Eine Maßformel für hermitesche $\mathbb{Z}G$-Gitter

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades
rerum naturalium

vorgelegt von
Dipl.-Math. Björn Hoffmann

an der
Fakultät für Mathematik
der

technische universität
dortmund

November 2012

Prüfungskommission:

Vorsitzende:	Prof. Dr. J. Wörner
Erster Gutachter:	Prof. Dr. R. Scharlau
Zweiter Gutachter:	Prof. Dr. D. Hoffmann
Zusätzlicher Prüfer:	Prof. Dr. F. Kalhoff
Beisitzer:	Dr. S. Wagner

Tag der mündlichen Prüfung: 28. Januar 2013

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Sei (M, b) ein positiv-definites, quadratisches $\mathbb{Z}$-Gitter mit Determinante $\mathrm{d}(M)$. Nach Minkowski wächst die Anzahl der Isomorphieklassen von quadratischen $\mathbb{Z}$-Gittern (M, b) mit $\mathrm{d}(M) \leq d$ mit höherer Ordnung als die Anzahl von Isomorphieklassen von quadratsichen $\mathbb{Z}$-Gittern (M, b) mit $\mathrm{d}(M) \leq d$, deren Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(M, b)$ nicht trivial ist. In seiner Dissertation [**Bie81**] konnte Jürgen Biermann zeigen, dass dieses richtig bleibt, wenn man sich auf die Isomorphieklassen innerhalb eines Geschlechtes beschränkt. Betrachte dazu das Geschlecht $\mathrm{Gen}(M, b)$ und setze

$$\mathrm{Gen}_0(M, b) := \{[(L, b)] \in \mathrm{Gen}(M, b) : \mathrm{Aut}(L, b) = \{\pm\mathrm{id}\}\}$$

sowie

$$\mathrm{Gen}_1(M, b) := \{[(L, b)] \in \mathrm{Gen}(M, b) : \mathrm{Aut}(L, b) \neq \{\pm\mathrm{id}\}\}.$$

Dann gilt folgendes

Theorem (Biermann). *Für Geschlechter $\mathrm{Gen}(M, b)$ positiv-definiter, quadratischer $\mathbb{Z}$-Gitter in fester Dimension $n \geq 3$ gilt:*

$$\frac{|\mathrm{Gen}_1(M, b)|}{|\mathrm{Gen}(M, b)|} \to 0, \quad \mathrm{d}(M) \to \infty.$$

Wegen $|\mathrm{Gen}(M, b)| = |\mathrm{Gen}_0(M, b)| + |\mathrm{Gen}_1(M, b)|$ erhält man auch

$$\frac{|\mathrm{Gen}_0(M, b)|}{|\mathrm{Gen}(M, b)|} \to 1, \quad \mathrm{d}(M) \to \infty.$$

Demnach haben in fester Dimension und bei großer Diskriminante fast alle Gitter in $\mathrm{Gen}(M, b)$ eine triviale Automorphismengruppe. Siehe dazu auch [**Sch09**], Abschnitt 2.4.

Es scheint plausibel aber nicht trivial, dass dieselbe Aussage gilt, wenn man sich von der festen Dimension löst.

Vermutung. *Für Geschlechter $\mathrm{Gen}(M, b)$ positiv-definiter, quadratischer $\mathbb{Z}$-Gitter in Dimension n gilt:*

$$\frac{|\mathrm{Gen}_1(M, b)|}{|\mathrm{Gen}(M, b)|} \to 0, \quad \max(\mathrm{d}(M), n) \to \infty.$$

Zu dieser Vermutung hat Etsuko Bannai in ihrer Dissertation [**Ban88**] einen ersten Schritt getan. Übernehmen wir die obige Bezeichnung und definieren $\omega_{\mathbb{Z}}(M, b)$ und $\omega_{\mathbb{Z},i}(M, b)$, $i = 0, 1$, als das Maß von $\mathrm{Gen}(M, b)$ beziehungsweise $\mathrm{Gen}_i(M, b)$, $i = 0, 1$, so erhält man das

Theorem (Bannai). *Für Geschlechter* $\mathrm{Gen}(M,b)$ *positiv-definiter, unimodularer, quadratischer* $\mathbb{Z}$*-Gitter in der Dimension* n *gilt:*

$$\frac{\omega_{\mathbb{Z},1}(M,b)}{\omega_{\mathbb{Z}}(M,b)} \leq 2 \cdot \frac{(8\pi)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad n \geq 144,$$

d.h.

$$\frac{\omega_{\mathbb{Z},1}(M,b)}{\omega_{\mathbb{Z}}(M,b)} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Nun ist Bannai's Ausdruck keine Abschätzung an den Quotienten $\frac{|\mathrm{Gen}_1(M,b)|}{|\mathrm{Gen}(M,b)|}$. Um eine solche zu bekommen, sind Schranken zwischen dem Maß und der Klassenzahl eines Geschlechtes von Nöten. Standardabschätzungen an die Ordnungen endlicher Untergruppen der $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, zum Beispiel nach Minskowski, helfen an dieser Stelle nicht weiter, da diese für wachsende Dimension gegen Unendlich tendieren: Es ist

$$|\mathrm{Gen}_1(M,b)| \leq a(n) \cdot \omega_{\mathbb{Z},1}(M,b),$$

wobei $a(n)$, grob gesprochen, wie n^n wächst. Damit ist dann

$$\frac{|\mathrm{Gen}_1(M,b)|}{|\mathrm{Gen}(M,b)|} \leq \frac{a(n) \cdot \omega_{\mathbb{Z},1}(M,b)}{2 \cdot \omega_{\mathbb{Z}}(M,b)} \leq a(n) \cdot \frac{(8\pi)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \to \infty, \quad n \to \infty.$$

Um also die Vermutung (auch nur für den Fall, dass (M,b) unimodular ist) zu zeigen, sind bessere obere Schranken von $|\mathrm{Gen}_1(M,b)|$ von Nöten. Siehe auch [**Sch11**].

Jedes quadratische $\mathbb{Z}$-Gitter in $\mathrm{Gen}_1(M,b)$ besitzt einen (nicht trivialen) Automorphismus von Primzahlordnung; trägt also auf kanonische Art und Weise eine $\mathbb{Z}G$-Modulstruktur und wird zudem zu einen *hermiteschen* $\mathbb{Z}G$*-Gitter*. Wir wollen in dieser Arbeit eine Formel für das Maß des Geschlechtes eines hermiteschen $\mathbb{Z}G$-Gitters herleiten. In der gesamten Arbeit bezeichne G stets die zyklische Gruppe von Primzahlordnung $3 \leq \ell \leq 19$ und alle quadratischen $\mathbb{Z}$-Gitter seien stets positiv-definit. Für einen algebraischen Zahlkörper k bezeichnen wir mit $\mathbb{P}(k)$ die Menge der Primstellen von k.

Im ersten Kapitel werden wir uns mit hermiteschen Gittern über Gruppenringen und Tamagawa-Maßen auf linearen algebraischen Gruppen beschäftigen.
Wir werden im ersten Abschnitt eine Einführung in die Theorie der (hermiteschen) Gitter über Gruppenringen geben, sprich in die Theorie der (orthogonalen,) ganzzahligen Darstellungen von G. Für uns werden nur die Gruppenringe $\mathbb{Z}G$ und $\mathbb{Z}_pG$, $\infty \neq p \in \mathbb{P}(\mathbb{Q})$, interessant sein, sodass wir uns auf diese beschränken. Zu Beginn des Abschnittes studieren wir Zerlegungen eines (hermiteschen) Gitters über den Gruppenringen $\mathbb{Z}_pG$, $\infty \neq p \in \mathbb{P}(\mathbb{Q})$, und über den maximalen Ordnungen $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}[\zeta_\ell]$ und $\mathbb{Z}_\ell \times \mathbb{Z}_\ell[\zeta_\ell]$. Die Proposition 1.1.7 fasst diese Ergebnisse unter anderem zusammen.

Proposition. *Sei* (M,h) *ein hermitesches* $\mathbb{Z}G$*-Gitter auf dem hermiteschen* $\mathbb{Q}G$*-Modul* (V,h)*. Dann haben wir die folgenden Zerlegungen:*

(i) $(V, h) = (V_0, h_0) \oplus (V_1, h_1)$, *wobei* (V_0, h_0) *ein quadratischer* $\mathbb{Q}$- *und* (V_1, h_1) *ein hermitescher* $\mathbb{Q}(\zeta_\ell)$*-Vektorraum ist.*

(ii) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}[\zeta_\ell])(M, h) = (M_0, h_0) \oplus (M_1, h_1)$, *wobei* (M_0, h_0) *ein quadratisches* $\mathbb{Z}$*-Gitter auf* (V_0, h_0) *und* (M_1, h_1) *ein hermitesches* $\mathbb{Z}[\zeta_\ell]$*-Gitter auf* (V_1, h_1).

Im weiteren Verlauf des Abschnittes werden wir neben **Herm**, der Kategorie der hermitesche Gitter über Gruppenringen die natürlich äquivalent zu **RepIntOrth**, der Kategorie der orthogonalen, ganzzahligen Darstellungen, ist, noch eine weitere Kategorie **RepHerm** einführen und studieren. Auch diese ist natürlich äquivalent zu Herm (und damit auch zu RepIntOrth) und wird uns eine bessere Beschreibung der Automorphismengruppe eines hermiteschen $\mathbb{Z}_\ell G$-Gitters liefern, was wir dann bei der Berechnung der Maßformel benutzten werden.

Der zweite Abschnitt beschäftigt sich mit den Adelgruppen linearer algebraischer Gruppen und Tamagawa-Maßen auf solchen. Das Ziel dieses Abschnittes ist, dem Leser eine Einführung in diese Theorie zu geben und am Ende den Begriff des Tamagawa-Maßes und der Tamagawazahl zur Verfügung zu haben.
Zu Beginn des Abschnittes definieren wir den Begriff der **Adelgruppe** einer linearen algebraischen Gruppe und studieren ihre wesentlichen Eigenschaften. Für einen algebraischen Zahlkörper k zeigen wir einen Zusammenhang zwischen linearen algebraischen k-Gruppen $\mathfrak{g}$ und $\mathcal{O}_k$-Gittern auf, was letzten Endes in einer sehr wichtigen Zerlegung der Adelgruppe von $\mathfrak{g}$ in endlich viele Doppelnebenklassen führt, siehe Theorem 1.2.3.
Um das Tamagawa-Maß zu definieren, wiederholen wir für zunächst einige Grundlagen aus der Theorie der Haarschen-Maße auf lokal-kompakten Gruppen. Für einen algebraischen Zahlkörper k und eine halbeinfache, lineare algebraische k-Gruppe $\mathfrak{g}$ nutzen wir Ergebnisse von André Weil aus seinem Buch [**Wei61**] und erhalten zu jeder Primstelle $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(k)$ ein lokales Haarsches-Maß $\mu_\mathfrak{p}$ auf der lokal-kompakten Gruppe $\mathfrak{g}_{k_\mathfrak{p}}$ beziehungsweise $\mathfrak{g}_{\mathcal{O}_{k_\mathfrak{p}}}$. Hierbei bezeichnet $\mathfrak{g}_{k_\mathfrak{p}}$ beziehungsweise $\mathfrak{g}_{\mathcal{O}_{k_\mathfrak{p}}}$ die algebraische Varietät $\mathfrak{g}$ aufgefasst über $k_\mathfrak{p}$ beziehungsweise $\mathcal{O}_{k_\mathfrak{p}}$. Mit diesen definieren wir dann das Tamagawa-Maß auf der Adelgruppe von $\mathfrak{g}$ und damit auch die Tamagawazahl.

Im dritten und letzten Abschnitt des ersten Kapitels wenden wir die Ergebnisse aus Abschnitt 1.2 an und leiten die Minkowski-Siegelsche Maßformel für positiv-definite, quadratische $\mathbb{Z}$-Gitter und die Braunsche Maßformel für total-definite, hermitesche $\mathcal{O}_K$-Gitter, wobei $K : k$ eine quadratische Körpererweiterung und k ein algebraischer Zahlkörper ist, her. Dazu berechnen wir zunächst eine allgemeine Maßformel für lineare algebraische Gruppen in Verbindung mit Gittern und werten diese dann in den oben beschriebenen Situationen aus. Dabei benutzen wir Ergebnisse von Martin Kneser und Ulf Rehmann, siehe [**Kne02**], [**Reh71**].
Schließlich beschreiben wir am Ende dieses Abschnittes noch, wie man mit Ergebnissen von Kichiro Hashimoto und Maurice Mischler, siehe [**HK89**], [**Mis00**], die Braunsche Maßformel

im Falle der imaginär-quadratischen Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\zeta_3) : \mathbb{Q}$ und bestimmten hermiteschen $\mathbb{Z}[\zeta_\ell]$-Gittern auswerten kann.

Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit der Hauptaussage dieser Arbeit, nämlich der Maßformel für hermitesche $\mathbb{Z}G$-Gitter. Die wesentliche Idee der Herleitung ist ein hermitesches $\mathbb{Z}G$-Gitter (M, h) auf einem hermiteschen $\mathbb{Q}G$-Modul (V, h) über der maximalen Ordnung $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}[\zeta_\ell]$ aufzufassen und zu *messen* wie diese sich lokal unterscheiden.
Der erste Abschnitt dieses Kapitels beschäftigt sich mit der Adelgruppe der Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(V, h)$, bezeichnet mit $\mathrm{Aut}(V, h)_{\mathbb{A}}$. Eine einfache aber fundamentale Aussage ist die

Proposition.

$$\mathrm{Aut}(V, h)_{\mathbb{A}} = \mathrm{Aut}(V_0, h_0)_{\mathbb{A}} \times \mathrm{Aut}(V_1, h_1)_{\mathbb{A}}$$

Wir studieren weitere Eigenschaften dieser Adelgruppe und sehen, dass diese auf dem Geschlecht von (M, h) transitiv operiert.
Im zweiten Abschnitt leiten wir das Tamagawa-Maß auf der Adelgruppe $\mathrm{Aut}(V, h)_{\mathbb{A}}$ her. Wir benutzen die Tamagawa-Maße auf $\mathrm{Aut}(V_0, h_0)_{\mathbb{A}}$ und $\mathrm{Aut}(V_1, h_1)_{\mathbb{A}}$, um eines auf $\mathrm{Aut}(V, h)_{\mathbb{A}}$ zu erhalten. Damit leiten wir einen Zusammenhang zwischen $\omega_{\mathbb{Z}G}(M, h)$, dem Maß des Geschlechtes von (M, h), und dem Tamagawa-Maß des Stabilisators von M bezüglich der Operation von $\mathrm{Aut}(V, h)_{\mathbb{A}}$ auf dem Geschlecht von (M, h) her. Die Auswertung des Tamagawa-Maßes resultiert dann in folgendem

Theorem. *Sei (M, h) ein hermitesches $\mathbb{Z}G$-Gitter auf einem hermiteschen $\mathbb{Q}G$-Modul (V, h). Dann ist*

$$\omega_{\mathbb{Z}G}(M, h) = \gamma \omega_{\mathbb{Z}}(M_0, h_0) \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_\ell]}(M_1, h_1).$$

Hierbei ist γ ein Korrekturindex, der dadurch entsteht, dass der Gruppenring $\mathbb{Z}_\ell G$ keine maximale $\mathbb{Z}_\ell$-Ordnung in $\mathbb{Q}_\ell G$ ist. Die Berechnung von γ ist die Hauptaufgabe des restlichen Abschnittes.
Wir betrachten die Zerlegung $(M_{0,\ell}, h_{0,\ell}) \oplus (M_{1,1-\zeta_\ell}, h_{1,1-\zeta_\ell})$ des an ℓ lokalisierten hermiteschen $\mathbb{Z}G$-Gitters (M, h), bezeichnet mit (M_ℓ, h_ℓ), über der maximalen $\mathbb{Z}_\ell$-Ordnung $\mathbb{Z}_\ell \times \mathbb{Z}_\ell[\zeta_\ell]$ und schreiben

$$W_0 := M_{0,\ell}/\ell M_{0,\ell},\ b_0 := h_{0,\ell} \mod \ell\mathbb{Z}_\ell,$$

$$W_1 := M_{1,1-\zeta_\ell}/(1-\zeta_\ell)M_{1,1-\zeta_\ell},\ b_1 := h_{1,1-\zeta_\ell} \mod (1-\zeta_\ell)\mathbb{Z}_\ell[\zeta_\ell].$$

Für $i = 0, 1$ definiere dann $W_i' := W_i/W_i^\perp$ und bezeichne mit b_i' die von b_i auf W_i' induzierte unimodulare Form über $\mathbb{F}_\ell$. Es stellt sich dann heraus, dass, falls (M_ℓ, h_ℓ) unimodular ist, die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(M_\ell, h_\ell)$ ein pullback der Gruppen $\mathrm{Aut}(W_0', b_0')$, $\mathrm{Aut}(M_{0,\ell}, h_{0,\ell})$

und $\mathrm{Aut}(M_{1,1-\zeta_\ell}, h_{1,1-\zeta_\ell})$ ist, d.h.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Aut}(W_1', b_1') & \mathrm{Aut}(M_{0,\ell}, h_{0,\ell}) \arrow[l, "\pi_0"'] \\
\mathrm{Aut}(M_{1,1-\zeta_\ell}, h_{1,1-\zeta_\ell}) \arrow[u, "\pi_1"] & \mathrm{Aut}(M_\ell, h_\ell) \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

und zudem sind die Homomorphismen π_0 und π_1 surjektiv. Insgesamt erhält man folgendes

Theorem (Maßformel). *Sei (M, h) ein hermitesches $\mathbb{Z}G$-Gitter, sodass (M_ℓ, h_ℓ) unimodular ist. Dann ist*

$$\omega_{\mathbb{Z}G}(M, h) = |\mathrm{Aut}(W_0', b_0')|\, \omega_{\mathbb{Z}}(M_0, h_0)\omega_{\mathbb{Z}[\zeta_\ell]}(M_1, h_1).$$

Im drittem Kapitel dieser Arbeit berechnen wir die Geschlechter unimodularer, hermitescher $\mathbb{Z}G$-Gitter für $\ell = 3$. Wir beschreiben zu Beginn des Kapitels einen Algorithmus, um alle theoretisch möglichen Isomorphieklassen eines Geschlechtes zu finden. Mit der Maßformel aus Kapitel 2 können wir dann entscheiden, welche dieser Isomorphieklassen wirklich in einem Geschlecht liegen. Es stellt sich heraus, dass in allen Fällen, in denen die zugrundeliegenden quadratischen $\mathbb{Z}$-Gitter im selben Geschlecht liegen, bereits die $\mathbb{Z}G$-Modulstruktur ein hinreichendes Kriterium für die Verwandtheit zweier unimodularer, hermitescher $\mathbb{Z}G$-Gitter liefert.

Mit der Maßformel für hermitesche Gitter über Gruppenringen haben wir ein Instrument gefunden um möglicherweise bessere Abschätzungen der oben beschriebenen Quotienten $\frac{|\mathrm{Gen}_1(M,b)|}{|\mathrm{Gen}(M,b)|}$ zu erhalten. Einen anderen Nutzen einer solchen Formel haben wir bereits in Kapitel 3 aufgezeigt und zwar, um eine gegebene Liste von Isomorphieklassen auf Vollständigkeit zu überprüfen. Im Falle eines quadratischen $\mathbb{Z}$-Gitters haben wir mit der Kneserschen Nachbarmethode eine Möglichkeit Isomorphieklassen eines Geschlechtes zu konstruieren und mit der Minkowski-Siegelschen Maßformel ein Abbruchkriterium für dieses Verfahren. Unter der Annahme, dass eine solche Nachbarmethode auch für hermitesche $\mathbb{Z}G$-Gitter beweisebar ist, erhalten wir mit unserer Maßformel ebenfalls ein solches Abbruchkriterium.

Ich möchte mich an dieser Stelle bei Prof. Dr. Rudolf Scharlau für die interessante Themenstellung und die Betreuung dieses Projektes bedanken. Meinen Kollegen Stefan Höppner, Michael Jürgens und Timo Rosnau danke ich für die hilfreichen Diskussionen, die wir häufig geführt haben. Spezieller dank geht an Stefan Höppner und Michael Jürgens für die Bereitstellung der von ihnen entworfenen Magma-Skripte.

Nicht fehlen darf an dieser Stelle der Dank an meine Frau Imke, die stets zu mir hält, mich motiviert und mir insbesondere seit der Geburt unseres Sohnes immer den Rücken freigehalten hat. Auch meinen Eltern möchte ich für ihre jahrelange Unterstützung danken.

KAPITEL 1

Hermitesche Gitter über Gruppenringen und Tamagawa-Maße linearer algebraischer Gruppen

Wir geben in diesem Kapitel eine Einführung in die Theorie der hermiteschen Gitter über Gruppenringen und der Tamagawa-Maße auf linearen algebraischen Gruppen.
Der erste Abschnitt beschäftigt sich zunächst mit Gittern über Gruppenringen und später versehen wir diese mit einer hermiteschen Form. Zu Beginn formulieren wir ein Theorem von Diederichsen und Reiner, das eine Charakterisierung von $\mathrm{Latt}(\mathbb{Z}G)$, der Kategorie der $\mathbb{Z}G$-Gitter, liefert. Es folgen Klassifikationen von Gittern über lokalisierten Gruppenringen. Nachdem wir die Gitter mit hermiteschen Formen versehen haben, untersuchen wir ihre Kategorie $\mathrm{Herm}(\mathbb{Z}G)$. Dazu führen wir zwei weitere Kategorien $\mathrm{RepHerm}(\mathbb{Z}G)$ und $\mathrm{RepIntOrth}(G)$ ein. Erstere werden wir in diesem Kapitel nur oberflächlich diskutieren, da ihr wesentlicher Nutzen in Kapitel 2, Abschnitt 2.2 zum Tragen kommt. Die Kategorie $\mathrm{RepIntOrth}(G)$ benutzen wir im Wesentlichen für das praktische Arbeiten mit hermiteschen Gittern über Gruppenringen. Wir charakterisieren den Isomorphiebegriff, die Automorphismengruppen und die Unimodularität in Dieser und benutzen dieses in Kapitel 3 für Anwendungen.
Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels beschäftigen wir uns mit Tamagawa-Maßen auf linearen algebraischen Gruppen über Zahlkörpern. Wir definieren die adelische Gruppe einer linearen algebraischen Gruppe und führen das Tamagawa-Maß auf dieser ein. Damit leiten wir eine allgemeine Maßformel für das Maß einer linearen algebraischen Gruppe in Verbindung mit Gittern her.
Der dritte Abschnitt zeigt zwei Anwendungen der allgemeinen Maßformel aus Abschnitt 1.2 in Form der Minkowski-Siegelschen Maßformel für positiv-definite, quadratische $\mathbb{Z}$-Gitter und der Braunschen Maßformel für totaldefinite, hermitesche Gitter über Ganzheitsringen von CM-Körpern.

1.1. Hermitesche Gitter über Gruppenringen

Wir geben in diesem Abschnitt eine Einführung in die Theorie der endlich erzeugten Moduln über dem Gruppenring RG beziehungsweise der Gruppenalgebra KG. Hierbei sei stets $K = \mathbb{Q}$ oder $K = \mathbb{Q}_p$ für $p \in \mathbb{P}(\mathbb{Q})$ sowie R ($p \neq \infty$) der Ring der ganzen Zahlen von K. Wir bezeichnen die Kategorie der endlich erzeugten RG-Moduln mit $\mathrm{mod}(RG)$. Die Morphismen darin sind die RG-linearen Abbildungen zwischen RG-Moduln. Mit $\mathrm{Latt}(RG)$ bezeichnen wir die volle Unterkategorie der RG-Moduln deren zugrundeliegender R-Modul torsionsfrei (d.h. ein R-Gitter) ist und nennen ihre Objekte RG-**Gitter**.

Beginnen wollen wir diesen Abschnitt mit einigen Fakten zur Gruppenalgebra KG und dem Gruppenring RG. Diese sind wohlbekannt und in der einschlägigen Literatur nachzulesen. Wir betrachten eine endliche Gruppe G, also folgt mit dem Satz von Maschke, dass die Gruppenalgebra KG eine endlich-dimensonale, halbeinfache K-Algebra ist und wir die folgende Zerlegung in einfache Unteralgebren haben:

$$\mathbb{Q}G = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}(\zeta_\ell), \quad \mathbb{Q}_pG = \mathbb{Q}_p \times \prod_{\mathfrak{p}\in\mathbb{P}(\mathbb{Q}(\zeta_\ell)),\mathfrak{p}|p} \mathbb{Q}(\zeta_\ell)_\mathfrak{p}$$

Des Weiteren besitzt KG genau eine maximale R-Ordnung Γ. Für $K = \mathbb{Q}_p$, $p \neq \ell$, ist diese bereits der Gruppenring RG und es gilt

$$\Gamma = RG = \mathbb{Z}_p \times \prod_{\mathfrak{p}\in\mathbb{P}(\mathbb{Q}(\zeta_\ell)),\mathfrak{p}|p} \mathbb{Z}[\zeta_\ell]_\mathfrak{p}.$$

Für $K = \mathbb{Q}$ oder $K = \mathbb{Q}_\ell$ ist der Gruppenring RG nicht maximal, sondern $\Gamma = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}[\zeta_\ell]$ beziehungsweise $\Gamma = \mathbb{Z}_\ell \times \mathbb{Z}[\zeta_\ell]_{1-\zeta_\ell} \simeq \mathbb{Z}_\ell \times \mathbb{Z}_\ell[\zeta_\ell]$ ist die maximale R-Ordnung in KG und man kann RG vermöge der Zuordnung $g \mapsto (1, \zeta_\ell)$ in Γ einbetten. In RG finden wir ein Γ-Ideal $I = (\ell, 1 - \zeta_\ell)$, den sogenannten **Führer**. Es ist

$$RG/I \simeq \mathbb{F}_\ell \to \Gamma/I \simeq \mathbb{F}_\ell \times \mathbb{F}_\ell$$

diagonal eingebettet.

Für Gitter über Gruppenringen sind Klassifikationen bekannt. Für den nicht lokalen Fall wurde zuerst von Diederichsen und Reiner eine Klassifikation der $\mathbb{Z}G$-Gitter gegeben, welche zum Beispiel in Kapitel 11, Abschnitt 74 (Theorem 74.3) von [**CR62**] zu finden ist.

Theorem 1.1.1 (Diederichsen, Reiner). *Sei $M \in \mathrm{Latt}(\mathbb{Z}G)$. Dann ist*

$$M = M_{(0)} \oplus M_{(1)} \oplus M_{(2)}$$

als $\mathbb{Z}G$-Modul, wobei $M_{(0)}$ ein freies $\mathbb{Z}$-, $M_{(1)}$ ein freies $\mathbb{Z}[\zeta_\ell]$- und $M_{(2)}$ ein freies $\mathbb{Z}G$-Gitter ist. Die Zerlegung von M ist bis auf Isomorphie eindeutig, d.h. ist

$$M = M'_{(0)} \oplus M'_{(1)} \oplus M'_{(2)}$$

eine weitere, so ist $M_{(0)} \simeq M'_{(0)}$, $M_{(1)} \simeq M'_{(1)}$ und $M_{(2)} \simeq M'_{(2)}$ als $\mathbb{Z}G$-Moduln.

Bemerkung. Für beliebige Gruppen G (zum Beispiel zyklisch und endlich von beliebiger Primzahlordnung) ist das Krull-Schmidt Theorem für $\mathbb{Z}G$-Gitter im Allgemeinen falsch. Betrachtet man $\ell = 23$, so ist $\mathbb{Z}[\zeta_{23}]$ kein Hauptidealring mehr und Gitter über diesem Ring sind im Allgemeinen nicht mehr frei, sodass die Unzerlegbaren direkten Summanden von $M_{(1)}$ nicht mehr, bis auf Isomorphie, eindeutig bestimmt sind. Da wir jedoch die generelle Annahme gemacht haben, dass $\ell \leq 19$ stellen wir sicher, dass der Ring $\mathbb{Z}[\zeta_\ell]$ ein Hauptidealring ist (siehe dazu zum Beispiel [**Was97**], Kapitel 11, Theorem 11.1). In dieser Situation ist die Klassifikation von Diederichsen und Reiner ein Krull-Schmidt Theorem.

Irving Reiner zeigt in seiner Arbeit [**Rei61**], Theorem 1, dass das *Krull-Schmidt Theorem* für Gruppenringe über $\mathbb{Z}_p$ gilt. Für eine vollständige Klassifikation der Objekte der Kategorie $\mathrm{Latt}(\mathbb{Z}_pG)$ genügt es also die unzerlegbaren $\mathbb{Z}_pG$-Gitter zu bestimmen. Für $p \neq \ell$ ist $\mathbb{Z}_pG$ als maximale $\mathbb{Z}_p$-Ordnung in $\mathbb{Q}_pG$ erblich. Dann sind alle $\mathbb{Z}_pG$-Gitter projektiv und es genügt die projektiv Unzerlegbaren zu bestimmen, die jedoch genau einer vollständigen Menge primitiver, orthogonaler Idempotente von $\mathbb{Z}_pG$ entsprechen. Den Fall $p = \ell$ fasst die folgende Proposition zusammen, die bei [**HR62**], Theorem (2.6), zu finden ist.

PROPOSITION 1.1.2. *Die unzerlegbaren $\mathbb{Z}_\ell G$ Gitter der Kategorie* $\mathrm{Latt}(\mathbb{Z}_\ell G)$ *sind bis auf Isomorphie*

$$\mathbb{Z}_\ell, \quad \mathbb{Z}_\ell[\zeta_\ell] \text{ und } \mathbb{Z}_\ell G.$$

BEMERKUNG. Wegen Proposition 1.1.2 gilt Theorem 1.1.1 in analoger Weise auch für Gitter in $\mathrm{Latt}(\mathbb{Z}_\ell G)$.

Wir bezeichnen die Zerlegung eines $\mathbb{Z}G$-Gitters M gemäß Theorem 1.1.1 als **Reiner-Zerlegung**. Die Ränge m_i der direkten Summanden $M_{(i)}$, $i = 0, 1, 2$, sind durch die Isomorphieklasse von M eindeutig bestimmt und umgekehrt. Demnach ordnen wir dem $\mathbb{Z}G$-Gitter M den **Dimensionsvektor** $\mathbf{dim}(M) := (m_0, m_1, m_2)$ zu, der die $\mathbb{Z}G$-Modulstruktur vollständig beschreibt.

Für ein $\mathbb{Z}G$-Gitter M erhalten wir durch tensorieren mit $\mathbb{Q}$ einen $\mathbb{Q}G$-Modul V auf dem M liegt. Ist $p \in \mathbb{P}(\mathbb{Q})$ eine Primstelle, so setzen wir $V_p := \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}G} V$ und betten V vermöge der Zuordnung $v \mapsto 1 \otimes v$ in V_p ein. Sei weiter $M_p := \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}G} M$, für eine endliche Primstelle $p \in \mathbb{P}(\mathbb{Q})$. Dann ist M_p ein $\mathbb{Z}_pG$-Gitter auf dem $\mathbb{Q}_pG$-Modul V_p. Der Einfachheit halber vereinbaren wir noch, dass $M_\infty := V_\infty$ ist.

Die folgenden Propositionen behandeln unter anderem das Zerlegungsverhalten der $\mathbb{Z}_pG$-Gitter M_p beziehungsweise $\mathbb{Q}_pG$-Moduln V_p. Dazu setzen wir zunächst eine endliche Primstelle $\ell \neq p \in \mathbb{P}(\mathbb{Q})$ zu Primstellen $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(\mathbb{Q}(\zeta_\ell + \zeta_\ell^{-1}))$ fort. Diese sind entweder unzerlegt in $\mathbb{Q}(\zeta_\ell)$, d.h. es gibt eine eindeutige Fortsetzung $\hat{\mathfrak{p}}$ nach $\mathbb{Q}(\zeta_\ell)$, oder zerlegt in $\mathbb{Q}(\zeta_\ell)$, d.h. zu $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(\mathbb{Q}(\zeta_\ell + \zeta_\ell^{-1}))$ gibt es zwei Fortsetzungen $\hat{\mathfrak{p}}_1$ und $\hat{\mathfrak{p}}_2$. Dieses liefert dann

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\zeta_\ell) &= \prod_{\hat{\mathfrak{p}} \in \mathbb{P}(\mathbb{Q}(\zeta_\ell)),\ \hat{\mathfrak{p}} \mid p} \mathbb{Q}(\zeta_\ell)_{\hat{\mathfrak{p}}} = \prod_{\hat{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p} \mid p} \underbrace{\mathbb{Q}(\zeta_\ell)_{\hat{\mathfrak{p}}}}_{\simeq \mathbb{Q}(\zeta_\ell)_{\mathfrak{p}}} \times \prod_{\hat{\mathfrak{p}}_1,\ \hat{\mathfrak{p}}_2 \mid \mathfrak{p} \mid p} \underbrace{\mathbb{Q}(\zeta_\ell)_{\hat{\mathfrak{p}}_1} \times \mathbb{Q}(\zeta_\ell)_{\hat{\mathfrak{p}}_2}}_{\simeq \mathbb{Q}(\zeta_\ell)_{\mathfrak{p}}} \\ &= \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(\mathbb{Q}(\zeta_\ell + \zeta_\ell^{-1})),\ \mathfrak{p} \mid p} \mathbb{Q}(\zeta_\ell)_{\mathfrak{p}}.\end{aligned}$$

Analog sieht man

$$\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta_\ell] = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(\mathbb{Q}(\zeta_\ell + \zeta_\ell^{-1})),\ \mathfrak{p} \mid p} \mathbb{Z}[\zeta_\ell]_{\mathfrak{p}}.$$

Wir bemerken an dieser Stelle, dass $\mathbb{Q}(\zeta_\ell)_{\mathfrak{p}}$ und $\mathbb{Z}[\zeta_\ell]_{\mathfrak{p}}$, für $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(\mathbb{Q}(\zeta_\ell + \zeta_\ell^{-1}))$, nicht notwendigerweise einfach sind.

PROPOSITION 1.1.3. *Sei* $M \in \mathrm{Latt}(\mathbb{Z}G)$.

(i) *Die Zerlegung* $\mathbb{Q}G = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}(\zeta_\ell)$ *induziert eine Zerlegung des* $\mathbb{Q}G$*-Modul* V *in*

$$V = V_0 \oplus V_1,$$

wobei V_0 *ein* $\mathbb{Q}$*- und* V_1 *ein* $\mathbb{Q}(\zeta_\ell)$*-Vektorraum ist.*

(ii) *Für jede endliche Primstellen* $p \in \mathbb{P}(\mathbb{Q})$ *induziert die Zerlegung*

$$\mathbb{Q}_pG = \mathbb{Q}_p \times \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(\mathbb{Q}(\zeta_\ell + \zeta_\ell^{-1})),\ \mathfrak{p}|p} \mathbb{Q}(\zeta_\ell)_\mathfrak{p}$$

eine des $\mathbb{Q}_pG$*-Moduls* V_p *in*

$$V_p = V_{0,p} \oplus \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(\mathbb{Q}(\zeta_\ell + \zeta_\ell^{-1})),\ \mathfrak{p}|p} V_{1,\mathfrak{p}},$$

wobei $V_{0,p}$ *der* $\mathbb{Q}_p$*- und* $V_{1,\mathfrak{p}}$ *der* $\mathbb{Q}(\zeta_\ell)_\mathfrak{p}$*-Vektorraum ist, der aus* V_0 *durch Lokalisierung an* p *beziehungsweise aus* V_1 *durch Lokalisierung an* $\mathfrak{p}$ *entsteht.*

(iii) *Die Zerlegung*

$$\mathbb{R}G = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$$

induziert eine des $\mathbb{R}G$*-Moduls* V_∞ *in*

$$V_\infty = V_{0,\infty} \oplus V_{1,\infty},$$

wobei $V_{0,\infty}$ *der* $\mathbb{R}$*- und* $V_{1,\infty}$ *der* $\mathbb{C}$*-Vektorraum ist, der aus* V_0 *beziehungsweise aus* V_1 *entsteht.*

BEWEIS. Die Herleitung der Modulzerlegungen funktioniert in allen drei Teilen auf die gleiche Weise. Wir schildern deswegen nur (i).
Setze $V_0 := (\mathbb{Q} \times \{0\})V$ und $V_1 := (\{0\} \times \mathbb{Q}(\zeta_\ell))V$. Dann liefert dies eine Modulzerlegung

$$V = (\mathbb{Q} \times \{0\})V \oplus (\{0\} \times \mathbb{Q}(\zeta_\ell))V = V_0 \oplus V_1$$

und offenbar ist V_0 ein $\mathbb{Q}$- und V_1 ein $\mathbb{Q}(\zeta_\ell)$-Vektorraum. □

Für $R \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_\ell\}$ macht die folgende Proposition eine Aussage zum Zerlegungsverhalten von RG-Gittern über der maximalen R-Ordnung in der Gruppenalgebra KG.

PROPOSITION 1.1.4. *Sei* $R \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_\ell\}$, $M \in \mathrm{Latt}(RG)$, Γ *die maximale* R*-Ordnung in* KG *und* $V = V_0 \oplus V_1$ *die Zerlegung des* KG*-Moduls nach Proposition 1.1.3. Dann ist*

$$\Gamma M = \Gamma \otimes_{RG} M = M_0 \oplus M_1,$$

wobei M_0 *ein* R*-Gitter auf* V_0 *und* M_1 *ein* $R[\zeta_\ell]$*-Gitter auf* V_1 *ist.*

BEWEIS. Der Beweis funktioniert analog zu dem von Proposition 1.1.3. □

BEMERKUNG. Die Dimensionen der Vektorräume V_0 und V_1 erhält man aus der Reiner-Zerlegung von M:
Ist $\mathbf{dim}(M) = (m_0, m_1, m_2)$ und $M = M_{(0)} \oplus M_{(1)} \oplus M_{(2)}$ die Reiner-Zerlegung von M, so ist

$$V = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}G} M = (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M_{(0)}) \oplus (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}[\zeta_\ell]} M_{(1)}) \oplus (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}G} M_{(2)}).$$

Nun sind $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} M_{(0)}$ und $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}[\zeta_\ell]} M_{(1)}$ Vektorräume über $\mathbb{Q}$ beziehungsweise $\mathbb{Q}(\zeta_\ell)$ der Dimension m_0 beziehungsweise m_1. Der Modul $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}G} M_{(2)}$ zerfällt in je einen m_2-dimensionalen $\mathbb{Q}$- und $\mathbb{Q}(\zeta_\ell)$-Vektorraum, sodass insgesamt

$$\dim_{\mathbb{Q}}(V_0) = m_0 + m_2, \quad \dim_{\mathbb{Q}(\zeta_\ell)}(V_1) = m_1 + m_2$$

folgt.

Bemerkung. Ist M ein $\mathbb{Z}G$-Gitter, so liefert die Proposition 1.1.4 zwei Zerlegungen, nämlich

$$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}[\zeta_\ell])M = M_0 \oplus M_1 \text{ und } (\mathbb{Z}_\ell \times \mathbb{Z}[\zeta_\ell]_{1-\zeta_\ell})M_\ell = M_0' \oplus M_1'.$$

Hierbei entstehen die Gitter M_0' und M_1' durch Lokalisierung an ℓ beziehungsweise $1-\zeta_\ell$ aus M_0 und M_1, d.h.

$$M_0' = M_{0,\ell} \text{ und } M_1' = M_{1,1-\zeta_\ell}.$$

Für $R = \mathbb{Z}_p$, $\ell \neq p \in \mathbb{P}(\mathbb{Q})$ ist der Gruppenring RG bereits eine maximale R-Ordnung und $\Gamma M = M_p$.

Proposition 1.1.5. *Sei $M \in \mathrm{Latt}(\mathbb{Z}G)$ und $M_0 \oplus M_1$ die Zerlegung über der maximalen $\mathbb{Z}$-Ordnung in $\mathbb{Q}G$. Ist $\ell \neq p \in \mathbb{P}(\mathbb{Q})$ eine endliche Primstelle, so induziert die Zerlegung*

$$\mathbb{Z}_pG = \mathbb{Z}_p \times \prod_{\mathfrak{p}\in\mathbb{P}(\mathbb{Q}(\zeta_\ell+\zeta_\ell^{-1})),\ \mathfrak{p}|p} \mathbb{Z}[\zeta_\ell]_{\mathfrak{p}}$$

eine Zerlegung des $\mathbb{Z}_pG$-Gitters M_p in

$$M_p = M_{0,p} \oplus \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathbb{P}(\mathbb{Q}(\zeta_\ell+\zeta_\ell^{-1})),\ \mathfrak{p}|p} M_{1,\mathfrak{p}},$$

wobei $M_{0,p}$ der $\mathbb{Z}_p$- und $M_{1,\mathfrak{p}}$ der $\mathbb{Z}[\zeta_\ell]_{\mathfrak{p}}$-Modul ist, der aus M_0 durch Lokalisierung an p beziehungsweise aus M_1 durch Lokalisierung an $\mathfrak{p}$ entsteht.

Beweis. Der Beweis dieser Aussage geht analog zum Beweis von Proposition 1.1.3. □

Bemerkung. Eingangs dieses Abschnitts haben wir Zerlegungen der Gruppenalgebra $\mathbb{Q}_pG$ und des Gruppenringes $\mathbb{Z}_pG$, $p \neq \ell$, in einfache Unteralgebren beziehungsweise Unterringe angegeben. Diese induzieren natürlich ebenfalls Zerlegungen von V_p und M_p in Anlehnung an Proposition 1.1.3 (ii) und 1.1.5, jedoch werden diese hier nicht weiter relevant seien.

Bemerkung. In den in den Propositionen 1.1.3, 1.1.4 und 1.1.5 angegebenen Zerlegungen gibt es zwischen den direkten Summanden keine Homomorphismen. Dies resultiert aus der direkten Produktzerlegung der Ringe $\mathbb{Q}G$, $\mathbb{Q}_pG$, $\mathbb{R}G$ und $\mathbb{Z}_pG$. Jeder Faktor liefert in der entsprechenden Modulkategorie $\mathrm{mod}(\mathbb{Q}G)$, $\mathrm{mod}(\mathbb{R}G)$, $\mathrm{mod}(\mathbb{Q}_pG)$ beziehungsweise $\mathrm{mod}(\mathbb{Z}_pG)$ einen einfachen Modul und diese sind jeweils nicht isomorph.

Wir fomulieren nun noch eine Proposition, welche einen Zusammenhang zwischen $\mathbb{Z}G$-Gittern und Folgen von $\mathbb{Z}_pG$-Gittern liefert. Ein Beweis ist in Kapitel 4, Abschnitt 1 (Theorem 1.9) von [**RHD70**] zu finden.

Proposition 1.1.6. *Sei $M \in \mathrm{Latt}(\mathbb{Z}G)$ und V der $\mathbb{Q}G$-Modul auf dem M liegt. Setze*

$$\mathcal{L} := \{L : L \text{ ist } \mathbb{Z}G\text{-Gitter auf } V\} \text{ und}$$

$$\mathcal{L}_{\mathbb{A}} := \{(L_p)_{p\in\mathbb{P}(\mathbb{Q})} : L_p \text{ ist } \mathbb{Z}_pG\text{-Gitter auf } V \text{ und } L_p = (\mathbb{Z}_pG)M \text{ für fast alle } p \in \mathbb{P}(\mathbb{Q})\}$$

Dann sind die Zuordnungen

$$L \mapsto ((\mathbb{Z}_pG)L)_p \text{ und } (L_p)_p \mapsto \bigcap_{p\in\mathbb{P}(\mathbb{Q})} (V \cap L_p)$$

zueinander inverse Bijektionen zwischen der Mengen $\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}_{\mathbb{A}}$.

Wir wollen in dieser Arbeit nicht nur RG-Gitter studieren, sondern interessieren uns für *hermitesche* Gitter über dem Gruppenring RG. Diese wollen wir nun definieren.

Sowohl der Gruppenring RG als auch die Gruppenalgebra KG trägt eine kanonische Involution $^- : g \mapsto g^{-1}$. Eine (bezüglich $^-$) **hermitesche Form** auf einem Gitter $M \in \mathrm{Latt}(RG)$ ist eine biadditive Abbildung $h : M \times M \to RG$ mit

$$h(ax, by) = a\bar{b}h(x, y) \text{ und } h(x, y) = \overline{h(y, x)}$$

für alle $a, b \in RG$ und alle $x, y \in M$. Die hermiteschen Formen auf einem RG-Gitter M entsprechen genau den RG-linearen Abbildungen $\widehat{h} : M \to M^*$, wobei M^* nicht der *gewöhnliche* duale Modul ist, sondern die Skalarmultiplikation durch die Involution getwistet ist. Wir nennen die Abbildung $\widehat{h}$ die zu h **Adjungierte**. Das Paar (M, h) heißt **hermitesches RG-Gitter** falls $\widehat{h}$ injektiv ist. Ein hermitesches RG-Gitter (M, h) heißt **unimodular**, wenn $\widehat{h}$ bijektiv ist. Wir bezeichnen die **Kategorie der hermiteschen RG-Gitter** mit $\mathrm{Herm}(RG)$. Die Morphismen dieser Kategorie sind die RG-linearen Abbildungen, die die hermiteschen Formen respektieren. Unter $\mathrm{Aut}(M, h)$ verstehen wir die **Automorphismengruppe** des RG-Gitters (M, h) in $\mathrm{Herm}(RG)$. Die obigen Bezeichnungen vereinbaren wir in analoger Weise auch für KG-Moduln.

Bemerkung. Ist (M, h) ein hermitesches $\mathbb{Z}G$-Gitter, so erhalten wir auf kanonische Weise einen hermiteschen $\mathbb{Q}G$-Modul (V, h) auf dem (M, h) liegt, hermitesche $\mathbb{Z}_pG$-Gitter (M_p, h_p) und hermitesche $\mathbb{Q}_pG$-Moduln (V_p, h_p).

Betrachten wir die Zerlegungen der RG-Gitter beziehungsweise KG-Moduln, die wir oben hergeleitet haben, und versehen diese mit einer hermiteschen Form, so erhalten wir die folgende Aussage.

Proposition 1.1.7. *Die Zerlegungen aus den Propositionen 1.1.3, 1.1.4 und 1.1.5 sind orthogonal bezüglich der jeweiligen (induzierten) hermiteschen Form, d.h. für ein hermitesches $\mathbb{Z}G$-Gitter (M, h) auf einem hermiteschen $\mathbb{Q}G$-Modul (V, h) ist:*

(i) *$(V, h) = (V_0, h_0) \oplus (V_1, h_1)$, wobei (V_0, h_0) ein quadratischer $\mathbb{Q}$- und (V_1, h_1) ein hermitescher $\mathbb{Q}(\zeta_\ell)$-Vektorraum ist.*

(ii) *$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}[\zeta_\ell])(M, h) = (M_0, h_0) \oplus (M_1, h_1)$, wobei (M_0, h_0) ein quadratisches $\mathbb{Z}$-Gitter auf (V_0, h_0) und (M_1, h_1) ein hermitesches $\mathbb{Z}[\zeta_\ell]$-Gitter auf (V_1, h_1).*

(iii) $(\mathbb{Z}_\ell \times \mathbb{Z}[\zeta_\ell]_{1-\zeta_\ell})(M_\ell, h_\ell) = (M_{0,\ell}, h_{0,\ell}) \oplus (M_{1,1-\zeta_\ell}, h_{1,1-\zeta_\ell})$, *wobei* $(M_{0,\ell}, h_{0,\ell})$ *ein quadratisches* $\mathbb{Z}_\ell$*-Gitter auf* $(V_{0,\ell}, h_{0,\ell})$ *und* $(M_{1,1-\zeta_\ell}, h_{1,1-\zeta_\ell})$ *ein hermitesches* $\mathbb{Z}[\zeta_\ell]_{1-\zeta_\ell}$*-Gitter auf* $(V_{1,1-\zeta_\ell}, h_{1,1-\zeta_\ell})$.

(iv) $(V_p, h_p) = (V_{0,p}, h_{0,p}) \oplus \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathbb{P}(\mathbb{Q}(\zeta_\ell+\zeta_\ell^{-1})),\ \mathfrak{p}|p}(V_{1,\mathfrak{p}}, h_{1,\mathfrak{p}})$, *wobei* $(V_{0,p}, h_{0,p})$ *ein quadratischer* $\mathbb{Q}_p$*-Vektorraum und* $(V_{1,\mathfrak{p}}, h_{1,\mathfrak{p}})$ *ein hermitescher* $\mathbb{Q}(\zeta_\ell)_\mathfrak{p}$*-Modul ist.*

(v) $(M_p, h_p) = (M_{0,p}, h_{0,p}) \oplus \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathbb{P}(\mathbb{Q}(\zeta_\ell+\zeta_\ell^{-1})),\ \mathfrak{p}|p}(M_{1,\mathfrak{p}}, h_{1,\mathfrak{p}})$, $p \neq \ell$, *wobei* $(M_{0,p}, M_{0,p})$ *ein quadratischer* $\mathbb{Z}_p$*-Gitter auf* $(V_{0,p}, h_{0,p})$ *und* $(M_{1,\mathfrak{p}}, h_{1,\mathfrak{p}})$ *ein hermitesches* $\mathbb{Z}[\zeta_\ell]_\mathfrak{p}$*-Gitter auf* $(V_{1,\mathfrak{p}}, h_{1,\mathfrak{p}})$ *ist.*

Beweis. Dies folgt daraus, dass es in den betrachteten Zerlegungen keine Homomorphismen zwischen den direkten Summanden gibt. □

Die Reiner-Zerlegung eines $\mathbb{Z}G$-Gitters M, genauso wie die Zerlegung des $\mathbb{Z}_\ell G$-Gitters M_ℓ, ist im Allgemeinen **nicht** orthogonal bezüglich der jeweiligen hermiteschen Form. Hambleton und Riehm haben in ihrer Arbeit [**HR78**] den Begriff der *orthogonalen Reiner-Zerlegung* definiert und behandeln genau die Fragestellung wann die Reiner-Zerlegung orthogonal ist. Die betreffende Charakterisierung ist für uns im folgenden nicht weiter relevant, jedoch wollen wir sie der Vollständigkeit angeben.

Sei $(M, h) \in \mathrm{Herm}(\mathbb{Z}G)$ und $(M_0, h_0) \oplus (M_1, h_1)$ die Zerlegung über der maximalen $\mathbb{Z}$-Ordnung in $\mathbb{Q}G$. Wir nennen (M_i, h_i) **$\mathfrak{a}$-modular**, wenn die invarianten Faktoren von M_i in $M_i^\#$ alle gleich $\mathfrak{a}$ sind. Eine Zerlegung

$$(M_i, h_i) = (N_1, h'_1) \oplus \ldots \oplus (N_t, h'_t), \quad i = 0, 1$$

heißt **Jordan-Zerlegung**, wenn für jedes j das Gitter (N_j, h'_j) $\mathfrak{a}_j$-modular mit $\mathfrak{a}_j \neq \mathfrak{a}_k$ für $j \neq k$ ist.

Theorem 1.1.8 (Hambleton, Riehm). *Sei* (M, h) *ein unimodulares, hermitesches* $\mathbb{Z}G$*-Gitter und* $(M_0, h_0) \oplus (M_1, h_1)$ *die Zerlegung über der maximalen* $\mathbb{Z}$*-Ordnung in* $\mathbb{Q}G$*. Genau dann besitzt* (M, h) *eine orthogonale Reiner-Zerlegung, wenn* (M_0, h_0) *und* (M_1, h_1) *eine Jordan-Zerlegung besitzen.*

Für einen Beweis und Kriterien für die Existenz von Jordan-Zerlegungen verweisen wir auf Abschnitt 2 (Theorem 7) sowie die Abschnitte 3 und 4 von [**HR78**].

Wir wollen nun eine alternative Beschreibung der Kategorien $\mathrm{Latt}(RG)$ und $\mathrm{Herm}(RG)$ geben, welche in Kapitel 2 von erheblicher Bedeutung seien wird. Definiere eine Kategorie $\mathrm{RepLatt}(RG)$ wie folgt: Die Objekte in $\mathrm{RepLatt}(RG)$ seien Paare (M, U), wobei M ein endlich erzeugter, torisionsfreier Γ-Modul (sprich ein Γ-Gitter) ist und U ein RG/I-Untermodul von M/IM mit $(\Gamma/I)U = M/IM$.

Proposition 1.1.9. *Der Funktor*

$$F : \mathrm{Latt}(RG) \to \mathrm{RepLatt}(RG),\ L \mapsto (\Gamma L, L/IL)$$

ist eine natürliche Äquivalenz von Kategorien.

Ein Beweis ist in Abschnitt 1 (Satz 1.1) von [**Que81**] zu finden. Wir definieren weiter, eine Kategorie $\mathrm{RepHerm}(RG)$ deren Objekte Tripel (M,h,U) sind, wobei $(M,U) \in \mathrm{RepLatt}(RG)$ und $h : M \times M \to \Gamma$ eine nicht-ausgeartete, hermitesche Form mit $\overline{h}(U,U) \subseteq RG/I$, wobei $\overline{h}$ die Reduktion von h modulo I ist.

Proposition 1.1.10. *Der Funktor*

$$F : \mathrm{Herm}(RG) \to \mathrm{RepHerm}(RG),\ (L,h) \mapsto (\Gamma L, h, L/IL)$$

ist eine natürliche Äquivalenz von Kategorien.

Beweis. Dies folgt aus der natürlichen Äquivalenz der Kategorien $\mathrm{Latt}(RG)$ und $\mathrm{RepLatt}(RG)$. □

Diese Äquivalenz erlaubt uns unter anderem eine alternative Beschreibung der Automorphismengruppe eines hermiteschen RG-Gitters. Dieses ist der Hauptgrund weswegen wir die Kategorie $\mathrm{RepHerm}(RG)$ betrachten. Die folgende Proposition ist in Abschnitt 1 (Satz 1.3) von [**Que81**] zu finden und liefert die Charakterisierung der Unimodularität eines hermiteschen RG-Gitters in $\mathrm{RepHerm}(RG)$. Hierbei beschränken wir uns auf die Fälle, dass $\mathrm{R} = \mathbb{Z}$ oder $\mathrm{R} = \mathbb{Z}_\ell$ ist.

Proposition 1.1.11. *Sei* $\mathrm{R} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_\ell\}$ *und* Γ *die maximale R-Ordnung in* KG*. Ein hermitesches RG-Gitter* (M,h) *mit* $\Gamma(M,h) = (M_0,h_0) \oplus (M_1,h_1)$ *ist genau dann unimodular, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(i) $\mathrm{Hom}_R(M_0, \ell\,\mathrm{R}) \subseteq \mathrm{im}(\widehat{h_0})$*, d.h.* (M_0,h_0) *ist* ***lokal*** ℓ***-elementar***
(ii) $\mathrm{Hom}_{R[\zeta]}(M_1, (1-\zeta_\ell)\,\mathrm{R}[\zeta_\ell]) \subseteq \mathrm{im}(\widehat{h_1})$*, d.h.* (M_1,h_1) *ist* ***lokal*** $1-\zeta_\ell$***-elementar***
(iii) *Ist* $x \in (\Gamma M)/I(\Gamma M)$ *mit* $\overline{h}(M/IM, x) \subseteq RG/I$ *so ist bereits* $x \in M/IM$.

Der bereits erwähnten Beschreibung der Automorphismengruppen in $\mathrm{RepHerm}(RG)$ werden wir uns erst in Abschnitt 2.2 widmen.

Bemerkung. Für $\pi_0 = \ell$ oder $\pi_1 = 1-\zeta_\ell$ ist eine Jordan-Zerlegung eines lokal π_i-elementaren Gitters ist von der Form

$$(N_1,h_1) \oplus (N_2,h_2),$$

wobei (N_1,h_1) unimodular oder 0 und (N_2,h_2) (π_i)-modular oder 0 ist.

Für die praktische Arbeit mit hermiteschen $\mathbb{Z}G$-Gittern ist eine andere Beschreibung der Kategorie $\mathrm{Herm}(\mathbb{Z}G)$ nützlicher, nämlich die mittels orthogonalen, ganzzahligen Darstellungen.

Die Objekte der Kategorie $\mathrm{RepIntOrth}(R,G)$ seien Tripel (M,b,f), wobei (M,b) ein quadratisches R-Gitter und $f \in \mathrm{Aut}(M,b)$ ein Automorphismus der Ordnung ℓ ist, also genau die **orthogonalen, ganzzahligen Darstellungen** $\rho : G \to \mathrm{Aut}(M,b)$. Wenn es klar ist, von welchem quadratischen R-Gitter die Rede ist, so sagen wir zu f bereits Darstellung. Ist $R = \mathbb{Z}$ so schreiben wir für $\mathrm{RepIntOrth}(\mathbb{Z},G)$ einfach $\mathrm{RepIntOrth}(G)$.

Proposition 1.1.12. *Die Kategorien* $\mathrm{Herm}(RG)$ *und* $\mathrm{RepIntOrth}(R, G)$ *sind natürlich äquivalent.*

Diese Aussage ist wohlbekannt und zum Beispiel bei [**FM69**] zu finden. Wir wollen der besseren Lesbarkeit halber einen Beweis geben, da alle Beispiele, die wir in dieser Arbeit geben werden, auf dieser Äquivalenz beruhen.

Beweis. Definiere einen Funktor

$$F : \mathrm{RepIntOrth}(G) \to \mathrm{Herm}(RG),\ (M, b, f) \mapsto (M, h_f), \alpha \mapsto \alpha$$

wie folgt: Ist $(M, b, f) \in \mathrm{RepIntOrth}(R, G)$, so operiert die Gruppe $\langle f\rangle \simeq G$ via Automorphismen auf dem R-Modul M und man erhält eine RG-Modulstruktur auf M. Des Weiteren rechnet man leicht nach, dass (M, h_f) mit

$$h_f : M \times M \to RG, (x, y) \mapsto \sum_{i=0}^{\ell-1} b(f^{-i}x, y)g^i$$

ein hermitesches RG-Gitter ist.
Ist $\alpha : (M, b, f) \to (M', b', f')$ ein Morphismus aus $\mathrm{RepIntOrth}(R, G)$, dann ist α eine R-lineare Abbildung, sodass

$$b'(\alpha(x), \alpha(y)) = b(x, y) \text{ und } \alpha f = f'\alpha$$

gilt. Die R-Linearität zusammen mit der Eigenschaft $\alpha f = f'\alpha$ liefert die RG-Linearität von α. Die Kompatibilität mit den Bilinearformen induziert eine Solche mit den hermiteschen Formen h_f und $h_{f'}$.
Da die Kategorien $\mathrm{RepIntOrth}(R, G)$ und $\mathrm{Herm}(RG)$ abelsch sind, genügt es zu zeigen, dass F voll, treu und dicht ist. Offenbar ist F voll und treu. Es reicht also zu zeigen, dass F dicht ist. Sei dazu (M, h) ein hermitesches RG-Gitter. Vergessen wir die G-Modulstruktur auf M, so erhalten wir mittels der **Spurabbildung** $\mathrm{t} : RG \to R, \sum_{i=0}^{\ell-1} a_i g^i \mapsto a_0$ eine symmetrische Bilinearform

$$b := \mathrm{t}(h) : M \times M \to R, (x, y) \mapsto \mathrm{t}(h(x, y))$$

auf M, d.h. (M, b) ist ein quadratisches R-Gitter. Definiere einen Morphismus $f : M \to M$ durch $f(m) := g.m$. Dann ist $\mathrm{ord}(f) = \ell$ und

$$b(f(m), f(n)) = \mathrm{t}(h(f(m), f(n))) = \mathrm{t}(h(g.m, g.n)) = \mathrm{t}(gg^{-1}h(m, n)) = \mathrm{t}(h(m, n)) = b(m, n)$$

für alle $m, n \in M$. Also ist $f \in \mathrm{Aut}(M, b)$ und es gilt

$$F(M, b, f) = (M, h).$$

$\square$

Wir sehen also, dass alle hermiteschen Gitter über dem Gruppenring RG von einem Automorphismus des zugrundeliegenden R-Gitters herkommen. Die folgende Proposition beschreibt die Zerlegung eines hermiteschen $\mathbb{Z}G$-Gitters über der maximalen Ordnung mittels orthogonalen, ganzzahligen Darstellungen.

Proposition 1.1.13. *Sei* $(M, b, f) \in \mathrm{RepIntOrth}(G)$ *und* $(M_0, h_0) \oplus (M_1, h_1)$ *die Zerlegung von* (M, h_f) *über* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}[\zeta_\ell]$. *Dann ist*

(i) $h_0(m, n) = \ell b(m, n)$ *für alle* $m, n \in M_0$ *und*
(ii) $h_1(m, n) = \sum_{i=0}^{\ell-1} b(f^{-i}(m), n)\zeta_\ell^i$ *für alle* $m, n \in M_1$.

Beweis. Folgt sofort aus der Interpratation der Zerlegung über der maximalen Ordnung in der Kategorie $\mathrm{RepIntOrth}(G)$. Siehe auch Kapitel 2, Abschnitt 3 von [**Ban88**]. □

Korollar 1.1.14. *Ist* $(M, b, f) \in \mathrm{RepIntOrth}(G)$, *so ist* (M_0, h_0) *positiv-definit und* (M_1, h_1) *totaldefinit.*

Beweis. Das (M_0, h_0) positiv-definit ist, ist klar. Für die totale Definitheit von (M_1, h_1) siehe zum Beispiel Abschnitt 2.5 (Folgerung 2) von [**Bie81**]. □

In dem folgenden Korollar halten wir den Isomorphiebegriff der Kategorie $\mathrm{RepIntOrth}(R, G)$ einmal fest.

Korollar 1.1.15. *Zwei orthogonale, ganzzahlige Darstellungen* (M, b, f) *und* (M', b', f') *sind genau dann isomorph, wenn* (M, b) *und* (M', b') *isomorph als quadratisches* R*-Gitter sind und dieser Isomorphismus* α *kompatibel mit den Automorphismen* f *und* f' *ist, d.h.* $\alpha f = f'\alpha$. *Speziell sind* (M, h_f) *und* $(M, h_{f'})$ *genau dann isomorph, wenn* f, f' *konjugiert in* $\mathrm{Aut}(M, b)$ *sind.*

Beweis. Folgt offensichtlich aus Proposition 1.1.12. □

Korollar 1.1.16. *Sei* (M, b) *ein quadratisches* $\mathbb{Z}$*-Gitter und* $f, f' \in \mathrm{Aut}(M, h)$ *Automorphismen von Primzahlordnung* ℓ. *Ist* ℓ *ein exakter Teiler der Gruppenordnung, so sind* (M, h_f) *und* $(M, h_{f'})$ *isomorph.*

Beweis. Da ℓ ein exakter Teiler der Ordnung der Automorphismengruppe ist, sind die Untergruppen $\langle f \rangle$ und $\langle f' \rangle$ nach den Sylow Sätzen konjugiert. Mit 1.1.15 folgt dann die Behauptung. □

In der Kategorie $\mathrm{RepIntOrth}(G)$ lassen sich sowohl die Automorphismengruppe als auch die Unimodularität eines hermiteschen $\mathbb{Z}G$-Gitters leicht beschreiben. In der folgenden Proposition halten wir dieses fest.

Proposition 1.1.17. *Sei* $(M, h) \in \mathrm{Herm}(\mathbb{Z}G)$ *und* (M, b, f) *die zugehörige orthogonale, ganzzahlige Darstellung. Dann ist:*

(i) $\mathrm{Aut}(M, h) = \mathrm{Aut}(M, b, f) = \mathrm{Z}_{\mathrm{Aut}(M,b)}(f)$
(ii) *Das hermitesche* $\mathbb{Z}G$*-Gitter* (M, h) *ist genau dann unimodular, wenn* (M, b) *unimodular als quadratisches* $\mathbb{Z}$*-Gitter ist.*

Beweis. Die Aussage (i) ist leicht und folgt sofort aus der Definition eines Automorphismuses in $\mathrm{RepIntOrth}(G)$. Für die zweite Aussage verweisen wir auf Abschnitt 1 der Arbeit [**FM69**]. □

Für hermitesche $\mathbb{Q}G$-Moduln gilt ein Lokal-Global Prinzip, d.h. zwei (V, h), $(V', h') \in \mathrm{Herm}(\mathbb{Q}G)$ sind genau dann isomorph, wenn sie es lokal für alle $p \in \mathbb{P}(\mathbb{Q})$ sind. Dies folgt aus Proposition 1.1.7 und den Lokal-Global Prinzipien für quadratische und hermitesche Formen über $\mathbb{Q}$ beziehungsweise $\mathbb{Q}(\zeta_\ell)$. Auf Gitterebene ist ein solches Lokal-Global Prinzip nicht richtig, was unter anderem aus Beispielen in Kapitel 3 hervorgeht. Wir definieren daher für hermitesche $\mathbb{Z}G$-Gitter den Begriff des *Geschlechts*.

Definition. Seien (M, h), $(M', h') \in \mathrm{Herm}(\mathbb{Z}G)$. Wir sagen, dass (M, h), (M', h') **verwandt** sind, wenn es für alle $p \in \mathbb{P}(\mathbb{Q})$ einen Isomorphismus $f_p : (M_p, h_p) \to (M'_p, h'_p) \in \mathrm{Herm}(\mathbb{Z}_pG)$ gibt. Bezeichne mit $\mathrm{Gen}(M, h)$ die Menge aller hermiteschen $\mathbb{Z}G$-Gitter, die verwandt zu (M, h) sind. Wir nennen $\mathrm{Gen}(M, h)$ das **Geschlecht** von (M, h).

Bemerkung. Wir können stets annehmen, dass zwei verwandte hermiteschen $\mathbb{Z}G$-Gitter auf dem selben hermiteschen $\mathbb{Q}G$-Modul liegen.

Proposition 1.1.18. *Seien (M, h), (M', h') zwei verwandte, hermitesche $\mathbb{Z}G$-Gitter. Dann ist $\mathbf{dim}(M) = \mathbf{dim}(M')$ und $(M, \mathrm{t}(h))$, $(M', \mathrm{t}(h'))$ sind verwandt als quadratische $\mathbb{Z}$-Gitter.*

Beweis. Die Übereinstimmung der Dimensionsvektoren erhält man aus $(M_\ell, h_\ell) \simeq (M'_\ell, h'_\ell)$ und der Bemerkung nach Proposition 1.1.2. Jeder Isomorphismus $f_p : (M_p, h_p) \to (M'_p, h'_p)$ induziert einen Isomorphismus $(M_p, \mathrm{t}(h_p)) \simeq (M'_p, \mathrm{t}(h'_p))$. Demnach sind $(M, \mathrm{t}(h))$ und $(M', \mathrm{t}(h'))$ verwandt als quadratische $\mathbb{Z}$-Gitter. □

Bemerkung. Das Geschlecht $\mathrm{Gen}(M, h)$ eines hermiteschen $\mathbb{Z}G$-Gitters (M, h) enthält stets volle Isomorphieklassen und deren Anzahl ist endlich.

Beweis. Es ist wohlbekannt, dass das Geschlecht eines positiv-definiten, quadratischen $\mathbb{Z}$-Gitters nur endlich viele Isomorphieklassen enthält, siehe dazu zum Beispiel Kapitel 7, Abschnitt 21 (Satz 21.3) in [**Kne02**]. Ausgehend von Diesen, entsprechen die Isomorphieklassen der darüberliegenden orthogonalen, ganzzahligen Darstellungen genau den Konjugationsklassen der Automorphismengruppen von denen es ebenfalls nur endlich viele gibt, da die Automorphismengruppen endlich sind. Also kann das Geschlecht eines hermiteschen $\mathbb{Z}G$-Gitters auch nur endlich viele Isomorphieklassen enthalten. □

Seien $(M_1, h_1), \ldots, (M_k, h_k)$ die Repräsentanten der k Isomorphieklassen von $\mathrm{Gen}(M, h)$. Dann heißt

$$\omega_{\mathbb{Z}G}(M, h) := \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{|\operatorname{Aut}(M_i, h_i)|}$$

das **Maß** von $\mathrm{Gen}(M, h)$.

Das Maß $\omega_{\mathbb{Z}G}(M, h)$ ist ein sehr nützliches Werkzeug zur Klassifikation von Geschlechtern, denn sind wir in der Lage das Maß unabhängig von den Isomorphieklassen des Geschlechtes zu bestimmen, können wir nach jeder gefundenen Isomorphieklasse prüfen, ob das

Geschlecht bereits komplett ist, beziehungsweise wenn man alle möglichen Isomorphieklassen kennt, so kann man prüfen ob diese in mehrere Geschlechter zerfallen oder eines bilden.

Die Proposition 1.1.18 liefert nur ein notwendiges Kriterium für die Verwandtheit zweier hermitescher $\mathbb{Z}G$-Gitter, motiviert jedoch eine Vorgehensweise um alle Kandidaten für Repräsentanten von Isomorphieklassen des Geschlechtes eines hermiteschen $\mathbb{Z}G$-Gitters zu bekommen. Diese werden wir in Kapitel 3 genauer beschreiben und damit, sowie mittels der in Kapitel 2 hergeleiteten Maßformel, Geschlechter hermitescher $\mathbb{Z}G$-Gitter vollständig bestimmen.

1.2. Tamagawa-Maße auf Adelisierungen linearer algebraischer k-Gruppen

In diesem Abschnitt wollen wir die Theorie der Tamagawa-Maße auf Adelgruppen linearer algebraischen Gruppen über Zahlkörpern erläutern. Beginnen werden wir diesen Abschnitt mit der *Adelisierung* von linearen algebraischen Gruppen. Dazu beschäftigen wir uns zunächst mit dem Adelring eines Zahlkörpers k und definieren anschließend die Adelgruppe einer linearen algebraischen Gruppe über k. Auf diesen adelischen Gruppen definieren wir dann das sogenannte *Tamagawa-Maß* und damit die *Tamagawazahl* einer linearen algebraischen Gruppe.

Sei k stets ein algebraischer Zahlkörper und $\mathcal{O}_k$ sein Ring der ganzen Zahlen. Die Menge der **Adele** $\mathbb{A}_k$ von k ist die Teilmenge des direkten Produktes $\prod_{\mathfrak{p}\in\mathbb{P}(k)} k_\mathfrak{p}$, deren Elemente genau die $\mathbf{x} = (x_\mathfrak{p})_\mathfrak{p}$ sind, sodass $x_\mathfrak{p} \in \mathcal{O}_{k_\mathfrak{p}}$ für fast alle $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(k)$ ist. Dann ist $\mathbb{A}_k$ ein Ring bezüglich der Verknüpfungen des direkten Produktes und wir wollen diesen nun mit einer Topologie versehen. Sei dazu $S \subseteq \mathbb{P}(k)$ irgendeine endliche Teilmenge mit der Eigenschaft, dass S die unendlichen Primstellen von k enthält. Die Basis der offenen Mengen soll genau aus den Mengen

$$\prod_{\mathfrak{p}\in S} U_\mathfrak{p} \times \prod_{\mathfrak{p}\notin S} \mathcal{O}_{k_\mathfrak{p}}$$

bestehen, wobei $U_\mathfrak{p}$ eine offene Menge in $k_\mathfrak{p}$ ist. Dann ist $\mathbb{A}_k$ das eingeschränkte topologische Produkt der $k_\mathfrak{p}$ bezüglich den $\mathcal{O}_{k_\mathfrak{p}}$ und wir nennen diese Topologie **Adel-Topologie**. Für S definieren wir die Menge

$$A_S := \prod_{\mathfrak{p}\in S} k_\mathfrak{p} \times \prod_{\mathfrak{p}\notin S} \mathcal{O}_{k_\mathfrak{p}}$$

der S-Adele und ist S genau die Menge der unendlichen Primstellen, so heißt A_S **Ring der ganzen Adele**. Offenbar ist

$$\mathbb{A}_k = \bigcup_S A_S$$

und alternativ erhalten wir nun die Adel-Topologie auf $\mathbb{A}_k$ als direkten Limes der A_S, wenn A_S als offen in $\mathbb{A}_k$ definiert wird. Den zugrundeliegenden algebraischen Zahlkörper k können wir diagonal in $\mathbb{A}_k$ einbetten und nennen die Elemente von k in diesem Zusammenhang **Hauptadele**. Aus [**Wei61**], [**Wei95**] entnehmen wir die folgenden Eigenschaften.

PROPOSITION 1.2.1.

(i) *Der Adelring* $\mathbb{A}_k$ *ist lokal-kompakt bezüglich der Adel-Topologie.*

(ii) *Die Hauptadele bilden eine diskrete Untergruppe in der additiven Gruppe des Adelringes.*

(iii) *Ist* S *die Menge der unendlichen Primstellen, so ist* $k + A_S = \mathbb{A}_k$.

(iv) *Die Quotientengruppe* $\mathbb{A}_k/k$ *ist kompakt.*

Wir benutzen nun den Adelring $\mathbb{A}_k$, um die Adelisierung von linearen algebraischen k-Gruppen zu definieren. Wenn klar ist, welcher algebraische Zahlkörper zugrunde liegt, schreiben wir für den Adelring einfach $\mathbb{A}$.

Sei nun $\mathfrak{g}$ eine lineare algebraische k-Gruppe, d.h. eine zu einer bezüglich der Zariski-Topologie abgeschlossenen Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(k)$ isomorphe Gruppe. Wir können die $\mathfrak{g}$ erzeugenden Gleichungen auch über Oberringen A von k auffassen, was uns dann eine algebraische Varietät liefert, die wir mit $\mathfrak{g}_A$ bezeichnen.

DEFINITION. Die algebraische Varietät $\mathfrak{g}_\mathbb{A}$ heißt **adelische Gruppe** oder **Adelgruppe** von $\mathfrak{g}$.

Bevor wir die Adelisierung einer beliebigen algebraischen k-Gruppe genauer untersuchen, betrachten wir zunächst die Gruppe $\mathfrak{g} = \mathrm{GL}_n(k)$.

Es ist $\mathrm{GL}_n(k)_{\mathcal{O}_{k_\mathfrak{p}}} = \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{k_\mathfrak{p}})$. Demnach ist $\mathrm{GL}_n(k)_\mathbb{A} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ das eingeschränkte topologische Produkt der $\mathrm{GL}_n(k_\mathfrak{p})$ bezüglich der offenen, kompakten Untergruppen $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{k_\mathfrak{p}})$, d.h.

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}) = \left\{ (f_\mathfrak{p})_\mathfrak{p} \in \prod_{\mathfrak{p}\in\mathbb{P}(k)} \mathrm{GL}_n(k_\mathfrak{p}) : f_\mathfrak{p} \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{k_\mathfrak{p}}) \text{ für fast alle } \mathfrak{p} \in \mathbb{P}(k) \right\}.$$

Die Topologie auf $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ liefert die Mengen

$$U = \prod_{\mathfrak{p}\in S} U_\mathfrak{p} \times \prod_{\mathfrak{p}\in S} \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{k_\mathfrak{p}}),$$

wobei $U_\mathfrak{p} \subseteq \mathrm{GL}_n(k_\mathfrak{p})$ offen und $S \subseteq \mathbb{P}(k)$ eine endliche Teilmenge ist, die die unendlichen Primstellen enthält, die eine Basis der offenen Mengen bildet.

Die obigen Überlegungen können nun auf beliebige abgeschlossene Untergruppen $\mathfrak{g} \subseteq \mathrm{GL}_n(k)$ übertragen werden. Die Adelgruppe $\mathfrak{g}_\mathbb{A}$ ist das eingeschränkte topologische Produkt der $\mathfrak{g}_{k_\mathfrak{p}}$ bezüglich der $\mathfrak{g}_{\mathcal{O}_{k_\mathfrak{p}}} = \mathfrak{g} \cap \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{k_\mathfrak{p}})$, d.h. die zu den obigen U's analoge Mengen bilden eine Basis der offenen Mengen von $\mathfrak{g}_\mathbb{A}$. Es ist dann

$$\mathfrak{g}_\mathbb{A} = \left\{ (f_\mathfrak{p})_\mathfrak{p} \in \prod_{\mathfrak{p}\in\mathbb{P}(k)} \mathfrak{g}_{k_\mathfrak{p}} : f_\mathfrak{p} \in \mathfrak{g}_{\mathcal{O}_{k_\mathfrak{p}}} \text{ für fast alle } \mathfrak{p} \in \mathbb{P}(k) \right\}$$

und die Adelgruppe $\mathfrak{g}_\mathbb{A}$ ist lokal-kompakt. Eine etwas andere Beschreibung der Topologie auf $\mathfrak{g}_\mathbb{A}$, die bei der Definition eines Tamagawa-Maßes auf $\mathfrak{g}_\mathbb{A}$ nützlich sein wird, erhält man auf folgende Weise: Sei $S \subseteq \mathbb{P}(k)$ eine endliche Teilmenge, die alle unendlichen Primstellen enthält. Definiere dann die Untergruppe der **S-ganzen Adele von $\mathfrak{g}_{\mathbb{A}}$** durch

$$\mathfrak{g}_S = \prod_{\mathfrak{p} \in S} \mathfrak{g}_{k_\mathfrak{p}} \times \prod_{\mathfrak{p} \in S} \mathfrak{g}_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}.$$

Die Topologie auf $\mathfrak{g}_{\mathbb{A}}$ induziert auf $\mathfrak{g}_S$ die Produkttopologie, sodass die S-ganzen Adele von $\mathfrak{g}_{\mathbb{A}}$ offene Mengen sind. Weiter ist jedes $\mathfrak{g}_S$ lokal-kompakt,

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{A}} = \bigcup_S \mathfrak{g}_S$$

und $\mathfrak{g}_{\mathbb{A}}$ ist der direkte Limes der $\mathfrak{g}_S$. Man kann die Gruppe $\mathfrak{g}$ diagonal in $\mathfrak{g}_{\mathbb{A}}$ einbetten und nennt diese dann die **Hauptadele von $\mathfrak{g}_{\mathbb{A}}$**. Sie bildet eine diskrete Untergruppe der Adelgruppe.

Im Rahmen des Studiums der Adelisierungen linearer algebraischer k-Gruppen haben wir oben bereits die $\mathrm{GL}_n(k)$ sowie ihre Adelgruppe als Beispiel kennengelernt. Im nächsten Abschnitt werden wir zwei weitere Klassen linearer algebraischer Gruppen betrachten und mit ihren Adelgruppen arbeiten.

Wir wollen nun einen Zusammenhang zwischen linearen algebraischen k-Gruppen und $\mathcal{O}_k$-Gittern aufzeigen. Dazu sei $\mathfrak{g}$ eine lineare algebraische k-Gruppe und M ein $\mathcal{O}_k$-Gitter auf dem k^n, d.h. M ist ein endlich-erzeugter, torsionsfreier $\mathcal{O}_k$-Modul. Sei $\mathbf{f} = (f_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(k)} \in \mathfrak{g}_{\mathbb{A}}$. Dann operiert $\mathfrak{g}_{\mathbb{A}}$ vermöge der Zuordnung

$$\mathbf{f}.M := \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(k)} f_\mathfrak{p}(M_\mathfrak{p})$$

auf der Klasse der $\mathcal{O}_k$-Gitter auf dem k^n. Man nennt die Bahn $\mathfrak{g}_{\mathbb{A}}.M$ das **$\mathfrak{g}$-Geschlecht** und $\mathfrak{g}.M$ die **$\mathfrak{g}$-Klasse** von M. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{g}_{\mathbb{A},M}$ den Stabilisator eines $\mathcal{O}_k$-Gitters M unter der oben beschriebenen Operation von $\mathfrak{g}_{\mathbb{A}}$.

Proposition 1.2.2.

(i) *Sei $\mathfrak{g}_{k_\mathfrak{p},M}$ die Untergruppe von $\mathfrak{g}_{k_\mathfrak{p}}$, die das $\mathcal{O}_{k_\mathfrak{p}}$-Gitter $M_\mathfrak{p} = \mathcal{O}_{k_\mathfrak{p}} \otimes_{\mathcal{O}_k} M$ stabilisiert. Dann ist*

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{A},M} = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(k),\ \mathfrak{p} \text{ unendlich}} \mathfrak{g}_{k_\mathfrak{p}} \times \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(k),\ \mathfrak{p} \text{ endlich}} \mathfrak{g}_{k_\mathfrak{p},M}.$$

(ii) *Das Produkt $\prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(k),\ \mathfrak{p} \text{ endlich}} \mathfrak{g}_{k_\mathfrak{p},M}$ ist kompakt, jedoch ist der Stabilisator $\mathfrak{g}_{\mathbb{A},M}$ im Allgemeinen nur lokal-kompakt.*

(iii) *Für jedes $\mathcal{O}_k$-Gitter M ist*

$$\mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}\mathfrak{g}_{\mathbb{A},M} \simeq \mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{A},M} \setminus \mathfrak{g}_{\mathbb{A},M}$$

ein Homöomorphismus.

Beweis. Die Aussagen (i) und (ii) sind klar. Die dritte Aussage ist genau der Isomorphiesatz in der Kategorie der topologischen Gruppen. $\square$

Das folgende Theorem beschreibt eine Zerlegung der Adelgruppe $\mathfrak{g}_{\mathbb{A}}$ in Doppelnebenklassen. Diese wird im nächsten Abschnitt eine grundlegende Rolle spielen. Für ein Beweis siehe Abschnitt 1, Absatz 1.2 von [**Bor63**] zu finden.

THEOREM 1.2.3. *Für jedes $\mathcal{O}_k$-Gitter M erhalten wir eine disjunkte Zerlegung*

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{A}} = \bigcup_{i=1}^{t} \mathfrak{g}\mathbf{f}_i \mathfrak{g}_{\mathbb{A},M},$$

*wobei man mit $t = t(M, \mathfrak{g})$ die **Klassenzahl** von $\mathfrak{g}$ bezüglich M bezeichnet.*

Für einige lineare algebraische Gruppen $\mathfrak{g}$ ist die Klassenzahl t wohlbekannt. Wir wollen in der folgenden Proposition diese Ergebnisse einmal festhalten. Ein Beweis für (i)-(iii) ist in Abschnitt 2, (Propositionen 2.2, 2.3) von [**Bor63**] und für (iv) in Abschnitt 8 von [**Bög66**] oder Abschnitt 1 von [**Reh71**] zu finden.

PROPOSITION 1.2.4.

(i) *Ist $\mathfrak{g} = \mathrm{GL}_n(k)$, so ist t genau die Klassenzahl des algebraischen Zahlkörpers k.*
(ii) *Für $\mathfrak{g} = \mathrm{SL}_n(k)$ ist $t = 1$.*
(iii) *Ist $k = \mathbb{Q}$ und $\mathfrak{g} = \mathrm{Aut}(V, b)$, die Automorphismengruppe eines quadratischen $\mathbb{Q}$-Vektorraums (V, b) auf dem ein $\mathbb{Z}$-Gitter M liegt, so ist t genau die Klassenzahl des Geschlechtes von (M, b).*
(iv) *Sei k ein total-reeller Körper und $K : k$ eine imaginär-quadratische Körpererweiterung. Ist (V, h) ein hermitescher K-Vektorraum, $\mathfrak{g} = \mathrm{Aut}(V, h)$ dessen Automorphismengruppe und M ein $\mathcal{O}_K$-Gitter auf (V, h), so ist t genau die Klassenzahl des Geschlechtes von (M, h).*

Wir kommen nun zu Tamagawa-Maßen auf Adelisierungen von linearen algebraischen Gruppen. Die Existenz von Haarschen-Maßen auf lokal-kompakten Gruppen ist wohlbekannt. Des besseren Verständnis halber, wollen wir hier das Wesentliche noch einmal aufführen. Für Beweise und weitere Details verweisen wir auf Kapitel 3, Abschnitt 3.5 von [**PR94**] oder Kapitel 1, Abschnitt 1 von [**Hum80**].

Sei X ein lokal-kompakter topologischer Raum. Eine Teilmenge $B \subseteq X$ heißt **Borel-Menge**, wenn sie als abzählbare Vereinigung oder abzählbarer Schnitt von offenen oder abgeschlossenen Teilmengen von X darstellbar ist. Man nennt ein von Null verschiedenes Maß μ auf X ein **Borel-Maß**, wenn alle Borel-Mengen μ-messbar sind und jede kompakte Menge ein endliches Maß besitzt. Ist nun H eine Gruppe, die auf X via Homöomorphismen operiert, so heißt μ **H-invariant**, falls für jede meßbare Menge $M \subseteq X$ und jedes $h \in H$, die Menge $h(M)$ messbar ist und

$$\mu(h(M)) = \mu(M)$$

gilt. Ist nun $X = H$ eine lokal-kompakte Gruppe, die auf sich selbst via Links- beziehungsweise Rechtstranslation operiert, so heißt ein (von Null verschiedenes) invariantes Borel-Maß auch linkes (rechtes) **Haar-Maß**. Die Existenz und Eindeutigkeit halten wir im folgenden Theorem fest.

THEOREM 1.2.5. *Sei H eine lokal-kompakte Gruppe. Dann existiert ein linkes (rechtes) Haar-Maß auf H und dieses ist eindeutig bis auf Multiplikation mit einer positiven Konstante.*

Haarsche-Maße haben verschiedene Eigeschaften, die wir in der folgenden Proposition aufführen.

PROPOSITION 1.2.6. *Sei H eine lokal-kompakte Gruppe und μ ein linkes (rechtes) Haar-Maß auf H. Dann gilt:*

(i) *Die Gruppe H ist genau dann diskret, wenn $\mu(\{1_H\}) > 0$ ist.*
(ii) *Die Gruppe H ist genau dann kompakt, wenn $\mu(H) < \infty$ ist.*

Ist H kompakt, so gibt es ein eindeutiges linkes (rechtes) Haarsches-Maß μ auf H, sodass $\mu(H) = 1$ ist.

Die Unterscheidung zwischen linkem und rechtem Haar-Maß ist nicht immer nötig. Man nennt eine lokal-kompakte Gruppe H **unimodular**, wenn jedes linke Haar-Maß auch ein rechtes ist.

PROPOSITION 1.2.7. *Jede abelsche, halbeinfache, diskrete oder kompakte Gruppe ist unimodular.*

Die folgende Konstruktion wird wichtig für den Abschnitt 2.2. Sei $H = H_0 \times H_1$, wobei H_i lokal-kompakte Gruppen mit Haar-Maßen μ_i sind. Dann hat H ein eindeutig bestimmtes Haarsches-Maß $\mu := \mu_0 \times \mu_1$, sodass für alle μ_i-messbaren Mengen M_i von H_i, die Menge $M_0 \times M_1$ μ-messbar sind und

$$\mu(M) = \mu_0(M_0)\mu_1(M_1)$$

ist. Im Allgemeinen kann diese Konstruktion nicht auf unendliche Produkte lokal-kompakter Gruppen übertragen werden, da solche nicht mehr lokal-kompakt seien müssen.

Kommen wir nun wieder zu linearen algebraischen k-Gruppen $\mathfrak{g}$ und ihren Adelgruppen $\mathfrak{g}_{\mathbb{A}}$ zurück. Wir setzen von nun an voraus, dass die algebraische k-Gruppe $\mathfrak{g}$ halbeinfach ist. Dann ist diese unimodular und wir entnehmen Kapitel 2, Abschnitt 2.4 von [**Wei61**], dass dann auch die Adelgruppe $\mathfrak{g}_{\mathbb{A}}$ unimodular ist. Da $\mathfrak{g}_{\mathbb{A}}$ lokal-kompakt ist, gibt es ein Haar-Maß μ auf $\mathfrak{g}_{\mathbb{A}}$. Um dieses Haar-Maß zu beschreiben, genügt es, Haarsche-Maße auf den S-ganzen Adelen von $\mathfrak{g}_{\mathbb{A}}$ zu definieren, die man durch lokale Haar-Maße auf $\mathfrak{g}_{k_\mathfrak{p}}$ beziehungsweise auf $\mathfrak{g}_{\mathcal{O}_{k_\mathfrak{p}}}$ erhält. Andrè Weil beschreibt in Kapitel 2, Abschnitt 2.2 von [**Wei61**] wie man mittels einer algebraischen Differentialform ω Maße auf regulären Varietäten über $k_\mathfrak{p}$ erhält. Wir wenden diese Konstruktion als Black-Box auf $\mathfrak{g}_{k_\mathfrak{p}}$ und $\mathfrak{g}_{\mathcal{O}_{k_\mathfrak{p}}}$ an und erhalten somit lokale Maße $\mu_\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{g}_{k_\mathfrak{p}}$ beziehungsweise $\mathfrak{g}_{\mathcal{O}_{k_\mathfrak{p}}}$.

Eine Folge $(\lambda_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}\in\mathbb{P}(k)}$ von Zahlen heißt **Menge von Konvergenzfaktoren für** $\mathfrak{g}$, falls das Produkt $\prod_{\mathfrak{p}\in\mathbb{P}(k)}(\lambda_\mathfrak{p}^{-1}\mu_\mathfrak{p})$ absolut konvergiert. Mittels solchen Konvergenzfaktoren sind wir nun in der Lage den Begriff des Tamagawa-Maßes auf $\mathfrak{g}_\mathbb{A}$ zu definieren.

Definition. Ist $(\lambda_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}\in\mathbb{P}(k)}$ eine Menge von Konvergenzfaktoren für $\mathfrak{g}$, so heißt das Haar-Maß Ω, das auf dem S-ganzen Adel $\prod_{\mathfrak{p}\notin S}\mathfrak{g}_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}\times\prod_{\mathfrak{p}\in S}\mathfrak{g}_{k_\mathfrak{p}}$ durch

$$|\operatorname{disc}(k:\mathbb{Q})|^{-\frac{n}{2}}\prod_{\mathfrak{p}\in\mathbb{P}(k)}(\lambda_\mathfrak{p}^{-1}\mu_\mathfrak{p})$$

definiert ist, das **Tamagawa-Maß auf** $\mathfrak{g}_\mathbb{A}$ **bezüglich der Konvergenzfaktoren** $(\lambda_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}\in\mathbb{P}(k)}$. Falls $(1)_{\mathfrak{p}\in\mathbb{P}(k)}$ eine Menge von Konvergenzfaktoren für $\mathfrak{g}$ ist, so heißt Ω das **Tamgawa-Maß auf** $\mathfrak{g}_\mathbb{A}$.

Aus Abschnit 1.1 (Lemma 1.1.1) von [**Ono65**] erhalten wir, dass für halbeinfache Gruppen die Folge $(1)_{\mathfrak{p}\in\mathbb{P}(k)}$ stets eine Menge von Konvergenzfaktoren bildet, sodass wir in unserem Falle ein *echtes* Tamagawa-Maß Ω auf $\mathfrak{g}_\mathbb{A}$ erhalten. Bezeichne mit τ das von Ω induzierte Maß auf $\mathfrak{g}\setminus\mathfrak{g}_\mathbb{A}$ (für die Existenz siehe zum Beispiel Abschnitt 1.1 von [**Ono65**] oder Kapitel 2, Abschnitt 2.4 von [**Wei61**]).

Definition. Ist $\mathfrak{g}$ eine unimodulare, lineare algebraische k-Gruppe, so heißt

$$\tau(\mathfrak{g}) := \tau(\mathfrak{g}\setminus\mathfrak{g}_\mathbb{A}) < \infty$$

die **Tamagawazahl** von $\mathfrak{g}$.

Für halbeinfache, lineare algebraische Gruppen ist die Tamagawazahl endlich und ihre Berechnung ist zu einer großen Aufgabe für viele Mathematiker geworden. André Weil berechnet in [**Wei61**] für viele Klassen von linearen algebraischen Gruppen die Tamagawazahl. In allen diesen Fällen in denen die lineare algebraische Guppe einfach zusammenhängend ist, ist die Tamagawazahl ganzzahlig und gleich 1. Dies ist jedoch nicht immer der Fall, denn Ono zeigt in [**Ono63**] Beispiele auf, in denen die Tamagawazahl nicht ganzzahlig ist. Die folgende Vermutung wird André Weil zugeschrieben.

Vermutung (Weil). *Die Tamagawazahl einer einfach zusammenhängenden, halbeinfachen linearen algebraischen Gruppe über einem Zahlkörper ist* 1.

Die Vermutung konnte zunächst für viele Fälle gezeigt werden. Am Ende waren es Kottwitz und Chernousov, die mit ihren Arbeiten [**Kot88**] und [**Che89**] die Weilsche Vermutung abschließend beweisen konnten.

Die Tamagawazahlen, die wir in dieser Arbeit benötigen werden, sind in der Literatur bekannt. Wir werden die entsprechenden Arbeiten und Resultate zu gegebener Zeit zitieren.

1.3. Eine allgemeine Maßformel und ihre Anwendung

Sei k ein algebraischer Zahlkörper und $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache, totaldefinite, lineare algebraische k-Gruppe, d.h. insbesondere ist $\prod_{\mathfrak{p}\text{ unendlich}}\mathfrak{g}_{k_\mathfrak{p}}$ kompakt. Aus dem vorherigen

Abschnitt 1.2 erhalten wir ein Tamagawa-Maß Ω auf $\mathfrak{g}_{\mathbb{A}}$. Wir haben ebenfalls gesehen, dass Ω ein (invariantes) Maß τ auf $\mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}_{\mathbb{A}}$ induziert. Wegen Proposition 1.2.2 lässt sich das Maß τ kanonisch auf $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{A},M} \setminus \mathfrak{g}_{\mathbb{A},M}$ übertragen. Als diskrete Untergruppe einer kompakten Gruppe ist $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{A},M}$ endlich und wir erhalten mit Theorem 1.2.3:

$$\begin{aligned}
\tau(\mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}_{\mathbb{A}}) &= \tau\left(\bigcup_{i=1}^{t} \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}\mathbf{f}_i \mathfrak{g}_{\mathbb{A},M}\right) = \sum_{i=1}^{t} \tau\left(\mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}\mathbf{f}_i \mathfrak{g}_{\mathbb{A},M}\right) = \sum_{i=1}^{t} \tau\left(\mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}\mathbf{f}_i \mathfrak{g}_{\mathbb{A},M} \mathbf{f}_i^{-1}\right)) \\
&= \sum_{i=1}^{t} \tau\left(\mathfrak{g} \cap \mathbf{f}_i \mathfrak{g}_{\mathbb{A},M} \mathbf{f}_i^{-1} \setminus \mathbf{f}_i \mathfrak{g}_{\mathbb{A},M} \mathbf{f}_i^{-1}\right) = \sum_{i=1}^{t} \tau\left(\mathfrak{g} \cap \mathbf{f}_i \mathfrak{g}_{\mathbb{A},M} \mathbf{f}_i^{-1} \setminus \mathfrak{g}_{\mathbb{A},M}\right) \\
&\overset{*}{=} \sum_{i=1}^{t} \Omega\left(\mathfrak{g}_{\mathbb{A},M}\right) \left|\mathfrak{g} \cap \mathbf{f}_i \mathfrak{g}_{\mathbb{A},M} \mathbf{f}_i^{-1}\right|^{-1} = \Omega\left(\mathfrak{g}_{\mathbb{A},M}\right) \sum_{i=1}^{t} \left|\mathfrak{g} \cap \mathbf{f}_i \mathfrak{g}_{\mathbb{A},M} \mathbf{f}_i^{-1}\right|^{-1}.
\end{aligned}$$

Hier geht bei $(*)$ ein, dass das Haarsche-Maß auf einer endlichen Menge genau das Zählmaß ist und

$$\tau\left(\mathfrak{g} \cap \mathbf{f}_i \mathfrak{g}_{\mathbb{A},M} \mathbf{f}_i^{-1} \setminus \mathfrak{g}_{\mathbb{A},M}\right) \left|\mathfrak{g} \cap \mathbf{f}_i \mathfrak{g}_{\mathbb{A},M} \mathbf{f}_i^{-1}\right| = \Omega\left(\mathfrak{g}_{\mathbb{A},M}\right),$$

was daran liegt, dass $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{A},M}$ diskret und $\mathfrak{g}$ unimodular ist ([**PR94**], Kapitel 3, Abschnitt 3.5).

Definition. Die von der Wahl der $\mathbf{f}_i$ unabhängige Zahl

$$\mathcal{M}(\mathfrak{g}, M) := \sum_{i=1}^{t} \left|\mathfrak{g} \cap \mathbf{f}_i \mathfrak{g}_{\mathbb{A},M} \mathbf{f}_i^{-1}\right|^{-1} = \frac{\tau(\mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}_{\mathbb{A}})}{\Omega\left(\mathfrak{g}_{\mathbb{A},M}\right)}$$

heißt das **Maß** von $\mathfrak{g}$ bezüglich M und die Gleichung wird als **allgemeine Maßformel** bezeichnet (siehe auch Abschnitt 1 von [**Reh71**]).

Als Anwendung der allgemeinen Maßformel wollen wir nun die Minkowski-Siegelsche Maßformel für quadratische $\mathbb{Z}$-Gitter und die Maßformel für hermitesche $\mathcal{O}_K$-Gitter, wobei K ein CM-Körper ist, herleiten. Erstere wurde 1935 von Siegel in [**Sie35**] beschrieben. Später, etwa 1959, stellte sich heraus, dass Tamagawa bereits klar war, dass man mit seiner Theorie der Tamagawa-Maße und der Tamagawa-Zahl den Siegelschen Hauptsatz beweisen kann. Später nutze Böge in Abschnitt 8 von [**Bög66**] diese Theorie, um die Maßformel für hermitesche $\mathcal{O}_K$-Gitter, mit K imaginärquadratisch über $\mathbb{Q}$, zu berechnen, was ohne Tamagawas Theorie zuvor 1941 von Braun in [**Bra41**] gemacht wurde. Schließlich gibt Rehmann, in Anlehnung an Böge, in seiner Dissertation [**Reh71**] lokale Maße für die Situation der allgemeinen CM-Körper an.

Wir werden im Folgenden zwei konkrete Tamagawa-Zahlen benötigen, die in der Literatur einschlägig bekannt sind. Siehe zum Beispiel [**Wei61**], Abschnitt 8 von [**Bög66**] und Abschnitt 4 von [**Reh71**].

Theorem 1.3.1. *Die Tamagawa-Zahl der Automorphismengruppe einer quadratischen Form beziehungsweise einer hermiteschen Form über einem* CM*-Körper ist* 2.

Beginnen werden wir mit der Minkowski-Siegelschen Maßformel. Sei also (M, b) ein quadratisches $\mathbb{Z}$-Gitter auf einem m-dimensionalen, quadratischen $\mathbb{Q}$-Vektorraum (V, b). Wenden wir nun die allgemeine Theorie auf die halbeinfache, lineare algebraische $\mathbb{Q}$-Gruppe $\mathrm{Aut}(V, b)$ an, so erhalten wir

$$\mathrm{Aut}(V,b)_{\mathbb{A}} = \left\{ (f_p)_p \in \prod_{p \in \mathbb{P}(\mathbb{Q})} \mathrm{Aut}(V_p, b_p) : f_p(M_p) = M_p \text{ für fast alle } p \in \mathbb{P}(\mathbb{Q}) \right\}$$

und $\mathrm{Aut}(V, b)_{\mathbb{A}}$ operiert transitiv auf dem Geschlecht von (M, b). Die Klassenzahl t von $\mathrm{Aut}(V, b)$ bezüglich M ist dann die Anzahl der Isomorphieklassen im Geschlecht von (M, b), sprich die Klassenzahl des Geschlechtes. Des Weiteren überlegt man sich leicht, dass für die $\mathbf{f}_i$ aus Theorem 1.2.3

$$\mathrm{Aut}(V, b) \cap (\mathbf{f}_i \, \mathrm{Aut}(V, b)_{\mathbb{A},M} \mathbf{f}_i^{-1}) = \mathrm{Aut}(\mathbf{f}_i.M, b)$$

gilt. Damit ist

$$\mathcal{M}(\mathrm{Aut}(V, b), M) = \omega_{\mathbb{Z}}(M, b)$$

also genau das Maß des Geschlechtes des quadratischen $\mathbb{Z}$-Gitters (M, b).

Betrachten wir nun den Stabilisator von (M, b), so ist

$$\mathrm{Aut}(V, b)_{\mathbb{A},M} = \prod_{p \in \mathbb{P}(\mathbb{Q})} \mathrm{Aut}(M_p, b_p).$$

Martin Kneser berechnet in Kapitel 10, Abschnitte 32, 33 von [**Kne02**] (siehe auch Abschnitte 7, 8 von [**Tam66**]) für jede Primstelle $p \in \mathbb{P}(\mathbb{Q})$ explizit die lokalen Haarschen-Maße μ_p und es ist

$$\mu_p(\mathrm{Aut}(M_p, b_p)) = \mathrm{d}_p(M)^{\frac{m-1}{2}} \alpha_p(M), \quad p \text{ endlich },$$

sowie

$$\mu_\infty(\mathrm{Aut}(M_\infty, b_\infty)) = 2\gamma(m)^{-1}.$$

Hierbei bezeichnet man mit

$$\alpha_p(M) := \frac{1}{2} \lim_{s \to \infty} p^{\frac{-sm(m-1)}{2}} \mathrm{A}_{p^s}(M, M)$$

die **lokale Darstellungsdichte** von M an p. Unter $\mathrm{A}_{p^s}(M, M)$ versteht man die Anzahl der $\mathbb{Z}$-linearen Abbildungen $\sigma : M \to M$, die verschieden modulo $p^s M$ sind und $b(\sigma(x), \sigma(y)) = b(x, y) \mod p^s$ für alle $x, y \in M$ erfüllen. Weiter ist $\gamma(m)$ rekursiv durch

$$\gamma(0) := 1, \;\; \gamma(1) := \frac{1}{2}, \;\; \gamma(2) := \frac{1}{2\pi}, \;\; \gamma(m) := \gamma(m-1) \frac{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}{m\pi^{\frac{m}{2}}}, \quad m \geq 3$$

definiert. Für die Wohldefiniertheit und Eigenschaften der lokalen Darstellungsdichten siehe [**Sie35**].

Theorem 1.3.2 (Minkowski-Siegel). *Für ein positiv-definites, quadratisches $\mathbb{Z}$-Gitter (M, b) auf einem $\mathbb{Q}$-Vektorraum der Dimension m ist*

$$\omega_{\mathbb{Z}}(M, b) = \gamma(m)\, \mathrm{d}(M)^{-\frac{m-1}{2}} \prod_{p \in \mathbb{P}(\mathbb{Q}), p \neq \infty} \alpha_p(M)^{-1}.$$

Beweis. Aus Theorem 1.3.1 (i) folgt, dass $\tau(\mathrm{Aut}(V, b)_{\mathbb{A}} / \mathrm{Aut}(V, b)) = 2$ ist und wir erhalten aus der allgemeinen Maßformel, sowie mit den obigen lokalen Maßen $\mu_p(\mathrm{Aut}(M_p, b_p))$:

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbb{Z}}(M, b) = \mathcal{M}(\mathrm{Aut}(V, b), M) &= \frac{\tau(\mathrm{Aut}(V, b)_{\mathbb{A}} / \mathrm{Aut}(V, b))}{\Omega(\mathrm{Aut}(V, b)_{\mathbb{A}, M})} \\ &= \gamma(m)\, \mathrm{d}(M)^{-\frac{m-1}{2}} \prod_{p \in \mathbb{P}(\mathbb{Q}), p \neq \infty} \alpha_p(M)^{-1}. \end{aligned}$$

Hierbei geht ein, dass $\Omega(\mathrm{Aut}(V, b)_{\mathbb{A}, M}) = \prod_{p \in \mathbb{P}(\mathbb{Q})} \mu_p(\mathrm{Aut}(M_p, b_p))$, vgl. Definition von Ω. $\square$

Kommen wir nun zu der Maßformel für hermitesche Gitter. Es sei $K : k$ eine quadratische Körpererweiterung mit Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$ und nicht-trivialen k-Automorphismus $^{-} : K \to K$. Weiter sei (M, h) ein bezüglich $^{-}$ hermitesches $\mathcal{O}_K$-Gitter auf einem m-dimensionalen, hermiteschen K-Vektorraum (V, h). Hierbei nehmen wir an, dass die Form h total-definit ist, d.h. $h_{\mathfrak{p}}$ ist positiv-definit für jede unendliche Primstelle $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(k)$. Daraus resultiert, dass

zum Ersten: k totalreell ist und

zum Zweiten: $K : k$ imaginärquadratisch ist,

da es über reellquadratischen Erweiterungen totalreeller Körper keine totaldefiniten, hermiteschen Formen gibt, siehe dazu zum Beispiel Abschnitt 1 von [**Reh71**].

Wir wenden nun die oben beschriebene Vorgehensweise auf die halbeinfache, lineare algebraische k-Gruppe $\mathrm{Aut}(V, h)$ an und erhalten wie bei der Minkowski-Siegelschen Formel, dass

$$\mathrm{Aut}(V, h)_{\mathbb{A}} = \left\{ (f_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(k)} \mathrm{Aut}(V_{\mathfrak{p}}, h_{\mathfrak{p}}) : f_{\mathfrak{p}}(M_{\mathfrak{p}}) = M_{\mathfrak{p}} \text{ für fast alle } \mathfrak{p} \right\},$$

$\mathrm{Aut}(V, h)_{\mathbb{A}}$ transitiv auf dem Geschlecht des hermiteschen $\mathcal{O}_K$-Gitters (M, h) operiert, die Klassenzahl t von $\mathrm{Aut}(V, h)$ bezüglich M nichts anderes als die Klassenzahl des Geschlechtes des hermiteschen $\mathcal{O}_K$-Gitters (M, h) ist, für die $\mathbf{f}_i$ aus Theorem 1.2.3

$$\mathrm{Aut}(V, h) \cap (\mathbf{f}_i \,\mathrm{Aut}(V, h)_{\mathbb{A}, M} \mathbf{f}_i^{-1}) = \mathrm{Aut}(\mathbf{f}_i . M, h)$$

gilt und

$$\mathcal{M}(\mathrm{Aut}(V, h), M) = \omega_{\mathcal{O}_K}(M, h)$$

also genau das Maß des Geschlechtes des hermitesches $\mathcal{O}_K$-Gitters (M, h) ist.

Betrachten wir nun den Stabilisator von (M, h), so ist

$$\mathrm{Aut}(V, h)_{\mathbb{A}, M} = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(k)} \mathrm{Aut}(M_{\mathfrak{p}}, h_{\mathfrak{p}}).$$

Aus Abschnitt 4 von [**Reh71**] entnehmen wir für die Primstellen $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(k)$ die lokalen Haarschen-Maße $\mu_\mathfrak{p}$. Es ist

$$\mu_\mathfrak{p}(\mathrm{Aut}(M_\mathfrak{p}, h_\mathfrak{p})) = |\mathrm{disc}(K_\mathfrak{p} : k_\mathfrak{p})|_\mathfrak{p}^{-\frac{m(m+1)}{4}} \, |\delta(M_\mathfrak{p})|_\mathfrak{p}^{-m} \, \alpha_\mathfrak{p}(M),$$

sowie

$$\prod_{\mathfrak{p} \in \infty} \mu_\mathfrak{p}(\mathrm{Aut}(M_\mathfrak{p}, h_\mathfrak{p})) = \sqrt{\mathrm{disc}(k : \mathbb{Q})}^{-m^2} \left(\prod_{j=1}^{m} \frac{(2\pi)^j}{(j-1)!} \right)^n,$$

wobei $K_\mathfrak{p} = K \otimes_k k_\mathfrak{p}$, $n = [k : \mathbb{Q}]$, $\delta(M_\mathfrak{p})$ die Diskriminate von $(M_\mathfrak{p}, h_\mathfrak{p})$ und

$$\alpha_\mathfrak{p}(M) = \mathrm{N}_{k:\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{-m^2} \lim_{s \to \infty} \mathrm{A}_{\mathfrak{p}^s}(M, M)$$

die **lokale Darstellungsdichte** von M an $\mathfrak{p}$ ist. Dabei ist $\mathrm{A}_{\mathfrak{p}^s}(M, M)$ die Anzahl der $\mathcal{O}_k$-linearen Abbildungen $\sigma : M \to M$, die verschieden modulo $\mathfrak{p}^s M$ sind und $h(\sigma(x), \sigma(y)) = h(x, y) \mod \mathfrak{p}^s$ für alle $x, y \in M$ erfüllen. Diese lokalen Maße induzieren ein Tamagawa-Maß Ω auf $\mathrm{Aut}(V, h)_\mathbb{A}$.

Theorem 1.3.3. *Sei $K : k$ eine quadratische Körpererweiterung und (M, h) ein total-definites, hermitesches $\mathcal{O}_K$-Gitter auf einem m-dimensionalen K-Vektorraum. Dann ist*

$$\omega_{\mathcal{O}_K}(M, h) = 2\sqrt{\mathrm{disc}(k : \mathbb{Q})}^{m^2} \left(\prod_{j=1}^{m} \frac{(j-1)!}{(2\pi)^j} \right)^n \mathrm{N}_{k:\mathbb{Q}}(\mathrm{disc}(K : k))^{\frac{m(m+1)}{4}} \cdot \mathrm{N}_{K:\mathbb{Q}}(\delta(M))^m \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(k),\ \mathfrak{p} \text{ endlich}} \alpha_\mathfrak{p}(M)^{-1}.$$

Beweis. Mit Theorem 1.3.1 (ii) erhalten wir, dass $\tau(\mathrm{Aut}(V, b)_\mathbb{A} / \mathrm{Aut}(V, b)) = 2$ ist, sodass wir mit der allgemeinen Maßformel und den obigen lokalen Haarschen-Maßen das Maß berechnen können:

$$\begin{aligned} \omega_{\mathcal{O}_K}(M, h) = \mathcal{M}(\mathrm{Aut}(V, h), M) &= \frac{\tau(\mathrm{Aut}(V, h)_\mathbb{A} / \mathrm{Aut}(V, h))}{\Omega(\mathrm{Aut}(V, h)_{\mathbb{A}, M})} \\ &= 2\sqrt{\mathrm{disc}(k : \mathbb{Q})}^{m^2} \left(\prod_{j=1}^{m} \frac{(j-1)!}{(2\pi)^j} \right)^n \mathrm{N}_{k:\mathbb{Q}}(\mathrm{disc}(K : k))^{\frac{m(m+1)}{4}} \cdot \\ &\quad \mathrm{N}_{K:\mathbb{Q}}(\delta(M))^m \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(k),\ \mathfrak{p} \text{ endlich}} \alpha_\mathfrak{p}(M)^{-1}. \end{aligned}$$

Hierbei geht ein, dass $\Omega(\mathrm{Aut}(V, h)_{\mathbb{A}, M}) = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(k)} \mu_\mathfrak{p}(\mathrm{Aut}(M_\mathfrak{p}, h_\mathfrak{p}))$, vgl. Definition von Ω. □

Die Auswertung der Formeln aus den Theoremen 1.3.2 und 1.3.3 sind mehr oder weniger schwer. Für die Auswertung der Maßformel von Minkowski-Siegel gibt es Magma-Skripte, [**BCP97**], wie zum Beispiel in unserer Arbeitsgruppe von Michael Jürgens und Marc Zimmermann geschrieben wurden. Die Auswertung der Maßformel im hermitschen Fall ist da schon erheblich schwieriger. Walter Feit hat in seiner Arbeit [**Fei78**], Abschnitt 4, für den Fall, dass man die imaginärquadratische Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\zeta_3) : \mathbb{Q}$ und hermitesche $\mathbb{Z}[\zeta_3]$-Gitter mit Diskriminate 1 betrachtet, die hermitesche Maßformel rekursiv ausgewertet. Wir wollen nun eine sehr ähnliche Situation betrachten und zwar hermitesche $\mathbb{Z}[\zeta_3]$-Gitter (M,h), sodass (M_p,h_p) für alle $p \neq 3$ unimodular ist und (M_3,h_3) eine Jordan-Zerlegung der Form

$$(N_1,h_1) \oplus (N_2,h_2)$$

besitzt, wobei (N_1,h_1) unimodular oder 0 und (N_2,h_2) $(1-\zeta_3)$-modular oder 0 ist. Bezeichne mit n_i den Rang von N_i. Unser Ziel ist es, die folgende Formel auszuwerten:

$$\omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(M,h) = 2 \cdot 3^{\frac{m(m+1)}{4}} \det(h)^m \prod_{j=1}^{m} \frac{(j-1)!}{(2\pi)^j} \prod_{p \text{ Primzahl}} \alpha_p(M)^{-1}.$$

Die Schwierigkeit liegt darin, das Produkt der lokalen Darstellungsdichten zu bestimmen. Wir entnehmen daher aus Abschnitt 5 von [**HK89**] $(p \neq 3)$ und aus Abschnitt 3 (Theorem 3.6) von [**Mis00**] die folgenden Formeln der lokalen Darstellungsdichten $\alpha_p(M)$:

$$\alpha_p(M) = \prod_{i=1}^{m} \left(1 - \left(\frac{p}{3}\right)^i p^{-i}\right) \quad \text{für } p \neq 2,3,$$

$$\alpha_2(M) = \prod_{i=1}^{m} \left(1 - (-1)^i\, 2^{-i}\right) \quad \text{und}$$

$$\alpha_3(M) = 2 \cdot 3^{\frac{n_2(n_2+1)}{2}} \prod_{i=1}^{\frac{n_2}{2}} \left(1 - 3^{-2i}\right) \cdot$$

$$\begin{cases} \prod_{i=1}^{\frac{n_1}{2}} \left(1-3^{-2i}\right) \left(1 + \left(\frac{(-1)^{\frac{n_1}{2}}\lambda}{3}\right) 3^{-\frac{n_1}{2}}\right)^{-1} & n_1 \text{ gerade} \\ \prod_{i=1}^{\frac{n_1-1}{2}} \left(1-3^{-2i}\right) & n_1 \text{ ungerade} \end{cases}$$

Hierbei ist $\left(\frac{p}{3}\right)$ das Legendre-Symbol und λ die Klasse der Determinante. Mit diesen lokalen Darstellungsdichten berechnen wir dann

$$\begin{aligned} \prod_{p \text{ Primzahl}} \alpha_p(M)^{-1} &= \alpha_2(M)^{-1}\alpha_3(M)^{-1} \prod_{i=1}^{m} \begin{cases} \zeta(i)(1-2^{-i})(1-3^{-i}) & i \text{ gerade} \\ L(i,\chi)(1+2^{-i}) & i \text{ ungerade} \end{cases} \\ &= \alpha_3(M)^{-1} \prod_{i=1}^{m} \begin{cases} \zeta(i)(1-3^{-i}) & i \text{ gerade} \\ L(i,\chi) & i \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

wobei $L(i,\chi)$ die Dirichlet-Reihe zum Dirichlet-Charakter $\chi(k) = \left(\frac{k}{3}\right)$ ist. Nun sind $\zeta(i)$, für i gerade, und $L(i,\chi)$, für i ungerade, leicht berechnenbar, denn es ist

$$\zeta(2k) = \frac{(2\pi)^{2k}}{(2k)!2(-1)^{k-1}} B_{2k}(0), \text{ und } L(2k+1,\chi) = \frac{(2\pi)^{2k+1}}{(2k+1)!\sqrt{3}(-1)^{k-1}} B_{2k+1}\left(\frac{1}{3}\right).$$

Hierbei bezeichnen wir mit $B_n(X)$ das n-te Bernoulli-Polynom. Die folgende Maple-Prozedur berechnet bei der Übergabe von n_1, n_2, m, $\det(h)$ und λ das Maß $\omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(M,h)$.

```
hermitian_measure := proc(n1, n2, m, det, lambda)
  a3:=2*3^(n2*(n2+1)/2):
  for i from 1 by 1 to n2/2 do
    a3:=a3*(1-3^(-2*i)):
  end do;
  if type(n1,even) then
    hilf:=1:
    for i from 1 by 1 to n1/2 do
      hilf:=hilf*(1-3^(-2*i)):
    end do;
    a3:=a3*hilf*(1+legendre((-1)^(n1/2)*lambda,3)*
                                              3^(-n1/2))^(-1):
  else
    hilf:=1:
    for i from 1 by 1 to (n1-1)/2 do
      hilf:=hilf*(1-3^(-2*i)):
    end do;
    a3:=a3*hilf:
  end if;
  prod:=a3^(-1):
  for i from 1 by 1 to m do
    if type(i,even) then
      prod:=prod*Zeta(i)*(1-3^(-i)):
    else
      prod:=prod*(2*Pi)^i/((i)!*sqrt(3)*(-1)^((i-1)/2-1))*
                                              bernoulli(i,1/3):
    end if;
  end do;
  measure:=2*3^(m*(m+1)/4)*det^m*prod:
  for i from 1 by 1 to m do
      measure:=measure*(i-1)!/(2*Pi)^i:
  end do;
  measure;
end proc;
```

KAPITEL 2

Eine Maßformel für hermitesche $\mathbb{Z}G$-Gitter

Wir werden in diesem Kapitel eine Maßformel für hermitesche $\mathbb{Z}G$-Gitter herleiten. Dazu sei (M,h) stets ein hermitesches $\mathbb{Z}G$-Gitter auf einem hermiteschen $\mathbb{Q}G$-Modul (V,h).
Im ersten Abschnitt studieren wir die Adelgruppe der Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(V,h)$ und wie diese auf dem Geschlecht des hermiteschen $\mathbb{Z}G$-Gitters (M,h) operiert. Danach beschäftigen wir uns im zweiten Abschnitt mit dem Tamagawa-Maß auf $\mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A}}$. Es stellt sich heraus, dass dieses das Produktmaß zweier bekannter Tamagawa-Maße auf linearen algebraischen Gruppen über $\mathbb{Q}$ beziehungsweise $\mathbb{Q}(\zeta_\ell)$ ist und das auch die Tamagawazahl von $\mathrm{Aut}(V,h)$ sich als Produkt zweier solcher schreiben lässt. Wir werden zeigen, dass

$$\omega_{\mathbb{Z}G}(M,h) = \gamma\omega_{\mathbb{Z}}(M_0,h_0)\omega_{\mathbb{Z}[\zeta_\ell]}(M_1,h_1),$$

wobei $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}[\zeta_\ell])(M,h) = (M_0,h_0)\oplus(M_1,h_1)$ die Zerlegung über der Maximalordnung nach Abschnitt 1.1 und γ ein Korrekturfaktor ist. Ein Ergebnis dieses Abschnittes wird dann die Berechnung von γ sein.

2.1. Die Adelisierung der Automorphismengruppe eines hermiteschen $\mathbb{Q}G$-Moduls

Wir beginnen diesen Abschnitt mit der Definition der adelischen Gruppe von $\mathrm{Aut}(V,h)$. Als lineare algebraische $\mathbb{Q}$-Gruppe erhalten wir diese aus der allgemeinen Theorie, wie in Abschnitt 1.2.

Definition. Die Gruppe

$$\mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A}} := \left\{ \mathbf{f} = (f_p)_p \in \prod_{p\in\mathbb{P}(\mathbb{Q})} \mathrm{Aut}(V_p,h_p) : f_p(M_p) = M_p \text{ für fast alle } p\in\mathbb{P}(\mathbb{Q}) \right\}$$

heißt die **adelische Gruppe** von $\mathrm{Aut}(V,h)$

Die obige Definition ist unabhängig von der Wahl des hermiteschen $\mathbb{Z}G$-Gitters (M,h), denn für jedes andere hermitesche $\mathbb{Z}G$-Gitter (M',h) auf (V,h) gilt nach Proposition 1.1.13, dass

$$(\mathbb{Z}_pG)M' = M_p$$

für fast alle $p\in\mathbb{P}(\mathbb{Q})$.

Proposition 2.1.1. *Betrachten wir die Zerlegung $(V,h) = (V_0,h_0)\oplus(V_1,h_1)$ gemäß Proposition 1.1.7, so gilt:*

$$\mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A}} = \mathrm{Aut}(V_0,h_0)_{\mathbb{A}} \times \mathrm{Aut}(V_1,h_1)_{\mathbb{A}}$$

Beweis. Die Proposition 1.1.7 liefert uns Zerlegungen

$$\begin{aligned}(V_p, h_p) &= (V_{0,p}, h_{0,p}) \oplus \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathbb{P}(\mathbb{Q}(\zeta_\ell+\zeta_\ell^{-1})),\ \mathfrak{p}|p} (V_{1,\mathfrak{p}}, h_{1,\mathfrak{p}})\\ (M_p, h_p) &= (M_{0,p}, h_{0,p}) \oplus \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathbb{P}(\mathbb{Q}(\zeta_\ell+\zeta_\ell^{-1})),\ \mathfrak{p}|p} (M_{1,\mathfrak{p}}, h_{1,\mathfrak{p}}),\quad p\neq\ell,\\ (V_\infty, h_\infty) &= (V_{0,\infty}, h_{0,\infty}) \oplus (V_{1,\infty}, h_{1,\infty}).\end{aligned}$$

Diese induzieren direkte Zerlegungen der Automorphismengruppen

$$\begin{aligned}\mathrm{Aut}(V_p, h_p) &= \mathrm{Aut}(V_{0,p}, h_{0,p}) \times \prod_{\mathfrak{p}\in\mathbb{P}(\mathbb{Q}(\zeta_\ell+\zeta_\ell^{-1})),\ \mathfrak{p}|p} \mathrm{Aut}(V_{1,\mathfrak{p}}, h_{1,\mathfrak{p}})\\ \mathrm{Aut}(M_p, h_p) &= \mathrm{Aut}(M_{0,p}, h_{0,p}) \times \prod_{\mathfrak{p}\in\mathbb{P}(\mathbb{Q}(\zeta_\ell+\zeta_\ell^{-1})),\ \mathfrak{p}|p} \mathrm{Aut}(M_{1,\mathfrak{p}}, h_{1,\mathfrak{p}}),\quad p\neq\ell\\ \mathrm{Aut}(V_\infty, h_\infty) &= \mathrm{Aut}(V_{0,\infty}, h_{0,\infty}) \times \mathrm{Aut}(V_{1,\infty}, h_{1,\infty})\end{aligned}$$

da es keine Homomorphismen zwischen den direkten Summanden gibt. Damit berechnen wir dann

$$\begin{aligned}\mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A}} &= \big\{(f_p)_{p\in\mathbb{P}(\mathbb{Q})} : f_p(M_p) = M_p \text{ für fast alle } p\in\mathbb{P}(\mathbb{Q})\big\}\\ &= \{((f_p^0)_{p\in\mathbb{P}(\mathbb{Q})},\ ((f_\mathfrak{p}^1)_{\mathfrak{p}|p})_{p\in\mathbb{P}(\mathbb{Q})} : f_p^0(M_{0,p}) = M_{0,p},\ \ f_\mathfrak{p}^1(M_{1,\mathfrak{p}}) = M_{1,\mathfrak{p}}\\ &\qquad \text{für fast alle } p\in\mathbb{P}(\mathbb{Q}),\ \mathfrak{p}\in\mathbb{P}(\mathbb{Q}(\zeta_\ell+\zeta_\ell^{-1}))\}\\ &= \{(f_p^0)_{p\in\mathbb{P}(\mathbb{Q})} : f_p^0(M_{0,p}) = M_{0,p} \text{ für fast alle } p\in\mathbb{P}(\mathbb{Q})\}\\ &\quad\times \{(f_\mathfrak{p}^1)_{\mathfrak{p}\in\mathbb{P}(\mathbb{Q}(\zeta_\ell+\zeta_\ell^{-1}))} : f_\mathfrak{p}^1(M_{1,\mathfrak{p}}) = M_{1,\mathfrak{p}} \text{ für fast alle } \mathfrak{p}\in\mathbb{P}(\mathbb{Q}(\zeta_\ell+\zeta_\ell^{-1}))\}\\ &= \mathrm{Aut}(V_0,h_0)_{\mathbb{A}} \times \mathrm{Aut}(V_1,h_1)_{\mathbb{A}}.\end{aligned}$$

□

Korollar 2.1.2. *Es ist:*

$$\mathrm{Aut}(V,h)\setminus\mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A}} = \mathrm{Aut}(V_0,h_0)\setminus\mathrm{Aut}(V_0,h_0)_{\mathbb{A}} \times \mathrm{Aut}(V_1,h_1)\setminus\mathrm{Aut}(V_1,h_1)_{\mathbb{A}}$$

Beweis. Die Aussage folgt sofort aus Proposition 2.1.1 und

$$\mathrm{Aut}(V,h) = \mathrm{Aut}(V_0,h_0)\times\mathrm{Aut}(V_1,h_1)$$

□

Vermöge der Zuordnung

$$f \mapsto \mathbf{f} = (f_p)_p$$

erhalten wir eine Einbettung der Gruppe $\mathrm{Aut}(V,h)$ ist die adelische Gruppe $\mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A}}$. Wir werden im Folgendem diese Einbettung als Identität verstehen, d.h. $\mathrm{Aut}(V,h)$ als Untergruppe von $\mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A}}$ auffassen.

Die folgende Proposition stellt einen Zusammenhang zwischen der adelischen Gruppe von $\mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A}}$ und dem Geschlecht, beziehungsweise von $\mathrm{Aut}(V,h)$ zu der Isomorphieklasse von (M,h) her.

Proposition 2.1.3. *Die Gruppe* $\mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A}}$, $\mathrm{Aut}(V,h)$ *operiert transitiv auf* $\mathrm{Gen}(M,h)$ *beziehungsweise auf der Isomorphieklasse von* (M,h).

Beweis. Für $\mathbf{f} = (f_p)_p$ und (L,h) aus dem Geschlecht von (M,h) setze

$$\mathbf{f}.L := \bigcap_{p\in\mathbb{P}(\mathbb{Q})} (V \cap f_p(L_p)).$$

Da L aus dem Geschlecht von M ist, gibt es für alle $p \in \mathbb{P}(\mathbb{Q})$ ein $g_p \in \mathrm{Aut}(V_p,h_p)$ mit $g_p(M_p) = L_p$. Nach Proposition 1.1.13 ist

$$(\mathbf{f}.L)_p = f_p(L_p),$$

für alle $p \in \mathbb{P}(\mathbb{Q})$. Setze demnach $\tilde{g}_p := f_p g_p \in \mathrm{Aut}(V_p,h_p)$, für $p \in \mathbb{P}(\mathbb{Q})$. Dann ist

$$\tilde{g}_p(M_p) = (f_p g_p)(M_p) = f_p(L_p) = (\mathbf{f}.L)_p,$$

d.h. $(\mathbf{f}.L,h)$ liegt im selben Geschlecht wie (M,h).
Bleibt noch zu zeigen, dass die Operation transitiv ist. Es genügt zu zeigen, dass es zu jedem L aus dem Geschlecht von M ein $\mathbf{f} \in \mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A}}$ gibt, sodass

$$\mathbf{f}.M = L.$$

Nach Proposition 1.1.13 gilt $M_p = L_p$ für fast alle $p \in \mathbb{P}(\mathbb{Q})$. Seien $p_1,\dots,p_n \in \mathbb{P}(\mathbb{Q})$ die Primstellen, wo $M_p \neq L_p$ und $g_p \in \mathrm{Aut}(V_p,h_p)$ mit $g_p(M_p) = L_p$ für alle $p \in \mathbb{P}(\mathbb{Q})$. Setze nun

$$f_p := \mathrm{id} \text{ für alle } p \in \mathbb{P}(\mathbb{Q}) \setminus \{p_1 \dots, p_n\}, \quad f_p := g_p \text{ für } p \in \{p_1 \dots, p_n\}.$$

Dann ist $\mathbf{f} := (f_p)_p \in \mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A}}$ und es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}.M &= \bigcap_{p\in\mathbb{P}(\mathbb{Q})} (V \cap f_p(M_p)) \\
&= \bigcap_{p\in\mathbb{P}(\mathbb{Q})\setminus\{p_1\dots,p_n\}} (V \cap \underbrace{f_p(M_p)}_{=M_p=L_p}) \cap \bigcap_{p\in\{p_1\dots,p_n\}} (V \cap \underbrace{f_p(M_p)}_{=g_p(M_p)=L_p}) \\
&= \bigcap_{p\in\mathbb{P}(\mathbb{Q})} (V \cap L_p) \\
&= L.
\end{aligned}$$

Schränken wir nun die obige Operation auf die Untergruppe $\mathrm{Aut}(V,h)$ ein, so erhalten wir eine transitive Operation auf der Isomorphieklasse von (M,h). □

Bezeichne mit $\mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A},M}$ den Stabilisator der Operation von $\mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A}}$ auf $\mathrm{Gen}(M,h)$, d.h.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A},M} &= \{\mathbf{f} \in \mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A}} : \mathbf{f}.M = M\} \\
&= \{\mathbf{f} \in \mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A}} : f_p(M_p) = M_p \text{ für alle } p \in \mathbb{P}(\mathbb{Q})\} \\
&= \prod_{p\in\mathbb{P}(\mathbb{Q})} \mathrm{Aut}(M_p,h_p).
\end{aligned}$$

Offenbar ist $\mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A},M}$ eine Untergruppe der adelischen Gruppe $\mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A}}$.

Proposition 2.1.4. *Es gibt eine disjunkte Zerlegung der adelischen Gruppe* $\mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A}}$ *der Form*

$$\mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A}} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{Aut}(V,h)\mathbf{f}_i \,\mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A},M},$$

wobei k die Klassenzahl des Geschlechts von (M,h) und $\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_k$ ein Repräsentantensystem der Doppelnebenklassen ist.

Beweis. Die Operation aus Proposition 2.1.3 liefert uns eine Bijektion

$$\mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A}}/\,\mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A},M} \longrightarrow \mathrm{Gen}(M,h),\ \mathbf{f}\,\mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A},M} \mapsto \mathbf{f}.M$$

Nun induziert die transitive Operation von $\mathrm{Aut}(V,h)$ auf der Isomorphieklasse von (M,h) eine Bijektion zwischen den Doppelnebenklassen von $\mathrm{Aut}(V,h)\backslash\mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A}}/\,\mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A},M}$ und den Isomorphieklassen in $\mathrm{Gen}(M,h)$. Bezeichnen wir ein Repräsentantensystem der Doppelnebenklassen mit $\mathbf{f_1},\ldots,\mathbf{f_k}$ so erhalten wir die gewünschte Gleichung

$$\mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A}} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{Aut}(V,h)\mathbf{f}_i \,\mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A},M},$$

wobei k die Klassenzahl der Geschlechtes von (M,h) ist. □

2.2. Das Tamagawa-Maß auf $\mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A}}$

In Abschnitt 1.2 haben wir gesehen was Tamagawa-Maße auf linearen algebraischen k-Gruppen sind. Mit Diesen und Proposition 2.1.1 werden wir ein Tamagawa-Maß auf $\mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A}}$ herleiten und damit zunächst eine allgemeine Form einer Maßformel für hermitesche $\mathbb{Z}G$-Gitter und dann die eigentliche Formel bestimmen.

Betrachte die Zerlegungen

$$(V,h) = (V_0,h_0)\oplus(V_1,h_1), \quad (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}[\zeta_\ell])(M,h) = (M_0,h_0)\oplus(M_1,h_1)$$

gemäß der Proposition 1.1.7. Erinnere daran, dass (M_0,h_0) ein quadratisches $\mathbb{Z}$-Gitter auf (V_0,h_0) und (M_1,h_1) ein hermitesches $\mathbb{Z}[\zeta_\ell]$-Gitter auf (V_1,h_1) ist. Für $p\in\mathbb{P}(\mathbb{Q})$ beziehungsweise $\mathfrak{p}\in\mathbb{P}(\mathbb{Q}(\zeta_\ell+\zeta_\ell^{-1}))$ haben wir in Abschnitt 1.3 lokale Haarsche-Maße $\mu_{0,p}$ und $\mu_{1,\mathfrak{p}}$ auf $\mathrm{Aut}(V_{0,p},h_{0,p})$ beziehungsweise $\mathrm{Aut}(V_{1,\mathfrak{p}},h_{1,\mathfrak{p}})$ angegeben. Diese induzieren jeweils ein Tamagawa-Maß Ω_0 und Ω_1 auf den Adelgruppen $\mathrm{Aut}(V_0,h_0)_{\mathbb{A}}$ beziehungsweise $\mathrm{Aut}(V_1,h_1)_{\mathbb{A}}$. Mit Proposition 2.1.1 erhalten wir zum Einen, dass $\mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A}}$ unimodular ist und zum Anderen, in Verbindung mit der allgemeinen Theorie zu Haar-Maßen aus Abschnitt 1.2, ein Tamagawa-Maß

$$\Omega := \Omega_0\times\Omega_1$$

auf $\mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A}}$, sowie lokale Haarsche-Maße

$$\mu_p := \mu_{0,p}\times\prod_{\mathfrak{p}\in\mathbb{Q}(\zeta_\ell+\zeta_\ell^{-1}),\ \mathfrak{p}|p}\mu_{1,\mathfrak{p}}$$

auf $\mathrm{Aut}(V_p,h_p)$. Des Weiteren erhält man mit Korollar 2.1.2 und den Tamagawa-Maßen Ω_0 und Ω_1 ein $\mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A}}$-invariantes Maß τ auf dem homogenen Raum $\mathrm{Aut}(V,h)\backslash\mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A}}$.

Proposition 2.2.1.

$$\omega_{\mathbb{Z}G}(M,h) = \frac{\tau(\operatorname{Aut}(V,h)\setminus \operatorname{Aut}(V,h)_{\mathbb{A}})}{\Omega(\operatorname{Aut}(V,h)_{\mathbb{A},M})}$$

Beweis. Mit Proposition 2.1.4, den Eigenschaften von τ und dem Homöomorphismus

$$\operatorname{Aut}(V,h)\cap \operatorname{Aut}(V,h)_{\mathbb{A},M}\setminus \operatorname{Aut}(V,h)_{\mathbb{A},M} \simeq \operatorname{Aut}(V,h)\setminus \operatorname{Aut}(V,h)\operatorname{Aut}(V,h)_{\mathbb{A},M}$$

berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\tau(\operatorname{Aut}(V,h)\setminus \operatorname{Aut}(V,h)_{\mathbb{A}}) &= \tau\left(\bigcup_{i=1}^{k} \operatorname{Aut}(V,h)\setminus \operatorname{Aut}(V,h)\mathbf{f}_i \operatorname{Aut}(V,h)_{\mathbb{A},M}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{k} \tau\left(\operatorname{Aut}(V,h)\setminus \operatorname{Aut}(V,h)\mathbf{f}_i \operatorname{Aut}(V,h)_{\mathbb{A},M}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{k} \tau\left(\operatorname{Aut}(V,h)\setminus \operatorname{Aut}(V,h)\mathbf{f}_i \operatorname{Aut}(V,h)_{\mathbb{A},M}\mathbf{f}_i^{-1}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{k} \tau\left(\operatorname{Aut}(V,h)\cap \mathbf{f}_i \operatorname{Aut}(V,h)_{\mathbb{A},M}\mathbf{f}_i^{-1}\setminus \mathbf{f}_i \operatorname{Aut}(V,h)_{\mathbb{A},M}\mathbf{f}_i^{-1}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{k} \tau\left(\operatorname{Aut}(V,h)\cap \mathbf{f}_i \operatorname{Aut}(V,h)_{\mathbb{A},M}\mathbf{f}_i^{-1}\setminus \operatorname{Aut}(V,h)_{\mathbb{A},M}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{k} \Omega\left(\operatorname{Aut}(V,h)_{\mathbb{A},M}\right)\left|\operatorname{Aut}(V,h)\cap \mathbf{f}_i \operatorname{Aut}(V,h)_{\mathbb{A},M}\mathbf{f}_i^{-1}\right|^{-1}\\
&= \Omega\left(\operatorname{Aut}(V,h)_{\mathbb{A},M}\right)\sum_{i=1}^{k} \left|\operatorname{Aut}(V,h)\cap \mathbf{f}_i \operatorname{Aut}(V,h)_{\mathbb{A},M}\mathbf{f}_i^{-1}\right|^{-1}.
\end{aligned}$$

Hier geht ein, dass $\operatorname{Aut}(V,h)\cap\mathbf{f}_i \operatorname{Aut}(V,h)_{\mathbb{A},M}\mathbf{f}_i^{-1}$ als diskrete Untergruppe einer kompakten Gruppe endlich ist ($\operatorname{Aut}(V_\infty,h_\infty)$ ist kompakt, da sie ein endliches Haarsches-Maß besitzt, Proposition 1.2.6) und invariante Maße auf endlichen Gruppen gerade Zählmaße sind. Des Weiteren geht bei obiger Rechnung

$$\tau\left(\operatorname{Aut}(V,h)\cap \mathbf{f}_i \operatorname{Aut}(V,h)_{\mathbb{A},M}\mathbf{f}_i^{-1}\setminus \operatorname{Aut}(V,h)_{\mathbb{A},M}\right) = \Omega\left(\operatorname{Aut}(V,h)_{\mathbb{A},M}\right)\left|\operatorname{Aut}(V,h)\cap \mathbf{f}_i \operatorname{Aut}(V,h)_{\mathbb{A},M}\mathbf{f}_i^{-1}\right|^{-1}$$

ein, was genauso wie bei der Rechnung zu Beginn von Abschnitt 1.3, an der Unimodularität von $\operatorname{Aut}(V,h)_{\mathbb{A}}$ und der Diskretheit von $\operatorname{Aut}(V,h)\cap\operatorname{Aut}(V,h)_{\mathbb{A},M}$ liegt. Nun sieht man leicht ein, dass

$$\operatorname{Aut}(V,h)\cap \mathbf{f}_i \operatorname{Aut}(V,h)_{\mathbb{A},M}\mathbf{f}_i^{-1} = \operatorname{Aut}(\mathbf{f}_i.M,h)$$

und $\mathbf{f}_i.M$ die Repräsentanten der Isomorphieklassen im Geschlecht von M durchläuft. Wir erhalten

$$\tau\left(\operatorname{Aut}(V,h)\setminus \operatorname{Aut}(V,h)_{\mathbb{A}}\right) = \Omega\left(\operatorname{Aut}(V,h)_{\mathbb{A},M}\right)\omega_{\mathbb{Z}G}(M,h)$$

was wir zeigen wollten. □

Da $\operatorname{Aut}(V,h)$ eine unimodulare, lineare algebraische $\mathbb{Q}$-Gruppe ist, ist die Tamagawazahl $\tau(\operatorname{Aut}(V,h)) = \tau(\operatorname{Aut}(V,h)\setminus\operatorname{Aut}(V,h)_{\mathbb{A}})$ wohldefiniert und endlich. Die nächste Proposition zeigt, dass wir sogar mehr haben.

Proposition 2.2.2. *Für die Tamagawazahl von* $\mathrm{Aut}(V,h)$ *gilt*

$$\tau(\mathrm{Aut}(V,h)) = \tau_0(\mathrm{Aut}(V_0,h_0)) \cdot \tau_1(\mathrm{Aut}(V_1,h_1)),$$

wobei $\tau_0(\mathrm{Aut}(V_0,h_0))$, $\tau_1(\mathrm{Aut}(V_1,h_1))$ *die Tamagawazahlen der entsprechenden algebraischen* $\mathbb{Q}$*- bzw.* $\mathbb{Q}(\zeta_\ell)$*-Gruppen sind.*

Beweis. Aus Korollar 2.1.2 erhalten wir

$$\mathrm{Aut}(V,h) \setminus \mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A}} = \mathrm{Aut}(V_0,h_0) \setminus \mathrm{Aut}(V_0,h_0)_{\mathbb{A}} \times \mathrm{Aut}(V_1,h_1) \setminus \mathrm{Aut}(V_1,h_1)_{\mathbb{A}}.$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned}\tau\left(\mathrm{Aut}(V,h) \setminus \mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A}}\right) &= \tau\left(\mathrm{Aut}(V_0,h_0) \setminus \mathrm{Aut}(V_0,h_0)_{\mathbb{A}} \times \mathrm{Aut}(V_1,h_1) \setminus \mathrm{Aut}(V_1,h_1)_{\mathbb{A}}\right)\\ &= \tau_0\left(\mathrm{Aut}(V_0,h_0) \setminus \mathrm{Aut}(V_0,h_0)_{\mathbb{A}}\right) \cdot \tau_1\left(\mathrm{Aut}(V_1,h_1) \setminus \mathrm{Aut}(V_1,h_1)_{\mathbb{A}}\right)\\ &= \tau_0(\mathrm{Aut}(V_0,h_0)) \cdot \tau_1(\mathrm{Aut}(V_1,h_1)).\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnen τ_0 und τ_1 die von den Tamagawa-Maßen Ω_0 und Ω_1 induzierten, invarianten Maße auf $\mathrm{Aut}(V_0,h_0)_{\mathbb{A}}/\mathrm{Aut}(V_0,h_0)$ beziehungsweise $\mathrm{Aut}(V_1,h_1)_{\mathbb{A}}/\mathrm{Aut}(V_1,h_1)$. □

Die Tamagawazahlen $\tau_0(\mathrm{Aut}(V_0,h_0))$ und $\tau_1(\mathrm{Aut}(V_1,h_1))$ sind aus Theorem 1.3.1 bekannt, jedoch ist für uns der genaue Wert nicht von Bedeutung.

Berechnen wir nun $\Omega(\mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A},M})$. Nach Definition des Tamagawa-Maßes Ω ist

$$\begin{aligned}\Omega(\mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A},M}) &= \Omega\left(\prod_{p\in\mathbb{P}(\mathbb{Q})} \mathrm{Aut}(M_p,h_p)\right)\\ &= \prod_{p\in\mathbb{P}(\mathbb{Q})} \mu_p(\mathrm{Aut}(M_p,h_p)).\end{aligned}$$

Unsere Aufgabe ist es also die lokalen Maße $\mu_p(\mathrm{Aut}(M_p,h_p))$ für alle Primstellen $p \in \mathbb{P}(\mathbb{Q})$ zu berechnen. Nehmen wir zunächst an, dass $p \neq \ell$. Dann erhalten wir aus der Zerlegung

$$(M_p,h_p) = (M_{0,p},h_{0,p}) \oplus \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathbb{P}(\mathbb{Q}(\zeta_\ell+\zeta_\ell^{-1})),\ \mathfrak{p}|p} (M_{1,\mathfrak{p}},h_{1,\mathfrak{p}}),$$

die wir der Proposition 1.1.7 entnehmen, eine Zerlegung der Automorphismengruppe in

$$\mathrm{Aut}(M_p,h_p) = \mathrm{Aut}(M_{0,p},h_{0,p}) \times \prod_{\mathfrak{p}\in\mathbb{P}(\mathbb{Q}(\zeta_\ell+\zeta_\ell^{-1})),\ \mathfrak{p}|p} \mathrm{Aut}(M_{1,\mathfrak{p}},h_{1,\mathfrak{p}})$$

wie wir auch bereits in Proposition 2.1.1 gesehen haben. Für $p = \ell$ induziert die Einbettung

$$(M_\ell,h_\ell) \hookrightarrow (\mathbb{Z}_\ell \times \mathbb{Z}[\zeta_\ell]_{1-\zeta_\ell})(M_\ell,h_\ell)$$

lediglich eine der Automorphismengruppen, d.h.

$$\mathrm{Aut}(M_\ell,h_\ell) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(M_{0,\ell},h_{0,\ell}) \times \mathrm{Aut}(M_{1,1-\zeta_\ell},h_{1,1-\zeta_\ell}).$$

Proposition 2.2.3. *Es gilt*

$$\Omega(\mathrm{Aut}(M,h)_{\mathbb{A},M}) = \gamma^{-1} \cdot \Omega_0(\mathrm{Aut}(V_0,h_0)_{\mathbb{A},M_0}) \cdot \Omega_1(\mathrm{Aut}(V_1,h_1)_{\mathbb{A},M_1}),$$

wobei $\gamma := [\mathrm{Aut}(M_{0,\ell}, h_{0,\ell}) \times \mathrm{Aut}(M_{1,1-\zeta}, h_{1,1-\zeta}) : \mathrm{Aut}(M_\ell, h_\ell)]$ *als* ***Korrekturindex*** *bezeichnet wird.*

Beweis. Für $p \neq \ell$ ist

$$\mu_p\left(\mathrm{Aut}(M_p, h_p)\right) = \mu_{0,p}\left(\mathrm{Aut}(M_{0,p}, h_{0,p})\right) \cdot \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(\mathbb{Q}(\zeta_\ell + \zeta_\ell^{-1})),\ \mathfrak{p}|p} \mu_{1,\mathfrak{p}}\left(\mathrm{Aut}(M_{1,\mathfrak{p}}, h_{1,\mathfrak{p}})\right)$$

und wegen der Invarianz des Maßes unter der Operation von $\mathrm{Aut}(M_\ell, h_\ell)$ erhalten wir für $p = \ell$

$$\mu_\ell\left(\mathrm{Aut}(M_\ell, h_\ell)\right) = \gamma^{-1} \cdot \mu_{0,\ell}\left(\mathrm{Aut}(M_{0,\ell}, h_{0,\ell})\right) \cdot \mu_{1,1-\zeta_\ell}\left(\mathrm{Aut}(M_{1,1-\zeta_\ell}, h_{1,1-\zeta_\ell})\right).$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
&\Omega(\mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A},M}) = \prod_{p \in \mathbb{P}(\mathbb{Q})} \mu_p(\mathrm{Aut}(M_p, h_p)) \\
&= \gamma^{-1} \prod_{p \in \mathbb{P}(\mathbb{Q})} \mu_{0,p}\left(\mathrm{Aut}(M_{0,p}, h_{0,p})\right) \cdot \prod_{p \in \mathbb{P}(\mathbb{Q})} \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(\mathbb{Q}(\zeta_\ell + \zeta_\ell^{-1})),\ \mathfrak{p}|p} \mu_{1,\mathfrak{p}}\left(\mathrm{Aut}(M_{1,\mathfrak{p}}, h_{1,\mathfrak{p}})\right) \\
&= \gamma^{-1} \prod_{p \in \mathbb{P}(\mathbb{Q})} \mu_{0,p}\left(\mathrm{Aut}(M_{0,p}, h_{0,p})\right) \cdot \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(\mathbb{Q}(\zeta_\ell + \zeta_\ell^{-1}))} \mu_{1,\mathfrak{p}}\left(\mathrm{Aut}(M_{1,\mathfrak{p}}, h_{1,\mathfrak{p}})\right) \\
&= \gamma^{-1} \Omega_0(\mathrm{Aut}(V_0, h_0)_{\mathbb{A},M_0}) \cdot \Omega_1(\mathrm{Aut}(V_1, h_1)_{\mathbb{A},M_1}).
\end{aligned}$$

□

Theorem 2.2.4 (Allgemeine Maßformel). *Sei (M,h) ein hermitesches $\mathbb{Z}G$-Gitter auf einem hermiteschen $\mathbb{Q}G$-Modul (V,h). Dann ist*

$$\omega_{\mathbb{Z}G}(M,h) = \gamma \omega_{\mathbb{Z}}(M_0, h_0) \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_\ell]}(M_1, h_1)$$

mit dem oben eingeführten Korrekturindex γ.

Beweis. Aus Proposition 2.2.1 entnehmen wir die Gleichung

$$\omega_{\mathbb{Z}G}(M,h) = \frac{\tau(\mathrm{Aut}(V,h) \setminus \mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A}})}{\Omega(\mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A},M})}.$$

Dann erhalten wir mit den Propositionen 2.2.2, 2.2.3 und der allgemeinen Maßformel für $\mathbb{Z}$- beziehungsweise $\mathbb{Z}[\zeta_\ell]$-Gitter aus Abschnitt 1.3, dass

$$\begin{aligned}
\frac{\tau(\mathrm{Aut}(V,h) \setminus \mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A}})}{\Omega(\mathrm{Aut}(V,h)_{\mathbb{A},M})} &= \gamma \cdot \frac{\tau_0(\mathrm{Aut}(V_0,h_0)) \cdot \tau_1(\mathrm{Aut}(V_1,h_1))}{\Omega_0(\mathrm{Aut}(V_0,h_0)_{\mathbb{A},M_0}) \cdot \Omega_1(\mathrm{Aut}(V_1,h_1)_{\mathbb{A},M_1})} \\
&= \gamma \cdot \frac{\tau_0(\mathrm{Aut}(V_0,h_0))}{\Omega_0(\mathrm{Aut}(V_0,h_0)_{\mathbb{A},M_0})} \cdot \frac{\tau_1(\mathrm{Aut}(V_1,h_1))}{\Omega_1(\mathrm{Aut}(V_1,h_1)_{\mathbb{A},M_1})} \\
&= \gamma \cdot \omega_{\mathbb{Z}}(M_0, h_0) \cdot \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_\ell]}(M_1, h_1).
\end{aligned}$$

□

Das vorangegangene Theorem stellt einen Zusammenhang zu den aus Abschnitt 1.3 bekannten Maßformeln für quadratische $\mathbb{Z}$- und hermitesche $\mathbb{Z}[\zeta_\ell]$-Gitter her. Es ist erkennbar, dass man die bereits bekannten Maßformlen aus der die allgemeine Maßformel wieder zurückgewinnen kann. Dies wollen wir im folgenden Korollar einmal festhalten.

Korollar 2.2.5. *Sei (M,h) ein hermitesches $\mathbb{Z}G$-Gitter.*

(i) *Ist* $\mathbf{dim}(M) = (m_0, 0, 0)$, *so ist*

$$\omega_{\mathbb{Z}G}(M,h) = \omega_{\mathbb{Z}}(M_0, h_0).$$

(ii) *Ist* $\mathbf{dim}(M) = (0, m_1, 0)$, *so ist*

$$\omega_{\mathbb{Z}G}(M,h) = \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_\ell]}(M_1, h_1).$$

(iii) *Ist* $\mathbf{dim}(M) = (m_0, m_1, 0)$, *so ist*

$$\omega_{\mathbb{Z}G}(M,h) = \omega_{\mathbb{Z}}(M_0, h_0) \cdot \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_\ell]}(M_1, h_1).$$

Beweis. Die Aussagen (i) und (ii) sind klar. Ist M vom Typ $(m_0, m_1, 0)$ so ist

$$\mathrm{Aut}(M_\ell, h_\ell) = \mathrm{Aut}(M_{0,\ell}, h_{0,\ell}) \times \mathrm{Aut}(M_{1,1-\zeta}, h_{1,1-\zeta})$$

und $\gamma = 1$. □

Wir wollen nun den Korrekturindex γ genau berechnen. Dazu benutzen wir die Äquivalenz der Kategorien $\mathrm{Herm}(\mathbb{Z}_\ell G)$ und $\mathrm{RepHerm}(\mathbb{Z}_\ell G)$, die wir bereits in Abschnitt 1.1 angegeben haben, um die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(M_\ell, h_\ell)$ im direkten Produkt $\mathrm{Aut}(M_{0,\ell}, h_{0,\ell}) \times \mathrm{Aut}(M_{1,1-\zeta_\ell}, h_{1,1-\zeta_\ell})$ genauer zu beschreiben. Hierfür werden wir nun voraussetzen, dass wir ein hermitesches $\mathbb{Z}G$-Gitter (M,h) betrachten mit der Eigenschaft, dass (M_ℓ, h_ℓ) unimodular ist.

Sei Γ die maximale $\mathbb{Z}_\ell$-Ordnung in $\mathbb{Q}_\ell G$ und I der Führer von Γ in $\mathbb{Z}_\ell G$. Dann erninnern wir daran, dass $\mathbb{Z}_\ell G/I \simeq \mathbb{F}_\ell$ diagonal in $\Gamma/I \simeq \mathbb{F}_\ell \times \mathbb{F}_\ell$ eingebettet ist. Betrachte die Zerlegung $\Gamma(M_\ell, h_\ell) = (M_{0,\ell}, h_{0,\ell}) \oplus (M_{1,1-\zeta_\ell}, h_{1,1-\zeta_\ell})$ und setze

$$W_0 := M_{0,\ell}/\ell M_{0,\ell},\ b_0 := h_{0,\ell} \mod \ell\mathbb{Z}_\ell,$$

$$W_1 := M_{1,1-\zeta_\ell}/(1-\zeta_\ell)M_{1,1-\zeta_\ell},\ b_1 := h_{1,1-\zeta_\ell} \mod (1-\zeta_\ell)\mathbb{Z}[\zeta_\ell]_{1-\zeta_\ell}.$$

Für $i = 0, 1$ definiere dann $W_i' := W_i/W_i^\perp$ und bezeichne mit b_i' die von b_i auf W_i' induzierte unimodulare Form über $\mathbb{F}_\ell$. Des Weiteren sei

$$(W,b) := (W_0, b_0) \oplus (W_1, b_1),\ \ (W', b') := (W_0', b_0') \oplus (W_1', b_1'),$$

$$U := M_\ell/\ell M_\ell \subseteq W,\ \ U^0 := U \cap (W_0 \times \{0\}) \text{ und } U^1 := U \cap (\{0\} \times W_1).$$

Lemma 2.2.6. *Mit den vorangegangenen Bezeichnungen gilt:*

(i) $U^0 \oplus U^1$ *ist ein maximaler* Γ/I*-Untermodul von* W*, der in* U *enthalten ist.*

(ii) $W^\perp = U^0 \oplus U^1$.

(iii) *Es gibt einen Isomorphismus* $\sigma : (W_0', b_0') \to (W_1', b_1')$ *mit*

$$U/W^\perp = \{(w_0, \sigma(w_0)) : v_0 \in W_0'\}.$$

Eine analoge Proposition steht mit Beweis in Kapitel 2, Abschnitt 3 (Proposition 3.5) von [**Ban88**] für den Fall, dass der Grundring nicht $\mathbb{Z}_\ell$ sondern $\mathbb{Z}$ ist (siehe auch Abschnitt 2 (Lemma 2.2) von [**Que81**]). Dieser Beweis lässt sich auf unsere Situation übertragen.

BEWEIS.

(i) Es ist zunächst zu zeigen, dass U^0 und U^1 eine Γ/I-Modulstruktur tragen. Seien dazu $u = (u_0, 0)$, $v = (v_0, 0) \in U^0$. Dann ist $u + v \in U$ und damit sogar in U^0 nach Definition. Ist $a = (a_0, a_1) \in \mathbb{F}_\ell \times \mathbb{F}_\ell$ so ist

$$a.u = (a_0 u_0, 0) = (a_0, a_0).(u_0, 0).$$

Da $(a_0, a_0) \in \mathbb{Z}_\ell G/I$ und dies die Diagonale in Γ/I ist, ist $a.u \in U$ und damit auch in U^0. Damit ist U^0 aber ein Γ/I-Modul. Analog zeigt man, dass U^1 eine Γ/I-Modulstruktur trägt.
Zeigen wir nun die Maximalität. Sei U' ein Γ/I-Modul mit

$$U^0 \oplus U^1 \subseteq U' \subseteq U$$

und $u = (u_0, u_1) \in U'$. Dann ist sowohl $(1, 0).u$ als auch $(0, 1).u$ in U' und damit $(1, 0).u \in U^0$ und $(0, 1).u \in U^1$. Damit folgt jedoch

$$u = (1, 0).u + (0, 1).u \in U^0 \oplus U^1,$$

d.h. $U' = U^0 \oplus U^1$.

(ii) Nach Proposition 1.1.10 erzeugt U den Γ/I-Modul W. Daher genügt es zu zeigen, dass

$$U^\perp = U^0 \oplus U^1$$

ist. Sei $u \in U^\perp$. Dann ist $b(v, u) = 0$ für alle $v \in U$, d.h. $b(U, u) \in \mathbb{Z}_\ell G/I$ und weil (M_ℓ, h_ℓ) nach Voraussetzung unimodular ist, muss $u \in U$ gelten. Es folgt

$$U^\perp \subseteq U.$$

Wegen (i) genügt es nun $U^0 \oplus U^1 \subseteq U^\perp$ zu zeigen. Sei dazu $u = (u_0, 0) \in U^0$ und $v = (v_0, v_1) \in U$. Dann ist zum Einen

$$b(u, v) = (b_0(u_0, v_0), b_1(0, v_1)) = (b_0(u_0, v_0), 0)$$

und zum Anderen $b(u, v) \in \mathbb{Z}_\ell G/I$. Also muss bereits $b_0(u_0, v_0) = 0$ gelten, da $\mathbb{Z}_\ell G/I$ die Diagonale in Γ/I ist. Dann ist aber $b(u, v) = 0$, d.h. $U^0 \subseteq U^\perp$. Analog zeigt man $U^1 \subseteq U^\perp$. Insgesamt folgt

$$U^0 \oplus U^1 \subseteq U^\perp.$$

(iii) Seien $U = (u_0, u_1)$, $v = (v_0, v_1) \in U$. Ist $(u_0 - v_0, 0) \in U^0$, so ist

$$(1, 0).(u - v) = (u_0 - v_0, 0) \in U^0 \subseteq U.$$

Da U ein $\mathbb{Z}_\ell G/I$-Modul ist, ist auch

$$(1, 1).(u - v) \in U.$$

Dann folgt aber auch

$$(0, u_1 - v_1) = (0, 1).(u - v) = (1, 1).(u - v) - (1, 0).(u - v) \in U,$$

d.h. $(0, u_1 - v_1) \in U^1$.
Wir haben also gezeigt, dass für alle $u, v \in U$ mit $u_0 = v_0 \mod U^0$ bereits $u = v \mod U^0 \oplus U^1$ folgt, d.h. die zweite Komponente von $U \mod U^0 \oplus U^1$ entspricht bijektiv der Ersten. Bezeichne diese Bijektion mit σ. Ist $\overline{w}_0 \in W_0'$ und $(\overline{w}_0, \sigma(\overline{w}_0)) \in U/U^0 \oplus U^1$, so liefert

$$(a,a).(\overline{w}_0, \sigma(\overline{w}_0)) = (a\overline{w}_0, a\sigma(\overline{w}_0)) \in U/U^0 \oplus U^1$$

dass $\sigma(a\overline{w}_0) = a\sigma(\overline{w}_0)$. Da $(\Gamma/I)U = W$ können wir σ auf folgende Weise linear fortsetzen:
Für $w_0 \in W_0$ schreibe

$$(w_0, 0) = \sum_i (a_{i,0}, a_{i,1}).(u_{i,0}, u_{i,1}),$$

wobei $a_{i,0}, a_{i,1} \in \mathbb{F}_\ell$ und $(u_{i,0}, u_{i,1}) \in U$. Dann ist

$$(w_0, 0) = \sum_i (a_{i,0}, a_{i,1}).(u_{i,0}, u_{i,1}) = \left(\sum_i a_{i,0}u_{i,0}, \sum_i a_{i,1}u_{i,1} \right)$$

woraus folgt, dass $\sum_i a_{i,1}u_{i,1} = 0$, d.h.

$$(w_0, 0) = \left(\sum_i a_{i,0}u_{i,0}, 0 \right)$$

für alle $w_0 \in W_0$. Setze demnach $\sigma(\overline{w}_0) = \sum_i a_{i,0}\sigma(\overline{u}_{i,0})$. Dann ist σ injektiv und wir müssen noch die Surjektivität zeigen.
Sei $w_1 \in W_1$. Dann ist

$$\begin{aligned}(0, \overline{w}_1) &= \sum_i (a_{i,0}, a_{i,1}).(\overline{u}_{i,0}, \overline{u}_{i,1}) \\ &= \left(\sum_i a_{i,0}\overline{u}_{i,0}, \sum_i a_{i,1}\overline{u}_{i,1} \right) \\ &= \left(0, \sum_i a_{i,1}\overline{u}_{i,1} \right),\end{aligned}$$

wobei $a_{i,0}, a_{i,1} \in \mathbb{F}_\ell$ und $(u_{i,0}, u_{i,1}) \in U$. Dann ist $(\overline{u}_{i,0}, \overline{u}_{i,1}) = (\overline{u}_{i,0}, \sigma(\overline{u}_{i,0}))$, was

$$\overline{w}_1 = \sum_i a_{i,1}\overline{u}_{i,1} = \sum_i a_{i,1}\sigma(\overline{u}_{i,0}) = \sigma\left(\sum_i a_{i,1}\overline{u}_{i,0} \right)$$

impliziert, d.h. σ ist auch surjektiv.
Nun gilt für alle $u, v \in U$ bereits $b(u,v) \in \mathbb{Z}_\ell G/I$, was

$$b_0(u_0, v_0) = b_1(u_1, v_1)$$

liefert, da $\mathbb{Z}_\ell G/I$ diagonal in Γ/I. Also ist σ auch kompatibel mit den quadratischen Formen.

□

LEMMA 2.2.7. *Die kanonischen Gruppenhomomorphismen* $\varphi_0 : \mathrm{Aut}(M_{0,\ell}, h_{0,\ell}) \to \mathrm{Aut}(W_0', b_0')$ *und* $\varphi_1 : \mathrm{Aut}(M_{1,1-\zeta_\ell}, h_{1,1-\zeta_\ell}) \to \mathrm{Aut}(W_1', b_1')$ *sind surjektiv.*

Für den Beweis dieses Lemmas zeigen wir zunächst noch eine Verallgemeinerung eines Satzes von Kneser aus Kapitel 5, Abschnitt 15 (Satz 15.5) von [**Kne02**].

THEOREM 2.2.8. *Sei* R *ein vollständiger Bewertungsring mit* $2 \in R^*$, K *sein Quotientenkörper,* $(\pi) \subseteq R$ *das maximale Ideal und* $^- : R \to R$ *eine Involution auf* R. *Sind* (V,h), (V',h') *bezüglich* $^-$ *hermitesche* K*-Vektorräume,* $M \subseteq V$, $M' \subseteq V'$ *freie* R*-Gitter und* $f_0 : M \to V'$ R*-linear mit*

(i) $\pi^{k-1} h'(m', n') \subseteq R$ *für alle* $m', n' \in M'$

(ii) $M^* = \widehat{h'}_{f_0}(M') + (\pi)M^*$, *wobei* $\widehat{h'}_{f_0}(m') = h'(f_0(\_), m')$ *für* $m' \in M'$.

(iii) $h'(f_0(m), f_0(n)) = h(m,n) \mod (\pi^k)$, $m, n \in M$

für ein $k \in \mathbb{N}$, *so gibt es eine* R*-lineare Abbildung* $f : M \to V'$, *die* f_0 *verfeinert, d.h. die* $f(m) = f_0(m) \mod (\pi^k)M'$ *und* $h'(f(m), f(n)) = h(m,n)$ *für alle* $m, n \in M$ *erfüllt.*

BEWEIS. Wir konstruieren induktiv eine Folge $f_0, f_1, \ldots, f_j, f_{j+1}, \ldots$ in $\mathrm{Hom}_R(M, V')$, sodass f_j die Bedingung

$$[\,j\,] : \begin{cases} f_j(m) = f_{j-1}(m) \mod (\pi^{k+j})M' \\ h'(f_j(m), f_j(n)) = h(m,n) \mod \pi^{k+j} \end{cases}$$

erfüllt. Diese Folge ist π-adisch eine Cauchyfolge und weil R vollständig ist, konvergiert diese gegen $f := \lim_{j\to\infty} f_j$. Dann gilt

$$h'(f(m), f(n)) = h'\left(\lim_{j\to\infty} f_j(m), \lim_{j\to\infty} f_j(n)\right) = \lim_{j\to\infty} h'(f_j(m), f_j(n)) = h(m,n).$$

Nehmen wir an, dass die Abbildungen $f_0, f_1, \ldots, f_{j-1}$ bereits konstruiert sind. Setze $f_j := f_{j-1} + \pi^{k+j} g$ mit $g \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$. Wir zeigen nun, dass g so gewählt werden kann, dass die Bedingung $h'(f_j(m), f_j(n)) = h(m,n) \mod \pi^{k+j}$ erfüllt ist. Für $m, n \in M$ ist

$$\begin{aligned} h'(f_j(m), f_j(n)) &= h'(f_{j-1}(m) + \pi^{k+j} g(m), f_{j-1}(n) + \pi^{k+j} g(n)) \\ &= h'(f_{j-1}(m), f_{j-1}(n)) + \pi^{k+j}(h'(f_{j-1}(m), g(n)) + h'(g(m), f_{j-1}(n))) + \pi^{2(k+j)} h'(g(m), g(n)). \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von (i) erhalten wir, dass

$$\pi^{2(k+j)} h'(g(m), g(n)) \subseteq \pi^{k+j+1}(\pi^{k-1}) h'(g(m), g(n)) \subseteq (\pi^{k+j+1})$$

was uns

$$h(m,n) - h'(f_{j-1}(m), f_{j-1}(n)) + (\pi^{k+j}) = \pi^{k+j}(h'(f_{j-1}(m), g(n)) + h'(g(m), f_{j-1}(n))) + (\pi^{k+j})$$

liefert. Wegen $[\,j-1\,]$ ist

$$h(m,n) - h'(f_{j-1}(m), f_{j-1}(n)) = \pi^{k+j-1} a(m,n)$$

für eine bezüglich $^-$ hermitesche Form a auf M, sodass wir ein g suchen, was

$$a(m,n) + (\pi) = h'(f_0(m), g(n)) + h'(g(m), f_0(n)) + (\pi)$$

erfüllt. Wegen (ii) ist

$$a(\_, n) + (\pi)M^* = h'(f_0(\_), n') + (\pi)M^*.$$

Da M frei ist, liefern die n' der Basisvektoren ein $g' \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$ mit

$$a(\_, \_) + (\pi)\,\mathrm{Hom}_R(M, M^*) = h'(f_0(\_), g'(\_)) + (\pi)\,\mathrm{Hom}_R(M, M^*).$$

Nun ist 2 eine Einheit in R, d.h. durch $g := \frac{1}{2}g' \in \mathrm{Hom}_R(M, M^*)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} h'(f_0(m), g(n)) + &h'(g(m), f_0(n)) + (\pi) \\ &= \frac{1}{2}h'(f_0(m), g'(n)) + \frac{1}{2}h'(g'(m), f_0(n)) + (\pi) \\ &= \frac{1}{2}h'(f_0(m), g'(n)) + \frac{1}{2}h'(f_0(m), g'(n))^* + (\pi) \\ &= \frac{1}{2}a(m, n) + \frac{1}{2}a^*(m, n) + (\pi) \\ &= a(m, n) + (\pi). \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet * die zu den Formen Dualen und da a hermitesch ist, gilt $a^* = a$. □

Beweis (Lemma 2.2.7). Betrachte das quadratische $\mathbb{Z}_\ell$-Gitter $(M_{0,\ell}, h_{0,\ell})$. Da $h_{0,\ell}$ lokal ℓ-elementar ist (siehe Proposition 1.1.11), erhalten wir eine Jordan-Zerlegung

$$(M_{0,\ell}, h_{0,\ell}) = (L_1, h_{0,\ell}) \oplus (L_\ell, h_{0,\ell}),$$

wobei $(L_1, h_{0,\ell})$ unimodular oder 0 und $(L_\ell, h_{0,\ell})$ ℓ-modular oder 0 ist. Ein Automorphismus $f_0 \in \mathrm{Aut}(W_0', b_0')$ ist nichts anderes als ein Automorphismus $f_0 : L_1 \to L_1$ mit

$$h_{0,\ell}(f_0(x), f_0(y)) = h_{0,\ell}(x, y) \mod \ell\mathbb{Z}_\ell$$

für alle $x, y \in L_1$. Wegen Theorem 2.2.8 gibt es dann einen Automorphismus $f : (L_1, h_{0,\ell}) \to (L_1, h_{0,\ell})$, der f_0 verfeinert. Definiere nun $f' : (M_{0,\ell}, h_{0,\ell}) \to (M_{0,\ell}, h_{0,\ell})$ durch

$$f' := f \perp \mathrm{id}_{L_1}.$$

Dann ist

$$\varphi_0(f') = f \mod (\ell\mathbb{Z}_\ell)L_1 = f_0 \mod (\ell\mathbb{Z}_\ell)L_1,$$

d.h. φ_0 ist surjektiv.
Bei dem hermiteschen $\mathbb{Z}[\zeta_\ell]_{1-\zeta_\ell}$-Gitter $(M_{1,1-\zeta_\ell}, h_{1,1-\zeta_\ell})$ geht man analog vor, da die Voraussetzungen von Lemma 2.2.7 auch in diesem Fall erfüllt sind. Somit ist auch φ_1 surjektiv. □

Proposition 2.2.9. *Die Automorphismengruppe des hermiteschen $\mathbb{Z}_\ell G$-Gitters (M_ℓ, h_ℓ) ist der pullback der Gruppen $\mathrm{Aut}(W_0', b_0') \simeq \mathrm{Aut}(W_1', b_1')$, $\mathrm{Aut}(M_{0,\ell}, h_{0,\ell})$ und $\mathrm{Aut}(M_{1,1-\zeta}, h_{1,1-\zeta})$ bezüglich der Abbildungen $\pi_0(\_) = \sigma\varphi_0(\_)\sigma^{-1}$, σ aus Lemma 2.2.6, und $\pi_1 = \varphi_1$, d.h.*

$$\mathrm{Aut}(M_\ell, h_\ell) = \{(f_0, f_1) \in \mathrm{Aut}(M_{0,\ell}, h_{0,\ell}) \times \mathrm{Aut}(M_{1,1-\zeta_\ell}, h_{1,1-\zeta_\ell}) : \pi_0(f_0) = \pi_1(f_1)\}.$$

Beweis. Wir benutzen Proposition 1.1.10 und beschreiben die Automorphismen von $(\Gamma M_\ell, h_\ell, U)$ in der Kategorie $\mathrm{RepHerm}(\mathbb{Z}_\ell G)$.

Setze $\varphi := \varphi_0 \times \varphi_1$. Mit Lemma 2.2.6 erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
\operatorname{Aut}(M_\ell, h_\ell) &= \operatorname{Aut}(\Gamma M_\ell, h_\ell, U) \\
&= \{(f_0, f_1) \in \operatorname{Aut}(M_{0,\ell}, h_{0,\ell}) \times \operatorname{Aut}(M_{1,1-\zeta_\ell}, h_{1,1-\zeta_\ell}) : \varphi(f_0, f_1)(U/W^\perp) = U/W^\perp\} \\
&= \{(f_0, f_1) \in \operatorname{Aut}(M_{0,\ell}, h_{0,\ell}) \times \operatorname{Aut}(M_{1,1-\zeta_\ell}, h_{1,1-\zeta_\ell})) : \text{ Zu jedem } z \in W_0' \text{ gibt es ein} \\
&\quad \tilde{z} \in W_0' \text{ mit } \varphi_0(f_0)(z) = \tilde{z},\ \varphi_1(f_1)(\sigma(z)) = \sigma(\tilde{z})\} \\
&= \{(f_0, f_1) \in \operatorname{Aut}(M_{0,\ell}, h_{0,\ell}) \times \operatorname{Aut}(M_{1,1-\zeta_\ell}, h_{1,1-\zeta_\ell}) : \varphi_1(f_1)\sigma = \sigma\varphi_0(f_0)\} \\
&= \{(f_0, f_1) \in \operatorname{Aut}(M_{0,\ell}, h_{0,\ell}) \times \operatorname{Aut}(M_{1,1-\zeta_\ell}, h_{1,1-\zeta_\ell}) : \pi_0(f_0) = \pi_1(f_1))\}.
\end{aligned}$$

Nach Definition ist

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Aut}(W_1', b_1') & \operatorname{Aut}(M_{0,\ell}, h_{0,\ell}) \arrow[l, "\pi_0"'] \\
\operatorname{Aut}(M_{1,1-\zeta}, h_{1,1-\zeta}) \arrow[u, "\pi_1"] & \operatorname{Aut}(M_\ell, h_\ell) \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

dann ein pullback-Diagramm. □

Korollar 2.2.10. *Es gibt einen Gruppenisomorphismus*

$$\operatorname{Aut}(M_{0,\ell}, h_{0,\ell}) \times \operatorname{Aut}(M_{1,1-\zeta}, h_{1,1-\zeta}) / \operatorname{Aut}(M_\ell, h_\ell) \simeq \operatorname{Aut}(W_0', b_0')$$

und $\gamma = |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')|$.

Beweis. Nach Lemma 2.2.7 sind π_0 und π_1 surjektiv, d.h. Proposition 2.2.9 liefert eine exakte Folge

$$1 \longrightarrow \operatorname{Aut}(M_\ell, h_\ell) \longrightarrow \operatorname{Aut}(M_{0,\ell}, h_{0,\ell}) \times \operatorname{Aut}(M_{1,1-\zeta}, h_{1,1-\zeta}) \longrightarrow \operatorname{Aut}(W_1', b_1') \longrightarrow 1.$$

Mit dem Homomorphiesatz folgt dann die Behauptung. □

Theorem 2.2.11 (Maßformel). *Sei (M, h) ein hermitesches $\mathbb{Z}G$-Gitter, sodass (M_ℓ, h_ℓ) unimodular ist. Dann ist*

$$\omega_{\mathbb{Z}G}(M, h) = |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| \omega_{\mathbb{Z}}(M_0, h_0) \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_\ell]}(M_1, h_1).$$

Beweis. Die Aussage folgt aus der allgemeinen Maßformel zusammen mit Korollar 2.2.10. □

KAPITEL 3

Geschlechter unimodularer, hermitescher $\mathbb{Z}C_3$-Gitter

Wir werden in diesem Kapitel die Geschlechter hermitescher $\mathbb{Z}C_3$-Gitter bestimmen, deren zugrunde liegendes quadratisches $\mathbb{Z}$-Gitter unimodular und höchstens Dimension 16 besitzt. Dafür beschreiben wir zunächst eine Vorgehensweise, die aus dem gegebenen Geschlecht eines unimodularen, quadratischen $\mathbb{Z}$-Gitters alle möglichen Isomorphieklassen von unimodularen, hermiteschen $\mathbb{Z}C_3$-Gittern liefert. Mittels Diesen und der Maßformel aus Kapitel 2 werden wir dann zeigen, dass genau die Kandidaten im selben Geschlecht liegen, deren Dimensionsvektoren übereinstimmen.

Wir beschränken uns dabei auf die Dimensionen kleiner als 16, da der verwendete Algorithmus zum Einen auf der Kenntnis des Geschlechtes des unimodularen quadratischen $\mathbb{Z}$-Gitters basiert und zum Anderen auf der Berechnung der Konjugationsklassen der Automorphismengruppe der Isomorphieklassen in diesem. Beide Bestimmungen sind für wachsende Dimensionen beziehungsweise Gruppenordnungen sehr aufwendig.

Wie schon erwähnt ist die Auswertung der Maßformel in der Praxis recht schwierig, was im Wesentlichen an der Auswertung des Maßes $\omega_{\mathbb{Z}[\zeta_\ell]}(M_1, h_1)$ liegt. Aus diesem Grund beschränken wir uns in diesem Kapitel auf die Gruppe C_3. Im Falle, dass (M_1, h_1) die Diskriminante 1 besitzt, können wir Ergebnisse aus [**Fei78**] entnehmen und das Maß $\omega_{\mathbb{Z}[\zeta_\ell]}(M_1, h_1)$ berechnen. In den anderen Fällen werten wir die Formel mittels der am Ende von Abschnitt 1.3 gemachten Überlegungen aus und erhalten so das Maß.

Sei (M, b) ein unimodulares, quadratisches $\mathbb{Z}$-Gitter. Unser Ziel ist es Geschlechter von hermiteschen $\mathbb{Z}C_3$-Gittern über (M, b), d.h. hermiteschen $\mathbb{Z}C_3$-Gitter (M, h) mit $t(h) = b$, zu bestimmen. Nach Proposition 1.1.12 entprechen die hermiteschen $\mathbb{Z}C_3$-Gitter über (M, b) genau den Automorphismen der Ordnung drei in $\mathrm{Aut}(M, b)$. Unter Berücksichtigung von Proposition 1.1.15 erhält man die Isomorphieklassen hermitescher $\mathbb{Z}C_3$-Gitter über (M, b) durch die Bestimmung der Konjugationsklassen der Ordnung drei in $\mathrm{Aut}(M, b)$ und umgekehrt. Um nun ein Geschlecht eines hermiteschen $\mathbb{Z}C_3$-Gitters über (M, b) zu bestimmen, benutzen wir die Proposition 1.1.18: Seien $(L_1, b_1) := (M, b), (L_2, b_2), \ldots, (L_k, b_k)$ Repräsentanten der Isomorphieklassen von $\mathrm{Gen}(M, b)$. Durch die Berechnung der Konjugationsklassen der Ordnung drei, für jede Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(L_i, b_i)$, erhält man hermitesche $\mathbb{Z}C_3$-Gitter über (L_i, b_i). Fixiert man nun ein (M, h) über (M, b), so erfüllen alle Isomorphieklassen von hermiteschen $\mathbb{Z}C_3$-Gittern (M', h') über den (L_i, b_i) mit $\mathbf{dim}(M') = \mathbf{dim}(M)$ die notwendige Bedingung von Proposition 1.1.18, um im selben Geschlecht zu liegen wie (M, h). Die entscheidende Frage lautet also, welche von Diesen liegen wirklich im selben Geschlecht beziehungsweise in wieviele Geschlechter zerfallen die Isomorphieklassen.

Wir wollen im folgenden beschreiben, wie man die obige Vorgehensweise mittels Magma, [**BCP97**], umsetzen kann. Dazu geben wir verschiedene Funktionen an, die die wesentlichen, oben beschriebenen, Schritte umsetzten. An der praktischen Umsetzung waren auch meine Kollegen Stefan Höppner und Timo Rosnau beteiligt. Für eine Dokumentation zu Magma Funktionen siehe man

http://magma.maths.usyd.edu.au/magma/handbook/

Die erste Funktion, die wir vorstellen wollen, berechnet zu einem Automorphismus (von **beliebiger** Primzahlordnung $2 < \ell \leq 19$) eines quadratischen $\mathbb{Z}$-Gitters die Modulstruktur, d.h. den Dimensionsvektor, des induzierten $\mathbb{Z}G$-Moduls.

```
function module_structure(g)
    struct:=AssociativeArray();
    dim:=NumberOfRows(g);
    g:=MatrixAlgebra(Integers(),dim) ! g;
    ℓ:=Order(g);
    R:=ResidueClassRing(ℓ);
    for j:=1 to ℓ-1 do
        s:=g^ℓ + g^j;
    end for;
    Ms:=NullspaceMatrix(Transpose(s));
    h:=g-1;
    H:=ChangeRing(h,R);
    q:=h*(Transpose(Ms));
    Q:=ChangeRing(q,R);
    struct[1]:=Rank(s)-(Rank(H)-Rank(Q));
    struct[3]:=(Rank(H)-Rank(Q));
    struct[2]:=1/(ℓ-1)*(dim-struct[1]-ℓ*struct[3]);
    return struct;
end function;
```

Der Funktion module_structure wird ein Automorphismus g eines quadratischen $\mathbb{Z}$-Gitters (M, b) in Form einer ganzzahligen Matrix übergeben. Schaut man in den Beweis von Theorem 1.1.1, so sind die folgenden Ränge zu berechnen

$$\mathrm{Rang}_{\mathbb{Z}}(M/M_s),\ \ \mathrm{Rang}_{\mathbb{Z}[\zeta_\ell]}(M_s) \text{ und } \dim_{\mathbb{F}_\ell}((g-1)M/(g-1)M_s),$$

wobei ℓ die Primzahlordnung von g ist, $s := \sum_{i=0}^{\ell-1} g^i$ und $M_s := \{m \in M : s(m) = 0\}$. Es genügt $\mathrm{Rang}_{\mathbb{Z}}(M/M_s)$ und $\dim_{\mathbb{F}_\ell}((g-1)M/(g-1)M_s)$ zu bestimmen, denn mittels diesen

Beiden und der Formel

$$\mathrm{Rang}_{\mathbb{Z}}(M) = m_0 + (\ell - 1) \cdot m_1 + \ell \cdot m_2$$

erhält man den Dimensionsvektor der als Array struct zurückgegeben wird.

Die nächste Funktion bestimmt zu jedem Repräsentanten des $\mathbb{Z}$-Geschlechtes die Isomorphieklassen der $\mathbb{Z}G$-Moduln, die über diesem liegt. Sie wurde einem Magma Skript von Stefan Höppner entnommen, mit dem die unten stehenden Tabellen erzeugt wurden.

```
function hermitian_lattice(B)
   AG:=AssociativeArray();

   for lat in [1 .. #B] do
      AG[lat]:=AssociativeArray();
      Lat:=LatticeWithGram(B[lat]);
      Aut:=AutomorphismGroup(Lat);
      C:=Classes(Aut);
      for i in [1 .. #C] do
         ℓ:=C[i][1];
         if IsPrime(ℓ) and ℓ ne 2 and ℓ le 19 then
            AG[lat][i]:=AssociativeArray();
            AG[lat][i][1]:=ℓ;
            AG[lat][i][2]:=C[i][3];
            help:=module_structure(AG[lat][i][2]);
            AG[lat][i][3]:=help[3];
            AG[lat][i][4]:=help[2];
            AG[lat][i][5]:=help[1];
            AG[lat][i][6]:=Order(Centralizer(Aut,C[i][3]));
         end if;
      end for;
   end for;
   return AG;
end function;
```

Der Funktion hermitian_lattice wird eine Liste übergeben, indem die Gram-Matrizen der Repräsentanten der Isomoprhieklassen eines $\mathbb{Z}$-Geschlechtes eingetragen sind. Für jede Solche berechnet die Funktion die Konjugationsklassen des Gitters und filtert die heraus, die für uns relevant sind, d.h. deren Primzahlordnung kleiner gleich 19 und nicht gleich 2 ist. Mit Hilfe der Repräsentanten dieser Konjugationsklassen wird die induzierte $\mathbb{Z}G$-Modulstruktur mit der oben beschriebenen Funktion module_structure berechnet. Sämtliche Informationen werden in dem Array AG gespeichert und zurückgegeben.

Mit diesen beiden Funktionen lässt sich das oben beschriebene Verfahren umsetzten und man kann somit zu einem gegebenen quadratischen $\mathbb{Z}$-Gitter alle Isomorphieklassen von hermiteschen $\mathbb{Z}G$-Gittern über seinem Geschlecht bestimmen. Möchte man nun wissen welche dieser Klassen nun zum selben Geschlecht gehören, so kann man sich der in Kapitel 2 hergeleiteten Maßformel bedienen. Um Diese auswerten zu können, ist eine Zerlegung des hermiteschen $\mathbb{Z}G$-Gitters über der maximalen Ordnung $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}[\zeta_\ell]$ nötig. Die folgende Funktion liefert eine Solche für den Fall $\ell = 3$.

```
function maximal_decomposition(G,B)
    f:=1/3*(G^2+G+1);
    h:=1-f;
    M0:=Lattice(f,ChangeRing(B,Rationals()));
    h0:=3*GramMatrix(M0);
    ZM1:=Lattice(h,ChangeRing(B,Rationals()));
    Base:=BasisMatrix(ZM1);
    GQ:=ChangeRing(G,Rationals());
    BaseQ:=ChangeRing(Base,Rationals());
    Gnew:=Solution(BaseQ,BaseQ*GQ);
    Zbase:=ChangeRing(ZzetaBasis(Gnew),Rationals())*BaseQ);
    Zetabase:=Zbase;
    for i:=NumberOfRows(Zetabase) to 2 by -2 do
        Zetabase:=RemoveRow(Zetabase,i);
    end for;
    F<t>:=CyclotomicField(3);
    ZetabaseF:=ChangeRing(Zetabase,F);
    GF:=ChangeRing(G,F);
    BF:=ChangeRing(B,F);
    h1:=ZeroMatrix(F,NumberOfRows(ZetabaseF),NumberOfRows(ZetabaseF));
    for i in [0..2] do
        h1:=h1+(ZetabaseF*GF^-i)*BF*Transpose(ZetabaseF)*t^i;
    end for;
    return h0,h1;
end function;
```

Der Funktion maximal_decomposition wird ein Automorphismus und eine Gram-Matrix übergeben (diese beiden beschreiben ein hermitesches $\mathbb{Z}G$-Gitter). Mittels des Automorphismuses werden zwei Abbildungen konsturiert, f und h, mit der Eigenschaft, dass

$$1 = f \cdot (1 - G) + h \cdot (G^2 + G + 1).$$

Anschließend berechnet die Funktion die Bilder dieser Abbildungen, d.h. zwei $\mathbb{Z}$-Basen welche diese erzeugen. Das Bild von f beschreibt dann den direkten Summanden, auf dem der Automorphismus trivial operiert und mittels der Basis wird die symmetrische Gram-Matrix h0 berechnet. Aus der $\mathbb{Z}$-Basis des Bildes von h wird eine $\mathbb{Z}[\zeta_3]$-Basis des zweiten direkten Summanden konstruiert, indem die Darstellungsmatrix des Automorphismus bezüglich der $\mathbb{Z}$-Basis an die Funktion ZzetaBasis übergeben wird. Diese stammt aus der Feder von Michael Jürgens und berechnet für einen Automorphismus mit Minimalpolynom $X^2 + X + 1$ eine $\mathbb{Z}$-Basis, sodass bezüglich Dieser der Automorphismus die Darstellungsmatrix

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

besitzt, d.h. in Normalform ist. Aus dieser Basis erhalten wir dann die gesuchte $\mathbb{Z}[\zeta_3]$-Basis mit der dann die hermitesche Gram-Matrix h1 berechnet wird (Proposition 1.1.13). Die Funktion gibt die beiden Gram-Matrizen zurück.

Bemerkung. Wie bereits erwähnt sind die Funktionen module_structure und hermitian_lattice nicht von der hier betrachteten Gruppenordnung drei abhängig, die wir in diesem Kapitel voraussetzen. Die Isomorphieklassen der hermiteschen $\mathbb{Z}G$-Gitter lassen sich mit diesen auch für beliebige Primzahlordnung $2 < \ell \leq 19$ berechnen.

In den folgenden Tabellen listen wir alle hermiteschen $\mathbb{Z}G$-Gitter auf, die über unimodularen, quadratischen $\mathbb{Z}$-Gittern der Dimension höchstens 16 liegen. In den Dimensionen eins und zwei erhält man nur orthogonale, ganzzahlige Darstellungen der zyklischen Gruppe mit zwei Elementen, sodass wir diese nicht betrachten. Die Tabellen sind nach der zugrundeliegenden $\mathbb{Z}G$-Modulstruktur sortiert. Des Weiteren berechnen wir für $\ell = 3$ auch die Geschlechter der hermiteschen $\mathbb{Z}C_3$-Gitter.

Zur Notation: Die orthogonalen Darstellungen, d.h. die Repräsentanten der Konjugationsklassen, werden stets mit npℓRm codiert. Dabei steht das n für die n-te Isomorphieklasse des $\mathbb{Z}$-Geschlechtes (die Reihenfolge wird stets zu Beginn fixiert) und pℓ für die Primzahlordnung ℓ der Darstellung. Der letzte Teil Rm der Codierung ist eine Indizierung, wobei m der Laufindex beginnend bei 1 ist. Mit max_k bezeichnen wir die maximale Anzahl von Isomorphieklassen des $\mathbb{Z}G$-Geschlechtes und mit max_ω das maximale Maß, d.h. wenn max_k tatsächlich die Klassenzahl ist.

Dimension 3, ungerade, unimodular

Repräsentanten des $\mathbb{Z}$-Geschlechtes:

$$\mathbb{I}_3$$

Ordnung 3:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(0,0,1)	1p3R1	1	1/6

Es gibt nur ein hermitesches $\mathbb{Z}G$-Gitter über $\mathbb{I}_3$ und somit auch nur ein $\mathbb{Z}G$-Geschlecht mit dem angegebenen Maß max_ω.

Dimension 4, ungerade, unimodular

Repräsentanten des $\mathbb{Z}$-Geschlechtes:

$$\mathbb{I}_4$$

Ordnung 3:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(1,0,1)	1p3R1	1	1/12

Es gibt nur ein hermitesches $\mathbb{Z}G$-Gitter über $\mathbb{I}_4$ und somit nur ein $\mathbb{Z}G$-Geschlecht mit dem angegebenen Maß max_ω.

Dimension 5, ungerade, unimodular

Repräsentanten des $\mathbb{Z}$-Geschlechtes:

$$\mathbb{I}_5$$

Ordnung 3:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(2,0,1)	1p3R1	1	1/48

Ordnung 5:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(0,0,1)	1p5R1	1	1/10

Es gibt zwei hermitesche $\mathbb{Z}G$-Gitter über $\mathbb{I}_5$, jeweils eines für $\ell = 3$ und $\ell = 5$. Die Geschlechter dieser hermiteschen $\mathbb{Z}G$-Gitter sind einklassig und haben die angegebenen Maße max_ω.

Dimension 6, ungerade, unimodular

Repräsentanten des $\mathbb{Z}$-Geschlechtes:

$$\mathbb{I}_6$$

Ordnung 3:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(3,0,1)	1p3R2	1	1/288
(0,0,2)	1p3R1	1	1/72

Ordnung 5:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(1,0,1)	1p5R1	1	1/20

Es gibt zwei hermitesche $\mathbb{Z}C_3$- und ein hermitesches $\mathbb{Z}C_5$-Gitter über $\mathbb{I}_6$. Die Geschlechter dieser hermiteschen $\mathbb{Z}G$-Gitter sind einklassig und haben die angegebenen Maße max_ω.

Dimension 7, ungerade, unimodular

Repräsentanten des $\mathbb{Z}$-Geschlechtes:

$$\mathbb{I}_7$$

Ordnung 3:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(4,0,1)	1p3R2	1	1/2.304
(1,0,2)	1p3R1	1	1/144

Ordnung 5:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(2,0,1)	1p5R1	1	1/80

Ordnung 7:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(0,0,1)	1p7R1	1	1/14

Es gibt zwei hermitesche $\mathbb{Z}C_3$- und jeweils ein hermitesches $\mathbb{Z}C_5$- und ein $\mathbb{Z}C_7$-Gitter über $\mathbb{I}_7$. Die Geschlechter dieser hermiteschen $\mathbb{Z}G$-Gitter sind einklassig und haben die angegebenen Maße max_ω.

Dimension 8, ungerade, unimodular

Repräsentanten des $\mathbb{Z}$-Geschlechtes:

$$\mathbb{I}_8$$

Ordnung 3:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(5,0,1)	1p3R2	1	1/23.040
(2,0,2)	1p3R1	1	1/576

Ordnung 5:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(3,0,1)	1p5R1	1	1/480

Ordnung 7:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(1,0,1)	1p7R1	1	1/28

Es gibt zwei hermitesche $\mathbb{Z}C_3$- und jeweils ein hermitesches $\mathbb{Z}C_5$- und ein $\mathbb{Z}C_7$-Gitter über $\mathbb{I}_8$. Die Geschlechter dieser hermiteschen $\mathbb{Z}G$-Gitter sind einklassig und haben die angegebenen Maße max_ω.

Dimension 8, gerade, unimodular

Repräsentanten des $\mathbb{Z}$-Geschlechtes:

$$\mathbb{E}_8$$

Ordnung 3:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(0,4,0)	1p3R1	1	1/155.520
(5,0,1)	1p3R3	1	1/311.040
(1,2,1)	1p3R2	1	1/7.776
(2,0,2)	1p3R4	1	1/2.592

Ordnung 5:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(0,2,0)	1p5R2	1	1/600
(3,0,1)	1p5R1	1	1/1.200

Ordnung 7:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(1,0,1)	1p7R1	1	1/28

Es gibt vier hermitesche $\mathbb{Z}C_3$-, zwei hermitesche $\mathbb{Z}C_5$- und ein hermitesches $\mathbb{Z}C_7$-Gitter über $\mathbb{E}_8$. Die Geschlechter dieser hermiteschen $\mathbb{Z}G$-Gitter sind einklassig und haben die angegebenen Maße max_ω.

Dimension 9, ungerade, unimodular

Repräsentanten des $\mathbb{Z}$-Geschlechtes:

$$\mathbb{I}_1 \perp \mathbb{E}_8, \quad \mathbb{I}_9$$

Ordnung 3:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(1,4,0)	1p3R1	1	1/311.040
(6,0,1)	1p3R3, 2p3R3	2	13/2.488.320
(2,2,1)	1p3R2	1	1/15.552
(3,0,2)	1p3R4, 2p3R2	2	5/10.368
(0,0,3)	2p3R1	1	1/1.296

Ordnung 5:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(1,2,0)	1p5R1	1	1/1.200
(4,0,1)	1p5R2, 2p5R1	2	13/19.200

Ordnung 7:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(2,0,1)	1p7R1, 2p7R1	2	3/112

Die Darstellungen 1p3R1, 1p3R2, 2p3R1 und 1p5R1 liefern jeweils einklassige $\mathbb{Z}G$-Geschlechter deren Maß genau dem angegebenen max_ω entsprechen. Für die restlichen hermiteschen $\mathbb{Z}C_3$-Gitter berechnen wir das Maß.

Die Funktion maximal_decomposition liefert die folgenden Zerlegungen $h = h_0 \oplus h_1$ über der maximalen Ordnung:

$$h_{\mathsf{1p3R3}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & 10 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

$$h_{\mathsf{1p3R4}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & -\zeta_3 \\ \zeta_3+1 & 2 \end{pmatrix}$$

Für $h = h_{\mathsf{1p3R3}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{13}{829.440}, \quad \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{6} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(1,3)| = 2$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{1p3R3}) = \frac{13}{2.488.320}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 1p3R3 zweiklassig und die zweite Isomorphieklasse wird von 2p3R3 repräsentiert.

Für $h = h_{\mathsf{1p3R4}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{5}{1.152}, \quad \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{72} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(2,3)| = 8$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{1p3R4}) = \frac{5}{10.368}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 1p3R4 zweiklassig und die zweite Isomorphieklasse wird von 2p3R2 repräsentiert.

Dimension 10, ungerade, unimodular

Repräsentanten des $\mathbb{Z}$-Geschlechtes:

$$\mathbb{I}_2 \perp \mathbb{E}_8, \ \ \mathbb{I}_{10}$$

Ordnung 3:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(2,4,0)	1p3R3	1	1/1.244.160
(7,0,1)	1p3R1, 2p3R3	2	23/34.836.480
(3,2,1)	1p3R2	1	1/62.208
(4,0,2)	1p3R4, 2p3R2	2	7/82.944
(1,0,3)	2p3R1	1	1/2.592

Ordnung 5:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(2,2,0)	1p5R1	1	1/4.800
(5,0,1)	1p5R2, 2p5R2	2	1/7.680
(0,0,2)	2p5R1	1	1/200

Ordnung 7:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(3,0,1)	1p7R1, 2p7R1	2	1/168

Die Darstellungen 1p3R3, 1p3R2, 2p3R1, 1p5R1 und 2p5R1 liefern jeweils einklassige $\mathbb{Z}G$-Geschlechter deren Maß genau dem angegebenen max_ω entsprechen. Für die restlichen hermiteschen $\mathbb{Z}C_3$-Gitter berechnen wir das Maß.

Die Funktion maximal_decomposition liefert die folgenden Zerlegungen $h = h_0 \oplus h_1$ über der maximalen Ordnung:

$$h_{\mathsf{1p3R1}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 4 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

$$h_{\mathsf{1p3R4}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Für $h = h_{\mathsf{1p3R1}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{23}{11.612.160}, \ \ \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{6} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(1,3)| = 2$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{1p3R1}) = \frac{23}{34.836.480}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 1p3R1 zweiklassig und die zweite Isomorphieklasse wird von 2p3R3 repräsentiert.

Für $h = h_{\mathsf{1p3R4}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{7}{9.216}, \ \ \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{72} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(2,3)| = 8$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{1p3R4}) = \frac{7}{82.944}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 1p3R4 zweiklassig und die zweite Isomorphieklasse wird von 2p3R2 repräsentiert.

Dimension 11, ungerade, unimodular

Repräsentanten des $\mathbb{Z}$-Geschlechtes:

$$\mathbb{I}_3 \perp \mathbb{E}_8, \ \ \mathbb{I}_{11}$$

Ordnung 3:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(3,4,0)	1p3R7	1	1/7.464.960
(8,0,1)	1p3R1, 1p3R5, 2p3R3	3	697/8.360.755.200
(4,2,1)	1p3R6	1	1/373.248
(0,4,1)	1p3R2	1	1/933.120
(5,0,2)	1p3R4, 1p3R9, 2p3R2	3	91/7.464.960
(1,2,2)	1p3R3	1	1/46.656
(2,0,3)	1p3R8, 2p3R1	2	5/31.104

Ordnung 5:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(3,2,0)	1p5R1	1	1/28.800
(6,0,1)	1p5R2, 2p5R2	2	1/51.200
(1,0,2)	2p5R1	1	1/400

Ordnung 7:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(4,0,1)	1p7R1, 2p7R1	2	5/5.376

Ordnung 11:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(0,0,1)	2p11R1	1	1/22

Die Darstellungen 1p3R2, 1p3R3, 1p3R6, 1p3R7, 1p5R1, 2p5R1 und 2p11R1 liefern jeweils einklassige $\mathbb{Z}G$-Geschlechter deren Maß genau dem angegebenen max_ω entsprechen. Für die restlichen hermiteschen $\mathbb{Z}C_3$-Gitter berechnen wir das Maß.

Die Funktion maximal_decomposition liefert die folgenden Zerlegungen $h = h_0 \oplus h_1$ über der maximalen Ordnung:

$$h_{\mathsf{1p3R1}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 4 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & -5 & 10 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

$$h_{\mathsf{1p3R4}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 4 & -5 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & -5 & 10 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$h_{\mathsf{1p3R8}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für $h = h_{\mathsf{1p3R1}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{697}{2.786.918.400}, \quad \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{6} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(1,3)| = 2$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{1p3R1}) = \frac{697}{8.360.755.200}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 1p3R1 dreiklassig und die beiden weiteren Isomorphieklassen werden von 1p3R5 und 2p3R3 repräsentiert.

Für $h = h_{\mathsf{1p3R4}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{91}{829.440}, \quad \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{72} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(2,3)| = 8$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{1p3R4}) = \frac{91}{7.464.960}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 1p3R4 dreiklassig und die beiden weiteren Isomorphieklassen werden von 1p3R9 und 2p3R2 repräsentiert.

Für $h = h_{\mathsf{1p3R8}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{5}{1.152}, \quad \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{1296} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(3,3)| = 48$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{1p3R4}) = \frac{5}{31.104}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 1p3R8 zweiklassig und die zweite Isomorphieklasse wird von 2p3R1 repräsentiert.

Dimension 12, ungerade, unimodular

Repräsentanten des $\mathbb{Z}$-Geschlechtes:

$$\mathbb{D}_{12}^{+}, \ \ \mathbb{I}_4 \perp \mathbb{E}_8, \ \ \mathbb{I}_{12}$$

Ordnung 3:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(4,4,0)	2p3R2	1	1/59719.680
(9,0,1)	1p3R1, 2p3R1, 2p3R6, 3p3R1	4	187/16.721.510.400
(5,2,1)	2p3R4	1	1/2.985.984
(1,4,1)	2p3R3	1	1/1.866.240
(6,0,2)	1p3R4, 2p3R7, 2p3R8, 3p3R4	4	13/5.971.968
(2,2,2)	2p3R5	1	1/93.312
(3,0,3)	1p3R2, 2p3R9, 3p3R2	3	5/62.208
(0,0,4)	1p3R3, 3p3R3	2	1/10.368

Ordnung 5:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(4,2,0)	2p5R1	1	1/230.400
(7,0,1)	1p5R2, 2p5R2, 3p5R2	3	17/6.451.200
(2,0,2)	1p5R1, 3p5R1	2	3/1.600

Ordnung 7:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(5,0,1)	1p7R1, 2p7R1, 3p7R1	3	1/6.720

Ordnung 11:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(1,0,1)	1p11R1, 3p11R1	2	3/44

Die Darstellungen 2p3R2, 2p3R3, 2p3R4, 2p3R5 und 2p5R1 liefern jeweils einklassige $\mathbb{Z}G$-Geschlechter deren Maß genau dem angegebenen max_ω entsprechen. Für die restlichen hermiteschen $\mathbb{Z}C_3$-Gitter berechnen wir das Maß.

Die Funktion maximal_decomposition liefert die folgenden Zerlegungen $h = h_0 \oplus h_1$ über der maximalen Ordnung:

$$h_{\mathsf{1p3R1}} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 7 & 0 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 6 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -3 & 6 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 3 & -3 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

$$h_{\mathsf{1p3R4}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 & 4 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 4 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & -2 & -1 & 8 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & 11 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 & \zeta_3+1 \\ -\zeta_3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$h_{\mathsf{1p3R2}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 & 8 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & -2 & 11 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$h_{\mathsf{1p3R3}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \zeta_3 \\ 0 & 1 & -1 & -\zeta_3-1 \\ 0 & -1 & 2 & \zeta_3+1 \\ -\zeta_3-1 & \zeta_3 & -\zeta_3 & 3 \end{pmatrix}$$

Für $h = h_{\mathsf{1p3R1}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{187}{5.573.836.800}, \quad \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{6} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(1,3)| = 2$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{1p3R1}) = \frac{187}{16.721.510.400}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 1p3R1 vierklassig und die drei weiteren Isomorphieklassen werden von 2p3R1, 2p3R6 und 3p3R1 repräsentiert.

Für $h = h_{\mathsf{1p3R4}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{13}{663.552}, \quad \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{72} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(2,3)| = 8$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{1p3R4}) = \frac{13}{5.971.968}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 1p3R4 vierklassig und die drei weiteren Isomorphieklassen werden von 2p3R7, 2p3R8 und 3p3R4 repräsentiert.

Für $h = h_{\mathsf{1p3R2}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{5}{2.304}, \quad \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{1296} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(3,3)| = 48$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{1p3R4}) = \frac{5}{62.208}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 1p3R2 dreiklassig und die beiden weiteren Isomorphieklasse werden von 2p3R9 und 3p3R2 repräsentiert.

Für $h = h_{\mathsf{1p3R3}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{1}{384}, \quad \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{31.104} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(4,3)| = 1.152$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{1p3R3}) = \frac{1}{10.368}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 1p3R3 zweiklassig und die zweite Isomorphieklasse wird von 3p3R3 repräsentiert.

Dimension 13, ungerade, unimodular

Repräsentanten des $\mathbb{Z}$-Geschlechtes:

$$\mathbb{I}_1 \perp \mathbb{D}_{12}^+, \quad \mathbb{I}_5 \perp \mathbb{E}_8, \quad \mathbb{I}_{13}$$

Ordnung 3:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(5,4,0)	2p3R2	1	1/597.196.800
(10,0,1)	1p3R1, 2p3R3, 2p3R6, 3p3R1	4	121/66.886.041.600
(6,2,1)	2p3R4	1	1/29.859.840
(2,4,1)	2p3R1	1	1/7.464.960
(7,0,2)	1p3R4, 2p3R5, 2p3R9, 3p3R4	4	41/83.607.552

(3,2,2)	2p3R7	1	1/373.248
(4,0,3)	1p3R2, 2p3R8, 3p3R2	3	13/497.664
(1,0,4)	1p3R3, 3p3R3	2	1/20.736

Ordnung 5:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(5,2,0)	2p5R2	1	1/2.304.000
(8,0,1)	1p5R2, 2p5R1, 2p5R4, 3p5R2	4	5321/13.934.592.000
(0,2,1)	2p5R3	1	1/6.000
(3,0,2)	1p5R1, 2p5R5, 3p5R1	3	13/16.000

Ordnung 7:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(6,0,1)	1p7R1, 2p7R1, 3p7R1	3	19/645.120

Ordnung 11:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(2,0,1)	1p11R1, 3p11R1	2	5/176

Ordnung 13:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(0,0,1)	3p13R1	1	1/26

Die Darstellungen 2p3R1, 2p3R2, 2p3R4, 2p3R7, 2p5R2, 2p5R3 und 3p13R1 liefern jeweils einklassige $\mathbb{Z}G$-Geschlechter deren Maß genau dem angegebenen max_ω entsprechen. Für die restlichen hermiteschen $\mathbb{Z}C_3$-Gitter berechnen wir das Maß.

Die Funktion maximal_decomposition liefert die folgenden Zerlegungen $h = h_0 \oplus h_1$ über der maximalen Ordnung:

$$h_{\mathsf{1p3R1}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & -3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 9 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & 6 & -3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 9 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 6 & 3 & 3 & 3 & 9 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 6 & 3 & 3 & 9 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 6 & 3 & 9 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 3 & 6 & 9 & 3 & 9 \\ 0 & 9 & 9 & 0 & 9 & 9 & 9 & 9 & 28 & 9 & 22 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 9 & 6 & 9 \\ 0 & 9 & 9 & -3 & 9 & 9 & 9 & 9 & 22 & 9 & 25 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

$$h_{\mathsf{1p3R4}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 & -3 & 1 & -3 & -3 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 6 & 3 & 0 & 3 & 3 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 3 & 4 & -1 & 3 & 3 & 5 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 6 & 3 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 6 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 3 & 5 & -2 & 3 & 3 & 10 & -2 \\ 4 & 0 & -3 & -4 & -1 & -3 & -3 & -2 & 11 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$h_{\mathsf{1p3R2}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 1 & 8 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 9 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$h_{\mathsf{1p3R3}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\zeta_3 - 1 & \zeta_3 \\ 1 & 2 & -\zeta_3 - 1 & \zeta_3 \\ \zeta_3 & \zeta_3 & 2 & -\zeta_3 - 1 \\ -\zeta_3 - 1 & -\zeta_3 - 1 & \zeta_3 & 2 \end{pmatrix}$$

Für $h = h_{\mathsf{1p3R1}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{121}{22.295.347.200}, \ \ \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{6} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(1,3)| = 2$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{1p3R1}) = \frac{121}{66.886.041.600}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 1p3R1 vierklassig und die drei weiteren Isomorphieklassen werden von 2p3R3, 2p3R6 und 3p3R1 repräsentiert.

Für $h = h_{\mathsf{1p3R4}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{41}{9.289.728}, \ \ \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{72} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(2,3)| = 8$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{1p3R4}) = \frac{41}{83.607.552}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 1p3R4 vierklassig und die drei weiteren Isomorphieklassen werden von 2p3R5, 2p3R9 und 3p3R4 repräsentiert.

Für $h = h_{\mathsf{1p3R2}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{13}{18.432}, \ \ \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{1.296} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(3,3)| = 48$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{1p3R4}) = \frac{13}{497.664}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 1p3R2 dreiklassig und die beiden weiteren Isomorphieklasse werden von 2p3R8 und 3p3R2 repräsentiert.

Für $h = h_{\mathsf{1p3R3}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{1}{768}, \ \ \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{31.104} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(4,3)| = 1.152$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{1p3R3}) = \frac{1}{20.736}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 1p3R3 zweiklassig und die zweite Isomorphieklasse wird von 3p3R3 repräsentiert.

Dimension 14, ungerade, unimodular

Repräsentanten des $\mathbb{Z}$-Geschlechtes:

$$(\mathbb{E}_7 \perp \mathbb{E}_7)^+, \ \ \mathbb{I}_2 \perp \mathbb{D}_{12}^+, \ \ \mathbb{I}_6 \perp \mathbb{E}_8, \ \ \mathbb{I}_{14}$$

Ordnung 3:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(6,4,0)	3p3R8	1	1/7.166.361.600
(11,0,1)	1p3R4, 2p3R1, 3p3R2, 3p3R3, 4p3R1	5	1.681/4.414.478.745.600
(7,2,1)	1p3R1, 3p3R6	2	23/7.524.679.680
(3,4,1)	3p3R7	1	1/44.789.760
(8,0,2)	1p3R5, 1p3R7, 2p3R4, 3p3R1, 3p3R4, 3p3R12, 4p3R4	7	2.501/20.065.812.480
(4,2,2)	1p3R6, 3p3R9	2	7/11.197.440
(0,4,2)	1p3R2, 3p3R11	2	13/33.592.320
(5,0,3)	1p3R9, 2p3R2, 3p3R5, 3p3R13, 4p3R2	5	299/44.789.760
(1,2,3)	1p3R3, 3p3R10	2	1/186.624
(2,0,4)	1p3R8, 2p3R3, 3p3R14, 4p3R3	4	7/248.832

Ordnung 5:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(6,2,0)	3p5R4	1	1/27.648.000
(9,0,1)	1p5R2, 2p5R2, 3p5R1, 3p5R2, 4p5R2	5	587/9.289.728.000
(1,2,1)	3p5R5	1	1/12.000
(4,0,2)	1p5R1, 2p5R1, 3p5R3, 4p5R1	4	403/1.152.000

Ordnung 7:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(7,0,1)	1p7R2, 2p7R1, 3p7R1, 4p7R2	4	113/20.321.280
(0,0,2)	1p7R1, 4p7R1	2	1/196

Ordnung 11:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(3,0,1)	2p11R1, 4p11R1	2	7/1.056

Ordnung 13:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(1,0,1)	4p13R1	1	1/52

Die Darstellungen 3p3R7, 3p3R8, 3p5R4, 3p5R5 und 4p13R1 liefern jeweils einklassige $\mathbb{Z}G$-Geschlechter deren Maß genau dem angegebenen max_ω entsprechen. Für die restlichen hermiteschen $\mathbb{Z}C_3$-Gitter berechnen wir das Maß.

Die Funktion maximal_decomposition liefert die folgenden Zerlegungen $h = h_0 \oplus h_1$ über der maximalen Ordnung:

$$h_{\mathsf{1p3R4}} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -3 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

$$h_{\mathsf{1p3R1}} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 & -\zeta_3 - 1 & 1 \\ \zeta_3 & 2 & \zeta_3 + 1 \\ 1 & -\zeta_3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$h_{\mathsf{1p3R5}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 6 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 5 & 11 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$h_{\mathsf{1p3R6}} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 6 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & 2 & 2 \\ 0-3 & 0 & 6 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 5 & 2\zeta_3+2 & \zeta_3 & 0 \\ -2\zeta_3 & 2 & -1 & 0 \\ -\zeta_3-1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$h_{\mathsf{1p3R2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 5 & 2\zeta_3+2 & \zeta_3 & 0 & 0 & 0 \\ -2\zeta_3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\zeta_3-1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 18\zeta_3+10 & 7\zeta_3 \\ 0 & 0 & 0 & -18\zeta_3-8 & 26 & 7\zeta_3+13 \\ 0 & 0 & 0 & -7\zeta_3-7 & -7\zeta_3+6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$h_{\mathsf{1p3R9}} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 2 & 10 & 0 & 9 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$h_{\mathsf{1p3R3}} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & 6 & 3 \\ -1 & 6 & 16 & 10 \\ 0 & 3 & 10 & 7 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3\zeta_3-3 & 0 & -2\zeta_3-1 \\ 0 & 3\zeta_3 & 14 & -3\zeta_3-3 & 2\zeta_3+3 \\ 0 & 0 & 3\zeta_3 & 1 & 0 \\ 0 & 2\zeta_3+1 & -2\zeta_3+1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$h_{\mathsf{1p3R8}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 6 & 16 & 0 & 10 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 10 & 5 & 13 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für $h = h_{\mathsf{1p3R4}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{1.681}{1.471.492.915.200}, \quad \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{6} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(1,3)| = 2$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{1p3R4}) = \frac{1.681}{4.414.478.745.600}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 1p3R4 fünfklassig und die vier weiteren Isomorphieklassen werden von 2p3R1, 3p3R2, 3p3R3 und 4p3R1 repräsentiert.

Für $h = h_{\mathsf{1p3R1}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{23}{11.612.160}, \quad \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{1.296} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(1,3)| = 2$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{1p3R1}) = \frac{23}{7.524.679.680}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 1p3R1 zweiklassig und die weitere Isomorphieklasse wird von 3p3R6 repräsentiert.

Für $h = h_{\mathsf{1p3R5}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{2.501}{2.229.534.720}, \quad \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{72} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(2,3)| = 8$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{1p3R5}) = \frac{2.501}{20.065.812.480}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 1p3R5 siebenklassig und die sechs weiteren Isomorphieklassen werden von 1p3R7, 2p3R4, 3p3R1, 3p3R4, 3p3R12 und 4p3R4 repräsentiert.

Für $h = h_{\mathsf{1p3R6}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{7}{5.760}, \quad \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{15.552} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(2,3)| = 8$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{1p3R6}) = \frac{7}{11.197.440}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 1p3R6 zweiklassig und die weitere Isomorphieklasse wird von 3p3R9 repräsentiert.

Für $h = h_{\mathsf{1p3R2}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{1}{8}, \quad \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{13}{33.592.320} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(2,3)| = 8$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{1p3R2}) = \frac{13}{33.592.320}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 1p3R2 zweiklassig und die weitere Isomorphieklasse wird von 3p3R11 repräsentiert.

Für $h = h_{\mathsf{1p3R9}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{299}{1.658.880}, \quad \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{1.296} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(3,3)| = 48$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{1p3R9}) = \frac{299}{44.789.760}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 1p3R9 fünfklassig und die vier weiteren Isomorphieklasse werden von 2p3R2, 3p3R5, 3p3R13 und 4p3R2 repräsentiert.

Für $h = h_{\mathsf{1p3R3}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{1}{96}, \quad \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{93.312} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(3,3)| = 48$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{1p3R3}) = \frac{1}{186.624}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 1p3R3 zweiklassig und die weitere Isomorphieklasse wird von 3p3R10 repräsentiert.

Für $h = h_{\mathsf{1p3R8}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{7}{9.216}, \quad \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{31.104} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(4,3)| = 1.152$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{1p3R8}) = \frac{7}{248.832}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 1p3R8 vierklassig und die drei weiteren Isomorphieklassen werden von 2p3R3, 3p3R14 und 4p3R3 repräsentiert.

Dimension 15, ungerade, unimodular

Repräsentanten des $\mathbb{Z}$-Geschlechtes:

$$\mathbb{A}_{15}^{+}, \ \mathbb{I}_1 \perp (\mathbb{E}_7 \perp \mathbb{E}_7)^{+}, \ \mathbb{I}_3 \perp \mathbb{D}_{12}^{+}, \ \mathbb{I}_7 \perp \mathbb{E}_8, \ \mathbb{I}_{15}$$

Ordnung 3:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(7,4,0)	4p3R3	1	1/100.329.062.400
(12,0,1)	1p3R5, 2p3R3, 3p3R1, 3p3R2, 4p3R1, 4p3R9, 5p3R1	7	50.443/459.105.789.542.400
(8,2,1)	2p3R1, 4p3R6	2	1/3.009.871.872
(4,4,1)	4p3R4	1	1/358.318.080
(9,0,2)	1p3R1, 2p3R6, 2p3R7, 3p3R3, 3p3R8, 4p3R2, 4p3R10, 4p3R13, 5p3R2	9	7.381/200.658.124.800
(5,2,2)	2p3R5, 4p3R7	2	13/89.579.520
(1,4,2)	2p3R2, 4p3R5	2	13/67.184.640
(6,0,3)	1p3R4, 2p3R9, 3p3R4, 3p3R9, 4p3R11, 4p3R14, 5p3R3	7	533/250.822.656
(2,2,3)	2p3R4, 4p3R8	2	1/373.248
(3,0,4)	1p3R2, 2p3R8, 3p3R5, 3p3R6, 4p3R12, 5p3R4	6	13/497.664
(0,0,5)	1p3R3, 3p3R7, 5p3R5	3	1/34.560

Ordnung 5:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(7,2,0)	4p5R2	1	1/387.072.000
(10,0,1)	1p5R1, 2p5R2, 3p5R2, 4p5R1, 4p5R4, 5p5R1	6	16.151/1.226.244.096.000

(2,2,1)	4p5R3	1	1/48.000
(5,0,2)	1p5R2, 2p5R1, 3p5R1, 4p5R5, 5p5R2	5	31/256.000
(0,0,3)	1p5R3, 5p5R3	2	1/1.200

Ordnung 7:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(8,0,1)	1p7R2, 2p7R2, 3p7R1, 4p7R2, 4p7R3, 5p7R2	6	20.417/19.508.428.800
(1,0,2)	1p7R1, 2p7R1, 4p7R1, 5p7R1	4	3/392

Ordnung 11:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(4,0,1)	1p11R1, 3p11R1, 5p11R1	3	61/42.240

Ordnung 13:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	orthogonale Darstellung	max_k	max_ω
(2,0,1)	1p13R1, 5p13R1	2	7/624

Die Darstellungen 4p3R3, 4p3R4, 4p5R2 und 4p5R3 liefern jeweils einklassige $\mathbb{Z}G$-Geschlechter deren Maß genau dem angegebenen max_ω entsprechen. Für die restlichen hermiteschen $\mathbb{Z}C_3$-Gitter berechnen wir das Maß.

Die Funktion maximal_decomposition liefert die folgenden Zerlegungen $h = h_0 \oplus h_1$ über der maximalen Ordnung:

$$h_{\mathsf{1p3R5}} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

$$h_{\mathsf{2p3R1}} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & -2 & 5 & -2 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 1 & 1 & 11 & 1 & -6 & 6 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & 2 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0-3 & 6 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 & 2\zeta_3+1 & -\zeta_3 \\ -2\zeta_3-1 & 3 & -\zeta_3-2 \\ \zeta_3+1 & \zeta_3-1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$h_{\mathsf{1p3R1}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$h_{\mathsf{2p3R5}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2\zeta_3+1 & -\zeta_3 \\ 0 & -2\zeta_3-1 & 3 & -\zeta_3-2 \\ 0 & \zeta_3+1 & \zeta_3-1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$h_{\mathsf{2p3R2}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 & 2\zeta_3+4 & -2\zeta_3-1 & 0 & 0 & 0 \\ -2\zeta_3+2 & 5 & -3\zeta_3-3 & -1 & 0 & \zeta_3+1 \\ 2\zeta_3+1 & 3\zeta_3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 2\zeta_3+1 & -3\zeta_3-2 \\ 0 & 0 & 0 & -2\zeta_3-1 & 3 & -\zeta_3-2 \\ 0 & -\zeta_3 & 0 & 3\zeta_3+1 & \zeta_3-1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$h_{\mathsf{1p3R4}} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 4 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -3 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & -3 & 0 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 & 5\zeta_3+11 & -\zeta_3-1 \\ -5\zeta_3+6 & 92 & -6\zeta_3-11 \\ \zeta_3 & 6\zeta_3-5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$h_{\mathsf{2p3R4}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & \zeta_3+1 & 0 & 0 & 0 \\ -\zeta_3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2\zeta_3+1 & -\zeta_3 \\ 0 & 0 & -2\zeta_3-1 & 3 & -\zeta_3-2 \\ 0 & 0 & \zeta_3+1 & \zeta_3-1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$h_{\mathsf{1p3R2}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 7 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 7 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & 7 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 & -2\zeta_3-2 & 5\zeta_3+10 & -\zeta_3-1 \\ 2\zeta_3 & 2 & 5\zeta_3-5 & 1 \\ -5\zeta_3+5 & -5\zeta_3-10 & 93 & -6\zeta_3-11 \\ \zeta_3 & 1 & 6\zeta_3-5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$h_{\mathsf{1p3R3}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & \zeta_3+2 & 0 & \zeta_3+1 & 0 \\ -\zeta_3+1 & 45 & -\zeta_3-6 & 20\zeta_3+24 & 3\zeta_3-2 \\ 0 & \zeta_3-5 & 2 & -2\zeta_3+1 & 1 \\ -\zeta_3 & -20\zeta_3+4 & 2\zeta_3+3 & 24 & 4\zeta_3+4 \\ 0 & -3\zeta_3-5 & 1 & -4\zeta_3 & 1 \end{pmatrix}$$

Für $h = h_{\mathsf{1p3R5}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{50.443}{153.035.263.180.800}, \quad \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{6} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(1,3)| = 2$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{1p3R5}) = \frac{50.443}{459.105.789.542.400}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 1p3R5 siebenklassig und die sechs weiteren Isomorphieklassen werden von 2p3R3, 3p3R1, 3p3R2, 4p3R1, 4p3R9 und 5p3R1 repräsentiert.

Für $h = h_{\mathsf{2p3R1}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{1}{4.644.864}, \ \ \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{1.296} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(1,3)| = 2$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{2p3R1}) = \frac{1}{3.009.871.872}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 2p3R1 zweiklassig und die weitere Isomorphieklasse wird von 4p3R6 repräsentiert.

Für $h = h_{\mathsf{1p3R1}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{7.381}{22.295.347.200}, \ \ \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{72} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(2,3)| = 8$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{1p3R1}) = \frac{7.381}{200.658.124.800}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 1p3R1 neunklassig und die acht weiteren Isomorphieklassen werden von 2p3R6, 2p3R7, 3p3R3, 3p3R8, 4p3R2, 4p3R10, 4p3R13 und 5p3R2 repräsentiert.

Für $h = h_{\mathsf{2p3R5}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{13}{46.080}, \ \ \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{15.552} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(2,3)| = 8$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{2p3R5}) = \frac{13}{89.579.520}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 2p3R5 zweiklassig und die weitere Isomorphieklasse wird von 4p3R7 repräsentiert.

Für $h = h_{\mathsf{2p3R2}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{1}{16}, \ \ \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{13}{33.592.320} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(2,3)| = 8$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{2p3R2}) = \frac{13}{67.184.640}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 2p3R2 zweiklassig und die weitere Isomorphieklasse wird von 4p3R5 repräsentiert.

Für $h = h_{\mathsf{1p3R4}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{533}{9.289.728},\ \ \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{1.296} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(3,3)| = 48$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{1p3R4}) = \frac{533}{250.822.656}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 1p3R4 siebenklassig und die sechs weiteren Isomorphieklasse werden von 2p3R9, 3p3R4, 3p3R9, 4p3R11, 4p3R14 und 5p3R3 repräsentiert.

Für $h = h_{\mathsf{2p3R4}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{1}{192},\ \ \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{93.312} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(3,3)| = 48$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{2p3R4}) = \frac{1}{373.248}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 2p3R4 zweiklassig und die weitere Isomorphieklasse wird von 4p3R8 repräsentiert.

Für $h = h_{\mathsf{1p3R2}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{13}{18.432},\ \ \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{31.104} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(4,3)| = 1.152$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{1p3R2}) = \frac{13}{497.664}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 1p3R2 sechsklassig und die fünf weiteren Isomorphieklassen werden von 2p3R8, 3p3R5, 3p3R6, 4p3R12 und 5p3R4 repräsentiert.

Für $h = h_{\mathsf{1p3R3}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{1}{3.840},\ \ \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{933.120} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(5,3)| = 103.680$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{1p3R3}) = \frac{1}{34.560}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 1p3R3 dreiklassig und die beiden weiteren Isomorphieklassen werden von 3p3R7 und 5p3R5 repräsentiert.

Dimension 16, ungerade, unimodular

Repräsentanten des $\mathbb{Z}$-Geschlechtes:

$$\mathbb{I}_{16},\ \ \mathbb{I}_8 \perp \mathbb{E}_8,\ \ \mathbb{I}_4 \perp \mathbb{D}_{12}^+,\ \ \mathbb{I}_1 \perp \mathbb{A}_{15}^+,\ \ \mathbb{L}_{16,8},\ \ \mathbb{I}_2 \perp (\mathbb{E}_7 \perp \mathbb{E}_7)^+$$

Ordnung 3:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	Darstellung	max_k	max_ω
(8,4,0)	2p3R8	1	1/1.605.264.998.400
(13,0,1)	1p3R1, 2p3R1, 2p3R2, 3p3R1, 3p3R7, 4p3R4, 5p3R4, 6p3R1	8	29.713/655.865.413.632.000
(9,2,1)	2p3R6, 5p3R1	2	11/240.789.749.760
(5,4,1)	2p3R9	1	1/3.583.180.800
(10,0,2)	1p3R2, 2p3R3, 2p3R4, 2p3R13, 3p3R6, 3p3R8, 4p3R3, 4p3R5, 5p3R5, 5p3R9, 6p3R2	11	1.573/114.661.785.600
(6,2,2)	2p3R7, 5p3R6	2	1/35.831.808
(2,4,2)	2p3R11, 5p3R2	2	13/268.738.560
(7,0,3)	1p3R3, 2p3R5, 2p3R14, 3p3R4, 3p3R9, 4p3R1, 5p3R7, 6p3R3	8	451/501.645.312
(3,2,3)	2p3R10, 5p3R3	2	1/1.492.992
(4,0,4)	1p3R4, 2p3R12, 3p3R3, 3p3R5, 4p3R2, 5p3R8, 6p3R4	7	65/3.981.312
(1,0,5)	1p3R5, 3p3R2, 6p3R5	3	1/69.120

Ordnung 5:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	Erzeuger	Klassenzahl	Maß des $\mathbb{Z}G$-Geschlechts
(8,2,0)	2p5R1	1	1/6.193.152.000
(11,0,1)	1p5R1, 2p5R2, 2p5R5, 3p5R2, 4p5R2, 5p5R2, 6p5R1	7	27.001/7.357.464.576.000
(3,2,1)	2p5R3	1	1/288.000
(6,0,2)	1p5R2, 2p5R4, 3p5R1, 4p5R1, 5p5R1, 6p5R2	6	39/1.024.000
(1,0,3)	1p5R3, 6p5R3	2	1/2.400

Ordnung 7:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	Erzeuger	Klassenzahl	Maß des $\mathbb{Z}G$-Geschlechts
(9,0,1)	1p7R2, 2p7R2, 2p7R3, 3p7R1, 4p7R2, 5p7R2, 6p7R2	7	527/2.438.553.600
(2,0,2)	1p7R1, 2p7R1, 4p7R1, 5p7R1, 6p7R1	5	9/1.568

Ordnung 11:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	Erzeuger	Klassenzahl	Maß des $\mathbb{Z}G$-Geschlechts
(5,0,1)	1p11R1, 3p11R1, 6p11R1	3	9/28.160

Ordnung 13:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	Erzeuger	Klassenzahl	Maß des $\mathbb{Z}G$-Geschlechts
(3,0,1)	1p13R1, 6p13R1	2	5/1.248

Die Darstellungen 2p3R8, 2p3R9, 2p5R1 und 2p5R3 liefern jeweils einklassige $\mathbb{Z}G$-Geschlechter deren Maß genau dem angegebenen max_ω entsprechen. Für die restlichen hermiteschen $\mathbb{Z}C_3$-Gitter berechnen wir das Maß.

Die Funktion maximal_decomposition liefert die folgenden Zerlegungen $h = h_0 \oplus h_1$ über der maximalen Ordnung:

$$h_{\mathsf{1p3R1}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & -3 & 3 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & -3 & 6 & 3 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & -3 & 3 & 6 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 7 & -3 & 0 & 0 & -3 & 3 & -3 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 3 & 3 & -3 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 9 & -9 & -6 & 6 & -6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 24 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

$$h_{\mathsf{2p3R6}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 5 & -5\zeta_3 - 7 & -9\zeta_3 \\ 5\zeta_3 - 2 & 9 & 14\zeta_3 + 10 \\ 9\zeta_3 + 9 & -14\zeta_3 - 4 & 18 \end{pmatrix}$$

$$h_{\mathsf{1p3R2}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & 6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & -3 & 3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 & -3 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & 3 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 0 & 0 & -3 & 3 & 5 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & 3 & 5 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 3 & 0 & -3 & 3 & -3 & -4 & -1 & 7 & -2 \\ 0 & 6 & -6 & -3 & 3 & 0 & 3 & -6 & 1 & -3 & -2 & 17 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$h_{\mathsf{2p3R7}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -5\zeta_3 - 7 & -9\zeta_3 \\ 0 & 5\zeta_3 - 2 & 9 & 14\zeta_3 + 10 \\ 0 & 9\zeta_3 + 9 & -14\zeta_3 - 4 & 18 \end{pmatrix}$$

$$h_{\mathsf{2p3R11}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2\zeta_3-1 & -2\zeta_3-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\zeta_3+1 & 3 & -\zeta_3 & 2\zeta_3+1 \\ 0 & 0 & 2\zeta_3+1 & \zeta_3+2 & 3 & \zeta_3-1 \\ 0 & 0 & 0 & -2\zeta_3-1 & -\zeta_3-2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$h_{\mathsf{1p3R3}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 3 & -4 & 3 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 3 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 4 & -4 & 3 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ -4 & 0 & -3 & -4 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & -3 & 6 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 & -2 & \zeta_3+1 \\ -2 & 3 & -\zeta_3-1 \\ -\zeta_3 & \zeta_3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$h_{\mathsf{2p3R10}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5\zeta_3-7 & -9\zeta_3 \\ 0 & 0 & 5\zeta_3-2 & 9 & 14\zeta_3+10 \\ 0 & 0 & 9\zeta_3+9 & -14\zeta_3-4 & 18 \end{pmatrix}$$

$$h_{\mathsf{1p3R4}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & -3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 4 & -2\zeta_3-1 & 0 & -\zeta_3+1 \\ 2\zeta_3+1 & 1 & 0 & \zeta_3+1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \zeta_3+2 & -\zeta_3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$h_{\mathsf{1p3R5}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \oplus$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -139\zeta_3-86 & -27\zeta_3+44 & 26\zeta_3+21 & 5\zeta_3+1 \\ 139\zeta_3+53 & 31.858 & 18.273\zeta_3+13.090 & 1.361\zeta_3-5.392 & -656\zeta_3-1.380 \\ 27\zeta_3+71 & -18.273\zeta_3-5.183 & 8.352 & 3.652\zeta_3+1.657 & 522\zeta_3-152 \\ -26\zeta_3-5 & -1.361\zeta_3-6.753 & -3.652\zeta_3-1.995 & 1.203 & 170\zeta_3+265 \\ -5\zeta_3-4 & 656\zeta_3-724 & -522\zeta_3-674 & -170\zeta_3+95 & 45 \end{pmatrix}$$

Für $h = h_{\mathsf{1p3R1}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{29.713}{218.621.804.544.000}, \quad \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{6} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(1,3)| = 2$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{1p3R1}) = \frac{29.713}{655.865.413.632.000}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 1p3R1 achtklassig und die sieben weiteren Isomorphieklassen werden von 2p3R1, 2p3R2, 3p3R1, 3p3R7, 4p3R4, 5p3R4 und 6p3R1 repräsentiert.

Für $h = h_{\mathsf{2p3R6}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{11}{371.589.120}, \;\; \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{1.296} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(1,3)| = 2$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{2p3R6}) = \frac{11}{240.789.749.760}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 2p3R6 zweiklassig und die weitere Isomorphieklasse wird von 5p3R1 repräsentiert.

Für $h = h_{\mathsf{1p3R2}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{1.573}{12.740.198.400}, \;\; \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{72} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(2,3)| = 8$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{1p3R2}) = \frac{1.573}{114.661.785.600}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 1p3R2 elfklassig und die zehn weiteren Isomorphieklassen werden von 2p3R2, 2p3R4, 2p3R13, 3p3R6, 3p3R8, 4p3R3, 4p3R5, 5p3R5, 5p3R9 und 6p3R2 repräsentiert.

Für $h = h_{\mathsf{2p3R7}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{1}{18.432}, \;\; \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{15.552} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(2,3)| = 8$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{2p3R7}) = \frac{1}{35.831.808}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 2p3R7 zweiklassig und die weitere Isomorphieklasse wird von 5p3R6 repräsentiert.

Für $h = h_{\mathsf{2p3R11}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{1}{64}, \;\; \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{13}{33.592.320} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(2,3)| = 8$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{2p3R11}) = \frac{13}{268.738.560}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 2p3R11 zweiklassig und die weitere Isomorphieklasse wird von 5p3R2 repräsentiert.

Für $h = h_{\mathsf{1p3R3}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{451}{18.579.456}, \;\; \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{1.296} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(3,3)| = 48$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{1p3R3}) = \frac{451}{501.645.312}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 1p3R3 achtklassig und die sieben weiteren Isomorphieklasse werden von 2p3R5, 2p3R14, 3p3R4, 3p3R9, 4p3R1, 5p3R7 und 6p3R3 repräsentiert.

Für $h = h_{\mathsf{2p3R10}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{1}{768}, \;\; \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{93.312} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(3,3)| = 48$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{2p3R10}) = \frac{1}{1.492.992}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 2p3R10 zweiklassig und die weitere Isomorphieklasse wird von 5p3R3 repräsentiert.

Für $h = h_{\mathsf{1p3R4}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{65}{147.456}, \;\; \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{31.104} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(4,3)| = 1.152$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{1p3R4}) = \frac{65}{3.981.312}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 1p3R4 siebenklassig und die sechs weiteren Isomorphieklassen werden von 2p3R12, 3p3R3, 3p3R5, 4p3R2, 5p3R8 und 6p3R4 repräsentiert.

Für $h = h_{\mathsf{1p3R5}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{1}{7.680}, \;\; \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{933.120} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(5,3)| = 103.680$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{1p3R4}) = \frac{1}{69.120}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 1p3R4 dreiklassig und die beiden weiteren Isomorphieklassen werden von 3p3R2 und 6p3R5 repräsentiert.

Dimension 16, gerade, unimodular

Repräsentanten des $\mathbb{Z}$-Geschlechtes:

$$\mathbb{E}_8 \perp \mathbb{E}_8, \;\; \mathbb{D}_{16}^+$$

Ordnung 3:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	Darstellung	max_k	max_ω
(8,4,0)	1p3R1	1	1/108.355.387.392.000
(0,8,0)	1p3R2	1	1/48.372.940.800
(13,0,1)	1p3R5, 2p3R1	2	691/61.979.281.588.224.000
(9,2,1)	1p3R3	1	1/5.417.769.369.600
(5,4,1)	1p3R8	1	1/48.372.940.800
(1,6,1)	1p3R6	1	1/1.209.323.520
(10,0,2)	1p3R9, 1p3R10, 2p3R5	3	143/10.835.538.739.200
(6,2,2)	1p3R7	1	1/2.418.647.040
(2,4,2)	1p3R4, 1p3R12	2	13/1.209.323.520
(7,0,3)	1p3R13, 2p3R4	2	41/11.287.019.520
(3,2,3)	1p3R11	1	1/20.155.392
(4,0,4)	1p3R14, 2p3R2	2	13/53.747.712
(1,0,5)	2p3R3	1	1/933.120

Ordnung 5:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	Darstellung	max_k	max_ω
(8,2,0)	1p5R1	1	1/418.037.760.000
(0,4,0)	1p5R3	1	1/720.000
(11,0,1)	1p5R2, 2p5R1	2	67/18.393.661.440.000
(3,2,1)	1p5R4	1	1/720.000
(6,0,2)	1p5R5, 2p5R2	2	13/23.040.000
(1,0,3)	2p5R3	1	1/6.000

Ordnung 7:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	Darstellung	max_k	max_ω
(9,0,1)	1p7R2, 2p7R2	2	1/1.219.276.800
(2,0,2)	1p7R1, 2p7R1	2	1/784

Ordnung 11:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	Darstellung	max_k	max_ω
(5,0,1)	2p11R1	1	1/42.240

Ordnung 13:

$\mathbb{Z}G$-Struktur	Darstellung	max_k	max_ω
(3,0,1)	2p13R1	1	1/624

Die Darstellungen 1p3R1, 1p3R2, 1p3R3, 1p3R6, 1p3R7, 1p3R8, 1p3R11, 2p3R3, 1p5R1, 1p5R3, 1p5R4, 2p5R3, 2p11R1 und 2p13R1 liefern jeweils einklassige $\mathbb{Z}G$-Geschlechter deren Maß genau dem angegebenen max_ω entsprechen. Für die restlichen hermiteschen $\mathbb{Z}C_3$-Gitter berechnen wir das Maß.

Die Funktion maximal_decomposition liefert die folgenden Zerlegungen $h = h_0 \oplus h_1$ über der maximalen Ordnung:

$$h_{\mathsf{1p3R5}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

$$h_{\mathsf{1p3R9}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 4 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -1 & 10 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & 12 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$h_{\mathsf{1p3R4}} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -9 & 14 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 6\zeta_3+9 & -5\zeta_3-1 \\ 0 & 5 & -3\zeta_3-1 & 5\zeta_3+4 & 0 & 0 \\ 0 & 3\zeta_3+2 & 2 & \zeta_3-1 & 0 & 0 \\ 0 & -5\zeta_3-1 & -\zeta_3-2 & 6 & 0 & 0 \\ -6\zeta_3+3 & 0 & 0 & 0 & 9 & -5\zeta_3-4 \\ 5\zeta_3+4 & 0 & 0 & 0 & 5\zeta_3+1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$h_{\mathsf{1p3R13}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & -3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 6 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 4 & -2\zeta_3-5 & 0 \\ 2\zeta_3-3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$h_{\mathsf{1p3R14}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 3 & 8 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\zeta_3 - 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \zeta_3 - 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Für $h = h_{\mathsf{1p3R5}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{691}{20.659.760.529.408.000}, \ \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{6} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(1,3)| = 2$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{1p3R5}) = \frac{691}{61.979.281.588.224.000}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 1p3R5 zweiklassig und die weitere Isomorphieklasse wird von 2p3R1 repräsentiert.

Für $h = h_{\mathsf{1p3R9}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{143}{1.203.948.748.800}, \ \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{72} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(2,3)| = 8$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{1p3R9}) = \frac{143}{10.835.538.739.200}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 1p3R9 dreiklassig und die beiden weiteren Isomorphieklassen werden von 1p3R10 und 2p3R5 repräsentiert.

Für $h = h_{\mathsf{1p3R4}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{1}{288}, \ \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{13}{33.592.320} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(2,3)| = 8$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{1p3R4}) = \frac{13}{1.209.323.520}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 1p3R4 zweiklassig und die weitere Isomorphieklasse wird von 1p3R10 und 2p3R5 repräsentiert.

Für $h = h_{\mathsf{1p3R13}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{41}{418.037.760}, \ \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{1.296} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(3,3)| = 48$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{1p3R13}) = \frac{41}{11.287.019.520}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 1p3R13 zweiklassig und die weitere Isomorphieklasse wird von 1p3R12 repräsentiert.

Für $h = h_{\mathsf{1p3R14}}$ ist

$$\omega_{\mathbb{Z}}(h_0) = \frac{13}{1.990.656}, \quad \omega_{\mathbb{Z}[\zeta_3]}(h_1) = \frac{1}{31.104} \text{ und } |\operatorname{Aut}(W_0', b_0')| = |\operatorname{O}(4,3)| = 1.152$$

und mit der Maßformel erhält man

$$\omega_{\mathbb{Z}C_3}(\mathsf{1p3R14}) = \frac{13}{53.747.712}$$

Demnach ist das Geschlecht der Darstellung 1p3R14 zweiklassig und die weitere Isomorphieklasse wird von 2p3R2 repräsentiert.

Zusammenfassung und Ausblick

Wir konnten im vorangegangenen Kapitel die Geschlechter unimodularer, hermitescher $\mathbb{Z}C_3$-Gitter bestimmen. Was einem sofort auffällt ist, dass in allen Fällen die Modulstruktur und die Tatsache, dass die zugrundeliegenden quadratischen $\mathbb{Z}$-Gitter verwandt sind, schon das hermitesche $\mathbb{Z}G$-Geschlecht beschrieben; mit anderen Worten, die notwendigen Bedingungen aus Proposition 1.1.18 bereits hinreichend sind. Unsere Ergebnisse legen also die folgende Vermutung nahe.

Vermutung. *Zwei unimodulare, hermitesche $\mathbb{Z}G$-Gitter (M,h), (M',h') sind genau dann verwandt, wenn $\mathbf{dim}(M) = \mathbf{dim}(M')$ und $(M,\mathrm{t}(h))$ verwandt zu $(M',\mathrm{t}(h'))$ sind.*

Ist diese Vermutung wahr, so ist eine weitere Frage, ob die Aussage weiter richtig bleibt, wenn man die Voraussetzung *unimodular* fallen lässt.

In unseren Beispielen haben wir uns im Wesentlichen auf $\ell = 3$ beschränkt. Eine Aufgabe für die Zukunft wäre es, die Magma Funktion maximal_decomposition(G,B) für beliebiges $3 \leq \ell \leq 19$ anzupassen. Die Hauptaufgabe besteht darin, für einen Automorphismus mit Minimalpolynom $\sum_{i=0}^{\ell-1} X^i$ eine Basis zu finden, bezüglich der dieser die Darstellungsmatrix

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

besitzt. Siehe dazu zum Beispiel auch Kapitel 3 von [**New72**].

Ein Problem, was unabhängig von dem Vorangegangen ist, jedoch als Konsequenz von Diesem auftritt, ist die Berechnung des Maßes $\omega_{\mathbb{Z}[\zeta_\ell]}(M,h)$ mittels Maßformel. Für $\ell = 3$ waren wir in unseren Fällen ((M_p,h_p) unimodular für $p \neq 3$ und (M_3,h_3) lokal 3-elementar) in der Lage das Maß $\omega_{\mathbb{Z}[\zeta_\ell]}(M,h)$ auszuwerten (siehe Ende von Abschnitt 1.3). Ist $\ell \neq 3$, so liegt die Schwierigkeit darin, dass der Fixkörper der komplexen Konjugation nicht mehr $\mathbb{Q}$ ist, d.h. das Produkt der lokalen Darstellungsdichten $\alpha_\mathfrak{p}(M)$ ist nun für Primstellen $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(\mathbb{Q}(\zeta_\ell + \zeta_\ell^{-1}))$ zu berechnen. Den Arbeiten [**HK89**] und [**Mis00**] kann man Formeln für $\alpha_\mathfrak{p}(M)$ entnehmen, jedoch ist die Berechnung des unendlichen Produktes

$\prod_{\mathfrak{p}\in\mathbb{P}(\mathbb{Q}(\zeta_\ell+\zeta_\ell^{-1})),\ \mathfrak{p}\text{ endlich}} \alpha_{\mathfrak{p}}(M)$ im Allgemeinen schwierig.

Ein ganz anderer Punkt zum Weiterarbeiten ist die Loslösung von der Voraussetzung, dass $3 \leq \ell \leq 19$ ist. Der Fall, dass $\ell = 2$ ist, ist von ganz anderem Typ, da keine Theorie hermitescher Formen mehr auftritt. Für $\ell > 19$ besteht das Problem im Wesentlichen darin, dass der Ring $\mathbb{Z}[\zeta_\ell]$ kein Hauptidealring mehr ist und die Klassifikation von Diederichsen und Reiner für $\mathbb{Z}G$-Gitter kein Krull-Schmidt Theorem mehr ist. Die Kategorie $\mathrm{Latt}(\mathbb{Z}G)$ enthält die Unzerlegbaren

$$\mathbb{Z}, \mathfrak{a} \text{ und } (\mathfrak{a}, c)$$

wobei $\mathfrak{a}$ die Idealklassen von $\mathbb{Z}[\zeta_\ell]$ durchläuft und $(\mathfrak{a}, c)$ Erweiterungen von $\mathbb{Z}$ und $\mathfrak{a}$ sind. Zusammenfassend gesagt, die Modultheorie wird in diesen Situationen komplizierter und es bleibt zu prüfen, in wie fern die gemachten Aussagen angepasst werden können. Siehe dazu auch Kapitel 11, Abschnitt 74 von [**CR62**].

Literaturverzeichnis

[Ban88] Etsuko Bannai. *Positive definite unimodular lattices with trivial automorphism groups*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1988. Thesis (Ph.D.)–The Ohio State University.

[BCP97] Wieb Bosma, John Cannon, and Catherine Playoust. The Magma algebra system. I. The user language. *J. Symbolic Comput.*, 24(3-4):235–265, 1997. http://magma.maths.usyd.edu.au/magma/.

[Bie81] Jürgen Biermann. *Gitter mit kleiner Automorphismengruppe in Geschlechtern von $\mathbb{Z}$-Gittern mit positiv-definiter quadratischer Form*. PhD thesis, Georg-August-Universität Göttingen, 1981.

[Bög66] Sigrid Böge. Schiefhermitesche Formen über Zahlkörpern und Quaternionenschiefkörpern. *J. Reine Angew. Math.*, 221:85–112, 1966.

[Bor63] Armand Borel. Some finiteness properties of adele groups over number fields. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (16):5–30, 1963.

[Bra41] Hel Braun. Zur Theorie der hermitischen Formen. *Abh. Math. Sem. Hansischen Univ.*, 14:61–150, 1941.

[Che89] V. I. Chernousov. The Hasse principle for groups of type E_8. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 306(5):1059–1063, 1989.

[CR62] Charles W. Curtis and Irving Reiner. *Representation theory of finite groups and associative algebras*. Pure and Applied Mathematics, Vol. XI. Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, New York-London, 1962.

[Fei78] Walter Feit. Some lattices over $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$. *J. Algebra*, 52(1):248–263, 1978.

[FM69] A. Fröhlich and A. M. McEvett. The representation of groups by automorphisms of forms. *J. Algebra*, 12:114–133, 1969.

[HK89] Ki-ichiro Hashimoto and Harutaka Koseki. Class numbers of definite unimodular Hermitian forms over the rings of imaginary quadratic fields. *Tohoku Math. J. (2)*, 41(1):1–30, 1989.

[HR62] A. Heller and Irving Reiner. Representations of cyclic groups in rings of integers. I. *Ann. of Math. (2)*, 76:73–92, 1962.

[HR78] Ian Hambleton and Carl R. Riehm. Splitting of Hermitian forms over group rings. *Invent. Math.*, 45(1):19–33, 1978.

[Hum80] James E. Humphreys. *Arithmetic groups*, volume 789 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1980.

[Kne02] Martin Kneser. *Quadratische Formen*. Springer-Verlag, Berlin, 2002. Revised and edited in collaboration with Rudolf Scharlau.

[Kot88] Robert E. Kottwitz. Tamagawa numbers. *Ann. of Math. (2)*, 127(3):629–646, 1988.

[Mis00] Maurice Mischler. Local densities of Hermitian forms. In *Quadratic forms and their applications (Dublin, 1999)*, volume 272 of *Contemp. Math.*, pages 201–208. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[New72] Morris Newman. *Integral matrices*. Academic Press, New York, 1972. Pure and Applied Mathematics, Vol. 45.

[Ono63] Takashi Ono. On the Tamagawa number of algebraic tori. *Ann. of Math. (2)*, 78:47–73, 1963.

[Ono65] Takashi Ono. On the relative theory of Tamagawa numbers. *Ann. of Math. (2)*, 82:88–111, 1965.

[PR94] Vladimir Platonov and Andrei Rapinchuk. *Algebraic groups and number theory*, volume 139 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1994. Translated from the 1991 Russian original by Rachel Rowen.

[Que81] Heinz-Georg Quebbemann. Zur Klassifikation unimodularer Gitter mit Isometrie von Primzahlordnung. *J. Reine Angew. Math.*, 326:158–170, 1981.

[Reh71] Ulf Rehmann. *Klassenzahlen einiger totaldefiniter klassischer Gruppen über Zahlkörpern*. PhD thesis, Georg-August-Universität Göttingen, 1971.

[Rei61] Irving Reiner. The Krull-Schmidt theorem for integral group representations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 67:365–367, 1961.

[RHD70] Klaus W. Roggenkamp and Verena Huber-Dyson. *Lattices over orders. I.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 115. Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[Sch09] Rudolf Scharlau. Martin Kneser's work on quadratic forms and algebraic groups. In *Quadratic forms—algebra, arithmetic, and geometry*, volume 493 of *Contemp. Math.*, pages 339–357. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[Sch11] Rudolf Scharlau. Automorphism groups of lattices in large genera. Vortrag an der BIRS, November 2011. http://temple.birs.ca/˜11w5011/scharlau.pdf.

[Sie35] Carl Ludwig Siegel. Über die analytische Theorie der quadratischen Formen. *Ann. of Math. (2)*, 36(3):527–606, 1935.

[Tam66] Tsuneo Tamagawa. Adèles. In *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups (Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, Colo., 1965)*, pages 113–121. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1966.

[Was97] Lawrence C. Washington. *Introduction to cyclotomic fields*, volume 83 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1997.

[Wei61] André Weil. *Adeles and algebraic groups*, volume 23 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Mass., 1961.

[Wei95] André Weil. *Basic number theory*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the second (1973) edition.