

# Einige Eigenschaften gestutzter bivariater $t$ -Verteilungen

Dissertation zur Erlangung des Grades  
eines Doktors der Naturwissenschaften  
der Technischen Universität Dortmund

Der Fakultät Statistik der Technischen Universität Dortmund

vorgelegt von

Jonas Kaiser

aus Dreieich

Datum der mündlichen Prüfung: 14. Mai 2009

Erstgutachter: Prof. Dr. W. Krämer

Zweitgutachter: Prof. Dr. G. Trenkler

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung und Übersicht</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Gestutzte Verteilungen</b>	<b>10</b>
<b>3</b>	<b>Sphärische und elliptische Verteilungen</b>	<b>12</b>
3.1	Zwei bivariate elliptische Verteilungen . . . . .	16
3.2	Gestutzte Varianzen einiger sphärischer Verteilungen . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Bedingte und gestutzte Korrelation</b>	<b>22</b>
4.1	Ein Satz über bedingte Korrelation . . . . .	25
4.2	Der Rückschluss von der gestutzten auf die ungestutzte Korrelation . . . . .	27
4.3	Einige numerische Beispiele . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Eine Eigenschaft der einseitig gestutzten bivariaten Cauchy-Verteilung</b>	<b>40</b>
<b>6</b>	<b>Ein Test auf bivariate Cauchy-Verteilung</b>	<b>57</b>
6.1	Ergebnisse bei unkorrelierten Komponenten . . . . .	58
6.2	Ergebnisse bei korrelierten Komponenten . . . . .	63
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>68</b>

## Tabellenverzeichnis

1	Quantile der Teststatistik $\hat{Q}$ bei unkorrelierten Komponenten für eine Stützung im Median . . . . .	59
2	Quantile der Teststatistik $\hat{Q}$ bei unkorrelierten Komponenten für eine Stützung im oberen Quartil . . . . .	59
3	Quantile der Teststatistik $\hat{Q}$ bei unkorrelierten Komponenten für eine Stützung im oberen Dezil . . . . .	60
4	Quantile der Teststatistik $\hat{Q}$ bei korrelierten Komponenten für eine Stützung im Median . . . . .	65
5	Quantile der Teststatistik $\hat{Q}$ bei korrelierten Komponenten für eine Stützung im oberen Quartil . . . . .	65
6	Quantile der Teststatistik $\hat{Q}$ bei korrelierten Komponenten für eine Stützung im oberen Dezil . . . . .	66

# Abbildungsverzeichnis

1	Tagesrenditen der Aktien von Daimler-Chrysler und Deutsche Bank von April 1999 - März 2009 . . . . .	9
2	Renditen der Aktien von Daimler-Chrysler und Deutsche Bank bei einer Beschränkung auf Tage, an denen die absolute Rendite von Daimler-Chrysler 3% übersteigt . . . . .	9
3	5000 Realisationen einer bivariaten $t_6$ -Verteilung mit Korrelation $\rho = 0,6$ . . . . .	23
4	460 Realisationen einer in $S=2$ beidseitig symmetrisch gestutzten bivariaten $t_6$ -Verteilung mit ungestutzter Korrelation $\rho = 0.6$ . . . . .	23
5	Ränge von 5000 Realisationen einer bivariaten Normalverteilung mit Korrelation $\rho = 0,6$ . . . . .	29
6	Ränge einer Komponente aus 5000 Realisationen einer bivariaten Normalverteilung und die aus den Rängen konstruierten $Rz_i$ , so dass die zugehörigen Zufallsvariablen unkorreliert sind . . . . .	29
7	5000 Realisationen einer bivariaten sphärischen $t_5$ -Verteilung	32
8	5000 Realisationen zweier unabhängiger $t_5$ -Verteilungen . . .	32
9	5000 Realisationen einer bivariaten elliptischen $t_5$ -Verteilung mit Korrelation $\rho = 0,6$ . . . . .	33
10	5000 Realisationen einer univariat $t_5$ -verteilten Zufallsvariablen und einer Konvexkombination unabhängiger $t_5$ -Variablen mit Korrelation $\rho = 0,6$ . . . . .	33

11	Vergleich der geschätzten Dichten von 1000000 Realisationen einer $t_5$ -Verteilung und einer Konvexkombination unabhängiger $t_5$ -Variablen . . . . .	34
12	Fehler beim Rückschluss von gestutzter auf ungestutzte Korrelation für eine bivariate beidseitig symmetrisch in verschiedenen Stützungsstellen $S$ gestutzte $t_3$ -Verteilung . . . . .	37
13	Fehler beim Rückschluss von gestutzter auf ungestutzte Korrelation für eine bivariate linksseitig in verschiedenen Stützungsstellen $S$ gestutzte $t_3$ -Verteilung . . . . .	37
14	Fehler beim Rückschluss von gestutzter auf ungestutzte Korrelation für eine bivariate beidseitig symmetrisch in verschiedenen Stützungsstellen $S$ gestutzte $t_5$ -Verteilung . . . . .	38
15	Fehler beim Rückschluss von gestutzter auf ungestutzte Korrelation für eine bivariate linksseitig in verschiedenen Stützungsstellen $S$ gestutzte $t_5$ -Verteilung . . . . .	38
16	Die ungestutzte Korrelation als Funktion der gestutzten Korrelation am Beispiel einer in $S = 2$ gestutzten bivariaten $t_5$ -Verteilung . . . . .	39
17	Das empirische untere Quartil von jeweils 100000 Realisationen der $Y$ -Komponente einer in $S=2$ linksseitig gestutzten bivariaten Cauchy-Verteilung in Abhängigkeit vom Korrelationsparameter $\rho$ . . . . .	43
18	Quantilfunktionen für verschiedene Werte von $\rho$ . . . . .	45
19	Simulierte Güte bei unkorrelierten Komponenten für eine Stützung im Median . . . . .	61
20	Simulierte Güte bei unkorrelierten Komponenten für eine Stützung im oberen Quartil . . . . .	62

21	Simulierte Güte bei unkorrelierten Komponenten für eine Stut- zung im oberen Dezil . . . . .	62
22	Simulierte Güte bei korrelierten Komponenten für eine Stut- zung im Median . . . . .	66
23	Simulierte Güte bei korrelierten Komponenten für eine Stut- zung im oberen Quartil . . . . .	67
24	Simulierte Güte bei korrelierten Komponenten für eine Stut- zung im oberen Dezil . . . . .	67

## Symbolverzeichnis

- $A_B$  : beidseitige Stutzung,  $\{X||X| > S\}$
- $A_L$  : linksseitige Stutzung,  $\{X|X > S\}$
- $A_R$  : rechtsseitige Stutzung,  $\{X|X < S\}$
- $BNV$  : Bivariate Normalverteilung
- $BVT_\nu$  : Bivariate  $t$ -Verteilung mit  $\nu$  Freiheitsgraden
- $E_{X;A}$  : gestutzter Erwartungswert
- $\mathbf{E}$  : bivariate elliptische Zufallsvariable
- $IQA$  : Interquartilsabstand
- $\mathbf{K}$  : bivariate sphärische Zufallsvariable
- $L$  : Normierungskonstante
- $\mathbf{O}$  : Orthogonale Matrix
- $Q$  : Quotient zweier Interquartilsabstände
- $q$  : Quantil
- $Rx_i$  : Ränge von Realisationen der Zufallsvariablen  $X$
- $t_\nu$  : univariate  $t$ -Verteilung mit  $\nu$  Freiheitsgraden
- $\Delta$  : Skalar, so dass  $\phi_X^2 = \Delta\phi_Y^2$  bei einer bivariaten Cauchy-Verteilung
- $\nu$  : Freiheitsgrade
- $\rho$  : Korrelationsparameter, entspricht der Korrelation bei endlichen zweiten Momenten
- $\rho_A$  : bedingte oder gestutzte Korrelation
- $\Phi$  : Kovarianzmatrix
- $\sigma_{X;A}^2$  : gestutzte Varianz
- $\tau$  : Kendalls Tau
- $\mathbf{1}$  : Indikatorfunktion
- $\text{sgn}(\cdot)$  : Vorzeichenfunktion

# 1 Einleitung und Übersicht

In der empirischen Finanzwirtschaft ist die Modellierung von Renditen unter bestimmten Bedingungen von entscheidender Bedeutung. Dabei ist eine Beschränkung auf extreme Werte besonders naheliegend. Es erscheint deshalb sinnvoll, bei der Untersuchung von zwei Renditen nur Werte zu betrachten, an denen eine der Renditen einen Schwellenwert unter- oder überschreitet. Die Menge der untersuchten Datenpunkte wird dabei regelrecht „abgeschnitten“, was im mathematischen Sinn eine Stutzung bedeutet. In dieser Arbeit geht es um gestutzte bivariate Verteilungen, wobei besonderes Augenmerk auf elliptischen und insbesondere  $t$ -Verteilungen liegt. Für letztere gibt es vielfältige Anwendungsmöglichkeiten, siehe z.B. Liu (1995) zur Implementation fehlender Werte, O’Hagan und Forster (2004) zu Anwendungen in der Bayes-Statistik und Lauprete et al. (2002) zur Portfoliooptimierung.

Zunächst werden im zweiten Kapitel gestutzte Verteilungen und Korrelationen definiert. Das dritte Kapitel diskutiert die sogenannten sphärischen und elliptischen Verteilungen. Letztere sind wichtig bei der Modellierung ellipsenförmiger Datenstrukturen, wie sie in der Praxis bei Finanzrenditen häufig vorkommen. Außerdem werden mit der bivariaten Normal- und  $t$ -Verteilung zwei elliptische Verteilungen vorgestellt. Das vierte Kapitel stellt einige bisherige Forschungsergebnisse zur Modellierung von Finanzrenditen vor und untersucht die Auswirkungen der Stutzung einer elliptischen Verteilung auf die Korrelation und deren Schätzung. Als motivierendes Beispiel sind die (zeitstetigen) Tagesrenditen der Deutsche Bank- und Daimler-



Chrysler-Aktie vom 1. April 1999 bis 31. März 2009 und deren empirischer Korrelationskoeffizient  $\hat{\rho} = 0,642$  in Abbildung 1 dargestellt. In Abbildung 2 werden nur Tage betrachtet, an denen die absolute Rendite der Deutsche Bank-Aktie größer als 3% ist. Hier beträgt die empirische Korrelation  $\hat{\rho}_G = 0,747$ . Dieser Unterschied deutet nicht darauf hin, dass die gestutzten Renditen stärker zusammenhängen, vielmehr lässt er sich als Artefakt der Stutzung erklären. Diese Problematik war in den letzten Jahren bereits häufig Gegenstand der Debatte in der empirischen Kapitalmarktforschung (siehe z.B. Longin und Solnik 1995 und 2001, Boyer et al. 1997, Campbell et al. 2008). Ich werde einen grundsätzlichen Fehler in Campbell et al. herausstellen und eine allgemeine Formel für elliptische Verteilungen herleiten. Das fünfte Kapitel beweist eine kuriose Eigenschaft der gestutzten Cauchy-Verteilung. Beide Komponenten haben denselben Interquantilsabstand, obwohl sich ihre Verteilungen deutlich voneinander unterscheiden. Im sechsten Kapitel wird diese Eigenschaft für einen naheliegenden Test auf gestutzte Cauchy-Verteilung genutzt. Simulationen liefern Aufschlüsse über die Güte des Tests. Abschließend werden im siebten Kapitel die Ergebnisse zusammengefasst.

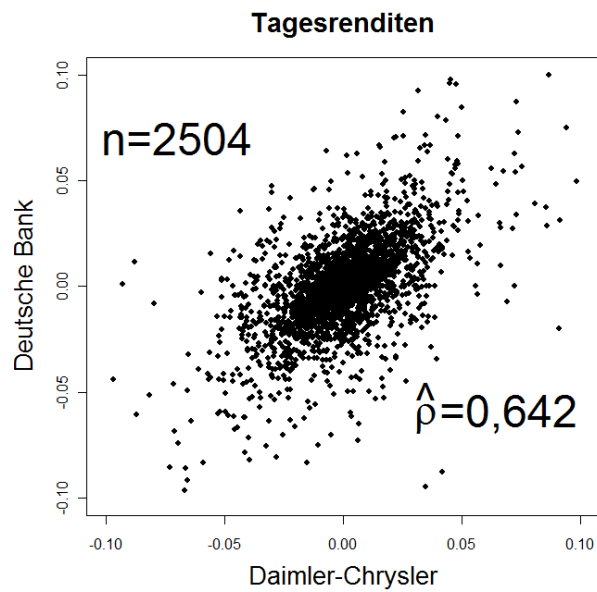


Abbildung 1: Tagesrenditen der Aktien von Daimler-Chrysler und Deutsche Bank von April 1999 - März 2009

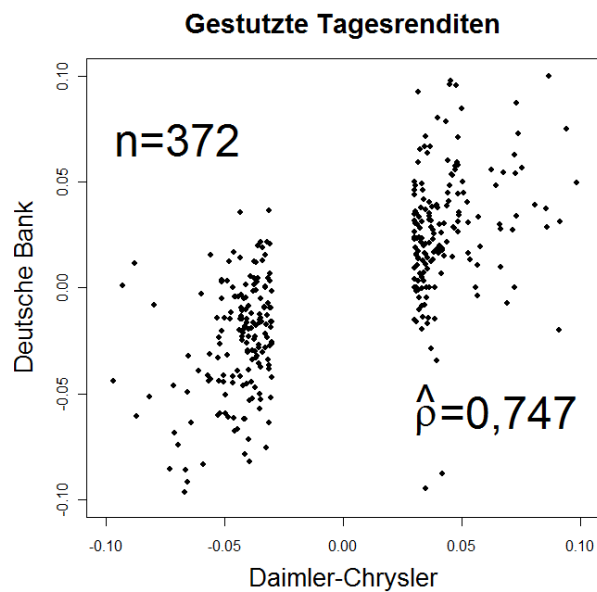


Abbildung 2: Renditen der Aktien von Daimler-Chrysler und Deutsche Bank bei einer Beschränkung auf Tage, an denen die absolute Rendite von Daimler-Chrysler 3% übersteigt

## 2 Gestutzte Verteilungen

**Definition:** Gegeben sei eine bivariate Zufallsvariable  $(X, Y)^T$  mit Dichte  $f(x, y)$  und eine aufsteigende Folge reeller Zahlen  $x_1, \dots, x_N$ . Die reellen Zahlen lassen sich als eine Partition disjunkter Intervalle der Form

$$\mathcal{I}_1 = -\infty < x \leq x_1,$$

$$\mathcal{I}_2 = x_1 < x \leq x_2,$$

⋮

$$\mathcal{I}_{N+1} = x_N < x < \infty$$

schreiben. Dabei können die Intervalle rechtsseitig auch offen sein, wenn das folgende Intervall linksseitig abgeschlossen ist.

Es sei nun  $T \subset \{1, \dots, N + 1\}$  und  $A = \bigcup_{i \in T} \mathcal{I}_i$ . Dann ist

$$f(x, y | X \in A) = \frac{1}{\int_{x \in A} f(x, y)} f(x, y) \mathbf{1}_A(x) \quad (1)$$

die in  $A$  gestutzte Dichte.

Dabei wird hier o.B.d.A immer in der  $X$ -Komponente gestutzt. Die dazugehörige Verteilung wird im Folgenden als gestutzte Verteilung bezeichnet.

Für  $N = 1$  spreche ich im Folgenden von einer einseitig gestutzten Verteilung. Ist dabei der Träger der Verteilung ein Intervall der Form  $(S, \infty)$  oder  $[S, \infty)$ , so heisst die Verteilung in der Stutzungsstelle  $S$  linksseitig gestutzt. Wenn der Träger der Verteilung ein Intervall der Form  $(-\infty, S)$  oder  $(-\infty, S]$  ist, dann heisst die Dichte in  $S$  rechtsseitig gestutzt. Für  $N = 2$  heisst eine Verteilung beidseitig symmetrisch in  $S$  gestutzt, wenn der Träger der Verteilung die Vereinigung zweier Intervalle  $(-\infty, -S) \cup (S, \infty)$  oder

$(-\infty, -S] \cup [S, \infty)$  mit  $S > 0$  ist.

Im Vergleich zweier einseitig oder beidseitig symmetrisch gestutzter Verteilungen  $(X_1, Y_1)^T$  mit Stützungsstelle  $S_1$  und  $(X_2, Y_2)^T$  mit Stützungsstelle  $S_2$  heisst  $(X_1, Y_1)$  stärker gestutzt als  $(X_2, Y_2)^T$ , falls  $S_1 > S_2$  und schwächer gestutzt als  $(X_2, Y_2)^T$ , falls  $S_1 < S_2$ . Im Folgenden sind gestutzte Verteilungen o.B.d.A. immer in  $X$  gestutzt.

Wenn bei einer bivariaten Verteilung ungestutzte Momente endlich sind, sind auch die gestutzten Momente der entsprechenden Ordnung endlich.

Im Folgenden spreche ich kurz von gestutzter Varianz, gestutzter Korrelation etc. anstelle der Varianz, Korrelation etc. einer gestutzten Verteilung.

Für eine Übersicht zu gestutzten Verteilungen verweise ich auf Cohen (1991).

### 3 Sphärische und elliptische Verteilungen

**Definition:** Gegeben sei ein bivariater Zufallsvektor  $\mathbf{K} = (K_1, K_2)^T$ . Dann ist  $\mathbf{K}$  sphärisch mit Erwartungswertvektor  $\boldsymbol{\mu}$  und Kovarianzmatrix  $\sigma^2 \mathbf{I}$ , wenn  $\mathbf{K}$  und  $\mathbf{OK}$  für jede  $(2 \times 2)$ -dimensionale orthogonale Matrix  $\mathbf{O}$  dieselbe Verteilung haben.

Für die Darstellung einer bivariaten stetigen Verteilung werden häufig Linien verwendet, auf denen die Dichtefunktion konstant ist. In Analogie zu Landkarten werden diese als Höhenlinien bezeichnet. Die Multiplikation mit einer orthogonalen Matrix ist anschaulich eine Spiegelung oder Drehung der bivariaten Verteilung. Eine Invarianz gegenüber diesen Transformationen bedeutet, dass bei einer sphärischen Verteilung die Höhenlinien der Dichte Kreise sind. Wenn die Verteilung zusätzlich zentriert ist, d.h.  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ , entspricht der Mittelpunkt der Kreise dem Koordinatenursprung. **Definition:** Es sei  $\mathbf{K}$  sphärisch und zentriert und  $\mathbf{C}$  eine  $(2 \times 2)$ -dimensionale Matrix. Dann ist der bivariate Zufallsvektor  $\mathbf{E} = (E_1, E_2)^T$  elliptisch mit Erwartungswertvektor  $\boldsymbol{\mu}$  und Kovarianzmatrix  $\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{C}\mathbf{C}^T$ , wenn  $\mathbf{E}$  sich als

$$\mathbf{E} = \mathbf{C}\mathbf{K} + \boldsymbol{\mu}$$

schreiben lässt. Für nichtsinguläres  $\mathbf{C}$  ist  $\boldsymbol{\Sigma}$  positiv definit. Für singuläres  $\mathbf{C}$  ist die elliptische Verteilung degeneriert.

Die Multiplikation mit der Matrix  $\mathbf{C}$  bedeutet anschaulich eine Drehstreckung. Die kreisförmigen Höhenlinien einer sphärischen Verteilung werden dadurch zu Ellipsen. Bei einer zentrierten elliptischen Verteilung ist der Mittelpunkt der Höhenlinien der Koordinatenursprung.

**Bemerkung 3.1:** Die Bezeichnung „Kovarianzmatrix“ habe ich verwendet, weil diese in der Fachliteratur üblich ist. Eigentlich ist dieser Begriff etwas irreführend, weil die Einträge nicht unbedingt die Varianzen und Kovarianzen sind (die in manchen Fällen nicht endlich sind!). Aus diesem Grund unterscheiden sich die Einträge von den Varianzen der Komponenten  $\sigma_X^2$  und  $\sigma_Y^2$ . Der alternative Begriff der Dispersionsmatrix scheint geeigneter, allerdings werden beide Begriffe synonym verwendet, weshalb ich darauf verzichtet habe.

Es sei nun eine zentrierte elliptische Verteilung  $\mathbf{E} = (E_1, E_2)^T$  mit Kovarianzmatrix

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_{E_1}^2 & \phi_{E_1} \phi_{E_2} \rho_{E_1 E_2} \\ \phi_{E_1} \phi_{E_2} \rho_{E_1 E_2} & \phi_{E_2}^2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Der Korrelationsparameter  $\rho_{E_1 E_2}$  liegt immer zwischen -1 und 1 und gibt die Stärke des linearen Zusammenhangs zwischen  $E_1$  und  $E_2$  an. Der Zusammenhang ist perfekt positiv linear (mit Wsk. 1), falls  $\rho = 1$  und perfekt negativ linear, falls  $\rho = -1$ . Wenn  $E_1$  und  $E_2$  endliche zweite Momente haben, entspricht der Korrelationsparameter der Korrelation, also

$$\rho_{E_1 E_2} = \frac{\text{Cov}(E_1, E_2)}{\sqrt{\text{Var}(E_1)} \sqrt{\text{Var}(E_2)}}.$$

Die Korrelation kann durch den Korrelationskoeffizienten nach Bravais-Pearson (BPK) als Quotient aus empirischer Kovarianz und dem Produkt der empirischen Standardabweichungen geschätzt werden.

Ein weiteres Zusammenhangsmaß ist Kendalls  $\tau$ . Es seien  $(F_1, F_2)^T$  und  $(G_1, G_2)^T$  zwei unabhängige Kopien von  $(E_1, E_2)^T$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \tau_{E_1, E_2} &= \text{P}[(F_1 - G_1)(F_2 - G_2) > 0] \\ &\quad - \text{P}[(F_1 - G_1)(F_2 - G_2) < 0]. \end{aligned}$$

Kendalls  $\tau$  liegt ebenfalls zwischen -1 und 1. Der übliche Schätzer ist

$$\hat{\tau}_{E_1, E_2} = 2 \frac{\sum_{i < j} \text{sgn}(e_{1,j} - e_{1,i}) \text{sgn}(e_{2,j} - e_{2,i})}{n^2 - n}, \quad (2)$$

wobei  $n$  die Stichprobengröße,  $\text{sgn}(\cdot)$  die Vorzeichenfunktion und  $e_{1,\cdot}$  und  $e_{2,\cdot}$  die Realisationen von  $E_1$  bzw.  $E_2$  bezeichnen. Für elliptische Verteilungen gilt nach Fang et al. (2002, S.8 f)

$$\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho),$$

woraus sich

$$\Leftrightarrow \rho = \sin\left(\frac{\tau\pi}{2}\right) \quad (3)$$

ergibt. Mit Formel (2) lässt sich über diese Beziehung bei elliptischen Verteilungen der Korrelationsparameter schätzen, auch wenn die zweiten Momente von  $X$  und  $Y$  nicht existieren. Ich werde im Folgenden auch in diesem Fall für  $\rho \neq 0$  von korrelierten Komponenten  $X$  und  $Y$  sprechen.

Betrachte erneut eine standardisierte elliptische Verteilung mit Korrelationsparameter  $\rho \neq \pm 1$ . Dann kann  $C$  gewählt werden als

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1 - \rho^2} \end{pmatrix}$$

und somit ist

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} & \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \end{pmatrix}.$$

Ist also  $(X, Z)^T$  sphärisch verteilt, dann ist  $(X, Y)^T$  mit

$$Y = \rho X + \sqrt{1 - \rho^2} Z$$

elliptisch verteilt.

Ist  $(X, Y)^T$  elliptisch verteilt, dann ist  $(X, Z)^T$  mit

$$Z = -\frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} X + \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} Y \quad (4)$$

sphärisch verteilt.

In Muirhead (1982, S. 32 - 40) sind weitere Eigenschaften elliptischer und sphärischer Verteilungen zu finden.



### 3.1 Zwei bivariate elliptische Verteilungen

#### Bivariate Normalverteilung:

Ein Zufallsvektor  $(X, Y)^T$  ist bivariat normalverteilt mit Erwartungswertvektor  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_X, \mu_Y)^T$  und Kovarianzmatrix

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_X \sigma_Y \rho_{XY} \\ \sigma_X \sigma_Y \rho_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$$

(kurz:  $(X, Y)^T \sim BVN(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ), wenn die bivariate Dichte durch

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\sigma_X^2 \sigma_Y^2 (1 - \rho_{XY}^2)}} \exp \left( -\frac{(x - \mu_X)^2 / \sigma_X^2 - 2\rho_{XY} (x - \mu_X) (y - \mu_Y) / (\sigma_X \sigma_Y) + (y - \mu_Y)^2 / \sigma_Y^2}{2(1 - \rho_{XY}^2)} \right)$$

gegeben ist. Falls  $X$  und  $Y$  unkorreliert sind und gleiche Varianz haben, ist die bivariate Normalverteilung sphärisch. Es gilt  $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$  und  $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ . Bei einer bivariaten Normalverteilung entsprechen die Einträge der Kovarianzmatrix also den Varianzen und der Kovarianz (vgl. Bemerkung 3.1).

**Satz 3.1:** Gegeben sei ein bivariater sphärischer Zufallsvektor  $\mathbf{K} = (K_1, K_2)^T$ .  $K_1$  und  $K_2$  seien unabhängig. Dann ist  $\mathbf{K}$  bivariat normalverteilt.

**Beweisskizze:** Die charakteristische Funktion einer sphärischen Verteilung lässt sich als Funktion eines Produktes schreiben und, unter Ausnutzung der Unabhängigkeit, als Produkt einzelner Funktionen. Durch Gleichsetzen ergibt sich dann eine Gleichung mit einer Lösung. Einsetzen dieser Lösung

führt zur charakteristischen Funktion einer Normalverteilung. Für den vollständigen Beweis siehe Muirhead (1982, S. 35).

Also sind die unkorrelierten Zufallsvariablen  $K_1$  und  $K_2$  nur dann unabhängig, wenn  $\mathbf{K}$  bivariat normalverteilt ist. Wenn keine bivariate Normalverteilung vorliegt, so sind  $K_1$  und  $K_2$  zwangsläufig abhängig. Die gemeinsame Verteilung zweier unabhängiger, aber nicht normalverteilter Zufallsvariablen kann somit nicht sphärisch sein.

### Bivariate $t$ -Verteilung:

Ein Zufallsvektor  $(X, Y)^T$  ist bivariat  $t$ -verteilt mit  $\nu > 0$  Freiheitsgraden, Erwartungswertvektor  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_X, \mu_Y)^T$  und Kovarianzmatrix

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} \phi_X^2 & \phi_X \phi_Y \rho_{XY} \\ \phi_X \phi_Y \rho_{XY} & \phi_Y^2 \end{pmatrix}$$

(kurz  $(X, Y)^T \sim BVT_\nu(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Phi})$ ), wenn die bivariate Dichte durch

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\phi_X^2\phi_Y^2(1-\rho_{XY}^2)}} \left[ 1 + \frac{(x-\mu_X)^2/\phi_X^2}{1-\rho_{XY}^2} - \frac{2\rho_{XY}(x-\mu_X)(y-\mu_Y)/(\phi_X\phi_Y) + (y-\mu_Y)^2/\phi_Y^2}{1-\rho_{XY}^2} \right]^{(-\nu/2-1)} \quad (5)$$

gegeben ist.

Die Komponenten  $X$  und  $Y$  sind jeweils univariat  $t$ -verteilt. Es gilt

$X \sim t_\nu(\mu_X, \phi_X^2)$  und  $Y \sim t_\nu(\mu_Y, \phi_Y^2)$ . Für eine bivariate  $t_\nu$ -Verteilung existieren alle Momente der Ordnung  $k < \nu, k \in \mathbb{N}$ . Für mehr als 2 Freiheitsgrade gilt  $\sigma_X^2 = \frac{\nu}{\nu-2}\phi_X^2$  und  $\sigma_Y^2 = \frac{\nu}{\nu-2}\phi_Y^2$ . Eine bivariate  $t$ -Verteilung ist sphärisch, falls  $X$  und  $Y$  unkorreliert mit  $\phi_X^2 = \phi_Y^2$ . Von einer bivariaten Standard- $t$ -Verteilung spreche ich im Folgenden, wenn diese zentriert ist

und  $\phi_X^2 = \phi_Y^2 = 1$ . Die Komponenten können dabei durchaus korreliert sein.

**Einige Eigenschaften der bivariaten  $t$ -Verteilung** (vgl. Kotz und Nadarajah 2004, S. 1-11):

- Für zwei unabhängige Zufallsvariablen  $(X_N, Y_N)^T \sim BVN(\mathbf{0}, \Sigma)$  und  $D \sim \chi_v^2$  gilt

$$(X, Y)^T = \frac{(X_N, Y_N)^T}{\sqrt{1/\nu D}} \sim BVT_\nu(\mathbf{0}, \Phi).$$

- Eine bivariat  $t$ -verteilte Zufallsvariable lässt sich als Quotient beider Komponenten einer bivariat normalverteilten und einer davon unabhängigen univariat  $\chi^2$ -verteilten Zufallsvariablen schreiben. Der Korrelationsparameter der bivariaten  $t$ -Verteilung entspricht dabei dem der Normalverteilung.
- Für steigende Freiheitsgrade konvergiert die bivariate  $t$ -Verteilung gegen die bivariate Normalverteilung. Je weniger Freiheitsgrade eine bivariate  $t$ -Verteilung hat, desto mehr Wahrscheinlichkeitsmasse liegt in den Rändern.
  - Bei einem Freiheitsgrad spricht man auch von einer bivariaten Cauchy-Verteilung, bei zwei Freiheitsgraden von einer bivariaten Pearson-Verteilung.
  - Die Freiheitsgrade sind ein Parameter der bivariaten  $t$ -Verteilung und müssen nicht ganzzahlig sein.
  - Es gibt viele verschiedene bivariate  $t$ -Verteilungen, wobei die in dieser Arbeit verwendete die gängigste ist. Für eine Übersicht siehe Kotz und Nadarajah (2004, S. 63-80).

### 3.2 Gestutzte Varianzen einiger sphärischer Verteilungen

**Notation:** Ich verwende im Folgenden Kurznotationen für einseitige und beidseitig symmetrische Stutzungen. Es seien  $A_L := (S, \infty)$ ,  $A_R := (-\infty, S)$  und  $A_B := (-\infty, S) \cup (\infty, S)$ , wobei  $S$  jeweils die Stutzungsstelle ist. Der gestutzte Erwartungswert von  $X$  wird mit  $E_{X;A}$  statt  $E(X|X \in A)$  bezeichnet. Die gestutzte Varianz sei  $\sigma_{X;A}^2$  anstelle von  $\sigma_{X|X \in A}^2$ . Die Bezeichnungen für  $Y$  sind analog.

Die Ergebnisse werden zunächst für linksseitig gestutzte Verteilungen berechnet. Wegen der Symmetrie der bivariaten Verteilung ist die Verallgemeinerung auf rechtsseitig und beidseitig symmetrisch gestutzte Verteilungen trivial. Die gestutzte Varianz von  $X$  ist bei verschiedenen elliptischen Verteilungen leicht zu berechnen. Campbell et al. (2008) bestimmen  $\sigma_{X;A_L}^2$  allgemein für  $t$ -Verteilungen. Schwieriger ist hingegen die Berechnung von  $\sigma_{Y;A_L}^2$ , weil die Berechnung der nötigen Integrale insbesondere für nicht ganzzahlig ungerade Freiheitsgrade sehr kompliziert ist. Für 3 und 5 Freiheitsgrade ist es aber möglich,  $\sigma_{Y;A_L}^2$  zu berechnen. Betrachten wir zunächst eine linksseitig gestutzte sphärische bivariate Standard- $t_3$ -Verteilung. Einige aufwändige, jedoch rein technische Umformungen sind hier nicht aufgeführt. Nach den Definitionen (1, S. 10) und (5) ist die Dichte der Verteilung gegeben durch

$$f(x, y|X > S) = L \frac{1}{2\pi} \left( 1 + \frac{1}{3}(x^2 + y^2) \right)^{-5/2} \mathbf{1}_x(S, \infty),$$

wobei

$$L = \frac{1}{\int_S^\infty f(x) dx}$$

die Normierungskonstante ist und  $f(x)$  die Randdichte von  $X$ . Diese ist die Dichte einer univariaten  $t_3$ -Verteilung und somit gegeben durch

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}\pi \left(1 + \frac{1}{3}x^2\right)^2}.$$

Es lässt sich ausrechnen, dass

$$L = \frac{\pi(3 + S^2)}{\frac{1}{2}\pi(3 + S^2) - \sqrt{3}S - (3 + S^2) \arctan(S/\sqrt{3})}. \quad (6)$$

Die Randdichte von  $Y$  ergibt sich zu

$$\begin{aligned} f(y) &= L \int_S^\infty \frac{1}{2\pi} \left(1 + \frac{1}{3}(x^2 + y^2)\right)^{-5/2} dx \\ &= L \left[ \frac{x(9 + 2x^2 + 3y^2)}{\sqrt{3}2\pi \left(1 + \frac{1}{3}y^2\right)^2 (3 + x^2 + y^2)^{5/2}} \right]_S^\infty \\ &= L \left( \frac{1}{\sqrt{3}\pi \left(1 + \frac{1}{3}y^2\right)^2} - \frac{3S(9 + 2S^2 + 3y^2)}{2\pi(9 + 3S^2 + 3y^2)^{5/2} \left(1 + \frac{1}{3}y^2\right)^2} \right). \end{aligned}$$

Wegen  $E(Y|X > S) = 0$  ist  $\sigma_{Y;A_L}^2 = E_{Y^2;A_L}$  und lässt sich damit als

$$\sigma_{Y;A_L}^2 = L \frac{-6 \arctan\left(1/\sqrt{3}S\right) S^2 + 3S^2\pi}{2S^2\pi} \quad (7)$$

berechnen. Für  $X$  ergibt sich

$$\begin{aligned} E_{X^2;A_L} &= \frac{3L}{2\pi(3 + S^2)} \left[ 2\sqrt{3}S - 6 \arctan\left(S/\sqrt{3}\right) \right. \\ &\quad \left. - 2 \arctan\left(S/\sqrt{3}\right) S^2 + 3\pi + S^2\pi \right] \quad (8) \end{aligned}$$

und

$$E_{X;A_L} = \frac{3\sqrt{3}L}{\pi(3 + S^2)}. \quad (9)$$

Die Varianz lässt sich dann über

$$\sigma_{X;A_L}^2 = E_{X^2;A_L} - (E_{X;A_L})^2 \quad (10)$$

berechnen.

Nach analoger Vorgehensweise ergibt sich für eine bivariate sphärische Standard- $t_5$ -Verteilung

$$E_{X;A_L} = \frac{50\sqrt{5}}{3L\pi(5+S^2)^2} \quad (11)$$

$$E_{X^2;A_L} = \frac{5(5+S^2)^2 \left( \pi - 2 \arctan \left( S/\sqrt{5} \right) \right) + 10\sqrt{5}S(5-S^2)}{6L\pi(5+S^2)^2} \quad (12)$$

und

$$\sigma_{Y;A_L}^2 = \frac{5(5+S^2) \left( \pi - 2 \arctan \left( S/\sqrt{5} \right) \right) - 10\sqrt{5}S}{6L\pi(5+S^2)}, \quad (13)$$

wobei

$$L = 1/2 - 10/3 \frac{\sqrt{5}S}{\pi(5+S^2)^2} - \frac{\sqrt{5}S}{\pi(5+S^2)} - \frac{\arctan(S/\sqrt{5})}{\pi}. \quad (14)$$

Die Ergebnisse bei rechtsseitiger Stützung entsprechen aufgrund der Symmetrie der bivariaten Verteilung denen bei einer linksseitigen Stützung in  $-S$ . Für beidseitig symmetrische Stützung ist die Berechnung von  $\sigma_{X;A_B}^2$  trivial, denn

$$\begin{aligned} \sigma_{X;A_B}^2 &= E_{X^2;A_B} - (E_{X;A_B})^2 \\ &= E_{X^2;A_B} \end{aligned} \quad (15)$$

was aus Symmetriegründen  $E_{X^2;A_L}$  entspricht. Ebenso ist  $\sigma_{Y;A_B}^2 = \sigma_{Y;A_L}^2$ .

## 4 Bedingte und gestutzte Korrelation

**Bemerkung:** Der Begriff der bedingten Korrelation bezeichnet die Korrelation einer bedingten Verteilung und ist eine Verallgemeinerung der gestutzten Korrelation. Der Fokus dieser Arbeit liegt auf gestutzten Verteilungen, weshalb auf die umfassende Definition der bedingten Verteilung verzichtet wird. Die im Folgenden erwähnten Forschungsergebnisse beziehen sich teilweise auf bedingte Korrelationen, sind aber natürlich auf gestutzte Korrelationen übertragbar. Ein Beispiel für eine Bedingung, die keiner Stutzung entspricht, wäre die Einschränkung auf einen bestimmten Zeitraum.

**Notation:** Im Folgenden schreibe ich für die bedingte oder gestutzte Korrelation kurz  $\rho_{XY;A}$  statt  $\rho_{XY|X \in A}$ .

Es ist schon lange bekannt, dass sich gestutzte und ungestutzte Korrelation unterscheiden. Dementsprechend ist die empirische gestutzte Korrelation  $\hat{\rho}_A$  ein verzerrter Schätzer für die ungestutzte Korrelation  $\rho$ . In Abbildung 3 sind zur Veranschaulichung 5000 Realisationen einer bivariaten  $t$ -Verteilung mit 6 Freiheitsgraden und Korrelation  $\rho = 0,6$  dargestellt. Abbildung 4 enthält die 460 Werte, die bei beidseitig symmetrischer Stutzung in  $S = 2$  übrig bleiben. Die empirischen Korrelationskoeffizienten unterscheiden sich deutlich, wie im ähnlichen Beispiel aus der Einleitung (S. 9). Weil die ungestutzte Korrelation laut Konstruktion jedoch konstant ist, muss es sich hierbei um ein Artefakt der Stutzung handeln. Aus Abbildung 4 auf einen stärkeren Zusammenhang der gestutzten Renditen zu schließen wäre falsch.

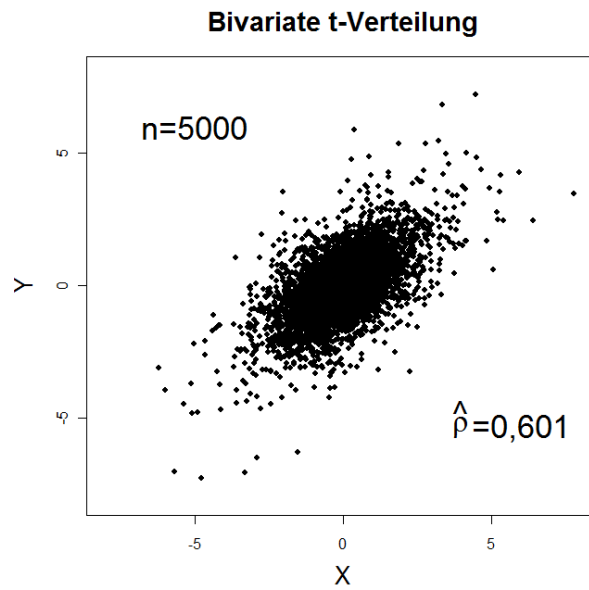


Abbildung 3: 5000 Realisationen einer bivariaten  $t_6$ -Verteilung mit Korrelation  $\rho = 0,6$

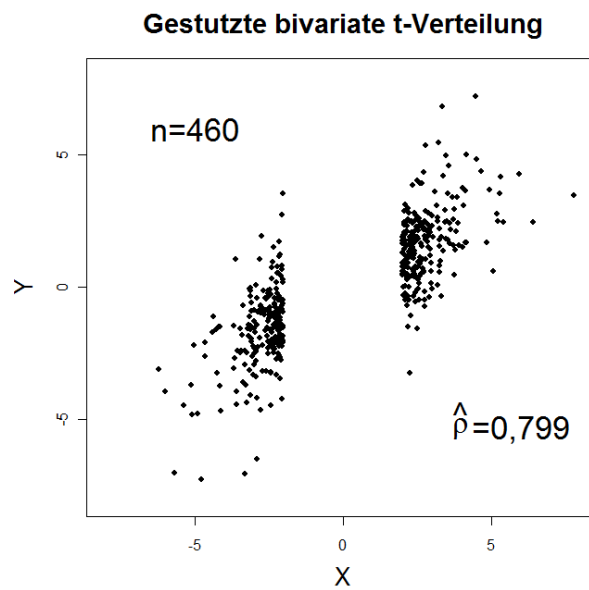


Abbildung 4: 460 Realisationen einer in  $S=2$  beidseitig symmetrisch gestutzten bivariaten  $t_6$ -Verteilung mit ungestutzter Korrelation  $\rho = 0.6$



Für die Normalverteilung haben Johnson und Kotz (1972) (siehe auch Boyer et al. 1997) bewiesen, dass für die bedingte Korrelation

$$\rho_{XY;A} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + (1 - \rho^2) \frac{\sigma_X^2}{\sigma_{X;A}^2}}} \quad (16)$$

gilt. Darauf aufbauend testen Forbes und Rigobon (2002), ob Korrelationen in Krisenzeiten ansteigen. Dies wäre ein Hinweis auf ein Phänomen, dass in der empirischen Finanzmarktforschung als „Ansteckung“ bekannt ist und besagt, dass sich Wirtschaftskrisen wie Krankheiten ausbreiten. Ein kranker Markt kann andere „infizieren“. Die ersten Hinweise darauf fanden King und Wadhvani (1990), die der Frage nach möglichen Ursachen für den Zusammenbruch der Aktienmärkte am „schwarzen Montag“ im Oktober 1987 nachgehen. Für einen Überblick zu dieser Thematik siehe Dungey und Tasmakis (2005).

Allerdings ist eine bivariate Normalverteilung für die Modellierung von Finanzrenditen ungeeignet, weil diese allgemein schwere Ränder aufweisen, d.h. extreme Werte kommen häufiger vor als bei einer Normalverteilung zu erwarten wäre. Dies ist besonders durch Mandelbrot (1963) bekannt geworden. Nach Mandelbrot hat Mitchell bereits 1915 Hinweise auf schwere Ränder gefunden, diese Arbeit war jedoch nicht auffindbar. Aufbauend auf der Arbeit von Mandelbrot testet Fama (1965) auf normalverteilte Renditen und findet deutliche Hinweise auf schwere Ränder. Eine  $t$ -Verteilung kann diese erklären, nicht aber die Schwankungen der Volatilität (vergleiche z.B. Pagan 1996) und die beobachtete Asymetrie der Korrelation in Bären- und Bullenmärkten (vergleiche z.B. Ang und Bekaert 2002 und Butler und Joachim 2002). In der Praxis ist die Annahme  $t$ -verteilter Renditen deshalb problematisch. Die  $t$ -Verteilung findet in der Modellierung aber über Umwege häufig Anwendung, weshalb die hier vorgestellten Eigenschaften gestutzter  $t$ -Verteilungen durchaus praxisrelevant sind. Das multivariate GARCH-Modell von Bollerslev (1990) erklärt die Schwankungen der Volatilität. Die-

ses Modell kann erweitert werden, um die Asymmetrie zu modellieren (siehe z.B. Klaassen 2002). Wegen der schweren Ränder wird dabei häufig eine bedingte  $t$ -Verteilung verwendet. Ein solches Modell bildet die Basis der Arbeit von Campbell et al. (2008), wo Auswirkungen der Stützung auf die Korrelation für bivariate  $t$ -Verteilungen diskutiert werden. Das Vorgehen der Autoren ist allerdings fehlerhaft, wie ich im weiteren Verlauf dieses Abschnitts ausführen werde.

#### 4.1 Ein Satz über bedingte Korrelation

Es seien  $X$  und  $Z$  zwei unkorrelierte Zufallsvariablen mit endlichen Varianzen  $\sigma_X^2$  und  $\sigma_Z^2$ . Eine dritte Zufallsvariable  $Y$  sei für  $|\rho| \leq 1$  definiert als

$$Y := \frac{\rho}{\sigma_X} X + \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\sigma_Z} Z.$$

Somit ist die Korrelation von  $X$  und  $Y$

$$\begin{aligned} \rho_{XY} &= \frac{\text{Cov}\left(X, \frac{\rho}{\sigma_X} X + \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\sigma_Z} Z\right)}{\sqrt{\sigma_X^2 \text{Var}\left(\frac{\rho}{\sigma_X} + \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\sigma_Z} Z\right)}} \\ &= \frac{\frac{\rho}{\sigma_X} \sigma_X^2 + 0}{\sqrt{\sigma_X^2 \left(\frac{\rho^2}{\sigma_X^2} \sigma_X^2 + \frac{1-\rho^2}{\sigma_Z^2} \sigma_Z^2\right)}} \\ &= \rho. \end{aligned}$$

Gegeben sei außerdem ein Ereignis  $A$  mit  $0 < P(X \in A) < 1$ . Es interessiert nun die bedingte Korrelation  $\rho_{XY;A}$ .

**Satz 4.1:** Falls  $\rho_{XZ;A} = 0$ , so gilt

$$\rho_{XY;A} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \frac{(1-\rho^2)\sigma_X^2\sigma_{Z;A}^2}{\sigma_Z^2\sigma_{X;A}^2}}}. \quad (17)$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \rho_{XY;A} &= \frac{\text{Cov}(X, Y|X \in A)}{\sqrt{\text{Var}(X|X \in A)}\sqrt{\text{Var}(Y|Y \in A)}} \\ &= \frac{\text{Cov}\left(X, \frac{\rho}{\sigma_X}X + \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\sigma_Z}Z|X \in A\right)}{\sqrt{\sigma_{X;A}^2 \text{Var}\left(\frac{\rho}{\sigma_X}X + \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\sigma_Z}Z|X \in A\right)}} \\ &= \frac{\frac{\rho}{\sigma_X}\sigma_{X;A}^2 + 0}{\sqrt{\sigma_{X;A}^2 \left(\frac{\rho^2}{\sigma_X^2}\sigma_{X;A}^2 + \frac{1-\rho^2}{\sigma_Z^2}\sigma_{Z;A}^2\right)}} \\ &= \frac{\frac{\rho}{\sigma_X}}{\sqrt{\frac{\rho^2}{\sigma_X^2} + \frac{(1-\rho^2)\sigma_{Z;A}^2}{\sigma_Z^2\sigma_{X;A}^2}}} \\ &= \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \frac{(1-\rho^2)\sigma_X^2\sigma_{Z;A}^2}{\sigma_Z^2\sigma_{X;A}^2}}}. \end{aligned}$$

## 4.2 Der Rückschluss von der gestutzten auf die ungestutzte Korrelation

In der Praxis sind im Gegensatz zu Satz 4.1 meist zwei korrelierte Zufallsvariablen ( $X$  und  $Y$  mit der obigen Notation) gegeben.

Skaliere  $Y$  so, dass  $\text{Var}(Y) = \text{Var}(X)$ . Dies hat auf die Korrelation keine Auswirkungen, weil diese invariant gegenüber linearen Transformationen ist. Die skalierte Zufallsvariable sei  $Y_S$ . Aus  $X$  und  $Y_S$  lässt sich

$$Z := -\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}X + \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}Y_S \quad (18)$$

konstruieren, so dass  $X$  und  $Z$  unkorreliert sind. Dies bedeutet nicht, dass  $X$  und  $Z$  auch bedingt unkorreliert sind, was aber Voraussetzung für Satz 4.1 ist.

**Beispiel 1:** Gegeben seien zwei Zufallsvariablen  $U \sim \mathcal{N}(0, 1)$  und  $V = U^2$ . Dann sind  $U$  und  $V$  unkorreliert, aber  $\text{Cor}(U, V|U > 0) \neq 0$ .

**Beispiel 2:** Erzeuge 5000 Realisationen  $(x_i, y_i)^T, i = 1, \dots, 5000$ , einer bivariat normalverteilten Zufallsvariablen  $(X, Y)^T$  mit Korrelation  $\rho = 0,6$ . Es seien  $Rx_i$  und  $Ry_i$  die Ränge von  $x_i$  und  $y_i$ . Die dazugehörigen Zufallsvariablen werden mit  $RX$  und  $RY$  bezeichnet und sind korreliert mit Korrelation  $\rho_R \approx 0,57$ . Es sei nun

$$Rz_i := -\frac{\hat{\rho}_R}{1 - \hat{\rho}_R^2}Rx_i + \frac{1}{1 - \hat{\rho}_R^2}Ry_i.$$

Im Gegensatz zu  $Rx_i$  und  $Ry_i$  sind die  $Rz_i$  keine Ränge. Die dazugehörige Zufallsvariable sei  $RZ$ . Nun ist

$$\begin{aligned} \text{Cov}(RX, RZ) &= \text{Cov}\left(RX, -\frac{\rho_R}{1 - \rho_R^2}RX + \frac{1}{1 - \rho_R^2}RY\right) \\ &= -\frac{\rho_R}{1 - \rho_R^2} \text{Cov}(RX, RX) + \frac{1}{1 - \rho_R^2} \text{Cov}(RX, RY) \\ &= 0, \end{aligned}$$

d.h.  $RX$  und  $RZ$  sind unkorreliert. Im Gegensatz zu  $(X, Y)^T$  ist die Verteilung von  $(RX, RY)^T$  nicht elliptisch, vergleiche Abbildung 5. Dementsprechend ist  $(RX, RZ)^T$  keine sphärische Verteilung. Aus Abbildung 6 wird ersichtlich, dass die gestutzte Korrelation zwischen  $RX$  und  $RZ$  nicht immer Null ist. Stutzt man zum Beispiel auf große Werte von  $RX$ , so liegt in diesem Bereich offensichtlich positive Korrelation vor. Dies stellt eine Annahmeverletzung für Satz 4.1 dar, weil auch die gestutzte Verteilung unkorreliert sein muss. Satz 4.1 ist aus diesem Grund nicht auf Rangkorrelationen anwendbar, selbst wenn die ursprüngliche Verteilung elliptisch ist.

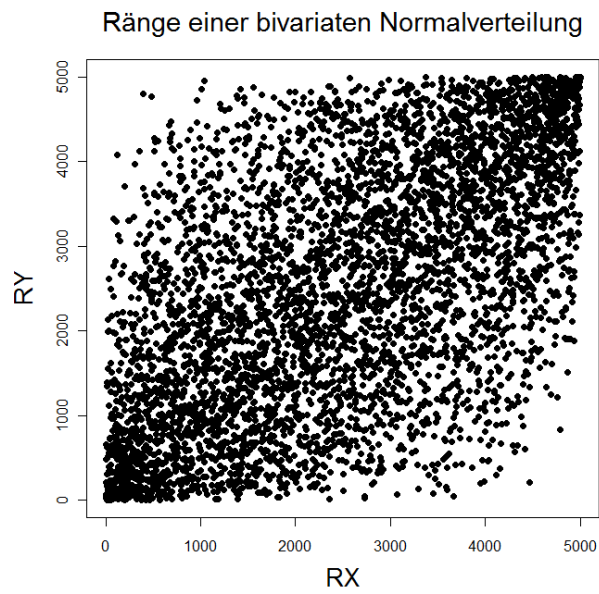


Abbildung 5: Ränge von 5000 Realisationen einer bivariaten Normalverteilung mit Korrelation  $\rho = 0,6$

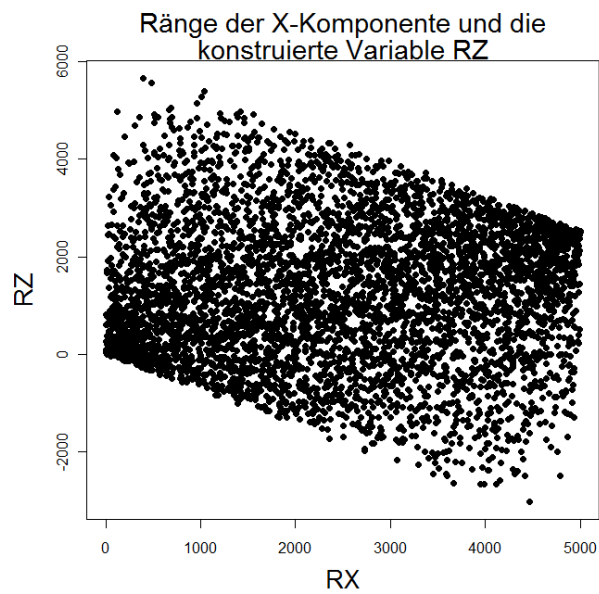


Abbildung 6: Ränge einer Komponente aus 5000 Realisationen einer bivariaten Normalverteilung und die aus den Rängen konstruierten  $Rz_i$ , so dass die zugehörigen Zufallsvariablen unkorreliert sind

Bei elliptischen Verteilungen ist die Anwendung hingegen problemlos möglich, weil die gemäß Formel (18) konstruierte Zufallsvariable nach Gleichung (4, S. 14) sphärisch ist. Wegen der Symmetrie der bivariaten Verteilung um die  $Y$ -Achse ist  $E(Z|X = x) = 0$  für alle  $x$  und somit ist für sphärische Verteilungen die Voraussetzung  $\text{Cov}(X, Z|X \in A) = 0$  erfüllt. Ebenfalls hinreichend ist natürlich die stochastische Unabhängigkeit von  $X$  und  $Z$ . Wenn die gemeinsame Verteilung von  $X$  und  $Y_S$  elliptisch ist, vereinfacht sich Formel (17) zu

$$\rho_{XY;A} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \frac{(1-\rho^2)\sigma_{Z;A}^2}{\sigma_{X;A}^2}}}, \quad (19)$$

weil  $(X, Z)^T$  sphärisch ist und somit die unbedingten Varianzen gleich sind. Ist  $(X, Y_S)^T$  bivariat normalverteilt, dann sind  $X$  und  $Z$  nach Satz 3.1 unabhängig. Die bedingte Varianz von  $Z$  wird in diesem Fall nicht von der Bedingung auf  $X$  beeinflusst und entspricht wegen der sphärischen Verteilung der unbedingten Varianz von  $X$ . Insgesamt ergibt sich

$$\rho_{XY;A} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \frac{(1-\rho^2)\sigma_X^2}{\sigma_{X;A}^2}}},$$

was Formel (16, S. 24) entspricht.

Ein Beispiel einer misslungenen Anwendung ist Campbell et al. (2008). Die Autoren dieses Artikels verwenden unabhängige  $t$ -verteilte Zufallsvariablen  $X$  und  $Z$  zur Konstruktion von

$$Y := \rho X + \sqrt{1 - \rho^2} Z,$$

woraus sich natürlich ebenfalls Formel (16) ergibt. Abbildung 7 zeigt 5000 Realisationen einer bivariaten sphärischen  $t$ -Verteilung mit 5 Freiheitsgraden. Abbildung 8 stellt 5000 Realisationen einer bivariaten Verteilung aus unabhängigen  $t_5$ -Variablen dar. Ein Vergleich beider Abbildungen zeigt, dass die bivariate Verteilung in Abbildung 8 offensichtlich nicht sphärisch ist.

Dies ist auch eine direkte Konsequenz aus Satz 3.1 (S. 16), wonach die bivariate Normalverteilung die einzige sphärische Verteilung mit unabhängigen Komponenten ist. Dementsprechend ist die bivariate Verteilung der korrelierten Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  nur dann elliptisch, wenn die bivariate Verteilung von  $X$  und  $Z$  sphärisch ist (vergleiche hierzu die Abbildungen 9 und 10). Campbell et al. beabsichtigen, gestutzte Korrelationen für eine bivariate  $t$ -Verteilung zu berechnen. Tatsächlich haben sie gestutzte Korrelationen für die gemeinsame Verteilung einer univariat  $t$ -verteilten Zufallsvariablen und einer Konvexkombination linear unabhängiger  $t$ -Variablen wie in Abbildung 10 berechnet. Für diese Verteilung ist die Anwendung von Formel (16) korrekt, aber nicht für eine bivariate  $t$ -Verteilung. In der Praxis liegen jedoch üblicherweise elliptische Strukturen vor. Diese können durch korrelierte, gemeinsam  $t$ -verteilte Zufallsvariablen modelliert werden, aber nicht nach der Methode von Campbell et al. Zusätzlich ist nach Embrechts et al. (2001) bei nicht-elliptischen Verteilungen die gemeinsame Verteilung und somit die Abhängigkeitsstruktur nicht eindeutig durch Randverteilungen und lineare Korrelation festgelegt. Dies kann zu Verwechslungen führen, weil es verschiedene Verteilungen mit gleichen Randverteilungen und gleicher linearer Korrelation gibt.

Darüber hinaus gehen Campbell et al. davon aus, dass die aus unabhängigen  $X$  und  $Z$  konstruierte Variable  $Y$  univariat  $t$ -verteilt ist. Wie aus dem Vergleich der geschätzten Dichten in Abbildung 11 ersichtlich, ist dies nicht der Fall.

Es könnte jedoch interessant sein zu untersuchen, welche bivariaten Verteilungen sich nach der Methode von Campbell et al. modellieren lassen, so dass eine Komponente eine Konvexkombination unabhängiger Variablen ist. Wenn dies gelingt, errechnet sich die gestutzte Korrelation trivial durch Formel (16).



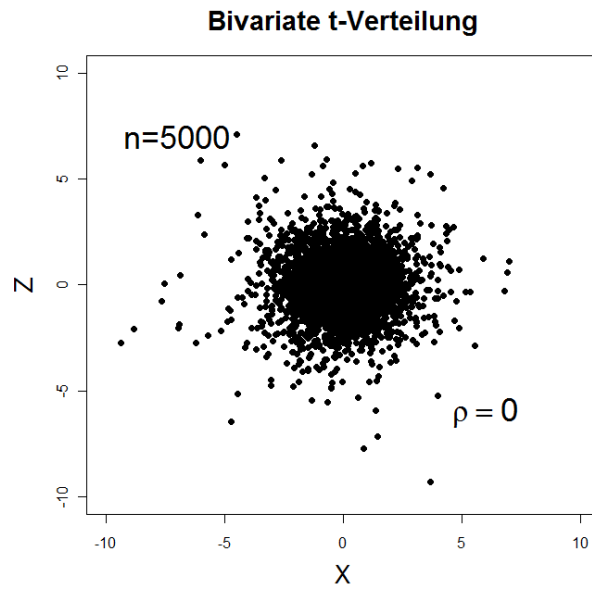


Abbildung 7: 5000 Realisationen einer bivariaten sphärischen  $t_5$ -Verteilung

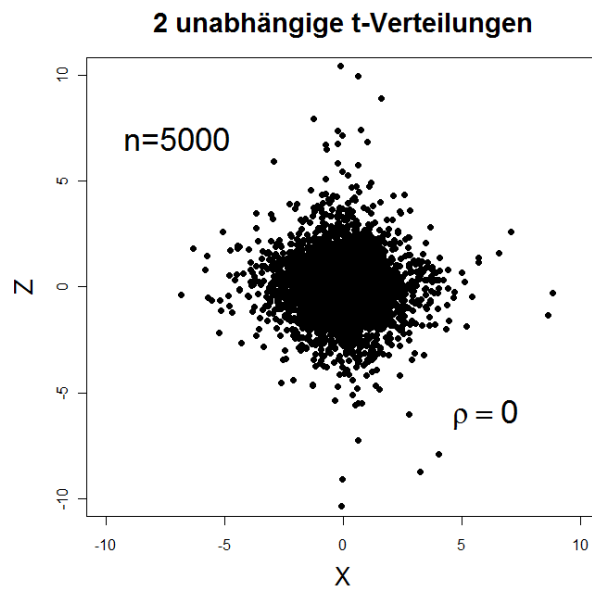


Abbildung 8: 5000 Realisationen zweier unabhängiger  $t_5$ -Verteilungen

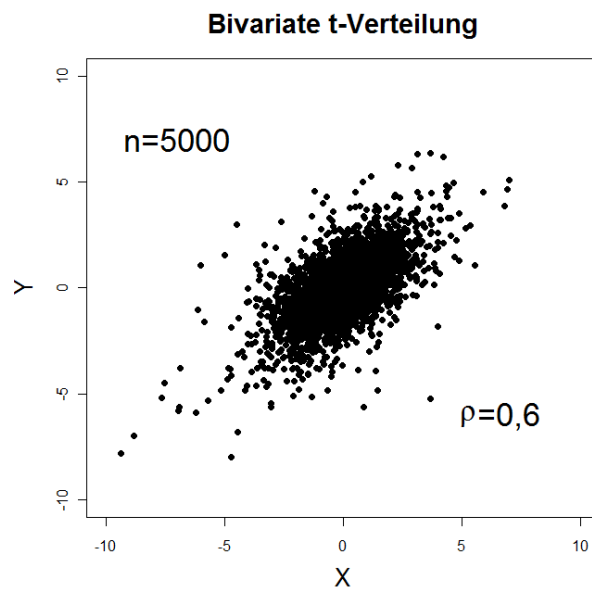


Abbildung 9: 5000 Realisationen einer bivariaten elliptischen  $t_5$ -Verteilung mit Korrelation  $\rho = 0,6$

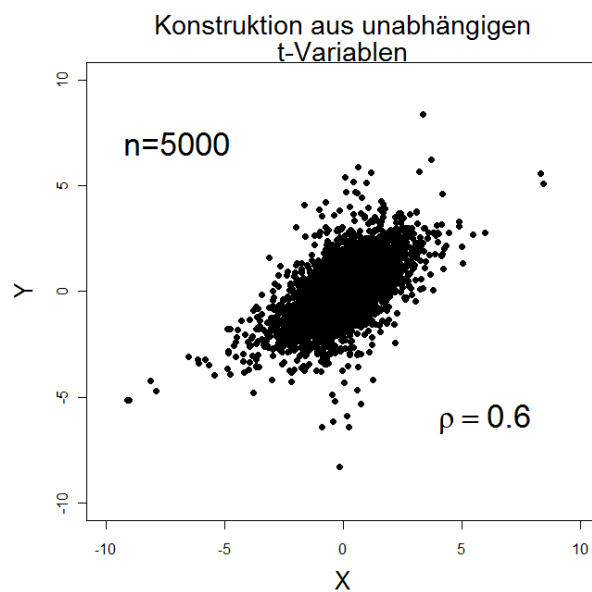


Abbildung 10: 5000 Realisationen einer univariat  $t_5$ -verteilten Zufallsvariablen und einer Konvexkombination unabhängiger  $t_5$ -Variablen mit Korrelation  $\rho = 0,6$

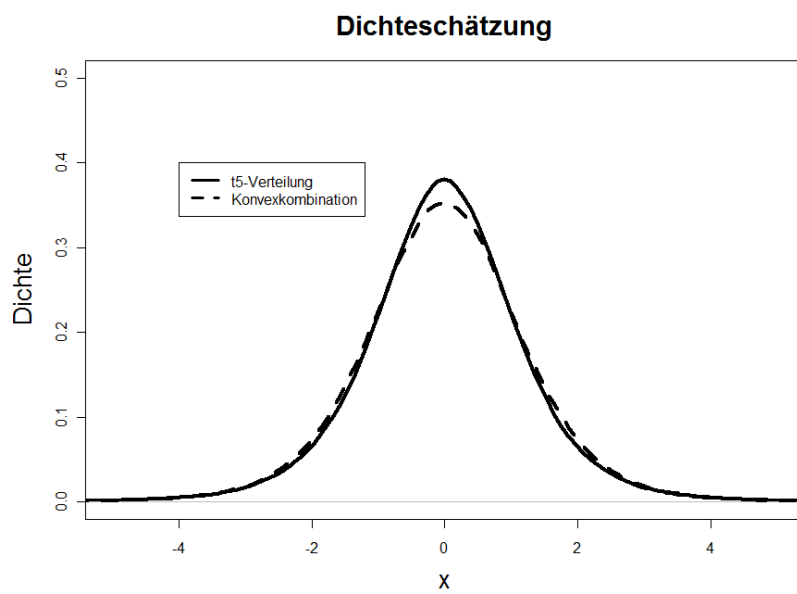


Abbildung 11: Vergleich der geschätzten Dichten von 1000000 Realisationen einer  $t_5$ -Verteilung und einer Konvexkombination unabhängiger  $t_5$ -Variablen

### 4.3 Einige numerische Beispiele

**Bemerkung:** In Abschnitt 3.1 waren  $X$  und  $Y$  die unkorrelierten Komponenten. Hier sind aber  $X$  und  $Z$  unkorreliert, wie schon in Abschnitt 4.1 und 4.2.

Die Berechnung der wahren Korrelation aus der empirischen gestutzten oder bedingten Korrelation ist durch Umformungen der Formeln (16) und (19) möglich. Daraus resultieren

$$\rho_{XY,1} = \text{sgn}(\rho_{XY;A}) \frac{\sigma_X}{\sqrt{\sigma_X^2 - \sigma_{X;A}^2 \left(1 - \frac{1}{\rho_{XY;A}}\right)}} \quad (20)$$

und

$$\rho_{XY,2} = \text{sgn}(\rho_{XY;A}) \frac{\sigma_{Z;A}}{\sqrt{\sigma_{Z;A}^2 - \sigma_{X;A}^2 \left(1 - \frac{1}{\rho_{XY;A}}\right)}}. \quad (21)$$

Bei einer bivariaten  $t$ -Verteilung führt die Anwendung von Formel (20) anstelle von (21) zu einer Unterschätzung von  $|\rho_{XY}|$ , falls  $\sigma_{Z;A} > \sigma_X$ . Für beidseitig symmetrisch gestutzte sowie linksseitig in  $S > 0$  gestutzte bivariate  $t$ -Verteilungen gilt dies immer.

In Abschnitt 3.2 wurden für bivariate sphärische  $t$ -Verteilungen mit 3 und 5 Freiheitsgraden in den Formeln (6) - (15) auf S. 20/21 die bedingten Varianzen für ein- und beidseitige Stutzung (hier:  $\sigma_{X;A}^2$  und  $\sigma_{Z;A}^2$ ) berechnet. Mit  $\sigma_X^2 = \frac{\nu}{\nu-2}$  lässt sich dann  $\rho_{XY}$  in den Formeln (20) und (21) exakt berechnen. Die Abbildungen 12 - 15 zeigen die Differenzen zwischen  $\rho_{XY,1}$  und  $\rho_{XY,2}$  bei beidseitig symmetrischen bzw. linksseitigen Stutzungen einer bivariaten  $t$ -Verteilung mit 3 und 5 Freiheitsgraden für jeweils vier Stutzungsstellen. Die stärkste Stutzung korrespondiert dabei in etwa mit dem 93%-Quantil einer  $t$ -Verteilung mit 3 Freiheitsgraden und dem 95%-Quantil einer  $t$ -Verteilung mit 5 Freiheitsgraden. Für 5 Freiheitsgrade ist die Verzerrung kleiner als für 3 Freiheitsgrade. Für andere Freiheitsgrade sind exakte

Berechnungen schwierig, weil die Berechnung von  $\sigma_{Z,A}^2$  kompliziert ist. Natürlich können jedoch Simulationen durchgeführt werden. Die Verzerrung wird wegen der Konvergenz der  $t$ -Verteilung gegen die Normalverteilung für steigende Freiheitsgrade kleiner. Generell gilt für jeden Freiheitsgrad: Je stärker die Stützung, desto größer ist die Verzerrung. Wenn die gestutzte Korrelation positiv ist, sind die aus (20) resultierenden Werte von  $\rho_{XY}$  zu klein. Abbildung 16 zeigt die gestutzte Korrelation als Funktion der ungestutzten für eine in  $S = 2$  gestutzte bivariate  $t$ -Verteilung mit 5 Freiheitsgraden. Aus einem Vergleich mit den Abbildungen 12 - 15 wird ersichtlich, dass die Verzerrung für ungestutzte Korrelationen zwischen ca. 0,3 und 0,8 besonders groß ist. In der Praxis sind Korrelationen in dieser Größenordnung bei Finanzrenditen sehr häufig. Nach Campbell et al. (2008) ist der Anstieg der gestutzten Korrelation im Vergleich zur ungestutzten durch eine bivariate  $t$ -Verteilung erklärbar, weshalb es keine Hinweise auf steigende Korrelationen in Krisenzeiten gibt. Diese Schlussfolgerung ist falsch, weil die vorliegenden Ergebnisse zeigen, dass die Vorgehensweise der Autoren zu einer Unterschätzung der ungestutzten Korrelation führt.

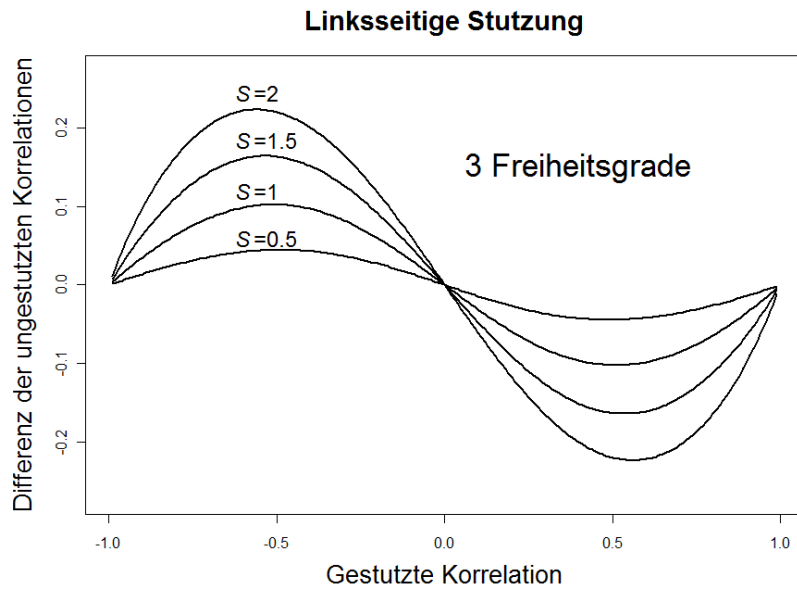


Abbildung 12: Fehler beim Rückschluss von gestutzter auf ungestutzte Korrelation für eine bivariate beidseitig symmetrisch in verschiedenen Stützungsstellen  $S$  gestutzte  $t_3$ -Verteilung

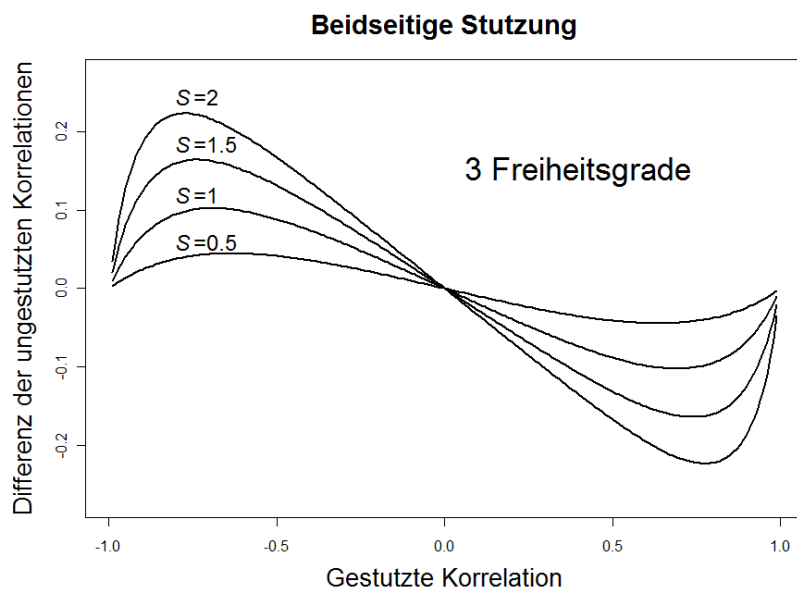


Abbildung 13: Fehler beim Rückschluss von gestutzter auf ungestutzte Korrelation für eine bivariate linksseitig in verschiedenen Stützungsstellen  $S$  gestutzte  $t_3$ -Verteilung

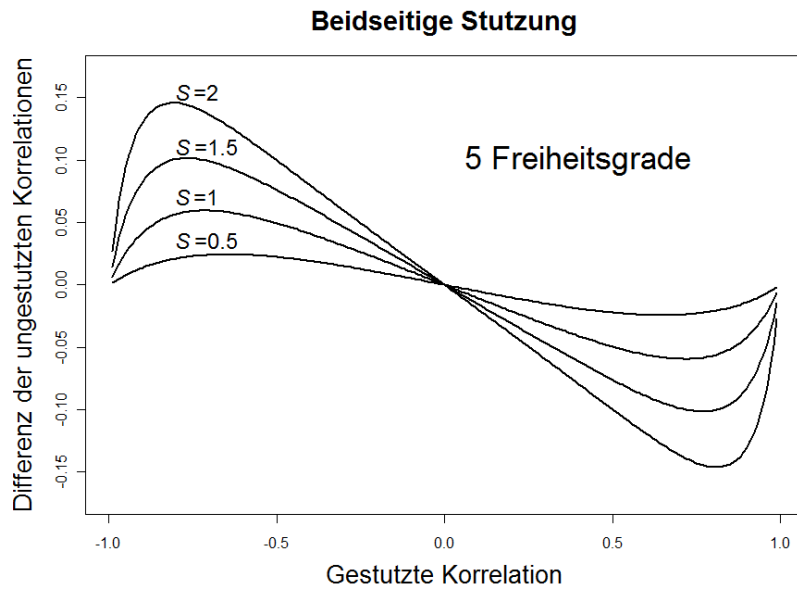


Abbildung 14: Fehler beim Rückschluss von gestutzter auf ungestutzte Korrelation für eine bivariate beidseitig symmetrisch in verschiedenen Stützungsstellen  $S$  gestutzte  $t_5$ -Verteilung

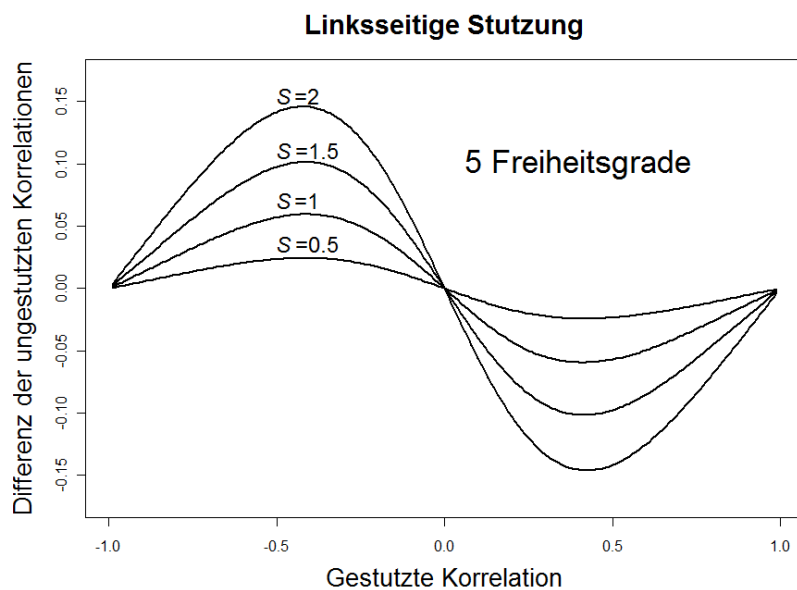


Abbildung 15: Fehler beim Rückschluss von gestutzter auf ungestutzte Korrelation für eine bivariate linksseitig in verschiedenen Stützungsstellen  $S$  gestutzte  $t_5$ -Verteilung

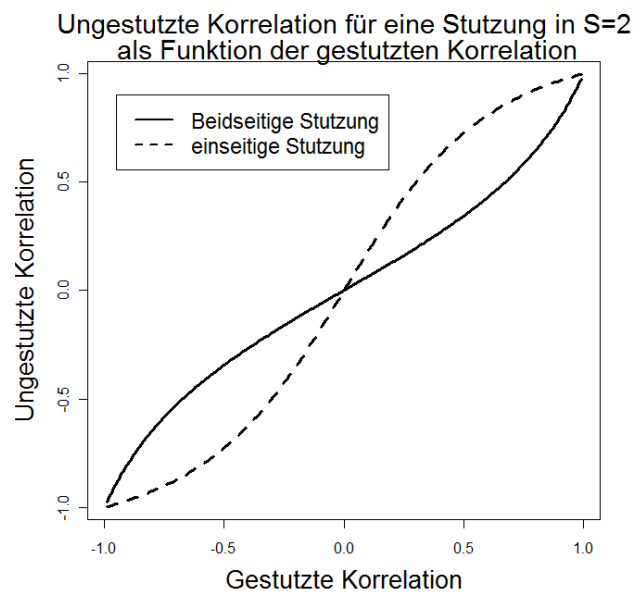


Abbildung 16: Die ungestutzte Korrelation als Funktion der gestutzten Korrelation am Beispiel einer in  $S = 2$  gestutzten bivariaten  $t_5$ -Verteilung



## 5 Eine Eigenschaft der einseitig gestutzten bivariaten Cauchy-Verteilung

Zwei Zufallsvariablen  $\tilde{X}$  und  $\tilde{Y}$  seien gemeinsam Standard-Cauchy-verteilt. Die Dichte einer bivariaten  $t$ -Verteilung mit einem Freiheitsgrad ist nach Definition (5, S. 17) gegeben durch

$$f(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left( 1 + \frac{\tilde{x}^2 - 2\rho\tilde{x}\tilde{y} + \tilde{y}^2}{1-\rho^2} \right)^{-3/2}.$$

Für zwei Quantile  $q_{\tilde{x};p}$  und  $q_{\tilde{x};1-p}$  bzw.  $q_{\tilde{y};p}$  und  $q_{\tilde{y};1-p}$  mit  $0 < p < 0,5$  seien

$$IQA_{\tilde{X}} = q_{\tilde{x};1-p} - q_{\tilde{x};p}$$

und

$$IQA_{\tilde{Y}} = q_{\tilde{y};1-p} - q_{\tilde{y};p}$$

die Interquantilsabstände. Natürlich ist  $IQA_{\tilde{X}} = IQA_{\tilde{Y}}$ .

Die bivariate Verteilung wird nun einseitig in der Stützungsstelle  $S$  gestutzt; die daraus resultierende Verteilung sei die von  $(X, Y)^T$ .

**Satz 5.1:**  $IQA_X = IQA_Y$ .

**Beweis:**

Ich beschränke mich beim Beweis auf linksseitige Stutzungen, wegen der Symmetrie der Verteilung gilt der Satz aber natürlich auch für rechtsseitige Stutzungen.

Die in der Stützungsstelle  $S$  linksseitig gestutzte bivariate Cauchy-Verteilung hat nach Definition (1, S. 10) die Dichte

$$f(x, y) = f(\tilde{x}, \tilde{y} | \tilde{x} \geq S) = \frac{L}{\sqrt{1 - \rho^2}} \left( 1 + \frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{1 - \rho^2} \right)^{-3/2} \mathbf{1}_X[S, \infty),$$

wobei  $L$  die Normierungskonstante ist. Die Randdichten sind gegeben durch

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{L}{\sqrt{1 - \rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( 1 + \frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{1 - \rho^2} \right)^{-3/2} dy \mathbf{1}_X[S, \infty) \\ &= L \left[ \frac{y - \rho x}{\sqrt{1 - \rho^2 + x^2 - 2\rho xy + y^2} (1 + x^2)} \right]_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_X[S, \infty) \\ &= \frac{2L}{(1 + x^2)} \mathbf{1}_X[S, \infty) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{L}{\sqrt{1 - \rho^2}} \int_{-\infty}^S \left( 1 + \frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{1 - \rho^2} \right)^{-3/2} dx \\ &= \frac{L}{\sqrt{1 - \rho^2}} \left[ \frac{x - \rho y}{\sqrt{1 - \rho^2 + x^2 - 2\rho xy + y^2} (1 + y^2)} \right]_{-\infty}^S \\ &= \frac{L \left( \rho y + \sqrt{1 - \rho^2 + S^2 - 2\rho S y + y^2} - S \right)}{\sqrt{1 - \rho^2 + S^2 - 2\rho S y + y^2} (y^2 + 1)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Die Randverteilung von  $X$  ist

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_S^x \frac{2L}{(1 + p^2)} dp \\ &= 2L (\arctan(x) - \arctan(S)) \mathbf{1}_X[S, \infty). \end{aligned} \quad (23)$$

Daraus ergibt sich über  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$  die Normierungskonstante zu

$$L = \frac{1}{\pi - 2 \arctan(S)}.$$

Die Berechnung der Randverteilung von  $Y$  ist schwierig. Aus der Randverteilung von  $Y$  ließe sich die Quantilfunktion herleiten, was die Beweisführung vereinfachen würde. Zur Bestimmung der Randverteilung müsste die Randdichte integriert werden. Weil dies aber äußerst kompliziert ist, werde ich stattdessen eine andere Eigenschaft beweisen, aus der dann direkt Satz 5.1 folgt.

Zur Veranschaulichung dieser Eigenschaft stellt Abbildung 17 die empirischen unteren Quartile von  $Y$  als Funktion des Korrelationsparameters  $\rho$  dar. Hierfür wurden für  $\rho = -1; -0,95; \dots; 0,95; 1$  jeweils 100000 Werte einer in  $S=2$  linksseitig gestutzten Cauchy-Verteilung erzeugt und die unteren Quartile von  $Y$  berechnet. Fehlende Werte wurden linear interpoliert. Anscheinend liegt ein linearer Zusammenhang vor. Dies gilt für alle Stützstellen, Quantile und Korrelationsparameter, was im Folgenden bewiesen wird. Dabei wird angenommen, dass der Zusammenhang tatsächlich linear ist, was die Bestimmung der Quantilfunktion vereinfacht. Aus dieser resultiert die Randdichte von  $Y$  aus Gleichung (22).

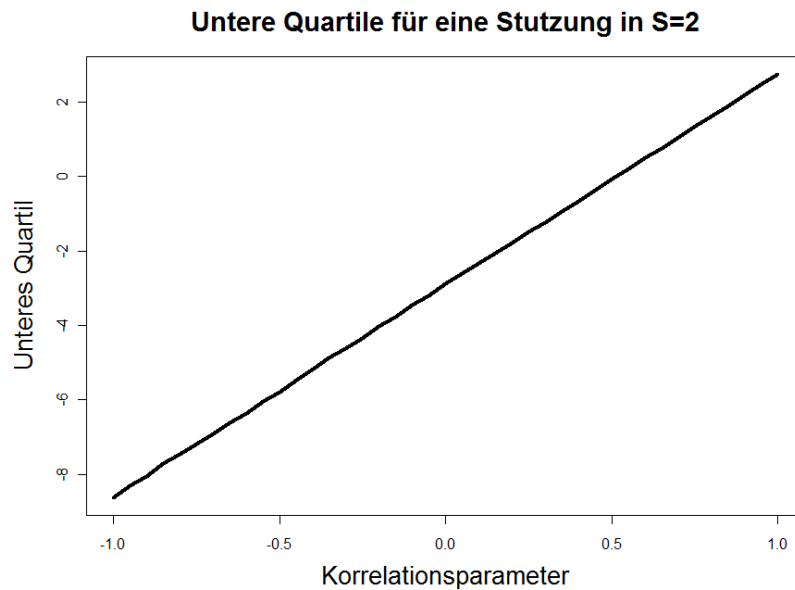


Abbildung 17: Das empirische untere Quartil von jeweils 100000 Realisationen der Y-Komponente einer in  $S=2$  linksseitig gestutzten bivariaten Cauchy-Verteilung in Abhängigkeit vom Korrelationsparameter  $\rho$

Die einzelnen Schritte sind dabei wie folgt:

1. Bestimme die Quantilfunktionen für die entarteten Extremfälle  $\rho = \pm 1$ .
2. Unter Annahme der Linearität lässt sich für  $|\rho| < 1$  die Quantilfunktion als gewichtete Linearkombination der Quantilfunktionen aus Schritt 1 schreiben.
3. Bestimme aus dieser Quantilfunktion die Randverteilung. Dabei muss an einer Stelle eine Wurzelgleichung durch Quadrieren gelöst werden, was keine Äquivalenzumformung darstellt und zu zwei Lösungen führt.

4. Zeige, dass eine der beiden Lösungen der quadrierten Gleichung für die Ausgangsgleichung falsch ist. Die Randverteilung ist eindeutig durch die Quantilfunktion bestimmt.
5. Bestimme die Ableitung der Randverteilung und zeige, dass diese die Dichte aus Gleichung (22) ist.

Weil die Randdichte die Randverteilung und somit auch die Quantilfunktion eindeutig bestimmt, lässt sich der Beweis auch in umgekehrter Richtung führen. Aus der durch Gleichung (22) gegebenen Randdichte lässt sich deshalb die zu beweisende Linearität herleiten.

**Schritt 1:** Aus der Randverteilung von  $X$  nach Formel (23) ergibt sich durch Auflösen nach  $x$  die Quantilfunktion

$$q = \frac{2(\arctan(x) - \arctan(S))}{\pi - 2\arctan(S)}$$

$$\Leftrightarrow \arctan(x) = \frac{q(\pi - 2\arctan(S))}{2} + \arctan(S)$$

$$\Leftrightarrow x = \tan\left(\arctan(S) + \frac{1}{2}q\pi - q\arctan(S)\right).$$

Für  $\rho = 1$  ist  $Y = X$ . Die Quantilfunktion von  $Y$  ist dann ebenfalls

$$y_{\rho=1} = \tan\left(\arctan(S) + \frac{1}{2}q\pi - q\arctan(S)\right).$$

Für  $\rho = -1$  ist  $Y = -X$ . Die Randdichte ist dann

$$f(-x) = \frac{2}{(1+x^2)(\pi - 2\arctan(S))} \mathbf{1}_{X(-\infty, S)},$$

woraus sich

$$F(-x) = \begin{cases} \frac{2(\arctan(x) - \arctan(S))}{\pi - 2\arctan(S)} + 1 & \text{für } x < -S \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

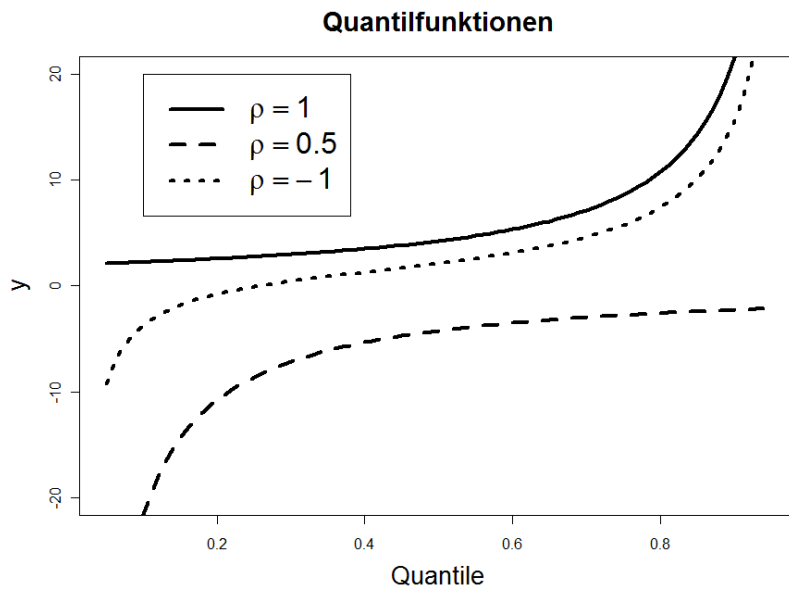


Abbildung 18: Quantilfunktionen für verschiedene Werte von  $\rho$

und die Quantilfunktion

$$x = y_{\rho=-1} = \tan\left(\frac{1}{2}(q-1)\pi - q \arctan(S)\right)$$

ergeben.

**Schritt 2:** Für  $|\rho| < 1$  liegt die Quantilfunktion immer zwischen denen für  $\rho = -1$  und  $\rho = 1$  (vgl. Abbildung 18). Bei linearem Zusammenhang gilt

$$y = \frac{1+\rho}{2}y_{\rho=1} + \frac{1-\rho}{2}y_{\rho=-1}.$$

Wegen

$$\tan(x) + \tan(y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x)\cos(y)}, \quad (24)$$

$$\tan(x) - \tan(y) = \frac{\sin(x-y)}{\cos(x)\cos(y)}, \quad (25)$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)), \quad (26)$$

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad (27)$$

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (28)$$

und Phasenverschiebungen bzw. Symmetrie von Sinus und Kosinus gilt

$$\begin{aligned} y &= \frac{1+\rho}{2} \tan(\arctan(S) + \frac{1}{2}q\pi - q \arctan(S)) \\ &\quad + \frac{1-\rho}{2} \tan(\frac{1}{2}(q-1)\pi - q \arctan(S)) \\ &\stackrel{(24),(25)}{=} \frac{\sin(\arctan(S) + q\pi - \frac{\pi}{2} - 2q \arctan(S)) + \rho \sin(\arctan(S) + \frac{\pi}{2})}{2 \cos(\arctan(S) + \frac{\pi}{2}q - q \arctan(S)) \cos(\frac{\pi}{2} - q \arctan(S))} \\ &\stackrel{(26)}{=} \frac{-\cos(\arctan(S) + q\pi - 2q \arctan(S)) + \rho \cos(\arctan(S))}{\cos(\arctan(S) + \frac{\pi}{2}) + \cos(\arctan(S) + q\pi - \frac{\pi}{2} - 2q \arctan(S))} \\ &\stackrel{(27),(28)}{=} \frac{-\cos(\arctan(S) + q\pi - 2q \arctan(S)) + \frac{\rho}{\sqrt{1+S^2}}}{-\frac{S}{\sqrt{1+S^2}} + \sin(\arctan(S) + q\pi - 2q \arctan(S))} \\ &= \frac{-\cos(\arctan(S) + q\pi - 2q \arctan(S)) \sqrt{1+S^2} + \rho}{-S + \sin(\arctan(S) + q\pi - 2q \arctan(S)) \sqrt{1+S^2}}. \end{aligned}$$

Mit

$$E := \sin(\arctan(S) + q\pi - 2q \arctan(S))$$

und  $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin(x)^2}$  lässt sich obige Gleichung dann schreiben als

$$y = \frac{-\sqrt{1 - E^2}\sqrt{1 + S^2} + \rho}{E\sqrt{1 + S^2} - S}. \quad (29)$$

**Schritt 3:** Löse diese Funktion zunächst nach  $E$  auf. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} -\sqrt{1 - E^2}\sqrt{1 + S^2} + \rho &= y \left( E\sqrt{1 + S^2} - S \right) \\ \Leftrightarrow \sqrt{1 - E^2}\sqrt{1 + S^2} &= yS - yE\sqrt{1 + S^2} + \rho \\ \Rightarrow (1 - E^2)(1 + S^2) &= (yS - yE\sqrt{1 + S^2} + \rho)^2 \quad (30) \\ \Leftrightarrow (1 - E^2)(1 + S^2) &= y^2S^2 + y^2E^2(1 + S^2) + \rho^2 - 2y^2SE\sqrt{1 + S^2} \\ &+ 2\rho yS - 2\rho yE\sqrt{1 + S^2} \\ \Leftrightarrow E^2 + E^2S^2 + E^2y^2 + E^2y^2S^2 - 2Ey^2S\sqrt{1 + S^2} - 2E\rho y\sqrt{1 + S^2} \\ &+ y^2S^2 + \rho^2 + 2\rho yS - 1 - S^2 = 0 \\ \Leftrightarrow E^2 - \frac{2E\sqrt{1 + S^2}(y^2S + \rho y)}{(1 + S^2)(1 + y^2)} + \frac{y^2S^2 + \rho^2 + 2\rho yS - 1 - S^2}{(1 + S^2)(1 + y^2)} &= 0 \\ \Leftrightarrow E_{1,2} &= \frac{y^2S + \rho y}{(1 + y^2)\sqrt{1 + S^2}} \\ &\pm \sqrt{\frac{y^4S^2 + 2y^3S\rho + \rho^2y^2}{(1 + y^2)^2(1 + S^2)} - \frac{y^2S^2 + \rho^2 + 2\rho yS - 1 - S^2}{(1 + S^2)(1 + y^2)}} \end{aligned}$$



$$\Leftrightarrow E_{1,2} = \frac{y^2 S + \rho y}{(1 + y^2)\sqrt{1 + S^2}} \pm \frac{\sqrt{y^4 S^2 + 2y^3 S \rho + \rho^2 y^2 - y^2 S^2}}{(1 + y^2)\sqrt{1 + S^2}}$$

$$\frac{-y^4 S^2 - \rho^2 - \rho^2 y^2 - 2\rho y S - 2\rho y^3 S + 1 + y^2 + S^2 + y^2 S^2}{(1 + y^2)\sqrt{1 + S^2}}$$

$$\Leftrightarrow E_{1,2} = \frac{y^2 S + \rho y \pm \sqrt{1 + y^2 + S^2 - \rho^2 - 2\rho y S}}{(1 + y^2)\sqrt{1 + S^2}}.$$

Im Folgenden sei aus Gründen der Übersichtlichkeit

$$W := \sqrt{1 + y^2 + S^2 - \rho^2 - 2\rho y S},$$

also

$$W^2 = 1 + y^2 + S^2 - \rho^2 - 2\rho y S. \quad (31)$$

Damit lassen sich die Lösungen schreiben als

$$E_{1,2} = \frac{y^2 S + \rho y \pm W}{(1 + y^2)\sqrt{1 + S^2}}.$$

In obiger Rechnung wird zur Auflösung der Wurzelgleichung in Schritt (30) keine Äquivalenzumformung vorgenommen. Dies führt dazu, dass es zwei Lösungen gibt, obwohl die ursprüngliche Gleichung (29) nur eine Lösung haben kann, weil  $y$  eine streng monoton steigende Funktion von  $q$  ist.

**Schritt 4:** Es lässt sich zeigen, dass

$$E_2 = \frac{y^2 S + \rho y - W}{(1 + y^2)\sqrt{1 + S^2}}$$

die ursprüngliche Wurzelgleichung nicht löst. Betrachte dafür

$$E = \sin(\arctan(S) + q\pi - 2q \arctan(S)).$$

Diese Funktion ist monoton steigend in  $q$  und liegt immer zwischen  $-\frac{\pi}{2}$  und  $\frac{3\pi}{2}$ . Wegen

$$\arcsin(\sin(a)) = \begin{cases} a & \text{für } a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \pi - a & \text{für } a \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \end{cases}$$

gilt

$$\begin{aligned} & \arcsin(\sin(\arctan(S) + q\pi - 2q \arctan(S))) \\ = & \begin{cases} \arctan(S) + q\pi - 2q \arctan(S) & \text{für } q \leq 0,5 \\ \pi - \arctan(S) - q\pi + 2q \arctan(S) & \text{sonst.} \end{cases} \quad (32) \end{aligned}$$

Für  $q < 0,5$  gilt somit

$$\begin{aligned} \sin(\arctan(S) + q\pi - 2q \arctan(S)) &= \frac{y^2 S + \rho y - W}{(1 + y^2)\sqrt{1 + S^2}} \\ \Leftrightarrow \arctan(S) + q\pi - 2q \arctan(S) &= \arcsin\left(\frac{y^2 S + \rho y - W}{(1 + y^2)\sqrt{1 + S^2}}\right) \\ \Leftrightarrow q &= \frac{\arcsin\left(\frac{y^2 S + \rho y - W}{(1 + y^2)\sqrt{1 + S^2}}\right) - \arctan(S)}{\pi - 2 \arctan(S)}. \end{aligned}$$

Es lässt sich zeigen, dass dieser Bruch immer negativ ist, was  $q \in (0,1)$  widerspricht. Weil der Nenner immer positiv ist, wird nur der Zähler betrachtet, also

$$\begin{aligned} & \arcsin\left(\frac{y^2 S + \rho y - W}{(1 + y^2)\sqrt{1 + S^2}}\right) - \arctan(S) \stackrel{!}{<} 0 \\ \stackrel{(27)}{\Leftrightarrow} & \arcsin\left(\frac{y^2 S + \rho y - W}{(1 + y^2)\sqrt{1 + S^2}}\right) - \arcsin\left(\frac{S}{\sqrt{1 + S^2}}\right) < 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{y^2 S + \rho y - W}{(1 + y^2)\sqrt{1 + S^2}} - \frac{S}{\sqrt{1 + S^2}} < 0 \\ \Leftrightarrow & y^2 S + \rho y - W - S(1 + y^2) < 0. \end{aligned}$$

Die Rücksubstitution von  $W$  ergibt

$$[f(y) :=] \rho y - \sqrt{1 + y^2 + S^2 - \rho^2 - 2\rho y S} - S < 0.$$

Bestimme nun das Maximum des Zählers und zeige, dass dieses negativ ist.  
Die Ableitung von  $f(y)$  ist

$$\frac{\partial f(y)}{\partial y} = \frac{\rho\sqrt{1+y^2+S^2-\rho^2-2\rho yS} - y + \rho S}{\sqrt{1+y^2+S^2-\rho^2-2\rho yS}}.$$

Betrachte nur den Zähler der Ableitung und bestimme die Nullstellen, also

$$[f^*(y)]' := \rho\sqrt{1+y^2+S^2-\rho^2-2\rho yS} - y + \rho S = 0 \quad (33)$$

$$\Leftrightarrow \rho\sqrt{1+y^2+S^2-\rho^2-2\rho yS} = y - \rho S \quad (34)$$

$$\Rightarrow y^2(1-\rho^2) - 2y\rho S(1-\rho^2) - \rho^2 + \rho^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2y\rho S - \rho^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y_1 = \rho S + \rho\sqrt{1+S^2} \quad \left[ y_2 = \rho S - \rho\sqrt{1+S^2} \right].$$

Mit  $y_2$  resultiert keine Lösung von Gleichung (33), da sich durch Einsetzen von  $y_2$  in Schritt (34) unterschiedliche Vorzeichen auf beiden Seiten ergeben. Somit bleibt nur  $y_1$  als Lösung von Gleichung (33). Die zweite Ableitung ist

$$f^*(y)'' = \frac{-\rho y + \rho^2 S - \sqrt{1+y^2+S^2-\rho^2-2\rho yS}}{\sqrt{1+y^2+S^2-\rho^2-2\rho yS}}$$

und wegen

$$f^*(y_1)'' = \rho^2 - 1 < 0$$

ist  $y_1$  Maximalstelle. Für das Maximum von  $f(y)$  gilt

$$f(y_1) = (\rho^2 - 1) \left( \sqrt{1+S^2} - S \right) < 0.$$

Das Maximum der Funktion ist somit immer negativ, was  $q \in (0, 1)$  widerspricht. Für  $q > 0,5$  nutze aus, dass die Funktion (32) symmetrisch um

$q = 0,5$  ist und verfahren analog.

Somit ist nur

$$E_1 = \frac{y^2 S + \rho y + W}{(1 + y^2)\sqrt{1 + S^2}} \quad (35)$$

eine Lösung der Gleichung (29). Nutze zur Bestimmung des Medians dieser Gleichung aus, dass  $E = 1$  für  $q = 0,5$  und schreibe (29) als

$$\begin{aligned} y &= \frac{\rho}{\sqrt{1 + S^2} - S} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{\rho(\sqrt{1 + S^2} + S)}{(\sqrt{1 + S^2} - S)(\sqrt{1 + S^2} + S)} \\ \Leftrightarrow y &= \rho S + \rho\sqrt{1 + S^2}. \end{aligned}$$

Mit der Quantilfunktion (32) und Lösung (35) gilt somit

$$q = \begin{cases} \frac{\arcsin\left(\frac{y^2 S + \rho y + W}{\sqrt{1 + S^2}(1 + y^2)}\right) - \arctan(S)}{\pi - 2 \arctan(S)} & \text{für } y < \rho S + \rho\sqrt{1 + S^2} \\ \frac{\arctan(S) - \arcsin\left(\frac{y^2 S + \rho y + W}{\sqrt{1 + S^2}(1 + y^2)}\right) + \pi}{\pi - 2 \arctan(S)} & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Schritt 5:** Bestimme die Ableitung der Funktion  $q$ . Wenn diese der Randdichte von  $Y$  entspricht, ist  $q$  die Verteilungsfunktion und somit der Beweis abgeschlossen.

Die Ableitung ist

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \frac{\arcsin\left(\frac{y^2 + \rho y + \sqrt{S^2 - 2\rho y S + y^2 - \rho^2 + 1}}{\sqrt{1 + S^2}(1 + y^2)}\right) - \arctan(S)}{\pi - 2 \arctan(S)} \\ &= \frac{1}{\pi - 2 \arctan(S)} \frac{\frac{\frac{1}{2} \frac{-2\rho S + 2y}{W} + \rho + 2yS}{\sqrt{1 + S^2}(1 + y^2)} - \frac{2(W + \rho y + y^2 S)y}{\sqrt{1 + S^2}(1 + y^2)^2}}{\sqrt{1 - \frac{(W + \rho y + y^2 S)^2}{(1 + S^2)(1 + y^2)^2}}}. \end{aligned}$$

Untersuche den rechten Teil dieser Gleichung getrennt in Zähler  $A$  und Nenner  $B$ . Definiere

$$A := \frac{\frac{1-2\rho S+2y}{2} + \rho + 2yS}{\sqrt{1+S^2(1+y^2)}} - \frac{2(W+\rho y+y^2S)y}{\sqrt{1+S^2(1+y^2)}^2}$$

$$= \frac{1}{W\sqrt{1+S^2(1+y^2)}} A_2 \quad \text{mit}$$

$$A_2 := (-\rho S + 3\rho S y^2 - y - y^3 + W\rho) (-W\rho y^2 + 2W y S - 2y S^2 + 2y\rho^2).$$

Der Nenner sei

$$B := \sqrt{1 - \frac{(W+\rho y+y^2S)^2}{(1+S^2)(1+y^2)^2}}$$

$$\stackrel{(31)}{=} \frac{1}{\sqrt{1+S^2(1+y^2)}} B_2 \quad \text{mit}$$

$$B_2 := \frac{1}{\sqrt{1+S^2(1+y^2)}} \sqrt{y^2 + y^4 + 2S^2 y^2 + 2\rho y S + \rho^2 - 2W\rho y}$$

$$\frac{-2W y^2 S - \rho^2 y^2 - 2\rho y^3 S}{\phantom{1}}.$$

Es bleibt also zu zeigen, dass

$$\left[ f(y) \stackrel{(22)}{=} \right] \frac{\rho y + W - S}{W(\pi - 2 \arctan(S))(y^2 + 1)} = \frac{A}{(\pi - 2 \arctan(S)) B}.$$

Es muss somit gelten, dass

$$\frac{A_2}{B_2} = \rho y + W - S$$

$$\Leftrightarrow A_2^2 = B_2^2 (\rho y + W - S)^2. \quad (36)$$

Der letzte Schritt ist eine Äquivalenzumformung, weil die Ableitung der streng monoton steigenden Funktion  $q$  positiv ist und wegen  $B_2 > 0$  dann

auch der Zähler positiv sein muss.

Für die linke Seite von Gleichung (36) ergibt sich

$$\begin{aligned}
& B_2^2 (\rho y + W - S)^2 \\
= & \left( y^2 + y^4 + 2S^2 y^2 + 2\rho y S + \rho^2 - 2W\rho y + 2W y^2 S - \rho^2 y^2 - 2\rho y^3 S \right) \\
& \left( \rho^2 y^2 + 2W\rho y - 4\rho y S + 2S^2 + y^2 - \rho^2 + 1 - 2WS \right) \\
= & -2\rho^2 WS - 6S^3 y^3 \rho + 2y^3 W\rho - 2y^4 WS - 2W y^2 S - 2y^5 \rho S \\
& + 6S^2 y^2 W^2 - 2\rho y^3 S - 2\rho^3 y S - 6S^3 y^2 W + S^2 y^2 + 12S^2 y^3 W\rho \\
& + 10\rho^2 y^2 SW + 6\rho y SW^2 - 6\rho y S^2 W - 6W y^4 S\rho^2 - 6W^2 y^3 S\rho \\
& + 6S^2 y^4 \rho^2 - 5\rho^2 y^2 S^2 - 4W\rho^3 y^3 + 2\rho y S^3 - 2\rho^3 y^5 S \\
& - 5W^2 \rho^2 y^2 - 2W^3 y^2 S + 4\rho^3 y^3 S - 2W^3 \rho y + 2\rho^3 W y + 2y^5 W\rho \\
& + y^4 \rho^2 + y^2 W^2 + y^6 \rho^2 + y^4 W^2 + y^4 S^2 + 2S^4 y^2 + \rho^4 y^2 + \rho^2 W^2 + \\
& \rho^2 S^2 - \rho^4 y^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\stackrel{(31)}{=} & -2\rho^2WS - 24S^3y^3\rho - 4y^4WS - 4Wy^2S + 6\rho yS - 10y^5\rho S \\
& -2W\rho y - 4\rho y^3S - 10\rho^3yS - 8S^3y^2W - 5\rho^2y^2 + 2y^4 + 8S^2y^2 \\
& +y^6 + 16S^2y^3W\rho + 16\rho^2y^2SW - 8\rho yS^2W - 6Wy^4S\rho^2 \\
& +18S^2y^4\rho^2 - 28\rho^2y^2S^2 - 4W\rho^3y^3 + 8\rho yS^3 - 2\rho^3y^5S \\
& +20\rho^3y^3S + 4\rho^3Wy + 2y^5W\rho + \rho^2 - 5y^4\rho^2 + y^6\rho^2 + 8y^4S^2 \\
& +8S^4y^2 + 6\rho^4y^2 + 2\rho^2S^2 - \rho^4y^4 + y^2 - \rho^4.
\end{aligned}$$

Für die rechte Seite von Gleichung (36) gilt

$$\begin{aligned}
A_2 &= -2\rho^2WS - 12S^3y^3\rho - 4y^4WS - 4Wy^2S + 2\rho yS - 6y^5\rho S \\
&\quad + 4S^2y^2W^2 - 2W\rho y - 4\rho y^3S - 4\rho^3yS - 8S^3y^2W - 4\rho^2y^2 + 2y^4 \\
&\quad + 4S^2y^2 + y^6 + 16S^2y^3W\rho + 16\rho^2y^2SW + 4\rho ySW^2 - 8\rho yS^2W \\
&\quad - 6Wy^4S\rho^2 - 4W^2y^3S\rho + 9S^2y^4\rho^2 - 14\rho^2y^2S^2 - 4W\rho^3y^3 \\
&\quad + 4\rho yS^3 - 2W^2\rho^2y^2 + 12\rho^3y^3S + 4\rho^3Wy + 2y^5W\rho + W^2\rho^2y^4 - \\
&\quad 4y^4\rho^2 + 4y^4S^2 + 4S^4y^2 + 4\rho^4y^2 + \rho^2W^2 + \rho^2S^2 + y^2 \\
&\stackrel{(31)}{=} -2\rho^2WS - 24S^3y^3\rho - 4y^4WS - 4Wy^2S + 6\rho yS - 10y^5\rho S \\
&\quad - 2W\rho y - 4\rho y^3S - 10\rho^3yS - 8S^3y^2W - 5\rho^2y^2 + 2y^4 \\
&\quad + 8S^2y^2 + y^6 + 16S^2y^3W\rho + 16\rho^2y^2SW - 8\rho yS^2W \\
&\quad - 6Wy^4S\rho^2 + 18S^2y^4\rho^2 - 28\rho^2y^2S^2 - 4W\rho^3y^3 + 8\rho yS^3 \\
&\quad - 2\rho^3y^5S + 20\rho^3y^3S + 4\rho^3Wy + 2y^5W\rho + \rho^2 - 5y^4\rho^2 \\
&\quad + y^6\rho^2 + 8y^4S^2 + 8S^4y^2 + 6\rho^4y^2 + 2\rho^2S^2 - \rho^4y^4 + y^2 - \rho^4.
\end{aligned}$$

Also gilt insgesamt

$$B_2^2 (\rho y + W - S)^2 = A_2^2.$$

Somit ist also  $q$  die Verteilungsfunktion von  $Y$ , womit die Linearität des Zusammenhangs bewiesen ist.



Für zwei Quantile ist der Abstand

$$q_{Y,p,(\rho=1)} - q_{Y,1-p,(\rho=1)} = q_{Y,p,(\rho=-1)} - q_{Y,1-p,(\rho=-1)}$$

gleich groß (vergleiche auch Abbildung 18, S. 45) und somit auch

$$q_{Y,p,(\rho=1)} - q_{Y,p,(\rho=-1)} = q_{Y,1-p,(\rho=1)} - q_{Y,1-p,(\rho=-1)}.$$

Deshalb gilt wegen der Linearität für  $\rho \neq 1$ :

$$q_{Y,p,(\rho=1)} - q_{Y,p} = q_{Y,1-p,(\rho=1)} - q_{Y,1-p}.$$

Mit  $q_{Y,p,(\rho=1)} = q_{X,p}$  resultiert dann

$$q_{X,p} - q_{X,1-p} = q_{Y,p} - q_{Y,1-p}$$

$$\Leftrightarrow IQA_X = IQA_Y. \quad \square$$

**Bemerkung 5.2:** Für  $\phi_X^2 = \Delta \phi_Y^2$ , wobei  $\Delta$  eine Skalierungskonstante ist, gilt natürlich  $IQA_X = \Delta IQA_Y$ .

## 6 Ein Test auf bivariate Cauchy-Verteilung

Nach Satz 5.1 gilt, dass bei einer einseitig gestutzten bivariaten Standard-Cauchy-Verteilung die Interquantilsabstände der Komponenten gleich sind. Aus dieser Eigenschaft lässt sich ein einfacher Anpassungstest konstruieren. Das Testproblem ist

$$H_0 : (X, Y)^T \text{ ist linksseitig gestutzt Standard-Cauchy-verteilt}$$

gegen

$$H_1 : (X, Y)^T \text{ ist nicht linksseitig gestutzt Standard-Cauchy-verteilt.}$$

Unter der Nullhypothese ist

$$Q := IQA_X / IQA_Y = 1,$$

wobei  $IQA_X$  und  $IQA_Y$  die Interquantilsabstände sind. Die Teststatistik ist der Quotient der empirischen Interquantilsabstände

$$\hat{Q} = \widehat{IQA}_X / \widehat{IQA}_Y,$$

wobei im Folgenden nur Interquartilsabstände Verwendung finden.

Wenn die Skalierungskonstante  $\Delta$  aus Bemerkung 5.2 (S. 56) bekannt ist, kann der Test allgemein für gestutzte bivariate Cauchy-Verteilungen durchgeführt werden. Bei einer ungestutzten Verteilung kann die Skalierungskonstante zum Beispiel durch den Quotienten der (ungestutzten) Interquantilsabstände geschätzt werden. Für die Schätzung bei einer gestutzten Verteilung gibt es keine offensichtliche Methode. Diese Problematik soll aber nicht Gegenstand dieser Arbeit sein.

Ein Test auf gestutzte Verteilungen ist durchaus relevant für die finanzwirtschaftliche Praxis. So werden bei Finanzrenditen die absolut großen Werte häufig separat untersucht (vergleiche z.B. Longin und Solnik 2001). Es

könnte zum Beispiel sein, dass die gestutzte Verteilung zweier Finanzrenditen einer gestutzten bivariaten Cauchy-Verteilung ähnlich ist, obwohl sich die ungestutzte Verteilung der Renditen von einer ungestutzten Cauchy-Verteilung stark unterscheidet.

Ein Test auf ungestutzte Cauchy-Verteilung ist ebenfalls möglich, indem eine Stichprobe aus einer ungestutzten Verteilung nachträglich gestutzt wird. Dabei erscheint es sinnvoll, die Stichprobe in einen links- und einen rechtsgestutzten Teil aufzuteilen und beide zu testen. Dies soll in dieser Arbeit aber nicht untersucht werden.

## 6.1 Ergebnisse bei unkorrelierten Komponenten

Ich gehe zunächst davon aus, dass  $X$  und  $Y$  unkorreliert sind und berechne Quantile von  $\hat{Q}$  für verschiedene Stichprobengrößen  $n$ . Dazu werden 100000 Wiederholungen von  $n$  Realisationen einer linksseitig gestutzten bivariaten Standard-Cauchy-Verteilung erzeugt. Für jede Wiederholung wird der Quotient der empirischen Interquantilsabstände berechnet und anschließend jeweils das 2,5%-; 5%-; 95%- und 97,5%-Quantil dieser Verteilung bestimmt. Die Stutzungsstellen bei jeweils linksseitiger Stutzung sind Median, oberes Quartil und oberes Dezil einer Cauchy-Verteilung. Die Ergebnisse sind in Tabelle 1 - 3 enthalten. Offensichtlich hängen die Quantile vor allem von der Stichprobengröße ab. Die Abstände zu Eins sind für eine Stutzung im oberen Dezil nur geringfügig größer als für eine Stutzung im Median.

Um einen Eindruck von der Güte des Tests zu erhalten, werden die Hypothesen nun genauer spezifiziert. Ich beschränke mich deshalb im Folgenden auf bivariate linksseitig gestutzte  $t$ -Verteilungen mit  $\nu$  Freiheitsgraden. Bei der Cauchy-Verteilung ist  $\nu = 1$ . Weniger als ein Freiheitsgrad ist in der Praxis irrelevant, weshalb nur rechtsseitig getestet wird. Die vorliegenden

Stichprobengröße	Quantile			
	2,5%	5%	95%	97,5%
50	0,533	0,586	1,657	1,847
100	0,647	0,696	1,456	1,561
200	0,735	0,774	1,300	1,364
300	0,776	0,809	1,239	1,291
500	0,823	0,850	1,183	1,217
700	0,847	0,871	1,151	1,182
1000	0,871	0,891	1,124	1,150

Tabelle 1: Quantile der Teststatistik  $\hat{Q}$  bei unkorrelierten Komponenten für eine Stützung im Median

Stichprobengröße	Quantile			
	2,5%	5%	95%	97,5%
50	0,526	0,588	1,775	1,975
100	0,631	0,682	1,500	1,610
200	0,721	0,761	1,327	1,397
300	0,763	0,798	1,259	1,313
500	0,811	0,842	1,197	1,237
700	0,837	0,863	1,164	1,198
1000	0,862	0,884	1,135	1,163

Tabelle 2: Quantile der Teststatistik  $\hat{Q}$  bei unkorrelierten Komponenten für eine Stützung im oberen Quartil

Stichprobengröße	Quantile			
	2,5%	5%	95%	97,5%
50	0,521	0,585	1,799	1,995
100	0,627	0,679	1,511	1,629
200	0,714	0,757	1,335	1,408
300	0,762	0,797	1,264	1,321
500	0,809	0,838	1,199	1,240
700	0,837	0,861	1,165	1,199
1000	0,860	0,882	1,138	1,164

Tabelle 3: Quantile der Teststatistik  $\hat{Q}$  bei unkorrelierten Komponenten für eine Stützung im oberen Dezil

Quantile der Teststatistik ermöglichen aber auch linksseitige und beidseitige Tests. Die neuen Hypothesen sind

$$H_0^* : \nu = 1 \quad \text{gegen} \quad H_1^* : \nu > 1.$$

Für  $\nu = 1, 1, 1; 1, 2; 1, 3; 1, 5; 1, 7; 2; 2, 5; 3; 3, 5; 4; 5$  Freiheitsgrade wurden für verschiedene Stichprobengrößen zum 5%-Niveau jeweils 10000 rechtsseitige Tests durchgeführt. Dabei wird die Nullhypothese verworfen, wenn der Quotient der Interquantilsabstände oberhalb des entsprechenden 95%-Quantils aus Tabelle 1 - 3 liegt. Die geschätzte Güte ist der Anteil der verworfenen Nullhypothesen. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 19 - 21 dargestellt, wobei die Werte für andere Freiheitsgrade linear interpoliert wurden. Wie erwartet bewirkt eine Vergrößerung der Stichprobe und der Freiheitsgrade eine Verbesserung der Güte. Für stärkere Stützungen unterscheidet sich der Quotient der Interquantilsabstände für mehr als einen Freiheitsgrad stärker von Eins, was zu einer höheren Güte führt. Soll allerdings

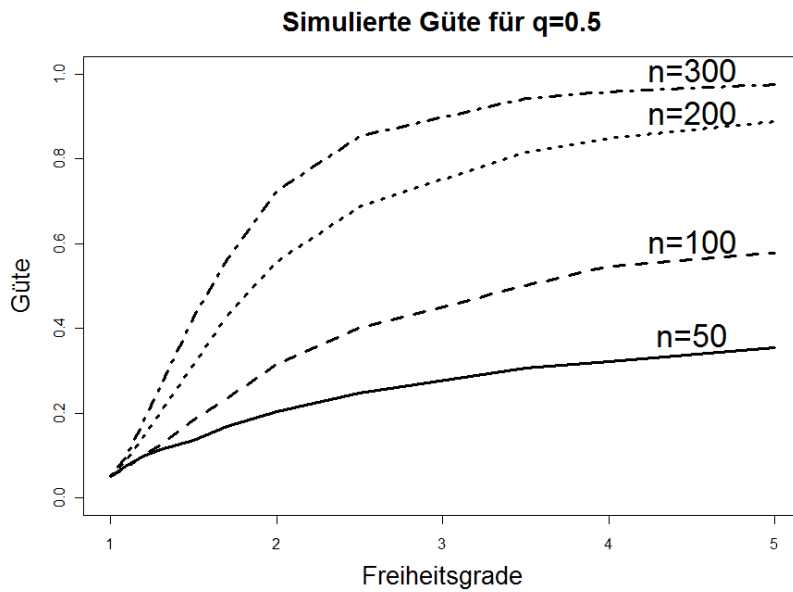


Abbildung 19: Simulierte Güte bei unkorrelierten Komponenten für eine Stützung im Median

eine Stichprobe aus einer ungestutzten Verteilung auf bivariate Cauchy-Verteilung getestet und dafür gestutzt werden, gehen bei einer starken Stützung natürlich mehr Werte verloren. So bleiben zum Beispiel bei einer Stichprobe von 400 Datenpunkten bei einer Stützung im Median 200 Werte übrig. Bei einer Stützung im oberen Quartil sind es lediglich 100 Werte. Ein Vergleich zeigt, dass im ersten Fall die Güte besser ist. Die Stützung im Median ist also vorzuziehen.

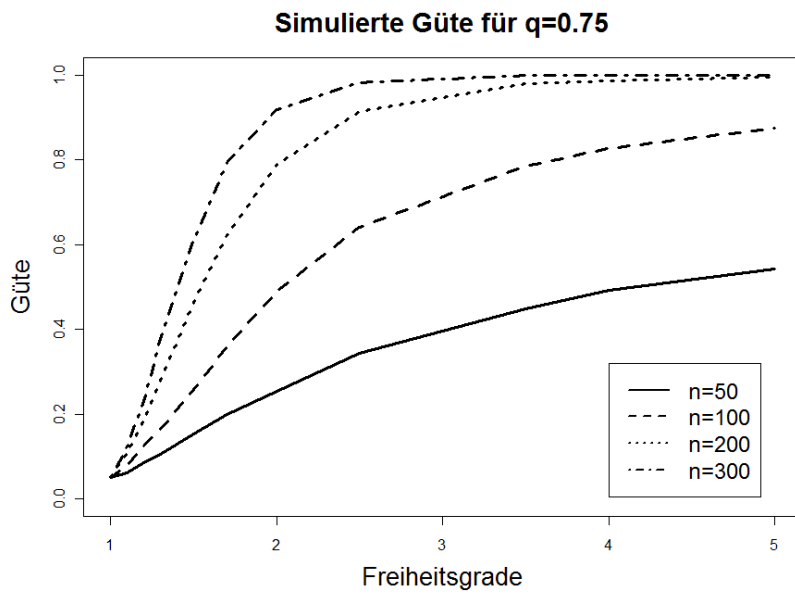


Abbildung 20: Simulierte Güte bei unkorrelierten Komponenten für eine Stützung im oberen Quartil

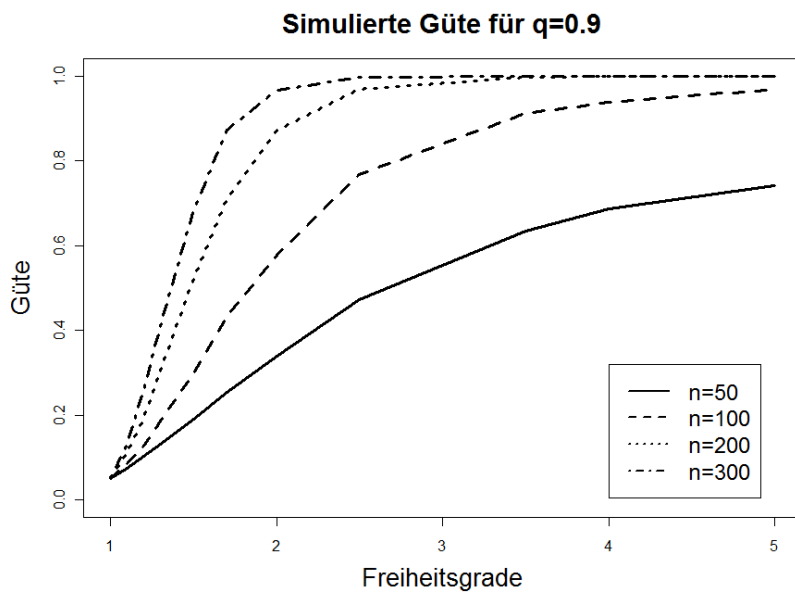


Abbildung 21: Simulierte Güte bei unkorrelierten Komponenten für eine Stützung im oberen Dezil

## 6.2 Ergebnisse bei korrelierten Komponenten

Wenn eine Stichprobe  $(x_i, y_i)^T, i = 1, \dots, n$  aus einer ungestutzten elliptischen bivariaten  $t$ -Verteilung auf Cauchy-Verteilung getestet werden soll, kann der Korrelationsparameter durch Kendalls  $\tau$  gemäß der Beziehung (3, S. 14) geschätzt werden. Mit Formel (4, S. 14) lassen sich dann Werte von  $z_i$  erzeugen, die mit den  $x_i$  empirisch unkorreliert sind. Durch die Schätzung können sich Veränderungen bei Konfidenzintervallen und Güten ergeben, die in dieser Arbeit aber nicht untersucht werden sollen. Auch für gestutzte Stichproben wäre diese Vorgehensweise wünschenswert, allerdings ist die Schätzung des Korrelationsparameters problematisch. Mit Satz 4.1 ist es möglich, aus der empirischen Korrelation einer gestutzten elliptischen Verteilung die ungestutzte Korrelation zu schätzen. Dies gilt aber nur, wenn die zweiten Momente der Komponenten endlich sind. Bei einer Cauchy-Verteilung ist dies nicht der Fall. Prinzipiell wäre dann die Schätzung des Korrelationsparameters über Kendalls  $\tau$  sinnvoll. Allerdings gibt es bisher keine Möglichkeit, aus dem gestutzten das ungestutzte Kendalls  $\tau$  zu schätzen. Für konkrete Fälle lässt sich dies natürlich durch Simulationen lösen. Die Ergebnisse sind aber von den Freiheitsgraden abhängig, die Gegenstand des Testproblems sind. Aus diesen Gründen habe ich mich gegen diese Vorgehensweise entschieden und nutze aus, dass Satz 5.1 allgemein für elliptische Cauchy-Verteilungen gilt. Mit steigender Korrelation werden die Komponenten aber immer ähnlicher, was im Extremfall  $\rho = \pm 1$  auch unter der Alternativhypothese zu gleichen Interquartilsabständen führt. Es ist also zu vermuten, dass sich die Güte für korrelierte Komponenten verschlechtert. Um Aufschlüsse darüber zu erhalten, habe ich Quantile und Gütefunktionen für  $\rho = 0,5$  simuliert. Die Vorgehensweise ist dabei analog zum vorigen Abschnitt. Die Ergebnisse für die Quantile sind in den Tabellen



4 - 6 enthalten. In den Abbildungen 22 - 24 sind die simulierten Gütefunktionen dargestellt. Wie für unkorrelierte Komponenten verbessert sich die Güte für eine größere Stichprobe und stärkere Stützung. Ein Vergleich zeigt, dass sich die Güte im Vergleich zur Unkorreliertheit verschlechtert hat, was für kleine Stichproben besonders deutlich wird.

Die vorliegenden Ergebnisse sind natürlich nicht ausreichend für ein umfassendes Urteil über dieses Testverfahren. Dafür sind Simulationsstudien für andere Werte von  $\rho$  und weitere Quantile sowie Vergleiche mit anderen Testverfahren nötig. Generell sind bivariate und multivariate Anpassungstests weit weniger erforscht worden als univariate. Justel et al. (1997) verallgemeinern den Kolmogorov-Smirnoff-Test und berechnen kritische Werte der Teststatistik für den bivariaten Fall. Einen anderen Ansatz verfolgen Bartoszyński et al. (1997), deren Test auf zufällig gewählten Dreiecken aus zwei Datenpunkten und einer Realisation der zu testenden Verteilung basiert. Das Testverfahren von Roch und Alegre (2006) basiert auf Copulae und nutzt aus, dass eine bivariate stetige Verteilung eindeutig durch die Randverteilungen und die Copula definiert ist.

Prinzipiell ist es attraktiv, als Teststatistik für einen bivariaten Anpassungstest nur eine einzige, leicht zu berechnende Zahl zu haben, was für das hier vorgestellte Testverfahren spricht. So können schnell erste Aufschlüsse darüber gewonnen werden, ob eine vorliegende Stichprobe aus einer Cauchy-Verteilung stammt.

Stichprobengröße	Quantile			
	2,5%	5%	95%	97,5%
50	0,555	0,615	1,666	1,825
100	0,661	0,710	1,428	1,527
200	0,745	0,782	1,287	1,347
300	0,785	0,817	1,227	1,277
500	0,829	0,855	1,173	1,208
700	0,853	0,875	1,143	1,172
1000	0,876	0,895	1,119	1,143

Tabelle 4: Quantile der Teststatistik  $\hat{Q}$  bei korrelierten Komponenten für eine Stützung im Median

Stichprobengröße	Quantile			
	2,5%	5%	95%	97,5%
50	0,529	0,591	1,696	1,872
100	0,641	0,692	1,468	1,576
200	0,729	0,769	1,312	1,380
300	0,772	0,806	1,248	1,301
500	0,819	0,846	1,187	1,225
700	0,845	0,868	1,156	1,188
1000	0,867	0,887	1,128	1,154

Tabelle 5: Quantile der Teststatistik  $\hat{Q}$  bei korrelierten Komponenten für eine Stützung im oberen Quartil

Stichprobengröße	Quantile			
	2,5%	5%	95%	97,5%
50	0,530	0,593	1,742	1,923
100	0,636	0,687	1,477	1,586
200	0,726	0,765	1,316	1,385
300	0,768	0,803	1,252	1,306
500	0,815	0,844	1,191	1,231
700	0,841	0,865	1,157	1,193
1000	0,865	0,886	1,131	1,157

Tabelle 6: Quantile der Teststatistike  $\hat{Q}$  bei korrelierten Komponenten für eine Stützung im oberen Dezil

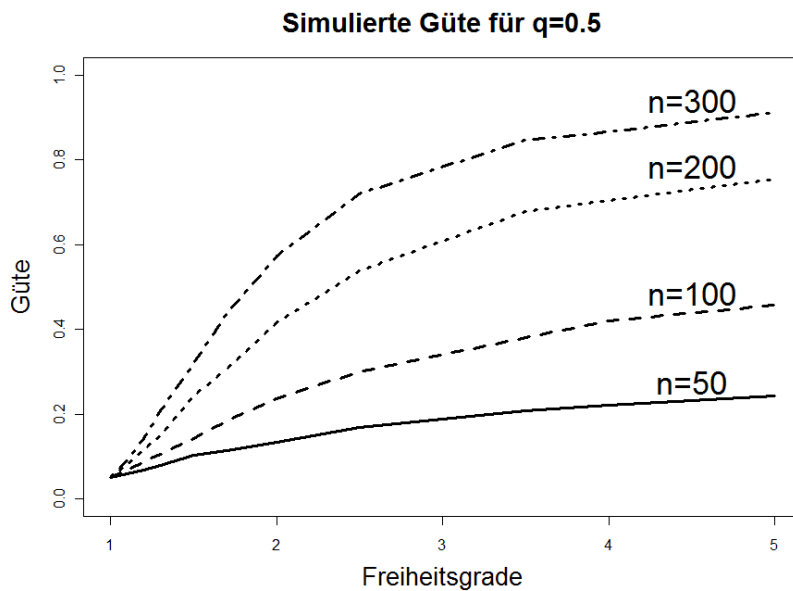


Abbildung 22: Simulierte Güte bei korrelierten Komponenten für eine Stützung im Median

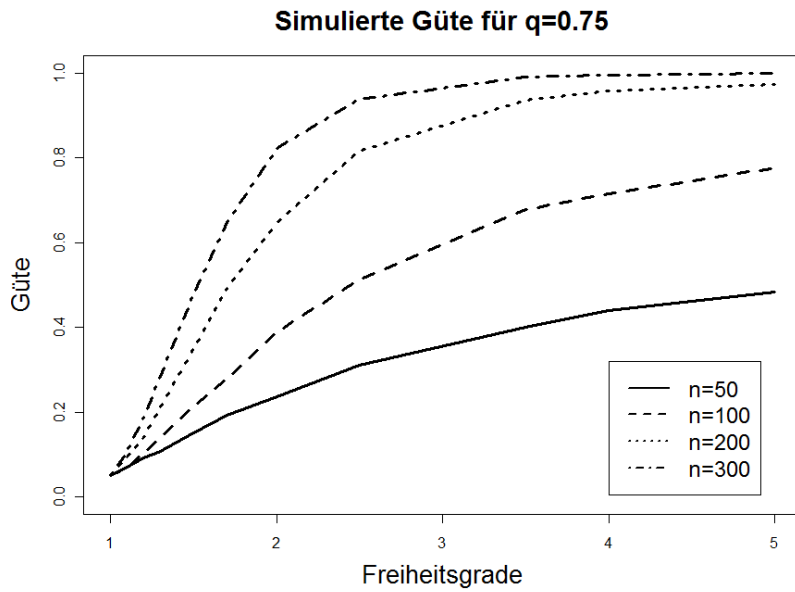


Abbildung 23: Simulierte Güte bei korrelierten Komponenten für eine Stützung im oberen Quartil

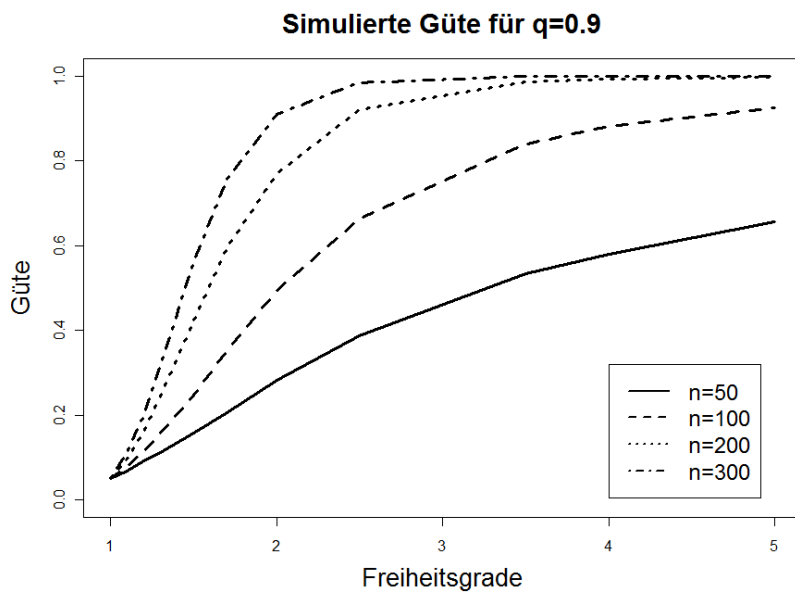


Abbildung 24: Simulierte Güte bei korrelierten Komponenten für eine Stützung im oberen Dezil

## 7 Zusammenfassung

Die Stützung einer bivariaten Verteilung ist ein anschaulich und mathematisch einfacher Vorgang. Momente und Korrelationen können jedoch bei gestutzten Verteilungen im Vergleich zu ungestutzten sehr unterschiedlich sein.

Obwohl gestutzte Verteilungen für einige Fragestellungen der empirischen Finanzwirtschaft wichtig sind, gab es hierzu bisher nur wenige Forschungsergebnisse. Insbesondere die ansonsten häufig verwendeten  $t$ -Verteilungen wurden in gestutzter Form bisher selten untersucht. Diese Arbeit hat einige Eigenschaften dieser Verteilungen diskutiert. Die bekannte Verzerrung der gestutzten Korrelation als Schätzer für die ungestutzte Korrelation wurde für elliptische Verteilungen mit endlichen zweiten Momenten allgemein berechnet. Eine bisherige Veröffentlichung auf diesem Gebiet ist fehlerhaft. Die Auswirkungen der falschen Vorgehensweise wurden dargelegt, wobei für einige Spezialfälle der Fehler beim Rückschluss von der gestutzten auf die ungestutzte Korrelation analytisch berechnet werden konnte. Insbesondere für in der Praxis übliche Größenordnungen bei Korrelationen liefert die falsche Vorgehensweise deutlich zu niedrige Werte. Die Hauptaussage des Artikels, dass sich der beobachtete Anstieg der gestutzten empirischen Korrelation durch Eigenschaften einer bivariaten  $t$ -Verteilung erklären lässt, ist somit falsch. Gleiches gilt für die Schlussfolgerung, dass es keine Hinweise auf steigende Korrelationen in Krisenzeiten gibt.

In einem weiteren Teil der Arbeit wurde eine Eigenschaft der gestutzten bivariaten Cauchy-Verteilung bewiesen. Obwohl sich die Verteilungen der Komponenten stark voneinander unterscheiden, sind die Interquantilsabstände beider Komponenten gleich, wenn die Quantile symmetrisch um den Median gewählt werden. Diese Eigenschaft lässt sich für einen einfa-

chen Test auf bivariate Cauchy-Verteilung ausnutzen. Der besondere Vorteil dieses Tests liegt in seiner Einfachheit. Der Quotient zweier empirischer Interquantilsabstände ist leicht zu berechnen und dient als Teststatistik. Der Test ist auch bei korrelierten Komponenten anwendbar, wobei sich die Güte in jedem Fall verschlechtert. Für große Stichproben bleibt diese jedoch hoch, so dass der Test zum Beispiel für Tagesrenditen schnell Aufschlüsse über eine Cauchy-Verteilung liefern kann.

## Literaturverzeichnis

Ang, A. und Bekaert, G. (2002): „International asset allocation with regime shifts“, *The Review of Financial Studies*, 15, 1137-1187.

Bartoszynski, R., Pearl, D.K. und Lawrence, J. (1997): „A multidimensional goodness-of-fit test based on interpoint distances“, *Journal of the American Statistical Association*, 92, 577-586.

Boyer, B.H., Gibson, M.S. und Lauretán, M. (1997): „Pitfalls in tests for changes in correlations“, *International Finance Discussion Paper 597*, Board of the Governors of the Federal Reserve System.

Bollerslev, T. (1990): „Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: a multivariate generalized ARCH model“, *Review of Economics and Statistics*, 72, 498-505.

Butler, K.C. und Joachim, D.C. (2002): „Are the gains from international portfolio diversification exaggerated? The influence of downside risk in be-ark markets“, *Journal of International Money and Finance*, 21(7), 981-1011.

Campbell, R.A., Koedijk, K.G., Kofman, P. und Forbes, C. (2008): „Increasing correlations or just fat tails?“, *Journal of Empirical Finance*, 15, 287-309.

Cohen, A. C. (1991): *Truncated and censored samples: theory and applications*, CRC Press, New York.

Dungey, M. und Tambakis, D.N. (Herausgeber) (2005): *Identifying international financial contagion: progress and challenges*, Oxford University Press, New York.

Embrechts, P., McNeil, A. und Straumann, P. (2001): „Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls.“ in *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, Herausgeber: Dempster, M.A.H., 176-223, Cambridge University Press, Cambridge.

Fang, H.B., Fang, K.T und Kotz, S. (2002): „The meta-elliptical distributions with given marginals“, *Journal of Multivariate Analysis*, 82(1), 1-16.

Forbes, K.J. und Rigobon, R. (2002): „No contagion, only interdependence: measuring stock market comovements“, *The Journal of Finance*, 57(5), 2223-2261.

Johnson, N.L. und Kotz, S. (1972): *Distributions in statistics: continuous multivariate distributions*, Wiley, New. York.

Justel, A. Pena, D. und Zamar, R. (1997): „A multivariate Kolmogorov-Smirnov test of goodness of fit“, *Statistics & Probability Letters*, 35, 251-259.

Klaassen, F. (2002): „Improving GARCH volatility forecasts with regime-switching GARCH“, *Empirical Economics*, 27(2), 363-394.

King, M.A. und Wadhwani, S. (1990): „Transmission of volatility between stock markets“, *Review of Financial Studies*, 3(1), 5-33.

Kotz, S. und Nadarajah, S. (2004): *Multivariate t distributions and their applications*, Cambridge University Press, Cambridge.

Lauprete, G.J., Samarov, A.M. und Welsch, R.E. (2002): „Robust portfolio optimization“, *Metrika*, 55, 139-149.



Liu, C. (1995): „Missing data imputation using the multivariate  $t$  distribution and the EM algorithm“, *Journal of Multivariate Analysis*, 53, 139-158.

Longin, F. und Solnik, B. (1995): „Is the correlation in international equity returns constant: 1960-1990?“, *Journal of International Money and Finance*, 14, 3-26.

Longin, F. und Solnik, B. (2001): „Extreme correlation of international equity markets“, *Journal of Finance*, 56(2), 649-676.

Mandelbrot, B. B. (1963): „The variation of certain speculative prices.“, *The Journal of Business of the University of Chicago*, 36, 394-419.

Muirhead, R.J. (1982): *Aspects of multivariate statistical theory*, Wiley, New York.

O'Hagan, A. und Forster, J. (2004): *Kendall's advanced theory of statistics, Volume 2B: Bayesian Inference*, Arnold, London.

Pagan, A. (1996): „The econometrics of financial markets“, *Journal of Empirical Finance*, 3, 15-102.

Roch, O. und Alegre, A. (2006): „Testing the bivariate distribution of daily equity returns using copulas. An application to the Spanish stock market“, *Computational Statistics & Data Analysis*, 51(2), 1312-1329.