Auf wie viele Weisen lässt sich 1 483 591 als Summenzahl darstellen? (Max)
- Vermutung: Die Anzahl der Darstellungen einer Zahl als Summenzahl ist gleich der Anzahl der ungeraden Teiler ungleich 1 dieser Zahl. (Alexander)

und Anne-Sophie; Vermutung richtig, dieser Satz wurde erst um 1850 formuliert und bewiesen, Satz von Sylvester)

- Wie viele Summenzahlen haben 15 Summanden? (Hanna; dazu Vermutung von Johannes: Davon gibt es unendlich viele.)
- Wie viele Summenzahlen bis 2 000 000 gibt es, die sich sowohl mit 2 als auch mit 3 Summanden schreiben lassen? (Johannes)

(Die Bearbeitungen einzelner Fragen und Vermutungen bzw. die Beweise von Behauptungen durch die Kinder können in [1] nachgelesen werden. Dort ist u.a. auch dargestellt, welches Bild von Mathematik bei der Förderung mathematisch begabter Grundschul Kinder bereits vermittelt werden kann.)

Literatur

- [1] Peter Bardy: Mathematisch begabte Grundschul Kinder – Diagnostik und Förderung. Elsevier/Spektrum Akademischer Verlag. Heidelberg 2007
- [2] Peter Bardy, Joachim Hrzán: Aufgaben für kleine Mathematiker, mit ausführlichen Lösungen und didaktischen Hinweisen. Aulis Verlag Deubner, Köln 2006
- [3] Karl Kießwetter: Können Grundschul Kinder schon im eigentlichen Sinne mathematisch agieren – und was kann man von mathematisch begabten Grundschulern erwarten, und was noch nicht? In: Heinrich Bauersfeld, Karl Kießwetter (Hrsg.): Wie fördert man mathematisch besonders befähigte Kinder? Mildenerger, Offenburg 2006, S. 128-153