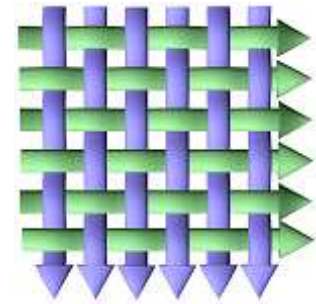


Sonderforschungsbereich 559
Modellierung großer
Netze in der Logistik



Technical Report 03013

ISSN 1612-1376

Analytisch-numerische Techniken zur Lagerbestand- Analyse unter Berücksichtigung einer zeitlich-variierenden Belastung

Teilprojekt M2:
M. Fischer
fischer@ls4.cs.uni-dortmund.de

Teilprojekt A4:
Ch. Dilling
chdi@flw.mb.uni-dortmund.de

Dortmund, 26.09.2003

1 Einleitung und Vorüberlegungen

Lager sind ein zentraler Bestandteil großer Netze der Logistik, vgl. [2, 3, 7, 8] (Auswahl). Der Beitrag dieser Arbeit ist die quantitative, stationäre Analyse des Lagerbestands basierend auf stochastischen Modellen (Markov-Kette, Markov-modulierte Poisson-Prozesse) mit nicht-simulativen, analytisch-numerischen Techniken. Hierbei wird motiviert, warum diese stochastischen Modelle für die Beschreibung von Szenarien mit einer schwankenden Systemlast geeignet sind.

Ein Lager ist gekennzeichnet durch den Lagerbestand J und Prozesse (Einlagern und Auslagern) die den Lagerbestand verändern und dafür Ressourcen (Gabelstapler, Rampen, Lagerfläche etc) beanspruchen. Das zeitliche Auftreten der Prozesse unterliegt gewöhnlich stochastischen Einflüssen und ist deswegen nicht exakt terminierbar. Beispielsweise folgen die Ankünfte anliefernder und abholender LKWs an einer Stückgutumschlaghalle eines Logistikdienstleister einem festgelegten Zeitplan, jedoch weichen die tatsächlichen Ankünfte bedingt durch die Verkehrssituation in vielen Fällen von den geplanten Zeiten ab. Folgerichtig müssen in einem Lagermodell die Ankunftsprozesse [14] stochastisch sein. Poisson-Prozesse mit fester Rate sind hier verbreitet, vgl. etwa [3]. Das zugrundeliegende Modell ist aus der Sicht der Warteschlangen-Theorie eine $M/M/1/C$ Bedienstation [5] wenn man voraussetzt, dass die Kapazität des Lagers durch C beschränkt ist und Ein- bzw. Auslagerungsprozesse verloren gehen, wenn das Lager voll bzw. leer ist, vgl. [3]. Jedoch variiert in realen Szenarien oft die Intensität bzw. Rate der Ein- und Auslagerungsprozesse zyklisch in Abhängigkeit von einem Zeitparameter t , zum Beispiel mit der Periode eines Tages. Dann ist ein $M(t)/M(t)/1/C$ Modell adäquater. Allerdings sind Modelle diesen Typs analytisch schwer handhabbar. Eine Ausnahme ist der Spezialfall, in dem die Raten in Abhängigkeit vom Zustand q einer endlichen, irreduziblen Markov-Kette variieren. Die Zustände q repräsentieren eine (Zeit)Phase und diskretisieren den kontinuierlichen Zeitparameter t . Die Raten der Ein- und Auslagerungsprozesse werden durch den Zustand q bzw. die aktuelle Phase gesteuert bzw. moduliert. Resultierende $M(q)/M(q)/1$ Modelle - oft auch als $M/M/1$ Modelle in Markov'scher Umgebung bezeichnet - sind in [13] eingehend untersucht worden.

Der erste Beitrag dieser Arbeit ist es, die Methodik zur stationären Analyse von $M(q)/M(q)/1/C$ Modellen für die Untersuchung eines phasenabhängigen Lagerbestands anzuwenden. Der zweite Beitrag ist die Modell-basierte Bewertung einer einfachen adaptiven Steuerung abhängig vom Lagerbestand. Eine Steuerung wird erst durch die Berechnung phasenabhängiger logistischer Kenngrößen des Lagerbestands ermöglicht.

2 Modellierung und Analyse mit Markov-modulierten Poisson Prozessen

Der Lagerbestand wird durch Ein- und Auslagerungsprozesse mit zeitabhängiger Rate $\lambda(t)$ und $\mu(t)$ verändert. Für die Abbildung der Ein- und Auslagerungsprozesse auf ein diskretes, stochastisches Modell ist es notwendig, die Zeit t in Phasen zu diskretisieren, in denen die Intensität bzw. Rate der Pro-

zesse näherungsweise konstant ist. Es seien λ_i und μ_i die gemittelten Raten der Ein- und Auslagerungsprozesse in Phase i . Die Tabelle 1 zeigt zwei Szenarien mit jeweils 4 Phasen. Die Szenarien unterscheiden sich darin, dass im zweiten Szenario eine einfache *adaptive Steuerung* implementiert ist. Zu den einzelnen Phasen eines Szenarios: in Phase 0 übersteigt die Einlagerungsrate die Auslagerungsrate ($\lambda_0 > \mu_0$). In Phase 1 ist $\lambda_1 = \mu_1$ (ohne Steuerung). Im Fall mit Steuerung (rechts) wird die Auslagerungsrate in Abhängigkeit vom Lagerbestand J gewählt, es ist

$$\mu_1 = \begin{cases} 2.5 & \text{falls } J \leq 20 \\ 2.8 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Steuerung in Phase 1 bewirkt, dass in Phase 0 akkumulierter hoher Bestand ggf. abgebaut wird und somit der Bestand nicht auf hohem Niveau (Gefahr von Engpässen) verharrt. Die Phasen 2 und 3 verhalten sich symmetrisch zu den Phasen 0 und 1. In Phase 2 übersteigt die Auslagerungsrate die Einlagerungsrate. In Phase 3 ist $\lambda_3 = \mu_3$ (ohne Steuerung), bzw. mit Steuerung ist

$$\lambda_3 = \begin{cases} 2.5 & \text{falls } J \geq 10 \\ 2.8 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Grundsätzlich ist eine Steuerung innerhalb aller Phasen möglich, die Beschränkung auf lediglich 2 resultiert aus dem Zielkonflikt zwischen Performance und moderaten Kosten, da eine Steuerung gewöhnlich Mehrkosten verursacht. Die Auswahl von Phase 1 und Phase 3 basiert auf der Analyse des Lagerbestands (Details später). Wenn eine Unterscheidung bzgl. der Phase nicht zwingend ist, notieren wir verkürzt λ bzw. μ .

| i | λ_i | μ_i | λ_i | μ_i |
|-----|-------------|---------|-------------|-----------|
| 0 | 2.5 | 2.0 | 2.5 | 2.0 |
| 1 | 2.5 | 2.5 | 2.5 | 2.5 / 2.8 |
| 2 | 2.0 | 2.5 | 2.0 | 2.5 |
| 3 | 2.5 | 2.5 | 2.5 / 2.8 | 2.5 |

Tabelle 1: Phasenabhängige Raten für Ein- und Auslagerung

Markov-modulierte Poisson-Prozesse (MMPPs) [9, 13] gehören innerhalb der Klasse der stochastischen Ankunftsprozesse [14] zu den *Markov Renewal Prozessen*¹. MMPPs werden durch *Poisson-Prozesse* konstruiert, deren Raten in Abhängigkeit vom Zustand q einer irreduziblen Markov-Kette $\hat{\mathbf{Q}}$ der Größe m - oft als Markovsche Umgebung bezeichnet - gewählt werden. Insofern sind MMPPs doppelt-stochastische Ankunftsprozesse, deren Rate bzw. Intensitätsfunktion durch einen zweiten modulierenden stochastischen Prozess bestimmt wird. Die Aufenthaltsdauer in einem Zustand q entspricht einem Zeitintervall - nachfolgend kurz als Phase bezeichnet. Gewöhnlich ist die modulierende Markov-Kette so strukturiert, dass die Zustände q zyklisch und in deterministischer Reihenfolge durchlaufen werden und die Aufenthaltszeit in einem

¹Verallgemeinerung von Renewal Prozessen wie zum Beispiel Poisson-Prozess

Zustand bzw. die Länge einer Phase T_i einen geringen Variationskoeffizienten besitzt, etwa durch eingebettete Phasenverteilungen. Eine Phasenverteilung ist isoliert betrachtet eine absorbierende Markov-Kette mit genau einem absorbierenden Zustand. Die Phasenverteilung wird durch die Transitionen zwischen nicht-absorbierenden Zuständen $\mathbf{T}_i \in \mathbb{R}^{k \times k}$, die Raten in den absorbierenden Zustand $\mathbf{t}_i \in \mathbb{R}^k$ und die stochastische Verteilung des Startzustands $\boldsymbol{\sigma}_i \in \mathbb{R}^k$ spezifiziert. Ist beispielsweise die Phasenverteilung eine Erlang-k Verteilung mit (Gesamt)Rate α , hat man $\boldsymbol{\sigma}_i = (1, 0, \dots, 0)$ und

$$\mathbf{T}_i = \begin{pmatrix} -k \cdot \alpha & k \cdot \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -k \cdot \alpha & k \cdot \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k \cdot \alpha & k \cdot \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k \cdot \alpha \end{pmatrix} \mathbf{t}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k \cdot \alpha \end{pmatrix}.$$

Jeder Zustand der Erlang-k Verteilung hat die Übergangsrate $k \cdot \alpha$, so dass die mittlere Zeitdauer $E[T_i]$ der Phase i α^{-1} Zeiteinheiten ist. Grundsätzlich sind für die Modellierung der Phasen Markov-Ketten mit einem geringen Variationskoeffizienten der Zeit bis zum Erreichen des absorbierenden Zustands, der den Übergang zur nächsten Phase markiert, vorteilhaft, weil die Länge der Phase deterministisch ist. In einem Szenario mit 4 Phasen, deren Länge jeweils durch eine Phasenverteilung mit k Zuständen beschrieben wird, hat die modulierende Markov-Kette $4 \cdot k$ Zustände und die zustandsabhängigen Ein- bzw. Auslagerungsraten sind (als Zeilenvektor notiert):

$$\boldsymbol{\lambda} = (\underbrace{\lambda_0, \dots, \lambda_0}_{k\text{-mal}}, \dots, \underbrace{\lambda_3, \dots, \lambda_3}_{k\text{-mal}})$$

$$\boldsymbol{\mu} = (\underbrace{\mu_0, \dots, \mu_0}_{k\text{-mal}}, \dots, \underbrace{\mu_3, \dots, \mu_3}_{k\text{-mal}}).$$

Die Anzahl innerhalb einer Phase i generierten Ein- bzw Auslagerungsprozesse $N(T)$ ist eine diskrete, doppelt-stochastische Zufallsvariable, da ihre Verteilung sowohl durch die stochastische Länge der Phase, als auch durch die innerhalb einer Phase stochastisch generierten Zwischenankunftszeiten beeinflusst wird. Wenn die Dauer einer Phase durch eine Erlang-k Verteilung modelliert wird, gilt:

$$E[N(T)] = \lambda \cdot E[T] \quad (1)$$

$$V[N(T)] = \lambda \cdot E[T] + \frac{1}{k} \cdot \lambda^2 \cdot E[T]^2 \quad (2)$$

$$VC[N(T)] = \sqrt{\frac{1}{\lambda \cdot E[T]} + \frac{1}{k}} \quad (3)$$

Die Gleichung 2 zeigt, dass die Varianz von $N(T)$ durch die Anzahl der Zustände k aus der Erlang-Verteilung bestimmt wird. Für $k \rightarrow \infty$ erhält man die Varianz für eine deterministische Phasenlänge t und $V[N(t)] = t \cdot \lambda$ ist gerade die Varianz für die Anzahl der Ankünfte eines gewöhnlichen Poisson-Prozesses innerhalb des

Zeitintervalls $[0, t]$. Der Variationskoeffizient ist reziprok zur Wurzel aus k , $E[T]$ und λ .

Im Modell unterscheiden wir die Verteilung des Lagerbestands $J(t)$ zum Zeitpunkt t , die stationäre Verteilung des Lagerbestands $\lim_{t \rightarrow \infty} J(t) = J$ und die phasenabhängige, stationäre Verteilung des Lagerbestands

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{J(t) \mid \text{modulierende Markov-Kette ist in Zustand } q\} = J_q.$$

Die stationäre Analyse bezüglich der Realzeit t wird hier mit einer transienten Analyse bezüglich der in die Dynamik des Modells eingebetteten (Zeit)Phasen gekoppelt. Die Phasen sind wie oben beschrieben durch Zustände der modulierenden Markov-Kette kodiert und werden in deterministischer Reihenfolge zirkulierend durchlaufen. Die später vorgestellten Ergebnisse zeigen, dass eine Unterscheidung stationärer Kennzahlen bezüglich eingebetteter Phasen bedeutsam ist, wenn Ein- und Auslagerungsprozesse variierende Raten haben. Ähnliche Ergebnisse sind in [13] dokumentiert.

Zeitlich variierende Raten von Ein- und Auslagerungsprozessen verallgemeinern die Situation konstanter Raten. Wenn wie oben beschrieben innerhalb bestimmter Phasen Raten als konstant angenommen werden, so bedeutet dies nicht, dass der Analyseansatz für konstante Raten isoliert auf die einzelnen Phasen anwendbar ist. Dann würden vorhandene Wechselwirkungen zwischen den Phasen vernachlässigt werden. Trotzdem ist es für einen Vergleich interessant, zunächst den Analyseansatz für konstante Raten zu betrachten. Für konstante Ein- und Auslagerungsraten mit negativ-exponentiell verteilten Zwischenankunftsrate ist eine M/M/1/C Bedienstation ein abstraktes Lagermodell mit (limitierter) Kapazität C . Dies gilt unter der Annahme, dass Ein- bzw. Auslagerungsprozesse unberücksichtigt bleiben, wenn das Lager maximalen bzw. leeren Bestand hat. Es ist bekannt, dass für $\rho := \lambda \cdot \mu^{-1} = 1$ (traffic coefficient) und $C = \infty$ die M/M/1/C Bedienstation keine stationäre Verteilung besitzt. Für $C < \infty$ und ρ beliebig (insbesondere auch $\rho > 1$) existiert die stationäre Verteilung und für $\rho = 1$ ist sie eine Gleichverteilung und damit unmittelbar von der Kapazität C abhängig [5]. Dadurch wäre eine Kapazitätsplanung eines Lagers problematisch [3]. Die stationäre Verteilung ist gegeben durch

$$P[J = j] = \frac{(1 - \rho)\rho^j}{1 - \rho^{C+1}} \quad \text{mit} \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

und resultiert aus der Betrachtung der zugehörigen Markov-Kette: ein homogener, endlicher Geburts/Todes Prozess. [evtl. hier noch kurz herleiten]. In der Abbildung 2 ist die stationäre Verteilung für $\rho = 0.9, \dots, 1.1$ dargestellt. Bei Überlast ($\rho > 1$) ist die stationäre Verteilung monoton steigend. Mit $\rho \approx 1.1$ ist die Wahrscheinlichkeit eines vollständig gefüllten Lagers ($P[J = C]$) entsprechend hoch.

Wenn die Ein- und Auslagerungsraten zeitabhängig variieren, ist eine M(q)/M(q)/1/C Bedienstation ein abstraktes Lagermodell mit (limitierter) Kapazität C . Wie bei der M/M/1/C Bedienstation existiert im Fall $C = \infty$ keine stationäre Verteilung, wenn die mittlere Einlagerungsrate (=Einlagerungsraten über die stationäre Verteilung der modulierenden Markov-Kette gewichtet) mindestens so

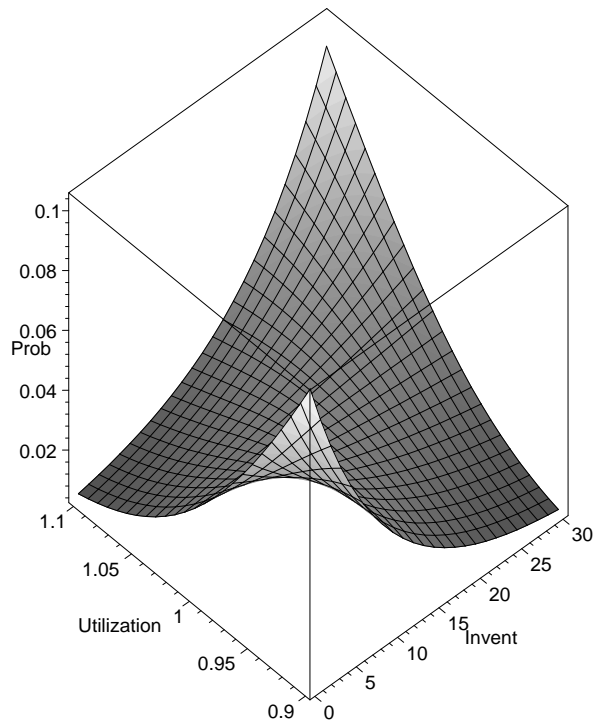


Abbildung 1: Stationäre Verteilungen einer M/M/1/C Bedien-Station für unterschiedliche Lastsituationen (traffic coefficient) mit C=30.

groß ist wie die mittlere Auslagerungsrate [12]. Der $M(q)/M(q)/1/C$ Bedienstation unterliegt eine zweidimensionale Markov-Kette mit Zuständen (j,i) . Hier sei die erste Komponente 'j' der Lagerbestand und die zweite Komponente 'j' die Phase der modulierenden Markov-Kette. Das Zustandsübergangsdiagramm für 4 Phasen ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} j+1 \\ i \end{pmatrix} \text{ mit Rate } \lambda_i \text{ falls } j+1 \leq C \text{ gilt} \\ \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} j-1 \\ i \end{pmatrix} \text{ mit Rate } \mu_i \text{ falls } j-1 \geq 0 \text{ gilt} \\ \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} j \\ i+1 \bmod 4 \end{pmatrix} \text{ mit Rate } \alpha \end{aligned}$$

bzw. ausführlich mit zeilenorientierter Anordnung von Zuständen einer Phase

$$\begin{array}{cccccccc}
& \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\text{Phase } i & \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\lambda_i} \\ \xleftarrow{\mu_i} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\lambda_i} \\ \xleftarrow{\mu_i} \end{array} & \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} C-1 \\ i \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\lambda_i} \\ \xleftarrow{\mu_i} \end{array} & \begin{pmatrix} C \\ i \end{pmatrix} \\
& \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha \\
\text{Phase } i+1 & \begin{pmatrix} 0 \\ i+1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\lambda_{i+1}} \\ \xleftarrow{\mu_{i+1}} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 \\ i+1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\lambda_{i+1}} \\ \xleftarrow{\mu_{i+1}} \end{array} & \begin{pmatrix} 2 \\ i+1 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} C-1 \\ i+1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\lambda_{i+1}} \\ \xleftarrow{\mu_{i+1}} \end{array} & \begin{pmatrix} C \\ i+1 \end{pmatrix} \\
& \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Die vertikalen Transitionen zwischen Zuständen aufeinanderfolgender Phasen besitzen die gleiche Rate α . Bei einem Übergang in eine neue Phase wird die (stationäre) Verteilung des ersten Zustands innerhalb der neuen Phase einzig durch die implizite (stationäre) Verteilung der Zustände in der Vorgängerphase bestimmt. Hierdurch wird eine Interferenz der Phasen modelliert.

Nachfolgend werden zwei Ansätze für die stationäre Analyse der Markov-Kette einer $M(q)/M(q)/1/C$ Bedienstation betrachtet:

1. Eine Matrix-geometrische Analyse, in der die QBD-Struktur² der Generatormatrix der Markov-Kette verwendet wird, um quasi-analytisch eine stationäre Analyse durchzuführen. Der Ansatz ist quasi-analytisch, weil er mit numerischen Techniken kombiniert wird, um eine geschlossene Darstellung der stationären Verteilung zu bestimmen, siehe [12].
2. Eine rein numerische stationäre Analyse basierend auf einer Markov-Kette, die aus einer stochastischen Petri-Netz Beschreibung generierbar ist (ohne Ausnutzung der QBD-Struktur).

Eine lexikographische Anordnung der Zustände (j, i) liefert eine QBD-Struktur der Generatormatrix \mathbf{Q} der Markov-Kette. Unter Verwendung des Kronecker-Produkt Operators \otimes [10] ist

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_0 & \mathbf{A}_0 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \mathbf{Q}_C \end{pmatrix} \quad (4)$$

²Quasi-Birth-Death Prozess mit Block-Triagonalgestalt der Generatormatrix

und

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_2 &:= \begin{pmatrix} \mu_0 \cdot \mathbf{I}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mu_1 \cdot \mathbf{I}_k & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mu_2 \cdot \mathbf{I}_k & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mu_C \cdot \mathbf{I}_k \end{pmatrix} \\
\mathbf{A}_0 &:= \begin{pmatrix} \lambda_0 \cdot \mathbf{I}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_1 \cdot \mathbf{I}_k & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda_2 \cdot \mathbf{I}_k & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda_C \cdot \mathbf{I}_k \end{pmatrix} \\
\mathbf{A}_1 &:= \begin{pmatrix} \mathbf{T}_0 & \mathbf{t}_0 \otimes \boldsymbol{\sigma}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_1 & \mathbf{t}_1 \otimes \boldsymbol{\sigma}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_2 & \mathbf{t}_2 \otimes \boldsymbol{\sigma}_3 & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{t}_C \otimes \boldsymbol{\sigma}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_C \end{pmatrix} - \mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_2.
\end{aligned}$$

Die Matrix $\mathbf{t}_0 \otimes \boldsymbol{\sigma}_1$ in \mathbf{A}_1 beschreibt die Übergänge von Phase 0 in Phase 1. Sie ergeben sich aus den Raten in den absorbierenden Zustand bzw. in die nächste Phase (Spaltenvektor \mathbf{t}_0) gewichtet mit der Startzustand-Verteilung $\boldsymbol{\sigma}_1$ der Phase 1. Die Rand-Hauptdiagonalmatrizen \mathbf{Q}_0 und \mathbf{Q}_C in \mathbf{Q} resultieren unmittelbar aus \mathbf{A}_1 mit angepassten Hauptdiagonaleinträgen, d.h. $\mathbf{Q}_0 := \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ und $\mathbf{Q}_C := \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_0$.

In [12] werden verschiedene Methoden zur Berechnung der stationären Verteilung von \mathbf{Q} in endlicher QBD-Darstellung vorgestellt. Sie sind teilweise auch auf nicht-homogene QBDs anwendbar, in denen die Nebendiagonalmatrizen \mathbf{A}_0 und \mathbf{A}_2 variieren, vgl. [15]. Dieser Fall tritt beispielsweise ein, wenn eine adaptive Lager-Steuerung modelliert wird, bei der Ein- oder Auslagerungsraten in Abhängigkeit vom Bestand variieren. Alle Verfahren der QBD-Analyse sind iterativ und erfordern eine sukzessive Invertierung von Matrizen in der Dimension der Hauptdiagonalblöcke. Hierdurch wird die Anwendbarkeit limitiert. Verfahren zur QBD-Analyse sind in Software-Werkzeugen wie TELPACK [1] verfügbar und wurden im Kontext des SFBs bereits für Untersuchungen eines Terminals des kombinierten Verkehrs [2] verwendet.

Der zweite Ansatz basiert auf einer stochastischen Petri Netz (SPN) [4] Beschreibung des MMPPs und des Lagers. Das SPN wird mit numerischen Techniken aus der APNN-Toolbox [6] quantitativ analysiert. Im Kontext des SFBs wurden ähnliche Ansätze bereits für die Analyse eines Umschlagterminals im GVZ betrachtet [7, 8]. Das SPN ist in der Abbildung 2 dargestellt. Es besteht im wesentlichen aus 2 Komponenten: dem Phasen-Generator (links, rot eingerahmt) und den Einlagerungsprozessen mit Zugriff aus das Lager (rechts, blau eingerahmt). Die Stellen `Cycle1` bis `Cycle4` sind Schnittstellen zwischen den Komponenten und repräsentieren die aktuelle Phase. Die Dauer einer Phase wird durch die modulierende Markov-Kette bestimmt, deren Beschreibung

in Sub-SPNs repräsentiert durch die Transitionen Delay1 bis Delay4 enthalten ist. Ein Token zirkuliert über die Stellen Cycle1 bis Cycle4 und generiert somit Phasen. Die phasen-abhängigen Ein- und Auslagerungsprozesse werden mit den übereinander angeordneten 4 Teilen innerhalb der rechten Komponente beschrieben. Die (duplizierte) Stelle Store am rechten Rand des SPN-Modells kodiert den aktuellen Lagerbestand.

Das SPN ist wie folgt konfiguriert bzw. parametrisiert: die Dauer einer Phase wird durch eine Erlang-2 Verteilung mit (Gesamt)Rate 0.5 (=2 Zeiteinheiten) modelliert, die Kapazität des Lagers beträgt $C = 30$ Einheiten (initial mit 15 Einheiten belegt), die phasen-abhängigen Raten der Ein- und Auslagerungsprozesse sind wie in Tabelle 1 vorgegeben (durch Transitionen SupplyX und PickupX). Die im zweiten Szenario implementierte Steuerung ist in der Abbildung 2 nicht dargestellt.

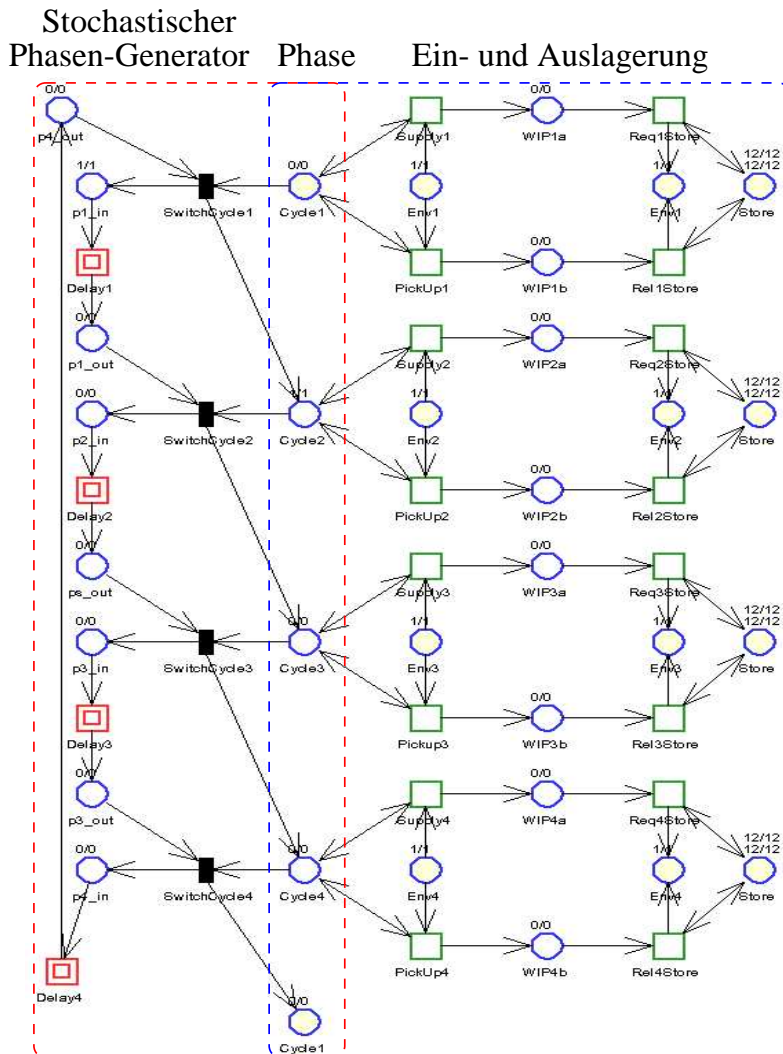


Abbildung 2: SPN-Modell für Phasengenerator (links) und Ein- und Auslagerung von Einheiten (rechts)

3 Ergebnisse der modellbasierten Analyse

Die Zufallsvariable $J \in [0, C]$ beschreibt den stationären Lagerbestand. Nachfolgend wird für das Szenario in Tabelle 1 mit und ohne Steuerung die Ergebnisse für die phasenunabhängigen Deskriptoren mittlerer Bestand $E[J]$ und Verteilung des Bestands $P[J = j]$, sowie für die phasenabhängigen Deskriptoren mittlerer Bestand in Phase i $E[J_i]$ und Verteilung des Bestands in Phase i $P[J_i = j]$ vorgestellt und interpretiert.

1. **Phasenabhängige vs. Phasenunabhängige Deskriptoren:** Der phasenunabhängige Wert $E[J] = 15$, vgl. Tabelle 2, hat geringe Aussagekraft, wenn die Ankunftsdaten wie oben beschrieben variieren. Die phasenabhängigen Werte $E[J_0] \dots E[J_3]$ weichen teilweise deutlich von $E[J]$ ab. Die phasenabhängigen Verteilungsfunktionen des Bestands variieren sowohl im Szenario mit und ohne Steuerung von Phase zu Phase deutlich (vgl. Abbildung 3 und 4) und weichen signifikant von der Verteilungsfunktionen des Bestands gemittelt über alle Phasen (nicht abgebildet) ab. Über alle Phasen gemittelte Deskriptoren besitzen somit nur wenig Aussagekraft. Phasenabhängige Werte vermitteln ein besseres Verständnis der Dynamik des Lagerbestands und sind beispielsweise für die Einführung einer Steuerung hilfreich.

| Steuerung | $E[J]$ | $E[J_0]$ | $E[J_1]$ | $E[J_2]$ | $E[J_3]$ |
|-----------|--------|----------|----------|----------|----------|
| nein | 15.00 | 17.21 | 17.98 | 12.78 | 12.01 |
| ja | 15.00 | 15.92 | 16.43 | 14.08 | 13.56 |

Tabelle 2: Deskriptoren zur Auslastung des Lagers

2. **Lagerbestand mit und ohne adaptive Steuerung:** Im Szenario ohne Steuerung ist $E[J_0] = 17.21 < E[J_1] = 17.98$, d.h. in Phase 1 ist der mittlere Bestand höher als in Phase 0. Deswegen ist eine adaptive Steuerung zur Vermeidung von Lagerengpässen in Phase 1 sinnvoller als in Phase 0. Die Auswahl von Phase 1 ist nicht suggestiv, wenn man nur die Ein- und Auslagerungsraten in Phase 0 und 1 betrachtet, vgl. Tabelle 1, weil in Phase 0 die Einlagerungsrate die Auslagerungsrate übersteigt und dort einen Engpass vermuten läßt. Die gleiche Argumentation führt zur Auswahl von Phase 3 für eine Steuerung. Die Werte in Tabelle 2 zeigen, dass die eingesetzte Steuerung den gewünschten und erwarteten Effekt erzielt: der mittlere Bestand in Phase 0 und 1 sinkt von 17.21 auf 15.92 bzw. von 17.98 auf 16.43 und steigt in Phase 2 und 3. Natürlich kann der Effekt beliebig gesteigert werden, sofern die Steuerung praktisch möglich und vom (Kosten)-Aufwand vertretbar ist. An dieser Stelle wäre eine Kostenrechnung notwendig, die den Mehraufwand für die Steuerung mit Einsparnissen durch weniger Engpässe bewertet. Die Häufigkeit einer aktivierten Steuerung (möglicher Parameter des Kostenmodells) kann durch das SPN ermittelt werden.

3. **Verfügbarkeit von Bestand und Lagerkapazität mit und ohne adaptive Steuerung:** Für den Betrieb des Lagers ist Verfügbarkeit von freier Lagerkapazität und Bestand vorteilhaft und erstrebenswert. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Bestand unter bzw. über einem maximalen bzw. minimalen Schwellwert liegt, ist hierfür eine gebräuchliche logistische Kenngröße, vgl. Tabelle 3. Kritisch ist hier der maximale Schwellwert (=26) in Phase 0 und 1 und der minimale Schwellwert (=4) in Phase 2 und 3. Ohne Steuerung werden die Schwellwerte in etwa 73 Prozent der Betriebszeit eingehalten, mit Steuerung in 89-92 Prozent der Betriebszeit. Auch hier könnte in einem zweiten Schritt ein Kostenmodell zur Beantwortung der Frage verwendet werden, inwieweit Einsparungen, die durch den erzielten Effekt der Steuerung erzielt werden, durch Mehrkosten für die Steuerung kompensiert werden.

| Steuerung | $P[J_0 < 26]$ | $P[J_1 < 26]$ | $P[J_2 > 4]$ | $P[J_3 > 4]$ |
|-----------|---------------|---------------|--------------|--------------|
| nein | 73.52 | 72.11 | 73.52 | 72.11 |
| ja | 89.05 | 92.05 | 89.05 | 92.05 |

Tabelle 3: Deskriptoren zur Auslastung des Lagers

4. **Verteilung des Bestands:** Die Abbildungen 3 und 4 zeigen die phasenabhängige Verteilung des Bestands ohne und mit Steuerung. Das Diagramm links oben in Abbildung 3 zeigt die Verteilung von J_0 . In Phase 0 ist $\lambda_0/\mu_0 = 2.5/2.0 = 1.25$ und eine isolierte Analyse dieser Phase würde eine monoton steigende Kurve ohne Wendepunkt und mit hoher Wahrscheinlichkeit $P[J_0 = 30]$ liefern, vgl. Abbildung 2. Der abweichende Verlauf der Kurve wird durch den Einfluss der Vorgängerphasen verursacht, in denen $\lambda_3/\mu_3 = 2.5/2.5 = 1.0$ bzw. $\lambda_2/\mu_2 = 2.0/2.5 = 0.8 < 1$ gilt und eine isolierte Analyse eine monoton fallende Kurve erzeugt, vgl. Abbildung 2.

4 Ausblick

Der betrachtete Modellierungsansatz zur Bewertung des Lagerbestands basiert auf MMPPs. MMPPs sind in die *ProC/B*-Notation des SFBs integrierbar. Die MMPP-Spezifikation kann mittels der CODE-Prozessketten-Elemente direkt in der Simulations-Sprache HiSlang des Modellierungs- und Analysetools HIT [11] vorgenommen werden. Für eine analytisch-numerische Analyse muß die stochastische Markov-Kette mit globalen Variablen spezifiziert werden. Die Übertragung in das eigentliche analytische Modell ist gegenwärtig nicht möglich.

Die modellbasierte Bewertung des Lagerbestands und einer Steuerung des Lagerbestands ist durch ein Kostenmodell zu erweitern. Ein Kostenmodell ermöglicht eine Bilanzierung der Einsparungen (höhere Verfügbarkeit von Bestand und Platz) und Mehrausgaben (Realisierung einer Steuerung). Ein Kostenmodell ist gegenwärtig nicht verfügbar.

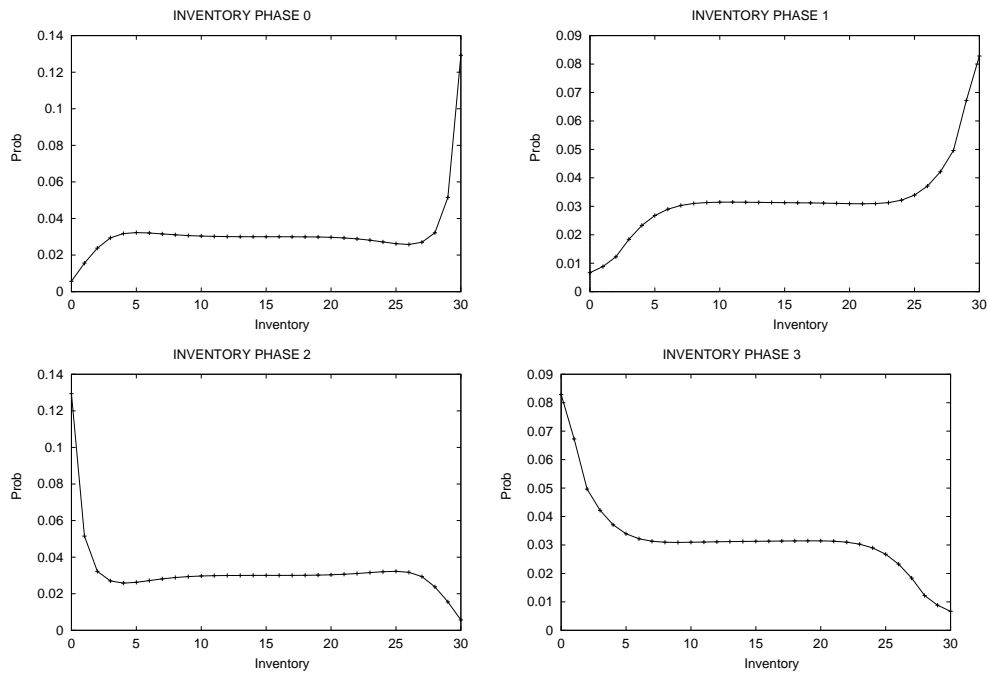


Abbildung 3: Verteilung des Bestands J in Phase i im Lager ($P[J_i = j]$) mit $C=30$

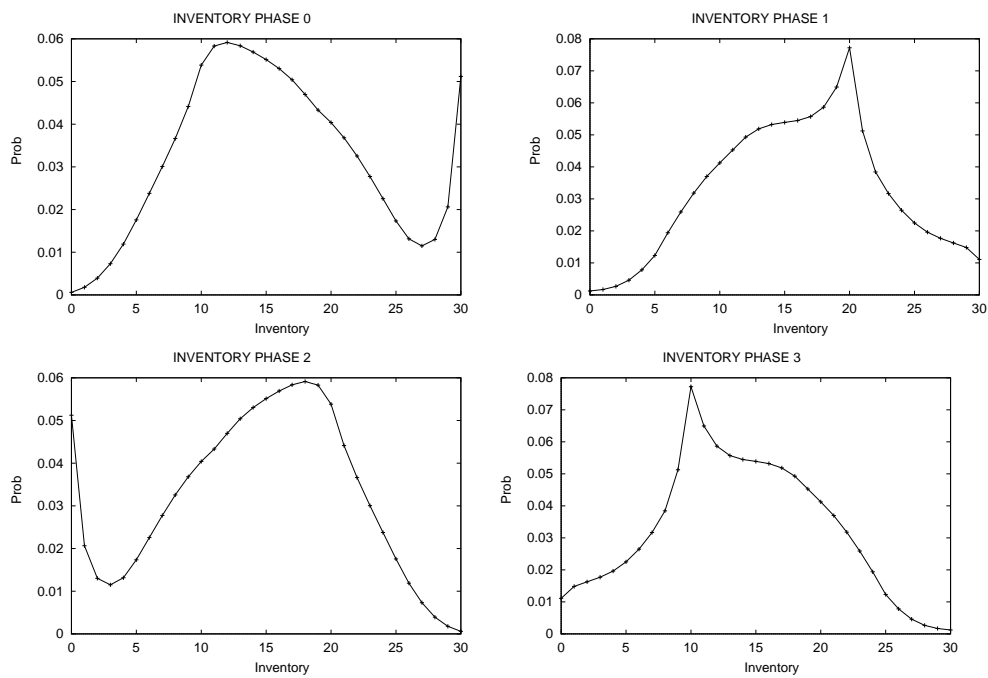


Abbildung 4: Verteilung des Bestands J in Phase i im Lager ($P[J_i = j]$) mit $C=30$ und Steuerung in Phase 1 und 3.

Literatur

- [1] N. Akar, N. C. Oguz, and K. Sohraby. TELPACK: An Advanced Teletraffic Analysis Package. *IEEE Communication Magazine*, 1998.

- [2] M. Arns, F. Bause, M. Fischer, P. Kemper, and H. Tatlitürk. Modellierung und Analyse eines KV-Terminals im Güterverkehrszentrum. *SFB-Bericht Nr. 00003*, 2000.
- [3] F. Bause and H. Beilner. A short note on synchronization in open systems. *Petri Net Newsletter*, 57:9–12, 1999.
- [4] F. Bause and P. Kritzingner. *Stochastic Petri Nets - An Introduction to the Theory*. Vieweg, 1996.
- [5] G. Bolch, S. Greiner, H. Meer de, and K. Trivedi. *Queueing networks and Markov chains*. J. Wiley, 1998.
- [6] P. Buchholz and P. Kemper. Numerical Analysis Techniques in the APNN Toolbox. *Workshop on Formal Methods in Performance Evaluation and Applications*, pages 1–6, 1999.
- [7] M. Fischer and P. Kemper. Modeling and Analysis of a Freight Terminal with Stochastic Petri Nets. *Proc. of 9th IFAC Int. Symposium Control in Transportation Systems 2000*, 2:195–200, 2000.
- [8] M. Fischer, P. Kemper, and Ch. Möller. Markov-Ketten Analyse des Umschlag-Terminals eines Güterverkehrszentrums modelliert mit Petri-Netzen . *DHF*, 4:18–22, 2000.
- [9] W. Fischer and K. Meier-Hellstern. The Markov-modulated Poisson process cookbook. *Performance Evaluation*, 18:149–171, 1992.
- [10] A. Graham. *Kronecker Products and Matrix Calculus with Applications*. Halsted Press, 1981.
- [11] H. Beilner, J. Mäter, C. Wysocki. The Hierarchical Evaluation Tool HIT. Short Papers and Tool Descriptions of the 7th Int. Conf. on Modelling Techniques and Tools for Computer Performance Evaluation, 1994.
- [12] G. Latouche and V. Ramaswami. *Introduction to Matrix Analytic Methods in Stochastic Modeling*. SIAM Series on Statistics and Applied Probability, 1999.
- [13] M. F. Neuts. *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models*. Hopkins Uni. Press, 1981.
- [14] S. M. Ross. *Applied Probability Models with Optimization applications*. Dover Publications, 1992.
- [15] J. Ye and S. Q. Li. Folding Algorithm: A computational method for finite QBD processes with level dependent transitions. *IEEE Trans. Communications Magazine*, 42:625–639, 1994.