



Modèle d'endommagement incrémental en temps pour la prévision de la durée de vie des composites tissés 3D en fatigue cyclique et en fatigue aléatoire

Lise Angrand

► **To cite this version:**

Lise Angrand. Modèle d'endommagement incrémental en temps pour la prévision de la durée de vie des composites tissés 3D en fatigue cyclique et en fatigue aléatoire. Mécanique [physics]. Université Paris-Saclay, 2016. Français. <NNT : 2016SACLN005>. <tel-01300513>

HAL Id: tel-01300513

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01300513>

Submitted on 11 Apr 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NNT : 2016SACLN005

**THESE DE DOCTORAT
DE
L'UNIVERSITE PARIS-SACLAY
PREPAREE A
L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN**

ECOLE DOCTORALE N° 579 Smemag
Sciences mécaniques et énergétiques, matériaux et géosciences
Spécialité de doctorat Mécanique des solides
Par

Melle Lise Angrand

Modèle d'endommagement incrémental en temps
pour la prévision de la durée de vie des composites tissés 3D
en fatigue cyclique et en fatigue aléatoire.

Le 1^{er} Février 2016

Composition du Jury :

M. Bruno Dambrine	Expert composite Safran	Examineur
M. Rodrigue Desmorat	Professeur des Universités ENS Cachan	Directeur de thèse
M. Laurent Gornet	Maître de conférences	Rapporteur
M. Laurent Guillaumat	Professeur des Universités	Examineur
M. Christian Hochard	Professeur des Universités	Rapporteur
Mme. Myriam Kaminski	Ingénieure de recherche, ONERA Châtillon	Encadrante ONERA
Mme. Carole Rakotoarisoa	Ingénieure de recherche, Snecma Villaroche	Encadrante Snecma

REMERCIEMENTS

Cette thèse a été réalisée au LMT Cachan, sous la direction de Rodrigue. Merci à toi pour m'avoir donné la chance de connaître ce monde, celui de la recherche. Ces trois années sont ancrées dans ma mémoire et je n'oublierai pas tous les échanges au bar du LMT mais le plus souvent aux cafés dans Paris. J'espère que notre collaboration ne fait que commencer !

La thèse s'est déroulée sous les encadrements de l'ONERA. Je suis très heureuse d'avoir pu travailler avec des personnes passionnées ... cela m'a rendu encore plus motivée que jamais. Merci donc à Myriam de m'avoir suivi et conseillée ses trois années. Merci à Frédéric, tu m'as bien souvent aidé et au final j'ai pu gagner la bataille contre Matlab ! Je ne me laisserai jamais de venir m'installer près de toi et t'écouter parler, raconter des histoires (souvent drôles) mais aussi et surtout parler composite. J'ai beaucoup appris déjà avec toi. Merci à Jean-François, au fil des mois, tu m'as de plus en plus suivi, soutenu, remis en cause, tu m'as aidé aussi à me surpasser et prendre de plus en plus confiance. Je te remercie pour ça (au moins), ce n'est pas chose facile ... J'en profite pour dire que vous m'avez fait passer le meilleur et le pire entretien de ma vie !! Merci à François-Henry qui m'a fait toucher du bout des doigts ce que sont les probabilités ... je n'ai jamais aimé ça ... mais la thèse m'a fait changer d'avis, merci à toi. Merci à vous tous encore, et j'espère bien qu'on se retrouvera pour d'autres aventures.

Pour en finir avec l'encadrement, je termine par Carole à SNECMA. Je crois que tu es de loin la meilleure encadrante que je pouvais avoir ... forcément, tu connaissais parfaitement le sujet. Ton expérience, tes connaissances et ta réactivité m'ont permis d'avancer encore plus vite et certainement mieux. Merci à toi. Je suis contente qu'on puisse, maintenant se voir dans d'autres conditions, et faire en sorte de faire vivre nos modèles à SNECMA.

Je remercie mes nouveaux collègues et notamment Marion qui m'a permis de travailler comme je le souhaitais sur la thèse.

Je remercie les copains, ils se reconnaîtront. Il y a ceux du labo et il y a les autres. Ce fut un plaisir de se plaindre avec vous, de travailler avec vous, de sortir avec vous, surtout pour faire du sport (avec une en particulier).

Pour finir, je remercie mes proches, qui m'ont toujours soutenu et la famille en générale. Merci à ceux notamment qui m'ont soutenu pour le jour J.

INTRODUCTION

De manière à limiter le réchauffement climatique, des organismes comme le Conseil consultatif pour la recherche aéronautique en Europe (ACARE : Advisory Council for Aviation Research in Europe) imposent des règles de plus en plus restrictives aux constructeurs aéronautiques. Un des objectifs attendus pour l'horizon 2020, est la réduction de 50% des émissions de dioxyde de carbone et du bruit perçu et la réduction de 80% des émissions d'oxydes d'azote (par rapport à l'année 2000). L'idée première est alors de diminuer la masse des aéronefs, notamment en proposant l'utilisation de nouveaux matériaux innovants, comme les composites. En effet, ces matériaux présentent des propriétés mécaniques et thermiques très intéressantes et une densité bien plus faible que celle des matériaux utilisés jusqu'alors.

Le groupe Safran participe évidemment à cette démarche. Ainsi afin de parvenir aux objectifs, un important projet de recherche a été lancé en 2010. Cette thèse s'inscrit alors dans le cadre de ce projet de recherche concerté (PRC Composite), financé par la DGAC (Direction Générale de l'Aviation Civile) mettant en relation les filiales du groupe SAFRAN et l'Onera ainsi que des institutions de recherche (universités, laboratoires de recherche publics et privés). Ce programme a pour finalité d'établir une base de connaissance approfondie sur les matériaux composites à matrice organique (CMO) et à matrice céramique (CMC). Ces matériaux innovants doivent remplacer d'autres matériaux à divers endroits des appareils, dans les turboréacteurs notamment. Ainsi, les diverses études de ce projet national doivent avant tout contribuer à apporter au groupe Safran les modèles nécessaires à la prévision numérique de fonctionnement/comportement de pièces en matériaux composites CMO et CMC. Nous retrouvons notamment ce type de matériaux dans le moteur LEAP. (Figure 1a). Ce nouveau moteur particulièrement économe doit équiper les futurs avions A320Neo, B737Max ou l'avion chinois C919 COMAC (Figure 1c,d,e). Ces matériaux composites sont également utilisés pour les contrefiches du train d'atterrissage de Messier-Bugatti-Dowty (MBD) (Figure 1b).



Figure 1 : a) moteur LEAP et b) essai sur contrefiche du train d'atterrissage (MBD), c) A320 neo Airbus, d) C919 Comac, e) 737 max Boeing

Pour cela cette thèse se focalise sur l'étude du comportement du composite CMO tissé 3D, lequel remplacera le titane utilisé dans la conception des aubes FAN du turboréacteur nouvelle génération LEAP. Le composite CMO tissé 3D s'est avéré une solution avantageuse en terme de résistance et tenue mécanique pour des chargements mécaniques (statique, fatigue, choc) et tout en allégeant la structure, puisque le gain de masse par rapport aux anciens composants atteint

près de 500 Kg par avion. La consommation de carburant spécifique du LEAP est annoncée de 16% inférieure à celle du CFM56.

Un composite est par définition un matériau hétérogène composé d'un renfort (dans notre cas des fibres longues continues de carbone) et d'un liant (la matrice). Il existe ainsi une grande variété de composites. On distingue par exemple les composites à matrice organique (CMO) limités pour des applications à températures modérées, les composites à matrice métallique (CMM) pour les applications en température modérée (400-800°C) et les composites à matrice céramique pour les très hautes températures. La nature du renfort peut-être diverse des fibres de verre aux fibres de carbone en passant par les fibres naturelles comme le lin ou le chanvre. La fibre de carbone de par ces performances mécaniques exceptionnelles est privilégiée dans la très grande majorité des applications aéronautiques.

Au-delà du choix du renfort et de la matrice, l'organisation des fibres dans le composite est un élément très différentiel, en effet nous distinguons en particulier les composites stratifiés et les composites tissés. Les matériaux composites stratifiés unidirectionnels (UD) sont les plus utilisés dans l'aéronautique. Ils sont une superposition de plusieurs plis, eux-mêmes constitués de fibres longues toutes orientées dans une même direction. Un inconvénient majeur des composites stratifiés d'UD est sa faible tolérance à l'impact due à la décohésion entre plis appelée délaminage. Cet endommagement, qui peut apparaître lors de petits chocs par exemple, est critique pour les composites stratifiés et entraîne rapidement une perte de performances de la structure. En revanche, le composite tissé 3D [Mouritz et al. 1999], de par sa structure tridimensionnelle, améliore la résistance au délaminage. L'agencement des fibres dans ces composites est choisi en fonction des performances recherchées et permet de simplifier la fabrication des pièces, même pour des géométries complexes. Ces fibres – à l'échelle microscopique – sont regroupées pour former des torons de fibres – à l'échelle mésoscopique. A l'échelle macroscopique, le composite tissé tridimensionnel consiste en l'entrelacement de deux ou trois réseaux de torons de fibres. Le premier réseau de torons correspond aux torons sens chaîne ; les torons sens trame constitue le second réseau orienté à 90° par rapport aux torons sens chaîne. L'entrelacement de ces deux réseaux permet de limiter le phénomène de délaminage. De plus, dans une volonté d'améliorer les propriétés hors-plan (dans la troisième direction), il est possible d'ajouter un troisième réseau de torons dans la troisième direction (Figure 2 (a)) ou bien d'entrelacer un des deux réseaux dans l'épaisseur (Figure 2 (b)), on parle alors de composite 3D.

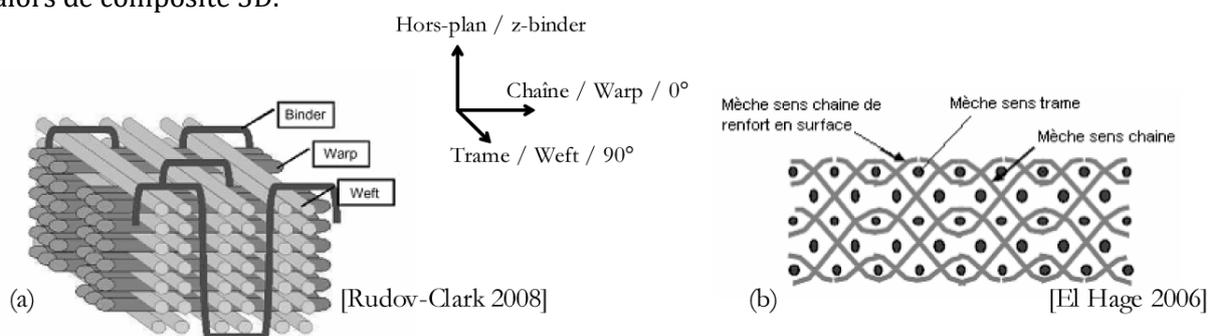


Figure 2 : Schématisation de composites tissés tridimensionnels (a) avec trois réseaux de torons et (b) avec seulement deux réseaux de torons

Le composite à matrice organique tissé étudié est fait d'une matrice époxy et de fibres de carbone (ou torons de fibres de carbone), il est déséquilibré. Les CMO ont la particularité de présenter des mécanismes d'endommagement orientés par la microstructure et non par le chargement, du fait du fort contraste de propriétés entre les constituants. Avant d'aborder la notion de mécanisme d'endommagement, il faut d'abord spécifier l'échelle à laquelle nous avons décidé de travailler. Trois échelles peuvent être distinguées (Figure 3)

1. l'échelle microscopique (échelle des constituants μm) est celle de la fibre distinguée de la matrice et aussi des interfaces et interphases éventuelles.

2. l'échelle mésoscopique (échelle du tissu mm) est l'entrelacement des réseaux de torons de fibres dans la matrice où l'on distingue la matrice des fibres regroupées pour former des torons de fibres considérés comme matériau homogène.

3. l'échelle macroscopique (échelle de la structure / de l'éprouvette). A cette échelle, nous ne distinguons plus de différences entre les torons et la matrice, le matériau est considéré comme homogène.

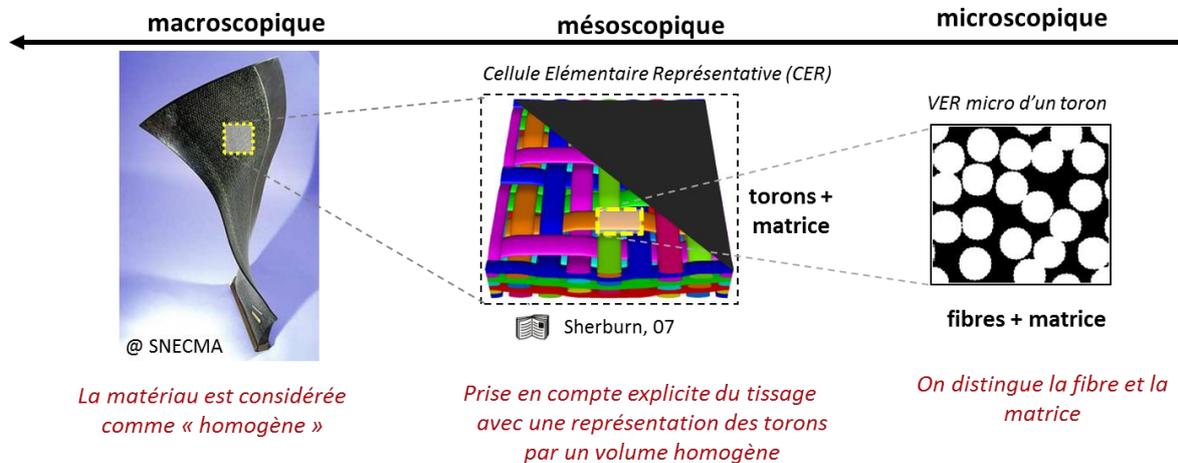


Figure 3 : Les trois échelles du composite [Grail, 2013]

Les directions de ces réseaux de fibres sont les directions matériaux, elles sont au nombre de trois. Les torons sens chaîne (direction 1), les torons sens trame (direction 2) orientés à 90° par rapport aux torons sens chaîne et la direction 3 correspond à l'épaisseur du matériau (Figure 4). Pour les composites 3D, l'entrelacement de ce réseau vient considérablement améliorer les propriétés Hors-Plan du matériau et diminuer les effets de délaminage (comparé à des composites ne comportant que deux réseaux de torons de fibres ou encore les composites stratifiés).

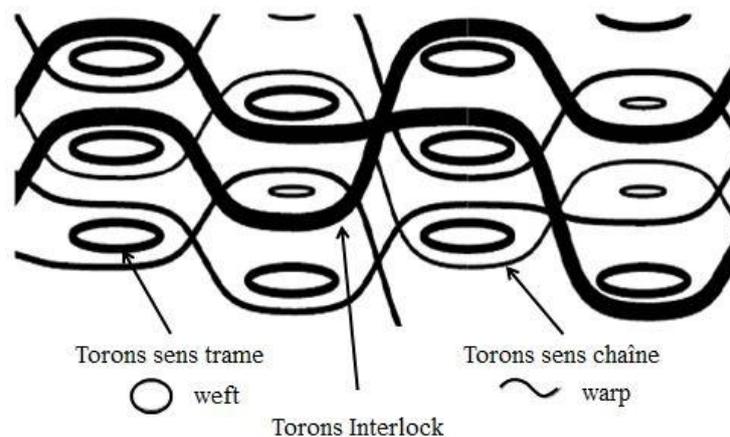


Figure 4 : Représentation schématique du composite CMO tissé 3D [De Luycker, 2009]

Un lien peut être fait entre les mécanismes à ces différentes échelles. D'une manière générale, et particulièrement en fatigue, lorsque le matériau est sollicité à un niveau pas trop élevé pendant un certain nombre de cycles, les défauts (ou micro-défauts) apparaissent petit à petit dans le matériau ; on est à l'échelle microscopique. Ces défauts se multiplient et se propagent jusqu'à coalescer et être identifiable à l'échelle mésoscopique. Ce sont les mêmes mécanismes d'endommagement, mais qui se sont propagés pour devenir visible à l'échelle mésoscopique ($> 100 \mu m$). Nous avons vu que ces mécanismes sont orientés par la microstructure (dû aux différences de propriétés des constituants du composite). Nous pouvons alors distinguer à l'échelle mésoscopique trois mécanismes d'endommagement [Schneider, 2011 ; Henry, 2013], les mécanismes de dégradation sens chaîne (fissurations matricielles ou fissures intra-torons

transverses) décrits par une variable d'endommagement que nous nommerons d_1 , les mécanismes sens trame (fissurations matricielles ou fissures intra-torons transverses) décrits par la variable d'endommagement d_2 et ceux Hors-Plan (décohésions inter-torons) décrits par la variable d'endommagement d_3 (Figure 5 et Figure 6). Néanmoins, le matériau étant assez complexe notamment à cause de la complexité du tissage chaîne/trame. il intervient un autre mécanisme qui est la décohésion inter torons que nous appellerons mécanisme Plan – Hors Plan. Ces décohésions peuvent se créer lorsque le matériau est sollicité sens chaîne ou trame (traction ou compression par exemple), les torons et la matrice peuvent se « désolidariser » dans la direction 3. Enfin, tous ces mécanismes peuvent amener à la ruine notamment par rupture de fibres qui apparaissent dans les torons longitudinaux à la direction de la sollicitation et si elles coalescent, elles peuvent provoquer la rupture de toron.

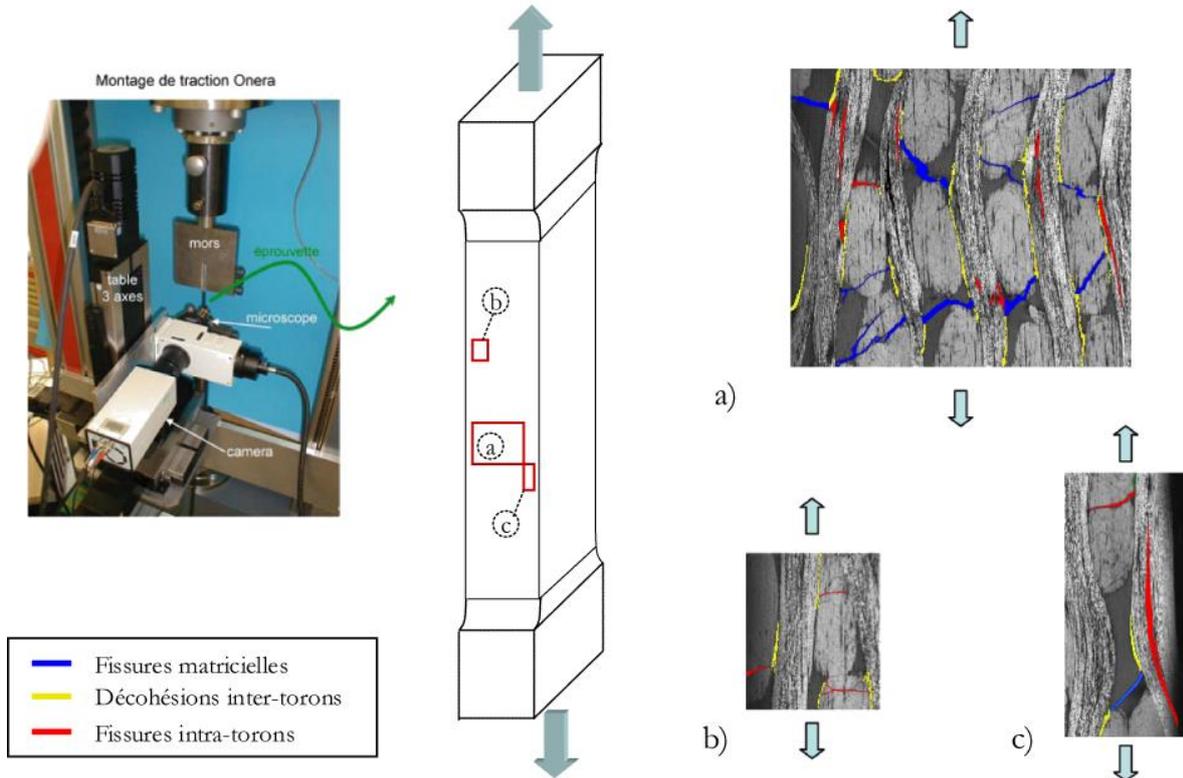


Figure 5 : Mécanismes d'endommagement observés sous charge pour le CMO tissé 3D Snecma sollicité en traction statique à 64% de la résistance statique : (a) fissures matricielles trapèze et décohésion hors-plan, (b) fissures intra-torons transverses et (c) fissures intra-toron longitudinales [Rakotoarisoa, 2013]

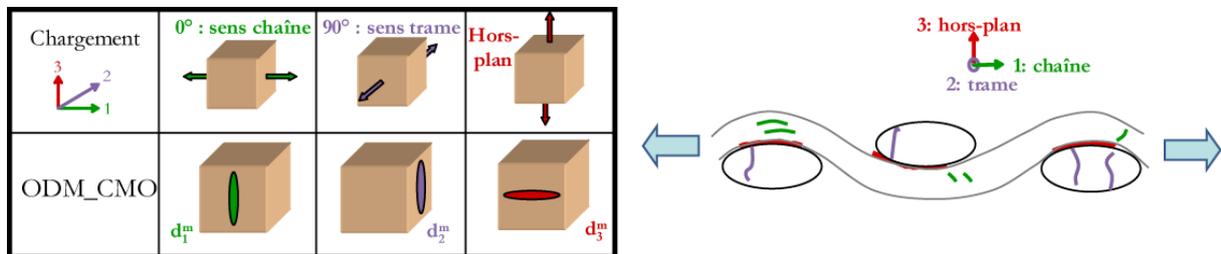


Figure 6 : Représentation des variables d'endommagement matricielles utilisées dans ODM_CMO [Rakotoarisoa, 2013]

Il a été observé [Rakotoarisoa, 2013, Henry, 2013] que ce sont ces mêmes mécanismes qui apparaissent aussi pour les chargements de fatigue (Figure 7).

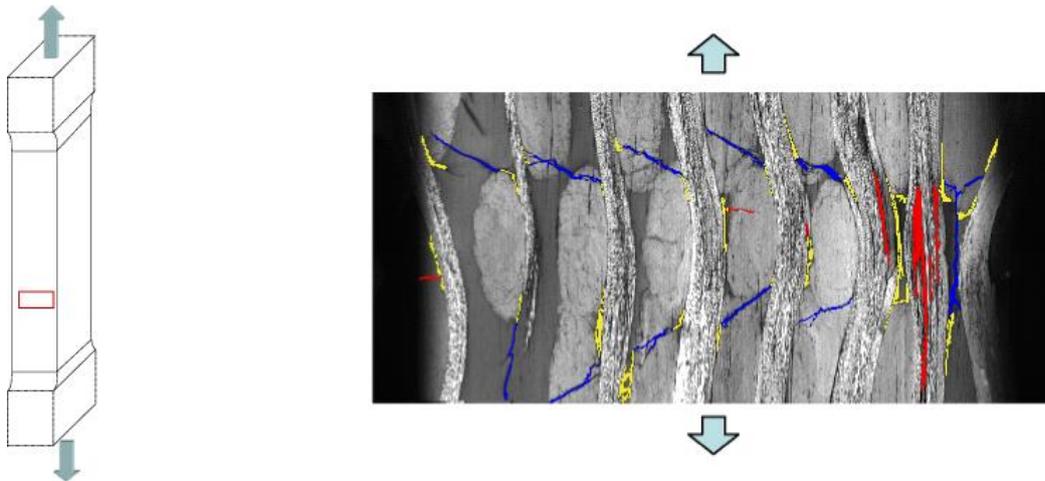


Figure 7 : Mécanismes d'endommagement observés dans le composite tissé 3D Snecma sous chargement de fatigue après 1000 cycles à 64% de résistance statique ($R_{\sigma}=0.1$) [Rakotoarisoa, 2013]

Le présent travail s'intéresse aux composites CMO tissés 3D soumis à des chargements de fatigue mécanique. L'objectif est de proposer un modèle d'endommagement afin de prévoir la durée de vie du matériau, et ainsi de l'aube FAN. Les résultats d'essais présentés dans ce manuscrit proviennent de travaux antérieurs ou bien d'études menées chez l'industriel Snecma. En collaboration directe avec Snecma et l'ONERA, les travaux présentés se sont basés essentiellement sur des travaux réalisés à l'ONERA notamment la thèse de Carole Rakotoarisoa [Rakotoarisoa, 2013] et à l'UTC-Compiègne [Henry, 2013]. Depuis plusieurs années, les matériaux CMO et CMC font l'objet d'études de plus en plus poussées, et qui ont menées à l'établissement de modèles d'endommagement, pour les CMC [Maire 94 ; Marcin, 2010 ; Hémon 2013], pour les CMO [Maire 94, Laurin 2005, Marcin 2010, Rakotoarisoa 2013]. Les premiers modèles d'endommagement pour les CMO proposés par l'ONERA (modèles appelés ODM-CMO) permettaient de modéliser le comportement du matériau pour les chargements statiques. Il a été étendu afin de modéliser le comportement pour les chargements de fatigue mécanique par [Rakotoarisoa 2013].

Longtemps les composites ont été considérés comme des matériaux particulièrement peu sensible à la fatigue comme l'on démontré un certain nombre d'études [Reifsnider et al., 1982 ; Subramanian et al., 1995]. Mais la tendance actuelle est d'utiliser les composites avec des niveaux de sollicitations de plus en plus élevés, pas forcément cycliques, et la problématique de la fatigue des composites doit être revisitée en particulier pour le domaine des « machines tournantes » (éoliennes, turbomachines,...). De ce fait, le comportement en fatigue des composites, et plus particulièrement celui des composites tissés reste encore mal connu. Pour pallier ce problème, des facteurs de sécurité souvent importants sont utilisés dans le dimensionnement pour garantir la sûreté des pièces. C'est pourquoi l'étude de la tenue en fatigue des matériaux composites tissés, et plus particulièrement des composites tissés à matrice organique (CMO), devient une problématique majeure pour certains industriels.

Le but souvent recherché est de **prévoir la durée de vie** du matériau. Pour des chargements de fatigue, la durée de vie est définie comme étant le nombre de cycles que peut subir le matériau avant de rompre. On parle de nombre de cycles à rupture (N_R). Un chargement de fatigue périodique en contrainte est défini grâce à une contrainte minimale, une contrainte maximale, et un rapport de charge (en contrainte) tel que $R_{\sigma} = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{Max}}$. Est appelé domaine LCF (Low Cycle Fatigue), les chargements pour lesquels la contrainte maximale est élevée et impliquent un nombre de cycles à rupture inférieur à 10^4 cycles. Inversement, est appelé domaine HCF, les

chargements pour lesquels la contrainte maximale est relativement faible et impliquent un grand nombre de cycles à rupture ($N_R > 10^4$ cycles). Suivant les caractéristiques du chargement, la durée de vie se trouve plus ou moins prolongée.

Les résultats sont représentés sur les **courbes de Wöhler** (encore appelées courbes de fatigue ou encore courbes S-N « Stress vs Number of cycles ») (Figure 8). La courbe de Wöhler est le plus ancien diagramme qui permette de visualiser la tenue de la pièce ou des matériaux dans le domaine de fatigue. Cette courbe définit une relation entre la contrainte appliquée (contrainte alternée $\sigma_a = \frac{1}{2}(\sigma_{Max} - \sigma_{min})$ ou contrainte maximale σ_{Max}) et le nombre de cycles à rupture N_R . Il existe plusieurs expressions analytiques [Basquin, 1910 ; Strohmeyer, 1914 ; Bastenaire, 1972] de la courbe de Wöhler. Il est aussi possible de construire le diagramme de Wöhler de façon numérique, grâce à un modèle d'endommagement associé à un critère de rupture. Chaque calcul correspond à un point sur ce diagramme. Pour avoir une représentation assez complète du diagramme, il faut alors lancer un panel de calculs assez conséquent. Suivant le modèle utilisé (en cycles ou temporel, caractéristique sur laquelle nous reviendrons), ce travail sera plus ou moins long, contrairement à une méthode analytique qui est très rapide, mais uniaxiale et initialement dédiée aux chargements cycliques.

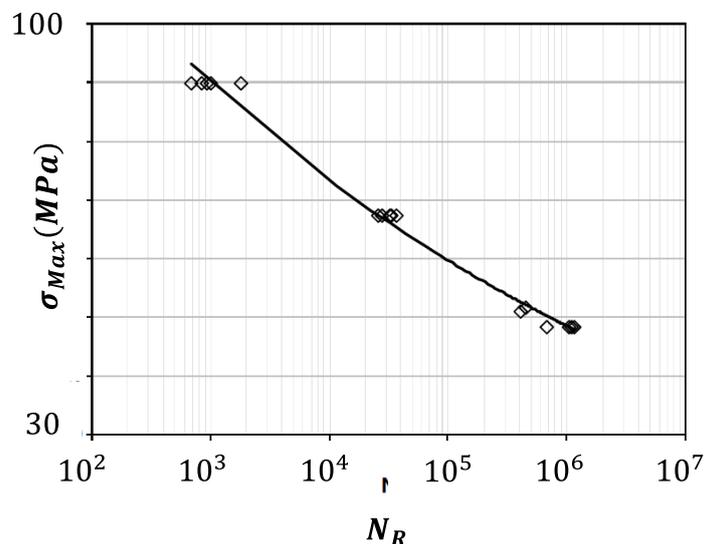


Figure 8 : Exemple de courbe de Wöhler pour un composite Glass/Epoxy [± 45]s pour un rapport de charge $R_\sigma = 0.1$ [Philippidis et Passipoularidis, 2007]

Pour les composites, une autre représentation assez classiquement utilisée est de visualiser les variations des propriétés du matériau en fonction du nombre de cycles. On peut ainsi suivre l'évolution des propriétés élastiques (en général les variations du module d'Young) comme présenté sur la Figure 9.

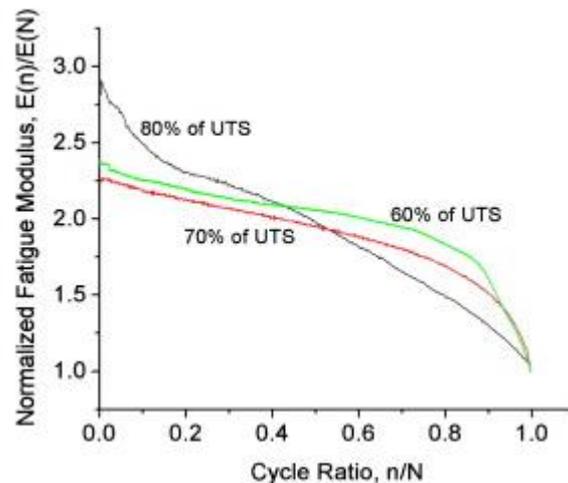


Figure 9 : Exemple de courbe évolution du module d'Young sécant en fonction du nombre de cycle (N/N_R) d'un composite tressé carbone/epoxy [Jitendra et al., 2008]

Il est possible aussi de représenter l'évolution de la résistance résiduelle après N cycles (« courbe de résistance résiduelle ») [Halpin et al., 1973 ; Reifsnider et Stinchcomb, 1986 ; Reifsnider et Case, 2003 ; Diao et al., 1995 ; Diao et al., 1999 ; Diao et al., 2003].

Un autre moyen utilisé pour le dimensionnement en fatigue est le **diagramme de Haigh** (et diagramme de Goodman). Prenons le cas d'une pièce soumise à un état de contrainte uniaxial variant de manière sinusoïdale avec une amplitude constante, la durée de vie de la pièce, exprimée en nombre de cycles à rupture N_R , dépend des niveaux de contrainte, qui peuvent s'exprimer de manière équivalente par :

1. les valeurs extrêmes σ_{min} et σ_{Max} ;
2. la valeur moyenne $\bar{\sigma}$ et l'amplitude de contrainte σ_a ;
3. la valeur moyenne $\bar{\sigma}$ et l'étendue de contrainte $\Delta\sigma$;
4. le rapport de charge (en contrainte) R_σ et l'amplitude de contrainte σ_a .

Comme les durées de vie de certains matériaux sont plus au moins sensibles au rapport de charge, le diagramme de Haigh qui représente, à iso-durée de vie, l'amplitude de contrainte en fonction de la contrainte moyenne, est souvent utilisé en bureau d'études. Pour les matériaux métalliques, il a été proposé différentes modélisations de diagramme de Haigh (droite de Goodman ou de Soderberg, courbe de Gerber...). La forme obtenue pour les CMO diffère de celle des matériaux métalliques [Lemaitre et Chaboche, 1985 ; Lemaitre, 1992 ; Lemaitre et Doghi, 1994] Nous proposerons de déterminer les diagrammes de Wöhler et de Haigh, de façon analytique, à partir des équations des lois « multi-mécanisme » d'endommagement de fatigue proposée au Chapitre III.

Les premières études trouvées dans la littérature sur la modélisation de la fatigue des composites ont consisté à transposer les connaissances acquises sur les matériaux métalliques. Pour modéliser l'endommagement, deux approches existent : les modèles écrits « en cycles » [Chaboche 1974 ou Chaudonneret 1993 par exemple] et les modèles « incrémentaux en temps » que nous appellerons dans la suite du manuscrit modèles dits « temporels » [Lemaitre et al. 1999 ; Desmorat 2000]. Les modèles « en cycles » sont généralement écrits en fonction des amplitudes et des valeurs moyennes par cycle. L'approche « en cycles » permet, à partir de lois relativement simples, de couvrir tout le domaine de durée de vie, depuis les faibles nombres de cycles à rupture (inférieurs à 10^3 cycles) jusqu'aux très grands nombres de cycles à rupture (supérieurs à 10^8 cycles) voire jusqu'aux durées de vie illimitées. Avec l'approche dite « temporelle », les phénomènes d'endommagement sont plus richement décrits et il est possible de s'affranchir de la notion de cycles permettant notamment de tenir compte des chargements (quasi-)aléatoires. Les modèles écrivant les lois d'évolution de l'endommagement sous la forme

d'une dérivée temporelle, $\dot{D} = \frac{dD}{dt} = \dots$ sont alors exprimés de manière temporelle par opposition aux modèles « en cycles » exprimés comme un incrément d'endommagement par cycle $\frac{\delta D}{\delta N} = \dots$. En ce qui concerne les chargements, ceux-ci peuvent être définis de manière plus précise pour les modèles temporels puisque le chargement est décrit comme une fonction quelconque du temps tandis que pour les modèles en cycles le chargement est défini par blocs de cycles similaires qui se répètent. En contrepartie, les modèles temporels peuvent générer des coûts de calcul **a priori** beaucoup plus importants que les modèles « en cycles ». Ces deux types de modélisation ont été appliqués sur les matériaux métalliques, sur les bétons et plus récemment sur les composites [*Hochard, 2006 ; Rakotoarisoa, 2013*] pour les lois en cycles et [*Gornet et Ijaz, 2010*] pour les lois temporelles.

Dans la littérature, nous pouvons trouver divers types de modèle de fatigue, appliqués à l'étude du comportement des composites [*Van Paepegem et Degrieck, 2001*]. Il y a les modèles empiriques basés uniquement sur les résultats expérimentaux. Ce sont les plus simples à mettre en œuvre. Il y a les approches appelées parfois phénoménologiques qui sont basées sur l'évolution de la résistance résiduelle ou bien de la rigidité résiduelle. Enfin, il y a les modèles progressifs basés sur la mécanique de l'endommagement et qui permettent l'étude du comportement du matériau grâce au suivi de l'évolution de l'endommagement. Ces deux derniers types de modélisation demandent d'avoir des techniques expérimentales poussées pour l'étude et le suivi des propriétés mécaniques du matériau.

Concernant les modèles d'endommagement proposés dans ces travaux, il s'agit d'une extension de ceux établis à l'Onera (modèles ODM-CMO). Ce sont des modèles progressifs basés sur l'étude des mécanismes d'endommagement du composite tissé 3D, présentés précédemment. Ils permettent la modélisation fine du suivi de l'endommagement ainsi que les autres propriétés, telles que la rigidité ou encore les performances résiduelles.

Le modèle d'endommagement ODM-CMO, proposé par [*Rakotoarisoa, 2013*] est un modèle qui utilise des lois d'évolution d'endommagement en cycles $\frac{\delta d_k}{\delta N} = \dots$ pour chaque variable d'endommagement considérée d_k . Pour ce type de modèle, l'état d'endommagement dans la pièce est calculé à chaque fin de cycle de fatigue. A l'opposé, l'évolution de l'endommagement durant des sollicitations de fatigue peut aussi être calculée de façon continue, au cours du temps. C'est le cas des modèles d'endommagement temporels $\dot{d}_k = \dots$ (écrits en taux ou vitesse d'endommagement). C'est ce dernier type de modèle qui sera proposé dans ces travaux. L'idée étant de proposer un modèle d'endommagement tout à fait complémentaire, voire équivalent pour quelques cas particuliers de chargements, au modèle d'endommagement ODM-CMO. Le modèle temporel permet de naturellement prendre en compte des sollicitations complexes, spectrales ou aléatoires, voire anisothermes [*Lemaitre, 1992 ; Otin, 2007*]. Ce que ne peut pas faire un modèle en cycles.

Le premier chapitre à caractère bibliographique permet de présenter les notions importantes à la bonne compréhension du modèle d'endommagement construit dans le présent manuscrit de thèse. Quelques modèles d'endommagement sont présentés, pour les sollicitations monotones et de fatigue (I. 1 et I. 2). Les modèles temporels présentés en (0) se focalisent sur l'étude de différents matériaux (métaux, béton, caoutchouc ou encore les composites stratifiés). Nous faisons un rapide état de l'art sur les critères de rupture en (0).

Le Chapitre II consiste à introduire la notion de durée de vie au travers d'une étude bibliographique sur les outils d'aide au dimensionnement (II. 1) puis à présenter une méthode dite « ingénieur » de construction des outils de dimensionnement à la fatigue, à savoir les diagrammes de Haigh, les courbes de Wöhler et les courbes maîtresses. Ces méthodes sont empiriques, basées sur l'étude des résultats expérimentaux. La forme proposée notamment pour le diagramme de Haigh est purement phénoménologique, mais elle fonctionne relativement bien pour notre matériau, des études complémentaires (notamment des essais à différents rapports de charge) doivent être menées pour valider notre proposition

A partir du modèle d'endommagement ODM-CMO, nous verrons comment obtenir un modèle d'endommagement temporel, complémentaire et rendu équivalent à une nouvelle version d'ODM-CMO (Chapitre III).

L'étude de la fatigue nécessite, nous l'avons vu, de prendre en compte des notions importantes du chargement, qui influent sur les évolutions de l'endommagement dans le matériau et donc sur la durée de vie de celui-ci. Une des plus importantes et des plus difficiles à introduire dans un modèle temporel est l'effet de contrainte moyenne. Celui-ci n'apparaît pas de façon instantanée dans la loi temporelle. Le Chapitre IV présente la solution retenue qui permet au modèle d'endommagement proposé de prendre en considération l'effet de contrainte moyenne.

La mise en œuvre numérique et notamment les stratégies étudiées pour gagner en coût de temps de calcul sont présentées dans le Chapitre V.

Le modèle d'endommagement utilise des paramètres qu'il faut identifier. Nous verrons qu'il est judicieux de faire une distinction entre les paramètres qui interviennent lors de chargements monotones et d'autres pour les chargements de fatigue. Le Chapitre VI suggère des protocoles d'identification en particulier pour les paramètres de fatigue. L'identification se fait en deux étapes majeures, la première basée sur une approche simplifiée uniaxiale du modèle 3D et l'utilisation des diagrammes de Haigh et des courbes de Wöhler, la seconde étape consiste au réajustement d'un nombre très limité de paramètres pour obtenir une identification complète du modèle 3D. Dans ce chapitre, il est question aussi d'identification en température dans le but de proposer un modèle d'endommagement anisotherme et la possibilité ainsi de prendre en compte des chargements thermomécaniques complexes.

Le modèle d'endommagement est rendu probabiliste au Chapitre VII. Une première approche, pragmatique, en fatigue à grands nombres de cycles est proposée, faisant suite aux travaux de [[Lemaitre et Desmorat, 2005](#)] et de [[Barbier, 2009](#)]. Un paramètre du modèle précédent, déterministe, prend le statut de variable aléatoire, il s'agit du seuil d'endommagement de fatigue (en déformation) $\varepsilon_{0(1)}^f$ délimitant le domaine illimité.

Enfin le Chapitre VIII consiste à présenter quelques applications du modèle d'endommagement temporel, pour des chargements de fatigue tant cycliques simples que pour des chargements plus complexes, aléatoires notamment, afin d'illustrer les capacités de ce type de modèle d'endommagement.

TABLE DES MATIERES

Chapitre I BIBLIOGRAPHIE	17
I. 1. Modèle d'endommagement pour les sollicitations monotones	18
I. 1. 1. Modèles à variables d'effet	18
I. 1. 2. Modèles à densité de fissures	20
I. 2. Extension des modèles statiques en des modèles de fatigue en cycles	20
I. 2. 1. Les modèles empiriques	20
I. 2. 2. Les modèles phénoménologiques	22
I. 2. 3. Les modèles progressifs	24
I. 2. 4. Le modèle progressif à variables d'effet de l'Onera : ODM-CMO	25
I. 3. Lois d'endommagement temporelles $D = \dots$ de la littérature	30
I. 4. Critères de ruptures	33
I. 4. 1. Les divers critères de rupture macroscopiques	33
I. 4. 2. Le critère de rupture progressive des torons utilisé dans ODM-CMO	33
I. 5. Conclusion	35
Chapitre II PROPOSITION D'UNE METHODE « INGENIEUR » DE CONSTRUCTION DES DIAGRAMMES DE HAIGH ET DES COURBES DE WOHLER.....	37
II. 1. Outils usuels pour le dimensionnement aux chargements de fatigue	38
II. 1. 1. Les courbes de Wöhler	38
II. 1. 2. Diagramme de Haigh	40
II. 2. Utilisation « industrielle » des diagrammes de Haigh et des courbes de Wöhler	48
II. 2. 1. Utilisation des courbes de Wöhler faite par Snecma	48
II. 2. 2. Utilisation des diagrammes de Haigh à Snecma	48
II. 3. Proposition d'une forme pour la courbe de Wöhler et le diagramme de Haigh	49
II. 3. 1. Forme des courbes de Wöhler.....	49
II. 3. 2. Forme des diagrammes de Haigh.....	51
II. 4. Proposition d'une méthode analytique dite « ingénieur » de construction des diagrammes de Haigh	57
II. 5. Reconstruction des courbes de Wöhler à partir du diagramme de Haigh et validation de la démarche.....	62
II. 6. Construction d'une courbe maîtresse	64
II. 7. Conclusion.....	65
Chapitre III PREMIERE LOI D'EVOLUTION TEMPORELLE DE L'ENDOMMAGEMENT POUR LES CMO TISSES 3D	67
III. 1. Loi d'endommagement temporelle issue d'une loi d'endommagement cyclique	68
III. 2. Loi d'endommagement temporelle pour les CMO tissés 3D	71
III. 2. 1. Loi d'endommagement temporelle : contribution « monotone».....	71
III. 2. 2. Loi d'endommagement complète : contribution « monotone» et contribution «de fatigue», avec une variable d'endommagement par mécanisme	73
III. 3. Critère d'endommagement critique $d = dc$ comme indicateur de rupture pour le CMO tissé 3D.....	77
III. 4. Conclusion.....	82
Chapitre IV LOI D'EVOLUTION TEMPORELLE DE L'ENDOMMAGEMENT AVEC EFFET DE CONTRAINTE MOYENNE.....	85
IV. 1. Proposition d'une moyenne évolutive dépendante de toute l'histoire du chargement....	86
IV. 1. 1. Définition	86
IV. 1. 2. Schéma numérique	88
IV. 2. Prise en compte de l'effet de contrainte moyenne dans le modèle temporel ODM pour les CMO tissés	89
IV. 3. Illustration de l'effet de contrainte moyenne pour les CMO tissés 3D	90
IV. 3. 1. Chargements de fatigue cycliques à différents rapports de charge.....	90

IV. 3. 2. Chargements aléatoires à différentes contraintes moyennes.....	92
IV. 4. Conclusion	92
Chapitre V MODELE ODM COMPLET : MISE EN ŒUVRE ET STRATEGIE NUMERIQUE	95
V. 1. Stratégie numérique établie	96
V. 2. Modification de la loi d'évolution des déformations résiduelles dans le but de satisfaire la stratégie numérique	97
V. 2. 1. Déformations résiduelles du modèle ODM-CMO	97
V. 2. 2. Déformations résiduelles pour le modèle ODM	97
V. 3. Bilan : modèle ODM complet.....	101
V. 4. Mise en œuvre numérique : Implantation et Algorithmie.....	102
V. 4. 1. Schéma numérique général du modèle 3D.....	102
V. 4. 2. Résolution locale de la loi de comportement et calcul de la matrice Jacobienne.....	104
V. 4. 3. Résolution globale de la loi de comportement et résolution de la matrice tangente cohérente	108
V. 5. Conclusion.....	109
Chapitre VI DIAGRAMMES DE HAIGH ET COURBES DE WOHLER – CONSTRUCTION PAR LE MODELE ODM VIA UNE APPROCHE SIMPLIFIEE – IDENTIFICATION/RECALAGE 3D.....	111
VI. 1. Construction « analytique » des courbes de Wöhler et des diagrammes de Haigh « asymptotiques » à partir d'une approche uniaxiale simplifiée du modèle 3D.....	112
VI. 1. 1. Approche simplifiée du modèle d'endommagement 3D.....	112
VI. 1. 2. Diagramme de Haigh « asymptotique » - choix de sa forme.....	113
VI. 1. 3. Calcul des courbes de Wöhler	117
VI. 2. Démarche d'identification des paramètres de fatigue à partir de l'approche simplifiée	119
VI. 2. 1. Procédure générale de l'identification des paramètres de fatigue	119
VI. 2. 2. Compromis : le diagramme de Haigh sens chaîne conditionne celui sens trame ...	124
VI. 3. Identification en température.....	125
VI. 4. Identification « anisotherme »	127
VI. 5. Reconstruction des diagrammes de Haigh et des courbes de Wöhler « anisothermes » – construction de courbes maîtresses	128
VI. 5. 1. Diagramme de Haigh.....	128
VI. 5. 2. Courbes de Wöhler	129
VI. 6. Modèle 3D – Réajustement/Recalage des paramètres	130
VI. 6. 1. Démarche générale d'identification des paramètres du modèle 3D.....	130
VI. 6. 2. Recalage étape par étape.....	132
VI. 7. Conclusion	133
Chapitre VII MODELE D'ENDOMMAGEMENT A LIMITE DE FATIGUE PROBABILISTE.....	135
VII. 1. Démarche probabiliste	136
VII. 2. Loi de Weibull comme loi de probabilité	137
VII. 3. Estimation des paramètres probabilistes.....	138
VII. 3. 1. Méthode du maximum de vraisemblance.....	138
VII. 4. Seuil d'endommagement de fatigue le plus vraisemblable	142
VII. 5. Conclusion.....	145
Chapitre VIII APPLICATIONS : CHARGEMENTS DE FATIGUE CYCLIQUES ET ALEATOIRES	147
VIII. 1. Prise en compte de la montée en charge lors d'essais cycliques à amplitude constante	148
VIII. 2. Applications aux chargements complexes uniaxiaux.....	150
VIII. 2. 1. Chargement aléatoire constitué de plusieurs blocs.....	150
VIII. 2. 2. Chargement aléatoire avec des sur-contraintes	152
VIII. 3. Chargements complexes multiaxiaux	153
VIII. 3. 1. Chargements proportionnel et non proportionnel à contraintes positives.....	154
VIII. 3. 2. Chargements non proportionnels avec passages en traction et en compression	158
VIII. 4. CONCLUSION.....	160
CONCLUSION ET PERSPECTIVES.....	161

REFERENCES 167
ANNEXE 1. CONFIDENTIEL 175
ANNEXE 2. CALCUL DE LA MATRICE JACOBIENNE ET DE LA MATRICE TANGENTE
COHERENTE 176
ANNEXE 3. POSITIVITE DE LA DISSIPATION..... 184
ANNEXE 4. MODELE ODM-CMO 188

CHAPITRE I BIBLIOGRAPHIE

Sommaire du Chapitre I :

I. 1. Modèle d'endommagement pour les sollicitations monotones	18
I. 1. 1. Modèles à variables d'effet	18
I. 1. 2. Modèles à densité de fissures	20
I. 2. Extension des modèles statiques en des modèles de fatigue en cycles	20
I. 2. 1. Les modèles empiriques	20
I. 2. 2. Les modèles phénoménologiques	22
I. 2. 3. Les modèles progressifs	24
I. 2. 4. Le modèle progressif à variables d'effet de l'Onera : ODM-CMO	25
I. 3. Lois d'endommagement temporelles $D = \dots$ de la littérature	30
I. 4. Critères de ruptures	33
I. 4. 1. Les divers critères de rupture macroscopiques	33
I. 4. 2. Le critère de rupture progressive des torons utilisé dans ODM-CMO	33
I. 5. Conclusion	35

Un modèle d'endommagement, au travers de la loi de comportement, doit être défini dans un cadre en accord avec les principes de la thermodynamique pour garantir la description des phénomènes physiques qui apparaissent dans le matériau sollicité mécaniquement (ou toute autre forme de sollicitation). Les formulations mésoscopique/macrosopiques s'inscrivent dans le cadre de la Mécanique des Milieux Continus qui constitue la base des méthodes modernes de calcul des structures. Les discontinuités qui apparaissent aux différentes échelles de la microstructure sont décrites de façon globale, homogénéisées via les variables d'endommagement. C'est une conséquence de l'hypothèse de l'état local qui suppose que l'état thermomécanique d'un point du système matériel, à un instant donné, ne dépend que de la valeur des variables d'état en ce point. Cette hypothèse implique que toute évolution peut être considérée comme une succession d'états d'équilibre.

Il existe dans la littérature quelques modèles d'endommagement fondés sur ces concepts. Les lois d'endommagement utilisées dans ces modèles peuvent être classées par grandes familles de matériaux, ayant des microstructures, des mécanismes physiques d'endommagement, ou encore des mécanismes de rupture différents. Alors qu'un métal isotrope pour lequel la direction de chargement n'aura aucun effet sur son comportement à l'endommagement et qui présente un comportement plastique se verra attribuer une loi d'endommagement, une céramique qui a un comportement fragile ou un composite pour lequel l'endommagement est différent dans une direction ou une autre (anisotropie), nécessite une autre loi d'endommagement qui tient compte des spécificités du matériau. Ces lois sont gouvernées par des variables internes, judicieusement choisies.

Dans ce chapitre, nous revenons rapidement sur divers modèles d'endommagement monotones (I. 1) ainsi que ceux traitant le domaine de la fatigue. Un état de l'art complet est présenté dans [[Rakotoarisoa, 2013](#)]. Pour l'étude de la fatigue, il est question de modèles utilisant soit des lois d'endommagement de fatigue en cycles (I. 2), soit des lois d'endommagement temporelles (0), écrites en taux d'endommagement $\dot{D} = \dots$. Nous mettons l'accent sur le modèle établi à l'Onera, ODM-CMO (pour Onera Damage Model) pour les composites tissés 3D à matrice organique (I. 2. 4). En effet, les présents travaux ont pour objectifs de proposer un modèle d'endommagement complémentaire à celui d'ODM-CMO. Nous présentons également quelques critères de rupture (0) adaptés à l'étude de la fatigue.

I. 1. Modèle d'endommagement pour les sollicitations monotones

Nous différencions, pour les chargements monotones, les modèles d'endommagement à variables d'effet, différents des modèles utilisant des variables plus physiques comme la densité de fissures. Ces deux types de modèles sont rapidement évoqués dans cette première partie d'état de l'art. L'accent est mis sur leur complexité de mise en œuvre, la robustesse de leur procédure d'identification et leurs capacités prédictives.

I. 1. 1. Modèles à variables d'effet

En ce qui concerne les modèles macroscopiques dans lesquels le composite est considéré comme un matériau homogène, les variables d'endommagement ne traduisent pas directement l'état physique du matériau endommagé mais plutôt l'effet de l'endommagement sur le comportement global du matériau. Ce type de description globale simplifie l'application au calcul de structures industrielles par éléments finis. La description des mécanismes d'endommagement est d'autant plus fine que le choix de la nature des variables est réfléchi et le nombre de variables d'endommagement est élevé. Ces choix sont avant tout motivés par une étape inévitable de compréhension des mécanismes, et de leurs effets sur les propriétés du composite.

Pour le CMO tissé 3D, nous avons vu en introduction que des variables d'endommagement scalaires suffisent à décrire l'évolution de l'endommagement du fait que l'orientation est connue et fixe (car liée à la microstructure du matériau). Les variables d'endommagement tensorielles d'ordre 2 ou 4 qui présentent un aspect directionnel sont plutôt utilisées pour les cas où l'endommagement dépend des directions de chargement et non de la microstructure (par exemple pour les matériaux métalliques ou les composites à matrice céramique CMC).

Stratifiés UD – Les modèles proposés pour les composites stratifiés sont définis à l'échelle du pli unidirectionnel (supposé usuellement isotrope transverse) pour prévoir l'endommagement pour tout type d'empilements. Certains modèles proposés sont définis dans une approche 2D sous l'hypothèse des contraintes planes [Maimi et al. 2007]. Parmi les approches 3D, il y a le « méso-modèle d'endommagement pour stratifiés » développé au LMT-Cachan [Ladevèze et LeDantec, 1992] et le modèle Onera Progressive Failure Model (OPFM) développé à l'Onera [Laurin et al., 2007]. Dans ces modèles, trois variables d'endommagement définissent les pertes de rigidités associées aux trois mécanismes d'endommagement propres aux stratifiés d'UD, notamment le délaminage entre les plis UD (pas pris en compte dans l'approche 2D). Ces modèles d'endommagement, ont été validés au travers de comparaisons avec des résultats d'essais sur éprouvettes matériaux sous sollicitations statiques pouvant être complexes.

Tissé 2D - Les tissés 2D sont parfois utilisés et modélisés comme des plis orthotropes au sein de stratifiés. Ainsi, tout comme pour le cas des UD, l'échelle de modélisation sera l'échelle mésoscopique correspondant au pli de tissus 2D.

Le méso-modèle développé au LMT-Cachan a été étendu par le LMA-Marseille, au cas des tissés 2D équilibrés [Hochard et al, 2001] puis généralisé à l'ensemble des tissés 2D (de l'UD aux plis tissés déséquilibrés) [Thollon et Hochard, 2009]. Dans cette dernière extension, appliquée à un pli tissé satin de 8, le comportement d'un pli tissé est considéré équivalent à celui d'un stratifié d'UD [0°/90°] dont les épaisseurs de plis correspondent au Ratio Chaîne/Trame (RCT). Le modèle utilisé pour le pli UD équivalent est basé sur le méso-modèle proposé par le LMT-Cachan [Ladevèze et LeDantec, 1992]. Le caractère unilatéral de l'endommagement est pris en compte, dans l'expression des forces thermodynamiques. Les déformations anélastiques observées surtout lors de chargements hors-axes sont décrites par un modèle plastique à écrouissage isotrope. L'hypothèse des contraintes planes étant appliquée dans ces modèles, leur domaine d'application concerne des matériaux à faible épaisseur dans lesquels le délaminage¹ n'apparaît pas. De plus, la validité de ces modèles se limite à la première rupture de pli en mode fibre sur éprouvette homogène qui est considérée comme menant de manière catastrophique à la rupture du stratifié et de la structure.

Des modèles d'endommagement pour composites tissés ont également été développés pour une application à l'impact [Iannucci, 2006 ; Johnson, 2001 ; Johnson et al., 2001] avec encore une fois trois variables d'endommagement liées aux pertes de rigidités dans le plan (longitudinale, transverse et cisaillement).

Tissés 3D - A ce jour, il existe encore peu de modèle d'endommagement des composites tissés tridimensionnels. Le modèle du LCTS [Pailhes et al., 2002] se focalise néanmoins sur les CMC. L'endommagement y est décrit au travers de quatre variables internes scalaires : trois variables phénoménologiques qui sont directement liées à l'évolution des composantes du tenseur des souplesses et dont les cinétiques sont données par des multicritères couplés; et la déformation plastique cumulée correspondant aux déformations résiduelles dont le formalisme dérive de la théorie générale de la plasticité. Ce modèle a été appliqué à des plis de satin de 8 reliés dans l'épaisseur par des points de couture. Le modèle Onera Damage Model développé à l'Onera [Marcin, 2010 ; Marcin et al., 2011 ; Rakotoarisoa, 2013] pour les CMO tissés tridimensionnels sera présenté plus en détails dans (I. 2).

Les modèles à variables d'effet permettent de prévoir efficacement le comportement des composites sous sollicitations quasi-statiques jusqu'à la ruine du matériau. Mais pour le cas où l'endommagement se développe de manière plus progressive ou pour estimer la nocivité d'un endommagement généré par un impact, il pourrait s'avérer intéressant de pouvoir décrire finement l'évolution des mécanismes d'endommagement.

¹ Le délaminage, étant un décollement entre deux plis et donc un phénomène 3D, n'est pas modélisé dans un modèle 2D sous les hypothèses de contraintes planes.

I. 1. 2. Modèles à densité de fissures

Les modèles à variables physiques se focalisent sur l'état physique du matériau dans lesquels les variables permettent de décrire des densités de fissures ou des tailles de zones endommagées. Il faut connaître finement les mécanismes d'endommagement pour pouvoir les décrire avec précision.

Stratifiés UD - Dans le cas des stratifiés, les mécanismes sous sollicitations quasi-statiques sont bien connus et ont permis le développement des modèles à variables physiques. Les modèles micromécaniques développés dans les travaux de [Nairn et Hu, 1992 ; Taljera, 1992 ; Nairn et Hu, 1994 ; Nairn, 2000 ; Ladevèze et Lubineau, 2001] permettent de prévoir finement les densités de fissures transverses et les micro-délaminages associés au sein de certains stratifiés. Ces modèles basés sur des considérations énergétiques, se révèlent limités à certains empilements et leurs mises en œuvre sont complexes, pour prévoir l'endommagement au sein de structures composites représentatives de problématiques industrielles. Les modèles, basés sur la mécanique de l'endommagement continu, proposés par [Lubineau, 2002 ; Ladevèze et Lubineau, 2002 ; Berthelot, 2003 ; Huchette, 2005 ; Laurin et al, 2011 ; Berthelot et Le Corre, 2000, Laurin et al, 2013] permettent également de prévoir finement l'évolution de la densité des fissures transverses au sein des plis UD ainsi que l'évolution du taux de délaminage associé. Ces approches peuvent être implantées dans un code éléments finis pour prévoir l'endommagement au sein de structures composites.

Tissé – Malgré le manque de connaissance des mécanismes d'endommagement pour les tissés, qui implique un processus d'identification difficile, [Couegnat, 2008] a proposé un modèle pour les tissés 3D CMC basé sur des densités de fissures. Une modélisation multiéchelle est utilisée, en intégrant les résultats à l'échelle mésoscopique d'un calcul par éléments finis dans un modèle décrivant le comportement macroscopique du matériau.

Le modèle proposé dans ces travaux, basé sur le modèle ODM-CMO de l'Onera, est alors un modèle à variables d'effet. La partie suivante (I. 2) introduit les modèles qui prennent en compte les sollicitations de fatigue.

I. 2. Extension des modèles statiques en des modèles de fatigue en cycles

En termes de modélisation des phénomènes de fatigue, plusieurs méthodes existent.

I. 2. 1. Les modèles empiriques

Les méthodes « ingénieur » présentent les avantages de donner une idée satisfaisante de l'estimation de la durée de vie, de manière simple et rapide. On appelle encore ces **méthodes empiriques** (qui s'appuient exclusivement sur l'expérience et l'observation). Ces modèles sont utiles pour le prédimensionnement lors des étapes de développement d'un matériau pour lequel les mécanismes d'endommagement ne sont pas connus avec précision. Les courbes de durée de vie sont obtenues de façon analytique et seuls les chargements cycliques de fatigue (à amplitude constante) peuvent être traités. Les chargements complexes sont exclus des études. Les modèles empiriques les plus connus sont ceux de **Wöhler** dans lequel les fonctions sont linéaires semi-logarithmiques (Eq. I-1).

$$\sigma_a = \sigma_u^t - B \cdot \log(N_R) \quad \text{Eq. I-1}$$

B est un coefficient matériau à identifier. σ_u^t est la contrainte ultime de traction (à $N_R = 1$) et σ_a est la contrainte alternée ($\sigma_a = \Delta\sigma/2 = \frac{(\sigma_{Max} - \sigma_{min})}{2}$).

Le modèle de **Basquin** [Basquin, 1910] prévoit la durée de vie au travers d'une fonction linéaire dans un diagramme log-log (Eq. I-2). Il décrit la partie centrale de la courbe.

$$N_R \cdot (\sigma_a)^m = C \quad \text{Eq. I-2}$$

$$\log(N_R) = \log(C) - m \cdot \log(\sigma_a)$$

C et m sont les paramètres à identifier par régression linéaire dans l'échelle log-log.

Le modèle de **Strohmeier** [Strohmeier, 1914] prévoit la partie centrale ainsi que l'asymptote à grand nombre de cycles (Eq. I-3).

$$N_R = \left(\frac{A}{\sigma_a - \sigma_D} \right)^m \quad \text{Eq. I-3}$$

avec $C = A^m$ où $N \cdot (\sigma_a - \sigma_D)^m = C$

σ_D est la limite d'endurance, en dessous de laquelle le matériau ne casse pas.

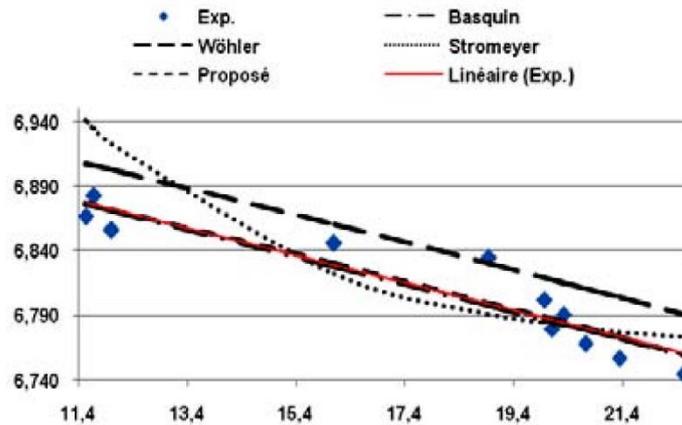


Figure 10 : Courbes de durée de vie pour l'acier 1001, représentant les différents modèles empiriques présentés ci-dessus [Ngarmaim et al. 2014]

Le modèle de **Bastenaire** (1972) décrit aussi le domaine oligo-cyclique (faible durée de vie) (Eq. I-4).

$$N_R = \frac{A}{\sigma_a - \sigma_D} \exp \left(- \left(\frac{\sigma_a - \sigma_D}{B} \right)^c \right) \quad \text{Eq. I-4}$$

Pour les composites tissés 2D (Figure 11 (à gauche)), un modèle empirique proposé par [Tate et Kelkar, 2008] et [Kelkar et Whitcomb, 2009]. Ce modèle est fondé sur les courbes sigmoïdes (ou encore courbe en « S »). Les fonctions sont aussi appelées fonctions logistiques (solutions du modèle de [Verhulst, 1845]). Le diagramme (Figure 11 (à droite)) présente le domaine oligo-cyclique et le domaine ploycyclique. La fonction est semi-logarithmique (Eq. I-5).

$$\log(N_R) = \frac{A_1 - A_2}{1 + \exp \left(\frac{(x - x_0)}{B} \right)} + A_2 \quad \text{Eq. I-5}$$

$x = \sigma / \sigma_u$ est le rapport de la contrainte sur la contrainte ultime (traction ou compression). Les paramètres A_1 et A_2 sont les valeurs extrêmes que peut atteindre x . x_0 correspond à l'ordonnée $y = \frac{A_1 + A_2}{2}$. B est un paramètre décrivant la pente de la courbe.

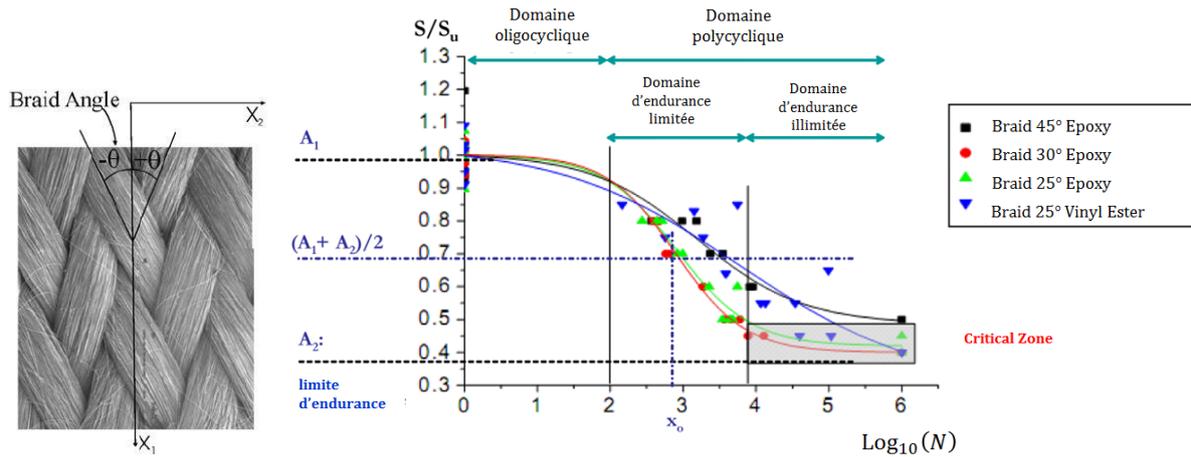


Figure 11 : Composite tissé 2D où θ est l'angle de tissage (à gauche) ; courbe de durée de vie [Tate et Kelkar, 2008] et [Kelkar et Whitcomb, 2009], avec $S/S_u = \sigma/\sigma_u$ le rapport de la contrainte sur la contrainte ultime

I. 2. 2. Les modèles phénoménologiques

Ils sont fondés sur la compréhension des phénomènes macroscopiques, pour des sollicitations de fatigue, qui sont à l'origine des pertes de rigidités ou de résistance du matériau en question.

Il y a les modèles basés sur la perte de rigidité résiduelle qui décrivent les pertes des propriétés élastiques. Le module de rigidité est dépendant d'une variable (appelée variable d'endommagement D ou d). Cette variable augmente au cours des cycles alors que le module de rigidité diminue. Dans le cas d'un chargement uniaxial 1D, le module endommagé \tilde{E} est défini en (Eq. I-6). E_0 est le module initial et \tilde{E} est le module endommagé.

$$\tilde{E} = E_0(1 - D) = \frac{E_0}{1 + d} \quad \text{Eq. I-6}$$

La rupture est atteinte lorsque le module endommagé atteint une valeur critique. D est pris entre 0 et 1, et d entre 0 et l'infini (utilisé dans ODM-CMO).

La prévision de l'endommagement de fatigue d'un élément de volume macroscopique des matériaux métalliques a été abordée par [Chaboche, 1974] par une méthode globale avec comme objectif le calcul de la rupture des structures. Sa loi (Eq. I-7) différentielle a été proposée sur la base d'essais notamment des essais qui ont permis de mesurer l'effet de l'endommagement sur le comportement mécanique. La loi permet de calculer l'évolution de l'endommagement en fonction du nombre de cycles à rupture.

$$\frac{\delta D}{\delta N} = [1 - (1 - D)^{\beta+1}]^{\alpha(\Delta\sigma)} \left[\frac{\Delta\sigma}{M(1 - D)} \right]^\beta \quad \text{Eq. I-7}$$

β est un exposant positif, M une constante qui peut dépendre de la contrainte moyenne, $\alpha(\Delta\sigma)$ une fonction de l'amplitude de contrainte nominale à valeurs comprises entre 0 et 1.

Les lois de [Sidoroff et Subiago, 1987] et [Van Paepegem et Degrieck, 2001], pour des matériaux composites, décrivent l'évolution de l'endommagement D , en distinguant les domaines de traction et compression. L'expression de [Sidoroff et Subiago, 1987] (Eq. I-8) est écrite en déformation, tandis que celle de [Van Paepegem et Degrieck, 2001] en contrainte.

$$\frac{\delta D}{\delta N} = \begin{cases} A \cdot (\Delta \varepsilon)^c & \text{traction} \\ (1-D)^b & \text{compression} \\ 0 & \end{cases} \quad \text{Eq. I-8}$$

A , c et b sont des paramètres matériaux

Le modèle proposé par [Whitworth, 1990], pour les composites, est construit directement sur l'évolution de la perte de rigidité à travers le rapport entre la rigidité résiduelle avec la rigidité initiale (Eq. I-9).

$$\frac{\tilde{E}}{E_0} = 1 - H \left(1 - \frac{A}{\sigma_u}\right)^a \cdot \frac{N}{N_R} \quad \text{Eq. I-9}$$

N_R est nombre de cycles à rupture. Au fur et à mesure des cycles, ce rapport augmente. H , A et a sont les paramètres matériaux à identifier.

Pour ces deux modèles, la rupture est considérée lorsque l'endommagement D atteint la valeur de $D = 1$, ce qui implique une rigidité nulle lors de la rupture. Ce constat ne semble pas être vérifié, notamment au travers des travaux menés par [Lemaitre et Chaboche, 1985] pour les métaux, ou [Fujii et al. 1993] et [Henry, 2013] pour les composites. Ils ont observé un effet de saturation à une valeur non nulle de la rigidité, non pris en compte dans ces deux modèles.

Enfin, sur les stratifiés UD, [Tserpes et al. 2004] se sont focalisés sur des chargements de fatigue alternés ($R_\sigma = -1$). La modélisation des rigidités résiduelles est établie avec des équations linéaires déduites des données expérimentales. Leur modèle de fatigue phénoménologique est associé à un modèle statique afin de combiner des sollicitations statiques avec des sollicitations de fatigue.

Les modèles basés sur la résistance résiduelle nécessitent des essais destructifs. La résistance résiduelle est la charge statique que peut supporter le matériau après avoir subi une sollicitation cyclique de fatigue. Différentes théories utilisent ce concept en se basant sur les hypothèses suivantes :

- La résistance résiduelle après N cycles est liée à la contrainte ultime statique par une équation déterministe,
- Lorsque la résistance résiduelle est égale à la contrainte de fatigue appliquée, alors le nombre de cycles correspondant est égal au nombre de cycles à rupture.

Pour les composites, [Halpin et al. 1973] font partie des premiers à utiliser cette méthode. Ils font le postulat que la résistance résiduelle est une fonction monotone, qui décroît en fonction du nombre de cycles. [Reifsnider et Stinchcomb, 1986; Reifsnider et Case, 2003] puis [Diao et al., 1995; Diao et al., 1999; Diao et al., 2003] utilisent le concept d'éléments critiques dont la rupture entraîne la ruine du composite et d'éléments sous-critiques qui sont liés à l'endommagement diffus et leur rupture entraîne une redistribution des contraintes sans causer directement la ruine du composite. Dans ces travaux, la résistance résiduelle du composite est calculée à partir de la dégradation de la résistance dans les éléments critiques et de l'endommagement des éléments sous-critiques. [Reifsnider et Stinchcomb, 1986] proposent une expression (Eq. I-10) de la résistance résiduelle σ^r en fonction du nombre de cycles à rupture en fatigue N_R . α est un paramètre à identifier.

$$\sigma^r(N) = 1 - \left[1 - \frac{\sigma}{\sigma_u}\right] \cdot \left[\frac{N}{N_R}\right]^\alpha \quad \text{Eq. I-10}$$

Les modèles phénoménologiques présentés ont la particularité de ne pas prendre en compte les mécanismes d'endommagement. La plupart d'entre eux ne considère pas de lien entre les endommagements issus des chargements statiques et ceux issus des chargements de fatigue (parfois le lien avec les chargements statiques consistent uniquement à prendre en compte la contrainte à rupture statique). Néanmoins, [Tserpes et al. 2004] montrent qu'en combinant un modèle de fatigue avec un modèle statique, les résistances résiduelles peuvent être déduites. Il a

été observé précédemment que les mécanismes d'endommagement dans les CMO 3D sont identiques en statique et en fatigue. Ce constat incite à vouloir modéliser le comportement en fatigue en reprenant l'existant en statique (s'il existe), et en se basant sur les mécanismes d'endommagement, ce qui est le cas des modèles présentés dans la section suivante.

I. 2. 3. Les modèles progressifs

Les modèles d'endommagement progressif se basent sur la description de l'évolution des propriétés mécaniques en utilisant des variables d'endommagement qui modélisent l'endommagement dans la pièce dû à plusieurs phénomènes (et non un seul). Pour le composite tissé 3D, ces phénomènes sont les décohésions fibre/matrice, les fissures au sein de la matrice, les fissures intra-torons ou encore les décohésions inter. C'est donc l'ensemble de ces mécanismes qui est représenté à travers une unique variable d'endommagement et qui permet de décrire la chute des propriétés élastiques.

Beaucoup de modèle de ce type ont été étudié pour les composites stratifiés d'UD [Thionnet et al. 2002; Abdelal et al. 2002; Lubineau et al. 2006; Gornet et Ijaz 2011; Revest 2011; Payan et Hochard 2002] ainsi que pour les stratifiés de plis tissés 2D [Hochard et al. 2006; Hochard et Thollon 2010].

Stratifiés UD - [Payan et Hochard, 2002] ont étendu les travaux sur le « méso-modèle d'endommagement pour les stratifiés » du LMT-Cachan. L'endommagement diffus (décohésion fibre/matrice et délaminage naissant) est décrit dans le méso-modèle au travers de deux variables d'endommagement : d' pour la dégradation du module de Young transverse et d pour la dégradation du module de cisaillement. Les forces motrices $\gamma_{d'}$ et γ_d associées à ces variables d'endommagement sont écrites en fonction des composantes de la contrainte. Sous chargement cyclique, il y a une superposition de deux contributions, monotone d_{Mon} et fatigue d_{Fatigue} , la contribution «de fatigue» étant dépendante du chargement maximal et les endommagements d et d' saturant à 1.

Au LMT-Cachan, [Lubineau et al. 2006] proposent une autre extension du « méso-modèle d'endommagement pour stratifiés » prenant en compte à la fois les phénomènes de la fatigue et ceux de l'oxydation. Ce modèle prend en compte l'endommagement diffus (la décohésion à l'interface fibre/matrice ou la microfissuration transverse et le microdélaminage) de la même manière que dans le modèle proposé par [Payan et Hochard, 2002].

Le modèle pour des stratifiés UD, développé au Centre des Matériaux - Evry dans les travaux de [Thionnet et al., 2002] en 2D puis de [Revest, 2011] en 3D, est un modèle à densité de fissures capable de prendre en compte différents modes de chargement (mode I : ouverture, mode II : glissement et mode mixte). Il s'intéresse à la fissuration intra-laminaire, considérée comme l'endommagement prédominant à l'échelle du pli. De plus, la viscosité de la matrice n'est pas modélisée. La loi d'évolution de α (variable adimensionnée qui est le produit de la densité de fissures par l'épaisseur du pli fissuré ($\alpha = e \cdot d$)) est écrite à l'aide d'une loi seuil d'endommagement A^c donnée par :

$$A^c(\alpha, m) = -b(m) \cdot \exp\left(\frac{\ln\left(-\ln\left(1 - \frac{\alpha}{c(m)}\right)\right)}{a(m)}\right) \quad \text{Eq. I-11}$$

Pour l'extension du modèle à la fatigue, seule la loi seuil d'endommagement est modifiée. La forme est conservée mais les trois paramètres (a , b et c) dépendent du nombre de cycles N et de paramètres décrivant le chargement local (le rapport de charge R_σ et la fréquence f) (Eq. I-12).

$$A^c(\alpha, m, N, R, f) = -b(m, N, R_\sigma, f) \cdot \exp\left(\frac{\ln\left(-\ln\left(1 - \frac{\alpha}{c(m, N, R_\sigma, f)}\right)\right)}{a(m, N, R_\sigma, f)}\right) \quad \text{Eq. I-12}$$

Lorsque $N = 0$, on retrouve le seuil statique. Il existe alors un unique seuil critique, valable en statique et en fatigue. L'évolution de l'endommagement est possible car le seuil critique est une fonction décroissante du nombre de cycles [Revest 2011].

Les modèles de fatigue présentés dans [Hochard et al. 2006] et [Hochard et Thollon 2010] sont les extensions respectives des modèles statiques pour tissés 2D équilibrés [Hochard et al. 2001] et pour les tissés 2D en général [Thollon et Hochard 2009]. Dans chacun des modèles de fatigue développés au LMA-Marseille, les lois de fatigue sont similaires. Dans [Payan et Hochard 2002], les lois de fatigue dépendent uniquement du chargement maximal, et dans [Hochard et al. 2006] la dépendance à l'amplitude de chargement a été introduite (Eq. I-13).

$$\frac{\delta d_{Fatigue}}{\delta N} = \langle a_f \cdot (y d_2^{UD*})^o \cdot (\Delta y d_2^{UD*})^p + b_f \cdot (y d_{12}^{UD*})^q \cdot (\Delta y d_{12}^{UD*})^r - y_{(0)F} \rangle_+ \quad Eq. I-13$$

$$\Delta y d_i^{UD*} = \frac{\left(\max_{\tau \in cycle(t)} (\sigma_i^{UD*}) - \min_{\tau \in cycle(t)} (\sigma_i^{UD*}) \right)^2}{2 \cdot E_i^{ud} (1 - d_i^{ud})^2}$$

où le paramètre $y_{(0)F}$ correspond au seuil d'endommagement du matériau et les coefficients (a_f, b_f, o, p, q, r) sont des paramètres matériau.

L'endommagement en cisaillement est supposé égal à l'endommagement transverse. La loi qui régit les déformations anélastiques reste inchangée sous chargement cyclique.

I. 2. 4. Le modèle progressif à variables d'effet de l'Onera : ODM-CMO

Le modèle d'endommagement ODM-CMO de l'Onera pour les composites tissés 3D est un modèle riche, basé sur la mécanique de l'endommagement. Tout d'abord établi pour les chargements monotones [Marcin, 2010], il a été étendu aux chargements de fatigue dans les travaux de [Rakotoarisoa, 2013]. Il s'agit d'un modèle qui décrit l'effet de l'endommagement sur les propriétés mécaniques du composite. Le modèle complet actuel est présenté ici, il tient compte :

- du **caractère visqueux de la matrice**, à travers la notion de déformation visqueuse $\boldsymbol{\varepsilon}^{ve}$ (qui est, avec la déformation élastique, moteur de l'endommagement).
- du caractère **progressif des indexes de désactivation des fissures** η_k , ce qui a entraîné l'introduction des déformations stockées $\boldsymbol{\varepsilon}^s$ qui permettent d'assurer la continuité du comportement, et d'assurer la positivité de la dissipation due aux indexes de désactivation des fissures progressive.
- Le modèle prend en considération les **déformations résiduelles** $\boldsymbol{\varepsilon}^r$ provoquées par l'accumulation de l'endommagement dans la matrice (autour des torons de fibres). Lorsque le matériau est sollicité, il ne retrouve pas son état initial après décharge et des déformations persistent, ce sont les déformations résiduelles.
- La loi d'élasticité fait donc intervenir toutes ces variables en (Eq. I-14). La loi de comportement du modèle ODM-CMO est représentée sur (Figure 12). \mathbb{C}^0 et \mathbb{C}^{eff} sont respectivement les tenseurs de rigidité initiale et endommagée.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}^{eff} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{ve}) - \mathbb{C}^0 : (\boldsymbol{\varepsilon}^r + \boldsymbol{\varepsilon}^s) \quad Eq. I-14$$

$$\mathbb{S}^{eff} = [\mathbb{C}^{eff}]^{-1} = \mathbb{S}^0 + \sum_{k=1}^3 d_k \mathbb{H}_k \quad Eq. I-15$$

$$\mathbb{H}_k = \eta_k \mathbb{H}_k^+ + (1 - \eta_k) \mathbb{H}_k^-$$

Pour $k=1$

$$\mathbb{H}_1^+ = \begin{bmatrix} S_{11}^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{55}^1 S_{55}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{66}^1 S_{66}^0 \end{bmatrix} \quad \mathbb{H}_1^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{55}^1 S_{55}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{66}^1 S_{66}^0 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. I-16}$$

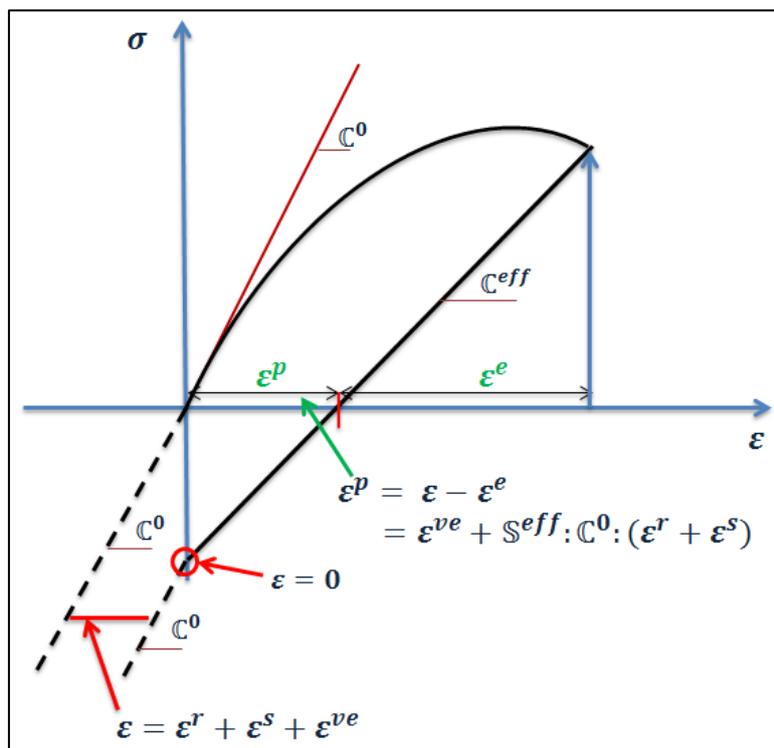


Figure 12 : Variables thermodynamiques et grandeurs pratiques du modèle ODM-CMO complet

- Le modèle prend en compte **la rupture progressive des torons de fibres** pour décrire le comportement d'une structure jusqu'à sa ruine. Pour une éprouvette sans gradient de contrainte, la rupture des torons de fibres est catastrophique. Par contre, pour la plupart des structures, qui présentent des singularités géométriques et qui sont soumises à des chargements simples ou complexes, les concentrations de contraintes engendrées en bord de singularités peuvent entraîner la rupture du (des) torons mais sans forcément mettre en péril la tenue de la structure. Il n'en reste pas moins que les ruptures de torons de fibres sont des phénomènes relativement brutaux. Ces phénomènes ont des conséquences sur le comportement du matériau. Plus il y a de torons rompus, plus la contrainte diminue au fur et à mesure que la déformation augmente (Figure 14, dans I. 4. 2). Le **comportement** du matériau est alors de type **adoucissant**. Ce phénomène entraîne un certain nombre de difficultés numériques. Une solution, dans les travaux de [Marcin, 2010], était de combiner un modèle à effet retard avec une méthode non-locale. Toutefois, pour simplifier l'implémentation [Rakotoarisoa, 2013] a utilisé seulement un modèle à effet retard [Suffis et al. 2003]. Le principe consiste à limiter la vitesse d'évolution des

ruptures de torons de fibres qui trouve son explication physique par le fait que la rupture des fibres n'est pratiquement jamais instantanée. Ainsi, il a été ajoutée une variable interne, la variable d'endommagement des torons de fibres (une par mécanisme, six au total en distinguant les mécanismes de rupture des torons en traction et en compression), qui gère cet effet adoucissant.

- L'évolution de l'endommagement est déterminée grâce à deux lois, une pour les chargements monotones [Marcin, 2010;], la seconde pour les chargements de fatigue [Rakotoarisoa, 2013]. Dans les travaux de [Rakotoarisoa, 2013], si la loi d'évolution de l'endommagement monotone n'a pas été fondamentalement modifiée, un travail a été fourni sur la variable qui gouverne la loi monotone. La loi est toujours gouvernée par les forces motrices (différentes des forces thermodynamiques qui dérivent directement du potentiel thermodynamique, c'est-à-dire que les modèles ODM-CMO sont écrits dans un cadre thermodynamique dit « non standard »). Néanmoins, ces forces motrices ne dépendent plus des déformations totales mais des **déformations** dites « **mécaniques** », notées ε^{meca} . Ces déformations sont la somme uniquement des déformations élastiques ε^e et des déformations visqueuses ε^{ve} (Eq. I-17).

$$\varepsilon^{meca} = \varepsilon^e + \varepsilon^{ve} \quad \text{Eq. I-17}$$

- Le travail avec les parties positives du tenseur des déformations mécaniques trouve un intérêt dans le cadre de chargements combinés traction / cisaillement plan ou compression / cisaillement plan. Ceci a été vérifié notamment dans les travaux de [Maire et Pacou 1996] pour des composites à matrice céramique (CMC). Cette modification a été également prise en compte dans les travaux de [Hémon, 2010] qui a proposé un modèle d'endommagement appliqué aux CMC (Figure 13).

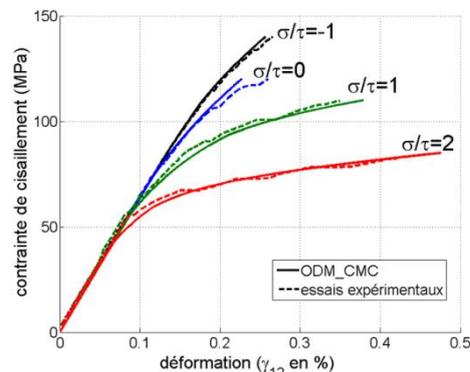


Figure 13 : Mise en évidence de l'influence de la combinaison traction/cisaillement sur des essais sur CMC [Maire et Pacou 1996], correctement décrite par le modèle ODM-CMC [Hémon 2010]

Dans les travaux de [Marcin, 2010], les déformations positives étaient définies comme la partie positive de la décomposition spectrale du tenseur des déformations. Pour pallier aux problèmes notamment numériques, il a judicieusement été proposé d'appliquer la décomposition spectrale pour, chaque mécanisme de dégradation k , uniquement aux composantes intervenant dans la force thermodynamique associée (ε_{ki} , $i = 1$ à 3) [Rakotoarisoa, 2013].

- Les déformations résiduelles ε^r et stockées ε^s ne peuvent pas engendrer d'endommagement, mais au contraire elles sont la conséquence de l'évolution du dommage. C'est la raison pour laquelle ces déformations n'interviennent pas dans les déformations mécaniques et ne gouvernent donc pas les lois d'évolution de l'endommagement. Cette modification a permis de rendre le modèle plus robuste concernant les identifications des divers mécanismes, en découplant les déformations à l'origine de l'endommagement et les déformations créées par l'apparition d'endommagement. Le calcul de l'évolution du dommage est alors possible, grâce à deux lois d'évolution. Une concerne les chargements monotones d_k^{Mon} et la seconde uniquement pour les chargements cycliques de fatigue $d_k^{Fatigue}$. Il y a une loi par

mécanisme d'endommagement k , où $k=[1,2,3]$. La loi d'évolution de l'endommagement monotone (Eq. I-18) est gouvernée par la racine carrée des forces motrices maximales $\sqrt{y_{(k)Max}}$.

$$d_k^{Mon} = d_{c(k)} \left(1 - \exp \left(- \left(\frac{\langle \sqrt{y_{(k)Max}} - \sqrt{y_{0(k)}} \rangle_+}{\sqrt{y_{c(k)}}} \right)^{p_k} \right) \right) \quad \text{Eq. I-18}$$

Pour l'étude de la fatigue, [Rakotoarisoa, 2013] a proposé une **loi d'évolution d'endommagement en cycles** $\frac{\delta d_k^{Fatigue}}{\delta N}$ gouvernée par les forces motrices (Eq. I-19).

$$\frac{\delta d_k^{Fatigue}}{\delta N} = (d_k^{Fatigue} - d_{Total(k)})^{y_k} \left(\frac{\langle (1 - R_{y_k})^{\beta_k} y_{(k)Max} - y_{0(k)}^{Fatigue} \rangle_+}{y_{c(k)}^{Fatigue}} \right)^{\delta_k} \quad \text{Eq. I-19}$$

Cette loi dépend de la valeur maximale y_{Max} de la force motrice, ainsi que du rapport de charge en force motrice R_y défini comme étant le rapport sur un cycle de la force motrice minimale sur la force motrice maximale $R_y = \frac{y_{min}}{y_{Max}}$. La loi en cycle permet le calcul de l'endommagement à la fin de chaque cycle de fatigue, particularité qui diffère d'une loi d'endommagement temporelle. Elle ne permet pas l'étude de chargements complexes (cycles de fatigue complexes, à contraintes minimale et maximale non constantes). Par contre, nous discuterons plus tard dans ce manuscrit de l'intérêt d'un modèle en cycle ou d'un modèle temporel en particulier en ce qui concerne coût de calcul.

L'endommagement totale $d_{Total(k)}$ est la somme de la variable monotone et la variable de fatigue (Eq. I-20).

$$d_{Total(k)} = d_k^{Mon} + d_k^{Fatigue} \quad \text{Eq. I-20}$$

- Le **critère de rupture** utilisé est basé sur le calcul des forces motrices des torons de fibres. Elles sont écrites de façon à ce que le critère de rupture soit équivalent à un critère de type déformation maximale (sans couplage avec le cisaillement). Pour des raisons numériques, un effet retard a été ajouté de façon à retranscrire correctement l'effet adoucissant du comportement du matériau lors de la rupture des torons.

- Le modèle permet d'**estimer la durée de vie du matériau**, en fonction du nombre de cycles. En effet la résolution de l'intégrale sur la variable d'endommagement et le nombre de cycles entre 0 et le nombre de cycles à rupture N_R , permet de calculer le nombre de cycles à rupture N_R en fonction des autres paramètres de la loi.

- Le modèle ODM-CMO permet aussi de calculer les **résistances résiduelles**, comme étant les contraintes maximales que peut subir la pièce sans se rompre après avoir été sollicitée.

Le jeu d'équations du modèle ODM-CMO 3D figure dans le Tableau 1. Les déformations visqueuses n'apparaissent pas dans ce tableau, ainsi que le couplage plan / hors-plan et le critère de rupture des torons. Les deux premières notions ne seront pas prises en compte dans ces travaux de thèses La description progressive de la rupture et donc le caractère adoucissant ne sont pas pris en compte ici et nous utiliserons un critère de rupture que nous détaillerons plus loin. Malgré cela notre loi de comportement se base entièrement sur celle du modèle ODM-CMO présentée ci-dessous, dans le but de proposer un modèle d'endommagement complémentaire. L'idée étant d'enrichir les connaissances sur le domaine de la fatigue avec une autre approche, à savoir les modèles temporels, qui dépendent du temps et permettent de s'affranchir de la notion de cycles.

$$\sigma = \mathbb{C}^{eff} : \varepsilon^* - \mathbb{C}^0 : (\varepsilon^r + \varepsilon^s)$$

$$\varepsilon^* = \varepsilon - \varepsilon^{ve}$$

Loi d'élasticité

$$\mathbb{C}^0 = (\mathbb{S}^0)^{-1}$$

$$\mathbb{C}^{eff} = (\mathbb{S}^{eff})^{-1}$$

$$\mathbb{S}^{eff} = \mathbb{S}^0 + \sum_{k=1}^3 \mathbf{d}_k^{(m)} \mathbb{H}_k^{(m)} + \mathbf{d}_k^{(f)} \mathbb{H}_k^{(f)}$$

Tenseur de souplesse initial \mathbb{C}^0
 Tenseur de souplesse initial \mathbb{S}^0
 Tenseur de rigidité effectif \mathbb{C}^{eff}
 Tenseur de souplesse effectif \mathbb{S}^{eff}

η_k au sens [Rakotoarisoa, 2013] (0)

Index de désactivation progressive des fissures

$$\varepsilon^{meca} = \varepsilon^e + \varepsilon^{ve}$$

ε^{meca+} Tenseur des déformations positives au sens [Rakotoarisoa, 2013] (0)

Tenseur des déformations mécaniques ε^{meca}

$$y_1 = \frac{1}{2} \left[\mathbf{C}_{11}^0 \varepsilon_1^{meca+2} + b_{55} \mathbf{C}_{55}^0 \varepsilon_5^{meca+2} + b_{66} \mathbf{C}_{66}^0 \varepsilon_6^{meca+2} \right]$$

$$y_2 = \frac{1}{2} \left[\mathbf{C}_{22}^0 \varepsilon_2^{meca+2} + b_{44} \mathbf{C}_{44}^0 \varepsilon_4^{meca+2} + b_{66} \mathbf{C}_{66}^0 \varepsilon_6^{meca+2} \right]$$

Forces motrices y_k

$$y_3 = \frac{1}{2} \left[\mathbf{C}_{33}^0 \varepsilon_3^{meca+2} + b_{44} \mathbf{C}_{44}^0 \varepsilon_4^{meca+2} + b_{55} \mathbf{C}_{55}^0 \varepsilon_5^{meca+2} \right]$$

$$\mathbf{d}_{Total(k)} = \mathbf{d}_k^{Mon} + \mathbf{d}_k^{Fatigue}$$

$$\mathbf{d}_k^{Mon} = d_{c(k)} \left(1 - \exp \left(- \left(\frac{(\sqrt{y(k)} - \sqrt{y_0(k)})_+}{\sqrt{y_{c(k)}}} \right)^{p_k} \right) \right)$$

$$\frac{\delta \mathbf{d}_k^{Fatigue}}{\delta N} = (\mathbf{d}_k^{Fatigue} - \mathbf{d}_{Total(k)})^{y_k} \left(\frac{\langle (1 - R_{y_k})^{\beta_k} y_{(k)Max} - y_{0(k)}^{Fatigue} \rangle_+}{y_{c(k)}^{Fatigue}} \right)^{\delta_k}$$

Loi d'évolution de l'endommagement
 Contribution «monotone» \mathbf{d}_k^{Mon}
 Contribution «de fatigue» $\mathbf{d}_k^{Fatigue}$

$$\dot{\varepsilon}^s = -\mathbb{S}^0 : [(\mathbf{d}_k \dot{\eta}_k (\mathbb{K}_k^+ - \mathbb{K}_k^-)) : \varepsilon]$$

$$\dot{\varepsilon}^r = \mathbb{S}^0 : [(\chi_k \dot{\eta}_k (\eta_k \mathbb{K}_k^+ + (1 - \eta_k) \mathbb{K}_k^-)) : \varepsilon]$$

Loi d'évolution des déformations résiduelles et des déformations stockées

Tableau 1 : Equations du modèle ODM-CMO [Rakotoarisoa, 2013], sans viscosité, ni critère de rupture des torons, ni couplage plan / hors-plan

I. 3. Lois d'endommagement temporelles $\dot{D} = \dots$ de la littérature

Concernant le domaine de la fatigue, nous avons parlé des lois d'endommagement en cycles, qui dépendent du nombre de cycles et d'un rapport de charge. Une autre famille de lois peut être utilisée, pour laquelle la variable d'endommagement évolue en fonction du temps et permet ainsi de décrire l'évolution de l'endommagement de façon continue. La présentation de ces lois dites « temporelles » (parfois dénommées « incrémentales ») est l'objet de cette partie.

Les auteurs [Paas, 1990 ; Peerlings, 1999] ont travaillé sur le béton. Les lois qu'ils ont proposées, sont tirées des travaux de [Lemaitre et Chaboche, 1985] sur les métaux. Les modèles de [Miehe (1995) ; Cantournet (2002)] modélisent l'endommagement des élastomères. Enfin, nous ferons référence aux travaux de [Gornet et Ijaz, 2011] qui ont proposé un modèle d'endommagement « temporel » pour les composites (stratifiés). Ces modèles sont tous des modèles d'endommagement temporel de type $\dot{D} = \dots$ où D est la variable scalaire de l'endommagement.

- Endommagement des métaux par [Lemaitre et Chaboche, 1985] [Lemaitre, 1992]:

La loi définie dans ces travaux est une loi d'endommagement unifiée temporelle (Eq. I-21). Elle permet de décrire l'endommagement de fatigue mais aussi l'endommagement monotone, ductile ou encore de fluage. L'endommagement est gouverné par la déformation plastique cumulée

$$p = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_p : \dot{\varepsilon}_p} dt \text{ où } \varepsilon_p \text{ est la déformation plastique.}$$

$$\dot{D} = \left(\frac{Y}{S} \right)^s \dot{p} \quad \text{Eq. I-21}$$

La loi est considérée sans seuil d'endommagement dans ce rapport. $Y = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial D}$ est la force thermodynamique associée à D (encore appelée taux de restitution de densité d'énergie) et D est la variable d'endommagement associée. S est la résistance à l'endommagement et $s \geq 0$ est un exposant qui prend compte de l'effet de triaxialité. S et s sont des paramètres matériaux à identifier.

- Endommagement des bétons par [Paas, 1990 ; Peerlings, 1999] :

Les travaux se sont focalisés sur la modélisation des mécanismes d'endommagement des bétons soumis à des sollicitations de fatigue, afin notamment de bien décrire l'évolution des microfissures initialement présentes dans le matériau. La dégradation du matériau est le résultat de l'amorçage, puis de la coalescence des micro-défauts ou micro-fissures. Dans le contexte de la mécanique des milieux continus, ce processus peut être modélisé en introduisant une (ou plusieurs) variable(s) interne(s) définissant l'état d'endommagement local et son évolution, notée D (scalaire pour l'endommagement isotrope). La loi d'endommagement établie permet de modéliser de façon continue l'état d'une structure soumise à la fatigue à grands nombres de cycles.

Les chargements uni-axiaux sont très souvent considérés dans les expériences en fatigue et pour étendre les résultats expérimentaux au 3D, il faut introduire des quantités équivalentes (scalaires). Dans ces travaux, la loi d'évolution de l'endommagement est gouvernée par la déformation équivalente ε_{eq} . La loi (Eq. I-22) fait intervenir trois paramètres d'endommagement caractéristiques du matériau α , β et γ .

$$\dot{D} = \alpha g(D) (\varepsilon_{eq})^\gamma \langle \dot{\varepsilon}_{eq} \rangle_+ \quad \text{Eq. I-22}$$

avec $g(D) = (D)^\beta$

La déformation équivalente ε_{eq} est choisie de façon à ce qu'elle varie entre 0 et une valeur maximale. Elle est définie en (Eq. I-23).

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\sum [\langle \varepsilon_i \rangle_+^2 + \tilde{h} \langle -\varepsilon_i \rangle_+^2]} \quad \text{Eq. I-23}$$

Où ε_i sont les déformations principales et le paramètre \tilde{h} varie entre 0 et 1 et tient compte du fait que les déformations en compression sont moins nocives que celles en traction.

Les travaux de [Peerlings, 1999] sont basés sur la même équation de départ (Eq. I-22) et les mêmes hypothèses. Seulement, la fonction $g(D)$ est modifiée telle que $g(D) = e^{\alpha D}$.

■ Endommagement des élastomères par [Miehe, 1995; Cantournet, 2002] :

Pour les élastomères, la théorie est différente en quelques points. [Miehe, 1995] a travaillé sur l'évolution de l'endommagement discontinue et continue sur les matériaux à comportement hyperélastique en grandes déformations. Expérimentalement, il a été observé une diminution de raideur dans les caoutchoucs par [Mullins et Tobin, 1965], [Harwood, Mullins et Payne, 1965] et encore [Mullins, 1969]. Cet assouplissement est dû à la rupture des liaisons entre la matrice et les particules renforçantes. [Gurtin et Francis, 1981] ont proposé une approche en petites déformations en 1D afin de modéliser ce phénomène d'assouplissement en se basant sur l'hypothèse que l'endommagement est caractérisé par une fonction de la déformation maximale atteinte pendant le chargement. Une formulation 3D, en grandes déformations fut proposée par [Simo, 1987] et [Simo et Ju, 1989], qui relie l'effet du taux d'endommagement à l'énergie de déformation effective maximale. [Govindje et Simo, 1991] ont proposé une approche dans laquelle l'endommagement est lié à l'élongation maximale sur toute l'histoire des déformations. [Miehe, 1995] couple élasticité isotrope en grandes déformations à l'endommagement. Il pose l'énergie libre telle que $\rho\psi = (1 - D)W_0$, où W_0 est la densité d'énergie de déformation sans endommagement pour un élastomère (de type Mooney-Rivlin (exemple ci-après), Arruda-Boyce, Hart-Smith, Lambert-Diani-Rey ou Ogden). $Y = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial D} = W_0$ est la force thermodynamique associée à l'endommagement. Les équations de l'évolution de l'endommagement ont été déterminées grâce aux observations expérimentales d'un chargement cyclique sur les caoutchoucs.

Dans le cadre des travaux de [Cantournet, 2002; Lemaitre, Desmorat 2005], la loi d'endommagement dite généralisée n'est plus gouvernée par la plasticité. Elle est formulée dans le cadre des déformations finies, en faisant intervenir le tenseur de déformation de Green-Lagrange \mathbb{E} , le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff \mathbb{S} et les variables internes suivantes :

1. le tenseur de déformation interne inélastique \mathbb{E}^π associé à \mathbb{S}^π ,
2. la variable interne de glissement α associée au tenseur des résidus des micro-contraintes \mathbb{X} ,
3. la variable d'endommagement isotrope D associée au taux de densité d'énergie restituée Y .

La loi d'endommagement généralisée (Eq. I-24) est gouvernée par le glissement interne cumulé π . D_c est l'endommagement critique tel que $D = D_c$ (amorçage d'une fissure).

$$\dot{D} = \left(\frac{Y}{S} \right)^s \dot{\pi} \quad \text{Eq. I-24}$$

avec $\pi = \int_0^t \|\dot{\mathbb{E}}^\pi\| dt$

- Endommagement des composites stratifiés par [*Gornet et Ijaz, 2011*] :

[*Gornet et Ijaz, 2011*] ont développé un modèle d'endommagement des interfaces entre plis dans les composites stratifiés, soumis à des chargements de fatigue, capable de simuler la progression du processus du délaminage. Trois variables d'endommagement D_I, D_{II} et D_{III} sont nécessaires pour caractériser les trois modes de fissuration de l'interface. L'évolution du délaminage sous un chargement de fatigue à grands nombres de cycles est considérée comme la combinaison du délaminage dû à un chargement quasi-statique et d'un délaminage dû à un chargement cyclique. L'endommagement total s'écrit pour chaque variable D_k comme la somme d'une contribution «monotone» $d_{(k)Mon}$ et de fatigue $d_{(k)F}$ (Eq. I-25).

$$D_{(k)Totale} = D_k = D_{(k)Mon} + D_{(k)Fat} \quad (k=1,2,3) \quad \text{Eq. I-25}$$

Les forces thermodynamiques, associées à ces variables d'endommagement, sont au nombre de trois (Eq. I-26).

$$Y_{D_3} = \frac{1}{2} \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_+^2}{k_3^0 (1 - D_3)^2} ; Y_{D_1} = \frac{1}{2} \frac{\langle \sigma_{13} \rangle_+^2}{k_1^0 (1 - D_1)^2} ; Y_{D_2} = \frac{1}{2} \frac{\langle \sigma_{32} \rangle_+^2}{k_2^0 (1 - D_2)^2} \quad \text{Eq. I-26}$$

où $\langle x \rangle_+ = \max(0, x)$ représente la partie positive de x . Les forces thermodynamiques sont couplées en une force motrice équivalente (Eq. I-27).

$$Y_{eq} = \max_{\tau \leq t} \left((Y_{D_3})^\alpha + (\gamma_I Y_{D_1})^\alpha + (\gamma_{II} Y_{D_2})^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad \text{Eq. I-27}$$

où γ_1 et γ_2 sont des paramètres de couplage et α est le paramètre caractéristique matériau qui gouverne l'évolution de l'endommagement en mode mixte.

Deux variables d'endommagement sont utilisées, une pour les chargements statiques (Eq. I-28) et la seconde pour les chargements de fatigue (Eq. I-29).

$$D_{Mon} = g(Y_{eq}) = \left[\frac{n}{n+1} \frac{\langle Y_{eq} - Y_0 \rangle_+}{S_{Mon}} \right]^n \text{ si } (D_{1S} < 1) \text{ et } (Y_{eq} < Y_R) \quad \text{Eq. I-28}$$

$$\text{Sinon } D_{(1)Mon} = D_{(2)Mon} = D_{(3)Mon} = D_c = 1$$

Y_0 est le seuil d'endommagement en densité d'énergie, S_{Mon} est la résistance de l'endommagement statique et n est un paramètre caractéristique du matériau.

$$\dot{d}_{Fat} = C e^{\beta d} \left(\frac{Y_{eq}}{S_{Fat}} \right)^\alpha \left\langle \frac{\dot{Y}_{eq}}{S_{Fat}} \right\rangle_+ \quad \text{Eq. I-29}$$

La loi d'évolution de l'endommagement de fatigue de l'interface est en taux d'endommagement. Elle est gouvernée par la force motrice Y_{eq} et est telle que $\dot{D}_{Fat} > 0$. β est un paramètre constant (de type [*Peerlings, 1999*]) et α et C sont des fonctions dépendantes des forces thermodynamiques. S_{Fat} est la résistance de l'endommagement de fatigue.

I. 4. Critères de ruptures

I. 4. 1. Les divers critères de rupture macroscopiques

Au-delà du **critère de la contrainte maximale** qui est le critère le plus connu et le plus simple (ou sa forme duale le critère de déformation maximale), il existe tout un ensemble de critères utilisés sur les composites [Tsai, 1992] que nous ne détaillerons pas ici [Berthelot, 1992]. La tendance actuelle est d'utiliser des multi-critères où un critère est associé à chaque mode de rupture [Hashin, 1980 ; Laurin 2005].

I. 4. 2. Le critère de rupture progressive des torons utilisé dans ODM-CMO

Dans le modèle ODM-CMO [Marcin, 2010] et [Rakotoarisoa, 2013], le critère de rupture mis en place tient compte des phénomènes physiques du matériau et notamment de la rupture progressive des torons de fibres. Il ne s'agit donc pas d'un critère de rupture utilisé en post-traitement. Ce critère implique l'intégration d'une nouvelle variable interne qui décrit les événements au moment où le matériau a atteint un état d'endommagement trop important qui correspond au début de la rupture de fibres (ou torons de fibres). La rupture d'un toron est considérée comme catastrophique et engendre la rupture de la pièce.

Il est intéressant de noter les problèmes rencontrés lorsque la pièce, de par sa forme par exemple, présente une singularité et donc une concentration de contrainte, celle-ci va se comporter différemment. Les critères de rupture utilisés en post-traitement sous estiment souvent la tenue de la pièce. Ce constat incite à la formulation d'un critère de rupture tenant compte des phénomènes physiques, et qui permette la rupture des fibres de façon progressive. A chaque rupture de fibre, la charge est reprise par les fibres juxtaposées à celle qui vient de rompre, cela conduit souvent à un **comportement adoucissant**. La rupture de la pièce est admise lorsque le report de charge ne peut plus se faire du fait de ruptures de fibres trop importantes.

Ainsi, en plus des variables d'endommagement matricielles, il a été défini une variable interne supplémentaire qui a pour but de suivre l'endommagement des torons. Cette variable est notée d_k^f (« f » pour fibre). De la même manière, il y a une variable d'endommagement par mécanisme de dégradation à savoir les modes de ruine (traction et compression) dans les directions d'orthotropie (chaîne, trame et hors-plan).

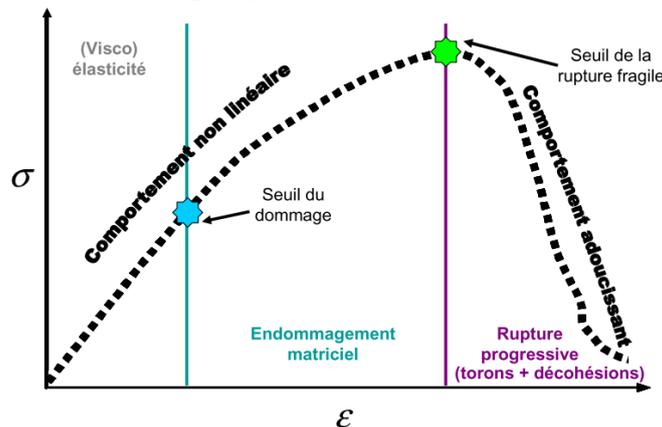


Figure 14 : Schéma de principe de la modélisation du comportement matériau des composites tissés jusqu'à rupture avec la partie adoucissante [Marcin, 2010]

Une fois le seuil de rupture fragile atteint, le comportement devient adoucissant (Figure 14). Les variables d'endommagement du modèle ODM-CMO étant gouvernées par les forces motrices, le seuil de rupture est donc écrit en force motrice et est noté $y_{0(k)}^f$. Lorsque cette valeur seuil de la force motrice des fibres est atteint par l'une des six forces motrices de rupture de fibres ($j=1$ traction, 1 compression, 2 traction, 2 compression, 3 traction, 3 compression), la rupture fragile est atteinte (Eq. I-30).

$$y_{(k)}^f - y_{0(k)}^f \geq 0 \quad \text{Eq. I-30}$$

La loi d'endommagement des fibres a le même formalisme que la loi d'endommagement monotone. L'effet de cet endommagement sur le comportement est géré grâce à l'ajout d'une souplesse ΔS^f liée à la dégradation des fibres (Eq. I-31).

$$\mathbb{S}^{eff} = \mathbb{S}^0 + \Delta \mathbb{S} + \Delta \mathbb{S}^f \quad \text{Eq. I-31}$$

Les mécanismes de rupture n'ont pas le même effet sur l'augmentation de la souplesse selon que les fissures sont fermées ou ouvertes, le tenseur de variation de souplesse dû aux ruptures des fibres dépend donc des indexes de désactivation des fissures ainsi que des tenseurs des effets correspondants à chaque état (Eq. I-32).

$$\begin{aligned} \Delta \mathbb{S}^{eff} = & \sum_{k=1}^3 d_k^{(f)T} \left(\eta_k^{(f)T+} \mathbb{H}_k^{(f)T+} + (1 - \eta_k^{(f)T-}) \mathbb{H}_k^{(f)T-} \right) \\ & + \\ & \sum_{k=1}^3 d_k^{(f)C} \left((1 - \eta_k^{(f)C}) \mathbb{H}_k^{(f)C+} + \eta_k^{(f)C} \mathbb{H}_k^{(f)C-} \right) \end{aligned} \quad \text{Eq. I-32}$$

Le tenseur $\mathbb{H}^{(f)}$ est le tenseur d'effets lié aux ruptures de torons. La sollicitation sous laquelle apparaît la rupture est indiquée par « T » pour la traction ou « C » pour la compression. L'exposant « + » ou « - » indique l'état actif ou passif de la rupture. Cette différenciation est faite pour dissocier le comportement du matériau après une rupture de fibre sous un chargement de traction, différent de celui après une rupture de fibre sous un chargement de compression [Hurmane, 2012]. Les faciès sont représentés en (Figure 15).

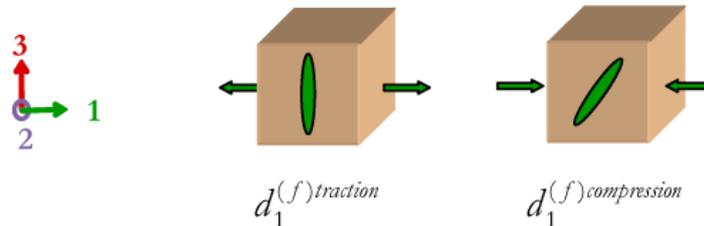


Figure 15 : Orientations schématisées des faciès de rupture de torons en fonction de la sollicitation [Rakotoarisoa, 2013]

Dans ce premier chapitre, nous avons présenté dans un premier temps, les modèles d'endommagement, pour divers types de matériaux composites (stratifiés, 2D, 3D, 3D), pour des sollicitations monotones. Nous avons différencié les modèles à variables d'effet des modèles à densité de fissures. Ensuite, quelques modèles d'endommagement pour les sollicitations de fatigue ont été présentés. Ces modèles ont pour objectif d'arriver à prévoir la durée de vie du matériau. Là encore, nous avons différencié les modèles de durée de vie empirique, relativement simple, des modèles basés sur les phénomènes physiques tels que les modèles phénoménologiques ou les modèles d'endommagement progressifs. Le modèle d'endommagement ODM-CMO a été présenté, et c'est sur ce modèle que se base notre étude, qui peut être vue comme une extension de ce modèle.

L'état de l'art des lois d'endommagement temporelles a montré que divers travaux ont été réalisés, dont au moins une sur les composites stratifiés. Par contre, de telles lois ne semblent pas avoir été proposées pour aucune étude sur les composites tissés.

I. 5. Conclusion

Ce chapitre a permis de présenter, à travers une étude bibliographique, les modèles d'endommagement pour les sollicitations monotones dans un premier temps et pour les extensions aux sollicitations de fatigue ensuite. Au fur et à mesure que la recherche avance, notamment en termes de moyens expérimentaux, les modèles se complexifient et se basent notamment sur la compréhension des phénomènes physiques et des mécanismes de dégradation du matériau étudié. Ce sont des modèles progressifs. Les modèles de fatigue établis pour des matériaux composites (stratifiés surtout) utilisent surtout des lois d'endommagement en cycles.

Le modèle ODM-CMO mis en avant dans cette étude, naturellement écrit pour les cas de chargements monotones puis étendu à la fatigue, se focalise sur l'étude des composites tissés 3D à matrice organique. La loi d'endommagement de fatigue établie est une loi d'endommagement en cycles.

D'autres lois sont mises en avant dans ce chapitre introductif, ce sont les lois temporelles, qui évoluent en fonction du temps, et donnent l'évolution de l'endommagement de façon continue en fonction du temps. Les modèles présentés concernent principalement les métaux, les bétons ou les caoutchoucs. Néanmoins, [Gornet et Ijaz, 2010] ont proposé un modèle temporel pour les composites stratifiés.

La plupart des modèles présentés sont définis avec deux variables d'endommagement, une pour les sollicitations monotones, une seconde pour les sollicitations de fatigue.

L'objectif de ces travaux est de proposer un modèle d'endommagement temporel pour l'étude du comportement des composites tissés 3D, à la fois pour les sollicitations monotones et celles de fatigue. Nos travaux se basent sur ceux effectués à l'Onera. Notre objectif est alors de proposer une loi d'endommagement complémentaire à celles (monotone et fatigue) du modèle ODM-CMO. Le modèle proposé est, une extension du modèle ODM-CMO, avec la différence majeure que la loi d'endommagement est temporelle pour ce nouveau modèle d'endommagement 3D, que nous renommons *ODM*. Nous nous appuyons sur les travaux de [Gornet et Ijaz, 2010] et ceux de [Miehe, 1995] afin de proposer une loi d'endommagement temporelle, qui est présentée dans le Chapitre III.

Le modèle d'endommagement diffère donc du modèle ODM-CMO de par la loi d'endommagement mais aussi de par le critère de rupture qui est défini autrement. En effet, dans nos travaux, nous considérons que la rupture intervient lorsque l'endommagement atteint une valeur critique. Dans notre cas, il y a trois valeurs critiques de l'endommagement, une par mécanismes d'endommagement. L'endommagement critique est l'endommagement atteint à la contrainte ultime de traction.

CHAPITRE II PROPOSITION D'UNE METHODE « INGENIEUR » DE CONSTRUCTION DES DIAGRAMMES DE HAIGH ET DES COURBES DE WOHLER

Sommaire du chapitre II

II. 1. Outils usuels pour le dimensionnement aux chargements de fatigue	38
II. 1. 1. Les courbes de Wöhler	38
II. 1. 2. Diagramme de Haigh	40
II. 2. Utilisation « industrielle » des diagrammes de Haigh et des courbes de Wöhler	48
II. 2. 1. Utilisation des courbes de Wöhler faite par Snecma	48
II. 2. 2. Utilisation des diagrammes de Haigh à Snecma	48
II. 3. Proposition d'une forme pour la courbe de Wöhler et le diagramme de Haigh	49
II. 3. 1. Forme des courbes de Wöhler	49
a) Forme semi-logarithmique	49
b) Forme en « S »	50
II. 3. 2. Forme des diagrammes de Haigh	51
II. 4. Proposition d'une méthode analytique dite « ingénieur » de construction des diagrammes de Haigh	57
II. 5. Reconstruction des courbes de Wöhler à partir du diagramme de Haigh et validation de la démarche	62
II. 6. Construction d'une courbe maîtresse	64
II. 7. Conclusion	65

Différents outils peuvent être utilisés pour aider l'ingénieur à comprendre et analyser l'évolution du comportement d'un matériau composite en fonction des conditions d'essais, notamment pour le domaine de la fatigue (nombre de cycles imposé, contrainte imposée, rapport de charge). Ainsi les diagrammes de Haigh et les courbes de Wöhler permettent de regrouper une multitude d'essais, ce qui a pour avantage d'améliorer l'analyse qui peut être faite et ainsi de rendre plus robustes les choix pour le dimensionnement. Dans la littérature, nous trouvons avant tout des diagrammes empiriques ou phénoménologiques pour tous types de matériaux et notamment les composites stratifiés.

Après avoir présenté les outils usuellement utilisés pour analyser les essais de fatigue (II.1), l'objectif de ce chapitre est alors de proposer une méthodologie afin de construire les diagrammes de Haigh ainsi que les courbes de Wöhler, de façon simple et rapide. La méthode est empirique, c'est-à-dire basée sur les résultats d'essais expérimentaux Snecma. Cette méthode dite « ingénieur » a pour principal objectif de fournir un outil à la fois simple et rapide, qui est très facile à prendre en main et donc utilisable par des ingénieurs non spécialistes.

Nous allons justement revenir en (II.2) sur les besoins et demandes des ingénieurs Snecma concernant l'utilisation de ces diagrammes et connaître leurs attentes afin de bien cibler les études en fatigue menées sur le composite tissé 3D et notamment sur les problématiques de durée de vie. Dans la partie (II. 3), nous proposons une forme pour les courbes de Wöhler et les diagrammes de Haigh, choix appuyés d'une part sur l'étude bibliographique (II.1) mais aussi sur les résultats expérimentaux Snecma. Une fois la forme choisie, il faut définir un processus de construction des diagrammes de Haigh notamment de façon à ce que la méthode puisse être utilisée simplement par n'importe quel utilisateur. C'est l'objet de la partie (II.4). Nous allons voir en (II.5) qu'à partir d'un diagramme de Haigh nous pouvons proposer une méthode pour reconstruire les courbes de Wöhler à tous les rapports de charge. Dans la partie (II. 6) sont présentés les avantages de travailler avec des courbes maitresses.

II. 1. Outils usuels pour le dimensionnement aux chargements de fatigue

II. 1. 1. Les courbes de Wöhler

Nous avons présenté dans le chapitre précédent les moyens permettant notamment de modéliser l'évolution des variables d'endommagement ainsi que leur effet sur les propriétés matériaux (rigidité, souplesse), pour des sollicitations monotones ou de fatigue. Pour l'étude de la fatigue, ces modèles (que ce soit des modèles en cycles ou des modèles temporels) permettent entre autre d'étudier les conséquences de chargements cycliques à très grands nombres de cycles sur le comportement du matériau. Le dimensionnement de pièces soumises à ce type de sollicitations est une tâche incontournable. Il faut alors des outils qui permettent de prévoir la durée de vie des pièces soumises à la fatigue, c'est le cas notamment de l'aube FAN. C'est l'objet de cette partie. Nous présentons deux outils grandement utilisés, les courbes de Wöhler et les diagrammes de Haigh (souvent confondus avec les diagrammes de Goodman). Bien que les diagrammes de Haigh soient moins utilisés que les courbes de Wöhler, ils sont toutefois utilisés dans le domaine aéronautique et leurs études ont été une requête de l'industriel pour ces présents travaux sur le composite tissé 3D. Nous allons voir qu'il existe un lien entre les courbes de Wöhler et les diagrammes de Haigh et qu'il est ainsi très intéressant de travailler avec les deux outils, qui sont complémentaires l'un de l'autre.

Le dimensionnement des structures pour les sollicitations cycliques de fatigue nécessite donc des outils faisant le lien entre les conditions de chargements (par exemple, contrainte maximale, rapport de charge) et le nombre de cycles de fatigue au bout duquel le matériau a rompu, ces outils permettent d'estimer la durée de vie du matériau pour les sollicitations de fatigue.

La **courbe de Wöhler** (August Wöhler 1819-1914) représente la limite entre un domaine considéré comme exploitable et dans lequel le matériau est considéré comme non rompu, et un domaine inexploitable, dans lequel celui-ci est considéré comme rompu et pour lequel la pièce

ne peut plus remplir ses fonctions. Une représentation schématique d'une courbe de Wöhler lissée (Figure 16) représente les contraintes maximales (ou contraintes alternées) en fonction des nombres de cycles à rupture. En réalité, à chaque contrainte maximale de sollicitation correspond un nombre de cycles au bout duquel le matériau va rompre. En général, plus la contrainte maximale diminue, plus le nombre de cycles atteint avant de rompre est grand. On appelle ce domaine de la courbe de Wöhler, le domaine HCF (High Cycle Fatigue) qui commence à partir de 10^4 cycles. Inversement, le domaine LCF (Low Cycle Fatigue) est celui où le nombre de cycles à rupture atteint est faible et correspond à des forts niveaux de contraintes maximales, entre 1 et 10^4 cycles.

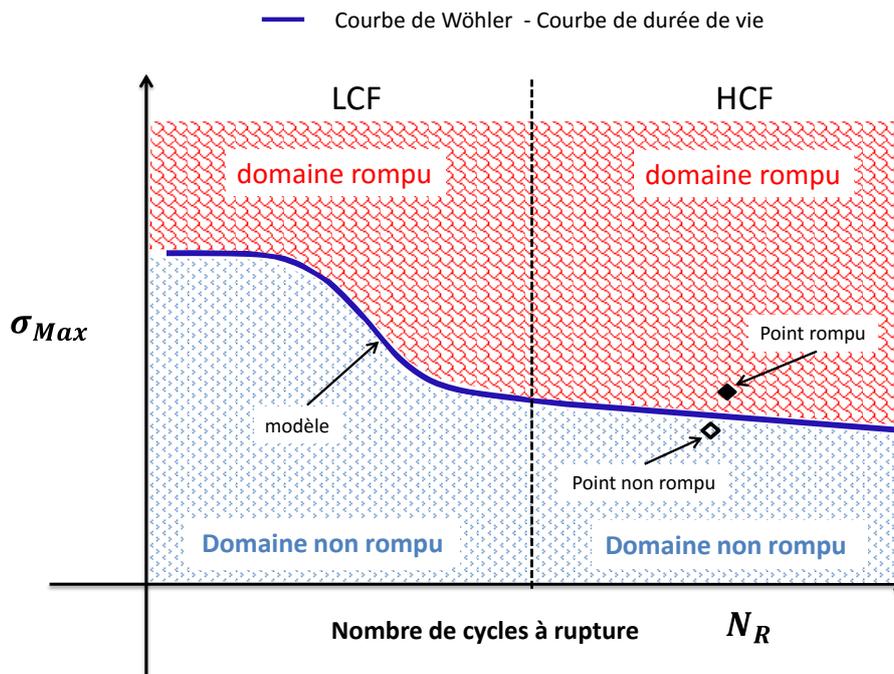


Figure 16 : Représentation d'une courbe de Wöhler lissée (ou courbe de durée de vie)

Les résultats d'essais expérimentaux sont représentés sur la courbe, sous forme de « points », pour lesquels sont distingués les points non-rompus (marques vides sur les figures) et les points rompus (marques pleines sur les figures). Le modèle d'endommagement doit prévoir la durée de vie représentée par une courbe, qui doit donc passer au mieux entre ces points (à savoir entre les points non-rompus et les points rompus). Idéalement, les points rompus sont au-dessus de la courbe (zone critique), les points non-rompus se retrouvent en dessous de la courbe (zone acceptable). La réalité en est plus complexe du fait de la dispersion des résultats mais la modélisation/identification est faite de façon à respecter le plus justement possible le comportement du matériau (supposé au travers des résultats expérimentaux). Les notions de statistique/probabilité seront abordées dans le Chapitre VII.

Pour le tracer, des essais simples qui consistent à soumettre chaque éprouvette à des cycles d'efforts périodiques, d'amplitude $\sigma_a = \frac{1}{2}(\sigma_{Max} - \sigma_{min})$ constante de chargement (ou de contrainte maximale σ_{Max} constante), sont généralement réalisés. Ainsi, à chaque éprouvette testée, correspond donc un point du diagramme (N_R, σ_a) ou bien (N_R, σ_{Max}) et à partir d'un certain nombre d'essais, une tendance de la courbe de Wöhler se dessine peu à peu.

II. 1. 2. Diagramme de Haigh

Nous l'avons dit, les **diagrammes de Haigh** sont utilisés très souvent pour le dimensionnement des structures aux chargements de fatigue. Une confusion est souvent faite entre diagramme de Haigh et diagramme de Goodman, mais dans les deux cas, ils mettent en évidence l'effet de contrainte moyenne. Le diagramme de Haigh à N_R donné représente la contrainte alternée en fonction de la contrainte moyenne, tandis que le diagramme de Goodman, équivalent, représente les contraintes maximale et minimale en fonction de la contrainte moyenne. Dans ces travaux, nous nous intéressons de manière préférentielle aux diagrammes de Haigh.

Le rapport de charge (en contrainte) $R_\sigma = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{Max}}$ est le rapport entre la contrainte minimale sur la contrainte maximale d'un cycle. Ce rapport est une information supplémentaire visualisée sur les diagrammes de Haigh. En effet, il existe des relations entre le rapport de charge, les contraintes minimale et maximale, la contrainte moyenne $\bar{\sigma}$ et la contrainte alternée σ_a (Eq. II-1). La Figure 17 représente ces deux relations au travers d'un schéma d'un chargement cyclique.

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{2}(\sigma_{Max} + \sigma_{min}) = \frac{1}{2}\sigma_{Max}(1 + R_\sigma)$$

et

Eq. II-1

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(\sigma_{Max} - \sigma_{min}) = \frac{1}{2}\sigma_{Max}(1 - R_\sigma)$$

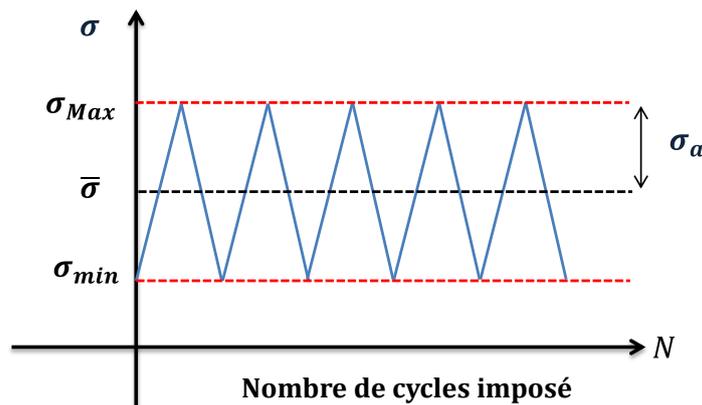


Figure 17 : Définition de la contrainte moyenne et de la contrainte alternée

Nous pouvons alors définir le rapport de charge, à partir de sa définition à savoir $R_\sigma = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{Max}}$ et de l'équation, en fonction de la contrainte moyenne et la contrainte alternée (Eq. II-2).

$$R_\sigma = \frac{\bar{\sigma} - \sigma_a}{\bar{\sigma} + \sigma_a}$$

Eq. II-2

La Figure 18 présente une schématisation du diagramme de Haigh et fait le lien avec les différents chargements cycliques de différents rapports de charge correspondants aux points A, B, C et D [Vassilopoulos, 2010].

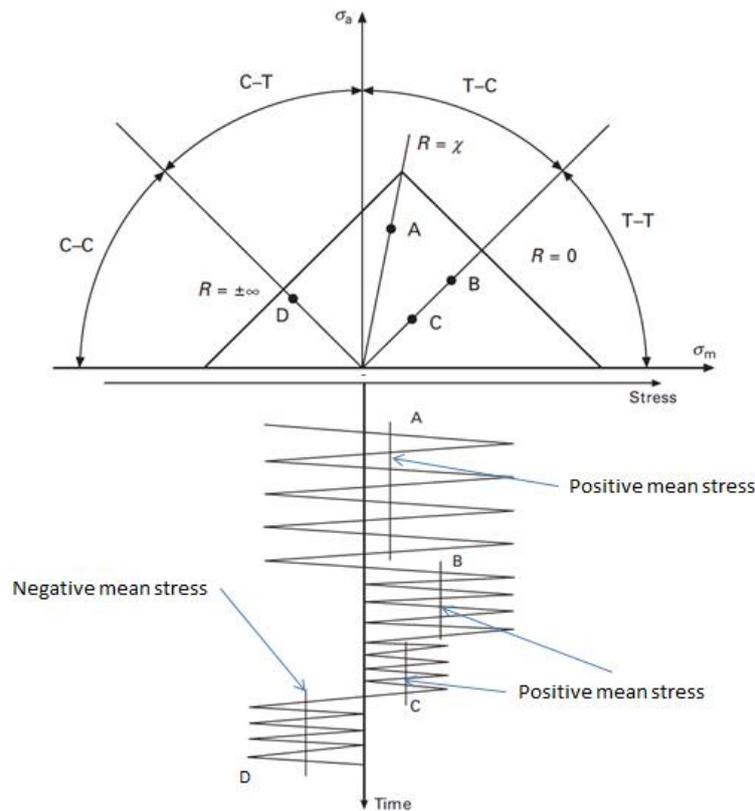


Figure 18 : Schématisation d'un diagramme de Haigh [Vassilopoulos, 2010]

Au travers de toutes ces relations, on voit apparaître le lien entre les courbes de Wöhler (exprimée en fonction de la contrainte alternée) et les diagrammes de Haigh. Ceci est représenté sur la Figure 19.

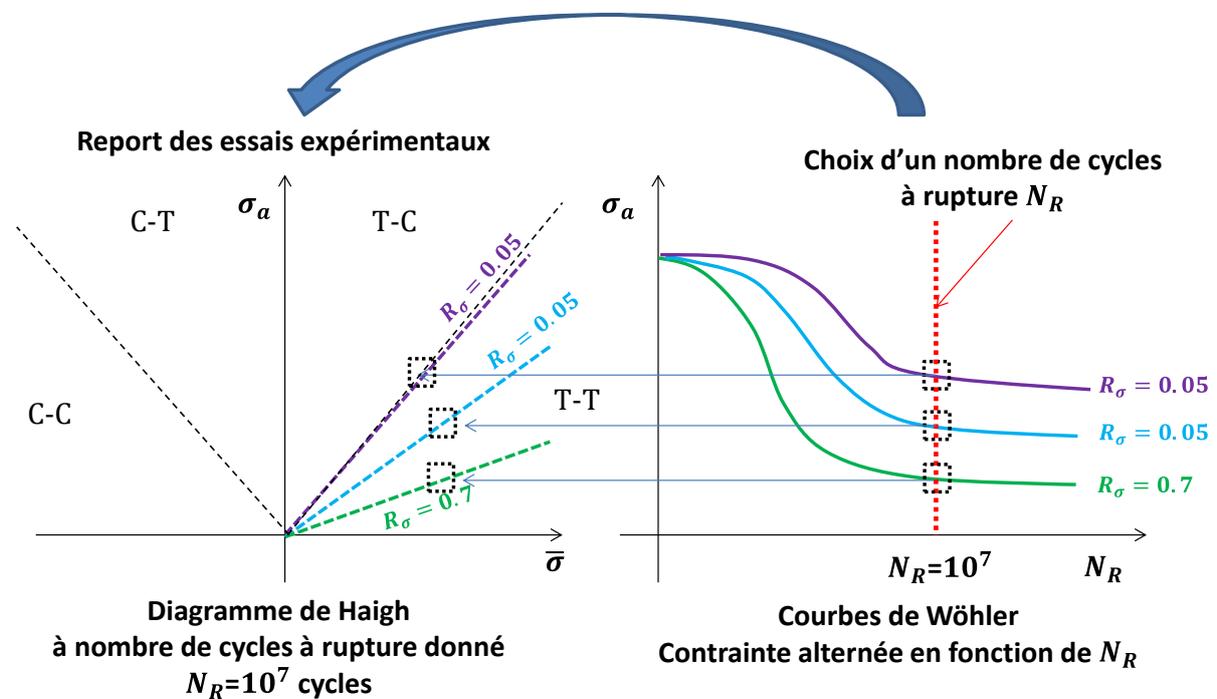


Figure 19 : Relation entre les courbes de Wöhler et le diagramme de Haigh

Nous présentons quelques diagrammes calculés par des approches empiriques. Pour le diagramme de Haigh, il est possible de connaître deux points du diagramme qui ont permis de définir des modèles simplifiés. Le point $(\sigma_{a(R_\sigma=-1)}, 0)$ sur la droite de rapport de charge $R_\sigma = -1$, qui correspond à la rupture pour un chargement symétrique alterné et le point $(0, \sigma_u^t)$ qui correspond à la rupture pour un chargement monotone pur peuvent être calculés. Ces deux points ont été utilisés pour définir l'enveloppe limite (en rejoignant ces deux points). C'est le cas de la **droite de Goodman** qui est définie par l'équation (Eq. II-3).

$$\sigma_a = \sigma_{a(R_\sigma=-1)} \cdot \left(1 - \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_u^t}\right) \quad \text{Eq. II-3}$$

Le **modèle de Soderberg** est plus sévère, la droite s'arrête non pas à la contrainte ultime de traction mais à la limite d'élasticité notée R_e (Eq. II-4).

$$\sigma_a = \sigma_{a(R_\sigma = -1)} \cdot \left(1 - \frac{\bar{\sigma}}{R_e}\right) \quad \text{Eq. II-4}$$

Gerber propose un modèle décrivant la limite entre zone non-critique et critique par une parabole (Eq. II-5).

$$\sigma_a = \sigma_{a(R_\sigma = -1)} \cdot \left(1 - \left(\frac{\bar{\sigma}}{R_m}\right)^2\right) \quad \text{Eq. II-5}$$

Enfin, la méthode VDI propose de représenter la limite avec deux segments de droites. C'est un modèle dit « bilinéaire ». Le premier segment de droite est défini tel que $\left[0; \sigma_{a(R_\sigma = -1)}\right]$; $\left(R_m - \frac{\sigma_{a(R_\sigma=-1)}}{2}; \frac{\sigma_{a(R_\sigma=-1)}}{2}\right)$ et le second tel que $\left[\left(R_m - \frac{\sigma_{a(R_\sigma=-1)}}{2}; \frac{\sigma_{a(R_\sigma=-1)}}{2}\right); (R_m; 0)\right]$. Ces modèles sont représentés en (Figure 20).

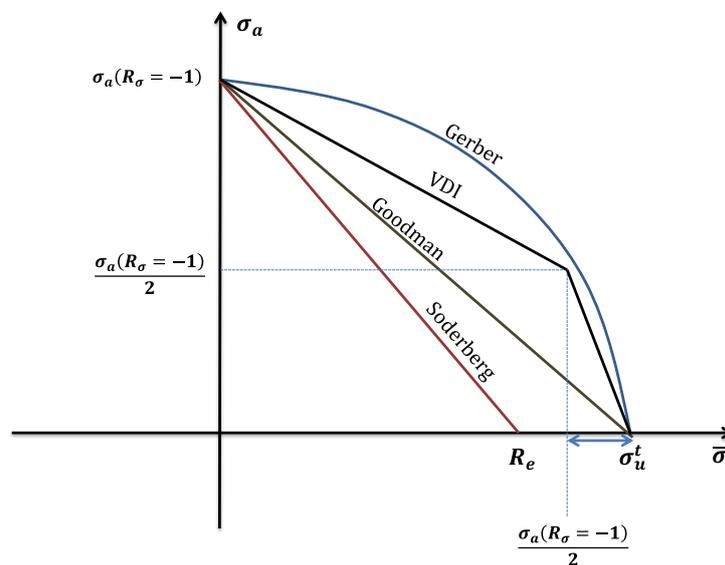


Figure 20 : Représentation des divers modèles (habituellement utilisés pour les matériaux métalliques) prévoyant la surface limite sur le diagramme de Haigh

Ces diagrammes sont utilisés pour dimensionner différents types de matériaux même si leur usage est plutôt rencontré sur les matériaux métalliques et si aucun n'a été validé sur des composites. Pour les composites, nous trouvons dans la littérature des travaux sur l'étude du comportement en fatigue à travers des diagrammes de Haigh et des courbes de Wöhler, avant tout pour les composites stratifiés [Vassilopoulos, 2010]. Dans son ouvrage, [Vassilopoulos, 2010] présente diverses études qui proposent des diagrammes de Haigh, ils y sont dénommés « CFL

diagram » (constant fatigue life diagram). Les études sont phénoménologiques, les diagrammes proposés reposent tous sur des campagnes expérimentales importantes. Il met en avant 2 grands types de diagrammes :

- les diagrammes linéaires [Goodman, 1899]
- les diagrammes non linéaires [Gerber, 1874]

Pour chacun de ces deux grands types de diagrammes, il fait la distinction entre diagrammes symétriques et asymétriques, par rapport à la droite de rapport de charge $R_\sigma = -1$. Les travaux de [Boller, 1964] ont permis de montrer que (i) le comportement semblait différent entre le domaine dominant en traction et celui en compression et que (ii) l'enveloppe se déplaçait en fonction du nombre de cycles à rupture [Hahn, 1979] (Figure 21).

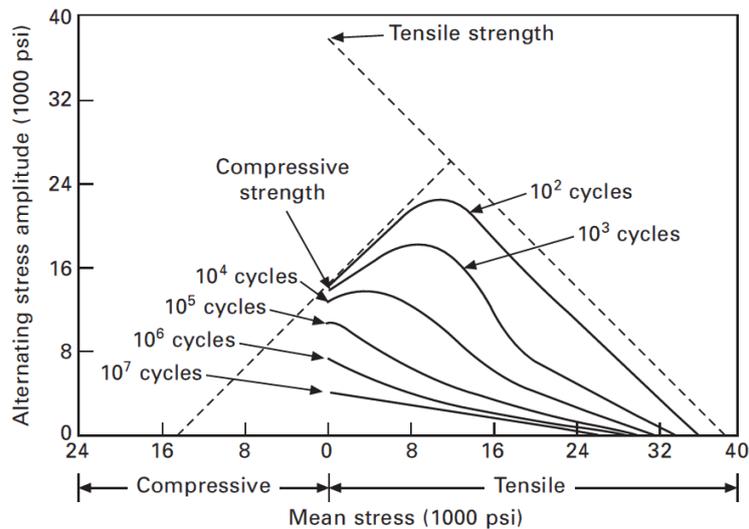


Figure 21 : Effet de contrainte moyenne en fonction de la contrainte alternée pour un composite stratifié fibre de verre/polyester [Boller, 1964]

Des travaux sur des diagrammes linéaires CFL de forme asymétrique ont été réalisés sur le bois et les composites à matrice polymère à fibres de verre [Ansell et al, 1993; Bond et Ansell, 1998a, b; Bond, 1999] et les composites à fibres de verre [Sutherland et Mandell, 2004].

Suite aux travaux de [Ramani et Williams, 1977], beaucoup d'études expérimentales ont suivi [Ansell et al. (1993); Harris et al. (1990, 1997); Adam et al. (1989, 1992); Gathercole et al. (1994); Beheshty et al. (1999); Phillips (1981); Kawai and Koizumi (2007); et Kawai and Murata (2008)]. Toutes les études menées allaient dans le même sens, à savoir le maximum de l'enveloppe diffère en fonction du nombre de cycles à rupture. La question s'est posée de savoir où se trouvait les maxima. Les études ont permis de remarquer que les sommets des enveloppes tombaient presque sur une seule ligne radiale associée à un certain rapport de charge. Il a donc été supposé que les sommets se plaçaient sur la même ligne radiale en posant (Eq. II-6) et où χ est le rapport de charge particulier $R_\sigma = \chi$ pour lequel l'enveloppe est maximale pour toutes durées de vie (Figure 22).

$$\frac{\sigma_a}{\bar{\sigma}} = \frac{1 - \chi}{1 + \chi} \quad \text{Eq. II-6}$$

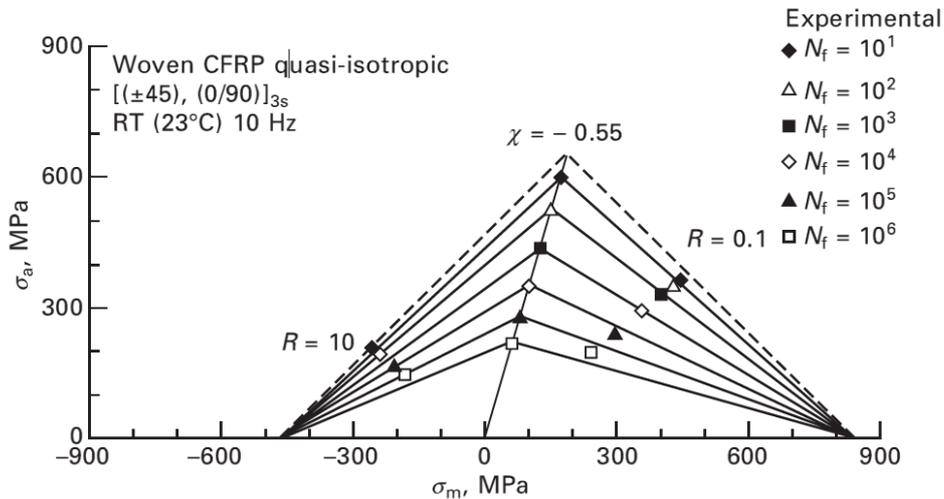


Figure 22 : Diagramme incliné pour un stratifié fibre de carbone/époxy [(+45/-45),(0/90)]_{3s} [Vassilopoulos, 2010]

Les résultats sur les diagrammes linéaires par morceaux (Figure 23) ou non-linéaires sont nombreux, il y a ceux de [Boller, 1957 et 1964] qui fut un des premiers, mais aussi ceux de [Ansell et al. 1993, Bond et Ansell 1998a,b et Bonfield and Ansell 1991] pour les bois; [Sutherland and Mandell, 2004] pour les composites à fibres de verre, [Harris et al. 1990, 1997 ; Adam et al. 1989, 1992 ; Gathercole et al. 1994, Beheshty et al. 1999 ; Phillips 1981, Kawai et Koizumi 2007, Kawai et Murata 2008] pour les composites à fibres de carbone (Figure 24).

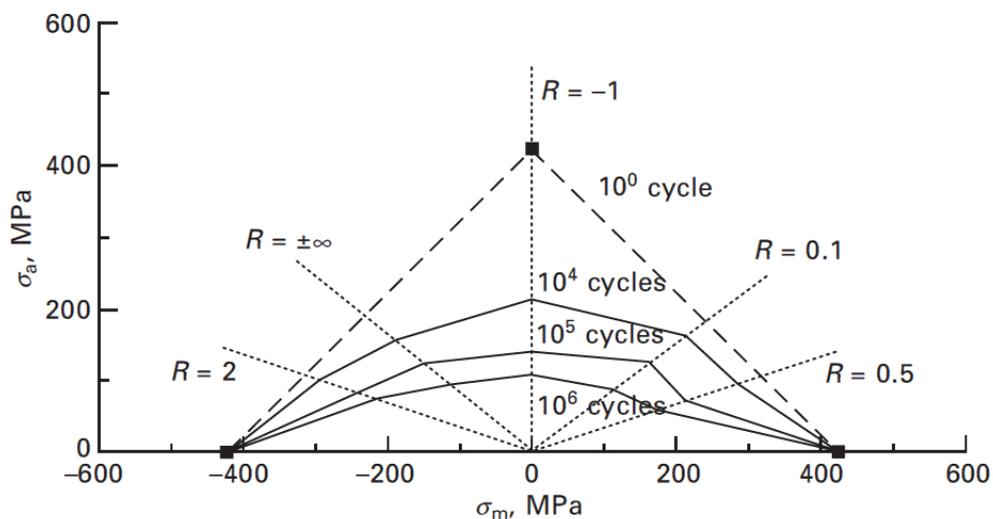


Figure 23 : Schématisation d'un diagramme linéaire par morceaux [Vassilopoulos, 2010]

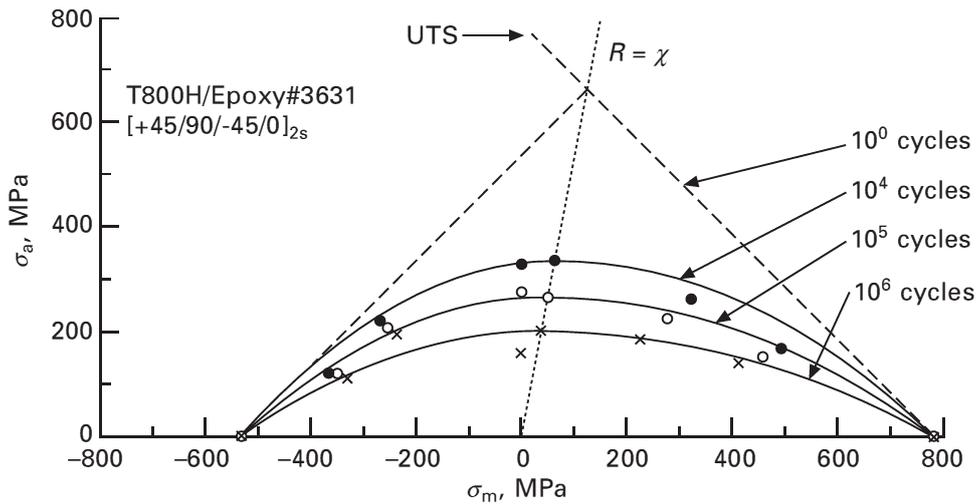


Figure 24 : Diagramme incliné pour un stratifié T800H/3631 [+45/90/-45/0]2S carbone/époxy [Kawai et Koizumi, 2007]

Enfin, Kawai et ses collaborateurs [Kawai et al, 2006, 2008; Kawai et Koizumi, 2007] ont récemment mis au point une autre méthode de prédiction de durée de vie pour les composites basée sur un diagramme non-linéaire. Toutes les exigences proposées par [Boller, 1957, 1964] ont été prises en compte dans la formulation. En particulier, la modification de la forme de l'enveloppe en fonction du nombre de cycles à rupture. Le diagramme est construit en utilisant seulement les contraintes monotones de traction σ_u^t et de compression σ_u^c , ainsi que la courbe de Wöhler pour un rapport de charge en contrainte particulier qui est appelé rapport de charge en contrainte critique χ défini tel que $\chi = \frac{\sigma_u^c}{\sigma_u^t}$ est le rapport de la contrainte ultime de

compression sur la contrainte ultime de traction. Cette méthode a pour avantage de construire un diagramme avec très peu de données expérimentales. Un exemple est donné en (Figure 25) pour un stratifié carbone/époxy.

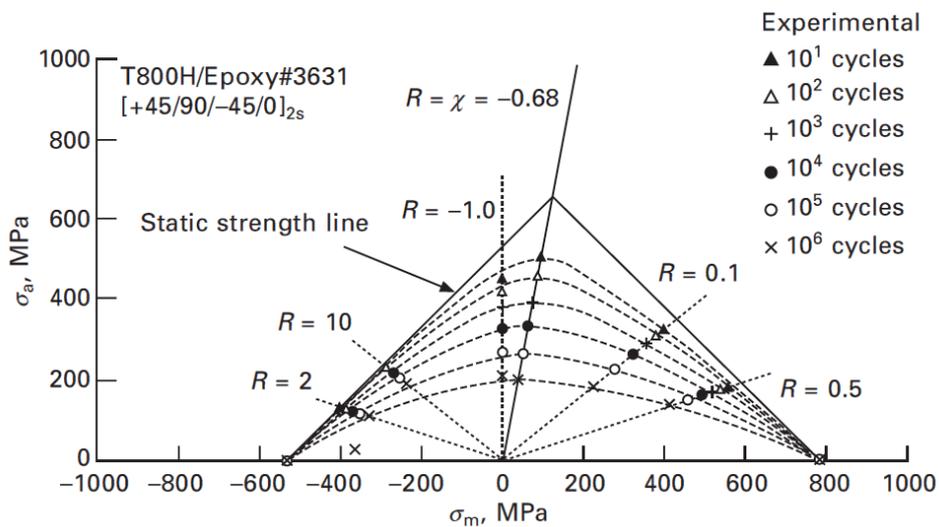


Figure 25 : Diagramme anisomorphe pour un stratifié [+45/90/-45/0]2S carbone/époxy [Kawai et Koizumi, 2007]

Comme nous l'avons vu, un diagramme de Haigh est souvent défini pour un nombre de cycles à rupture donné. C'est-à-dire qu'à chaque nombre de cycles à rupture correspond un diagramme de Haigh, ou plutôt une enveloppe délimitant le domaine non-rompu et le domaine rompu. Ainsi, nous pouvons faire le lien entre la courbe de Wöhler (contrainte alternée fonction du nombre de cycles à rupture) et le diagramme de Haigh et alors définir pour chaque nombre de cycles à rupture, une enveloppe dans le diagramme de Wöhler (Figure 26).

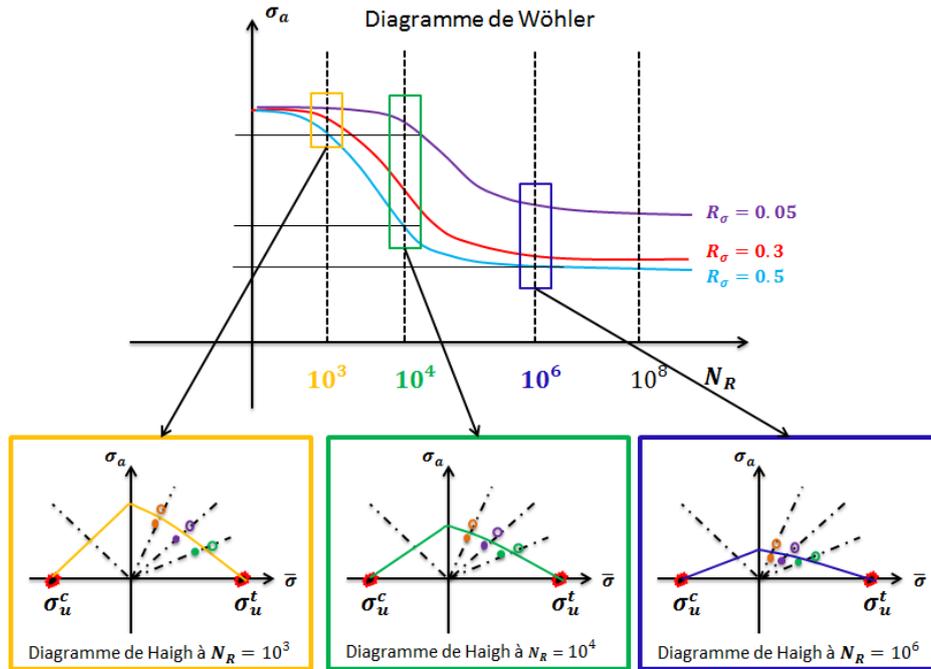


Figure 26 : Lien entre les courbes de Wöhler et les diagrammes de Haigh

Il est possible dans le diagramme de Haigh, de faire la distinction entre trois domaines (en plus des deux domaines rompu et non-rompu). A savoir le domaine **Traction - Traction** (qu'on notera T-T), le domaine **Traction - Compression** (T-C) et enfin le domaine **Compression - Compression** (C-C) (Figure 27). Le domaine Traction - Traction concerne les essais effectués pour des rapports de charge R_σ positifs. Ce domaine étant limité par la droite correspondant au rapport de charge $R_\sigma = 0$ et par celle correspondant au rapport de charge $R_\sigma = 1$. Le second domaine est limité par la droite à $R_\sigma = 0$ et la droite à $R_\sigma = -\infty$ (qui correspondant à une contrainte maximale nulle $\sigma_{Max} = 0$), c'est le domaine de Traction - Compression. Les rapports de charge dans ce domaine sont donc négatifs. La droite au centre (soit l'axe des ordonnées) de ce domaine est la droite à $R_\sigma = -1$ (qui correspond à un chargement cyclique alternée, symétrique). Le troisième domaine est donc celui de Compression - Compression, qui correspond à des chargements cycliques pour lesquels la contrainte minimale et la contrainte maximale sont négatives.

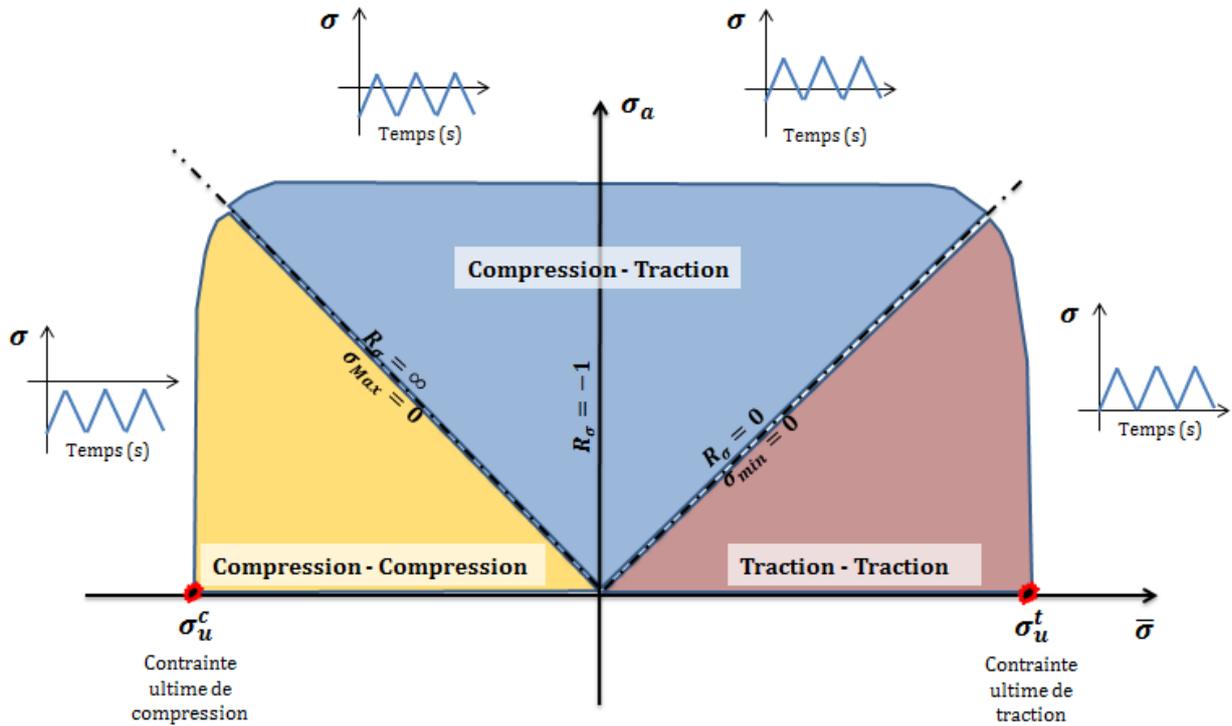


Diagramme de Haigh à N_R donné

Figure 27 : Domaines du diagramme de Haigh

Pour notre matériau le composite tissé 3D, il semble qu'il existe encore très peu de travaux sur ces notions et notamment la description d'un diagramme de Haigh à un nombre de cycles à rupture assez grand, dans les trois domaines explicités juste avant.

Dans ses travaux, [Rakotoarisoa, 2013] a calculé numériquement grâce à son modèle en cycles, pour des chargements de fatigue, un diagramme de Haigh « à iso-durée de vie » (Figure 28). Sur un seul et même diagramme, elle affiche les prévisions du modèle pour plusieurs nombres de cycles à rupture (ou durée de vie).

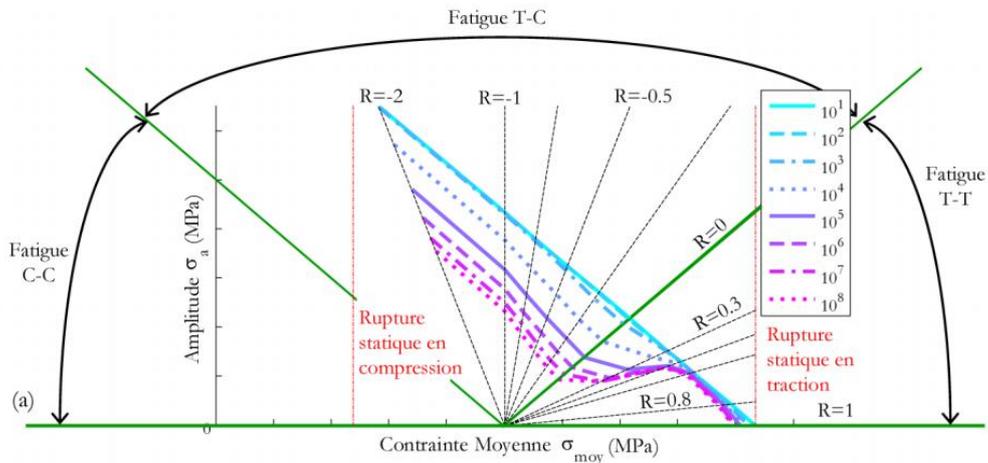


Figure 28 (annexe confidentielle): Diagramme de Haigh à iso-durée de vie pour le composite tissé 3D obtenu par le modèle d'endommagement ODM-CMO [Rakotoarisoa, 2013]

Une fois qu'elle a eu identifié les paramètres de son modèle, elle a pu tracer l'allure du diagramme de Wöhler, à différents rapports de charge R_σ . A noter que la plupart des essais qu'elle a utilisés, pour l'identification des paramètres de fatigue, sont des essais cycliques à rapport de charge $R_\sigma = 0.05$. Elle a pu ensuite en déduire le diagramme de Haigh en considérant plusieurs nombre de cycles à rupture, du monotone (10^0 cycles) à un très grand nombre de cycles (10^8 cycles).

Pour les chargements en compression, notamment en compression pure, les études expérimentales ne permettaient pas encore de prévoir le comportement du matériau dans ce domaine. Néanmoins les récents travaux de thèse de [Hurmane, 2015] qui a étudié la tenue de structures composites tissés 3D sous sollicitations de compression doivent apporter des réponses en termes de modélisation.

Nous proposerons, par la suite (Chapitre VI), une méthode permettant de calculer des diagrammes de Haigh et des courbes de Wöhler de façon analytique, relativement simple, mais basée sur la loi d'endommagement donc intégrant la compréhension des phénomènes physiques du composite tissé.

II. 2. Utilisation « industrielle » des diagrammes de Haigh et des courbes de Wöhler

II. 2. 1. Utilisation des courbes de Wöhler faite par Snecma

Les résultats des tests de fatigue sont regroupés au sein d'une courbe de Wöhler.

Les trois zones décrites, sont celles utilisées par les ingénieurs pour décrire trois comportements différents. Dans la littérature, nous trouvons les remarques suivantes propres à chacun des domaines :

- la zone de « fatigue oligocyclique » correspond aux zones de fortes contraintes et de faibles durées de vie. Cette zone est caractérisée par une faible dispersion des données. La limite asymptotique aux faibles nombres de cycles à rupture, représente la contrainte ultime de traction pour des chargements monotones.
- la deuxième zone, « à grand nombre de cycles » apparaît au fur et à mesure que la contrainte du chargement appliqué diminue, ainsi nous observons une augmentation de la durée de vie ainsi que de la dispersion des données. Dans ce domaine, la relation entre la contrainte maximale et la durée de vie est souvent linéaire soit dans l'espace $\log(N_R)/\sigma_{Max}$ soit dans l'espace $\log(N_R)/\log(\sigma_{Max})$.
- enfin, la zone de limite d'endurance, zone où la courbe est relativement plate et où la dispersion des données est très élevée avec certaines éprouvettes qui peuvent ne pas être rompues, même en 10^7 cycles.

Les principales utilisations de la courbe de Wöhler sont :

- dimensionner la pièce et /ou définir son domaine d'utilisation, et ainsi pouvoir fournir une durée d'utilisation de la pièce.
- contrôler la qualité en construisant un intervalle de tolérance en dessous duquel les pièces sont jugées non conformes.

A noter qu'il est intéressant de faire le lien entre les trois domaines et la dispersion des résultats expérimentaux. Nous reviendrons sur ces notions statistiques dans le Chapitre VII.

II. 2. 2. Utilisation des diagrammes de Haigh à Snecma

Les pièces tournantes sont généralement soumises à de la fatigue vibratoire. Lors de la conception de ces pièces tournantes, les situations de résonance sont à éviter. Ainsi, le diagramme de Campbell [Ciré Sall, 2012] est utilisé pour représenter l'évolution des fréquences

propres de la pièce tournante en fonction du régime de rotation et de relever les coïncidences avec les harmoniques du module dans lequel s'intègre cette pièce. Ces coïncidences sont associées à des vitesses de rotations particulières qui peuvent donner lieu à des modes de résonance dont il faudra s'assurer qu'ils ne sont pas dangereux.

Les pièces tournantes peuvent être soumises à des contraintes alternées à fréquences élevées qui peuvent entraîner de la fatigue. Il est donc important de déterminer la durée de vie de la pièce étudiée. C'est l'objet de la courbe de Wöhler qui représente l'évolution de la contrainte alternée (ou contrainte maximale) en fonction du nombre de cycles à rupture.

En plus de la contrainte alternée (due aux vibrations aux modes de résonance), les pièces tournantes sont généralement soumises à une contrainte moyenne (associée aux efforts centrifuges). Le diagramme de Haigh permet de relier les niveaux de contraintes alternées à la contrainte moyenne pour un nombre de cycles donné. Un point de fonctionnement est considéré comme acceptable lorsqu'il se situe en dessous de l'enveloppe du modèle considéré.

Les diagrammes de fatigue (Haigh et Wöhler) sont donc utilisés pour définir les zones les plus critiques des structures dans la phase de conception, puis de vérifier lors d'essais de validation que l'endurance limite n'est pas dépassée (analyses d'essais et de calculs combinées). A noter que selon la criticité de la pièce étudiée, un aspect statistique doit être pris en compte (accompagné si nécessaire de facteur de sécurité supplémentaire).

II. 3. Proposition d'une forme pour la courbe de Wöhler et le diagramme de Haigh

A partir de l'étude bibliographique présentée précédemment, nous avons fait le choix d'une forme pour les courbes de Wöhler et les diagrammes de Haigh surtout. Ces choix ont bien entendu été confrontés aux résultats expérimentaux Snecma et ces derniers ont d'ailleurs amenés à des modifications par rapport au premier choix fixé. Dans la sous-partie (II. 3. 1), nous nous intéressons à la forme des courbes de Wöhler, et la sous-partie (II. 3. 2) se focalise sur la forme des diagrammes de Haigh.

II. 3. 1. Forme des courbes de Wöhler

a) Forme semi-logarithmique

En ce qui concerne les courbes de durée de vie, nous pourrions utiliser le formalisme proposé par Wöhler. Il a proposé une construction semi-logarithmique pour laquelle l'équation de la droite est redéfinie en (Eq. II-7).

$$\sigma_{Max} = b - a \log N_R \quad \text{Eq. II-7}$$

Le nombre de cycles à rupture est donc facilement déduit de (Eq. II-7) et est exprimé en (Eq. II-8).

$$N_R = (\sigma_{Max} - b)^{-1/a} \quad \text{Eq. II-8}$$

Cette courbe, qu'on appelle communément courbe de Wöhler est une des plus utilisées. La **Figure 29** représente une courbe de Wöhler superposée aux résultats expérimentaux d'échantillons du composite tissé 3D effectués à Snecma. Les essais réalisés sont des essais de fatigue cyclique à rapport de charge $R_\sigma = 0.05$ et à différentes contraintes maximales. La détermination des paramètres a et b est réalisée par régression linéaire au sens des moindres carrés (représentée par la droite puisque l'axe des abscisses est le log du nombre de cycles à rupture). Un inconvénient de la courbe de Wöhler est qu'il est difficile de percevoir la notion de seuil de fatigue ou souvent appelé limite d'endurance ou **limite de fatigue « asymptotique »** (contrainte en dessous de laquelle le matériau ne pourra jamais rompre). Or, aujourd'hui, il

s'agit d'une notion importante pour les ingénieurs car elle pourrait les conforter dans les choix à faire en termes de dimensionnement. Nous proposons alors d'utiliser une équation plus complexe pour décrire cette courbe dans la sous-partie ci-après.

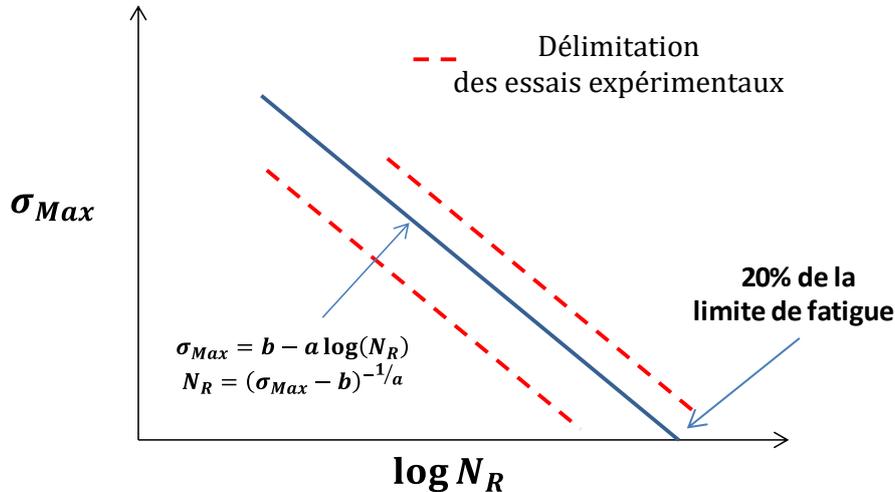


Figure 29 (annexe confidentielle) : Courbe de Wöhler linéaire (en log)

b) Forme en « S »

La courbe proposée ici est inspirée des travaux de [Sendekyj, 1981] qui a proposé une formulation mathématique permettant de construire la courbe de durée de vie dont la forme est en « S ». L'équation mathématique qu'il propose permet donc de construire une courbe en « S » et met en relation la contrainte maximale σ_{Max} et le nombre de cycles à rupture N_R . Elle tend vers 0 lorsque le nombre de cycles à rupture tend vers l'infini.

Nous proposons de reprendre son équation mais en y ajoutant la notion de seuil d'endommagement de fatigue (Eq. II-9). La courbe proposée garde la forme en « S » mais aux très grands nombres de cycles, la courbe tend vers une asymptote qui est le seuil d'endommagement de fatigue « asymptotique ». Nous reviendrons sur cette notion un peu plus tard dans ce manuscrit.

$$\sigma_{Max} = \frac{\sigma_u^t - \sigma_{seuil}}{(1 + c(N_R - 1))^s} + \sigma_{seuil} \tag{Eq. II-9}$$

La Figure 30 représente la courbe de Wöhler en « S » pour laquelle le seuil d'endommagement de fatigue « asymptotique » a été fixé à une valeur environ égale à 20% de la contrainte ultime de traction. Ce seuil est choisi en fonction des valeurs expérimentales en notre possession. Dans le cas de la Figure 30, les points présentés correspondent à des points d'essais (rompus en rouge plein ou non-rompus en rouge vide, cf. annexe confidentielle) pour des chargements de fatigue à $R_\sigma = 0.05$. Afin de valider la forme de la courbe choisie, l'idéal serait d'avoir quelques points supplémentaires à plus faibles nombres de cycles à rupture (par exemple $N_R = 10^2$ cycles, domaine oligocyclique).

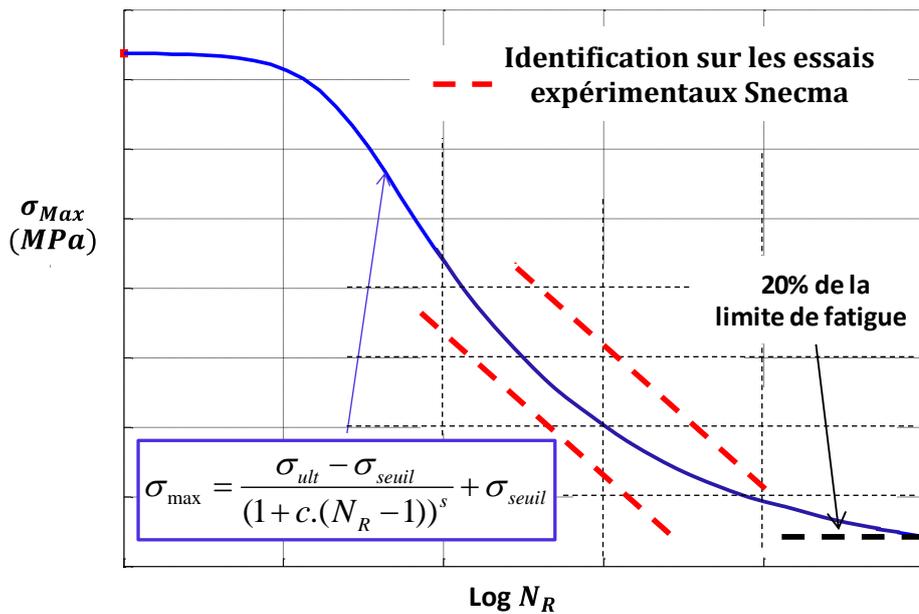


Figure 30 (annexe confidentielle) : Courbe de Wöhler en "S" (inspirée des travaux de [Sendekyj, 1979]) mais avec un seuil de fatigue

Ainsi, dans notre démarche de construction des courbes de Wöhler analytiques, nous optons pour la courbe en « S ». Nous allons voir maintenant le choix retenu pour les diagrammes de Haigh (II. 3. 2).

II. 3. 2. **Forme des diagrammes de Haigh**

Nous avons présenté, dans les paragraphes précédents, différents travaux sur les diagrammes de Haigh appliqués notamment aux composites stratifiés. Aucun travail n'a été relevé dans la littérature sur les composites tissés 3D. L'objectif ici est alors de proposer un diagramme de Haigh pour notre matériau sur la base des résultats d'essais dont nous disposons. Les enveloppes des diagrammes de Haigh proposées par les différents auteurs sont des extrapolations des points expérimentaux. Néanmoins, à travers ces divers travaux, nous avons vu que différentes formes d'enveloppes peuvent être définies. Suivant le comportement du matériau étudié, en traction et en compression, telle ou telle forme est mieux adaptée. Nous avons, entre autres, relevé plusieurs formes comme les diagrammes symétriques et non-symétriques par rapport à la droite de rapport de charge $R_\sigma = -1$ (ou contrainte moyenne nulle), et les diagrammes linéaires, bilinéaires ou encore linéaires par morceaux.

En ce qui concerne les composites tissés 3D, le comportement est tel que la forme du diagramme que nous avons retenue est, d'une part, non-symétrique, du fait de la différence de comportement en traction et en compression, et bilinéaire. Mais, le manque de données expérimentales notamment dans le domaine Compression-Traction et Compression-Compression ne nous permet pas de statuer définitivement. Dans la suite de cette partie, nous expliquons les raisons du choix de la forme retenue.

Tout d'abord, au travers de la Figure 31 qui représente de façon schématique un diagramme de Haigh, pour le cas où le nombre de cycles à rupture est égal à 1 (chargement monotone $N_R = 1$), l'enveloppe du diagramme de Haigh est facile à construire puisqu'il suffit de rejoindre les deux droites (de pente 1 et -1) correspondant à la rupture monotone en traction et en compression. L'enveloppe est représentée en bleu (Figure 31). La forme de l'enveloppe est bilinéaire (forme triangulaire). Le sommet de l'enveloppe à $N_R = 1$ est positionné sur la droite de rapport de charge ultime égal à $R_\sigma^u = -\sigma_u^c / \sigma_u^t$ (pointillé jaune), que nous avons noté R_σ^u (pour le différencier des autres rapports de charge). Il est donc relativement simple de construire cette

enveloppe à partir du moment où nous connaissons les contraintes ultimes de traction et de compression. Les coordonnées du point correspondant au sommet de l'enveloppe sont donc facilement déductibles et notées en (Eq. II-10) et (Eq. II-11).

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(\sigma_u^t - \sigma_u^c) \tag{Eq. II-10}$$

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{2}(\sigma_u^t + \sigma_u^c) \tag{Eq. II-11}$$

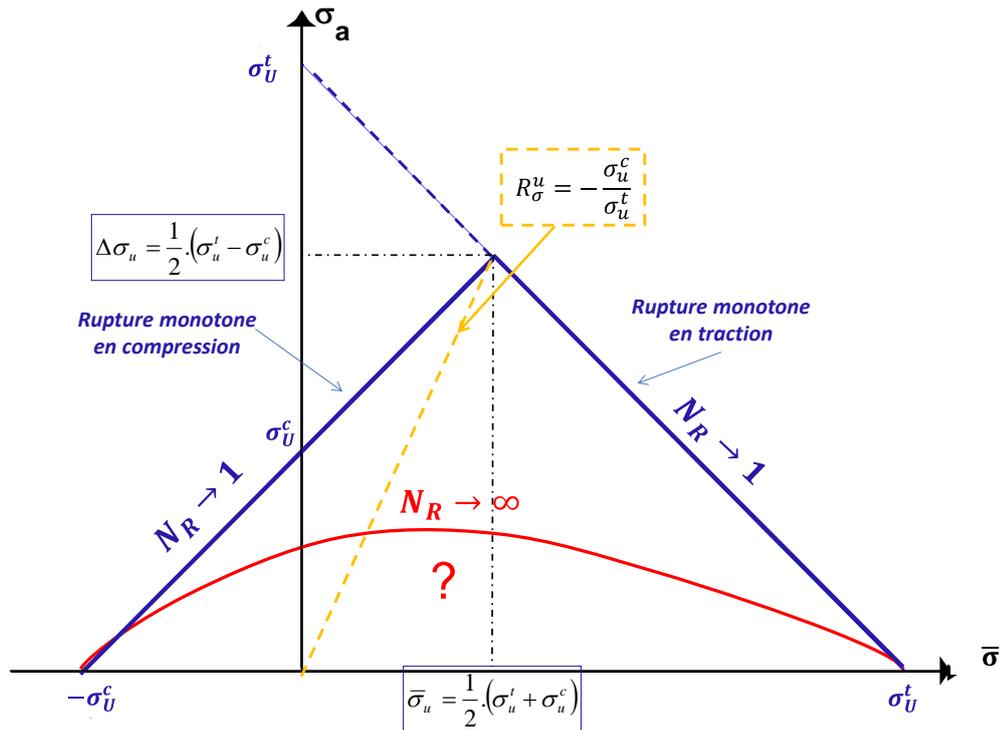


Figure 31 : Enveloppes extrêmes du diagramme de Haigh ; en bleu enveloppe pour $N_R=1$; en rouge enveloppe pour $N_R \rightarrow \infty$

L'enveloppe correspondant au nombre de cycles à rupture tendant vers l'infini ($N_R \rightarrow \infty$) est représentée par la courbe en rouge sur la Figure 31. N'ayant *a priori* aucune information sur la position et la forme de cette enveloppe, que nous appellerons par la suite « enveloppe asymptotique », nous pouvons imaginer que le sommet de cette enveloppe se positionne sur la droite de rapport de charge R_σ^u et qu'elle est elle aussi bilinéaire (forme triangulaire) représentée en rouge sur la Figure 32. Nous imaginons alors tout à fait que les enveloppes correspondantes à des nombres de cycles à rupture intermédiaires $N_R = 10^x$ ($x \in [1, \infty]$) se situent entre les deux enveloppes extrêmes définies et leur sommet se rencontre sur la droite de rapport de charge R_σ^u . Ces enveloppes sont représentées en pointillés bleus sur la Figure 32.

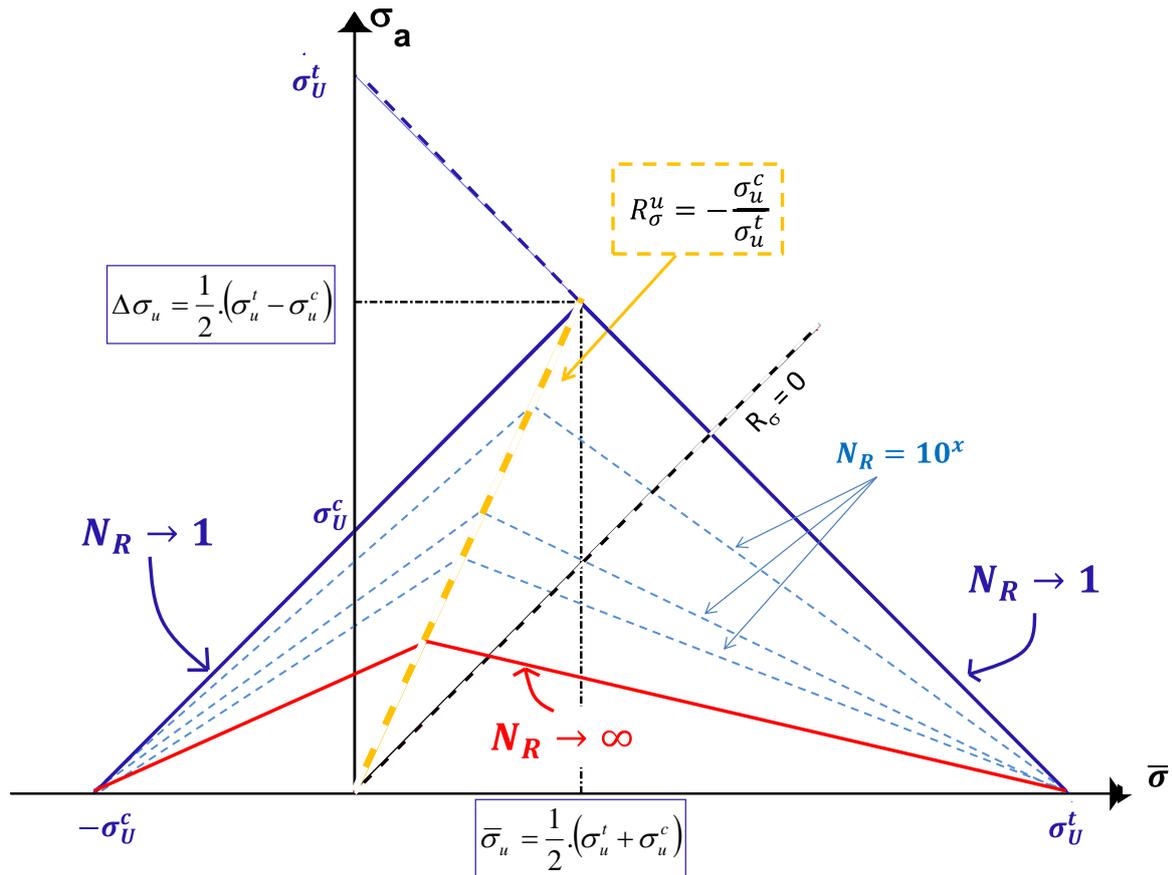
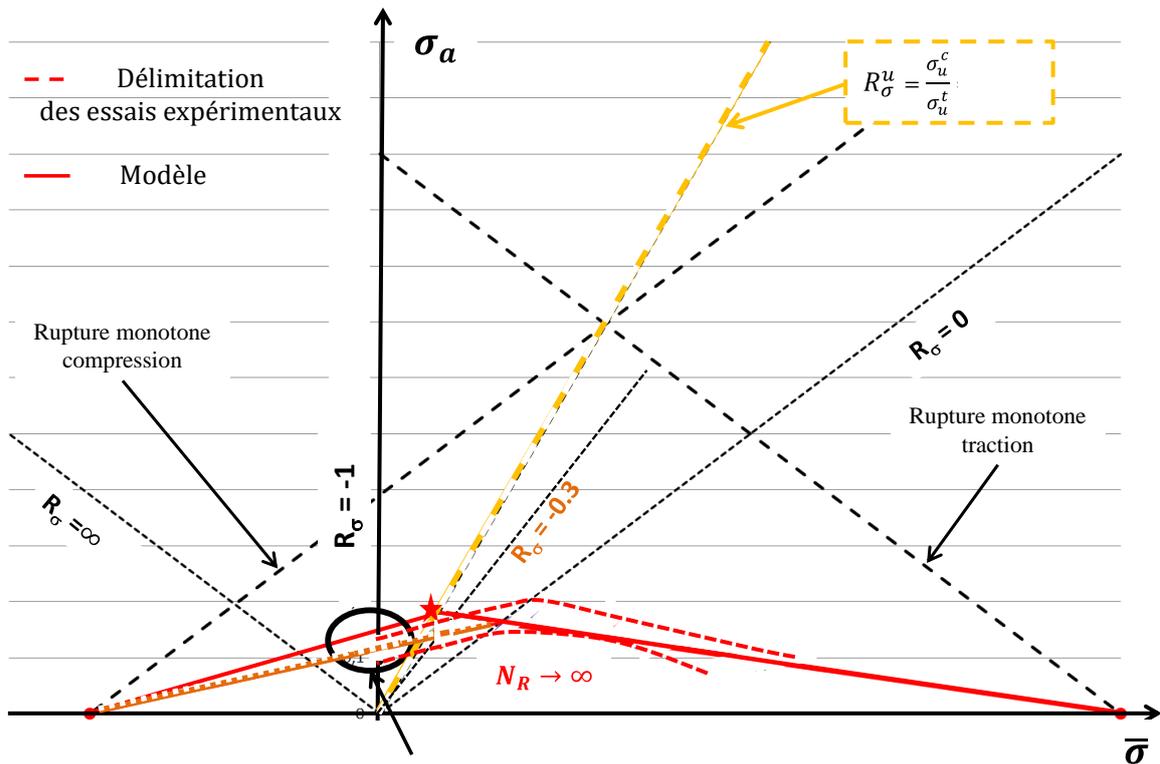


Figure 32 : Construction de l'enveloppe à $N_R=1$ grâce uniquement aux contraintes ultimes de traction et de compression

Le diagramme présenté (Figure 32) est une représentation idéale. En réalité, les résultats expérimentaux disponibles, notamment ceux à température ambiante à rapport de charge $R_\sigma = -1$ nous obligent à modifier quelque peu la forme idéale du diagramme proposé. La **Figure 33** représente un diagramme de Haigh dans lequel l'enveloppe (en rouge continu) correspond à l'enveloppe asymptotique. Les résultats expérimentaux Snecma sont reportés dans le diagramme, chaque couleur correspondant à un rapport de charge donné. En noir, sont représentés les points pour le rapport de charge $R_\sigma = -1$ (droite verticale, celle qui délimite le passage aux contraintes moyennes négatives). Nous voyons, grâce à ces résultats, que le sommet défini sur la droite de rapport de charge R_σ^u implique une sous-estimation de la prévision de la durée de vie au rapport de charge $R_\sigma = -1$. Notons que l'enveloppe passe également bien au-dessus des points de rapport de charge $R_\sigma = -0.3$ (losange orange).



Limite non acceptable en compression
 Le sommet ★, défini sur la droite de rapport de charge R_{σ}^u ,
 ne semble pas convenir aux résultats d'essais en compression

Figure 33 (annexe confidentielle): Présentation des résultats expérimentaux pour les CMO tissés 3D

Il faut alors abaisser la droite dans le domaine C-T et C-C de façon à ce que l'enveloppe dans ces deux domaines retranscrive correctement les résultats d'essais. Elle est représentée en pointillés orange sur la **Figure 33**. Cela implique alors que le sommet de l'enveloppe se retrouve décalé et n'est plus sur la droite de rapport de charge R_{σ}^u , mais plutôt sur la droite de rapport de charge $R_{\sigma} = 0$ (droite à 45° de pente 1, délimitant le domaine T-T et T-C, en pointillés noirs). Nous avons à notre disposition, d'une part, les contraintes ultimes de traction et de compression qui nous permettent de construire l'enveloppe pour les chargements monotones ($N_R = 1$) et pour laquelle le sommet est défini sur la droite de rapport de charge R_{σ}^u et, d'autre part, les données expérimentales à $N_R = 10^7$ cycles (nombre de cycles que nous définirons comme étant notre limite asymptotique) qui nous permettent de construire l'enveloppe asymptotique. Son sommet étant défini sur la droite de rapport de charge $R_{\sigma} = 0$ plutôt que R_{σ}^u . Bien entendu, ce choix dépend des résultats expérimentaux et il faudrait faire davantage d'essais pour des rapports de charge négatifs pour conclure définitivement sur une position du sommet de l'enveloppe. Ainsi, pour les enveloppes correspondantes aux nombres de cycles à rupture intermédiaires, nous proposons alors, non pas de définir les sommets des enveloppes sur la droite de rapport de charge R_{σ}^u , mais plutôt sur une courbe dont l'équation est notée en (Eq. II-12) et est représentée sur la Figure 34.

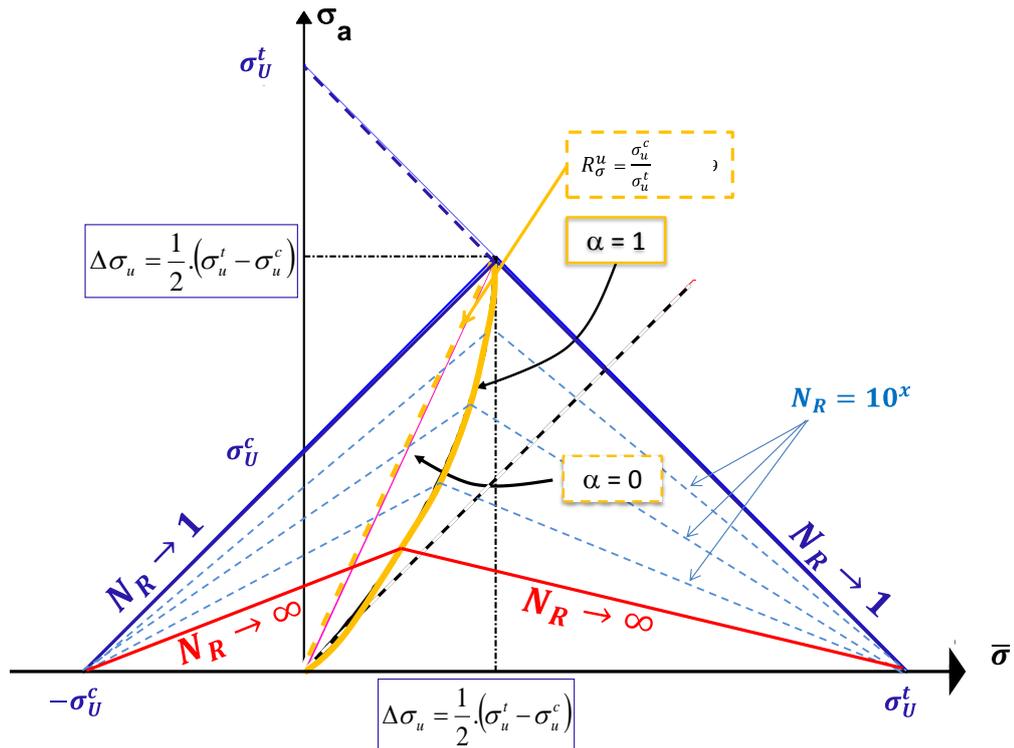


Figure 34 : Proposition d'une courbe (en jaune continu) sur laquelle sont définis les sommets des enveloppes à tous les nombres de cycles à rupture

Nous proposons une courbe qui passe par le sommet de l'enveloppe « asymptotique » et atteint le sommet de l'enveloppe de rupture monotone. Cette courbe est construite de telle sorte que l'on retrouve la droite de rapport de charge R_{σ}^u . Cela implique aussi que suivant le matériau utilisé, nous pouvons jouer sur la forme de cette courbe et ainsi être plus libre pour construire les sommets des enveloppes suivant les résultats expérimentaux donnés.

La courbe (Eq. II-12) définie dépend alors deux coefficients α et n (Eq. II-13), avec α compris entre 0 ou 1. L'équation a été définie de façon à ce que, pour $\alpha = 0$, nous retrouvons la droite correspondant à celle du rapport de charge R_{σ}^u .

$$\bar{\sigma} = a \sigma_a + b (\sigma_a)^n \tag{Eq. II-12}$$

$$a = \alpha + (1 - \alpha) R_{\sigma}^u \text{ et } b = \frac{\Delta \sigma_u - a \bar{\sigma}_u}{(\bar{\sigma}_u)^n} \tag{Eq. II-13}$$

Toutes les enveloppes sont donc construites grâce aux contraintes ultimes de traction et compression et à la « courbe intersection » (en trait continu jaune) sur laquelle les droites des enveloppes se rencontrent. Les extrémités des enveloppes dans le domaine T-T rejoignent le point correspondant à la contrainte ultime de traction. De même, les extrémités des enveloppes dans le domaine C-C rejoignent le point correspondant à la contrainte ultime de compression.

Les Figure 35 et Figure 36 montrent les rôles de chacun des coefficients α et n sur la forme de la courbe. Nous pouvons alors jouer sur la forme afin de mieux décrire le comportement du matériau étudié. En ce qui nous concerne, nous choisissons par la suite :

- $\alpha = 1$
- $n = 2$ (pour simplifier la reconstruction analytique)

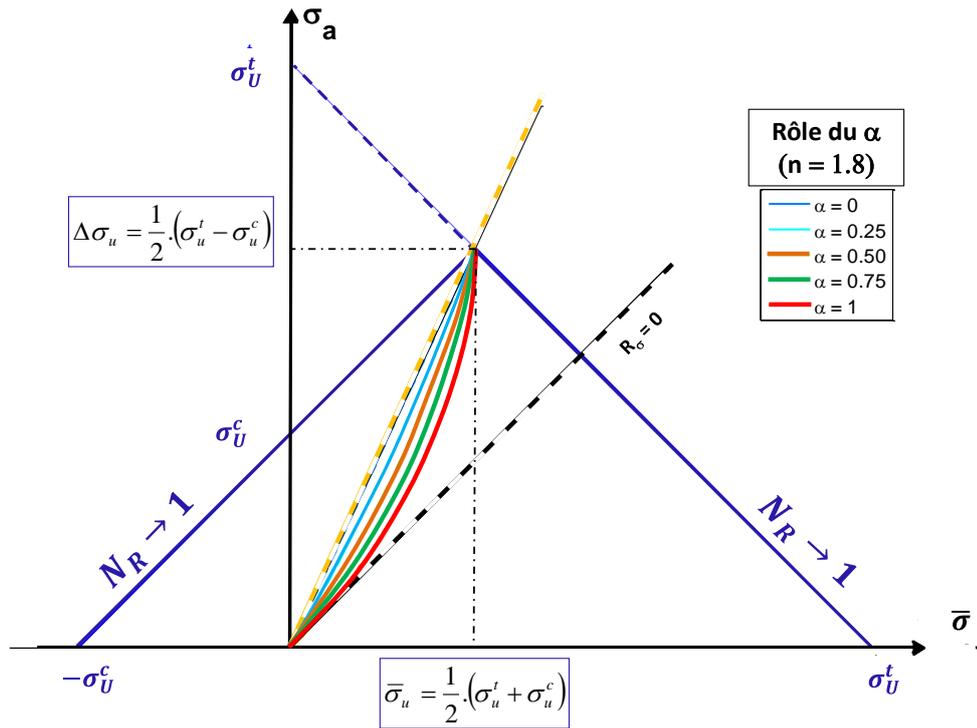


Figure 35 : Forme proposée pour le diagramme de Haigh : rôle de α

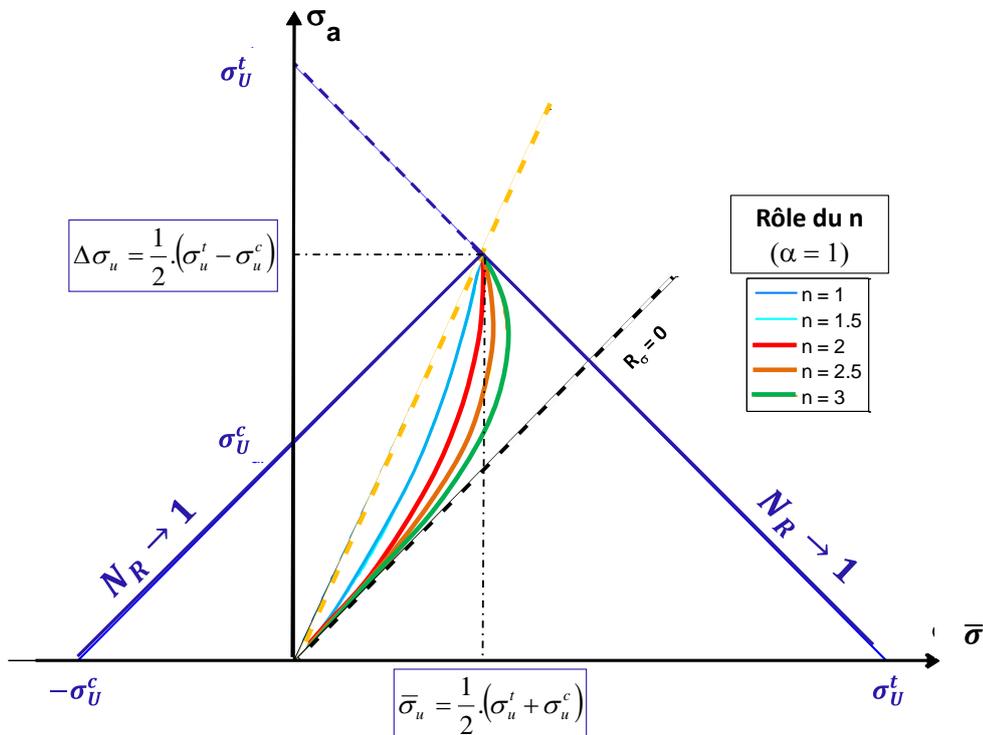


Figure 36 : Forme proposée pour le diagramme de Haigh : rôle de n

Maintenant que nous avons choisi la forme du diagramme de Haigh (bilinéaire avec une courbe d'intersection « traction/compression » parabolique), il est possible de construire complètement le diagramme de Haigh à partir de la connaissance d'une seule courbe de Wöhler.

II. 4. Proposition d'une méthode analytique dite « ingénieur » de construction des diagrammes de Haigh

Les étapes sont répertoriées dans le tableau ci-dessous et davantage explicitées sur les figures qui suivent.

Méthode de construction du diagramme de Haigh à iso-DdV, décomposée en 5 étapes

Etape 1 :	Interpolation des points expérimentaux de la courbe de Wöhler pour un R_σ donné (on a choisi $R_\sigma = 0.05$) par la fonction modifiée de <i>Sendeckyj</i>
Etape 2 :	Choix du nombre de cycles à rupture N_R et report du point sur le diagramme de Haigh
Etape 3 :	Tracé de la droite correspondant au nombre de cycles à rupture N_R pour la partie traction
Etape 4 :	Recherche de l'intersection entre la droite précédente avec la parabole $\bar{\sigma} = a \sigma_a + b(\sigma_a)^2$
Etape 5 :	Tracé de la droite correspondant au nombre de cycles à rupture N_R pour la partie compression

La **première étape** consiste à déterminer la courbe de Wöhler au travers de la fonction modifiée de *Sendeckyj* qui passe au mieux au milieu des points expérimentaux correspondant à un seul rapport de charge. Nous avons choisi la courbe de Wöhler expérimentale au rapport de charge $R_\sigma = 0.05$ car la majorité des essais sont réalisés à ce rapport de charge.

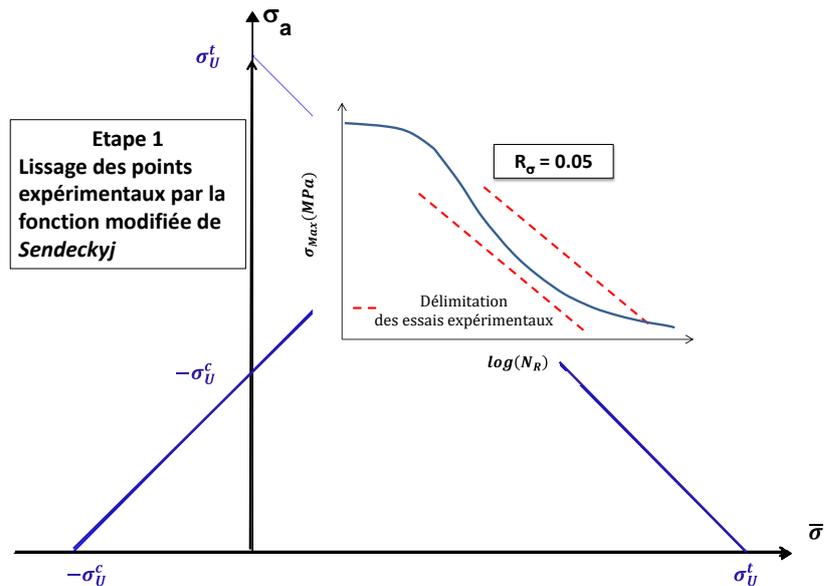


Figure 37 (annexe confidentielle): construction des diagrammes de Haigh : étape 1

La **seconde étape** (**Figure 38**) consiste à choisir pour quel nombre de cycles à rupture nous voulons construire le diagramme de Haigh, ou plutôt l'enveloppe limite. En effet, sur un diagramme, nous avons vu que nous pouvons tracer toutes les enveloppes correspondant à un nombre de cycles à rupture, il est donc plus précis de parler d'enveloppe à un nombre de cycles à rupture donné. Une fois ce choix fait, il faut reporter les points expérimentaux et ceux correspondant à l'interpolation de la courbe de Wöhler au nombre de cycles à rupture choisi (ceux sur la droite verticale à N_R constant de la courbe de Wöhler), sur le diagramme de Haigh. A la fois les points rompus et non-rompus sont projetés, notamment grâce aux relations suivantes qui relient contrainte maximale σ_{Max} , contrainte alternée σ_a , contrainte moyenne $\bar{\sigma}$ et rapport de charge $R_\sigma = \sigma_{min}/\sigma_{Max}$.

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{2}(\sigma_{Max} + \sigma_{min}) \quad \text{Eq. II-14}$$

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(\sigma_{Max} - \sigma_{min}) \quad \text{Eq. II-15}$$

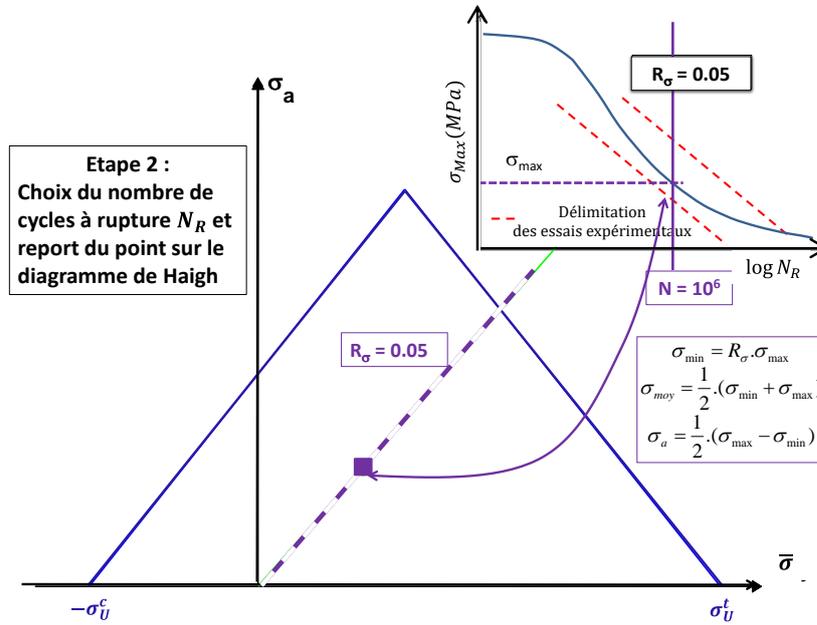


Figure 38 (annexe confidentielle): construction des diagrammes de Haigh : étape 2

La **troisième étape** (Figure 39) consiste à construire l'enveloppe dans le domaine des contraintes moyennes positives (à droite de la droite de rapport de charge $R_\sigma = -1$). Nous la faisons passer par le point $(\sigma_a = 0 ; \bar{\sigma} = \sigma_U^t)$ ainsi qu'entre les points rompus et non-rompus de rapport de charge $R_\sigma = 0.05$.

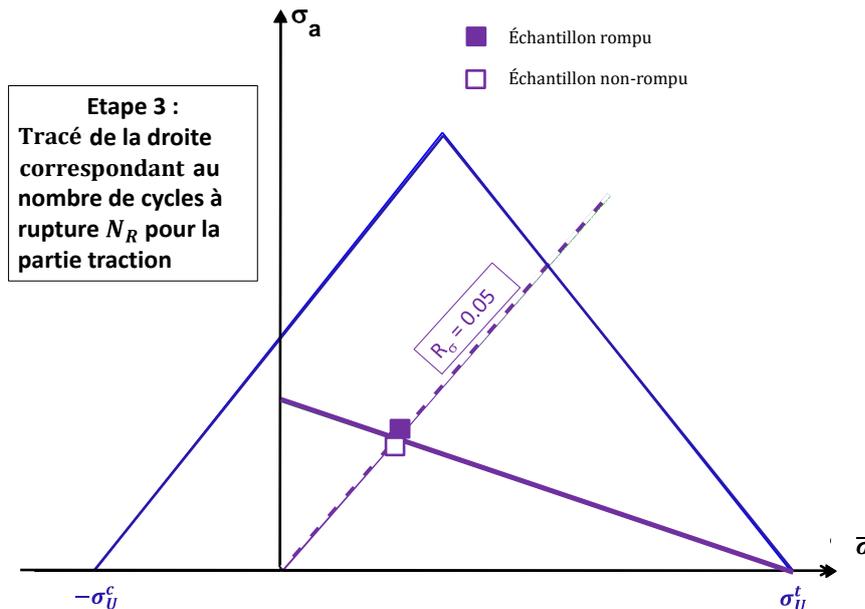


Figure 39 : construction des diagrammes de Haigh : étape 3

La **quatrième étape** (Figure 40) consiste à tracer la courbe parabolique (après avoir choisi α et n).

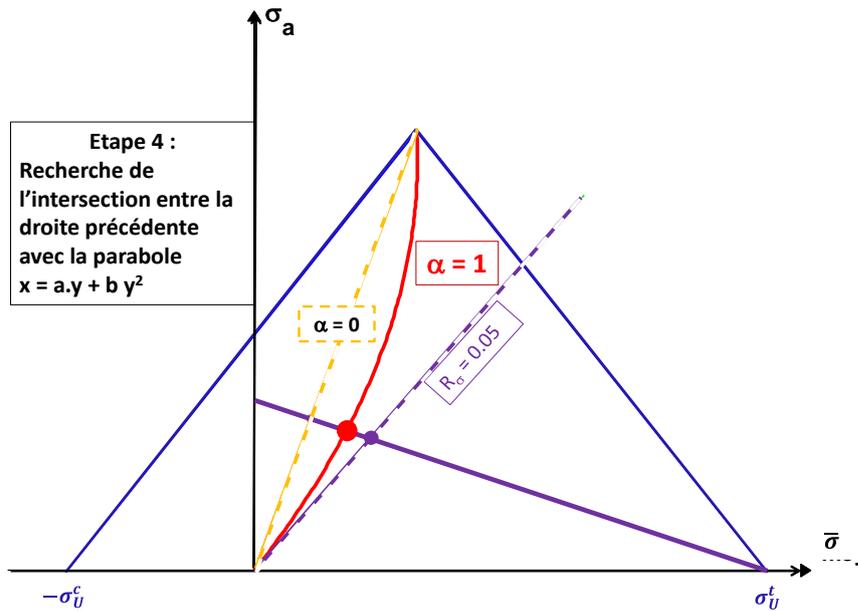


Figure 40 : construction des diagrammes de Haigh : étape 4

Enfin la **cinquième** étape (

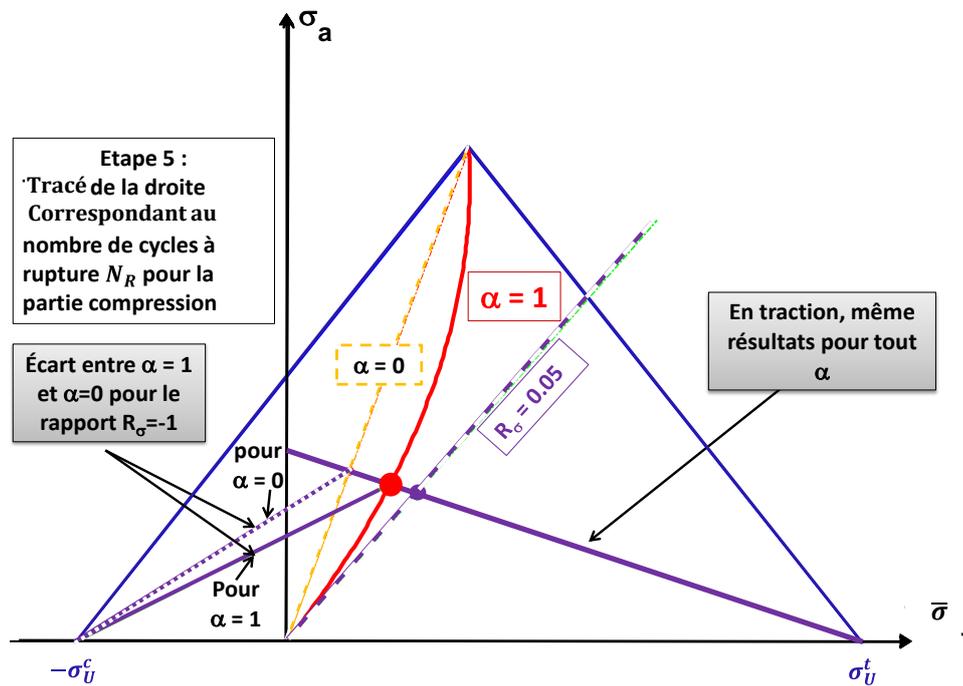


Figure 41) consiste à tracer la deuxième partie de l'enveloppe, celle qui couvre tout le domaine de contrainte moyenne négative et un peu le domaine T-C (contrainte moyenne positive). Nous voyons qu'en proposant la courbe parabolique, l'intersection entre les deux droites de l'enveloppe limite se fait pour une contrainte moyenne plus grande et vient donc diminuer ou augmenter le domaine non-rompu (comparaison droite continue et droite en pointillés).

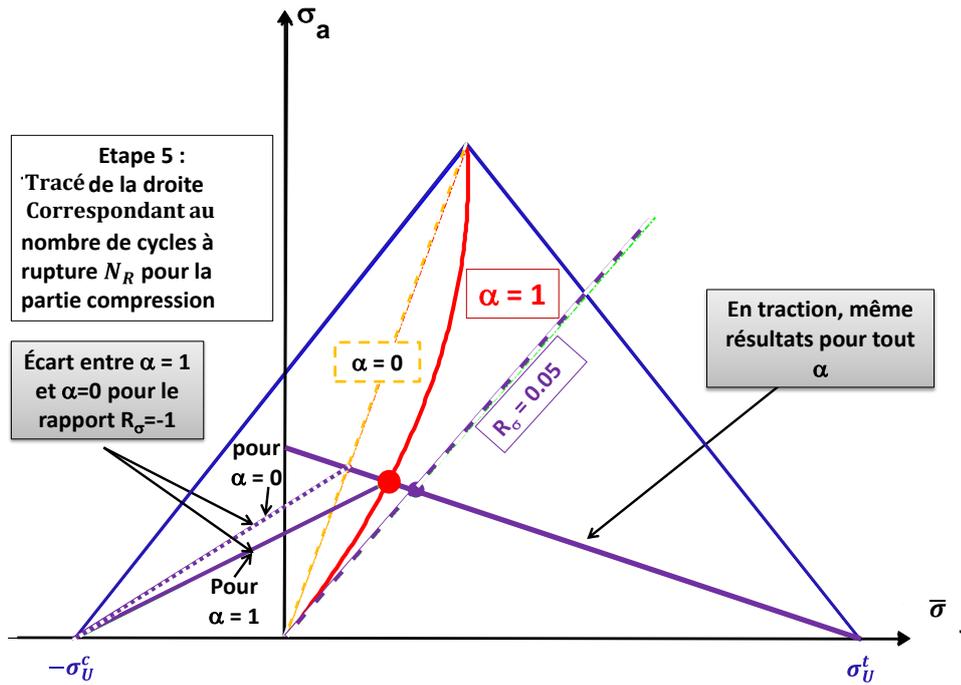
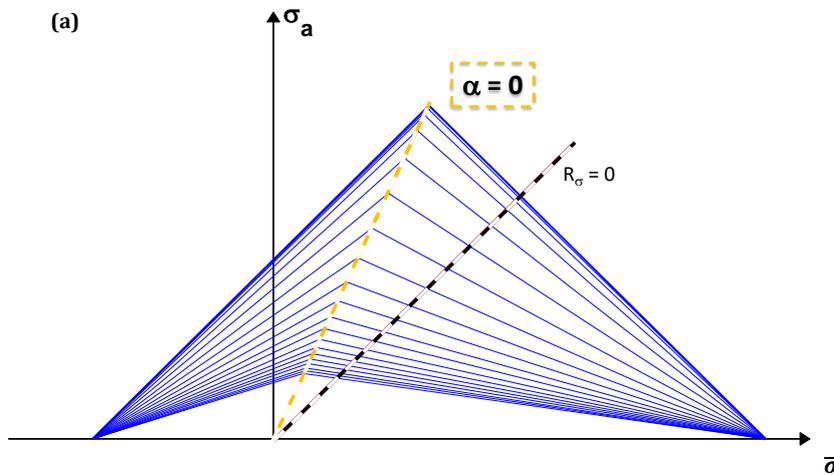


Figure 41 : construction des diagrammes de Haigh : étape 5

Nous avons donc proposé une méthode de construction des diagrammes de Haigh, en mettant bien l'accent sur la possibilité de jouer sur la position des sommets des enveloppes grâce à une équation paramétrée par deux paramètres. En effet, si le paramètre $\alpha = 0$, les sommets se rencontrent sur une droite de rapport de charge constant R_σ^u tandis que pour des valeurs de α différentes de zéro, les sommets se rencontrent sur une courbe parabolique. Il suffit de connaître les valeurs des contraintes ultimes de traction et de compression et de disposer de résultats expérimentaux (idéalement deux courbes de Wöhler expérimentales, une pour un rapport de charge positif dans le domaine T-T et une pour un rapport de charge négatif dans le domaine T-C ou C-T), de façon à pouvoir construire toutes les enveloppes correspondant aux nombres de cycles à rupture donnés. Deux représentations des diagrammes de Haigh sont présentées sur la Figure 42.



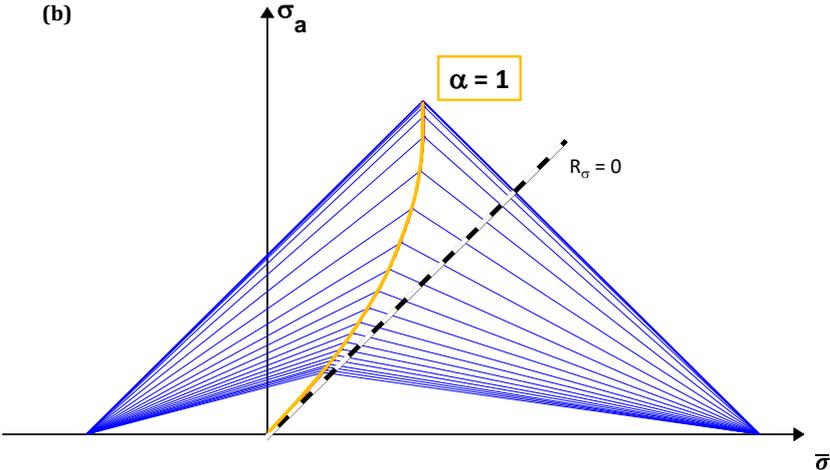


Figure 42 : Diagrammes de Haigh non symétrique, bilinéaire ; (a) sommets des enveloppes sur la droite de rapport de charge R_{σ}^u ; (b) sommets des enveloppes sur la courbe parabolique paramétrée par α et n

II. 5. Reconstruction des courbes de Wöhler à partir du diagramme de Haigh et validation de la démarche

Une fois que nous avons déterminé les diagrammes de Haigh, à différents nombres de cycles à rupture, il devient relativement simple de reconstruire une courbe de Wöhler (Figure 43), voire toutes les courbes de Wöhler à tous les rapports de charge. Nous faisons le processus inverse de l'étape 2 du processus de construction des diagrammes de Haigh (II. 4).

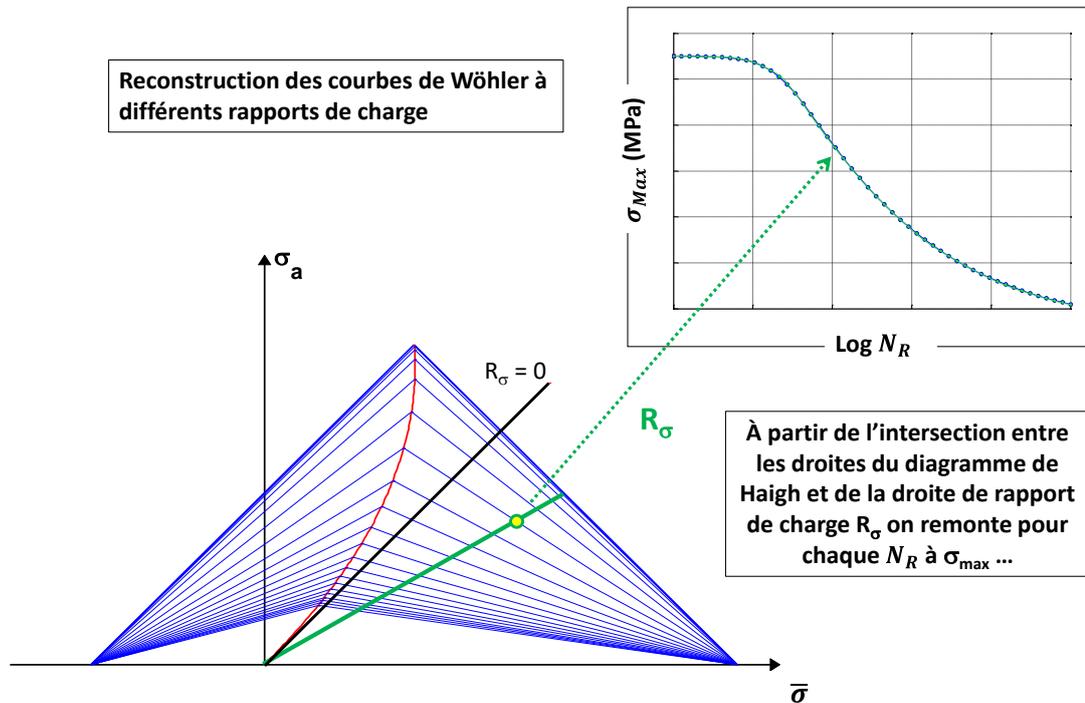


Figure 43 : reconstruction des courbes de Wöhler à partir du diagramme de Haigh

La **Figure 44** représente le diagramme de Haigh, (a) sur lequel sont représentées des droites à différents rapports de charge ainsi que les enveloppes à iso-DdV. En relevant les points d'intersection entre une droite de rapport de charge donné et toutes les enveloppes, nous pouvons reconstruire la courbe de Wöhler au rapport de charge donné sur toute l'étendue des nombres de cycles à rupture. Les courbes de Wöhler pour les rapports de charge $R_\sigma = [0.3 ; 0.5 ; 0.7 ; -1]$ sont représentées sur la **Figure 44** b). Il est intéressant de voir que pour $R_\sigma = -1$, si le sommet de l'enveloppe est placé sur la droite de rapport de charge R_σ^u , nous surestimons la durée de vie comme nous l'avons vu précédemment. Ceci est bien retranscrit sur la courbe de Wöhler, nous avons représenté (en vert) la courbe quand le paramètre α est fixé à zéro. Pour une contrainte maximale donnée, la durée de vie atteinte avant rupture est plus grande que pour la courbe (en bleu) correspondante au cas où $\alpha = 1$ dans le diagramme de Haigh. Cela montre l'importance du choix des valeurs de α et n .

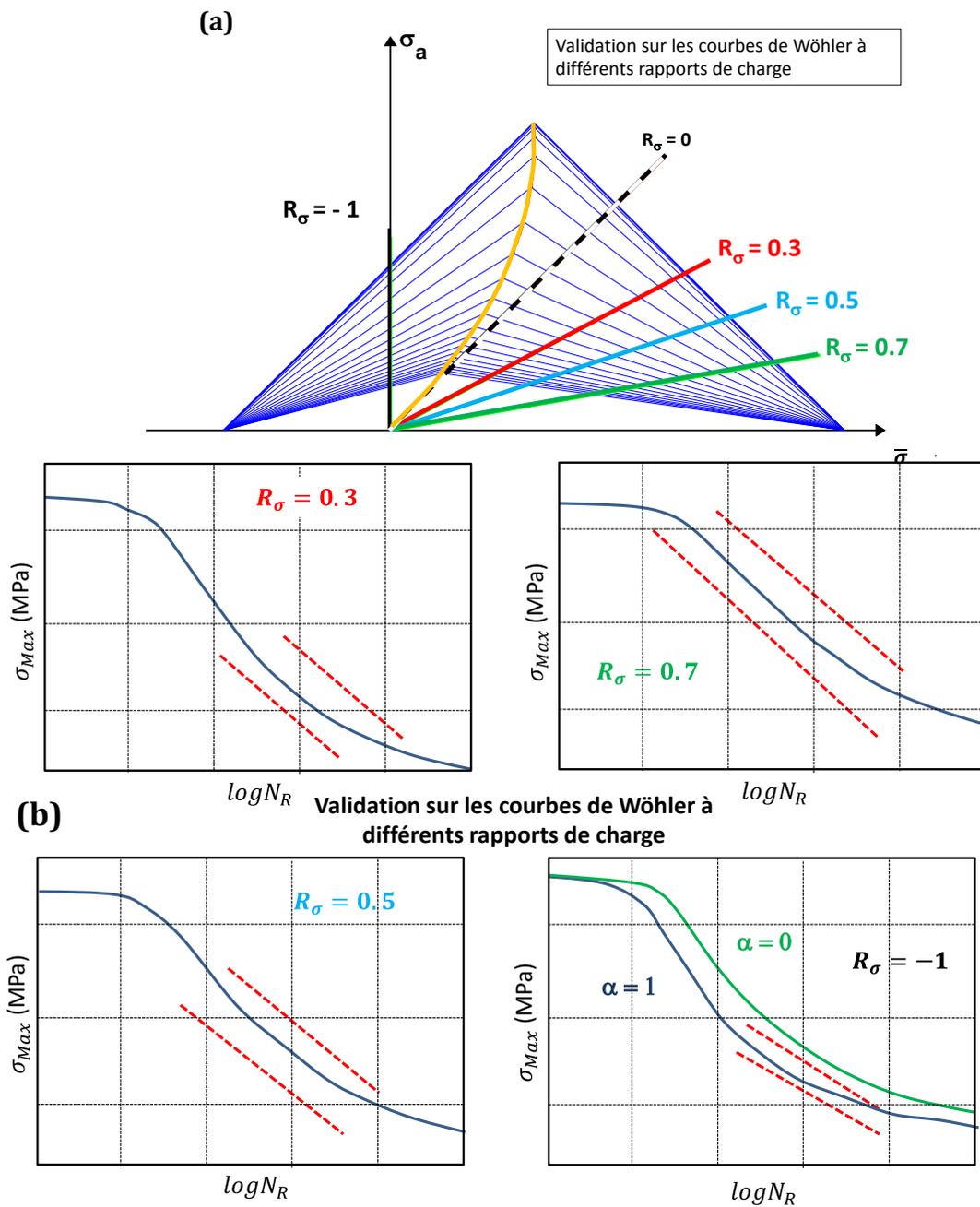


Figure 44 (annexe confidentielle): Reconstruction des courbes de Wöhler à divers rapports de charge à partir du diagramme de Haigh ; (a) diagramme de Haigh avec les droites de divers rapports de charge représentés ; (b) les courbes de Wöhler correspondantes

D'une certaine façon puisque l'on propose une méthodologie de construction du diagramme de Haigh, nous n'avons utilisé que les essais réalisés au rapport de charge $R_\sigma = 0.05$, ces derniers résultats peuvent être considérés comme une validation de la méthode proposée.

II. 6. Construction d'une courbe maîtresse

Une courbe maîtresse est une courbe de Wöhler sur laquelle tous les points expérimentaux à différents rapports de charge peuvent être confondus. Autrement dit, tous les points expérimentaux sont regroupés et nous pouvons faire passer une « courbe de Wöhler » entre tous ces points. Ceci a l'avantage de proposer une méthode de dimensionnement basée sur tous les résultats d'essais, tous rapports de charge confondus, plutôt que de dimensionner pour chaque rapport de charge. La courbe maîtresse expérimentale est obtenue grâce aux diagrammes de Haigh (**Figure 45**). Il a été choisi de définir la courbe maîtresse comme la projection des points sur la courbe parabolique, en projetant les points expérimentaux (à chaque rapport de charge) sur la courbe parabolique (lieu de rencontre de tous les sommets des enveloppes) en utilisant l'enveloppe qui lui correspond. Ensuite, nous pouvons lisser les résultats en faisant passer, par exemple, une courbe de type *Sendeckyj* améliorée (avec seuil).

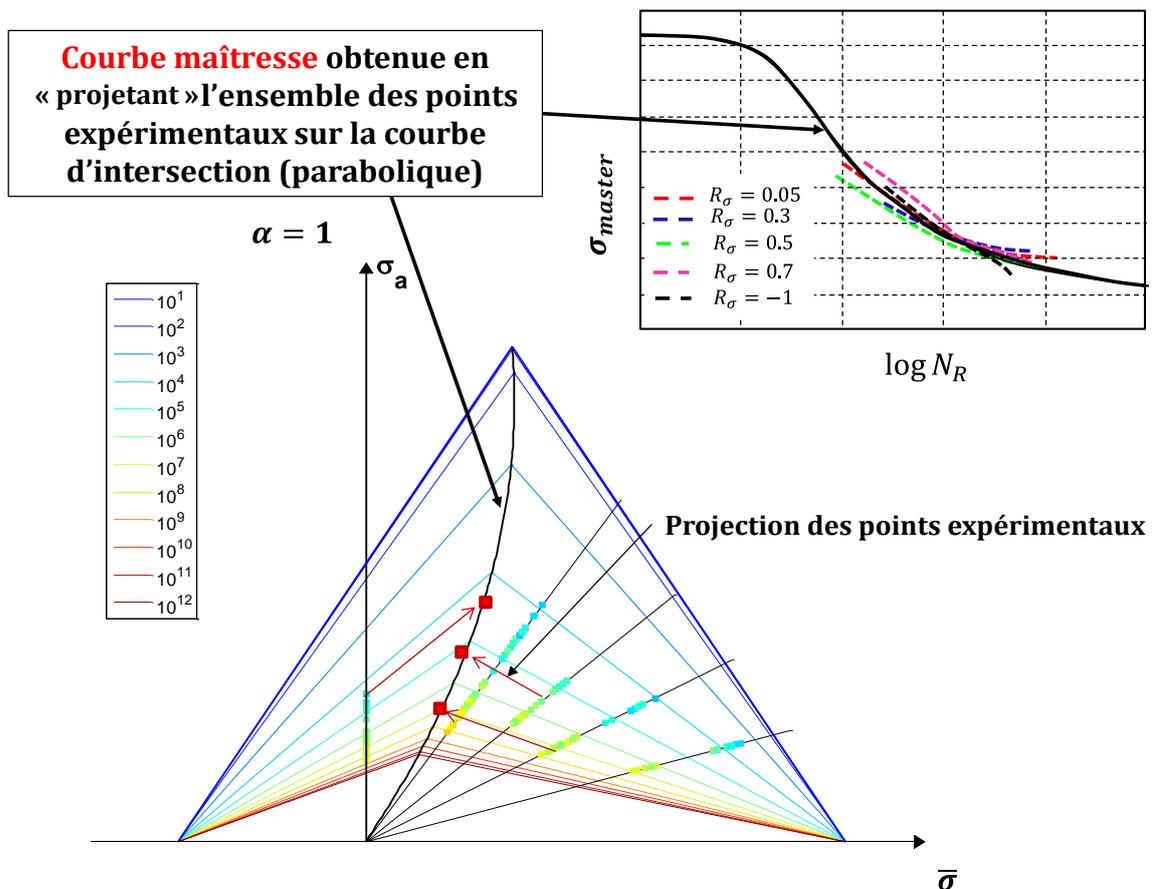


Figure 45 (annexe confidentielle): Construction d'une courbe maîtresse à partir du diagramme de Haigh (intersection sur la courbe parabolique $\alpha = 1$)

Afin d'évaluer la validité de la courbe maîtresse précédente (**Figure 45**), le même exercice est fait en construisant le diagramme de Haigh en prenant $\alpha = 0$. Nous constatons que les points qui définissent la courbe maîtresse expérimentale sont plus dispersés (**Figure 46**). Il semblerait que plus les points sont dispersés, moins bonne est la construction du diagramme de Haigh.

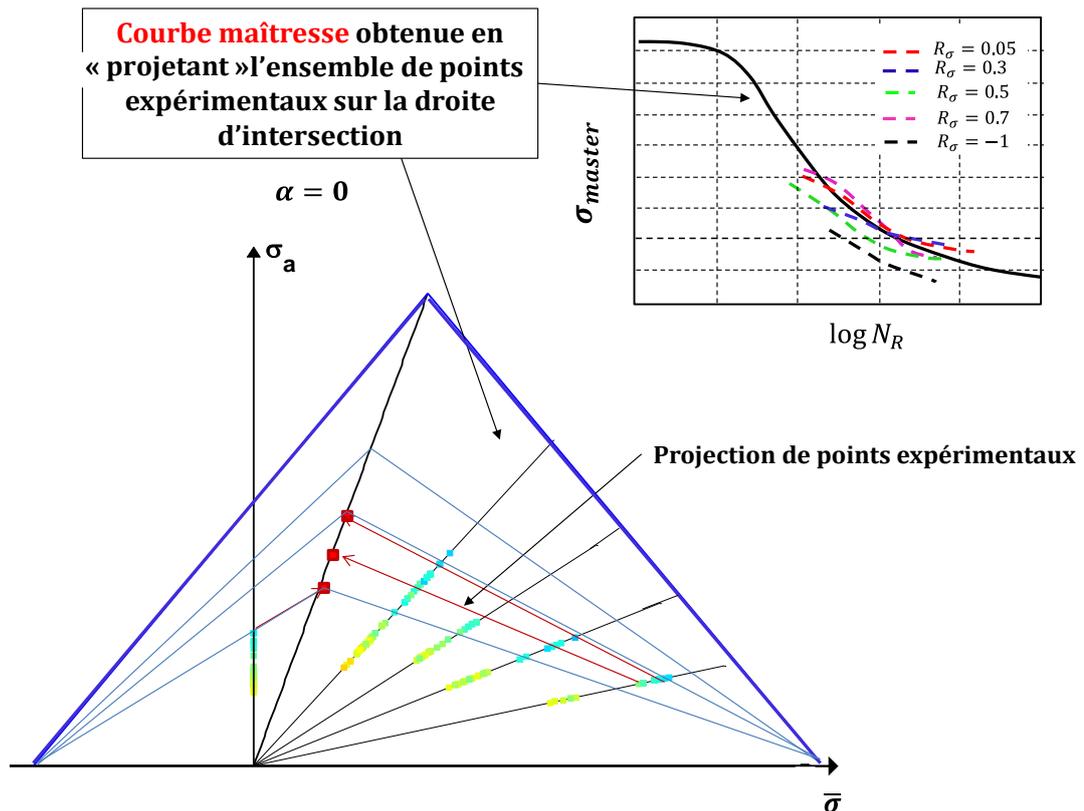


Figure 46 (annexe confidentielle): Construction d'une courbe maîtresse à partir du diagramme de Haigh (intersection sur la droite $\alpha = 0$)

La courbe maîtresse ainsi obtenue permet de synthétiser l'ensemble des résultats pour différents rapports de charge et peut dans certains cas, se substituer avantageusement au diagramme de Haigh.

La courbe maîtresse peut permettre aussi de construire un « meilleur » diagramme de Haigh en prenant comme indicateur la dispersion des points entre eux.

La courbe maîtresse peut permettre également des analyses statistiques plus pertinentes car réalisées avec plus de points. Nous reviendrons sur les notions de statistiques un peu plus tard dans le manuscrit.

II. 7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés aux outils de dimensionnement de la durée de vie en fatigue des matériaux composites, notamment les diagrammes de Haigh et les courbes de Wöhler. L'idée ici était d'adopter une approche plutôt industrielle afin de proposer une méthodologie relativement simple pour construire les diagrammes de Haigh et les courbes de Wöhler, qui sont utilisés par l'industriel Snecma pour l'étude de la durée de vie des composites tissés 3D.

Nous proposons alors une méthodologie relativement simple basée sur une approche empirique des résultats expérimentaux pour construire les diagrammes de Haigh à iso-durée de vie à partir d'une courbe de Wöhler expérimentale. En réalité, pour tracer une enveloppe à iso-durée de vie, l'idéal serait d'avoir à disposition au moins quelques résultats d'essais expérimentaux à deux rapports de charge différents. Une enveloppe pour des conditions de chargement à rapport de charge positif, le plus souvent $R_\sigma = 0.05$, pour bien décrire le comportement dans le domaine de contrainte moyenne positive (domaine à droite de l'axe vertical du diagramme de Haigh), et une enveloppe pour des conditions de chargement à rapport de charge négatif, par exemple $R_\sigma = -1$, pour bien décrire le comportement dans le domaine de contrainte moyenne négative (en

fait, ceux gouvernés par les mécanismes de compression). Néanmoins, dans le cas où nous n'avons que des données pour un rapport de charge positif, la méthode proposée permet tout de même de construire le diagramme de Haigh. Le diagramme sera alors bien représentatif pour les chargements à rapports de charge positifs et à contraintes moyennes positives, et pour les chargements qui se situent dans l'autre domaine, il faudra faire le choix de l'endroit où représenter le sommet de l'enveloppe (soit sur la droite de rapport de charge R_{σ}^u , soit sur une courbe parabolique). Il faut tempérer la modélisation et certainement apporter des données expérimentales supplémentaires (essais à rapports de charge négatifs) quant à la justesse de la position de l'enveloppe dans ce domaine. Nous avons vu aussi que, plus nous disposons de résultats expérimentaux à différents rapports de charge, plus il est envisageable de construire une courbe maîtresse, à partir du diagramme de Haigh construit de la même manière. Ainsi, en faisant un travail itératif entre le diagramme de Haigh et la courbe maîtresse, il est possible de déterminer un diagramme de Haigh (et donc des courbes de Wöhler) optimisé, notamment en diminuant la dispersion des points autour de la courbe maîtresse.

Dans ce chapitre, l'étude empirique des diagrammes de Haigh et des courbes de Wöhler a permis d'apporter des connaissances et des éléments de compréhension quant à une bonne représentation de ces outils de dimensionnement. Néanmoins, cela reste des études empiriques, et la forme du diagramme de Haigh n'a pas réellement de justification physique mais il fonctionne plutôt bien pour le composite tissé 3D. Nous allons aux Chapitre III et Chapitre IV nous appuyer sur ces travaux afin de proposer des diagrammes de Haigh et des courbes de Wöhler, basés cette fois-ci sur l'étude plus approfondie des mécanismes de dégradation propres au composite tissé 3D, à travers notamment le modèle d'endommagement temporel proposé dans ce manuscrit. Nous reviendrons donc sur les diagrammes de Haigh, les courbes de Wöhler et les courbes maîtresses au Chapitre VI et nous proposerons une méthode de construction des diagrammes de Haigh, elle aussi analytique, mais basée sur les mécanismes de dégradation du matériau.

CHAPITRE III PREMIERE LOI D'EVOLUTION TEMPORELLE DE L'ENDOMMAGEMENT POUR LES CMO TISSES 3D

Sommaire du Chapitre III :

III. 1. Loi d'endommagement temporelle issue d'une loi d'endommagement cyclique	68
III. 2. Loi d'endommagement temporelle pour les CMO tissés 3D	71
III. 2. 1. Loi d'endommagement temporelle : contribution «monotone».....	71
III. 2. 2. Loi d'endommagement complète : contribution «monotone» et contribution «de fatigue», avec une variable d'endommagement par mécanisme	73
III. 3. Critère d'endommagement critique $d = dc$ comme indicateur de rupture pour le CMO tissé 3D.....	77
III. 4. Conclusion.....	82

Au travers du chapitre I, nous avons présenté divers modèles d'endommagement et plus particulièrement celui établi à l'ODM-CMO, prenant en compte les sollicitations monotones et celles de fatigue. Le modèle présenté dans ces travaux doit être complémentaire à ODM-CMO.

Ainsi nous allons voir que nous pouvons faire un lien entre les lois en cycles et les lois temporelles, ce qui nous permettra de rendre complémentaire les deux modèles. C'est ce qui est mis en avant dans la partie (II.1). Dans un second temps (II.2), nous présentons la loi d'endommagement complète, pour les sollicitations monotones et de fatigue, qui n'utilise qu'une seule variable d'endommagement (pour les deux types de sollicitations) contrairement à tous les modèles présentés dans le chapitre I. Dans ces travaux, il est primordial de bien comprendre que la loi de comportement (du modèle établi) se base sur celle du modèle d'endommagement ODM-CMO. Il y a alors entre le modèle proposé et ODM-CMO beaucoup de choses en commun. Le modèle d'endommagement se différencie entre autre par le critère de rupture présenté en (III. 3). Nous concluons ce chapitre en (II.4) en mettant l'accent sur une des difficultés majeures des lois (et donc des modèles) d'endommagement temporelles.

III. 1. Loi d'endommagement temporelle issue d'une loi d'endommagement cyclique

Dans le domaine de la fatigue, le lien entre une loi d'endommagement temporelle $\dot{D} = \dots$ et une loi d'endommagement en cycle $\frac{\delta D}{\delta N} = \dots$ peut être fait de façon relativement simple à condition que les équations de la loi de comportement le permettent.

La cinétique d'évolution de l'endommagement du CMO tissé permet, en étant intégrée sur un cycle de fatigue, de déterminer l'incrément d'endommagement par cycle (éventuellement au cours de l'histoire de chargement (Eq. III-1).

$$\frac{\delta D}{\delta N} = \int_{1 \text{ cycle}} \dot{D} dt \quad \text{Eq. III-1}$$

■ Dans le cas des travaux de [Gornet et Ijaz, 2011], par exemple, la loi d'endommagement temporelle $\dot{D} = g(y)\langle \dot{y} \rangle_+$ pour les chargements de fatigue, définissant la fonction de $g(y) = e^{\lambda D} \left(\frac{Y}{S_F}\right)^\delta \langle \frac{1}{S_F} \rangle_+$. Elle est gouvernée par la force motrice équivalente Y . L'intégration sur un cycle nous permet d'obtenir la loi en cycles $\frac{\delta D}{\delta N}$ (Eq. III-2).

$$\frac{\delta D_F}{\delta N} = \int_{1 \text{ cycle}} \dot{D}_F dt = \int_{\text{charge sur 1 cycle}} g(Y) \dot{Y} dt \quad \text{Eq. III-2}$$

La loi intégrée (Eq. III-3) est la loi d'endommagement en cycles.

$$\frac{\delta D_F}{\delta N} = \frac{e^{\lambda D}}{1 + \delta} (1 - R_Y^{s+1}) \left(\frac{Y_{Max}}{S_F}\right)^{s+1} \quad \text{Eq. III-3}$$

où R_Y est le rapport de la force thermodynamique tel que $R_Y = \frac{Y_{min}}{Y_{Max}}$. δ, S_F, λ sont des paramètres.

■ Dans notre cas, la loi d'évolution de l'endommagement initiale va être différente. Un des objectifs est de garder la forme de la loi monotone du modèle ODM-CMO (Eq. I-18), mais lui en donner une écriture temporelle (en vitesse) $\dot{d} = \dots$. Pour garder une certaine cohérence entre la loi monotone et la loi de fatigue, nous avons donc proposé une loi d'endommagement temporelle pour les chargements de fatigue de la même forme, aux paramètres près, que la loi monotone. La forme généralisée proposée est :

$$\dot{d}_k = (d_{sat(k)} - d_k)^{\gamma_k} g(y_k) \langle \dot{y}_k \rangle_+ \quad \text{Eq. III-4}$$

$g(y_k)$ est une fonction dépendante de la force motrice y_k , qui gouverne l'endommagement (en monotone et en fatigue) pour chaque mécanisme de dégradation. Nous proposons une fonction g (Eq. III-5) qui permet de retrouver la loi en monotone du modèle ODM-CMO (donnée ci-après en Eq. I-18). $y_{0(k)}^f$ est le seuil d'endommagement en fatigue et $S_{f(k)}$ et $s_{f(k)}$ sont les paramètres jouant sur la cinétique de l'endommagement de fatigue.

$$g(y_k) = \frac{s_{f(k)} + 1}{S_{f(k)}} \left(\frac{\langle y_k - y_{0(k)}^f \rangle_+}{S_{f(k)}} \right)^{s_{f(k)}} \quad \text{Eq. III-5}$$

De cette manière, en calculant l'intégrale de la fonction g entre la valeur minimale et la valeur maximale des forces motrices, sur un cycle, $\frac{\delta d}{\delta N} = \int_{y_{min}}^{y_{Max}} g(y_k) dy_k$, nous obtenons la forme en cycle de la loi cinétique (temporelle) proposée (Eq. III-6), notons qu'à la décharge, $\langle \dot{y}_k \rangle_+ = 0$,

$$\frac{\delta d_k}{\delta N} = (d_{\infty(k)} - d_k)^{\gamma_k} \left[\left\langle \frac{y_{(k)Max} - y_{0(k)}^f}{S_{f(k)}} \right\rangle_+^{s_{Fat(k)}+1} - \left\langle \frac{y_{(k)min} - y_{0(k)}^f}{S_{f(k)}} \right\rangle_+^{s_{f(k)}+1} \right] \quad \text{Eq. III-6}$$

La loi fait donc apparaître les forces motrices maximale $y_{(k)Max}$ et minimale $y_{(k)min}$, par mécanisme d'endommagement k .

La loi de fatigue proposée par [Rakotoarisoa, 2013] (Eq. III-7) est également gouvernée par les forces motrices. Le rapport de charge considéré est le rapport de la force motrice minimale sur la force motrice maximale $R_{y(k)} = y_{(k)min} / y_{(k)Max}$ avec $d_{sat(k)}^{Fatigue}$, $y_{c(k)}^{Fatigue}$, β_k , γ_k et δ_k des paramètres de fatigue à identifier.

$$\frac{\delta d_{(k) Fatigue}}{\delta N} = (d_{sat(k)}^{Fatigue} - d_{(k) total}^{(m)})^{\gamma_k} \left(\frac{\langle ((1 - R_{y(k)})^{\beta_k} y_{(k)Max} - y_{0(k)}^{Fatigue}) \rangle_+}{y_{c(k)}^{Fatigue}} \right)^{\delta_k} \quad \text{Eq. III-7}$$

- Prenons le cas d'un rapport de charge en force motrice $R_y = 1$

Quand le rapport de charge $R_{y(k)} = \frac{y_{(k)min}}{y_{(k)Max}}$ est égal à 1, alors $y_{(k)min} = y_{(k)Max}$, et donc le

terme $\left[\left\langle \frac{y_{(k)Max} - y_{0(k)}^f}{S_{f(k)}} \right\rangle_+^{s_{f(k)}+1} - \left\langle \frac{y_{(k)min} - y_{0(k)}^f}{S_{f(k)}} \right\rangle_+^{s_{f(k)}+1} \right]$ s'annule. La loi en cycle, obtenue en Eq. III-6

devient nulle pour un tel rapport de charge, $\frac{\delta d_k}{\delta N} = 0$.

Pour la loi de fatigue du modèle ODM-CMO (Eq. III-7), la grandeur $(1 - R_{y(k)})^{\beta_k}$ devient nulle également du fait que $R_{y(k)} = 1$. Les deux lois de fatigue sont équivalentes pour le rapport de charge en force motrice $R_y = 1$.

- Prenons maintenant le cas d'un rapport de charge en force motrice $R_y = 0$

Lorsque le rapport de charge $R_{y(k)} = \frac{y_{(k)min}}{y_{(k)Max}}$ est nul, alors $y_{(k)min} = 0$. Les deux lois sont équivalentes. Pour notre loi (Eq. III-6), la partie faisant intervenir la force minimale $y_{(k)min}$

disparaît puisque $y_{(k)\min} - y_{0(k)}^f < 0$ et alors la partie positive $\left(\frac{y_{(k)\text{Max}} - y_{0(k)}^f}{S_{f(k)}} \right)_+^{s_{f(k)}+1} = 0$. Notre loi en cycle devient (Eq. III-8) :

$$\frac{\delta d_k}{\delta N} = (d_{\text{sat}(k)} - d_k)^{\gamma_k} \frac{s_{f(k)} + 1}{S_{f(k)}} \left(\frac{y_{(k)\text{Max}} - y_{0(k)}^f}{S_{f(k)}} \right)_+^{s_{f(k)}+1} \quad \text{Eq. III-8}$$

La loi en cycle de fatigue du modèle ODM-CMO est alors équivalente (Eq. III-9) puisque $(1 - R_{y(k)})^{\beta_k} = 1$.

$$\frac{\delta d_{1\text{Fatigue}}}{\delta N} = (d_{\infty(1)}^{\text{Fatigue}} - d_{1\text{total}}^{(m)})^{\gamma_1} \left(\frac{\langle y_{(1)\text{Max}}^{(m)} - y_{0(1)}^{\text{Fatigue}} \rangle_+}{y_{c(1)}^{\text{Fatigue}}} \right)^{\delta_1} \quad \text{Eq. III-9}$$

La contribution «de fatigue» de la loi temporelle et celle de la loi en cycles du modèle ODM-CMO, gouvernées par les forces motrices, sont donc équivalentes pour des chargements cycliques pour les rapports de charge extrêmes en force motrice $R_y = 1$ et $R_y = 0$. La Figure 47 montre les évolutions de l'endommagement pour un chargement monotone tout d'abord puis pour un chargement de fatigue $R_y = 0$. La montée en charge atteint une valeur de contrainte maximale, les cycles de fatigue qui suivent sont à amplitude constante dont la contrainte maximale est celle atteinte à la fin du chargement monotone et la contrainte minimale est nulle. L'évolution continue (pour les deux chargements) de la loi d'endommagement temporelle est représentée en bleu. L'évolution discontinue de l'endommagement par le modèle ODM-CMO est représentée en rouge. Pour le chargement monotone, l'évolution est continue (cette contribution n'a pas encore été décrite, elle sera rendue identique pour les deux modèles ODM-CMO et ODM au paragraphe suivant). Par contre, pour le chargement de fatigue, l'état d'endommagement est calculé à chaque fin de cycle (principe de la loi en cycles). Si l'on s'intéresse donc au chargement cyclique, à chaque fin de cycle, l'évolution continue (ODM) en bleue atteint l'incrément d'endommagement (ODM-CMO) en rouge.

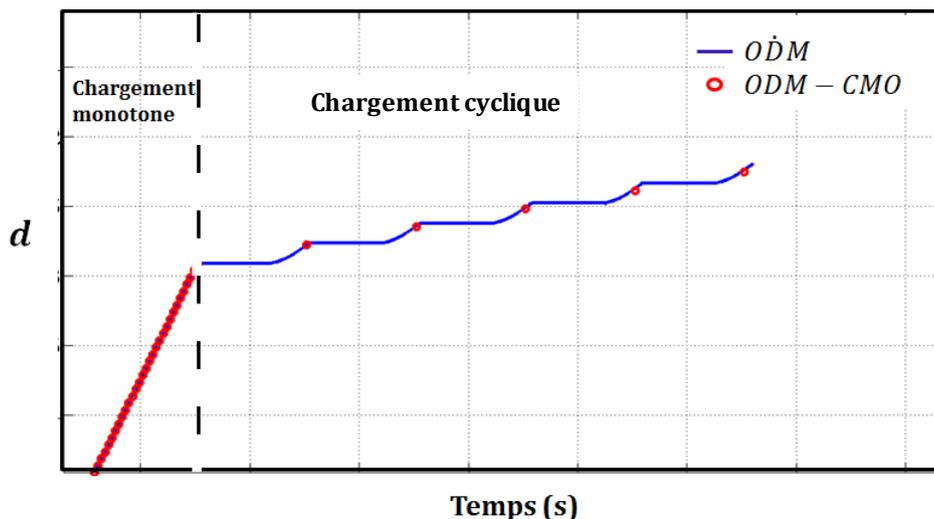


Figure 47 : Equivalence entre le modèle ODM-CMO et ODM pour un chargement de fatigue à rapport de charge nul

III. 2. Loi d'endommagement temporelle pour les CMO tissés 3D

La loi d'endommagement temporelle doit être rendue équivalente aux lois du modèle ODM-CMO pour les chargements monotones et pour les chargements de fatigue. Dans ODM-CMO, la loi monotone est gouvernée par la racine carrée des forces motrices, tandis que la loi en cycles est gouvernée par les forces motrices. Il y a donc, pour ODM-CMO, deux variables d'endommagement par mécanisme de dégradation, une pour les chargements monotones (d_k^{Mon}) et une pour les chargements de fatigue (d_k^{Fat}). Et il y a donc deux fois plus de variables qu'il y a de mécanismes de dégradations k . L'endommagement total est la somme des deux variables d'endommagement $d_k = d_k^{Mon} + d_k^{Fat}$.

Nous avons retrouvé dans la partie précédente la loi en cycle du modèle ODM-CMO à partir de la loi d'endommagement temporelle. La loi proposée est gouvernée par les forces motrices $y_{(k)}$. Néanmoins, nous apportons des modifications sur la notation de la variable qui va gouverner nos deux lois dans le but d'avoir une cohérence d'écriture entre elles et ainsi ne considérer qu'une unique variable d'endommagement, par mécanisme de dégradation, à la fois pour les sollicitations monotones et les sollicitations de fatigue.

III. 2. 1. Loi d'endommagement temporelle : contribution «monotone»

Nous l'avons vu sur la Figure 50, nous avons une forme équivalente à la loi d'évolution de l'endommagement monotone du modèle ODM-CMO. Nous proposons tout d'abord une réécriture de la variable qui gouverne la loi, mais qui ne modifie en rien l'équivalence avec la loi du modèle ODM-CMO.

La force motrice $y_{(k)}$ est fonction des déformations mécaniques (Tableau 1). On peut dire que la force motrice traduit une densité d'énergie de déformation. Celle-ci étant utilisée sous la forme $\sqrt{y_{(k)}}$ en monotone. Nous faisons ici le choix de faire gouverner l'endommagement par une déformation plutôt que par la force motrice. Nous décidons alors de travailler avec ce que nous dénommons les déformations équivalentes $\varepsilon_{eq(k)}$ (Eq. III-10), déterminées comme étant la racine carrée du rapport de la force motrice avec la composante kk (sans somme) du tenseur des rigidités initial (où k est le mécanisme en jeu). Par définition :

$$\varepsilon_{eq(k)} = \sqrt{\frac{2y_k}{C_{kk}^0}} \quad \text{Eq. III-10}$$

Pour le mécanisme $k=1$, par exemple, la déformation équivalente est :

$$\varepsilon_{eq(1)} = \sqrt{\frac{2y_1}{C_{11}^0}} = \sqrt{\left(\varepsilon_1^{d1+2} + \frac{C_{55}^0}{C_{11}^0} \varepsilon_5^{d1+2} + \frac{C_{66}^0}{C_{11}^0} \varepsilon_6^{d1+2} \right)} \quad \text{Eq. III-11}$$

La loi d'endommagement monotone (Eq. I-18) du modèle ODM-CMO [Marcin, 2010 ; Rakotoarisoa, 2013] pour les chargements monotones, doit être réécrite en fonction des déformations équivalentes (Eq. III-12), la variable d'endommagement monotone par mécanisme de dégradation k de ODM-CMO étant notée d_k^{Mon} .

La loi d'endommagement monotone fait intervenir quatre paramètres que nous appellerons « paramètres monotones », à savoir, $d_{sat(k)}$ l'endommagement de saturation, $\varepsilon_{0(k)}^m$ le seuil d'endommagement en déformation et $\varepsilon_{c(k)}$ paramètre de résistance de l'endommagement (ou paramètre cinétique) et p_k un paramètre de forme. La loi monotone est gouvernée par la déformation équivalente maximale, où $\varepsilon_{eq(k)Max} = \max_t \varepsilon_{eq(k)}$ est la valeur maximale sur l'histoire du chargement (à ne pas confondre avec la valeur maximale des lois en cycles),

$$d_k^{Mon} = d_{sat(k)} \left[1 - \exp \left(- \left(\frac{\varepsilon_{eq(k)Max} - \varepsilon_0^m(k)}{\varepsilon_c(k)} \right)_+^{p_k} \right) \right] \quad Eq. III-12$$

Le passage de la loi d'endommagement monotone ODM-CMO vers une loi d'endommagement temporelle est obtenu en dérivant la variable d'endommagement monotone par rapport au temps $\frac{dd_k^{Mon}}{dt}$. Il faut alors dériver les déformations équivalentes par rapport au temps $\frac{d\varepsilon_{eq(k)Max}}{dt} = \dot{\varepsilon}_{eq(k)Max}$ (Eq. III-13 et Eq. III-14), de façon à obtenir une expression temporelle gouvernée par le taux des déformations équivalentes $\dot{\varepsilon}_{eq(k)}$ (lorsque ceux-ci sont positifs). En remarquant que si :

$$d_{sat(k)} - d_k^{Mon} = d_{sat(k)} \exp \left(- \left(\frac{\varepsilon_{eq(k)Max} - \varepsilon_0^m(k)}{\varepsilon_c(k)} \right)_+^{p_k} \right) \quad Eq. III-13$$

Nous avons :

$$\dot{d}_k = d_{sat(k)} \left[\exp \left(- \left(\frac{\varepsilon_{eq(k)Max} - \varepsilon_0^m(k)}{\varepsilon_c(k)} \right)_+^{p_k} \right) \right] p_k \left(- \left(\frac{\varepsilon_{eq(k)Max} - \varepsilon_0^m(k)}{\varepsilon_c(k)} \right)_+^{p_k-1} \right) \dot{\varepsilon}_{eq(k)Max} \quad Eq. III-14$$

En remplaçant dans l'équation Eq. III-14 l'expression de l'Eq. III-13, nous obtenons la contribution «monotone» de la loi d'évolution temporelle de l'endommagement :

$$\dot{d}_k = (d_{sat(k)} - d_k) \left(\frac{\varepsilon_{eq(k)Max} - \varepsilon_0^m(k)}{S_m(k)} \right)_+^{s_m(k)} \langle \dot{\varepsilon}_{eq(k)Max} \rangle_+ \quad Eq. III-15$$

Remarquons bien que l'expression (Eq. III-15) est strictement équivalente, aux notations près, à la loi d'endommagement monotone du modèle ODM-CMO (avec la valeur maximale sur l'histoire du chargement). Nous pouvons donc faire le lien de façon directe entre les paramètres monotones de la loi monotone du modèle ODM-CMO avec ceux de la loi proposée (Tableau 2).

Cinétique de l'endommagement	$s_m(k) = p_k - 1$ et $\frac{1}{(s_m(k) + 1)^{s_m(k)}} S_0(k) = S_m(k) = \varepsilon_c(k)$
Seuil d'endommagement en déformation	$\varepsilon_0^m(k)$

Tableau 2 : relation entre les paramètres monotones du modèle ODM-CMO et ODM

A noter que $\varepsilon_c(k)$ et $\varepsilon_0^m(k)$ sont également directement obtenus à partir des paramètres $y_c(k)$ et $y_0(k)$. Ils sont tels que $\varepsilon_c(k) = \sqrt{\frac{2y_c(k)}{C_{11}^0}}$ et $\varepsilon_0^m(k) = \sqrt{\frac{2y_0(k)}{C_{11}^0}}$.

Du fait de l'équivalence stricte entre les contributions monotones des deux modèles, l'identification des paramètres est donc immédiate comme nous venons de le voir. Ainsi, cela implique que pour un chargement monotone, les deux modèles donnent exactement la même réponse si nous avons déterminé nos paramètres à partir des relations du Tableau 2, pour le monotone. La Figure 48 le vérifie. Elle montre les évolutions des endommagements, pour les deux lois monotones, pour un chargement de traction sens chaîne (k=1). Les deux évolutions d'endommagement se superposent parfaitement.

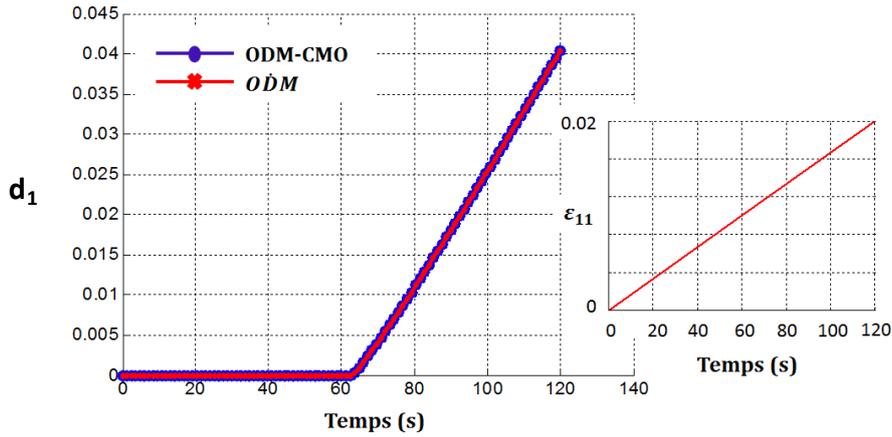


Figure 48 : Evolution de l'endommagement d_1 en fonction du temps pour un chargement de traction pure (monotone) (sens chaîne), croix rouge pour ODM, rond bleu pour ODM-CMO

III. 2. 2. Loi d'endommagement complète : contribution «monotone» et contribution «de fatigue», avec une variable d'endommagement par mécanisme

Nous avons proposé une loi d'endommagement temporelle de fatigue dans la partie (III. 1). Cette loi a été obtenue en cohérence avec la loi en cycles de [Rakotoarisoa, 2013], les deux lois étant équivalentes pour deux rapports de charge extrêmes 0 et 1, en force motrice.

Néanmoins, dans le but d'être cohérent avec la loi d'endommagement temporelle monotone (Eq. III-15), nous reformulons la loi d'endommagement temporelle de fatigue (Eq. III-4) en fonction des déformations équivalentes ε_{eq} (Eq. III-16) en lieu et place des forces motrices,

$$\dot{d}_k = (d_{sat(k)} - d_k)^{\gamma_k} \left\langle \frac{\varepsilon_{eq(k)} - \varepsilon_{0(k)}^f}{S_f(k)} \right\rangle_+^{s_f(k)} \langle \dot{\varepsilon}_{eq(k)} \rangle_+ \quad \text{Eq. III-16}$$

Nous avons donc deux contributions d'endommagement, une pour les sollicitations monotones (Eq. III-15) et la seconde pour les sollicitations de fatigue (Eq. III-17). Les deux contributions ont été volontairement établies avec un formalisme identique, dans le but de pouvoir définir une unique loi d'endommagement qui ferait apparaître une contribution «monotone» et une contribution «de fatigue». Il n'y a donc plus deux variables d'endommagement par mécanisme de dégradation mais une seule, notée d_k . Rappelons que les mécanismes de rupture monotone et de rupture de fatigue ont été observés comme similaires [Rakotoarisoa, 2013].

L'unique condition qui doit être respectée est que le taux d'endommagement doit être positif ou nul ($\dot{d}_k \geq 0$). Autrement dit, l'endommagement au cours du temps ne peut pas décroître. Ceci sous-entend que si le taux de déformations équivalentes est négatif ($\dot{\varepsilon}_{eq(k)} < 0$), alors le chargement est une décharge, il n'y a pas d'évolution de l'endommagement. A contrario, si le taux de déformation équivalente est positif ($\dot{\varepsilon}_{eq(k)} > 0$), le chargement vu est une charge, il y a évolution de l'endommagement (à condition que le seuil d'endommagement, en monotone ou en fatigue, soit dépassé). Cette condition est prise en compte grâce aux valeurs positives autour des variables concernées $\langle \dot{\varepsilon}_{eq(k)} \rangle_+$.

Afin de pouvoir regrouper les deux contributions et de pouvoir passer de l'une à l'autre suivant le chargement vu au cours du temps, nous avons statué que la contribution «monotone» à l'endommagement existe lorsque le maximum du chargement vu au cours du temps croît. En d'autres mots, si le taux de déformation équivalente maximale ($\dot{\varepsilon}_{eq(k)Max} > 0$) au cours de temps

est positif, alors la contribution «monotone» est activée. A contrario, si le taux d'endommagement maximal est nul ($\dot{\epsilon}_{eq(k)Max} = 0$), le maximum des déformations équivalentes atteint à un instant t n'est jamais dépassé aux temps $t + \Delta t$, dans ce cas la contribution «de fatigue» est activée. L'activation et la désactivation de l'une ou l'autre contribution est gérée de la façon suivante :

- Lorsque le maximum² des déformations équivalentes évolue, la contribution «monotone» est activée car elle ne dépend que du taux de déformation équivalente maximum comme $\dot{d}_k = g(\epsilon_{eq} \dots) \langle \dot{\epsilon}_{eqMax} \rangle_+$. La contribution «de fatigue» dépend du taux de déformation équivalente maximum ainsi que le taux de déformation équivalente vu au cours du temps tel que $\dot{d}_k = g(\epsilon_{eq}, etc \dots) [\langle \dot{\epsilon}_{eq} \rangle_+ - \langle \dot{\epsilon}_{eqMax} \rangle_+]$. Ainsi à l'instant courant t , si le maximum des déformations équivalentes évolue, alors $\langle \dot{\epsilon}_{eq} \rangle_+ = \langle \dot{\epsilon}_{eqMax} \rangle_+$ et donc $[\langle \dot{\epsilon}_{eq} \rangle_+ - \langle \dot{\epsilon}_{eqMax} \rangle_+] = 0$, la contribution «de fatigue» est nulle. Le principe est schématisé sur la Figure 49. Le chargement en force motrice est représenté en noir, et l'évolution d'endommagement monotone en rouge. L'endommagement de fatigue n'est pas représenté sur cette figure. La figure (a) représente l'évolution globale de l'endommagement monotone pour le chargement représenté. La Figure 49-b) se focalise sur les instants t_1 et t_2 . A l'instant t_1 , le chargement atteint un maximum. Avant cet instant, l'endommagement évolue, une fois l'instant atteint le maximum de la force motrice n'évolue plus, l'endommagement est alors constant (il n'augmente ni ne diminue). A l'instant t_2 , le dernier maximum de la force motrice vu au cours du chargement est dépassé. La contribution «monotone» est réactivée (celle de fatigue s'annule), l'endommagement augmente.

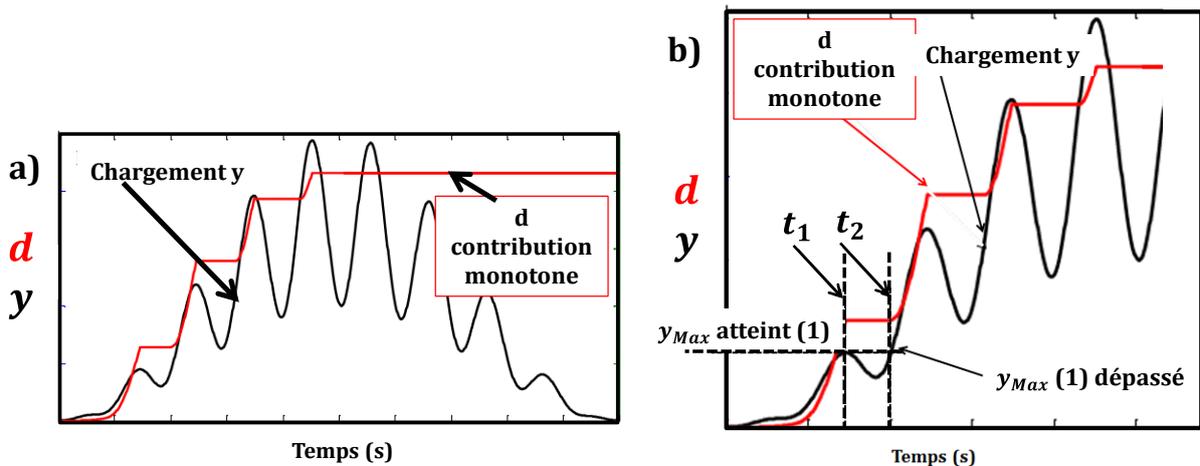


Figure 49 : Schéma de principe de l'activation de la contribution «monotone» ; a) vue globale de l'évolution de l'endommagement monotone pour un chargement en force motrice sinusoïdale ; b) zoom

- Dans le cas inverse, si le maximum est constant, la partie positive $\langle \dot{\epsilon}_{eqMax} \rangle_+ = 0$ et ainsi $[\langle \dot{\epsilon}_{eq} \rangle_+ - \langle \dot{\epsilon}_{eqMax} \rangle_+] = \langle \dot{\epsilon}_{eq} \rangle_+$, la contribution «de fatigue» est activée (la contribution «monotone» s'annule). De la même manière, le principe est schématisé sur la Figure 50. En (a), une vue globale de l'évolution de l'endommagement de fatigue et en (b), un zoom sur ce qui se passe à deux instants du chargement. A t_1 , la force motrice atteint un maximum qui n'est jamais dépassé par la suite, notamment à t_3 . L'endommagement créé une fois passé t_1 ne sera créé par la contribution «de fatigue». Par contre, comme pour la contribution «monotone», lorsque le chargement diminue (après t_1 et t_3), le taux d'endommagement \dot{d} est nul, l'endommagement d est donc constant.

² $\max_{\tau \leq t} \dot{\epsilon}_{eq(k)}(\tau)$ sur toute l'histoire du chargement jusqu'à l'instant courant t

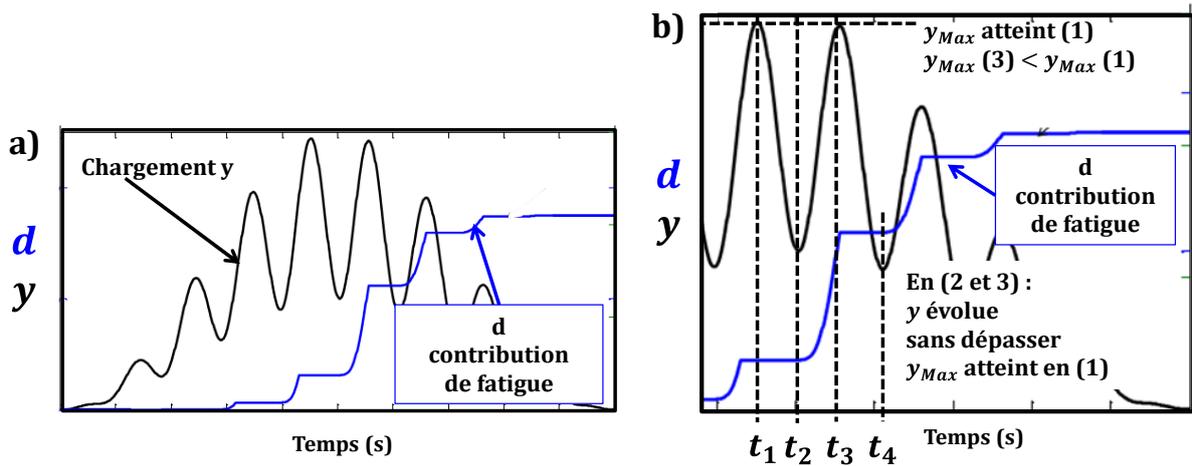


Figure 50 : Schéma de principe de l'activation de la contribution «de fatigue» ; a) vue globale de l'évolution de l'endommagement de fatigue pour un chargement en force motrice sinusoïdale ; b) zoom

La loi d'endommagement, à une seule variable d'endommagement par mécanisme de dégradation, doit alors réunir les deux contributions et est présentée en (Eq. III-17).

$$\dot{d}_k = (d_{sat(k)} - d_k) \left(\frac{\varepsilon_{eq(k)Max} - \varepsilon_{0(k)}^m}{S_{m(k)}} \right)_+^{\delta_{m(k)}} \dot{\varepsilon}_{eq(k)Max} + (d_{sat(k)} - d_k)^{\gamma_k} \left(\frac{\varepsilon_{eq(k)} - \varepsilon_{0(k)}^f}{S_{f(k)}} \right)_+^{\delta_{f(k)}} [\langle \dot{\varepsilon}_{eq(k)} \rangle_+ - \dot{\varepsilon}_{eq(k)Max}]$$

Eq. III-17

Dans la suite du manuscrit, nous parlerons souvent de fonction critère d'endommagement, qui définit la limite entre état endommagé et état non-endommagé. Ici, la fonction critère, notée f_k (mécanisme k) permet donc de définir le passage de l'état non endommagé à l'état endommagé pour ce mécanisme puisque f_k est définie de telle sorte que lorsque la déformation équivalente $\varepsilon_{eq(k)}$ (variable qui gouverne la loi d'endommagement) dépasse un certain seuil (seuil monotone $\varepsilon_{0(k)}^m$ ou seuil de fatigue $\varepsilon_{0(k)}^f$), alors la fonction critère, par exemple pour la contribution «de fatigue» $f_k = \varepsilon_{eq(k)} - \varepsilon_{0(k)}^f$ devient positive et de l'endommagement se crée. Par contre, si ce seuil n'est pas atteint, $f_k < 0$, la partie positive $\langle \varepsilon_{eq(k)} - \varepsilon_{0(k)}^f \rangle_+$ s'annule, il n'y a pas de création d'endommagement.

Les deux seuils d'endommagement sont très différents, l'un s'active lorsque les fissures commencent à avoir un effet sur le comportement macroscopique, c'est le seuil d'endommagement monotone $\varepsilon_{0(k)}^m$. Le seuil d'endommagement de fatigue $\varepsilon_{0(k)}^f$ est plus petit et permet de capturer les microfissures. La Figure 51 représente les seuils d'endommagement et l'évolution schématique des endommagements correspondants en fonction de l'évolution de la déformation équivalente. Pour un même chargement dans notre modèle, on peut imaginer que les deux seuils soient activés mais aussi que seul le seuil de fatigue soit activé (contribution «monotone» nulle), ce qui arrive souvent si, pour un chargement cyclique à amplitude constante par exemple, la contrainte maximale est relativement faible et que la première montée en charge n'a pas atteint le seuil monotone.

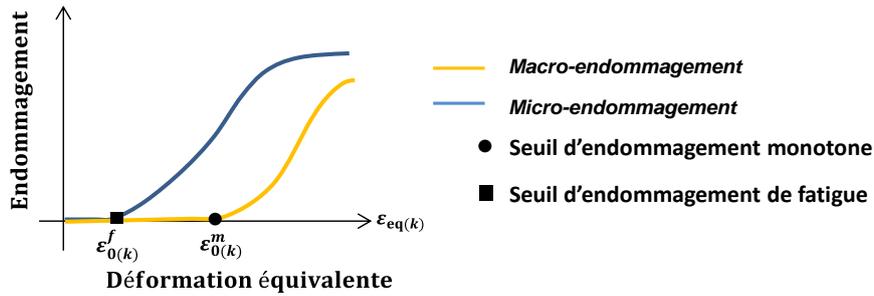


Figure 51 : Représentation des seuils d'endommagement au travers d'une représentation de l'évolution de l'endommagement en fonction de la déformation équivalente

Chaque paramètre de la loi a un rôle bien particulier sur l'évolution de l'endommagement. Les deux contributions (monotone et de fatigue) établies ont un formalisme identique, ce qui implique qu'elles ont une cinétique d'évolution assez semblable qui se différencie par les valeurs des paramètres, ces derniers ayant un rôle similaire sur les cinétiques d'endommagement respectives.

Expérimentalement, il a été observé que l'évolution de l'endommagement au bout d'un certain nombre de cycles (important) tend à atteindre une valeur asymptotique appelée **endommagement de saturation**, noté $d_{sat(k)}$. Les travaux de [Revest, 2011] (Figure 52(a)), sur des composites stratifiés, ont montré que l'endommagement à saturation en fatigue ne dépend pas de la contrainte maximale du chargement et que cela implique alors une valeur à saturation unique, par mécanisme de dégradation, et ainsi identique pour la contribution «monotone» et la contribution «de fatigue» [Verhoef, 2001] (Figure 52(b)). Dans les travaux de thèse de [Rakotoarisoa, 2013], il a été considéré que ce phénomène de saturation était identique pour les composites à matrice organique tissés 3D. Nous faisons ici la même hypothèse.

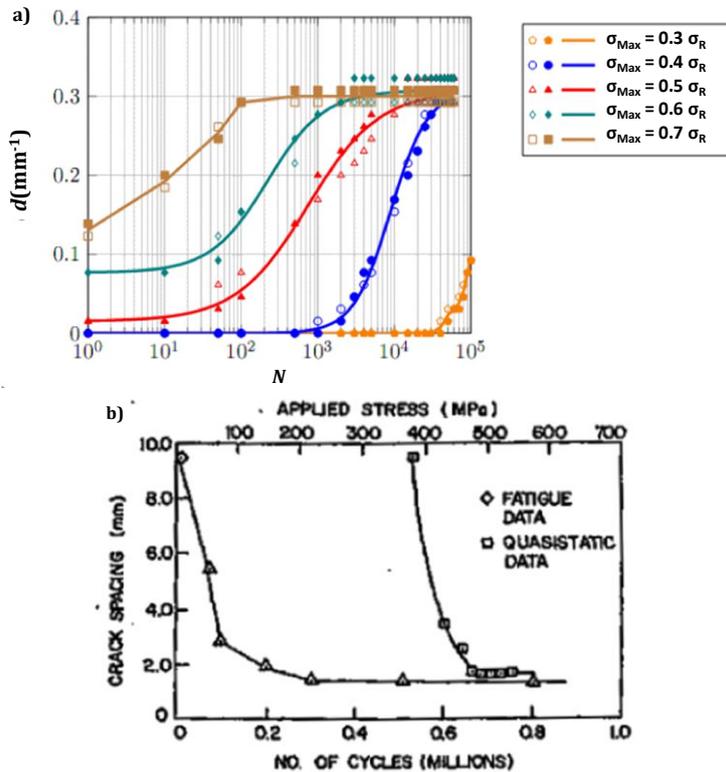


Figure 52 : (a) Evolution de la densité de fissures dans la couche à 90° d'un stratifié (0₃/90₆/0₃) avec $R_\sigma = 0.1, f=1$ Hz et pour différents niveaux de contrainte maximale [Revest, 2011] et (b) Evolution de la distance inter-fissure pour un chargement statique et un chargement cyclique ($R_\sigma = 0.1, \sigma_{Max} = 0.75 \sigma_R$) sur un stratifié [0/90] [Verhoef, 2001]

Physiquement, cela signifie que lorsque l'endommagement atteint cette valeur de saturation, la densité de fissures accumulée que peut accepter la pièce a atteint sa valeur maximale. Cette valeur peut aller de 0 jusque l'infini dans les modèles ODM-CMO initiaux. La valeur à saturation est identifiée sur la courbe de perte de charge en fonction du nombre de cycles pour un essai de fatigue. La valeur du module endommagé est extrapolée aux très grands nombres cycles, et une approche 1D permet de déterminer l'endommagement correspondant à cette valeur de module [Rakotoarisoa, 2013].

Le paramètre γ_k , lié à l'effet de saturation, a une influence sur la cinétique de l'endommagement. Ceci a été montré dans les travaux de [Rakotoarisoa, 2013], au travers de l'évolution de l'endommagement et de la perte de module (Figure 53). Plus γ_k diminue, plus la vitesse d'endommagement vers la saturation est élevée.

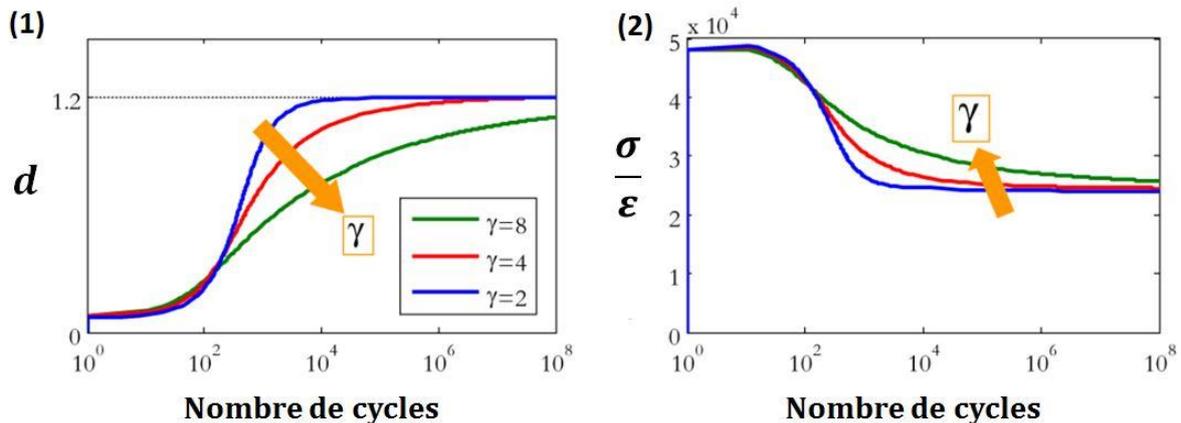


Figure 53 : Effet du paramètre γ sur l'évolution de l'endommagement en fatigue(1) et de la perte de charge contrainte sur déformation (2) [Rakotoarisoa, 2013]

De la même manière que pour la contribution «monotone», l'activation de la contribution «de fatigue» peut être gérée par un seuil d'endommagement, à l'origine de la fonction critère f_k . Si ce seuil était nul, l'évolution de l'endommagement débuterait dès que le taux des déformations équivalentes $\dot{\varepsilon}_{eq(k)}$ devient positif. A noter que le seuil d'endommagement de fatigue est plus faible que le seuil d'endommagement monotone [Rakotoarisoa, 2013].

Les paramètres $S_{f(k)}$, $s_{f(k)}$ (ou $S_{m(k)}$, $s_{m(k)}$ en monotone) permettent de prendre en compte l'effet du chargement sur l'évolution de l'endommagement diffus en fatigue. Leur influence intervient sur la forme de l'évolution de l'endommagement [Rakotoarisoa, 2013]. A une valeur de chargement donnée, plus le paramètre S (ou s) est élevé, moins l'évolution de l'endommagement est rapide.

L'ensemble des paramètres de la loi d'endommagement temporelle a été présenté. Dans le cadre de cette thèse, la loi d'endommagement proposée (Eq. III-17) vient remplacer les deux lois d'endommagement du modèle ODM-CMO. Pour valider étape par étape le bon fonctionnement de notre loi, nous avons également apporté des simplifications au modèle ODM-CMO. L'introduction d'un critère de rupture à la place d'une cinétique (adoucissante) de rupture progressive des torons est une de ces simplifications, que nous allons présenter maintenant.

III. 3. Critère d'endommagement critique $d = d_c$ comme indicateur de rupture pour le CMO tissé 3D

Dans la littérature, nous trouvons plusieurs critères de rupture, des critères macroscopiques utilisés en post-traitement, souvent fonction de l'état de contrainte, qui permettent d'évaluer l'instant de défaillance et donc la tenue d'une structure. Une première méthode de dimensionnement consiste à calculer en post-traitement la rupture d'une structure en associant un critère de rupture simple à une loi de comportement. Une seconde méthode consiste à prendre en compte l'effet de la rupture progressive sur la réponse non linéaire du matériau,

dans la formulation. C'est cette seconde méthode qui a été utilisée dans les travaux de [Marcin, 2010] et [Rakotoarisoa, 2013] pour les CMO tissés 3D. En effet, dans ODM-CMO, le critère de rupture se définit comme l'apparition de la première rupture de torons, *i.e.* le critère de rupture des torons de fibres est atteint dès qu'une seule des six forces motrices de ruptures de torons de fibres ($k = 1$ traction, 1compression, 2traction, 2compression, 3traction, 3compression) a atteint le seuil de rupture des torons $y_{0(k)}^f$ lui correspondant (Eq. III-18).

$$y_k^f - y_{0(k)}^f \geq 0 \quad \text{Eq. III-18}$$

Une fois la première rupture de fibre atteinte, le nombre de fibres rompues peut augmenter de façon progressive (variables internes d_k^f) ce qui engendre le caractère adoucissant du comportement. Cette rupture progressive peut être vue comme une déchirure du réseau de fibres (il est à noter que les torons usuellement utilisés dans ces matériaux sont constitués de plusieurs dizaines de milliers de fibres de carbone). La loi d'endommagement temporelle proposée, par mécanisme d'endommagement, est écrite judicieusement de manière à activer la contribution «monotone» ou la contribution «de fatigue» (III. 2. 2). Dans un premier temps, nous avons pensé à intégrer une troisième contribution (Eq. III-19) qui serait activée une fois le seuil de rupture atteint et qui ainsi prendrait en considération la rupture progressive des fibres. Cette troisième contribution intégrerait également la dégradation de la matrice générée par les ruptures de torons de fibres.

$$d_k = \text{contribution monotone} + \text{contribution de fatigue} + \text{contribution de rupture progressive des fibres} \quad \text{Eq. III-19}$$

Nous avons considéré que lorsque les premières ruptures de fibre sont atteintes lors du processus de fatigue, le nombre de cycles restant avant la rupture complète de l'échantillon est très faible vis-à-vis des cycles déjà effectués. D'autre part, lorsque ces premières ruptures de fibre interviennent le matériau est dans un état de dégradation « avancé » et il n'est pas absurde de considérer d'un point de vue industriel le matériau comme rompu.

Nous nous sommes donc orientés vers des solutions plus simple. Des propositions d'autres critères ont été envisagées comme un **critère en déformation**. Ce critère serait basé sur l'évolution de la déformation totale et la déformation à rupture des fibres $\varepsilon_{crit}^{fibre}$ tel que, dès lors que l'une des composantes du tenseur des déformations totales dépasse la déformation à rupture des fibres ($\varepsilon_{(k)} - \varepsilon_{crit(k)}^{fibre} \geq 0$), alors le matériau est considéré comme rompu. Les déformations à rupture des fibres, dans les différentes directions seraient les paramètres à identifier. Une étude 1D a été réalisée afin d'avoir une idée de l'impact sur la prévision de la durée de vie en fatigue (courbe de Wöhler) d'un tel critère. Après identification des paramètres monotone et de fatigue du modèle, le critère est appliqué. Il semble que ce critère ne retranscrive pas correctement la réalité (Figure 54), et surestime très significativement la durée de vie.

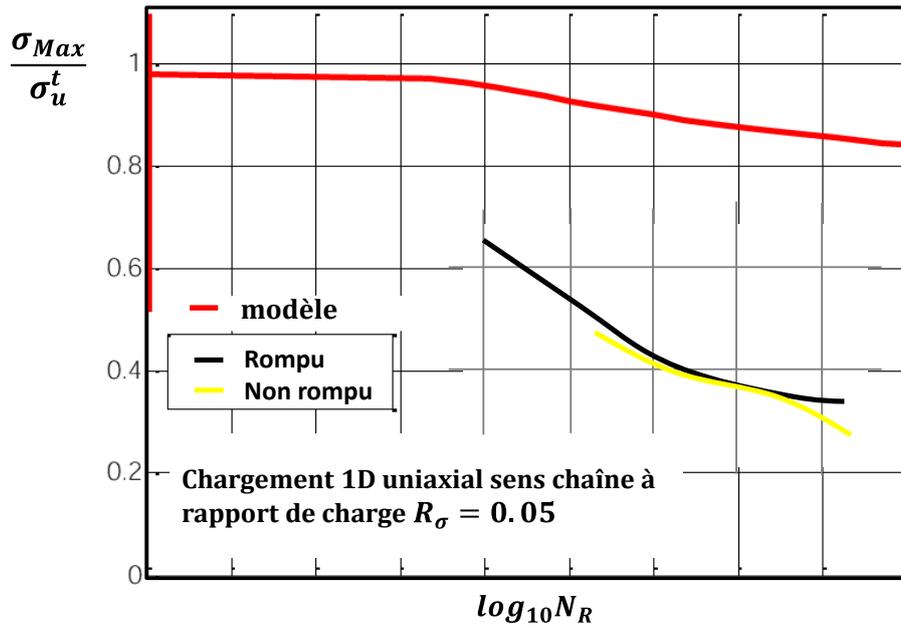


Figure 54 (annexe confidentielle): Prédiction de la durée de vie (Wöhler) pour un CMO tissé 3D, avec un critère de rupture en déformation ; sollicitation 1D uniaxiale (sens chaîne $k=1$)

Une autre possibilité serait d'utiliser un **critère en force motrice** comme dans les travaux de [Rakotoarisoa, 2013] où le processus de rupture débute lorsque les forces motrices des fibres y_k^f atteignent une valeur seuil $y_{0(k)}^f$ (Eq. I-30). Ce critère pourrait être complété en intégrant la notion d'endommagement à rupture scalaire $d_{crit(k)}$ (Eq. III-20) qui viendrait pondérer la valeur de la force motrice à rupture. Ce formalisme consisterait d'une certaine manière en prendre en compte de manière conjointe la contrainte ultime de traction (ou compression) et le niveau d'endommagement.

$$y_{(k)} \leq \alpha(d_k) y_{0(k)}^{(f)} \text{ avec } \alpha(d_k) = \frac{d_{crit(k)} - d_k}{d_{crit(k)}} \quad \text{Eq. III-20}$$

Dans notre cas où la loi d'endommagement est gouvernée par les déformations équivalentes, ce critère pourrait être réécrit en fonction des déformations (Eq. III-21), du fait de la relation simple entre la force motrice et la déformation équivalente $\varepsilon_{0(k)}^{(f)} = \sqrt{2y_0^{(f)} / C_{kk}^0}$.

$$\varepsilon_{eq(k)} \leq \alpha(d_k) \varepsilon_{0(k)}^{(f)} \text{ avec } \alpha(d_k) = \frac{d_{crit(k)} - d_k}{d_{crit(k)}} \quad \text{Eq. III-21}$$

Identifier ce critère implique de disposer de deux essais, le premier est monotone pour déterminer le seuil d'endommagement monotone et l'endommagement associé, le second essai est un essai de fatigue à grand nombre de cycles qui permet l'identification de l'endommagement critique d_{crit} . De la même manière, l'exercice a été fait dans un cadre 1D uniaxial (sens chaîne) (**Figure 55**).

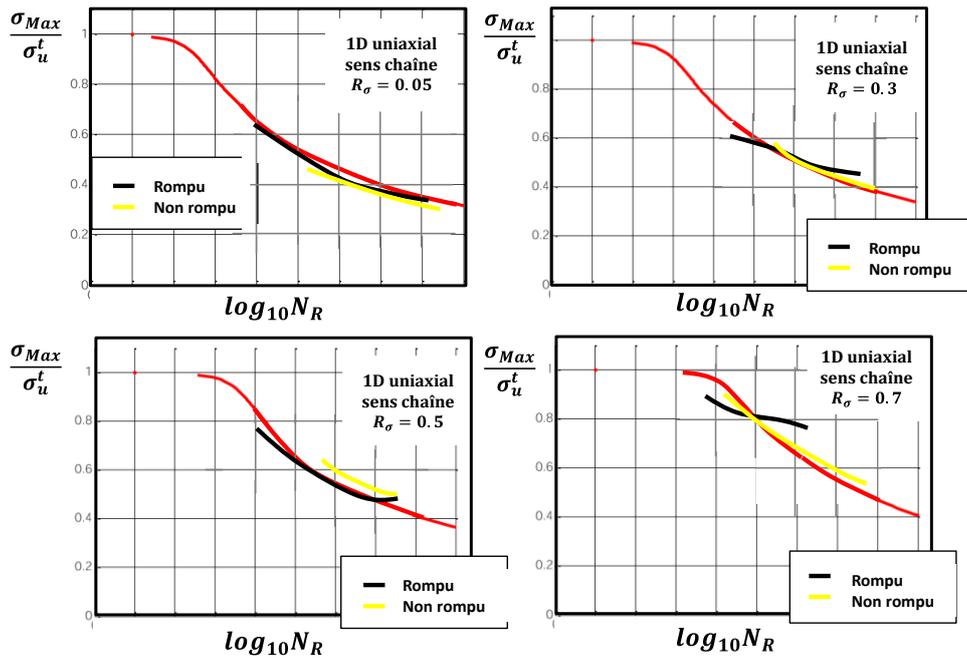


Figure 55 (annexe confidentielle): Prédiction de la durée de vie (Wöhler) pour un CMO tissé 3D, avec un critère de rupture en force motrice pondéré par l'endommagement de rupture ; sollicitation 1D uniaxiale (sens chaîne)

Enfin un critère encore plus simple ne faisant intervenir que le niveau d'endommagement a été envisagé. Un des avantages majeurs d'un tel **critère dit d'endommagement critique** (paramètre d_{crit}) est qu'il est très facile à implémenter dans un code de calcul. En effet, tant que la variable d'endommagement, pour un mécanisme donné k , n'a pas atteint la valeur de seuil de rupture $d_{crit(k)}$, alors le matériau n'est pas considéré comme rompu. Bien que cette méthode présente certaines limites, ce critère est facilement généralisable aux chargements 3D. En effet, si par exemple pour une sollicitation donnée, les trois mécanismes d'endommagement étaient activés, la rupture interviendrait lorsque l'une des trois variables d'endommagement atteindrait la valeur critique, du mécanisme en question. Pour déterminer les critères de rupture, pour chacun des mécanismes, le modèle ODM-CMO initial [Rakotoarisoa 2013] a été utilisé, mais en ayant désactivé les mécanismes visqueux. L'endommagement critique a pour valeur l'endommagement atteint à la contrainte à rupture de traction (**Figure 55**). Il est donc essentiel de noter que ce critère n'utilise donc aucune donnée de fatigue mais est entièrement identifié sur les essais monotones (cela revient à considérer que la fatigue n'affecte pas directement les fibres et qu'il n'y a donc pas de phénomène d'usure de ces fibres).

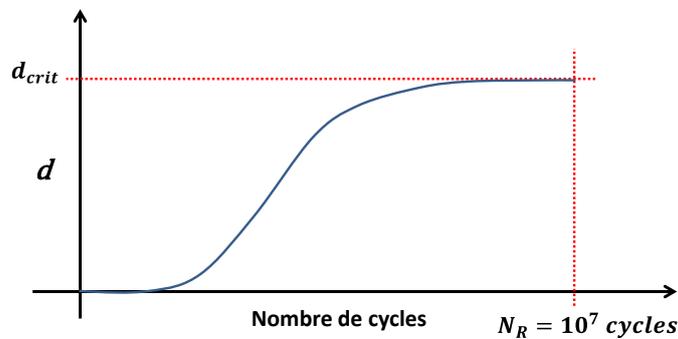


Figure 56 : Procédure d'identification de l'endommagement à rupture de fatigue d_{crit} grâce à un chargement de fatigue

La **Figure 57** représente les endommagements critiques extraits des résultats expérimentaux, pour des sollicitations de fatigue en contrainte pour différentes valeurs de la contrainte

maximale appliquées. Ces endommagements sont représentés par les carrés et les cercles (respectivement essais à rupture et essais interrompus). Le losange vert à $N_R = 1$ représente l'endommagement critique monotone. L'endommagement critique monotone est borné par la valeur maximale et minimale de l'endommagement critique de fatigue ($d_{crit}^{Fat_Max} > d_{crit}^{Mon} > d_{crit}^{Fat_min}$).

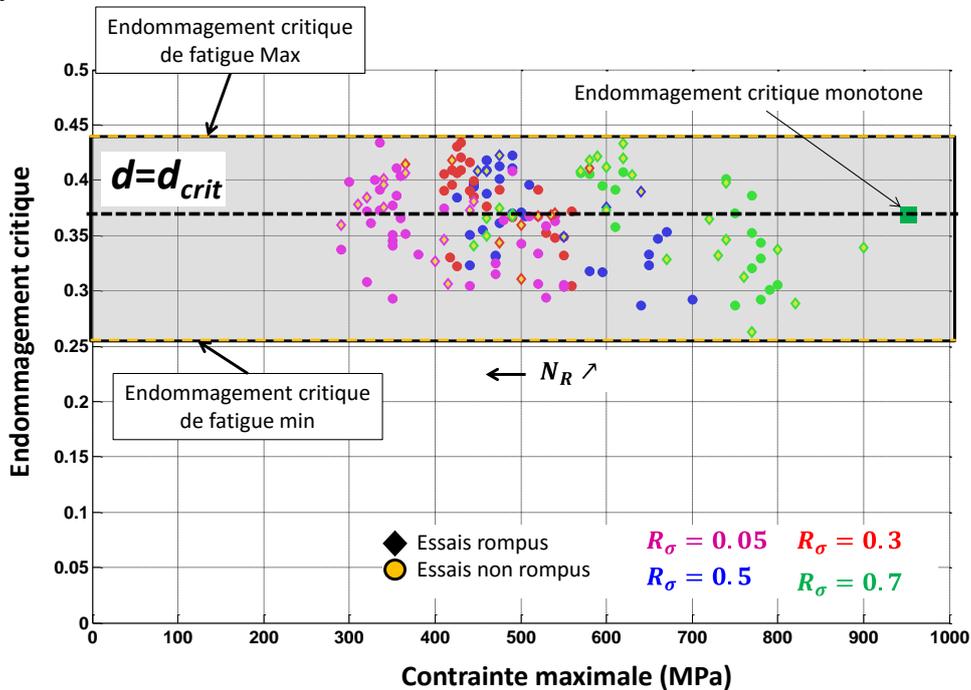


Figure 57 : Endommagement critique pour des chargements de fatigue (à quatre rapports de charge) et pour le chargement monotone

Une fois les niveaux d'endommagements à rupture identifiés ($d_{crit(k)}$) pour chaque mécanisme de dégradation (k), le critère est défini tel que lorsque la variable d'endommagement atteint l'endommagement à rupture correspondant ($d_k = d_{crit(k)}$), le matériau est considéré comme rompu. La Figure 58 représente les courbes Wöhler pour trois endommagements critiques différents (compris dans l'intervalle d'incertitude de la Figure 57, dans le cas de calculs 1D). Les courbes de Wöhler sont plutôt bien représentatives des essais expérimentaux (contrairement au critère en déformation (Figure 54)).

Dans notre cas, nous avons choisi donc dans un premier temps de prendre l'endommagement atteint à la contrainte ultime de traction/compression qui semble légitime car cette valeur se trouve approximativement au centre de l'intervalle d'incertitude sur $d_{crit(k)}$ (Figure 57). Cela sous-entend que seuls les autres paramètres monotones ($s_{m(k)}, S_{m(k)}$) doivent être connus.

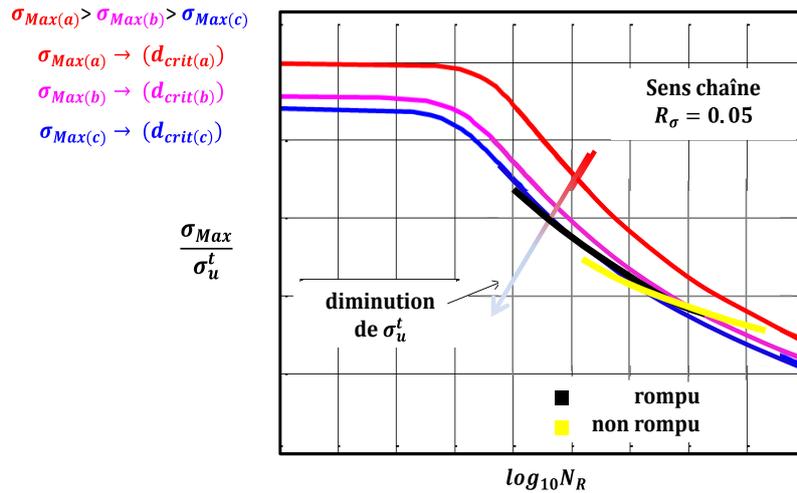


Figure 58 (annexe confidentielle): Prédiction de la durée de vie (courbe de Wöhler) pour un CMO tissé 3D, avec un critère de rupture d'endommagement d_{crit} ; sollicitation 1D uniaxiale (sens chaîne $k=1$)

III. 4. Conclusion

Dans mes travaux, l'idée est de proposer une loi capable de prendre en considération des chargements complexes, aléatoires. Cela est possible avec une loi d'évolution dite temporelle, écrite en vitesse ou taux d'endommagement $\dot{d}_k = \dots$ plutôt qu'en cycle. $\frac{\delta d_k}{\delta N} = \dots$. Le lien, étroit, entre loi en cycles et loi temporelle a été présenté et nous a permis de proposer une loi d'endommagement temporelle, équivalente à la loi d'endommagement en cycles de [Rakotoarisoa, 2013], pour deux types de chargements cycliques particuliers (les chargements cycliques à rapport de charge en force motrice $R_y = 0$ et ceux à $R_y = 1$). De plus, un des avantages, comparé au modèle ODM-CMO, est la possibilité de réunir la contribution pour les chargements monotones et celle pour les chargements de fatigue, en une seule et même loi d'évolution pour chaque variable d'endommagement. Il n'y a donc plus qu'une seule variable d'endommagement par mécanismes de dégradation. Ceci présente, notamment l'intérêt de simplifier l'implémentation numérique. Une autre différence entre les deux modèles est l'activation des deux variables d'endommagement pour le modèle ODM-CMO alors que dans le modèle proposé, c'est l'une ou l'autre des variables qui s'active.

La loi de comportement du modèle proposé et que nous nommons *ODM* présente des simplifications par rapport à celle du modèle ODM-CMO. Deux simplifications majeures sont la non considération du caractère visqueux de la matrice époxy et l'utilisation d'un critère de rupture scalaire d'endommagement $d_{crit(k)}$, par mécanisme d'endommagement k . Afin de valider le modèle étape par étape, nous n'avons pas voulu intégrer les déformations visqueuses dans cette première modélisation. Les deux raisons majeures de ce choix sont premièrement une question de compréhension du couplage complexe « fatigue/fluage » qui nécessite certainement des travaux de recherche complémentaires et d'autre part la volonté d'obtenir un modèle de prévision de durée de vie ayant des coûts de calcul raisonnables. En effet, comme nous le verrons dans les chapitres suivants, la non prise en compte de la viscoélasticité nous permet d'utiliser une résolution numérique, utilisant seulement les valeurs minimales et maximales des chargements cycliques. De plus, ce constat nous a alors incité à travailler avec un critère de rupture 3D relativement simple d'endommagement critique, dans un premier temps. Néanmoins, nous l'avons vu en (III. 3) ce critère est assez bien représentatif des conditions de rupture monotone et de fatigue. Le modèle *ODM* ainsi construit, présente l'avantage de ne pas utiliser d'autres variables d'endommagement pour traiter la rupture de façon progressive, comme dans ODM-CMO (variable d'endommagement macroscopique des travaux de [Rakotoarisoa, 2013], par exemple). Le modèle *ODM* est totalement équivalent au modèle ODM-

CMO pour les sollicitations monotones et, pour le domaine de la fatigue, les deux modèles sont équivalents à ce stade pour les rapports de charge en force motrice $R_y = 0$ et $R_y = 1$.

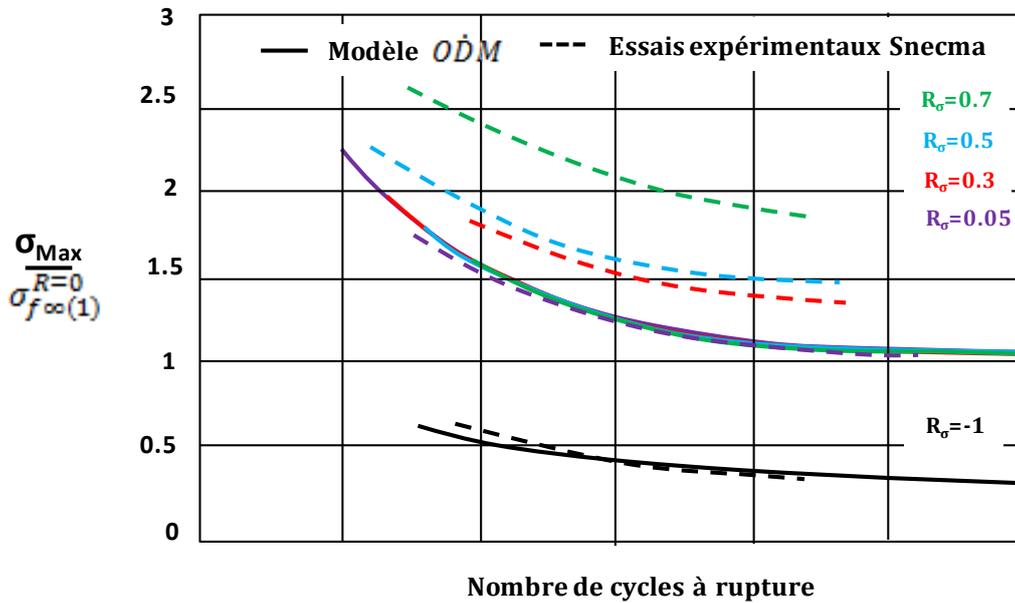


Figure 59 (annexe confidentielle): Mise en évidence sur les courbes de Wöhler de la non prise en compte de l'effet de rapport de charge dans la première version du modèle ODM ; axe des ordonnées : contrainte maximale normée par le seuil de fatigue asymptotique

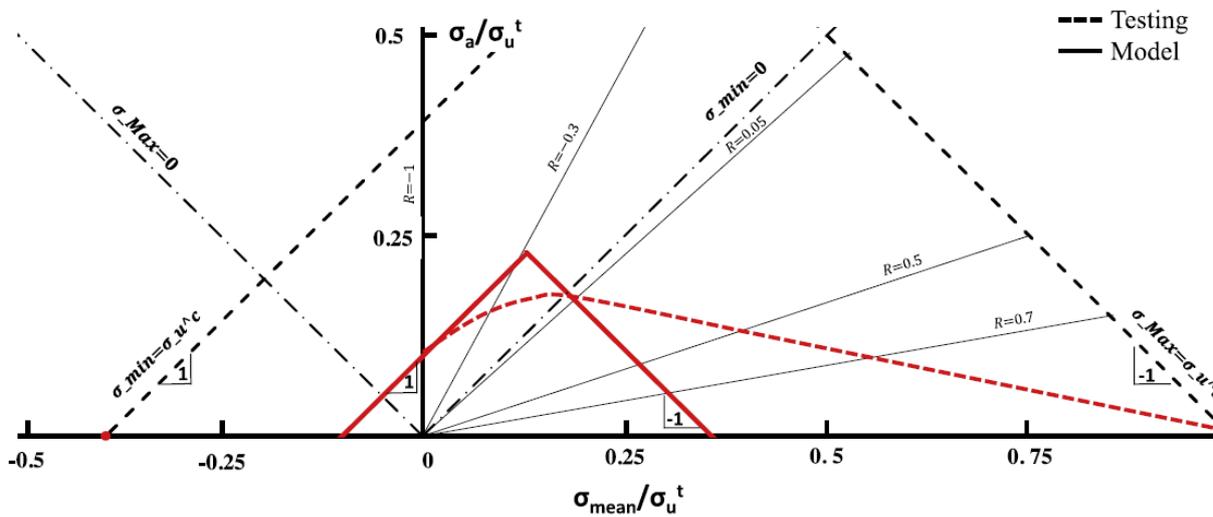


Figure 60 (annexe confidentielle): Non prise en compte de l'effet de contrainte moyenne par ce premier modèle au travers du diagramme de Haigh « asymptotique » (sens chaîne) à température ambiante (20°) ; axes normés par la contrainte ultime de traction

Enfin les premiers résultats obtenus avec le modèle proposé, montrent bien la difficulté inhérente aux modèles temporels à rendre compte de l'effet de contrainte moyenne. En effet, la Figure 59 représente les courbes de Wöhler (en contrainte « max ») à différents rapports de charges. Toutes les courbes calculées se superposent aux rapports de charge positifs ($R_\sigma > 0$) et cela n'est pas le cas des résultats expérimentaux. En effet, la durée de vie dépend fortement du rapport de charge, rapport entre la contrainte minimale avec la contrainte maximale (grandeur a priori non définie pour les lois temporelles sans référence à la notion de cycle). Le diagramme de

Haigh « asymptotique » correspondant (qui sera davantage expliqué dans le Chapitre VI) est présenté sur la **Figure 60**. Celui-ci représente correctement le comportement en fatigue aux rapports de charge positifs $R_\sigma = 0$ et $R_\sigma = -1$, mais aux autres rapports de charge positifs, celui-ci ne décrit pas correctement les points expérimentaux. L'effet de rapport de charge encore appelé l'effet de contrainte moyenne, doit être décrit par le modèle temporel. Ce dernier point, primordial à l'étude de la fatigue, fait l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE IV LOI D'EVOLUTION TEMPORELLE DE L'ENDOMMAGEMENT AVEC EFFET DE CONTRAINTE MOYENNE

Sommaire du Chapitre IV :

IV. 1. Proposition d'une moyenne évolutive dépendante de toute l'histoire du chargement....	86
IV. 1. 1. Définition	86
IV. 1. 2. Schéma numérique	88
IV. 2. Prise en compte de l'effet de contrainte moyenne dans le modèle temporel ODM pour les CMO tissés	89
IV. 3. Illustration de l'effet de contrainte moyenne pour les CMO tissés 3D	90
IV. 3. 1. Chargements de fatigue cycliques à différents rapports de charge.....	90
IV. 3. 2. Chargements aléatoires à différentes contraintes moyennes.....	92
IV. 4. Conclusion	92

Comme nous l'avons dit, l'absence d'effet de contrainte moyenne est une limite forte quant à la bonne modélisation des phénomènes qui interviennent lors de chargements de fatigue et pas seulement pour les chargements cycliques, mais aussi pour les chargements plus complexes. Ce chapitre tente de répondre à cette problématique en proposant une manière de prendre en compte l'effet de contrainte moyenne (encore appelé effet de rapport de charge pour les chargements de fatigue cyclique à amplitudes constantes). Ainsi, la partie (IV. 1) présente une définition innovante de la moyenne, pour laquelle la moyenne calculée n'est pas constante, elle évolue en fonction du chargement à chaque pas de temps. Elle tient compte de toute l'histoire du chargement. Cette partie présente donc les outils mathématiques qui seront utilisés. Nous présentons (IV. 2), les choix réalisés pour une bonne prise en compte de l'effet de contrainte moyenne. Dans la partie (IV. 3), nous mettons en application au travers de quelques exemples simples de chargement et des évolutions de l'endommagement correspondantes.

IV. 1. Proposition d'une moyenne évolutive dépendante de toute l'histoire du chargement

IV. 1. 1. Définition

Prenons un cas pour lequel, la valeur dont nous voulons calculer la moyenne est notée z . Nous pourrions utiliser la moyenne arithmétique qui, pour un chargement cyclique simple de fatigue, reviendrait à la moitié de la somme de la valeur maximale plus la valeur minimale (Eq. IV-1). Cette moyenne, nous l'appelons la « moyenne constante » d'un chargement périodique et elle est notée \bar{z} avec z_{Max} la valeur maximale de z , et z_{min} la valeur minimale.

$$\bar{z} = \frac{1}{2}(z_{Max} + z_{min}) \quad \text{Eq. IV-1}$$

Nous pouvons déterminer la relation entre cette moyenne et le rapport de charge R_z (Eq. IV-2), car $R_z = z_{min}/z_{Max}$.

$$\bar{z} = \frac{1}{2}z_{Max}(1 + R_z) \quad \text{Eq. IV-2}$$

Nous ne pouvons pas nous contenter d'une moyenne constante. La force du modèle temporel proposé est sa capacité à traiter des chargements complexes, aléatoires pour lesquels il n'existe pas de moyenne. C'est en particulier ce type de chargement que nous souhaitons étudier (en plus des chargements cycliques simples et des chargements monotones). Nous proposons donc de définir une moyenne qui évolue à chaque pas de temps et qui tient compte de toute l'histoire du chargement. Nous appellerons cette moyenne, la « moyenne évolutive » et nous la notons \check{z} , pour la différencier de la moyenne constante. A noter que la proposition de la moyenne évolutive pour prendre en considération l'effet de contrainte moyenne, mais aussi pour d'autres matériaux, a fait l'objet d'un article au cours de mes travaux [Desmorat et al., 2015]³.

Soit z , notre variable scalaire qui évolue au cours du temps de façon totalement aléatoire telle que $z_{t<0} = 0$ et $z_{t>0} \neq 0$. La moyenne temporelle, notée \check{z} , est définie en (Eq. IV-3).

$$\check{z}(t) = \frac{1}{z^{ac}} \int_0^t z|\dot{z}|d\tau \quad \text{avec} \quad z^{ac} = \int_0^t |\dot{z}|d\tau \quad \text{Eq. IV-3}$$

En d'autres termes, à chaque pas de temps t , le chargement évolue en prenant une valeur connue $z(t)$, la moyenne est donc recalculée en considérant cette nouvelle valeur de chargement. z^{ac} est la valeur cumulée de la grandeur z . La moyenne évolutive est nulle $\check{z} = 0$ lorsque la valeur z^{ac} est nulle ($z^{ac} = 0$). La valeur cumulée z^{ac} est utilisée comme temps fictif

³ [Desmorat et al., 2015] R. Desmorat, L. Angrand, P. Gaborit, M. Kaminski, C. Rakotoarisoa, On the introduction of a mean stress in kinetic damage evolution laws for fatigue, International Journal of Fatigue, 2015.

permettant de calculer la moyenne de la grandeur z . Nous allons voir que cette moyenne a des propriétés intéressantes, dans des cas particuliers, qui sont répertoriées ci-après.

- En fait, **la moyenne ne dépend pas directement du temps**, mais d'un temps fictif. Elle est équivalente à (Eq. IV-4) où l'intégration est effectuée sur l'histoire du chargement jusqu'au temps courant :

$$\check{z} = \frac{1}{z^{ac}} \int z dz \quad \text{avec} \quad z^{ac} = \int dz \quad \text{Eq. IV-4}$$

- Elle ne dépend pas de la forme du chargement mais que de ses valeurs extrêmes car la dérivée temporelle \dot{z} disparaît au profit de la différentielle dz .

- La valeur de \check{z} pour un chargement monotone croissant partant de zéro est :

$$\check{z} = \frac{z_{Max}}{2} \quad \text{ou} \quad \check{z}(t) = \frac{1}{2} \max_{\tau \leq t} (z(\tau)) \quad \text{Eq. IV-5}$$

- La valeur de \check{z} pour un chargement monotone décroissant partant de zéro est :

$$\check{z} = \frac{z_{min}}{2} \quad \text{ou} \quad \check{z}(t) = \frac{1}{2} \min_{\tau \leq t} (z(\tau)) \quad \text{Eq. IV-6}$$

- Considérons un chargement cyclique de N cycles, pour lequel la valeur minimale est z_{min} et la valeur maximale z_{Max} strictement positive, alors :

$$\check{z}(N) = \frac{1}{2} \frac{z_{Max}^2 + 2(N-1)(z_{Max}^2 - z_{min}^2)}{z_{Max} + 2(N-1)(z_{Max} - z_{min})} \quad \text{Eq. IV-7}$$

L'expression (Eq. IV-7) permet de calculer la valeur de la moyenne à chaque fin de cycle (Figure 61).

- Pour un chargement cyclique périodique, la valeur de la moyenne évolutive tend vers la valeur constante que l'on peut définir comme étant :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \check{z} = \frac{1}{2} (z_{min} + z_{Max}) \quad \text{Eq. IV-8}$$

La Figure 61 présente deux types de signaux triangulaires. Pour chacun de ces signaux, les moyennes constantes $\bar{z}(t)$ (en rouge), évolutive $\check{z}(t)$ (en noir) et intégrée $\check{z}(N)$ (cercles rouges) à chaque fin de cycle sont représentées.

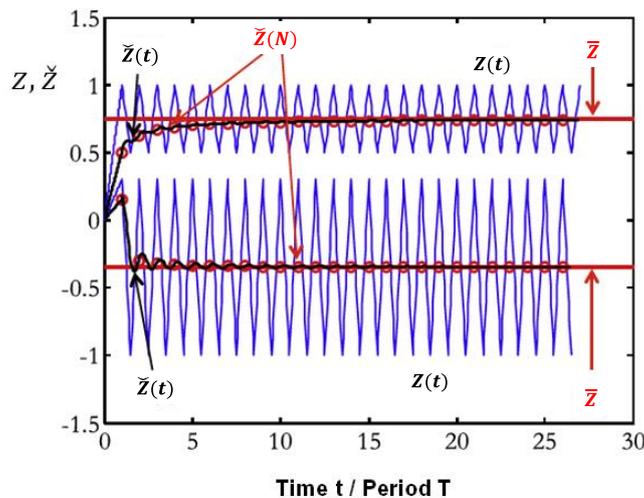


Figure 61 : Représentation de la moyenne évolutive $\check{z}(t)$ (en noir) pour des chargements cycliques, de la forme intégrée pour chaque cycle $\check{z}(N)$ (en cercles rouges), et de la moyenne constante $\bar{z}(t)$ (en rouge, trait continu)

Suivant le chargement appliqué, la moyenne évolutive met plus ou moins du temps à tendre vers la valeur moyenne constante. Pour les deux signaux présentés ici, la moyenne tend relativement rapidement vers la moyenne constante, par contre pour des changements beaucoup plus longs et qui seraient composés de deux blocs de cycles à contraintes maximales différentes par exemple (**Figure 62**), la moyenne étant dépendante de toute l'histoire de chargement, celle-ci mettrait bien plus de temps à atteindre la moyenne constante du second bloc. Cet effet, qu'on pourrait appeler effet retard, à un impact restant à quantifier, notamment quand la viscosité sera prise en compte dans le modèle.

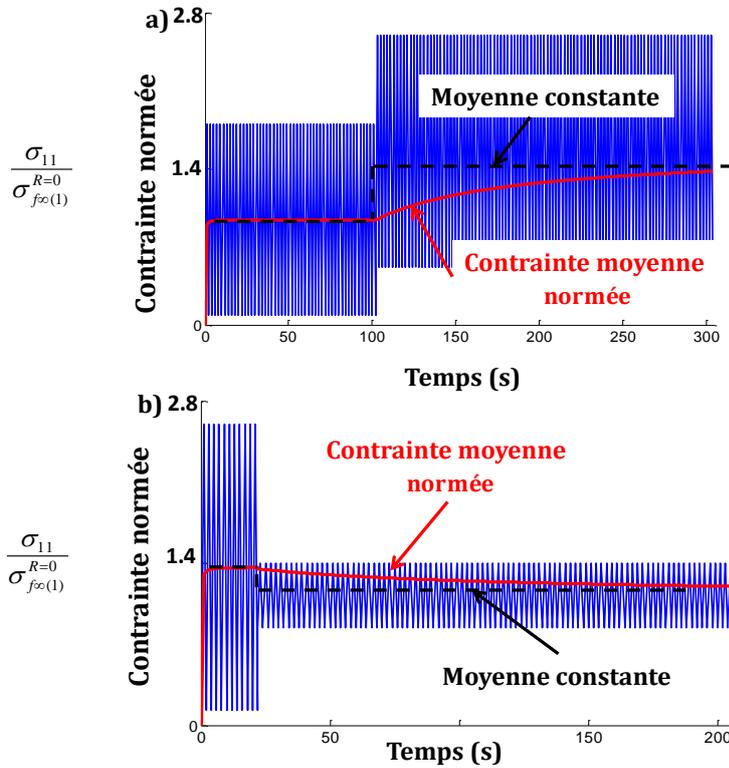


Figure 62 (annexe confidentielle) : chargement de blocs de cycles ; a) : petit - grand ; b) : grand - petit

IV. 1. 2. **Schéma numérique**

La résolution numérique du calcul de la moyenne \check{z} présente l'avantage d'être relativement simple. Le calcul de la moyenne au temps courant $t + \Delta t$ peut être obtenu de façon exacte à chaque pas de temps $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ grâce au schéma numérique présenté en (Eq. IV-9).

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{(n+1)}^{ac} = z_{(n)}^{ac} + |z_{(n+1)} - z_{(n)}| \\ I_{(n+1)} = I_{(n)} + \frac{1}{2} (z_{(n+1)} + z_{(n)}) |z_{(n+1)} - z_{(n)}| \\ \check{z}_{(n+1)} = \frac{I_{(n+1)}}{z_{(n+1)}^{ac}} \end{array} \right. \quad \text{Eq. IV-9}$$

IV. 2. Prise en compte de l'effet de contrainte moyenne dans le modèle temporel ODM pour les CMO tissés

Pour prendre en compte l'effet de contrainte moyenne dans les lois en cycles, il existe plusieurs façons de l'introduire :

- soit introduire le rapport de charge en contrainte R_σ dans les équations,
- soit introduire le rapport de charge en forces motrices R_y [Rakotoarisoa, 2013],
- soit directement la contrainte moyenne,

Les deux premières grandeurs n'ayant pas d'équivalent évolutif, l'idée est alors introduire la moyenne évolutive de la variable adéquate dans les fonctions critères de fatigue de la loi d'endommagement. Nous avons alors décidé d'appliquer le calcul de la moyenne, non pas sur les déformations équivalentes comme fait dans l'article [Desmorat et al., 2015], mais ici directement sur les composantes 11, 22 et 33 du tenseur des déformations élastiques (dans le repère d'orthotropie), notées $\check{\varepsilon}_{kk}^e$ avec kk la composante correspondant au mécanisme en jeu. Ainsi, aux coefficients de Poisson près, nous introduisons indirectement le calcul de la moyenne des contraintes. La moyenne est donc calculée sur des variables scalaires et non tensorielles. La moyenne évolutive des déformations élastiques s'écrit alors (Eq. IV-10) :

$$\check{\varepsilon}_{kk}^e(t) = \frac{1}{\varepsilon_{kk}^{e(ac)}} \int_0^t \varepsilon_{kk}^e |\dot{\varepsilon}_{kk}^e| d\tau \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{kk}^{e(ac)}(t) = \int_0^t |\dot{\varepsilon}_{kk}^e| d\tau \quad \text{Eq. IV-10}$$

$\varepsilon_{kk}^{e(ac)}$ est la déformation élastique cumulée par mécanisme de dégradation k . $\check{\varepsilon}_{kk}^e = 0$ lorsque $\varepsilon_{kk}^{e(ac)} = 0$. La déformation équivalente cumulée $\varepsilon_{kk}^{e(ac)}$ est utilisée comme temps fictif permettant de calculer la moyenne évolutive de ε_{kk}^e , qui évolue à chaque pas de temps.

Les fonctions critères de la contribution «de fatigue» de la loi d'endommagement sont définies en (Eq. IV-11). Elles dépendent des déformations équivalentes $\varepsilon_{eq(k)}$ ainsi que des moyennes des composantes principales du tenseur des déformations élastiques $\check{\varepsilon}_{kk}^e$ et du seuil d'endommagement de fatigue en déformation $\varepsilon_{f(k)}^0$ (k le mécanisme d'endommagement).

$$\begin{aligned} f_1 &= \varepsilon_{eq(1)} - m_{11} \check{\varepsilon}_{11}^e - \varepsilon_{0(1)}^f \\ f_2 &= \varepsilon_{eq(2)} - m_{22} \check{\varepsilon}_{22}^e - \varepsilon_{0(2)}^f \\ f_3 &= \varepsilon_{eq(3)} - m_{33} \check{\varepsilon}_{33}^e - \varepsilon_{0(3)}^f \end{aligned} \quad \text{Eq. IV-11}$$

Les fonctions critères se trouvent simplifiées dans la mesure où nous n'avons mis aucun effet de contrainte moyenne sur les termes de cisaillement. Il en résulte que la forme des diagrammes de Haigh est simplifiée. Nous le verrons au Chapitre VI. Néanmoins, s'il s'avère par la suite que les composantes de cisaillement ont un impact sur l'effet de contrainte moyenne, il est envisageable d'ajouter les moyennes des composantes du tenseur des déformations élastiques non diagonales $\check{\varepsilon}_{ij}^e$ précédées des coefficients notés m_{ij} . L'ajout de ces composantes dans les fonctions critères viendrait (i) modifier la forme des diagrammes de Haigh, (ii) complexifier l'identification des coefficients m_{ij} , et (iii) complexifier l'implémentation numérique. Nous allons voir dans le Chapitre VI la méthodologie proposée pour identifier ces paramètres. Afin de simplifier l'écriture, nous avons défini à nouveau la loi d'endommagement temporelle pour laquelle la contribution «de fatigue» est écrite en fonction de la fonction critère f_k , avec $k = [1,2,3]$ le mécanisme de dégradation (Eq. IV-12).

$$\begin{aligned} \dot{d}_k = & (d_{sat(k)} - d_k) \left(\frac{\varepsilon_{eq(k)Max} - \varepsilon_0^m(k)}{S_m(k)} \right)_+^{s_m(k)} \dot{\varepsilon}_{eq(k)Max} \\ & + \\ & (d_{sat(k)} - d_k)^{\gamma_k} \left(\frac{f_k}{S_f(k)} \right)_+^{s_f(k)} [(\dot{\varepsilon}_{eq(k)})_+ - \dot{\varepsilon}_{eq(k)Max}] \end{aligned}$$

Eq. IV-12

IV. 3. Illustration de l'effet de contrainte moyenne pour les CMO tissés 3D

IV. 3. 1. Chargements de fatigue cycliques à différents rapports de charge

La Figure 63 présente six chargements de fatigue cyclique. Ils se décomposent en une première montée en charge puis les cycles de fatigue. Pour chacun des chargements, 100 cycles sont simulés, pour des rapports de charge en contrainte différents ($R_\sigma = [0.05; 0.1; 0.2; 0.3; 0.5; 0.7]$). Pour les six chargements, seul le rapport de charge varie mais la contrainte maximale est identique. Autrement dit c'est l'amplitude de contrainte de chargement qui varie ainsi que la moyenne du chargement.

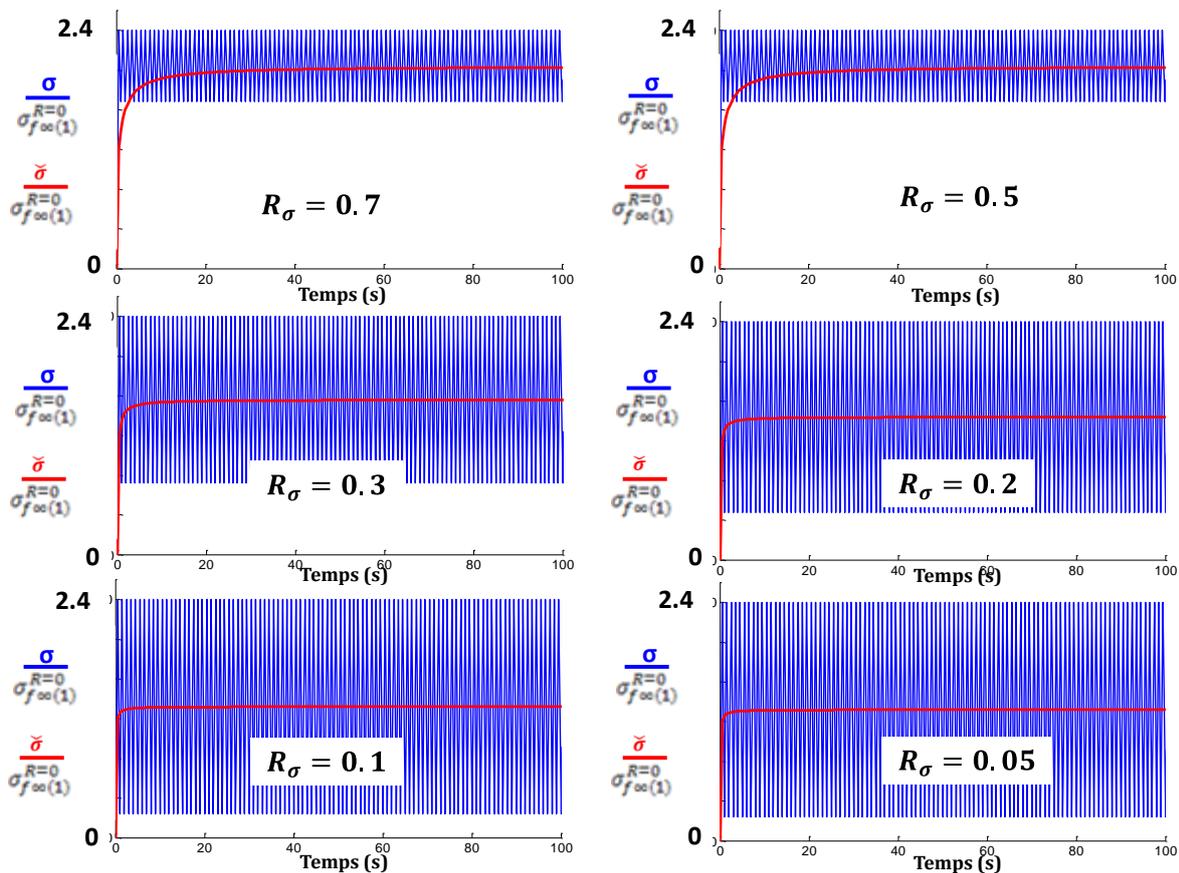


Figure 63 (annexe confidentielle): chargements cycliques pour six rapports de charge en contrainte différents

En bleu est représenté le chargement cyclique σ et en rouge la moyenne évolutive du chargement $\check{\sigma}$. La Figure 64 représente l'évolution de l'endommagement pour les six chargements. Pour cet exemple proposé ici, seules les contributions de fatigue sont activées dans le modèle. Nous remarquons que l'évolution de l'endommagement diffère selon les cas. Les

résultats montrent en effet que plus le rapport de charge est faible, autrement dit plus l'amplitude de chargement est grande, plus l'endommagement calculé est grand.

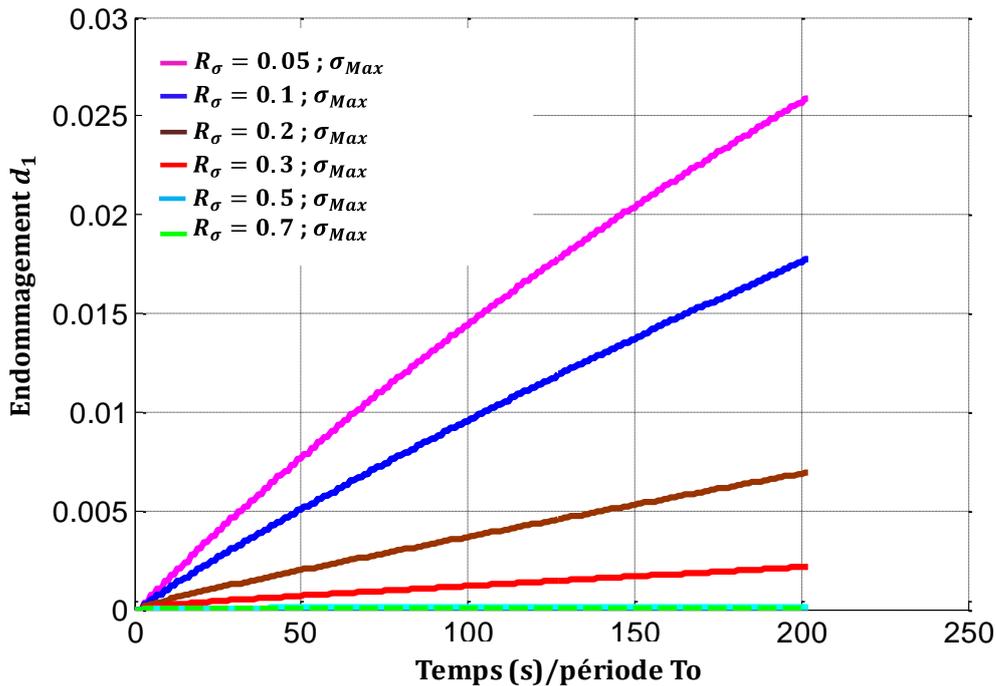


Figure 64 (annexe confidentielle): Evolution de l'endommagement pour les six chargements (Figure 63) ; la même contrainte maximale est appliquée pour les six chargements

Nous avons vu à la fin du chapitre III que lorsque l'effet de contrainte moyenne n'est pas pris en compte pour des chargements cycliques à amplitude constante, les diagrammes de Wöhler (Figure 59) ne sont pas conformes aux essais expérimentaux pour les différents rapports de charge. Maintenant que l'effet de contrainte moyenne est pris en compte, nous obtenons les diagrammes de Wöhler bien représentatifs des essais expérimentaux (Figure 65).

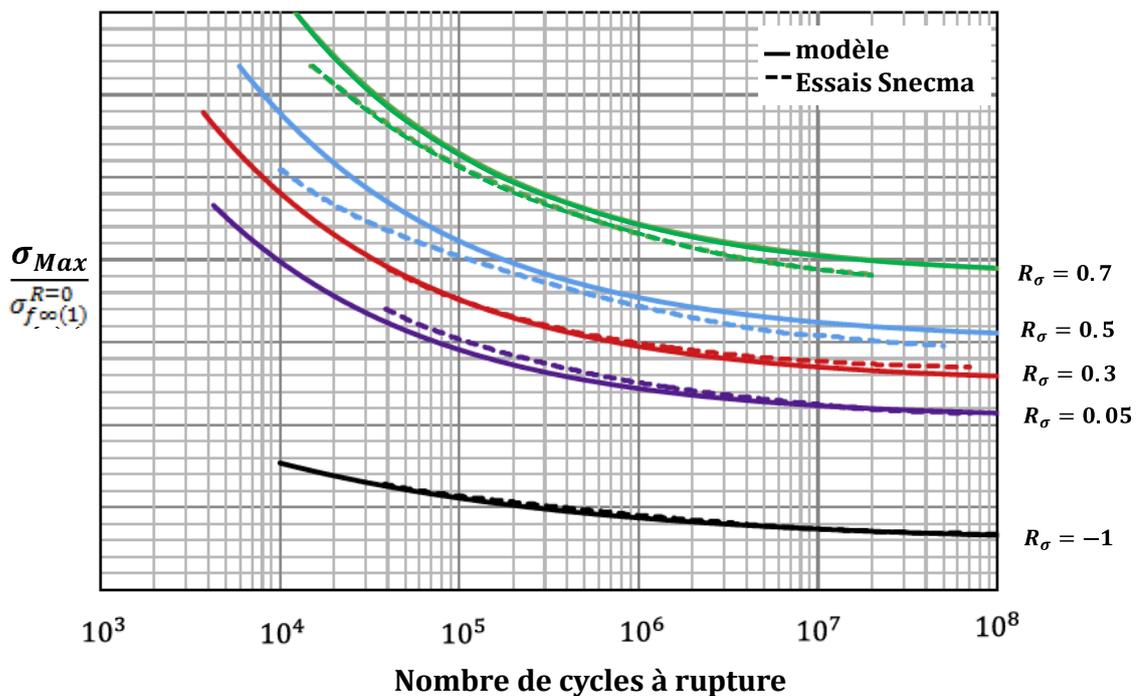


Figure 65 (annexe confidentielle) : diagramme de Wöhler pour divers rapports de charge

IV. 3. 2. Chargements aléatoires à différentes contraintes moyennes

La **Figure 66-a)** représente un signal réel, mesuré sur un moteur d'avion en vol. Nous avons modifié les valeurs d'effort (caractère confidentiel) et appliqué ce chargement, aléatoire, à notre modèle. L'endommagement **Figure 66-b)** est conforme à ce que l'on attendait. Il augmente tout au long du chargement. Nous remarquons des augmentations brusques de l'endommagement lors des sauts « importants » du chargement mais ces variations sont continues. A noter que la contrainte moyenne évolutive du chargement est représentée en rouge sur la **Figure 66-a)**.

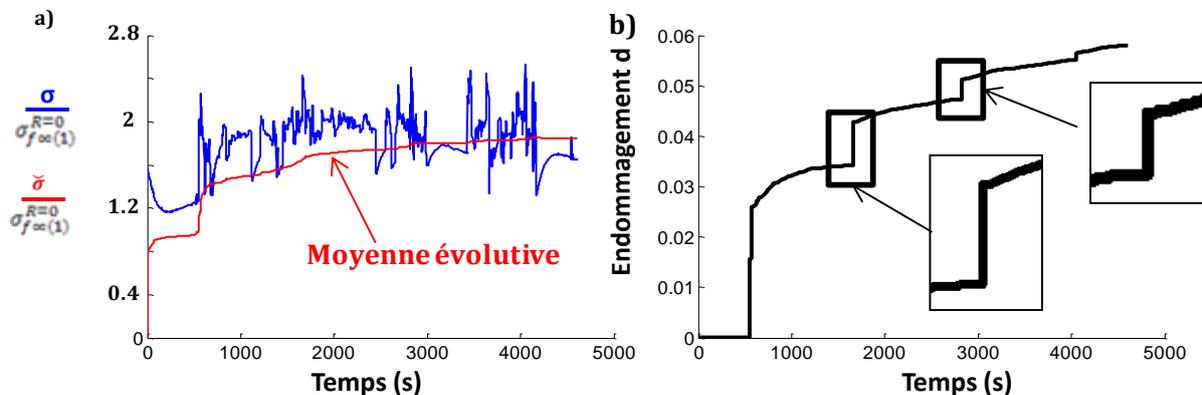


Figure 66 (annexe confidentielle) : a) chargement réel en contrainte ; b) évolution de l'endommagement d

IV. 4. Conclusion

Le comportement en fatigue des matériaux et notamment des composites tissés 3D est différent suivant les conditions de chargement choisies. Les niveaux d'endommagement atteints sont dépendants de la contrainte maximale et le rapport de charge du chargement définis. Il faut alors que le modèle d'endommagement, et particulièrement la loi d'endommagement temporelle proposée (via sa contribution «de fatigue»), prenne en compte l'effet de contrainte moyenne afin de s'assurer d'une bonne représentation du comportement du composite tissé 3D.

Il en résulte que des lois d'endommagement en cycles, doivent dépendre de la contrainte moyenne ou de manière équivalente du rapport de charge. [Rakotoarisoa, 2013] a ainsi proposé une loi dépendant, directement, du rapport de charge de la force motrice R_y (la force motrice étant la variable qui gouverne sa loi en cycles). L'introduction de ces effets dans le cas des lois temporelles $\dot{d} = \dots$ est plus délicate. Nous avons proposé une méthodologie originale et efficace (IV. 1) en introduisant dans la fonction critère de la loi d'endommagement temporelle un terme, qui rend compte alors de l'effet de contrainte moyenne. Nous avons opté pour la définition de la moyenne des composantes du tenseur des déformations élastiques (IV. 2).

Nous avons proposé une formulation mathématique pour le calcul de la moyenne, qui s'adapte très bien à notre cas d'étude. Elle évolue en fonction du temps. Cette moyenne dite « évolutive » dépend de toute l'histoire du chargement. Cette caractéristique peut toutefois être un inconvénient, notamment par exemple pour des chargements cycliques cumulés de contraintes maximales différentes. Dans la mesure où elle dépend de toute l'histoire de chargement, la moyenne évolutive peut mettre beaucoup de temps à tendre vers une valeur stabilisée lors du deuxième bloc du chargement.. L'idée est donc d'utiliser une moyenne qui évoluerait toujours avec le temps mais qui mettrait davantage de poids sur le chargement récent plutôt que sur sa totalité, typiquement c'est le cas de la moyenne dite « exponentielle » ou encore les moyennes de type fenêtre glissante.

Sans compter l'intégration de l'aspect visqueux (de la matrice époxy) dans le modèle, qui pourrait venir modifier ou complexifier la prise en compte de l'effet de contrainte moyenne par la méthode proposée, il faudrait mener des études complémentaires à la fois numériques et expérimentales pour valider le choix de la moyenne introduite lors de chargements complexes et son réel impact sur l'évolution de l'endommagement d'une part et la durée de vie d'autre part. Il

faudrait par exemple lancer des essais de fatigue cyclique jusqu'à rupture, à deux niveaux de chargements et jouer sur la taille des blocs.

Nous avons présenté la loi d'endommagement temporel *ODM*, les points qui le différencient du modèle ODM-CMO, notamment la contribution de fatigue qui tient compte de l'effet de contrainte moyenne. Nous allons voir, au travers de la mise en œuvre numérique que nous allons proposer une nouvelle loi d'évolution des déformations résiduelles dans le but de mettre au point une stratégie numérique optimisant le coût de calcul. Ces points font l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE V MODELE *ODM* COMPLET : MISE EN ŒUVRE ET STRATEGIE NUMERIQUE

Sommaire du chapitre V

V. 1. Stratégie numérique établie	96
V. 2. Modification de la loi d'évolution des déformations résiduelles dans le but de satisfaire la stratégie numérique	97
V. 2. 1. Déformations résiduelles du modèle ODM-CMO	97
V. 2. 2. Déformations résiduelles pour le modèle <i>ODM</i>	97
a) Modification de la loi d'évolution des déformations résiduelles	97
b) Identification sur le modèle ODM-CMO	98
V. 3. Bilan : modèle <i>ODM</i> complet.....	101
V. 4. Mise en œuvre numérique : Implantation et Algorithmie.....	102
V. 4. 1. Schéma numérique général du modèle 3D.....	102
V. 4. 2. Résolution locale de la loi de comportement et calcul de la matrice Jacobienne.....	104
a) Algorithmie de la loi d'évolution des déformations résiduelles.....	104
b) Algorithmie pour le calcul de l'index de désactivation des fissures instantanée.	105
c) Algorithmie de la loi d'endommagement.....	105
d) Calcul et validation de la matrice Jacobienne.....	107
V. 4. 3. Résolution globale de la loi de comportement et résolution de la matrice tangente cohérente	108
V. 5. Conclusion.....	109

Ce chapitre présente les travaux menés sur les aspects numériques, à savoir comment proposer des stratégies et des améliorations sur le plan mathématique et algorithmique dans le but de réduire le plus possible les coûts de temps de calcul, car c'est à priori un des désavantages d'un modèle de fatigue temporel comparé aux modèles de fatigue en cycles.

Nous présentons tout d'abord le schéma numérique utilisé pour optimiser les temps de calculs en (V. 1). Nous présentons alors une modification apportée à la loi d'évolution des déformations résiduelles (V. 2) et l'identification des paramètres de la loi d'évolution des déformations résiduelles grâce à une approche 1D. Le modèle ODM complet sera présenté en (V. 3). Pour assurer les conditions de convergence d'un modèle ayant plusieurs sources de non linéarité, une résolution de type implicite semble préférable. Après avoir présenté l'algorithmie, nous détaillons le calcul, la résolution et la validation des matrices Jacobienne et tangente cohérente (V. 4).

La résolution numérique est bien entendu très similaire à celle utilisée notamment dans les travaux antérieurs effectués à l'Onera [Marcin, 2010 ; Rakotoarisoa, 2013 ; Hurmane, 2015 ; Elias, 2015]. Toutefois, l'approche, notamment dans les étapes de résolution, a été spécifiquement adaptée au modèle d'endommagement temporel proposé.

V. 1. Stratégie numérique établie

Les modèles d'endommagement temporels présentent, *a priori*, l'inconvénient d'avoir des temps de calculs longs, ce qui peut limiter leur diffusion dans le secteur industriel. En effet, alors qu'un modèle en cycles ne calcule que les incréments d'endommagement à chaque fin de cycles de fatigue, voire par bloc de cycles, un modèle temporel calcule l'évolution de l'endommagement à chaque pas de temps, tel qu'est défini un chargement. Il est donc évident que, plus il y a de pas de temps (ou autrement dit de nombres d'incrémentes), plus le calcul sera long. Dans la version d'ODM-CMO, nous nous intéressons ici au cas des déformations résiduelles [Marcin, 2010 ; Rakotoarisoa, 2013].

L'équation régissant les déformations résiduelles est de type « équation intégrale ». Elle nécessite une méthode particulière d'intégration. La méthode d'Euler converge mal et nécessite plusieurs dizaines d'incrémentes par cycles. Pour des chargements de plusieurs millions de cycles, la méthode est alors extrêmement coûteuse. Néanmoins, nous pouvons résoudre cette équation de manière plus pertinente en utilisant des méthodes d'intégration de Gauss (quadratures d'ordre 3 ou 5), comme l'ont fait [Rakotoarisoa, 2013 ; Hémon, 2013]. Toutefois, cette méthode requiert tout de même plusieurs points par cycles et est encore coûteuse.

Nous proposons ici une nouvelle formulation quasi-équivalente des déformations résiduelles, pouvant être résolue de manière exacte sur un pas de temps, qui peut être arbitrairement grand, par exemple passant directement d'un minimum à un maximum chaque cycle de fatigue.

Afin de diminuer les temps de calculs, la loi d'évolution des déformations résiduelles proposée (tout comme la loi d'évolution de l'endommagement) est résolue par une intégration analytique exacte. Ainsi, un cycle de fatigue peut être défini avec uniquement deux incréments (un pour la montée à la contrainte maximale et un pour la décharge à la contrainte minimale), nous appelons ce chargement le chargement « min-max ». La valeur des déformations résiduelles (et des endommagements) est donc exacte à chaque fin de cycle. Cette méthode de résolution fonctionne également pour les chargements aléatoires, complexes, définis avec des min et des max. Dans le cas visqueux, il faudra nécessairement réduire les pas de temps pour intégrer avec précision la contribution visco-élastique du modèle. Ce cas n'est pas considéré ici.

V. 2. Modification de la loi d'évolution des déformations résiduelles dans le but de satisfaire la stratégie numérique

V. 2. 1. Déformations résiduelles du modèle ODM-CMO

Dans les composites considérés, les déformations résiduelles surviennent dès lors qu'il y a création d'endommagement. L'endommagement a deux effets simultanés, d'une part il provoque une baisse de la raideur et d'autre part il implique la création de déformation supplémentaire observée notamment à contrainte nulle (après décharge). Dans le modèle ODM-CMO initial, le tenseur des déformations résiduelles $\boldsymbol{\varepsilon}^r$ est le tenseur des déformations résiduelles induites par l'endommagement. Il est déterminé de la façon suivante (Eq. V-1) [Marcin, 2010 ; Rakotoarisoa, 2013].

$$\boldsymbol{\varepsilon}^r = \mathbb{S}^0 : \left[\left(\sum_k \chi_k \dot{d}_k \mathbb{R}_k \right) : \boldsymbol{\varepsilon}^* \right] \quad \text{Eq. V-1}$$

$$\mathbb{R}_k = (\eta_k \mathbb{K}_k^+ + (1 - \eta_k) \mathbb{K}_k^-) \text{ et } \mathbb{K}_k^+ = \mathbb{C}^{eff} : \mathbb{H}_k^+ : \mathbb{C}^{eff} \text{ et } \mathbb{K}_k^- = \mathbb{C}^{eff} : \mathbb{H}_k^- : \mathbb{C}^{eff}$$

Il fait intervenir les indexes de désactivation de fissure η_k , qui prennent en compte l'état actif (fissures ouvertes) ou l'état passif (fissures fermées). Le paramètre χ_k permet de pondérer la relation entre l'endommagement d_k et les déformations résiduelles. Les déformations résiduelles augmentent donc uniquement en fonction de l'évolution des dommages. Les tenseurs \mathbb{K}_k^+ et \mathbb{K}_k^- font intervenir le tenseur de rigidité effectif \mathbb{C}^{eff} , affecté par l'endommagement, ainsi que les tenseurs des effets de l'endommagement \mathbb{H}_k^+ (fissures ouvertes) et \mathbb{H}_k^- (fissures fermées).

Dans les travaux de [Rakotoarisoa, 2013], les déformations résiduelles ont été identifiées expérimentalement sur les déformations mesurées après retour à contrainte nulle en tenant compte du fait que ces déformations sont la somme des déformations résiduelles, stockées et visqueuses. En terme de modélisation donc, les schémas numériques pour intégrer ces équations ont montré une forte dépendance au nombre d'incrément utilisé et leur convergence nécessite un nombre élevé d'incrément. Or, lors d'un essai de fatigue, les calculs étant nécessairement plus longs qu'un calcul statique (répétition de cycles), il est nécessaire de pouvoir utiliser un nombre d'incrément réduit par cycle. Le choix fait de remplacer la méthode d'Euler initiale par une méthode de quadrature de Gauss par morceaux, comme proposé par [Rakotoarisoa, 2013 ; Hémon, 2013] reste encore très coûteux.

V. 2. 2. Déformations résiduelles pour le modèle ODM

a) Modification de la loi d'évolution des déformations résiduelles

Principalement dans le but d'améliorer le temps de calcul, une nouvelle forme de la loi d'évolution des déformations résiduelles est proposée pour le modèle ODM (Eq. V-2).

$$\boldsymbol{\varepsilon}^r = \sum_k [R'_k(d_k) \dot{d}_k \mathbb{R}_k : \mathbf{e}_k^*] \quad \text{Eq. V-2}$$

où $R'_k(d_k)$ est une fonction de l'endommagement, à déterminer et \mathbf{e}_k^* est un tenseur défini, par mécanisme de dégradation k , comme étant le rapport du tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ sur la valeur absolue du maximum des composantes du tenseur des déformations mis en jeu pour le mécanisme considéré (Eq. V-3). Dans nos travaux, du fait de la non prise en compte des déformations visqueuses, la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ est égale à la déformation totale.

$$\mathbf{e}_k^* = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^*}{|\max_i \varepsilon_{ki}^*|}, \quad i=[1,2,3] \quad \text{Eq. V-3}$$

Le tenseur \mathbb{R}_k , dans notre cas, est constitué directement des coefficients de couplage du tenseur des effets \mathbb{H}_k , tenseur constant et connu, où seules les composantes relatives au mécanisme de dégradation en jeu sont non nulles. Toutes les autres composantes du tenseur sont nulles. Le tenseur est donc défini comme étant diagonal. La fonction $R'_k(d_k)$ est choisie de façon retranscrire le plus justement l'évolution des déformations résiduelles en fonction de la variable d'endommagement.

Le premier avantage que présente la forme (Eq. V-2) est sa résolution numérique. Elle ne dépend plus de la valeur du tenseur des déformations à chaque instant mais de sa direction par mécanisme de dégradation. **Cette direction \mathbf{e}_k^* entre deux pas de temps est supposée constante.** Notons que, la nouvelle formulation conserve le signe (valeur absolue au dénominateur) et la direction du tenseur des déformations d'ODM-CMO. Le calcul de l'incrément des déformations résiduelles $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^r$ est obtenu par l'intégration exacte entre deux pas de temps (Eq. V-4).

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^r = \sum_k \left[\left(\int_{d_k(t)}^{d_k(t+\Delta t)} R'_k(d_k) dd_k \right) \mathbb{R}_k : \mathbf{e}_k^* \right] = \sum_k \left[\left(R_k(d_k(t+\Delta t)) - R_k(d_k(t)) \right) \mathbb{R}_k : \mathbf{e}_k^* \right] \quad \text{Eq. V-4}$$

avec $R'_k = \chi_k e^{-r_k d_k}$

b) Identification sur le modèle ODM-CMO

Le plus simple et le plus rapide, pour l'identification des paramètres des déformations résiduelles, était de comparer les résultats numériques des deux modèles (ODM-CMO et $O\dot{D}M$). Les paramètres du modèles ODM-CMO sont calés en comparant les essais aux résultats numériques. Ils sont identifiés sur les déformations à contrainte nulle en tenant compte du fait que ces déformations sont la somme des déformations résiduelles, stockées et visqueuses. A noter donc que les paramètres dans notre modèle sont identifiés sur le modèle complet ODM-CMO, et qu'ils devront être sûrement modifiés quand la viscosité sera prise en compte dans $O\dot{D}M$.

L'utilisation des deux modèles nous permet alors de caler nos paramètres en simulant des essais de traction incrémentale et des essais de traction monotone. Les chargements, uniaxiaux, sont pilotés en déformation. Nous avons simulé des chargements uniaxiaux, sens chaîne et sens trame, afin d'identifier les paramètres respectifs, à savoir χ_1 et r_1 pour le sens chaîne, et χ_2 et r_2 pour le sens trame. Nous ne présentons que des chargements monotones (les plus simples et rapides à simuler). Que ce soit sens chaîne ou sens trame, la déformation maximale atteinte à la fin du chargement est volontairement grande ($\varepsilon_{11Max} = \varepsilon_{22Max} = 0.06 \text{ mm/mm}$), de façon à atteindre des endommagements assez grands, et ainsi de d'obtenir une équivalence entre ODM-CMO et $O\dot{D}M$ sur une grande plage d'endommagement.

De façon à s'assurer que notre modèle suit bien l'évolution voulue, la Figure 67 montre l'évolution des déformations résiduelles, sens chaîne et trame. Il est intéressant, et c'est là l'avantage premier de cette formulation, de voir qu'avec un unique pas de temps, la déformation résiduelle calculée est exacte en un pas unique de calcul et est égale à celle du modèle ODM-CMO (qui lui doit utiliser au moins 50 incréments pour converger vers la bonne valeur). Bien entendu, plus nous ajoutons d'incrément, plus la description de toute l'évolution est juste. Mais déjà avec seulement trois incréments (courbe continue rouge pour $O\dot{D}M$, droite pointillé rouge pour laquelle seul le point final a été calculé), l'évolution est plutôt bien décrite.

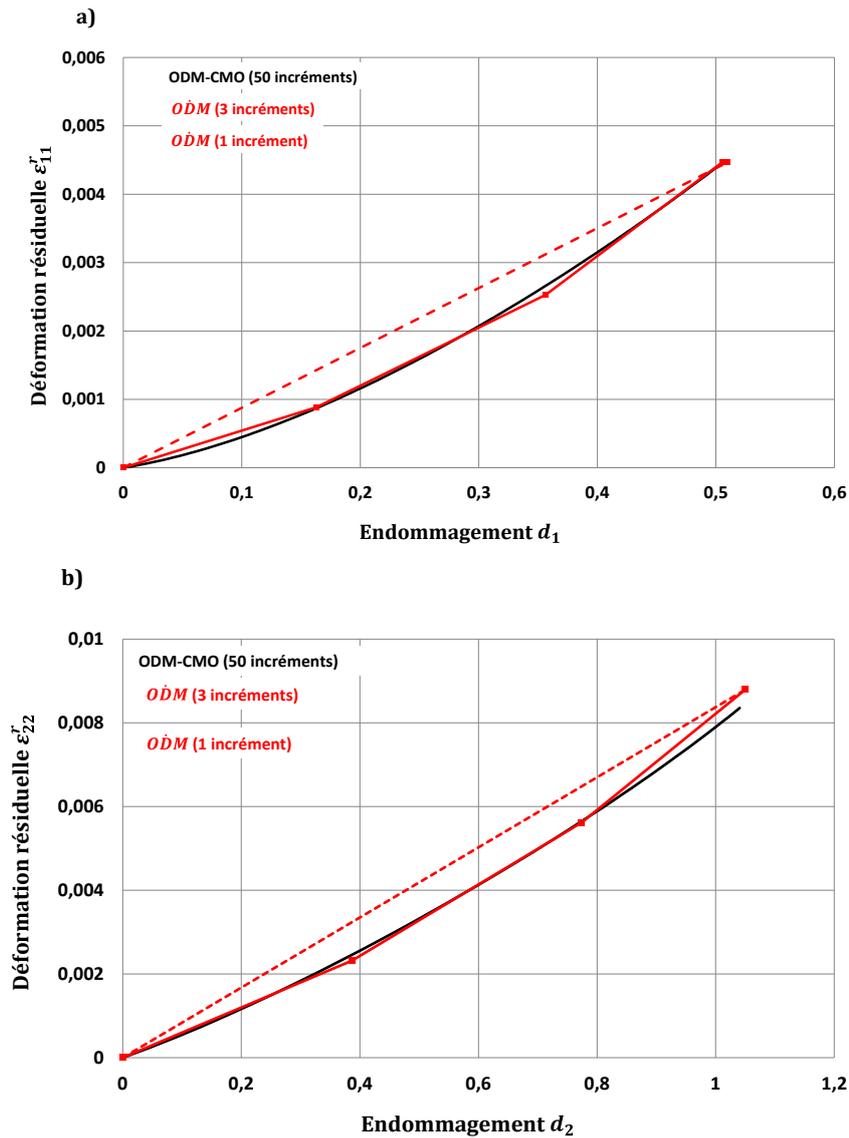
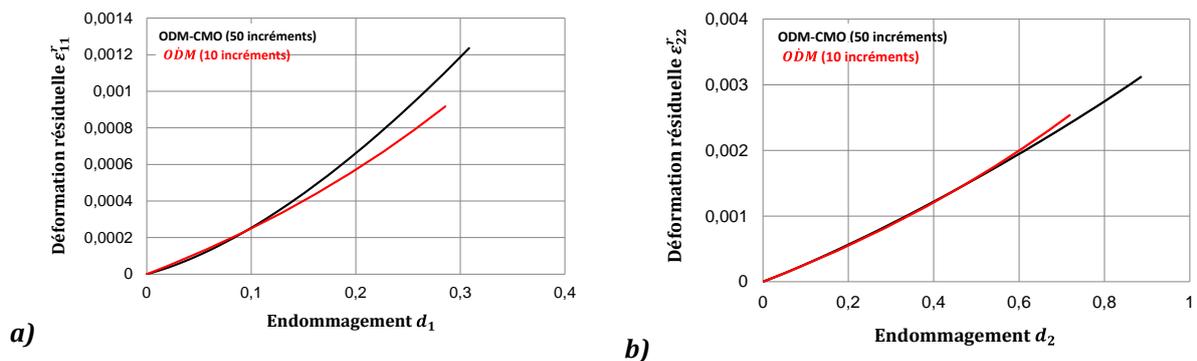


Figure 67 : Identification des paramètres des déformations résiduelles ; a) sens chaîne ; b) sens trame ; modèle ODM-CMO en noir ; modèle ODM en rouge

Une fois les paramètres identifiés sens chaîne et sens trame, et que les évolutions des déformations résiduelles du modèle ODM ont été validées, il est intéressant de regarder ce que donne la nouvelle formulation pour des chargements de traction à 45 degrés, ou bien encore de cisaillement pur, sans modifier l'identification faite sens chaîne et trame. La Figure 68 montre les résultats pour un chargement de traction à 45°.



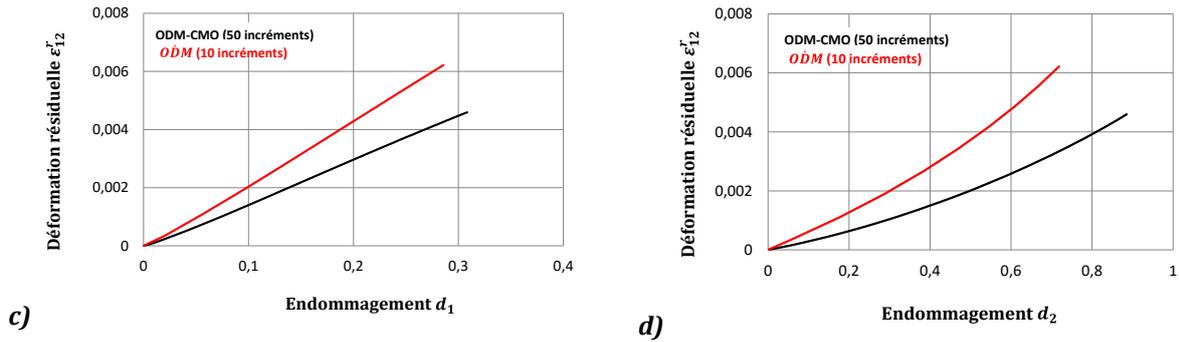


Figure 68 : Résultats de l'identification pour une traction à 45 degrés ; a) ϵ_{11}^r en fonction de d_1 ; b) ϵ_{22}^r en fonction de d_2 ; c) ϵ_{12}^r en fonction de d_1 ; d) ϵ_{12}^r en fonction de d_2

Les résultats de la simulation de traction à 45° montrent que l'identification réalisée sens chaîne et sens trame semble suffisante pour reproduire des essais hors axes. Les résultats liés au premier mécanisme de dégradation (Figure 68 a) et c)) semblent toutefois moins bons que ceux pour le second mécanisme de dégradation (Figure 68 b) et d)). La composante de cisaillement ϵ_{12}^r n'est pas trop éloignée de celle donnée par le modèle ODM-CMO. Nous notons toutefois que l'endommagement d_2 (sens trame) atteint à la fin du chargement est supérieur pour le modèle ODM-CMO que pour ODM. L'identification a été menée ici sur des résultats générés par ODM-CMO (il s'agit d'une identification croisée). Il conviendra à court terme de mettre à profit l'intégration exacte de la nouvelle loi d'évolution des déformations résiduelles pour identifier $\epsilon_{ij}^r(d_k)$ sur la base des résultats d'essais tracés dans les diagrammes.

V. 3. Bilan : modèle ODM complet

Le Tableau 3 ci-dessous répertorie toutes les équations du modèle complet 3D ODM.

$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}^{eff} : \boldsymbol{\varepsilon}^* - \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}^r$ $\boldsymbol{\varepsilon}^* = \boldsymbol{\varepsilon}$	Loi d'élasticité
$\mathbb{C}^0 = (\mathbb{S}^0)^{-1}$ $\mathbb{C}^{eff} = (\mathbb{S}^{eff})^{-1}$ $\mathbb{S}^{eff} = \mathbb{S}^0 + \sum_{k=1}^3 \mathbf{d}_k \mathbb{H}_k$	<p>Tenseur de souplesse initial \mathbb{C}^0</p> <p>Tenseur de souplesse initial \mathbb{S}^0</p> <p>Tenseur de rigidité effectif \mathbb{C}^{eff}</p> <p>Tenseur de souplesse effectif \mathbb{S}^{eff}</p>
$\boldsymbol{\eta}_k = \mathcal{H} \left((\mathbb{C}^{eff} : \boldsymbol{\varepsilon}^*)_{kk} \right)$	<p>Index de désactivation instantané des fissures</p> <p>\mathcal{H} est un Heaviside</p>
$\boldsymbol{\varepsilon}^{meca} = \boldsymbol{\varepsilon}^e$ <p>$\boldsymbol{\varepsilon}^{meca+}$ Tenseur des déformations positives au sens [Rakotoarisoa, 2013] (Annexe)</p>	<p>Tenseur des déformations mécaniques $\boldsymbol{\varepsilon}^{meca}$ = Tenseur des déformations élastiques $\boldsymbol{\varepsilon}^e$</p>
$\mathbf{y}_1 = \frac{1}{2} \left[\mathbf{C}_{11}^0 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{meca+2} + \mathbf{b}_{55} \mathbf{C}_{55}^0 \boldsymbol{\varepsilon}_5^{meca+2} + \mathbf{b}_{66} \mathbf{C}_{66}^0 \boldsymbol{\varepsilon}_6^{meca+2} \right]$ $\mathbf{y}_2 = \frac{1}{2} \left[\mathbf{C}_{22}^0 \boldsymbol{\varepsilon}_2^{meca+2} + \mathbf{b}_{44} \mathbf{C}_{44}^0 \boldsymbol{\varepsilon}_4^{meca+2} + \mathbf{b}_{66} \mathbf{C}_{66}^0 \boldsymbol{\varepsilon}_6^{meca+2} \right]$ $\mathbf{y}_3 = \frac{1}{2} \left[\mathbf{C}_{33}^0 \boldsymbol{\varepsilon}_3^{meca+2} + \mathbf{b}_{44} \mathbf{C}_{44}^0 \boldsymbol{\varepsilon}_4^{meca+2} + \mathbf{b}_{55} \mathbf{C}_{55}^0 \boldsymbol{\varepsilon}_5^{meca+2} \right]$	Forces motrices y_k
$\boldsymbol{\varepsilon}_{eq(1)} = \sqrt{\frac{2y_1}{\mathbf{C}_{11}^0}} ; \boldsymbol{\varepsilon}_{eq(2)} = \sqrt{\frac{2y_2}{\mathbf{C}_{22}^0}} ; \boldsymbol{\varepsilon}_{eq(3)} = \sqrt{\frac{2y_3}{\mathbf{C}_{33}^0}}$	Déformations équivalentes $\boldsymbol{\varepsilon}_{eq(k)}$
$\dot{\mathbf{d}}_k = (\mathbf{d}_{sat(k)} - \mathbf{d}_k) \left\langle \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{eq(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}_{0(k)}^m}{\mathbf{S}_{m(k)}} \right\rangle_+^{s_{m(k)}} \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq(k)Max} \rangle_+$ $+$ $(\mathbf{d}_{sat(k)} - \mathbf{d}_k)^{y_k} \left\langle \frac{\mathbf{f}_k}{\mathbf{S}_{f(k)}} \right\rangle_+^{s_{f(k)}} [\langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq(k)} \rangle_+ - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq(k)Max}]$	<p>Loi d'évolution de l'endommagement temporelle</p> <p>Valeur maximale à l'instant t</p> $\boldsymbol{\varepsilon}_{eq(k)Max} = \max_{\tau \in [0,t]} \boldsymbol{\varepsilon}_{eq(k)}(\tau)$ <p>$\boldsymbol{\varepsilon}_{0(k)}^m$ seuil d'endommagement monotone</p>
$\mathbf{f}_k = \boldsymbol{\varepsilon}_{eq(k)} - \mathbf{m}_{kk} \check{\boldsymbol{\varepsilon}}_{kk}^e - \boldsymbol{\varepsilon}_{0(k)}^f$ <p>$\boldsymbol{\varepsilon}_{0(k)}^f$ seuil d'endommagement « de fatigue »</p>	<p>Fonction critère f_k (contribution « de fatigue »)</p>
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^r = \sum_k [\mathbf{R}'_k(\mathbf{d}_k) \dot{\mathbf{d}}_k \mathbb{R}_k : \mathbf{e}_k^*]$	
$\mathbf{e}_k^* = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^*}{ \max_i \boldsymbol{\varepsilon}_{ki}^* } ; \mathbf{i} = [1, 2, 3]$ $\mathbf{R}'_k = \chi_k e^{-r_k \mathbf{d}_k}$ $\mathbf{R}_k = \int \mathbf{R}'_k d\mathbf{d}_k = \frac{\chi_k}{r_k} (\mathbf{1} - e^{-r_k \mathbf{d}_k})$	Loi d'évolution des déformations résiduelles

Tableau 3 : Equations du modèle ODM, sans prise en compte de la viscosité, critère de rupture instantané, pas de couplage plan / hors-plan

Notons encore une fois, le modèle proposé dans ces travaux ne prend pas en compte les aspects visqueux de la matrice époxy. La déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ est alors égale à la déformation totale $\boldsymbol{\varepsilon}$, de même la déformation dite « mécanique » $\boldsymbol{\varepsilon}^{meca}$ au sens de [Rakotoarisoa, 2013] est donc directement la déformation élastique $\boldsymbol{\varepsilon}^e$. Le tenseur de souplesse fait intervenir l'indice de désactivation des fissures η . Ce dernier a été modifié par rapport à ODM-CMO. Le critère d'activation ici est instantané et fait intervenir donc la fonction Heaviside. La justification thermodynamique est présentée en 0. Les forces motrices restent inchangées et dépendent de la déformation mécanique positive au sens de [Rakotoarisoa, 2013] (0). Néanmoins, elles ne sont plus utilisées comme pilote direct de l'endommagement, ce sont les déformations équivalentes $\varepsilon_{eq(k)}$ qui gouvernent l'endommagement. La loi d'endommagement temporelle ne fait intervenir qu'une unique variable d'endommagement, par mécanisme de dégradation, mais nous dissociions deux contributions (monotone et de fatigue) qui ne peuvent pas évoluer en même temps. Enfin, la loi des déformations résiduelles a été modifiée par rapport à ODM-CMO, elle ne dépend alors plus directement de la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^*$.

V. 4. Mise en œuvre numérique : Implantation et Algorithmie

V. 4. 1. Schéma numérique général du modèle 3D

L'outil Matlab, nommé ONERA-LdC-3D et développé par l'Onera, mettant en œuvre le modèle ODM-CMO (et donc le modèle ODM) a été développé dans un formalisme le plus proche possible de celui des éléments finis, de façon à rendre le transfert de la version Matlab pour un élément de volume vers un code éléments finis (comme le code ZéBuLoN) pour le calcul de structure le plus immédiat possible. Comme dans un code éléments finis, ce logiciel assure (i) l'équilibre à l'échelle globale et (ii) vérifie la loi de comportement à l'échelle locale. Le choix de séparer ces deux résolutions (vérification du chargement imposé et vérification locale de la loi de comportement) a été réalisé pour conserver une cohérence avec le formalisme de résolution locale/globale du calcul par éléments finis dans un solveur implicite

Respecter l'équilibre global d'un élément de volume revient à assurer le chargement imposé qui peut être en déformation, en contrainte ou mixte (ce qui revient à imposer certaines composantes du tenseur des déformations et leur complémentaire aux tenseurs des contraintes). De plus, les chargements peuvent être imposés dans des axes autres que les axes principaux (chaîne, trame et hors-plan) en passant du repère global (directions principales du chargement) au repère local (directions principales du matériau) à l'aide des matrices de rotation habituelles. Le logiciel impose donc le chargement dans le repère éprouvette, même si ce dernier évolue dans le repère matériau. Dans le cas d'un chargement en contrainte ou mixte, l'équilibre global sur les contraintes (ou uniquement sur certaines composantes) nécessite la résolution d'un problème implicite effectuée à l'aide d'une méthode de Newton-Raphson [Besson et al., 2001]. Comme pour les codes éléments finis, la résolution du schéma implicite à l'échelle globale nécessite le calcul de la matrice tangente cohérente, spécifique à la loi de comportement choisie à l'échelle locale.

A l'échelle du matériau, il convient à présent de vérifier la relation de comportement. De par la formulation du modèle ODM-CMO, le calcul des différentes grandeurs d'intérêts de la loi de comportement nécessite la résolution d'un schéma implicite à l'échelle locale, résolue à nouveau avec une méthode de Newton-Raphson. En effet, dans les travaux de [Rakotoarisoa, 2013], l'introduction de la viscosité et de la notion de déformation mécanique a imposé de choisir comme variable interne de la loi de comportement respectivement la contrainte et les différentes variables d'endommagement, comme illustré sur la Figure 69.

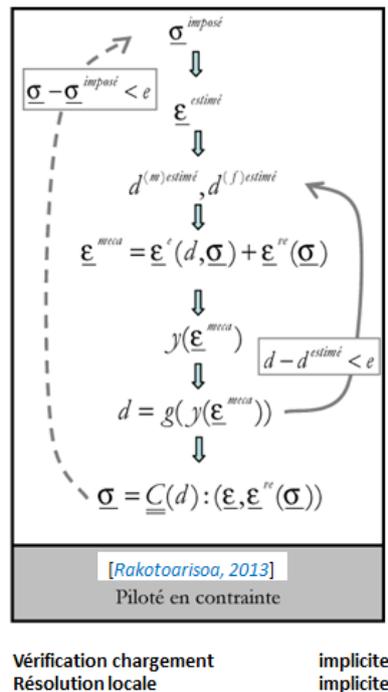


Figure 69 : Schéma de résolution du modèle ODM-CMO initial

En ce qui concerne le modèle *ODM*, le principe est similaire à celui du modèle ODM-CMO initial, à savoir une résolution locale implicite de la loi de comportement et une résolution globale afin de vérifier les conditions de chargement. La viscosité du matériau n'étant pas prise en compte seules les trois variables d'endommagement (d_1, d_2, d_3) ont été choisies comme variables internes et l'implémentation s'en trouve simplifiée notamment pour le calcul de la matrice Jacobienne. Le schéma de résolution pour le modèle *ODM* est reporté sur la Figure 70. A l'échelle matériau, la déformation $\underline{\varepsilon}$ est imposée. Une première estimation des trois variables d'endommagement (supposées égales à celles de l'incrément précédent convergé) permet de calculer les déformations résiduelles (lesquelles nécessitent la connaissance des variables d'endommagement, justifiant ainsi le recours à une méthode implicite). Les déformations mécaniques, qui dans notre cas sont directement égales aux déformations élastiques (puisque la viscosité n'est pas prise en compte), peuvent alors être calculées car elles ne font appel qu'aux déformations résiduelles et aux tenseurs de souplesse et de rigidité, calculés précédemment. Ensuite, les forces motrices y_k et les déformations équivalentes $\varepsilon_{eq(k)}$, moteurs des endommagements et fonction de la déformation élastique sont déterminées. La déformation $\underline{\varepsilon}^*$, dans notre cas est directement égale à la déformation totale $\underline{\varepsilon}$, estimée dans le cas d'un pilotage en contrainte. Enfin, les variables d'endommagements actualisées d_k sont calculées. La détermination du tenseur des souplesses effectives permet de calculer la contrainte $\underline{\sigma}$, qui sera comparée à celle imposée à l'échelle globale (vérification du chargement).

Autre différence avec le modèle d'endommagement ODM-CMO étendu à la fatigue [Rakotoarisoa, 2013], la définition de la loi d'évolution de l'endommagement, à savoir une unique variable d'endommagement par mécanisme de dégradation pour des chargements statiques et de fatigue, facilite la résolution contrairement au modèle ODM-CMO pour lequel lors des chargements de fatigue, la loi d'évolution des dommages fonction du nombre de cycles nécessite la réactualisation des forces motrices en simulant périodiquement un cycle complet avec le modèle statique. Cette étape augmente notablement le temps de calcul et complexifie la mise en œuvre de ce type de stratégie de calcul.

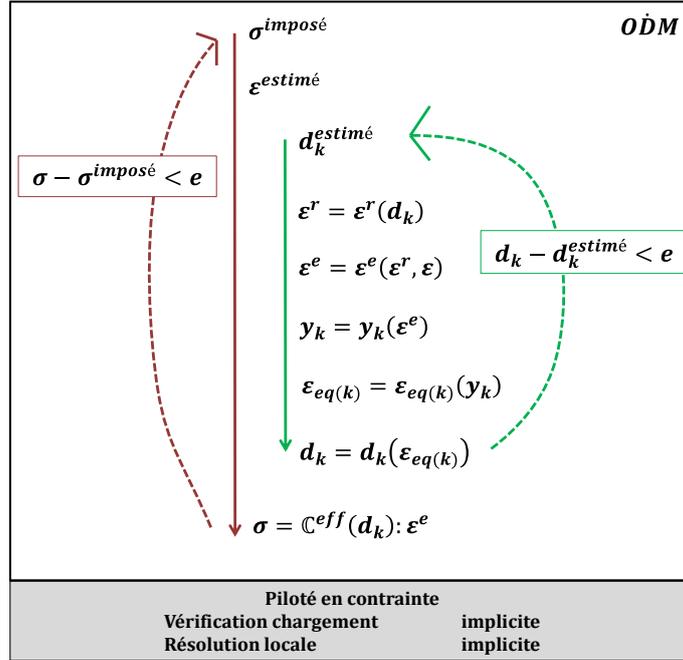


Figure 70 : Schéma de résolution implicite du modèle ODM dans le cas d'un pilotage en contrainte

V. 4. 2. Résolution locale de la loi de comportement et calcul de la matrice Jacobienne

La Figure 70 synthétise la démarche générale de calcul, comme expliquée précédemment. Dans cette section, les différentes étapes de la procédure seront détaillées.

a) Algorithmie de la loi d'évolution des déformations résiduelles

Nous avons proposé une nouvelle formulation pour les déformations résiduelles (Eq. V-2). Contrairement à la version du modèle ODM-CMO, celle proposée pour le modèle ODM est intégrable de façon exacte entre deux pas de temps. Par exemple, pour un chargement de fatigue cyclique défini de telle manière qu'il y ait un seul incrément entre la contrainte minimale et la contrainte maximale, nous déterminons numériquement les déformations résiduelles (Tableau 3) comme étant le calcul de $\Delta \epsilon^r$ (Eq. V-5) au pas de temps courant ajouté à la déformation résiduelle accumulée $\epsilon_{(t)}^r$ pendant l'histoire du chargement, $\epsilon_{(t+\Delta t)}^r = \epsilon_{(t)}^r + \Delta \epsilon^r$.

$$\Delta \epsilon^r = \sum_k \left[\left(\int_{d_{k(t)}}^{d_{k(t+\Delta t)}} R'_k(d_k) dd_k \right) \mathbb{R}_k : \mathbf{e}_k^* \right] = \sum_k \left[\left(R_k(d_{k(t+\Delta t)}) - R_k(d_{k(t)}) \right) \mathbb{R}_k : \mathbf{e}_k^* \right] \quad \text{Eq. V-5}$$

La valeur à intégrer est la variable d'endommagement, et l'intégrale est donc faite entre l'état d'endommagement précédent $d_{k(t)}$ et celui au pas de temps courant $d_{k(t+\Delta t)}$. A noter qu'au sein de la procédure de résolution $d_{k(t+\Delta t)}$ est la variable d'endommagement estimée, elle est déterminée par une résolution itérative. L'incrément des déformations résiduelles est alors simple et vaut pour la fonction $R_k(d_k)$ (Tableau 3)(Eq. V-6).

$$\Delta \epsilon^r = \sum_k \left(\frac{\chi_k}{r_k} \left(e^{-r_k d_{k(t+\Delta t)}} - e^{-r_k d_{k(t)}} \right) \mathbb{R}_k : \mathbf{e}_k^* \right) \quad \text{Eq. V-6}$$

Rappelons que $\mathbf{e}_k^* = \frac{\epsilon^*}{|\max_i \epsilon_{ki}^*|}$; $i = [1,2,3]$ est considéré comme constant sur un pas de temps.

b) Algorithmie pour le calcul de l'index de désactivation des fissures instantané

L'index de désactivation utilisé dans ces travaux est instantané et défini en (Eq. V-7). Il dépend du tenseur de rigidité endommagé \mathbb{C}^{eff} , qui rappelons-le, dépend lui-même des variables d'endommagement et de l'index de désactivation des fissures (avec $\mathcal{H}(x)$ la fonction d'Heaviside).

$$\eta_k = \mathcal{H}\left(\left(\mathbb{C}^{eff} : \boldsymbol{\varepsilon}^*\right)_{kk}\right) \quad \text{Eq. V-7}$$

Une solution possible serait de définir l'index de désactivation des fissures comme étant une variable interne, nécessitant la proposition d'un résidu supplémentaire, ce qui viendrait alourdir le calcul de la matrice Jacobienne. Mais η_k n'ayant que deux valeurs discrètes possibles, 0 (fissure fermée) ou 1 (fissure ouverte), nous avons plutôt préféré, dans un premier temps, utiliser une boucle conditionnelle. Au début de l'incrément, l'index de désactivation est supposé égale à sa valeur à l'incrément précédent convergé (ou 0 lors du premier incrément de calcul), puis vient le calcul des déformations résiduelles avec la variable d'endommagement estimée ainsi que le calcul des tenseurs de rigidité et de souplesse et enfin le calcul de l'index de désactivation actualisé. L'idée est de procéder ainsi : si l'index de désactivation actualisé est différent de sa valeur « initiale » (égale à celle du pas précédent), le calcul des tenseurs de rigidité et de souplesse est effectué à nouveau, ainsi que l'index de désactivation pour être certain qu'il n'a pas changé. S'il avait changé à nouveau, l'index de désactivation utilisé pour la suite de la résolution correspondrait à celle « estimée » en début d'incrément. Le principe est schématisé en (Figure 71). Le caractère instantané est rappelons-le défini grâce à la fonction Heaviside \mathcal{H} .

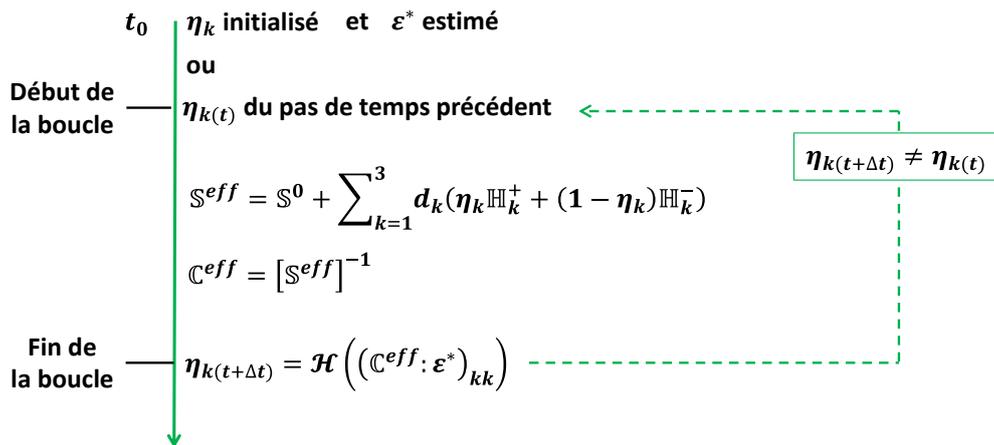


Figure 71 : Principe de résolution des indexes de désactivation des fissures

c) Algorithmie de la loi d'endommagement

Dans un premier temps, il convient de calculer les déformations mécaniques, moteur de l'endommagement. Les déformations mécaniques sont ici égales aux déformations élastiques et sont déterminées comme $\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbb{S}^{eff} : \boldsymbol{\sigma}$. En substituant la contrainte par son expression dans la loi de comportement, on obtient alors $\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbb{S}^{eff} : (\mathbb{C}^{eff} : \boldsymbol{\varepsilon}^* - \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}^r)$. La déformation élastique permet de calculer les forces motrices et les déformations équivalentes.

Nous avons vu dans le Chapitre III la façon d'écrire la loi d'évolution de l'endommagement pour n'avoir qu'une contribution active, et comment passer de la contribution monotone à la contribution de fatigue (vice et versa). La loi d'évolution s'intègre analytiquement entre deux pas de temps, la variable d'endommagement étant telle que son incrément vaut Δd_k . Alors, suivant le chargement, la loi d'endommagement est implantée simplement, ainsi dans le cas monotone la forme implantée est présentée en (Eq. V-8), dans le cas de fatigue, la forme implantée est présentée en (Eq. V-9).

$$d_{k(t+\Delta t)} = d_{sat(k)} - (d_{sat(k)} - d_{k(t)}) \exp \left(\left\langle \frac{\varepsilon_{eq(k)(t)} - \varepsilon_{0(k)}^m}{S_{0(k)}} \right\rangle^{s_{m(k)+1}} - \left\langle \frac{\varepsilon_{eq(k)(t+\Delta t)} - \varepsilon_{0(k)}^m}{S_{0(k)}} \right\rangle^{s_{m(k)+1}} \right) \quad \text{Eq. V-8}$$

$$d_{k(t+\Delta t)} = d_{sat(k)} - \left[(d_{sat(k)} - d_{k(t)})^{1-\gamma_k} + (\gamma_k - 1) \left(\left\langle \frac{f(k)(t+\Delta t)}{S_{f(k)}} \right\rangle^{s_{f(k)+1}} - \left\langle \frac{f(k)(t)}{S_{f(k)}} \right\rangle^{s_{f(k)+1}} \right) \right]^{\frac{1}{1-\gamma_k}} \quad \text{Eq. V-9}$$

Concernant la loi d'endommagement en elle-même, les deux contributions font appel, dans leur fonction critère, à la déformation équivalente au pas de temps courant $\varepsilon_{eq(k)(t+\Delta t)}$ mais aussi à celle au pas de temps précédent $\varepsilon_{eq(k)(t)}$. De plus, nous l'avons vu, chaque fonction critère dépend d'un seuil d'endommagement. Il y a alors, pour chaque contribution, deux conditions à prendre en compte. D'une manière succincte, la fonction critère est activée si le seuil d'endommagement, « monotone » ou « de fatigue », est dépassé. Si ce n'est pas le cas, l'endommagement au pas de temps courant n'évolue pas, et est égal à celui du pas de temps précédent $d_{k(t+\Delta t)} = d_{k(t)}$.

La loi d'endommagement est construite de façon à évoluer continuellement sur toute l'histoire du chargement. L'endommagement ne peut jamais diminuer, en d'autre terme, le taux d'endommagement est soit nul soit positif $\dot{d}_k \geq 0$. Le principe est schématisé sur la Figure 72, représenté par la flèche orange. Le passage entre l'une ou l'autre des conditions (« monotone » ou « de fatigue ») est géré grâce au calcul du maximum des déformations équivalentes. Le principe est schématisé sur la Figure 72, représenté par la flèche verte. Le principe qui est présenté est celui dans le cas où les chargements sont définis de type min-max (d'une valeur min à une valeur max en un pas de temps) qui fait appel au calcul d'un endommagement intermédiaire d_k^* (décrit en Figure 73).

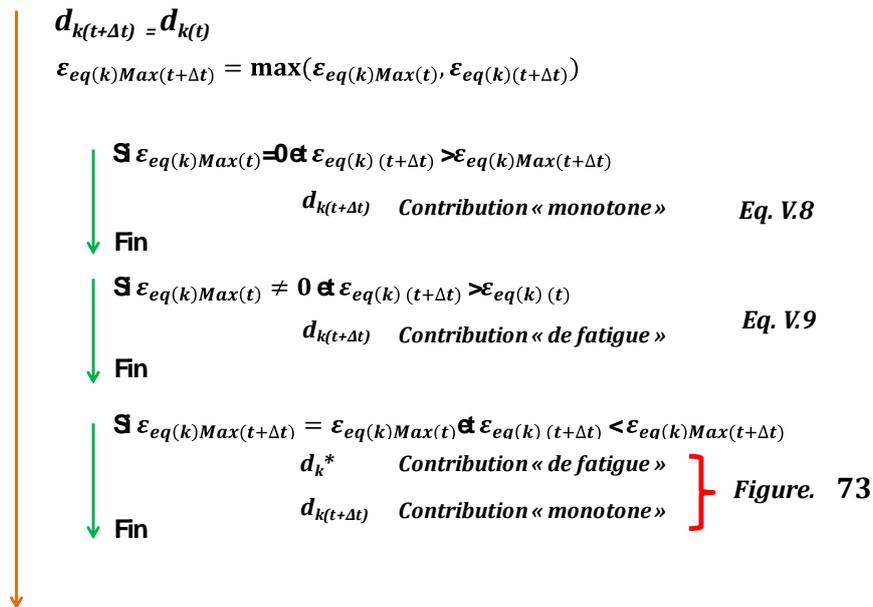


Figure 72 : Algorithmie de la loi d'endommagement dans le cas d'un chargement min-max

Pour le cas d'un chargement où lors d'une montée en charge, le maximum atteint dépasse le maximum précédent, la résolution numérique nécessite un troisième cas. La Figure 73 représente le principe de calcul de l'endommagement en fonction de l'évolution du maximum des déformations équivalentes pour un chargement min-max. L'évolution (représentée en vert) de l'endommagement est calculée grâce à la contribution de fatigue pour laquelle la déformation équivalente à l'incrément $(t + \Delta t)$ est égale à la déformation maximale à l'incrément (t) et l'endommagement calculé est noté d_k^* «(endommagement « intermédiaire »). La seconde partie (représentée en rouge) est calculée par la contribution monotone pour laquelle déformation équivalente à l'incrément $(t + \Delta t)$ est la déformation maximale à l'incrément $(t + \Delta t)$ et

l'endommagement à l'incrément (t) dans l' Eq. V-8 est égal à l'endommagement « intermédiaire » d_k^* .

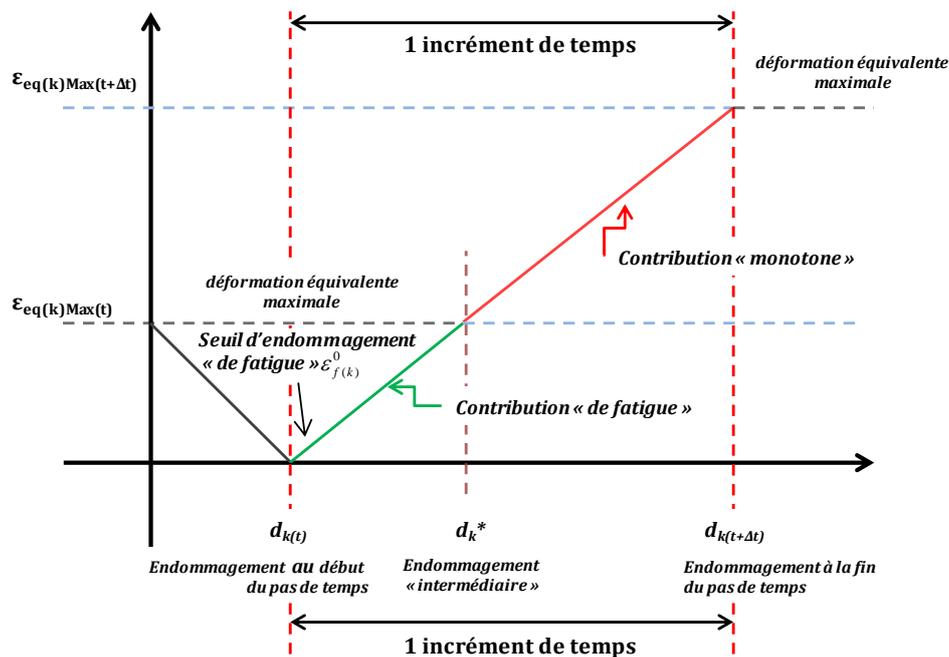


Figure 73 : Principe du calcul de l'endommagement sur un incrément de temps lorsque le dernier maximum est dépassé

d) Calcul et validation de la matrice Jacobienne

Comme évoqué au début de cette partie (V. 4. 2), la formulation du modèle nécessite la résolution d'un schéma implicite afin de résoudre localement la loi de comportement. Le calcul de chacune des trois variables internes (d_1, d_2, d_3) du modèle est effectué en minimisant leur résidu respectif par une méthode de Newton-Raphson. Les résidus correspondent aux différences entre les valeurs estimées à l'itération actuelle et à l'itération précédente (notée valeur estimée), et leur minimisation correspond à l'étape 9 du schéma de résolution du modèle proposé dans le cadre de cette thèse pour un chargement statique (Tableau 4).

Données d'entrée: ε , estimation de d

- | | |
|-----------|--|
| Etape 1 : | Calcul de l'index des déformations résiduelles ε^r |
| Etape 2 : | Calcul de l'index de désactivation η et du tenseur des souplesses et rigidités \mathbb{C}^{eff} |
| Etape 3 : | Calcul des déformations élastiques $\varepsilon^e(\varepsilon^r, \mathbb{C}^{eff})$ |
| Etape 4 : | Calcul des déformations positives $\varepsilon^{d+}(\varepsilon^e)$ |
| Etape 5 : | Calcul des forces motrices $\gamma(\varepsilon^{d+})$ |
| Etape 6 : | Calcul des déformations équivalentes $\varepsilon_{eq}(\gamma)$ |
| Etape 7 : | Calcul des valeurs effectives des variables d'endommagement $d(\varepsilon_{eq})$ |
| Etape 8 : | Calcul de la contrainte effective $\sigma(\mathbb{S}^{eff}, \varepsilon^e)$ |
| Etape 9 : | Convergence par itérations en minimisant les résidus |

Tableau 4 : Schéma de résolution du modèle ODM pour un chargement monotone ou bien un chargement de fatigue

Pour utiliser la méthode de Newton-Raphson, il est nécessaire de calculer les dérivées de ces résidus par rapport aux différentes variables internes - on parle alors de matrice Jacobienne (Eq. V-10).

$$\text{Résidu sur } d_k = [R_{d_k}] = \begin{bmatrix} d_1 - d_1^{\text{estimé}} \\ d_2 - d_2^{\text{estimé}} \\ d_3 - d_3^{\text{estimé}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d_{1(t+\Delta t)} \\ d_{2(t+\Delta t)} \\ d_{3(t+\Delta t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{1(t)} \\ d_{2(t)} \\ d_{3(t)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{d_1}}{\partial d_1} & \frac{\partial R_{d_1}}{\partial d_2} & \frac{\partial R_{d_1}}{\partial d_3} \\ \frac{\partial R_{d_2}}{\partial d_1} & \frac{\partial R_{d_2}}{\partial d_2} & \frac{\partial R_{d_2}}{\partial d_3} \\ \frac{\partial R_{d_3}}{\partial d_1} & \frac{\partial R_{d_3}}{\partial d_2} & \frac{\partial R_{d_3}}{\partial d_3} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} R_{d_1} \\ R_{d_2} \\ R_{d_3} \end{bmatrix} \quad \text{Eq. V-10}$$

Deux méthodes sont possibles pour déterminer la Jacobienne, soit numériquement soit analytiquement. La première consiste à calculer de manière numérique les dérivées à l'aide d'une méthode de perturbation. Il s'agit d'une méthode relativement simple à mettre en œuvre et permettant d'obtenir une solution de référence sans hypothèse mais qui engendre des coûts de calcul importants (nécessitant à chaque itération locale, la réalisation de 4 estimations (3 variables internes et une référence) du résidu de comportement en 3D). Cette méthode en raison de son coût et de son manque de stabilité n'est pas préconisée dans le cas de la vérification de la programmation. Nous choisissons de calculer la Jacobienne de façon analytique. Cette seconde méthode permet de garantir la convergence des calculs avec un temps de calcul bien moins coûteux. Toutefois, cette dernière a demandé un travail plus fastidieux pour déterminer analytiquement l'ensemble des dérivées et leur vérification. Nous noterons que la méthode des perturbations, considérée comme exacte, a permis d'obtenir des solutions de références et a permis de valider l'implémentation du modèle. Le détail du calcul de la Jacobienne est donné en ANNEXE 2.

V. 4. 3. Résolution globale de la loi de comportement et résolution de la matrice tangente cohérente

Comme mentionné précédemment, pour la résolution globale, qui revient à la vérification du chargement imposé en contrainte (ou uniquement de ses composantes actives), il est nécessaire de résoudre un schéma implicite. Une méthode de type Newton-Raphson est utilisée (Figure 74) et cette méthode requiert l'estimation de la matrice tangente cohérente $\mathbb{L}_c = \frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \Delta \varepsilon}$. Cette matrice représente l'évolution de la rigidité tangente du comportement et est parfois approximée par le tenseur \mathbb{C}^{eff} (au prix de la perte de convergence quadratique).

Au sein des codes de calculs par éléments finis avec un solveur implicite (Abaqus/standard, ZeBuLoN, Samcef), une méthode de résolution implicite est choisie pour garantir l'équilibre de la structure, et dans le cas d'un élément de volume pour garantir le chargement imposé. Le calcul exact de cette matrice permet de garantir l'état de convergence de calcul pour un coût de calcul réduit avec une vitesse de convergence optimisée. Le calcul correct de la matrice tangente est également très important dans l'optique d'une application au calcul de structures présentant des temps de calcul compatibles avec ceux d'un bureau d'études. L'obtention de la matrice tangente de manière analytique (et validée à l'aide de la méthode des perturbations) présente l'avantage de rendre efficace l'intégration de la loi de comportement *ODM* et donc applicable aux calculs de structures.

La matrice tangente est définie de la manière suivante (Eq. V-11) :

$$\mathbb{L}_c = \frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \Delta \varepsilon} = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \text{ car } \sigma = \sigma_t + \Delta \sigma, \varepsilon = \varepsilon_t + \Delta \varepsilon \quad \text{Eq. V-11}$$

Pour calculer la matrice tangente cohérente, la loi de comportement (Eq. V-12) est écrite sous forme de dérivées partielles (Eq. V-13) en fonction des quantités définies à la fin du pas de temps (en $t + \Delta t$) .

$$\sigma = \mathbb{C}^{eff} : \varepsilon^* - \mathbb{C}^0 : \varepsilon^r \quad \text{Eq. V-12}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = -\mathbb{C}^{eff} : \frac{\partial \mathbb{S}^{eff}}{\partial \varepsilon} : \mathbb{C}^{eff} : \varepsilon^* - \mathbb{C}^0 : \frac{\partial \varepsilon^r}{\partial \varepsilon} + \mathbb{C}^{eff} \quad \text{Eq. V-13}$$

Rappelons que donc notre cas, la déformation ε^* est égale à la déformation totale ε . Les calculs de la matrice Jacobienne et la matrice tangente cohérente sont détaillés en 0.

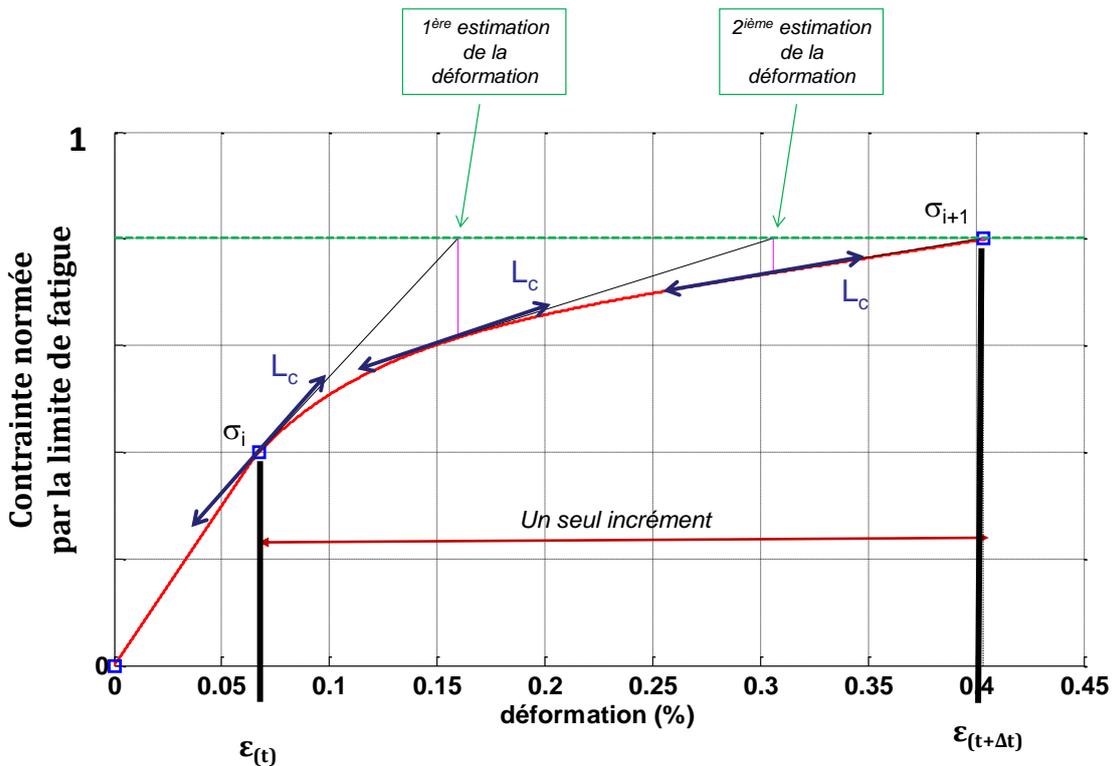


Figure 74 : Illustration du principe de la méthode de Newton-Raphson et du rôle de la matrice tangente

V. 5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la stratégie de résolution numérique de notre modèle choisie afin de réduire les temps de calcul. En effet, les modèles d'endommagement temporels ($\dot{d} = \dots$) peuvent être très coûteux en temps, si des stratégies de calculs efficaces ne sont pas mises en place. Dans le cas présent, nous nous intéressons principalement aux chargements de fatigue à grands, voire très grands nombres de cycles ou bien très longs en temps. Il est donc préférable d'opter pour des méthodes de type Newton-Raphson (schéma implicite, insensible aux nombres de pas de calculs), même si ce type de méthode nécessite le calcul fastidieux de la matrice Jacobienne et de la matrice tangente.

Nous avons alors proposé de définir les chargements de manière à ce qu'une montée (ou descente) en charge puisse être résolue en un unique incrément de temps. Nous appelons ce type de chargement, les chargements de sommet à sommet (min-max). Les résolutions des

différentes lois d'évolution sont effectuées grâce aux intégrations exactes de celles-ci sur l'incrément, ce qui permet de garantir à la fois l'exactitude du calcul à la fin de l'incrément et le gain en coût de résolution.

Ceci a impliqué la modification de la loi d'évolution des déformations résiduelles. Elle ne dépend plus de l'intensité du tenseur des déformations mais dépend de sa direction. Elle n'est alors plus dépendante de l'incrément de déformation. L'intégration de la loi est exacte lors de chargements proportionnels. Cette modification a nécessité l'identification de quatre nouveaux paramètres, deux dans le sens chaîne et deux dans le sens trame. Nous avons choisi de réaliser nos identifications à partir des résultats obtenus avec le modèle ODM-CMO, car nous avons souhaité dans un premier temps retrouver des résultats cohérents avec ceux du modèle ODM-CMO actuel, notamment pour les sollicitations monotones.

CHAPITRE VI DIAGRAMMES DE HAIGH ET COURBES DE WOHLER – CONSTRUCTION PAR LE MODELE *ODM* VIA UNE APPROCHE SIMPLIFIEE – IDENTIFICATION/RECALAGE 3D

Sommaire du chapitre VI

VI. 1. Construction « analytique » des courbes de Wöhler et des diagrammes de Haigh « asymptotiques » à partir d’une approche uniaxiale simplifiée du modèle 3D.....	112
VI. 1. 1. Approche simplifiée du modèle d’endommagement 3D.....	112
VI. 1. 2. Diagramme de Haigh « asymptotique » - choix de sa forme.....	113
VI. 1. 3. Calcul des courbes de Wöhler	117
VI. 2. Démarche d’identification des paramètres de fatigue à partir de l’approche simplifiée	119
VI. 2. 1. Procédure générale de l’identification des paramètres de fatigue	119
VI. 2. 2. Compromis : le diagramme de Haigh sens chaîne conditionne celui sens trame ...	124
VI. 3. Identification en température.....	125
a) Paramètres du monotone jouant un rôle sur ceux de fatigue à température ambiante	126
b) Paramètres de fatigue à température ambiante	127
VI. 4. Identification « anisotherme »	127
VI. 5. Reconstruction des diagrammes de Haigh et des courbes de Wöhler « anisothermes » – construction de courbes maîtresses	128
VI. 5. 1. Diagramme de Haigh.....	128
VI. 5. 2. Courbes de Wöhler	129
VI. 6. Modèle 3D – Réajustement/Recalage des paramètres	130
VI. 6. 1. Démarche générale d’identification des paramètres du modèle 3D.....	130
VI. 6. 2. Recalage étape par étape.....	132
VI. 7. Conclusion	133

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'identification des paramètres du modèle d'endommagement. Pour ce faire, nous proposons pour identifier les paramètres de fatigue, d'utiliser les diagrammes de Haigh et les courbes de Wöhler expérimentaux. A partir d'une approche uniaxiale (VI. 1), nous proposons une méthode pour construire les diagrammes de Haigh « asymptotique » et les courbes de Wöhler. Nous avons présenté les diagrammes de Haigh et les courbes de Wöhler ainsi que leurs utilités, notamment pour l'industriel Snecma (Chapitre II). A l'opposé du Chapitre II où une méthode industrielle (méthode empirique) d'obtention des diagrammes de Haigh et de reconstruction des courbes de Wöhler a été proposée, dans ce chapitre les diagrammes de Haigh et les courbes de Wöhler sont construits à partir du modèle d'endommagement. Ils sont donc basés sur la compréhension des phénomènes physiques que subit le composite tissé 3D. Nous proposons alors un premier protocole d'identification des paramètres (VI. 2), à température ambiante mais aussi à d'autres températures (VI. 3). En effet, l'idée est de proposer une méthode d'identification anisotherme dans le but de pouvoir prendre en compte des chargements thermomécaniques complexes et donc proposer un modèle d'endommagement temporel anisotherme pour le composite tissé 3D (VI. 4) et nous pouvons alors reconstruire les diagrammes pour les différentes températures (VI. 5). Une fois cette première étape d'identification (basée donc sur une approche simplifiée uniaxiale), une seconde étape de réajustement/recalage des paramètres est présentée en (VI. 6) en utilisant cette fois-ci le modèle *ODM* complet, dont le schéma numérique a été présenté dans le Chapitre V et qui prend donc en compte la nouvelle forme de la loi d'évolution des déformations résiduelles comme présentée dans le chapitre présent.

VI. 1. Construction « analytique » des courbes de Wöhler et des diagrammes de Haigh « asymptotiques » à partir d'une approche uniaxiale simplifiée du modèle 3D

VI. 1. 1. Approche simplifiée du modèle d'endommagement 3D

Une approche uniaxiale du modèle complet nous permet d'établir un cadre de travail simplifié, mais qui permet de proposer une procédure pour une première identification des paramètres de fatigue du modèle d'endommagement. Ainsi, dans le cas où nous faisons l'hypothèse forte que l'élasticité n'est pas couplée à l'endommagement (*Eq. VI-1*), le cadre défini nous permet alors de calculer de façon analytique les diagrammes de Haigh et les courbes de Wöhler (et courbes maîtresses).

$$\boldsymbol{\sigma} \cong \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad \text{Eq. VI-1}$$

Dans les cas particuliers des chargements uniaxiaux en déformation, nous prenons l'exemple dans cette démonstration du chargement sens chaîne (direction 1), alors $\varepsilon_{11}^e \geq 0$, $\varepsilon_{22}^e = -\nu_{12}\varepsilon_{11}^e$ et $\varepsilon_{33}^e = -\nu_{13}\varepsilon_{11}^e$ avec ν_{12} et ν_{13} les coefficients de Poisson. Dans ce cas particulier, les déformations équivalentes pour les trois mécanismes sont directement les déformations élastiques (*Eq. VI-2*), car $\varepsilon_{12}^e = \varepsilon_{13}^e = \varepsilon_{21}^e = \varepsilon_{23}^e = \varepsilon_{31}^e = \varepsilon_{32}^e = 0$.

$$\varepsilon_{eq(1)} = \langle \varepsilon_{11}^e \rangle_+ ; \quad \varepsilon_{eq(2)} = \langle \varepsilon_{22}^e \rangle_+ ; \quad \varepsilon_{eq(3)} = \langle \varepsilon_{33}^e \rangle_+ \quad \text{Eq. VI-2}$$

Nous avons vu dans le Chapitre IV, les fonctions critères dépendent directement de la déformation élastique (notées à nouveau en *Eq. VI-3*), plus précisément de la partie positive de la déformation élastique.

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \langle \varepsilon_{11}^e \rangle_+ - m_{11} \check{\varepsilon}_{11}^e - \varepsilon_{0(1)}^f \\
 f_2 &= \langle \varepsilon_{22}^e \rangle_+ - m_{22} \check{\varepsilon}_{22}^e - \varepsilon_{0(2)}^f \\
 f_3 &= \langle \varepsilon_{33}^e \rangle_+ - m_{33} \check{\varepsilon}_{33}^e - \varepsilon_{0(3)}^f
 \end{aligned}
 \tag{Eq. VI-3}$$

Rappel : $\varepsilon_{0(1)}^f$, $\varepsilon_{0(2)}^f$, $\varepsilon_{0(3)}^f$ sont les **seuils d'endommagement de fatigue** en déformation respectivement pour sens chaîne, sens trame et hors-plan. Pour $k=1$ par exemple, si $(\langle \varepsilon_{11}^e \rangle_+ - m_{11} \check{\varepsilon}_{11}^e) > \varepsilon_{0(1)}^f$ alors il y a création d'endommagement de fatigue.

Enfin, dans le cas1D considéré, nous pouvons définir les déformations comme étant le rapport entre la contrainte sur le module d'Young E_1^0 , et ainsi écrire les relations en fonction de la contrainte.

Le Tableau 5 répertorie les équations de l'approche simplifiée, utiles pour le calcul des diagrammes de Haigh (solicitation 1D selon la direction 1). Notons que la loi d'endommagement est exacte tant que les seuils « monotones » ne sont pas atteints ($\varepsilon_{eq(1)} < \varepsilon_{0(1)}^m$).

$ \begin{aligned} \sigma_{11} &= E_1^0 \varepsilon_{11}^e \\ \varepsilon_{22}^e &= -\nu_{12} \varepsilon_{11}^e ; \varepsilon_{33}^e = -\nu_{13} \varepsilon_{11}^e \\ \varepsilon_{eq(1)} &= \langle \varepsilon_{11}^e \rangle_+ \\ f_1 &= \langle \varepsilon_{11}^e \rangle_+ - m_{11} \check{\varepsilon}_{11}^e - \varepsilon_{0(1)}^f \\ \dot{d}_1 &= (d_{sat(1)} - d_1)^{\gamma_1} \left\langle \frac{f_1}{S_{f(1)}} \right\rangle_+^{\delta_{f(1)}} \langle \varepsilon_{11}^e \rangle_+ \end{aligned} $	<p>Loi d'élasticité, non-couplée à l'endommagement</p> <p>Déformations équivalentes, une par mécanisme de dégradation</p> <p>Fonction critère, une par mécanisme de dégradation</p> <p>Loi d'évolution de l'endommagement temporelle</p>
---	--

Tableau 5 : Equations utiles du modèle par l'approche simplifiée pour le calcul des diagrammes de Haigh et des courbes de Wöhler ; cas de la traction sens chaîne (direction 1)

Les fonctions critères définissent les domaines où l'on endommage ou pas. Pour le mécanisme de dégradation $k=1$ par exemple, tant que le seuil d'endommagement de fatigue n'est pas dépassé, le matériau se trouve dans le domaine en dessous de l'enveloppe. Dans ce domaine, l'endommagement de fatigue (nul) ne peut pas conduire à la rupture du matériau. Lorsque le seuil d'endommagement de fatigue est dépassé, le matériau se trouve dans le second domaine (au-dessus de l'enveloppe). Dans ce domaine, l'endommagement de fatigue peut conduire à la rupture.

VI. 1. 2. Diagramme de Haigh « asymptotique » - choix de sa forme

Notre objectif est de proposer un modèle qui prévoit la durée de vie du matériau à grand nombre de cycles. Le diagramme de Haigh « asymptotique » est celui qui définit l'enveloppe en dessous de laquelle il n'y a pas création d'endommagement de fatigue. Pour construire ce diagramme, il faut avant tout choisir pour quel nombre de cycles à rupture nous considérons le début du domaine d'endurance illimitée, si celui-ci existe. Pour ce faire, nous devons définir des asymptotes de fatigue et des seuils d'endommagement de fatigue en dessous desquels il n'y aura jamais création d'endommagement. Sur les courbes de Wöhler, ces seuils sont définis en contrainte maximale. On appelle ce seuil, le seuil d'endommagement de fatigue « asymptotique » et noté $\sigma_{f\infty(1)}^{R=0}$ dans le cas du rapport de charge $R_\sigma = 0$ (avec $R_\sigma = R_\varepsilon = \sigma_{min}/\sigma_{Max}$, le rapport de charge). La Figure 75 présente, de façon schématique, une courbe de Wöhler (en contrainte maximale) et permet de visualiser (schématiquement) la contrainte de limite de fatigue « asymptotique ».

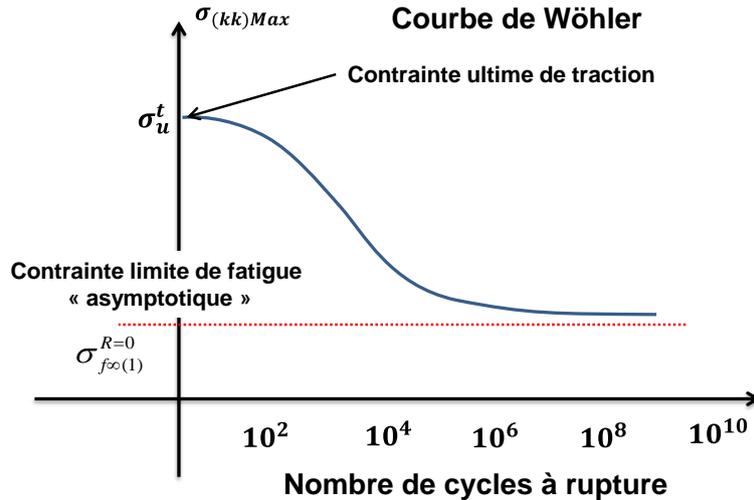


Figure 75 : Représentation de la contrainte limite de fatigue « asymptotique » sur une courbe de Wöhler à $R_\sigma = 0$

Dans l'état de l'art (Chapitre II), nous avons vu qu'il existe divers modèles phénoménologiques permettant de construire les diagrammes de Haigh, notamment pour les composites stratifiés ; des diagrammes bilinéaires, des diagrammes linéaires par morceaux, des diagrammes quadratiques, des diagrammes symétriques ou encore non-symétriques. Nous présentons ci-dessous le choix que nous avons fait sur la définition des fonctions critères qui impliquent une forme pour les diagrammes de Haigh, à savoir une forme bilinéaire.

Diagramme de Haigh bilinéaire

Dans le cas de chargement de fatigue à amplitude constante correspondant à l'exemple des essais utilisés par la suite, la moyenne évolutive des déformations élastiques tend rapidement vers la moyenne constante $\bar{\epsilon}_{kk}^e = \frac{1}{2}(\epsilon_{11min}^e + \epsilon_{11Max}^e)$. Nous remplaçons donc dans la fonction critère les moyennes évolutives $\check{\epsilon}_{kk}^e$ par les moyennes constantes des déformations élastiques $\bar{\epsilon}_{11}^e$ (Eq. VI-4):

$$\begin{aligned} f_1 &= \langle \epsilon_{11}^e \rangle_+ - m_{11} \bar{\epsilon}_{11}^e - \epsilon_{0(1)}^f \\ f_2 &= \langle \epsilon_{22}^e \rangle_+ - m_{22} \bar{\epsilon}_{22}^e - \epsilon_{0(2)}^f \\ f_3 &= \langle \epsilon_{33}^e \rangle_+ - m_{33} \bar{\epsilon}_{33}^e - \epsilon_{0(3)}^f \end{aligned} \quad \text{Eq. VI-4}$$

Dans le cas $\epsilon_{11Max}^e > 0$, la déformation équivalente $\epsilon_{eq(1)}$ vaut ϵ_{11Max}^e et donc :

- la fonction critère f_1 sera négative (pas d'endommagement dû au mécanisme de dégradation 1) tant que $\langle \epsilon_{11}^e \rangle_+ - m_{11} \bar{\epsilon}_{11}^e - \epsilon_{0(1)}^f < 0$
- f_1 sera positive (endommagement) lorsque $\langle \epsilon_{11}^e \rangle_+ - m_{11} \bar{\epsilon}_{11}^e - \epsilon_{0(1)}^f > 0$

La frontière entre les deux domaines correspond à $f_1 = 0$, soit :

$$E_1 f_1 = E_1 \epsilon_{11Max}^e - m_{11} E_1 \bar{\epsilon}_{11}^e - E_1 \epsilon_{0(1)}^f = 0$$

Les deux relations suivantes,

$$\sigma_{a11} = E_1 \left(\frac{\epsilon_{11Max}^e - \epsilon_{11min}^e}{2} \right) \text{ et } \bar{\sigma}_{11} = E_1 \left(\frac{\epsilon_{11Max}^e + \epsilon_{11min}^e}{2} \right)$$

permettent de déduire l'équation (Eq. VI-5) en contrainte qui est celle de la droite qui représente l'enveloppe asymptotique du premier mécanisme.

$$\sigma_{a11} = E_1 \varepsilon_{0(1)}^f - (1 - m_{11}) \bar{\sigma}_{11} \quad \text{Eq. VI-5}$$

Le rôle de la fonction critère f_1 dans le diagramme de Haigh « asymptotique » est représenté sur la Figure 76. Le paramètre m_{11} permet de jouer sur la pente de la droite. Dans les domaines Traction-Traction (T-T) et Traction-Compression (T-C) représentés, il y a donc présence d'endommagement d_1 . En dessous de l'enveloppe (en rouge) jusqu'à la droite délimitant les domaines Traction-Traction (T-T) et Traction-Compression (T-C), il n'y a pas d'endommagement d_1 . Inversement, au-delà de l'enveloppe, il y a présent l'endommagement de fatigue d_1 et celui-ci peut contribuer à la rupture du matériau (mais pas nécessairement). Il n'y a pas de création d'endommagement de fatigue d_1 dans le domaine Compression-Compression (sous la droite à 45° (pente négative hachurée)).

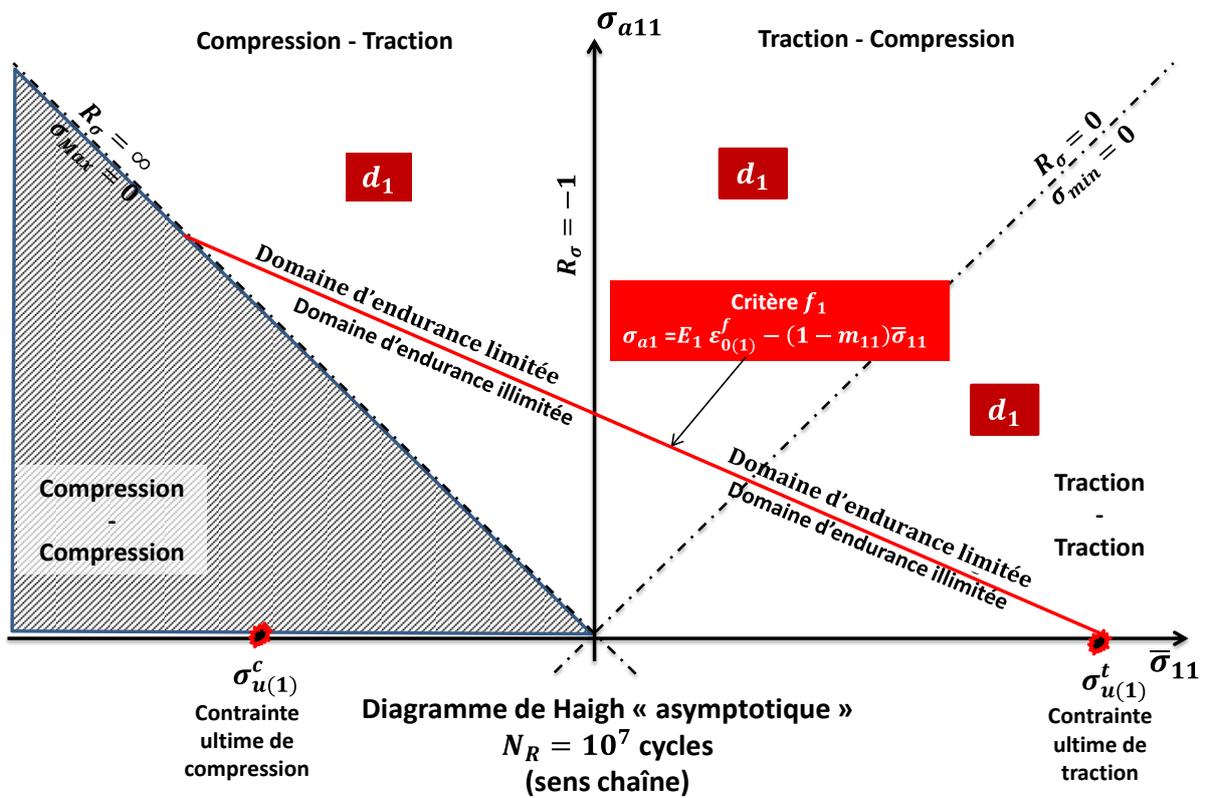


Figure 76 : Schématisation du diagramme de Haigh "asymptotique" (sens chaîne) ; représentation du rôle de la fonction critère f_1 , la limite entre domaine d'endurance illimitée et domaine endommagé (ligne rouge continue)

Malgré le caractère uniaxial d'un diagramme de Haigh, nous pouvons représenter le critère d'endommagement hors-plan d_3 qui intervient dans le domaine Compression-Compression (C-C). En effet, lors d'un chargement de compression sens chaîne ($\varepsilon_{11Max}^e < 0$), la fonction critère f_3 « hors-plan » est activée si $\langle \varepsilon_{33}^e \rangle_+ - m_{33} \bar{\varepsilon}_{33}^e - \varepsilon_{0(3)}^f > 0$, autrement dit si :

$$\langle -v_{13} \varepsilon_{11Max}^e \rangle_+ + m_{33} v_{13} \bar{\varepsilon}_{11}^e - \varepsilon_{0(3)}^f > 0$$

La frontière entre les deux domaines correspond à $f_3 = 0$, soit :

$$E_1 f_3 = E_1 \nu_{13} \varepsilon_{11 \text{Max}}^e - m_{33} E_1 \nu_{13} \bar{\varepsilon}_{11}^e - E_1 \varepsilon_{0(3)}^f = 0$$

De la même manière, nous déterminons l'équation (Eq. VI-6) en contrainte qui est celle de la droite qui représente l'enveloppe asymptotique du premier mécanisme.

$$\sigma_{a11} = \frac{E_1 \varepsilon_{0(3)}^f}{\nu_{13}} + (1 - m_{33}) \bar{\sigma}_{11} \tag{Eq. VI-6}$$

La droite (en bleu) définissant la limite entre domaine à endurance illimitée et domaine endommagé, par le mécanisme hors-plan ($k=3$) est représentée sur la Figure 77.

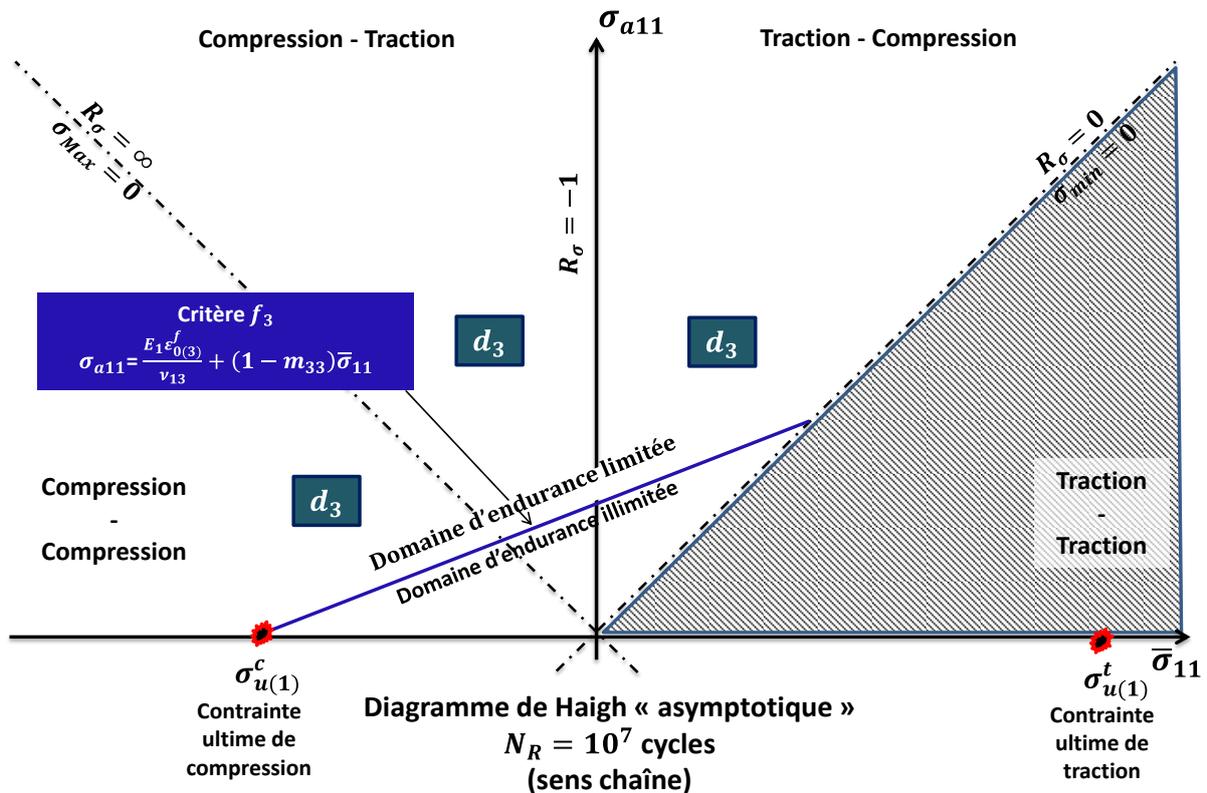


Figure 77 : Schématisation du diagramme de Haigh "asymptotique" (sens chaîne) ; représentation du rôle de la fonction critère f_3 , la limite entre domaine d'endurance illimitée et domaine endommagé (ligne bleue continue)

Dans les domaines Compression-Compression, Compression-Traction, Traction-Compression jusqu'à la limite avec le domaine Traction-Traction (droite à 45°, pente positive), au-dessus de la limite, il y a création d'endommagement de fatigue d_3 par le mécanisme de hors-plan ($k=3$), cette endommagement peut amener à la rupture mais pas nécessairement. En dessous de l'enveloppe représentée par la droite bleue, il n'y a pas création d'endommagement de fatigue d_3 .

Il est à noter qu'il peut également avoir du d_3 dans la partie Traction-Traction mais celui-ci est directement lié au d_1 [Marcin, 2010 ; Rakotoarisoa, 2013].

Nous avons vu comment obtenir un diagramme de Haigh bilinéaire (triangulaire), grâce à une définition de la fonction critère de la contribution de la loi d'endommagement dépendante de la déformation équivalente et de la moyenne de la composante principale de la déformation

élastique correspondante au mécanisme de dégradation en jeu. Nous pouvons en faire une représentation complète en Figure 78.

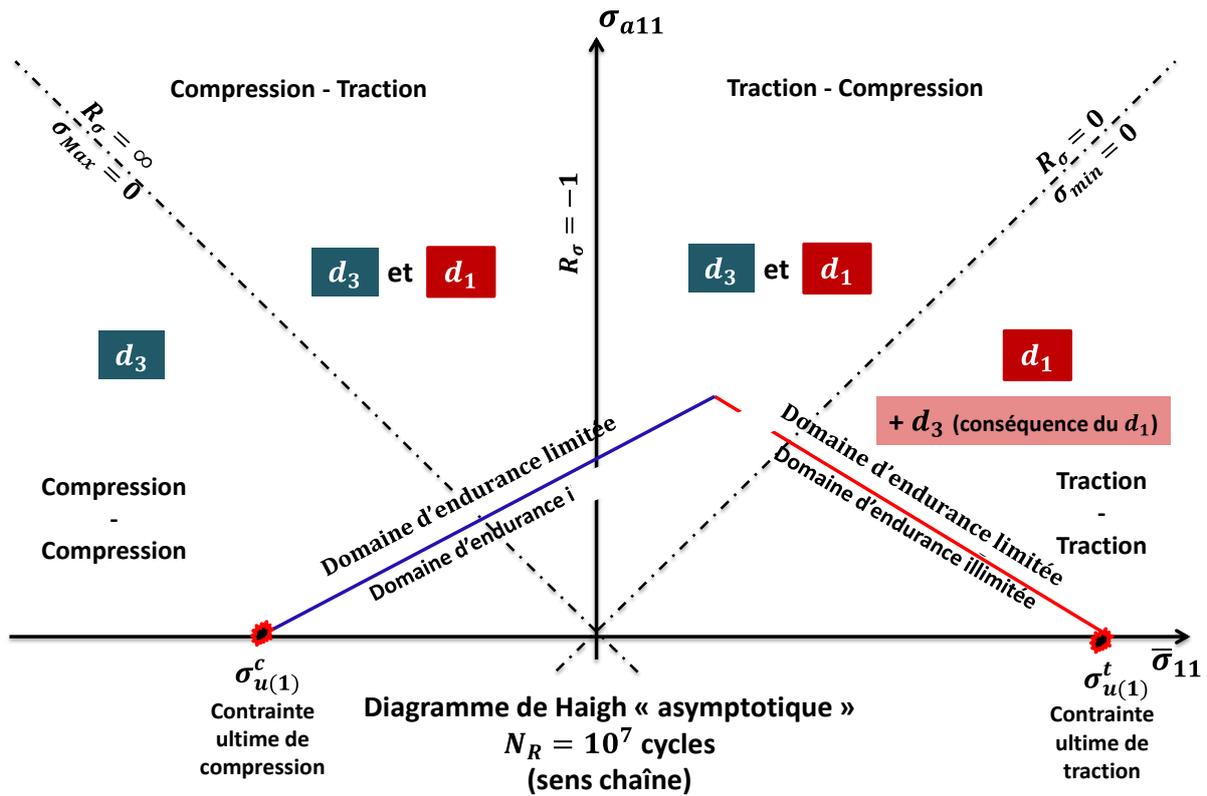


Figure 78 : Schématisation du diagramme de Haigh « asymptotique » linéaire, complet

Nous allons voir maintenant comment construire les courbes de Wöhler, elles aussi de manière analytique.

VI. 1. 3. Calcul des courbes de Wöhler

Les courbes de Wöhler vont nous permettre d'identifier le reste des paramètres de fatigue, notamment l'exposant $s_{f(k)}$ et le paramètre $S_{f(k)}$ intervenant dans la loi d'évolution d'endommagement. L'approche simplifiée nous permet de déterminer des relations simples entre les variables et ainsi reconstruire les courbes de Wöhler pour les différents rapports de charge.

Nous présentons le calcul de la courbe de Wöhler pour le cas d'un chargement uniaxial sens chaîne ($k=1$), et nous l'appelons courbe de Wöhler sens chaîne. Nous avons présenté, dans le Chapitre III, la loi d'endommagement de fatigue en cycles issue de la contribution «de fatigue» de la loi d'endommagement temporelle, gouvernée par les déformations équivalentes (réécrite en (Eq. VI-7)).

$$\frac{\delta d_1}{\delta N} = (d_{sat(1)} - d_1)^{\gamma_1} \frac{S_{f(1)}}{(s_{f(1)} + 1)} \left[\left\langle \frac{\varepsilon_{eq(11)Max} - m_{11}\bar{\varepsilon}_{11}^e - \varepsilon_{0(1)}^f}{S_{f(1)}} \right\rangle_+^{s_{f(1)}+1} - \left\langle \frac{\varepsilon_{eq(11)min} - m_{11}\bar{\varepsilon}_{11}^e - \varepsilon_{0(1)}^f}{S_{f(1)}} \right\rangle_+^{s_{f(1)}+1} \right] \quad \text{Eq. VI-7}$$

L'approche simplifiée permet d'écrire la loi en cycles, directement (ou simplement), en fonction des contraintes, puisqu'en 1D $\varepsilon_{eq(11)Max} = \langle \varepsilon_{(11)Max}^e \rangle_+$ et $\langle \varepsilon_{(11)Max}^e \rangle_+ = \langle \frac{\sigma_{(11)Max}}{E_1} \rangle_+$ et le seuil en

déformation est réécrit en seuil des contraintes tel que $\sigma_{0(1)}^f = E_1 \varepsilon_{0(1)}^f$. Le diagramme de Haigh permet, entre autre, de déterminer le seuil d'endommagement en contrainte pour le cas particulier du rapport de charge $R_\sigma = 0$, dénommé $\sigma_{f\infty(1)}^{R=0}$, tel que $\sigma_{0(1)}^f = \sigma_{f\infty(1)}^{R=0} (2 - m_{11})$. Ce seuil est appelé contrainte de limite de fatigue « asymptotique » et est représenté sur la Figure 79.

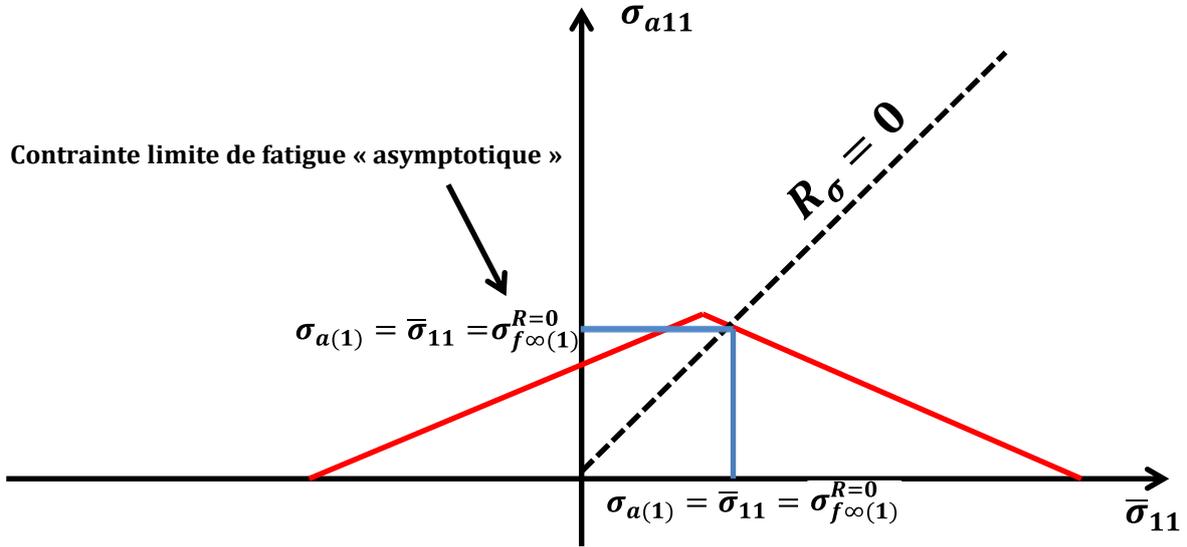


Figure 79 : Détermination et visualisation du seuil d'endommagement en contrainte « asymptotique »

Nous faisons le lien entre la moyenne constante des contraintes, le rapport de charge en contrainte et la contrainte maximale (Eq. VI-8). La loi en cycle en contrainte est définie en (Eq. VI-9), elle est écrite en fonction de la contrainte limite de fatigue « asymptotique ».

$$\xi_{11}^e \cong \bar{\varepsilon}_{11}^e = \frac{\bar{\sigma}_{11}}{E_1} = \frac{\sigma_{11Max}}{2E_1} (1 + R_\sigma) \quad \text{Eq. VI-8}$$

$$N_R = \frac{A_1}{\left\langle \frac{(2 - m_{11}(1 + R_\sigma)) \langle \sigma_{11Max} \rangle_+}{(2 - m_{11}) \sigma_{f\infty(1)}^{R=0}} - 1 \right\rangle_+^{s_{f(1)}+1} - \left\langle \frac{(2R_\sigma - m_{11}(1 + R_\sigma)) \langle \sigma_{11Max} \rangle_+}{(m_{11}) \sigma_{f\infty(1)}^{R=0}} - 1 \right\rangle_+^{s_{f(1)}+1}} \quad \text{Eq. VI-9}$$

avec

$$A_1 = \frac{(\delta_{f(1)} + 1)(S_{f(1)})^{\delta_{f(1)}} \left(d_{sat(1)}^{1-\gamma_1} - (d_{sat(1)} - d_{crit(1)})^{1-\gamma_1} \right)}{(1 - \gamma_1) \varepsilon_{0(1)}^f \delta_{f(1)}^{\delta_{f(1)}+1}} \quad \text{Eq. VI-10}$$

Le paramètre A_1 dépend des paramètres du modèle ($\delta_{f(1)}$, $S_{f(1)}$, $d_{sat(1)}$, $d_{crit(1)}$, γ_1) et joue sur la courbure de la courbe pour des nombres de cycles à rupture faibles. Par contre, l'exposant $\delta_{f(1)}$ joue sur la position globale de la courbe, plus la valeur est élevée plus la courbe est déplacée vers le haut et vers la droite (vers des durées de vie plus grandes).

VI. 2. Démarche d'identification des paramètres de fatigue à partir de l'approche simplifiée

De façon générale tout d'abord, nous nous intéressons principalement à l'identification des paramètres liés à l'endommagement d_1 et l'endommagement d_2 , qui nécessite des essais uniaxiaux sens chaîne et sens trame. Les termes de couplage étant déjà identifiés en statique. Les paramètres liés à l'endommagement d_3 , requièrent davantage d'essais expérimentaux dans la direction « hors-plan » ($k=3$), il est encore difficile donc de statuer sur ces paramètres, toutefois nous allons voir que certains paramètres peuvent être déterminés grâce aux diagrammes de Haigh « sens chaîne » et « sens trame ».

Les paramètres de la contribution d'endommagement monotone ainsi que ceux des effets de l'endommagement sur le comportement sont directement ceux du modèle ODM-CMO. En effet, la contribution d'endommagement « monotone » étant totalement équivalente à la loi monotone de ODM-CMO, nous pouvons nous permettre de prendre le même jeu de paramètres.

Du fait que la loi d'évolution des déformations résiduelles a été modifiée, il faut identifier les nouveaux paramètres, ce point a été présenté dans le chapitre V.

Enfin, les identifications dans ce chapitre sont effectuées à l'aide d'essais expérimentaux réalisés à Snecma. Du fait du plus grand nombre d'essais en notre possession à température ambiante (20°C) et « sens chaîne », nous mettrons davantage de poids sur ces conditions d'essais notamment pour établir une procédure d'identification générale.

VI. 2. 1. Procédure générale de l'identification des paramètres de fatigue

La procédure générale pour l'identification des paramètres de fatigue est expliquée ci-dessous par étapes. Nous prenons pour exemple, l'identification des paramètres « sens chaîne » ($k=1$). La procédure décrite s'appuie sur les résultats expérimentaux sens chaîne à température ambiante (20°C).

ETAPE 1 : Déterminer la contrainte limite de fatigue « asymptotique » $\sigma_{f\infty(1)}^{R=0}$

La première étape consiste à déterminer la contrainte limite de fatigue « asymptotique » (**Figure 80**), celle en dessous de laquelle le matériau ne peut pas rompre. Cette contrainte, nous la déterminons en faisant l'analyse des points expérimentaux, soit grâce à la courbe maîtresse (si le nombre de résultats est assez conséquent), soit grâce à la courbe de Wöhler à rapport de charge $R_\sigma = 0.05$.

Les points expérimentaux de la courbe de Wöhler sont lissés par une fonction. De façon à ce que le choix de la contrainte limite de fatigue « asymptotique » ne soit pas lié aux équations de notre modèle, nous utilisons la fonction de Sendecykj modifiée (présentée dans le chapitre II) dont l'équation est rappelée ci-dessous (Eq. VI-11). Le choix judicieux des coefficients c et s_e permettent de lisser correctement les points. L'exercice est évidemment plus facile si l'on dispose d'essais à très grand nombre de cycles. σ_u^t est la contrainte ultime de traction, $\sigma_{f\infty(1)}^{R=0}$ est le seuil en contrainte en dessous duquel il ne peut y avoir création d'endommagement.

$$\sigma_{Max} = \frac{\sigma_u^t - \sigma_0^{f(\infty)}}{(1 + c(N_R - 1))^{s_e}} + \sigma_{f\infty(1)}^{R=0} \quad \text{Eq. VI-11}$$

La **Figure 80** représente la courbe de Wöhler expérimentale sens chaîne et le lissage par la fonction de Sendecykj modifiée. Les autres coefficients de la fonction de Sendecykj ont été déterminés une fois que la contrainte limite de fatigue « asymptotique » a été fixée. Nous avons choisi ce seuil en accord avec les données expérimentales, nous verrons dans le chapitre suivant une approche plus statistique d'approximation de ce seuil.

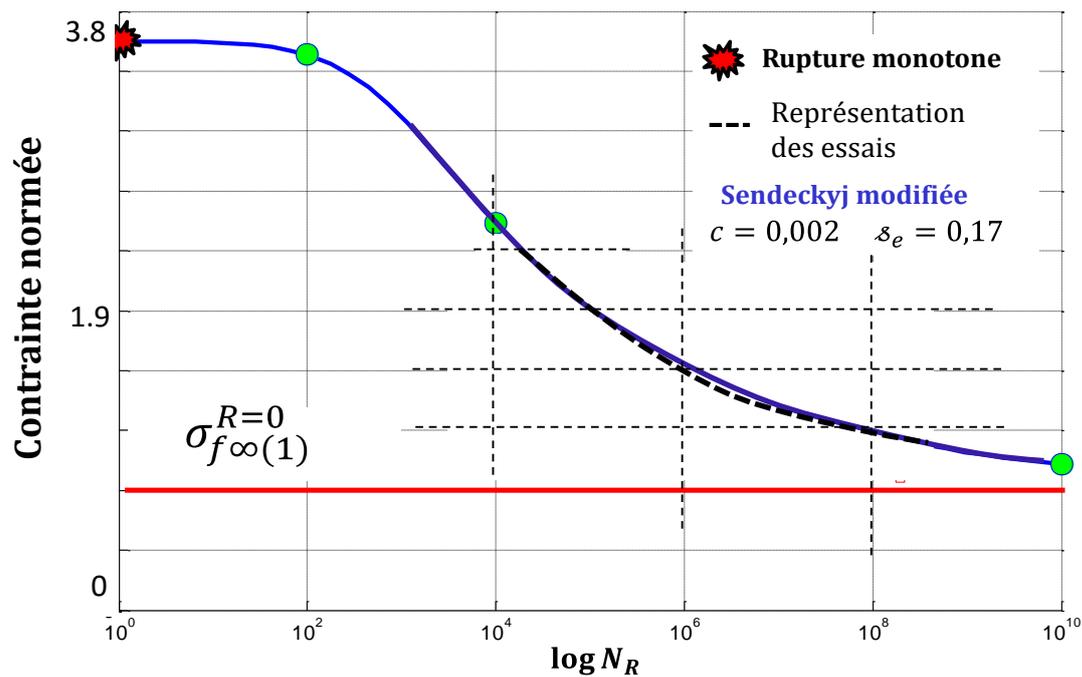


Figure 80 (annexe confidentielle): Courbe de Wöhler (sens chaîne, à 20°C, à $R_\sigma = 0,05$), lissage par la fonction Sendeckyj modifiée, détermination de la contrainte limite de fatigue « asymptotique »

ETAPE 2 : Détermination des paramètres m_{11} et m_{33} pondérant les effets de contrainte moyenne grâce au diagramme de Haigh « asymptotique ».

Nous avons dans la sous-partie (VI. 1) déterminé les diagrammes de Haigh, à l'aide donc :

- ✚ des contraintes ultimes de traction et de compression
- ✚ des modules d'Young
- ✚ des coefficients de Poisson
- ✚ des paramètres m_{kk}

Les trois premières grandeurs sont à *a priori* connues et déjà identifiées. Les paramètres m_{kk} sont déterminés de façon automatique, sur les diagrammes de Haigh grâce notamment aux équations de droites de l'enveloppe « asymptotique » (Figure 81). Le paramètre m_{11} est déduit de la pente dans le domaine Traction-Traction principalement de la surface limite bilinéaire (Figure 81 a)), tandis que le paramètre m_{33} est déduit de la pente dans le domaine Compression-Compression principalement de la surface limite bilinéaire (Figure 81 b)).

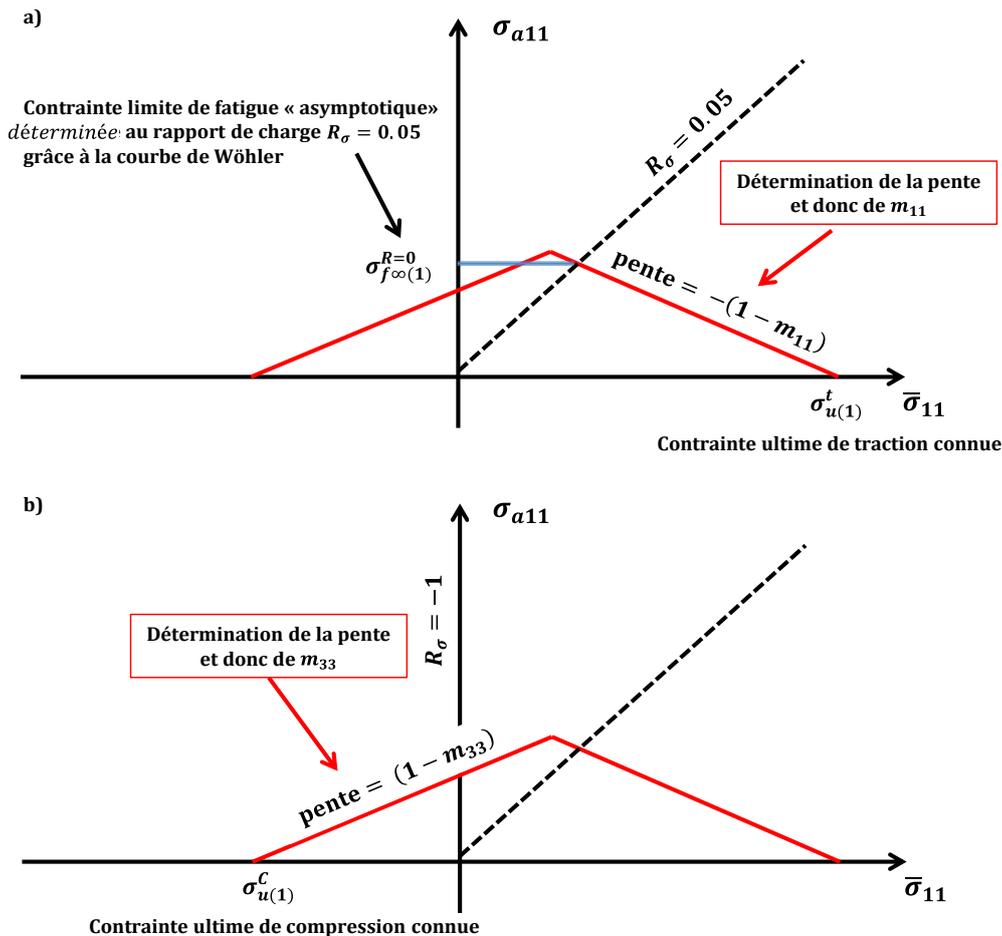


Figure 81 : détermination des paramètres m_{11} et m_{33} sur les diagrammes de Haigh

Les seuils d'endommagement en déformation qui interviennent directement dans les fonctions critères, $\varepsilon_{0(1)}^f$ et $\varepsilon_{0(3)}^f$, sont déterminés de façon automatique grâce aux équations ci-dessous (Eq. VI-12 et Eq. VI-13).

$$\varepsilon_{0(1)}^f = (1 - m_{11}) \frac{\sigma_{u(1)}^t}{E_1} \quad \text{Eq. VI-12}$$

Pour la limite de fatigue en déformation hors-plan $\varepsilon_{0(3)}^f$ (Eq. VI-13), nous calculons de la même manière en utilisant la fonction critère f_3 au point ($\sigma_{a11} = 0$; $\bar{\sigma}_{11} = \sigma_{u(1)}^c$).

$$\varepsilon_{0(3)}^f = -(1 - m_{33}) \frac{\sigma_{u(1)}^c}{E_1} \quad \text{Eq. VI-13}$$

ETAPE 3 : Calcul des paramètres $s_{f(1)}$ et $S_{f(1)}$ grâce à la courbe maîtresse (ou la courbe de Wöhler)

La courbe maîtresse permet de représenter les nombres de cycles à rupture en fonction des contraintes maximales des points expérimentaux paramétrés par le paramètre m_{11} , ici, de notre modèle. Ainsi, pour tous les rapports de charge confondus, si le paramètre m_{11} est bien identifié, les points expérimentaux sont tous regroupés. Cela permet alors de faire passer notre courbe du modèle au milieu des points et ainsi faciliter l'identification des paramètres $s_{f(1)}$ et $S_{f(1)}$. L'expression de cette courbe maîtresse est déterminée grâce à l'expression de la courbe de Wöhler exprimée en (Eq. VI-9). Il faut toutefois apporter une simplification à cette équation de

façon à pouvoir l'exploiter simplement pour notre courbe maîtresse. Nous considérons alors que l'expression du dénominateur $\left\langle \frac{(2R_\sigma - m_{11}(1+R_\sigma)) \langle \sigma_{11Max} \rangle_+}{(m_{11}) \sigma_{f\infty(1)}^{R=0}} - 1 \right\rangle_+^{s_{f(1)}+1}$ nulle. En effet, pour m_{11} fixé et déterminé dans l'étape précédente, nous constatons que la partie positive est toujours négative pour les rapports de charge compris entre $R_\sigma = 0$ et $R_\sigma = 0.7$. Cette hypothèse n'est pas fautive ici dans le sens que nous ne travaillons qu'avec des résultats d'essais pour les rapports de charge $R_\sigma = [0.05, 0.3, 0.5, 0.7]$. Ainsi, l'expression du nombre de cycles à rupture fonction de la contrainte maximale, que nous allons utiliser pour déterminer une expression de courbe maîtresse est donnée en (Eq. VI-14). Le paramètre A_1 reste inchangé (Eq. VI-10).

$$N_R = \frac{A_1}{\left\langle \frac{(2 - m_{11}(1 + R_\sigma)) \langle \sigma_{11Max} \rangle_+}{(2 - m_{11}) \sigma_{f\infty(1)}^{R=0}} - 1 \right\rangle_+^{s_{f(1)}+1}} \quad \text{Eq. VI-14}$$

L'équation Eq. VI-14 nous permet de déterminer facilement une équation de courbe U_{11Max} en fonction du nombre de cycles à rupture N_R . Elle fait apparaître d'un côté la contrainte maximale et les paramètres m_{11} , $\sigma_{f\infty(1)}^{R=0}$ et le rapport de charge R_σ . L'ensemble de cette expression est renommée U_{11Max} (Eq. VI-15). De l'autre côté de l'égalité apparaît le nombre de cycles à rupture et les paramètres $s_{f(1)}$ et A_1 (Eq. VI-16).

$$U_{11Max} = \frac{(2 - m_{11}(1 + R_\sigma)) \langle \sigma_{(11)Max} \rangle_+}{(2 - m_{11}) \sigma_{f\infty(1)}^{R=0}} \quad \text{Eq. VI-15}$$

et

$$U_{11Max} = \left[\left(\frac{A_1}{N_R} \right)^{\frac{1}{s_{f(1)}+1}} + 1 \right] \quad \text{Eq. VI-16}$$

La courbe maîtresse est donc la courbe représentant U_{11Max} (en ordonnée) en fonction du nombre de cycles à rupture N_R .

Pour chaque point d'essais, il nous est fourni la contrainte maximale de l'essai ainsi que le nombre de cycles à rupture atteint par l'échantillon. Pour chaque point, nous définissons un U_{11Max}^{exp} tel que $U_{11Max}^{exp} = \frac{(2 - m_{11}(1 + R_\sigma)) \sigma_{11Max}^{exp}}{(2 - m_{11}) \sigma_{f\infty(1)}^{R=0}}$ où σ_{11Max}^{exp} est la contrainte maximale expérimentale, unique pour chacun des points.

Ainsi, une fois le paramètre m_{11} déterminé (étape 2), il faut caler simultanément et de façon itérative le paramètre A_1 et le paramètre $s_{f(1)}$. Nous avons vu de quelle façon ils influençaient la position de la courbe dans la partie VI. 1. 3. Un exemple est donné en **Figure 82**, une fois les identifications réalisées. Les résultats d'essais sont représentés par des droites en pointillé. La figure avec les points expérimentaux est donnée en ANNEXE 1.

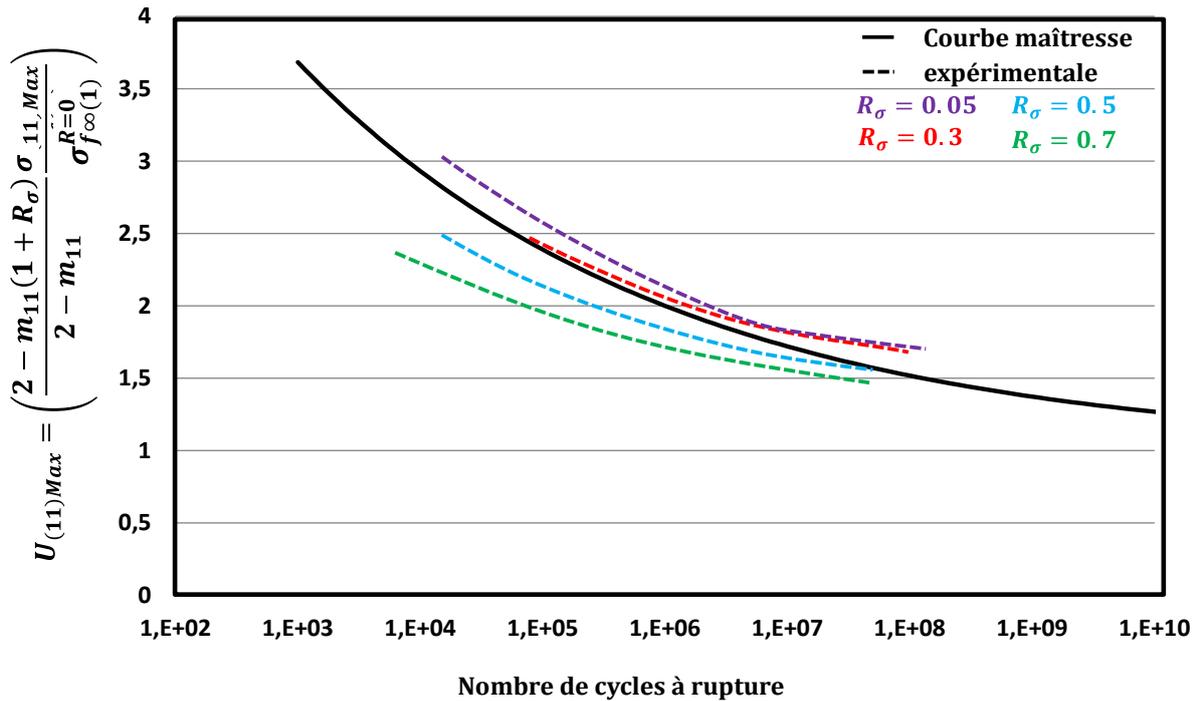


Figure 82 (annexe confidentielle): Courbe maîtresse (20°C), sens chaîne, pour quatre rapports de charge $R_\sigma = [0.05 ; 0.3 ; 0.5 ; 0.7]$

Une fois les deux paramètres A_1 et $s_{f(1)}$ déterminés, nous pouvons calculer le paramètre $S_{f(1)}$ de façon automatique (Eq. VI-17), car les autres paramètres ($d_{crit(1)}$, $d_{sat(1)}$, γ_1) peuvent être identifiés préalablement (leur détermination sera détaillée un peu plus loin).

$$S_{f(1)} = \left(\frac{A_1(1 - \gamma_1)\varepsilon_{0(1)}^{s_{f(1)} + 1}}{(s_{f(1)} + 1)(d_{sat(1)}^{1-\gamma_1} - (d_{sat(1)} - d_{crit(1)})^{1-\gamma_1})} \right)^{\frac{1}{s_{f(1)}}} \quad \text{Eq. VI-17}$$

Dans la réalité, il faut procéder pas à pas et faire quelques allers-retours entre la courbe de Wöhler et le diagramme de Haigh pour déterminer un jeu de paramètre optimal. Cela est notamment possible car le caractère relativement dispersé des résultats, permet de choisir plusieurs positions acceptables de la courbe de Wöhler et de l'enveloppe limite du diagramme de Haigh « asymptotique ».

VI. 2. 2. Compromis : le diagramme de Haigh sens chaîne conditionne celui sens trame

Nous avons vu la méthode pour construire les diagrammes de Haigh « asymptotique » sens chaîne. De la même manière, dans une approche simplifiée où le chargement appliqué est une sollicitation sens trame, $\varepsilon_{22}^e \geq 0$, $\varepsilon_{11}^e = -\nu_{21}\varepsilon_{22}^e$ et $\varepsilon_{33}^e = -\nu_{32}\varepsilon_{22}^e$ avec ν_{21} et ν_{31} les coefficients de Poisson, nous pouvons alors déterminer des équations de droites pour chacune des fonctions critères, pour chacun des domaines du diagramme de Haigh :

- (i) $\bar{\varepsilon}_{22}^e \geq 0$ et $\varepsilon_{22\text{Max}}^e \geq 0$: domaine Traction - Traction (T-T) et Traction-Compression (T-C)
- (ii) $\bar{\varepsilon}_{22}^e < 0$ et $\varepsilon_{22\text{Max}}^e \geq 0$: domaine Compression-Traction (C-T)

Les fonctions critères qui interviennent pour modéliser la durée de vie du matériau, sont f_2 et f_3 . Les équations de droite sont répertoriées dans le Tableau 6.

Sollicitation uniaxiale Sens Trame	Fonction critère f_2	Fonction critère f_3
Traction - Traction	$\sigma_{a22} = E_2 \varepsilon_{0(2)}^f - (1 - m_{22}) \bar{\sigma}_{22}$	-
Traction-Compression		$\sigma_{a22} = \frac{E_2 \varepsilon_{0(3)}^f}{\nu_{23}} + (1 - m_{33}) \bar{\sigma}_{22}$
Compression - Compression	-	

Tableau 6 : Equations de droite permettant de définir le diagramme de Haigh « asymptotique » sens trame (direction d'orthotropie $k=2$)

Le paramètre m_{22} est identifié de la même manière que m_{11} , mais pour un chargement appliqué selon la direction 2 (sens trame). Et ainsi, le seuil d'endommagement de fatigue en déformation sens trame $\varepsilon_{0(2)}^f$ est obtenu de façon automatique (Eq. VI-18) comme pour celui sens chaîne en faisant passer par le point ($\bar{\sigma} = \sigma_{u(2)}^t, \sigma_a = 0$) la partie linéaire à $R_\sigma > 0$,

$$\varepsilon_{0(2)}^f = (1 - m_{22}) \frac{\sigma_{u(2)}^t}{E_2} \quad \text{Eq. VI-18}$$

Par contre, le paramètre du hors-plan m_{33} , lui, a déjà été identifié par l'approche simplifiée sens chaîne. Nous ne pouvons donc pas modifier le paramètre m_{33} . Il en va de même pour le seuil de fatigue en déformation hors-plan $\varepsilon_{0(3)}^f$.

Néanmoins, pour proposer un diagramme de Haigh « asymptotique » sens trame conforme (dans la procédure) à celui proposé sens chaîne, nous pouvons jouer sur le coefficient de Poisson ν_{23} . En fait, les coefficients de Poisson sont *a priori* des paramètres « matériau » connus. Mais il est parfois compliqué de mesurer correctement certains paramètres, en cause les moyens de mesure. Ainsi, les coefficients de Poisson, qui ne sont pas toujours des grandeurs mesurées pour les composites tissés, sont calculés à l'aide du logiciel Wisetex développé à l'Université Catholique de Louvain [Lomov, 2000 ; Verpoest, 2005]. Il permet d'estimer les propriétés élastiques d'une cellule élémentaire uniquement à partir de la connaissance de la séquence de tissage et des propriétés des constituants. Même si les estimations faites par Wisetex sont relativement précises pour la plupart des coefficients du tenseur d'élasticité, la détermination des coefficients de Poisson reste très approximative. Il existe donc un degré de liberté pour modifier ces coefficients.

La Figure 83 représente de façon schématique le principe d'identification adopté.

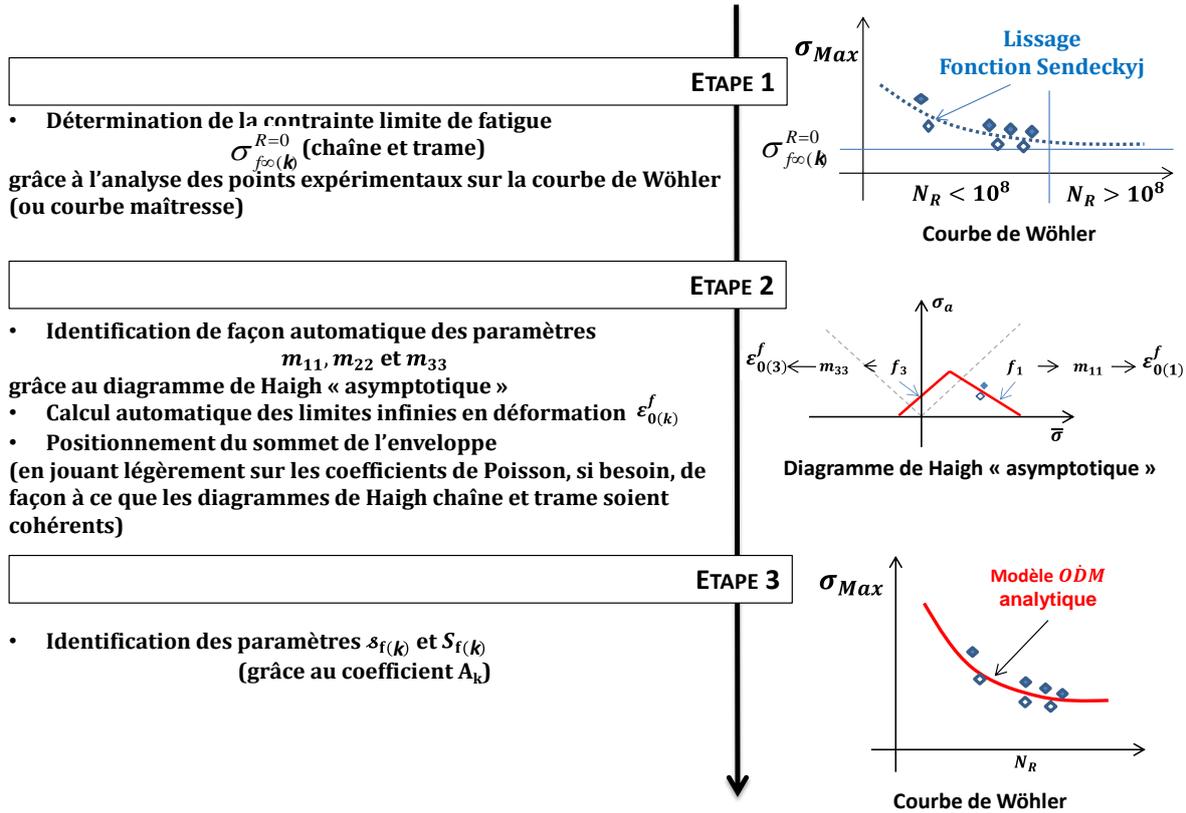


Figure 83 : Procédure générale d'identification des paramètres de fatigue

Bilan :

Nous avons présenté dans la partie VI. 1, la procédure pour calculer le diagramme de Haigh « asymptotique ». La clé et le point de départ de cette identification est le choix d'une forme bilinéaire du diagramme de Haigh. Les diagrammes sont également obtenus à partir des fonctions critères f_k écrites en déformations (élastiques) équivalentes de la moyenne de la composante du tenseur des déformations élastiques correspondant au mécanisme k en jeu, les moyennes étant pondérées par un coefficient m_{kk} , identifiés de façon automatique dans cette première approche, dans le cas où toutes les informations nécessaires sont disponibles. Quelle que soit la température d'étude, une procédure est ainsi établie de façon à construire des diagrammes de Haigh « asymptotique » qui permettent d'identifier tous les paramètres de la loi de fatigue, chaîne, trame et quelques-uns hors-plan. Enfin, les diagrammes de Haigh « asymptotique » sens trame sont en partie conditionnés par ceux sens chaîne. En effet les constructions des diagrammes dans les deux directions font appels aux mêmes jeux de coefficients hors-plan.

VI. 3. Identification en température

L'objectif maintenant est d'appliquer la démarche pour identifier nos paramètres à température ambiante, mais aussi à deux autres températures (-55°C et 95°C), afin d'être en mesure de proposer un modèle anisotherme, notamment en ayant déterminé l'évolution de chaque paramètre en fonction de la température. Nous présentons en détail l'identification des paramètres à température ambiante, pour les deux autres températures, nous ne rentrons pas autant dans les détails (le même méthode est utilisée pour ces deux températures).

a) Paramètres du monotone jouant un rôle sur ceux de fatigue à température ambiante

Nous avons vu que pour déterminer notamment le paramètre de fatigue $S_{f(k)}$ (paramètre jouant sur la cinétique de l'évolution de l'endommagement de fatigue), nous devons en amont avoir déterminé trois paramètres, dont deux qui interviennent dans la contribution «monotone» de la loi d'endommagement. L'exposant γ_k intervient seulement dans la contribution «de fatigue», par contre l'endommagement critique $d_{crit(k)}$ et l'endommagement à saturation $d_{sat(k)}$ interviennent dans les deux contributions (monotone et fatigue) de la loi d'endommagement. Concernant l'endommagement de saturation et l'exposant γ_k , ils sont identifiés grâce aux résultats d'essais expérimentaux, notamment par l'analyse des pertes de modules en fonction du nombre de cycles. A priori donc, un seul essai de fatigue suffit à identifier ces deux paramètres. Dans les travaux de [Rakotoarisoa, 2013] est décrite la méthode pour déterminer ces paramètres, l'endommagement de saturation est déterminé grâce aux modules endommagés \tilde{E}_k atteint aux très grands nombres de cycles. Nous appelons ici module endommagé saturé $\tilde{E}_{sat(k)}$ (Eq. VI-19) la direction principale k . La relation entre le module endommagé saturé, le module initial E_k^0 et l'endommagement saturé $d_{sat(k)}$ permet alors de déterminer la valeur de l'endommagement saturé correspondant.

$$\tilde{E}_{sat(k)} = \frac{E_k^0}{1 + d_{sat(k)}} \quad \text{Eq. VI-19}$$

L'exposant γ_k permet de décrire correctement les évolutions de pertes de modules, il est déterminé en calculant la pente lorsque que la perte de module devient élevée (Figure 84). Nous avons vu dans le Chapitre III (III. 2. 2), l'impact de l'exposant γ_k sur la cinétique de l'endommagement et sur la courbe de durée de vie.

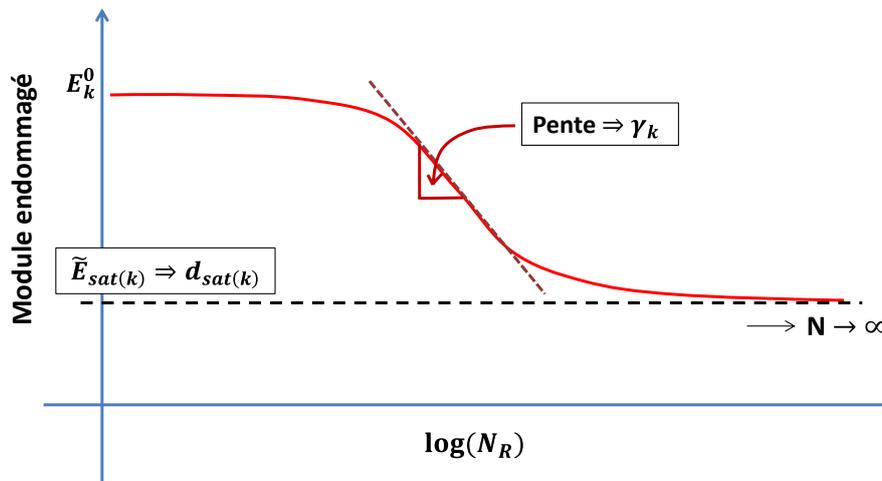


Figure 84 : Procédure d'identification de l'exposant γ_k et de l'endommagement à saturation $d_{(k)sat}$ grâce à la perte de module en fonction du nombre de cycles imposé

Pour ces deux paramètres, $d_{sat(k)}$ et γ_k , nous avons analysé des résultats expérimentaux (perte de module), pour différentes contraintes maximales de sollicitation et à diverses températures d'essais, pour savoir si ces paramètres ont une dépendance en température. Les essais à notre disposition se révèlent difficiles à exploiter et surtout, l'évolution du module en fonction du nombre de cycle a été réalisé sur très peu d'essais (en particulier sur aucun en température). Par manque de temps et de donnée, nous n'avons pas pu approfondir ce travail. Nous avons alors choisi de prendre les paramètres identifiés dans les travaux de [Rakotoarisoa, 2013].

Enfin, concernant l'endommagement critique $d_{crit(k)}$ (chaîne, trame et hors-plan), nous utilisons le modèle ODM-CMO en désactivant les déformations visqueuses et les déformations stockées. Nous déterminons l'endommagement critique comme étant celui atteint à la contrainte ultime de traction pour un chargement de traction monotone.

b) Paramètres de fatigue à température ambiante

A 20°C, comme nous l'avons dit, les résultats d'essais (sens chaîne) qui permettent une identification des paramètres à la fois sur le diagramme de Haigh « asymptotique » et sur la courbe maîtresse et courbe de Wöhler sont plus nombreux. Nous présentons les résultats sens chaîne uniquement. Les diagrammes de Haigh « asymptotique » sont normés par la contrainte ultime de traction correspondante.

PARAMETRES « SENS CHAINE » :

Nous l'avons vu, la contrainte limite de fatigue sens chaîne est déterminée grâce à l'interpolation des résultats expérimentaux par la fonction de Sendeckyj modifiée. Le diagramme de Haigh « asymptotique » est ensuite calculé et les paramètres m_{11} , m_{33} , $\epsilon_{0(1)}^f$ et $\epsilon_{0(3)}^f$ sont identifiés.

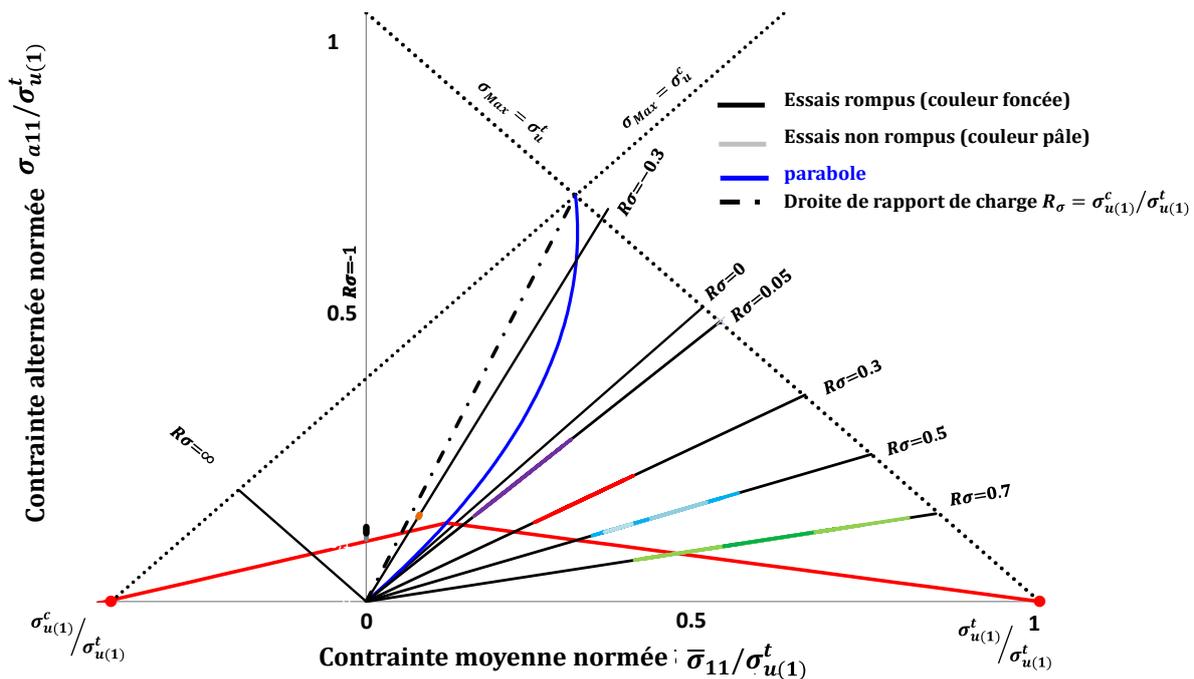


Figure 85 (annexe confidentielle): Diagramme de Haigh "asymptotique" normé (direction chaîne) à 20°C, à 10^8 cycles

La **Figure 85** représente le diagramme de Haigh « asymptotique » direction chaîne. Les droites passent par les contraintes ultimes de traction et compression. Les droites de couleur foncées ou pâles représentent respectivement les points rompus et non rompus à 10^8 cycles. L'enveloppe passe, au mieux, en dessous des points rompus.

Les paramètres $S_{f(1)}$ et $S_{f(1)}$ sont ensuite déterminés grâce à la courbe de Wöhler, ou plutôt la courbe maîtresse (puisque l'on a beaucoup de points expérimentaux à différents rapports de charge à cette température sens chaîne) (**Figure 82**).

De façon similaire, nous déterminons des diagrammes de Haigh « asymptotique » et des courbes de Wöhler correspondants, sens chaîne et sens trame, aux températures -55°C et 95°C.

VI. 4. Identification « anisotherme »

Nous faisons une distinction entre « identification en température » et « identification anisotherme ». L'identification en température consiste à déterminer des jeux de paramètres pour différentes températures, en l'occurrence ici deux autres températures, en suivant le protocole d'identification présenté en (VI. 2). Ce travail nous permet de mettre en évidence les évolutions de chacun des paramètres en fonction de la température. L'identification anisotherme consiste alors à, d'une part, déterminer les fonctions mathématiques représentant

ces évolutions, à savoir par exemple, linéaire, bilinéaire ou encore parabolique, et d'autre part, à mettre en place un protocole automatique qui, en modifiant les paramètres de ces fonctions (par exemple la pente d'une fonction linéaire), permet d'obtenir les meilleurs compromis sur l'ensemble des données disponibles (diagramme de Haigh et courbes de Wöhler). Ce travail est ici réalisé pour tous les paramètres énumérés ci-dessous avec indiqué le type de fonction pour décrire leur évolution. A noter que, pour tous les paramètres, nous avons fait en sorte de mettre davantage de poids sur l'identification à 20°C, ainsi toutes les fonctions passent par les valeurs des paramètres à 20°C. Nous notons $T^0 = 20^\circ\text{C}$.

Paramètre	Fonction d'évolution en fonction de la température
Modules d'Young	Linéaire
Coefficients de Poisson	Bilinéaire
Contraintes ultimes de traction et de compression	Linéaire
Contraintes limites infinies	Bilinéaire
Paramètres m_{kk}	Constant
Paramètres γ_k	Constant
Paramètres A_k	Bilinéaire
Paramètres s_k	constant

Grâce à ce travail, il est maintenant possible de générer de façon automatique des diagrammes de Haigh et des courbes de Wöhler, à différentes températures (comprises entre -100°C et 150°C) et ainsi de proposer un modèle d'endommagement anisotherme qui peut prendre en compte des sollicitations en température⁴. Un bémol tout de même, pour avoir plus de confiance sur le choix des fonctions (pour chacun des paramètres), il faudrait davantage de résultats d'essais pour un échantillon de températures plus varié (essais DMA⁵).

VI. 5. Reconstruction des diagrammes de Haigh et des courbes de Wöhler « anisothermes » – construction de courbes maîtresses

VI. 5. 1. Diagramme de Haigh

L'identification en température nous a permis de déterminer de nouveaux paramètres aux températures -55°C et 95°C. Nous proposons ici le diagramme de Haigh « asymptotique », direction chaîne uniquement, reconstruit. Les enveloppes correspondantes à chacune des températures sont représentées sur le même diagramme. Les axes sont normés par la contrainte ultime de traction propre à chacune des températures.

⁴ Il est à noter que même si nous n'avons pas utilisé cet aspect dans ce travail, le modèle ODM prend en compte les déformations d'origine thermique (dilatation)

⁵ L'analyse mécanique dynamique (AMD), ou spectrométrie mécanique dynamique, est une méthode de mesure de la viscoélasticité. Cette méthode d'analyse thermique permet l'étude et la caractérisation des propriétés mécaniques de matériaux viscoélastiques, tels les polymères.

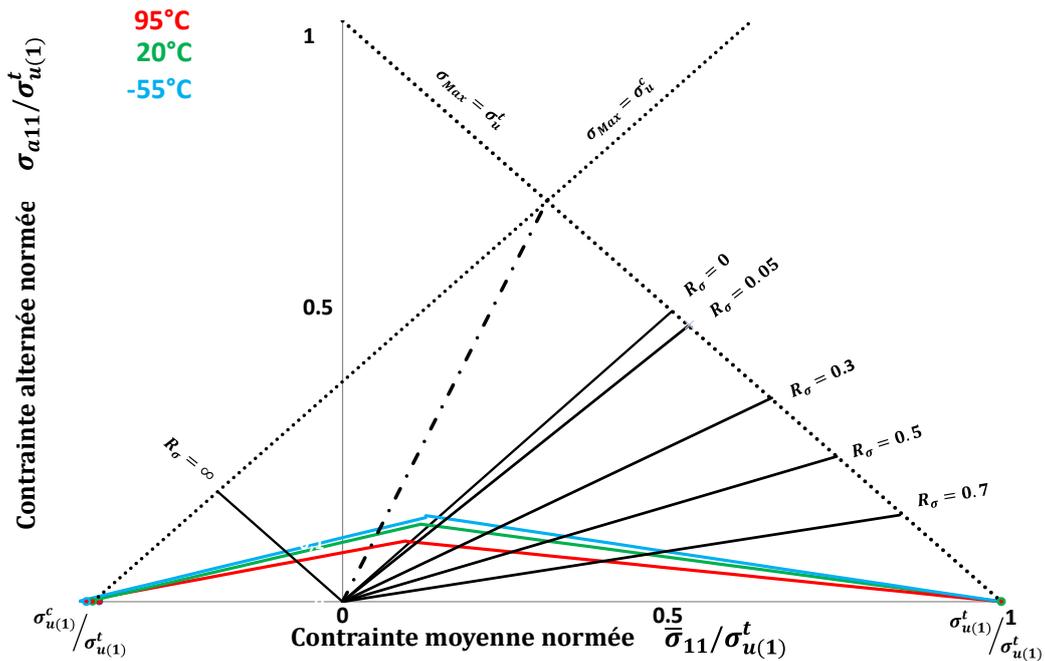


Figure 86 : Diagramme de Haigh "asymptotique" prévu par le modèle à trois températures (direction chaîne)

Nous remarquons que plus la température est élevée, plus le domaine où il n'y a pas d'endommagement de fatigue est petit. Autrement dit, le matériau s'endommage plus tôt en termes de niveau de contrainte, pour un nombre de cycles à rupture donné.

VI. 5. 2. Courbes de Wöhler

La tendance est confirmée sur les courbes de Wöhler, direction chaîne (Figure 87). Seules les courbes au rapport de charge $R_\sigma = 0.05$ sont présentées ici.

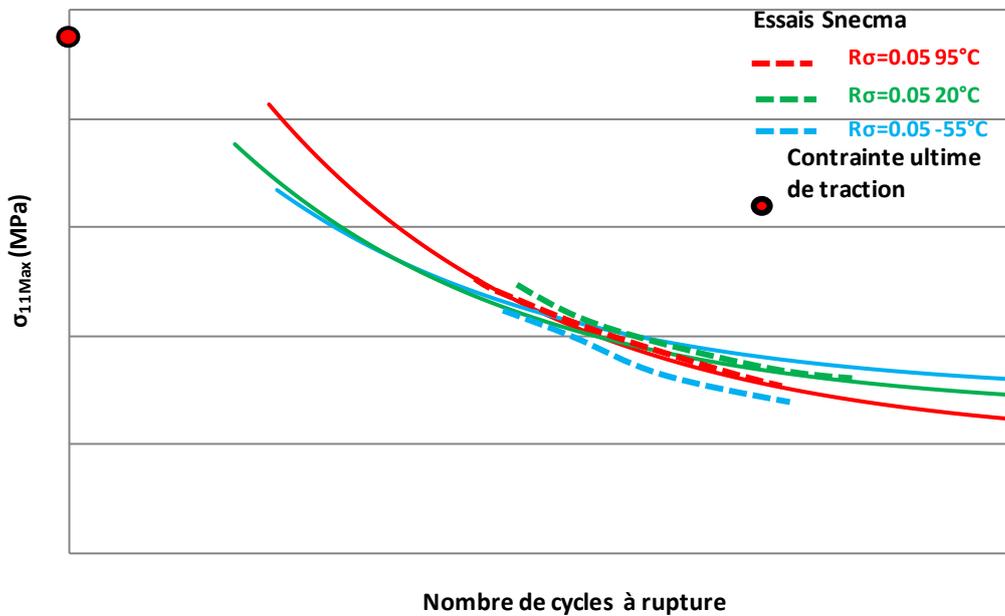


Figure 87 (annexe confidentielle): Courbes de Wöhler (direction chaîne) pour trois températures

Plus la température est élevée, plus le seuil d'endommagement est faible, et donc plus la durée de vie est petite. Nous remarquons tout de même un changement de tendance aux faibles nombres de cycles à rupture, ceci peut s'expliquer par la méthode d'identification des

paramètres qui s'est focalisé avant tout dans le domaine à grand nombre de cycles. Des essais supplémentaires aux faibles nombres de cycles à rupture seraient nécessaires.

VI. 6. Modèle 3D – Réajustement/Recalage des paramètres

Nous avons présenté dans le chapitre V une démarche d'identification des paramètres de la loi d'évolution des déformations résiduelles, et dans ce présent chapitre, partie (VI. 2), celle pour les paramètres de fatigue. Ces identifications ont été réalisées de façon analytique en faisant certaines hypothèses sur le modèle 3D. Nous avons appelé ces démarches, identification par « approche découplée⁶ ». On comprend alors aisément qu'une étape de « recalage » des paramètres est nécessaire pour l'utilisation du modèle complet 3D couplant élasticité et endommagement.

VI. 6. 1. Démarche générale d'identification des paramètres du modèle 3D

L'identification d'un modèle d'endommagement nécessite plusieurs étapes réalisées dans un ordre bien précis. Nous présentons ici la démarche générale d'identification des paramètres du modèle ODM. Notre démarche se différencie, d'une part, par l'utilisation des diagrammes de Haigh « asymptotique » et des courbes de Wöhler construits grâce à une « approche découplée » et, d'autre part, par l'identification des paramètres de la loi d'évolution des déformations résiduelles sur le modèle ODM-CMO initial complet. Cette méthode est relativement rapide et elle nous a permis de traiter rapidement l'identification des paramètres à d'autres températures. Notons toutefois que sans utilisation de ODM-CMO initial, la méthodologie d'identification requiert un nombre assez conséquent de résultats d'essais. Rappelons également, que les paramètres de la contribution « monotone » sont ceux du modèle ODM-CMO initial (du fait de l'équivalence totale entre les deux lois d'endommagement monotone Eq. I-16 et Eq. III-15). La Figure 88 représente de façon schématique le protocole d'identification du modèle ODM.

⁶ L'élasticité n'est pas couplée à l'endommagement, $\sigma = \mathbb{C}^0 : \varepsilon^e$.

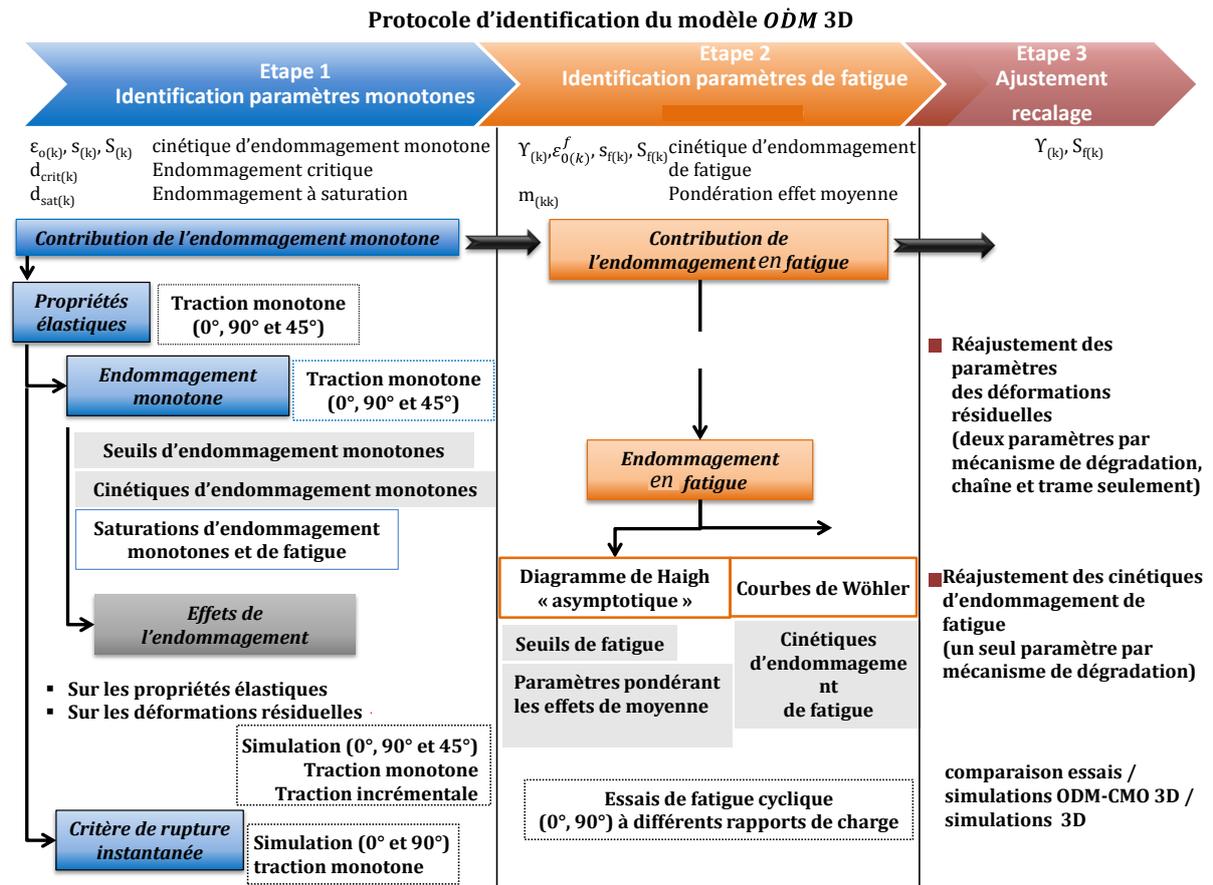


Figure 88 : Protocole d'identification des paramètres monotones et de fatigue du modèle ODM 3D (0° sens chaîne ; 90° sens trame)

Les paramètres de fatigue doivent être réajustés afin que le modèle 3D décrive correctement le comportement du matériau. En fait, l'idéal serait qu'il suffise d'ajuster un seul paramètre, par mécanisme d'endommagement. Il s'agit du paramètre $S_{f(k)}$ qui contrôle en partie la cinétique de l'endommagement. L'influence de ce paramètre sur les courbes de durée de vie est présentée sur la Figure 89.

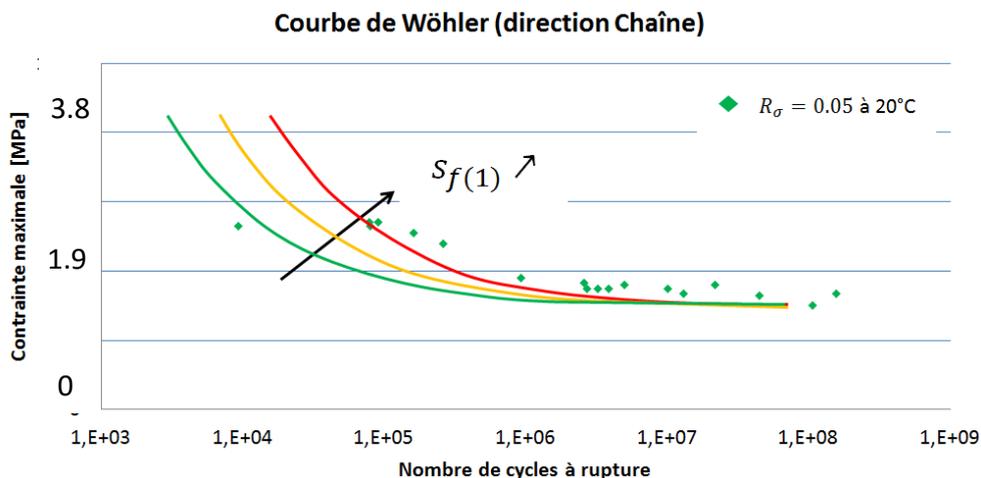


Figure 89 : Influence de $S_{f(k)}$ sur la modélisation de la durée de vie (cas sens chaîne)

Dans le domaine oligocyclique, plus le paramètre $S_{f(k)}$ est grand (tous les autres paramètres sont fixes), plus la durée de vie à une contrainte maximale donnée est grande (pour le mécanisme considéré). Par la suite, nous avons choisi de recalibrer deux paramètres.

VI. 6. 2. Recalage étape par étape

L'idée étant d'une part de venir modifier (augmenter ou diminuer) le paramètre d'endommagement $S_{f(k)}$. L'impact de cette modification se voit sur la courbe de Wöhler comme présenté sur la Figure 90. Soit le modèle prévoit une rupture trop tôt et donc il faut augmenter $S_{f(k)}$ de façon à ce que le résultat du modèle ODM couplé soit le plus proche de la courbe de Wöhler définie par notre analyse « découplée ». Inversement, soit le modèle prévoit une rupture trop tard et il faut alors diminuer $S_{f(k)}$.

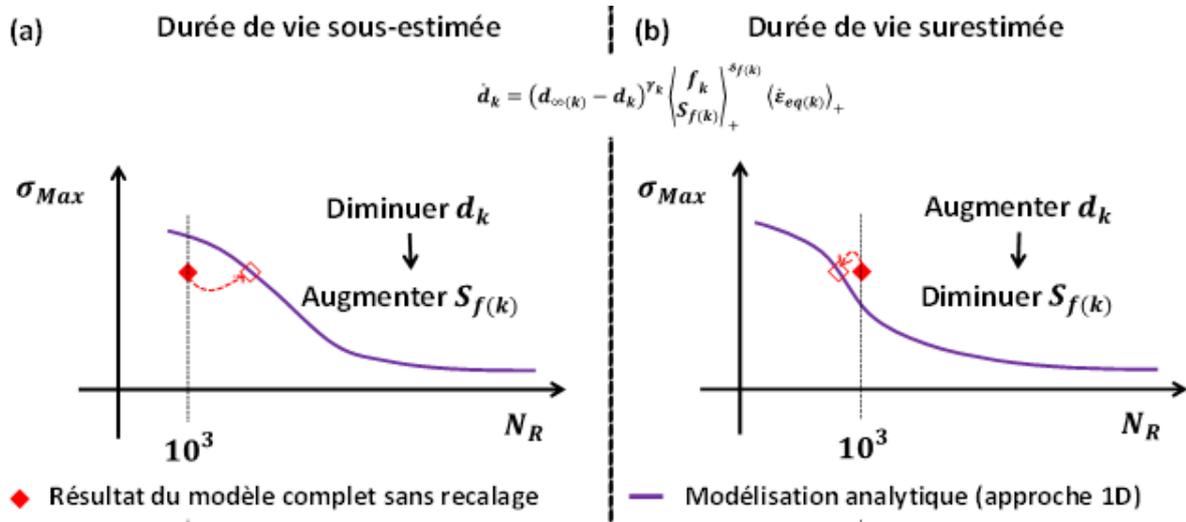


Figure 90 : Méthodologie à suivre, pour l'ajustement de $S_{f(k)}$, suivant que la durée de vie sans recalage est surestimée ou sous-estimée

Visiblement cette modification n'est pas suffisante. Nous comparons alors les évolutions des variables d'endommagement en fonction du temps pour une sollicitation cyclique (10^4 cycles). Cette stratégie implique plus de précision et demande de jouer simultanément sur les paramètres $S_{f(k)}$ et γ_k . Cette stratégie met certainement en avant les limites de l'identification basée sur l'approche « découplée ». Il se révèle difficile de superposer les cinétiques du modèle simplifié avec celles du modèle complet. Bien que les deux paramètres jouent sur la valeur de l'endommagement atteint à un nombre de cycles et sur la courbe de l'évolution de l'endommagement, le caractère non-linéaire de l'évolution de l'endommagement du modèle complet s'avère trop important, au-delà d'un certain nombre de cycles, et il est très difficile de la superposer à la cinétique du modèle simplifié. De l'expression analytique de la loi cyclique, nous déterminons une expression simple de l'endommagement (Eq. VI-20 pour $k=1$) à l'état $t + \Delta t$, en fonction de l'endommagement au temps t et des autres paramètres de la loi. La valeur initiale de l'endommagement $d_1 = d_1(t = 0)$ est égale à l'endommagement atteint à la fin de la première montée en charge (calculé par la contribution « monotone »).

$$d_{1(t+\Delta t)} = d_{sat(1)} - \left((d_{sat(1)} - d_1)^{1-\gamma_1} + \frac{(\gamma_1 - 1)S_{f(1)}}{(s_{f(1)} + 1)} \left[\left(\frac{\epsilon_{eq(11)Max} - m_{11}\bar{\epsilon}_{11}^e - \epsilon_{0(1)}^f}{S_{f(1)}} \right)_+^{s_{f(1)+1}} - \left(\frac{\epsilon_{eq(11)min} - m_{11}\bar{\epsilon}_{11}^e - \epsilon_{0(1)}^f}{S_{f(1)}} \right)_+^{s_{f(1)+1}} \right] \right)^{\frac{1}{1-\gamma_1}} \quad \text{Eq. VI-20}$$

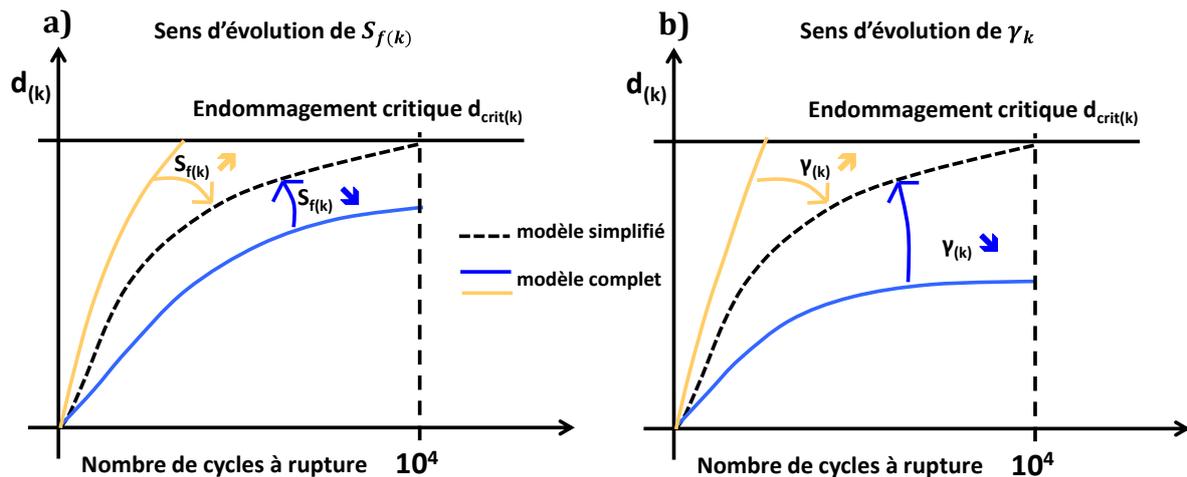


Figure 91 : Recalage des paramètres $S_{f(k)}$ et γ_k en regardant l'évolution de l'endommagement lors d'un chargement cyclique de fatigue

L'idée est donc de jouer simultanément sur les deux paramètres de façon à ce que les évolutions de l'endommagement se superposent le plus possible, comme schématisé sur la Figure 91 (a) et b)).

Les résultats de l'identification sont présentés dans l'annexe confidentielle.

La valeur des paramètres est donnée dans l'annexe confidentielle (ANNEXE 1).



Tableau 7 (annexe confidentielle): Paramètres identifiés du modèle

VI. 7. Conclusion

Dans ce chapitre, l'approche « découplée » (VI. 1. 1) du modèle 3D nous permet de déterminer les équations afin de construire les diagrammes de Haigh « asymptotiques » (VI. 1. 2) et les courbes de Wöhler (VI. 1. 3). Ces équations découlent de la contribution « de fatigue » de la loi d'endommagement temporelle intégrée pour des chargements cycliques. Les diagrammes de Haigh et les courbes de Wöhler sont alors obtenus de façon analytique et leurs calculs sont donc très rapides. L'hypothèse principale de l'approche « découplée » est de considérer que l'élasticité n'est pas couplée à l'endommagement. Cette approche, et les calculs qui en découlent, permettent de proposer une première identification des paramètres de fatigue.

Nous avons vu que dans la littérature, un grand nombre de travaux a été réalisé pour proposer divers diagrammes de Haigh généralement basés sur les travaux de [Gerber, 1874 ; Soderberg, et Goodman, 1899] et [Boller, 1954]. Concernant les composites, les travaux se sont visiblement focalisés sur les composites stratifiés. Le diagramme de Haigh que nous proposons ici a une forme bilinéaire. D'autres formes, plus complexes sont envisageables et ne sont pas présentées ici.

Les diagrammes de Haigh « asymptotiques », direction chaîne et direction trame, sont intimement liés par les paramètres m_{kk} , notamment m_{33} qui joue un rôle en compression, équivalent pour les sollicitations direction chaîne et direction trame. Une démarche de construction et donc d'identification est proposée dans le but de construire des diagrammes

cohérents dans les deux directions chaîne et trame. Des diagrammes de Haigh « asymptotique » peuvent être calculés dans la direction hors-plan, néanmoins le manque d'information expérimentale ne nous permet pas de traiter ce cas de façon approfondie.

En termes d'identification, un premier jeu de paramètre est obtenu pour trois températures, la température ambiante 20°C, une température basse -55°C et une température élevée 95°C. Dans le but de proposer un modèle d'endommagement 3D anisotherme, c'est-à-dire capable de prendre en compte des sollicitations thermomécaniques complexes, nous avons commencé à travailler sur d'éventuelles évolutions des variables du modèle en fonction de la température, dans les trois directions principales du matériau (VI. 4). Mais un manque de résultats expérimentaux à d'autres températures nous oblige à mettre en attente ces travaux. Nous avons tout de même reconstruit les diagrammes de Haigh et les courbes de Wöhler pour les trois températures (20°C, -55°C et 95°C). Au travers des identifications faites, nous avons conclu que plus la température est basse, plus la durée de vie modélisée est élevée.

La dernière étape (VI. 6) d'identification a consisté à recalculer puis valider les paramètres en utilisant le modèle *ODM* couplé complet, de façon numérique. Au travers des courbes de durée de vie, nous avons comparé les résultats d'identification analytique et numérique. Nous avons procédé au réajustement de deux paramètres de la loi d'évolution, en regardant à la fois les résultats donnés sur les courbes de Wöhler et sur l'évolution de l'endommagement en fonction du temps pour des sollicitations de fatigue.

CHAPITRE VII MODELE D'ENDOMMAGEMENT A LIMITE DE FATIGUE PROBABILISTE

Sommaire du chapitre VII

VII. 1. Démarche probabiliste	136
VII. 2. Loi de Weibull comme loi de probabilité	137
VII. 3. Estimation des paramètres probabilistes	138
VII. 3. 1. Méthode du maximum de vraisemblance.....	138
a) Jeu de données	138
b) Démarche d'identification du modèle probabiliste où seul $\epsilon_0(1)f$ est une variable aléatoire	139
VII. 4. Seuil d'endommagement de fatigue le plus vraisemblable	142
VII. 5. Conclusion.....	145

Dans ce qui suit sont présentés les résultats d'une première proposition pour introduire la notion de probabilités dans ODM afin de prendre en compte les différentes sources de variabilité ou d'incertitude. On peut distinguer, la variabilité lié au matériau, les incertitudes liées aux essais, la méconnaissance relative à un manque d'essais et enfin les erreurs de modèles. Nous nous intéressons ici essentiellement à la variabilité matériau qui se traduit par la dispersion des paramètres « matériau », et qui concerne les fibres et la résine. Ainsi, par exemple, la dispersion observée dans les mesures expérimentales de la contrainte ultime de traction statique (sens chaîne ou trame) est directement liée à la distribution statistique de la résistance des fibres, les modules d'Young dans les directions chaîne et trame au taux de fibres. Par ailleurs, la dispersion sur la résistance de la résine (souvent liée aux procédés eux-mêmes) engendre plutôt une variabilité sur l'évolution de l'endommagement (sa vitesse par exemple) ou encore sur le seuil de fatigue.

Nous disposons d'un modèle d'endommagement complexe décrivant les phénomènes physiques à l'origine de l'endommagement. Nous souhaitons intégrer à ce modèle un traitement probabiliste. Des différentes sources de variabilité présentées ci-dessus, nous ne retenons dans cette étude que la variabilité du seuil d'endommagement de fatigue, responsable des asymptotes des courbes de Wöhler. Cette grandeur ($\varepsilon_{0(1)}^f$) aura donc le statut de paramètre « caractéristique du matériau » dans les chapitres précédents, c'est sur lui que reposent nos hypothèses probabilistes, lui donnant le statut de variable aléatoire.

La démarche probabiliste mise en place dans ces travaux se fait, néanmoins, en plusieurs étapes. Après avoir isolé les sources de dispersion, nous déterminons laquelle sera intégrée au traitement probabiliste. Dans un souci de simplification, c'est sur la seule variable du seuil d'endommagement de fatigue en déformation que sera fait, comme annoncé, le traitement probabiliste. Nous suivrons simplement l'approche pragmatique proposée par Lemaitre pour les métaux détaillée dans [Lemaitre et Desmorat, 2005] et [Barbier, 2009]. Cette approche s'est avérée très efficace (une seule variable aléatoire) en fatigue à grand nombre de cycles. Soulignons dès à présent le fait que la contribution monotone du modèle ODM-CMO peut également être sujette à modélisation probabiliste [Kaminski et Leroy, 2013] que nous ne développerons pas ici. Ensuite, sont sélectionnées les hypothèses probabilistes qui seront appliquées sur la variable source. Le choix de la loi de probabilité sera réalisé à cette étape. Une fois la distribution choisie, il s'agit d'identifier les paramètres probabilistes de cette distribution (en complément des coefficients déterministes du modèle d'endommagement). Pour ce faire, une méthode d'estimation est choisie parmi celles disponibles dans la littérature.

VII. 1. Démarche probabiliste

Dans la mesure où l'identification de la plupart des paramètres des modèles numériques est faite sur des données expérimentales, il est important d'intégrer d'une manière ou d'une autre les notions d'incertitude et de confiance, par exemple sous la forme d'un encadrement des réponses. Un tel modèle numérique qui tiendrait compte des notions probabilistes (concernant les coefficients matériaux notamment) permettrait d'apporter une confiance supplémentaire dans la modélisation et donc à terme permettrait de réduire les coûts expérimentaux. De plus, l'emploi des matériaux composites se généralise dans tout le secteur aérospatial. Si ces matériaux permettent un gain en masse grâce à leurs excellentes propriétés mécaniques spécifiques, leur nature et le manque de recul résultant de leur utilisation encore récente n'est pas sans poser des problèmes aux industriels qui utilisent souvent des abattements successifs sur les propriétés afin de se couvrir la variabilité de ces matériaux. Il devient alors important d'augmenter la robustesse du dimensionnement de façon à pouvoir diminuer les différentes marges et coefficients de sécurité, exigés par les organismes de certifications aéronautiques, qui sont généralement bien plus élevés que dans le cas de matériaux métalliques. Dans ses travaux de thèse, [Rollet, 2007] explique les règles très strictes quant aux respects des marges de sécurité (JAR 25.303) ainsi que celles sur les réglementations sur la prise en compte des

incertitudes notamment (JAR 25.613) sur le choix des valeurs de résistance à rupture et des valeurs de dimensionnement suivant les principes statistiques de valeurs A ou B⁷.

Une autre manière de quantifier l'erreur, développée aussi dans ce chapitre, consiste à associer une probabilité de rupture (ou de survie) à la variable aléatoire choisie, ici le seuil d'endommagement de fatigue en déformation.

Bien qu'existante pour les matériaux métalliques, notre démarche semble précurseur pour les CMO tissés 3D. Elle conduit au final à déterminer une probabilité de rupture (associée à une valeur du seuil d'endommagement probabiliste) pour tout chargement, y compris aléatoire. A noter que dans ce chapitre, nous nous intéressons ici uniquement au mécanisme de dégradation sens chaîne en traction (mécanisme $k=1$, $d_k = d_1$). En effet, la qualité d'une analyse probabiliste dépend du nombre d'échantillons étudiés. Nous avons en notre possession un lot d'essais sens chaîne comportant 110 points, dont quatre rapports de charge représentés. Nous n'avons pas assez de résultats expérimentaux dans les deux autres directions pour envisager un traitement probabiliste similaire.

La variable aléatoire est le seuil d'endommagement en déformation de fatigue sens chaîne $\varepsilon_{0(1)}^f$.

Nous nous plaçons dans les mêmes conditions que pour la procédure d'identification des paramètres de fatigue (Chapitre VI), à savoir l'approche simplifiée pour laquelle l'évolution de l'élasticité ne tient pas compte de l'évolution de l'endommagement. Ce cadre, nous l'avons vu, nous permet de calculer une courbe maîtresse de façon analytique (VI. 2. 2), sur laquelle tous les essais à rapports de charge confondus sont représentés. Nous devons réécrire l'équation simplifiée de la courbe maîtresse (Eq. VI-15 et Eq. VI-16) en vue de notre étude probabiliste.

Si l'on souhaite un modèle probabiliste plus complet, il faut encore tenir compte de la dispersion des contraintes ultimes, des paramètres d'élasticité et de tout autre paramètre matériau. Par manque de temps et d'informations expérimentales (par exemple sur la dispersion des valeurs à rupture statique ou sur la variabilité observée des propriétés élastiques), nous ne faisons pas ces développements. Nous ne nous intéressons ici qu'au domaine HCF (High Cycle Fatigue) et à l'influence prépondérante de la valeur du seuil d'endommagement de fatigue en déformation sur les courbes de durée de vie.

VII. 2. Loi de Weibull comme loi de probabilité

Pour mener à bien notre étude probabiliste liée au seuil d'endommagement de fatigue en déformation, nous devons choisir une distribution qui représente le mieux les résultats que nous avons. Des distributions, il en existe beaucoup. Etant donné que nous n'avons aucune mesure expérimentale directe du seuil d'endommagement en déformation, nous ne pouvons pas utiliser de tests statistiques (test d'Anderson - Darling ou test de Kolmogorov - Smirnov par exemple) qui permettraient d'écarter telle ou telle loi de probabilité. Ainsi, nous avons choisi de nous intéresser à une distribution en particulier : la loi de Weibull à deux paramètres. C'est celle qui nous a semblé la plus représentative des résultats d'essais.

La densité de probabilité et la fonction de répartition sont respectivement :

$$P_{dens} = \frac{dP_{cum}}{d\varepsilon_{0(1)}^f} = \frac{w}{\varepsilon_0} \left(\frac{\varepsilon_{0(1)}^f}{\varepsilon_0} \right)^{w-1} e^{-\left(\frac{\varepsilon_{0(1)}^f}{\varepsilon_0} \right)^w} \quad \text{Eq. VII-1}$$

$$P_{cum} = 1 - e^{-\left(\frac{\varepsilon_{0(1)}^f}{\varepsilon_0} \right)^w} \quad \text{Eq. VII-2}$$

⁷ Les valeurs A (respectivement les valeurs B) sont les valeurs d'une propriété (par exemple la contrainte à rupture sens chaîne du matériau) pour laquelle 99% (respectivement 90%) des mesures soient supérieures (ou inférieures) à cette valeur avec une confiance de 95%

La variable aléatoire est le seuil d'endommagement de fatigue $\varepsilon_{0(k)}^f = \varepsilon_{0(1)}^f$, le paramètre d'échelle est noté ε_0 et le paramètre de forme (ou module de Weibull) est w .

VII. 3. Estimation des paramètres probabilistes

Pour la loi de Weibull, le paramètre de forme w et le paramètre d'échelle ε_0 peuvent être déterminés de différentes manières. Nous avons choisi pour ce qui suit, la méthode du maximum de vraisemblance.

VII. 3. 1. Méthode du maximum de vraisemblance

Pour l'échantillon à notre disposition, la vraisemblance de la loi de Weibull à deux paramètres est la probabilité donnée à cet échantillon pour la densité de la loi de Weibull de paramètres w et ε_0 . Les estimateurs de maximum de vraisemblance [Fisher, 1922] sont les valeurs des paramètres qui maximisent la vraisemblance V de l'échantillon statistique (Eq. VII-10 et Eq. VII-11).

Nous voulons déterminer le seuil d'endommagement de fatigue en déformation le plus vraisemblable en comparant les maximums de vraisemblance pour différents seuils d'endommagement de fatigue mesurés à l'étape 1 de la procédure détaillée ci-après.

a) Jeu de données

Nous avons à disposition un lot d'essais expérimentaux, sens chaîne, pour quatre rapports de charge $R_\sigma = [0.05, 0.3, 0.5, 0.7]$. Le lot d'essais est nommé « 1-2 » et comporte 110 données (pour les rapports de charge $R_\sigma = [0.05, 0.3, 0.5, 0.7]$) (Figure 92).

Une définition équivalente à la courbe maîtresse (Eq. VI-15 et Eq. VI-16) obtenue au Chapitre VI doit être tout d'abord établie en faisant explicitement apparaître la grandeur seuil $\varepsilon_{0(1)}^f$. Nous avons :

$$U_{(11)Max} = \frac{(2 - m_{11}(1 + R_\sigma)) \sigma_{(11)Max}}{(2 - m_{11}) \sigma_{f\infty(1)}^{R=0}} = \left(1 - \frac{m_{11}}{2}(1 + R_\sigma)\right) \frac{\sigma_{(11)Max}}{E_1 \varepsilon_{0(1)}^f} \quad \text{Eq. VII-3}$$

$$U_{(11)Max} = 1 + \left(\frac{A_1}{N_R}\right)^{\frac{1}{s_{f(1)}+1}} = 1 + \frac{1}{\varepsilon_{0(1)}^f} \left(\frac{B_1}{N_R}\right)^{\frac{1}{s_{f(1)}+1}} \quad \text{Eq. VII-4}$$

$$B_1 = A_1 \left(\varepsilon_{0(1)}^f\right)^{1+s_{f(1)}} \quad \text{Eq. VII-5}$$

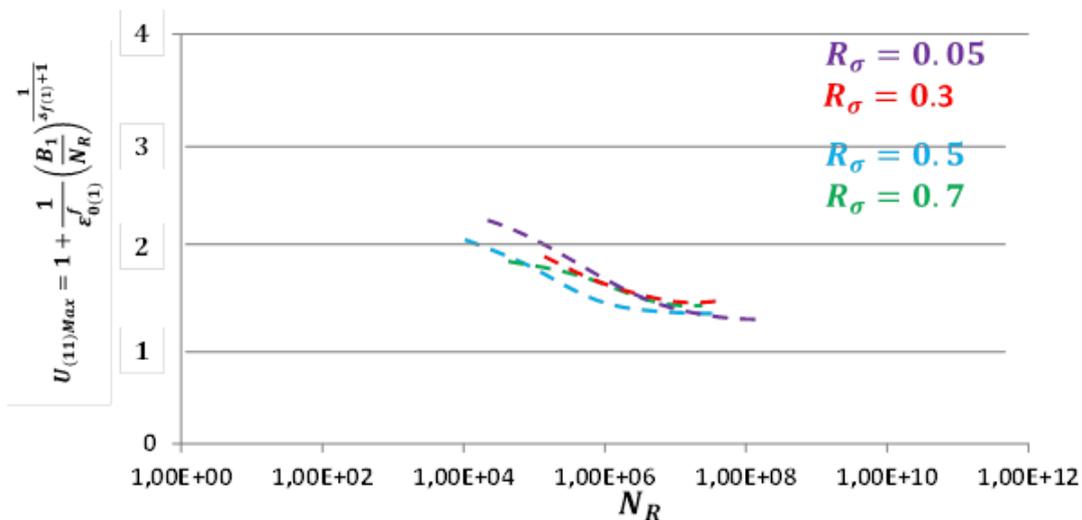


Figure 92 (annexe confidentielle): Représentation du lot « 1-2 » sur la courbe maîtresse

Nous rappelons l'expression de la limite de fatigue « asymptotique » $\sigma_{f\infty(1)}^{R=0}$ dans le cas particulier du rapport de charge nul, lié au seuil de fatigue en déformation $\varepsilon_{0(1)}^f$ et au paramètre m_{11} (Eq. VII-6).

$$\sigma_{f\infty(1)}^{R=0} = \frac{E_1 \varepsilon_{0(1)}^f}{1 - \frac{1}{2} m_{11}} \quad \text{Eq. VII-6}$$

b) Démarche d'identification du modèle probabiliste où seul $\varepsilon_{0(1)}^f$ est une variable aléatoire

La démarche comporte plusieurs étapes, décrites ci-dessous et représenté de façon schématique sur la Figure 93.

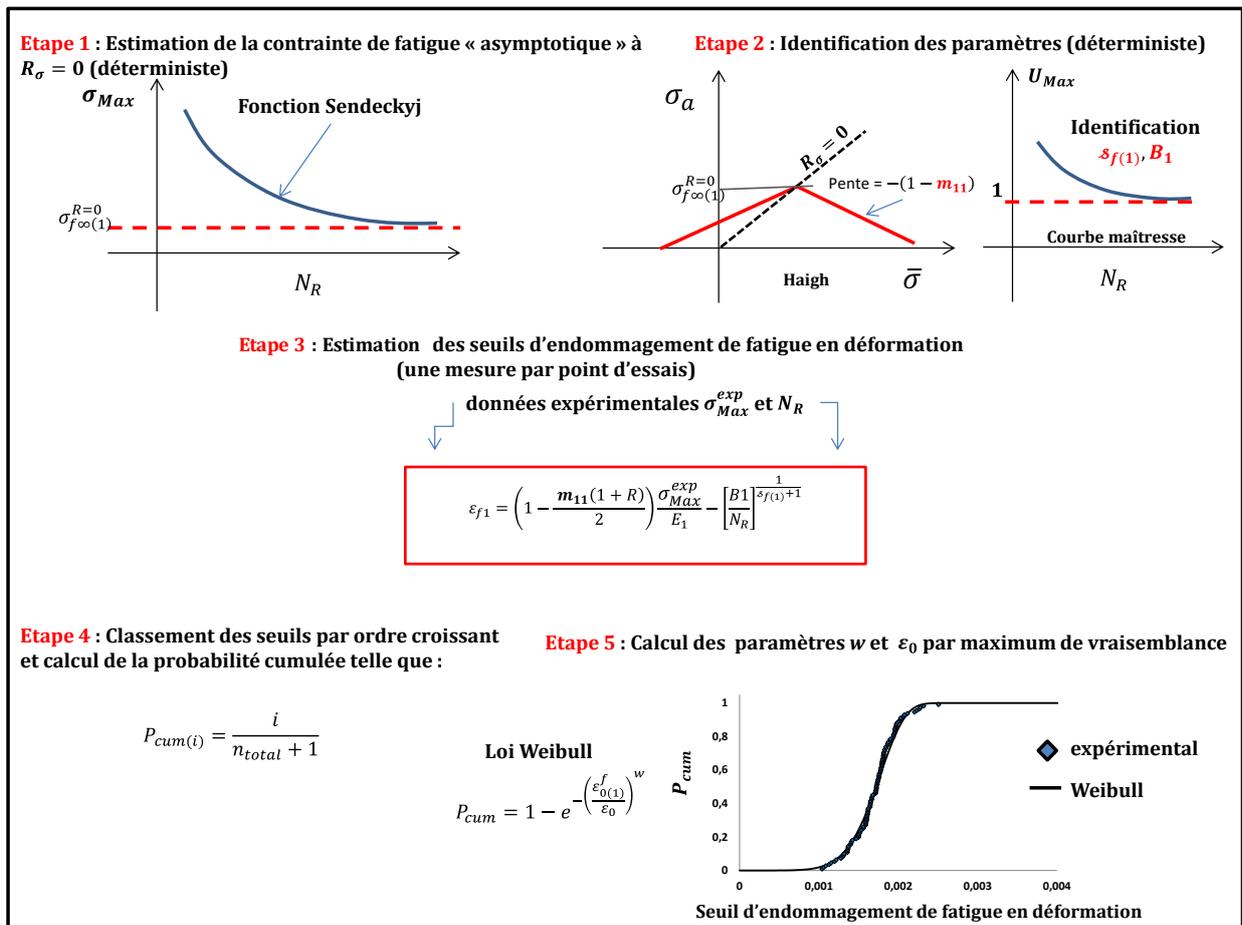


Figure 93 : Etapes de la démarche pour trouver le seuil de fatigue le plus vraisemblable

1. Etape 1 : Estimation de la limite de fatigue « asymptotique » à $R=0$ (déterministe)

L'analyse purement expérimentale des données « asymptotique » à un rapport de charge proche de zéro (ici $R_\sigma = 0.05$) nous permet d'estimer la limite de fatigue « asymptotique » $\sigma_{f\infty(1)}^{R=0}$ à $R_\sigma = 0$. Nous utilisons la fonction Sendeckyj modifiée (Chapitre II) pour lisser les résultats expérimentaux et nous aider à déterminer la limite de fatigue « asymptotique » en contrainte. Rappelons qu'elle est liée à la variable aléatoire $\varepsilon_{0(1)}^f$. Il s'agit ici donc d'une estimation (entachée d'une incertitude) de sa valeur « la plus probable ».

2. Etape 2 : Identification des paramètres (déterministe)

La seconde étape consiste à identifier les paramètres de fatigue, tout d'abord le paramètre m_{11} en utilisant le diagramme de Haigh. Le paramètre m_{11} est considéré ici comme une estimation en lien par l'Eq. VII-6 avec la limite de fatigue $\sigma_{f\infty(1)}^{R=0}$ retenue à l'étape 1. La courbe maîtresse permet ensuite d'identifier les paramètres B_1 (Eq. VII-5) et l'exposant $s_{f(1)}$. Remarque : le groupement de paramètres B_1 (contrairement à A_1) n'est pas dépendant du seuil d'endommagement en déformation. Nous terminons cette étape en cherchant une meilleure estimation du paramètre déterministe m_{11} en diminuant la dispersion des points sur la courbe maîtresse (Figure 92).

3. Etape 3 : Estimation des seuils d'endommagement de fatigue en déformation

La troisième étape consiste, pour chaque donnée expérimentale, à déterminer le seuil d'endommagement de fatigue en déformation, noté $\varepsilon_{0(1)}^{f(\text{exp})}$ (Eq. VII-7), à partir de (Eq. VII-4) de la courbe maîtresse (une estimation, entachée d'incertitude pour chaque point d'essai).

$$\varepsilon_{0(1)}^{f(\text{exp})} = \left(1 - \frac{m_{11}(1 + R_\sigma)}{2}\right) \frac{\sigma_{Max}^{exp}}{E_1} - \left[\frac{B_1}{N_R}\right]^{\frac{1}{s_{f(1)}+1}} \quad \text{Eq. VII-7}$$

L'étape 3 consiste en fait à calculer les valeurs prises $\varepsilon_{0(1)}^{f(\text{exp})}(P_{cum})$ par la variable aléatoire $\varepsilon_{0(1)}^f$, mais à ce stade les valeurs correspondantes des probabilités cumulées P_{cum} ne sont pas encore connues (voir étape suivante).

4. Etape 4 : classement des seuils par ordre croissant

La quatrième étape consiste à classer les seuils de fatigue en déformation expérimentaux (étape 3) par ordre croissant, un numéro leur est attribué de 1 au nombre total de valeurs n_{total} , puis nous mesurons la probabilité cumulée comme étant le rapport du numéro attribué i de l'essai par rapport au nombre total n_{total} plus 1 (Eq. VII-8).

$$P_{cum(i)} = \frac{i}{n_{total} + 1} \quad \text{Eq. VII-8}$$

Nous pouvons alors tracer la probabilité cumulée (estimée) en fonction de la valeur de la variable aléatoire, seuil de fatigue en déformation (Figure 94).

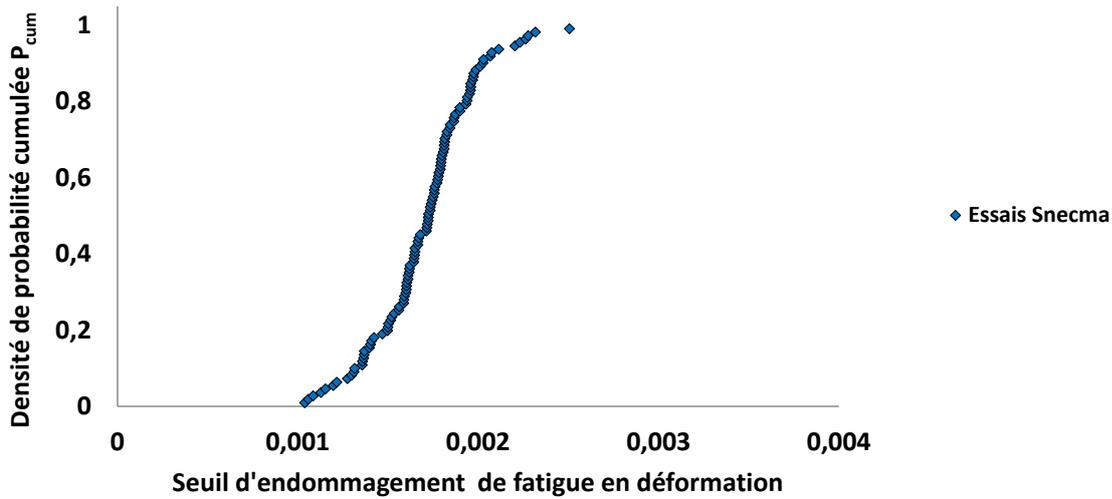


Figure 94 : Probabilité cumulée (résultats expérimentaux)

5. Etape 5 : calcul des paramètres w et ε_0 par maximum de vraisemblance

L'étape suivante consiste à calculer l'estimateur de vraisemblance V , et d'en déduire par maximisation les paramètres de la loi de Weibull, à savoir w et ε_0 . Une fois les paramètres de Weibull calculés et optimisés par maximum de vraisemblance, nous pouvons tracer la probabilité cumulée P_{cum} de la loi de Weibull (Eq. VII-9) et la comparer à celle expérimentale (Figure 95).

$$P_{cum} = 1 - e^{-\left(\frac{\varepsilon_0^f(1)}{\varepsilon_0}\right)^w} \quad \text{Eq. VII-9}$$

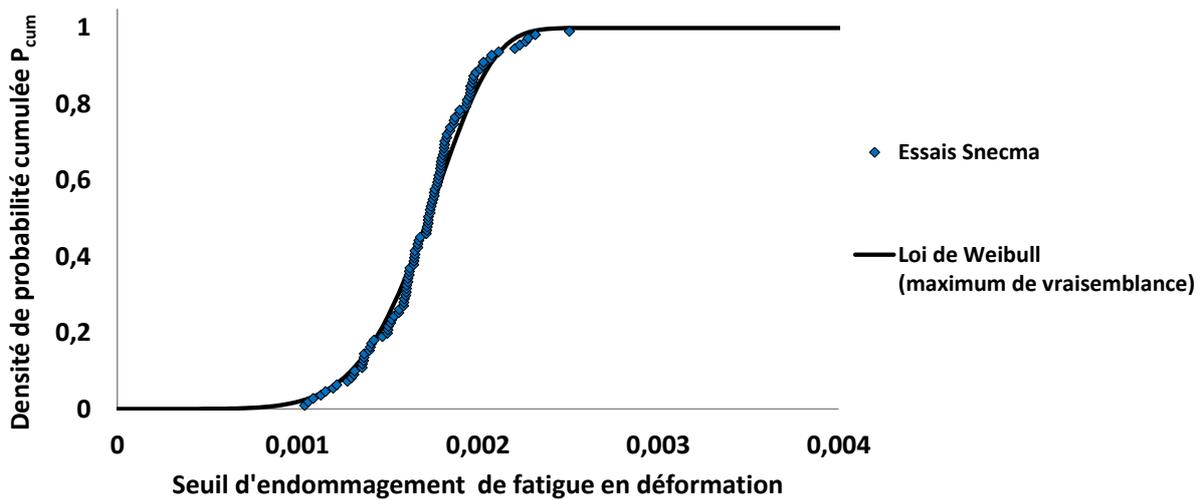


Figure 95 : Loi de probabilité cumulée identifiée pour $\sigma_{f\infty(1)}^{R=0}$ mesuré à l'étape 1 (en noir); points issus des mesures de l'étape 4 (en bleu)

Pour calculer le maximum de vraisemblance, nous calculons la densité de probabilité $P_{dens(i)}$ de la loi de Weibull de chaque donnée « i » (Eq. VII-10), nous faisons le produit des densités de probabilité (Eq. VII-11).

$$P_{dens(i)} = \frac{w}{\varepsilon_0} \left(\frac{\varepsilon_{0(1)i}^{f(exp)}}{\varepsilon_0} \right)^{w-1} e^{-\left(\frac{\varepsilon_{0(1)i}^{f(exp)}}{\varepsilon_0} \right)^w} \quad \text{Eq. VII-10}$$

$$V = \prod_{i=1}^n P_{dens(i)} \quad \text{Eq. VII-11}$$

L'analyse probabiliste proposée consiste simplement à remplacer la valeur du paramètre déterministe $\varepsilon_{0(1)}^f$ par une variable aléatoire de loi de probabilité de Weibull de paramètre de forme w et de paramètre d'échelle ε_0 . A chaque calcul fait avec $\varepsilon_{0(1)}^f = \varepsilon_{0(1)}^f(Pcum)$, nous pouvons associer une probabilité cumulée de rupture $Pcum$, y compris lorsque les chargements sont complexes.

La démarche d'identification complète (étape 1 à 5) peut avantageusement être rendue itérative en considérant d'autres valeurs estimées à l'étape 1 pour $\sigma_{f\infty(1)}^{R=0}$, de manière similaire à l'approche bouclée Expectation-Maximisation (algorithme EM).

VII. 4. Seuil d'endommagement de fatigue le plus vraisemblable

Lorsqu'elle est menée de manière non itérative, l'identification décrite ci-dessus est très dépendante de la valeur de la limite de fatigue à $R=0$, $\sigma_{f\infty(1)}^{R=0}$, mesurée lors de l'étape 1. Nous avons recommencé le travail d'identification (étape 1 à 5) pour d'autres valeurs de contrainte limite de fatigue « asymptotique » $\sigma_{f\infty(1)}^{R=0}$ initiale. Nous avons calculé le maximum de vraisemblance pour chaque valeur initiale de $\sigma_{f\infty(1)}^{R=0}$. Nous traçons ensuite les maximums de vraisemblance obtenus en fonction du choix fait pour cette limite de fatigue « asymptotique » initiale.

Un choix de $\sigma_{f\infty(1)}^{R=0}$ semble être plus vraisemblable que les autres. La **Figure 96** montre les maximums de vraisemblance en fonction des limites de fatigue « asymptotique ».

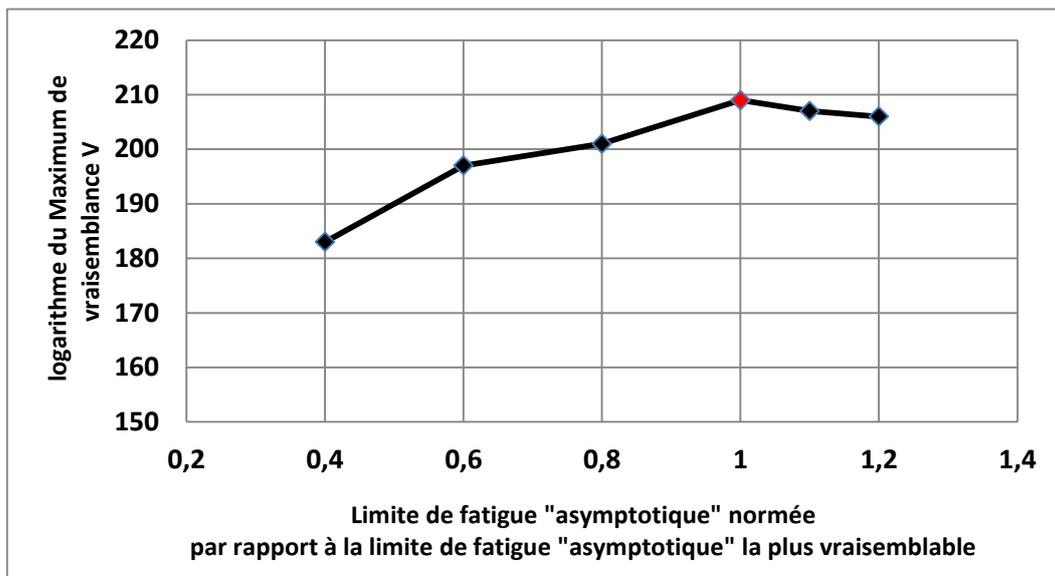


Figure 96 (annexe confidentielle): Logarithme de la vraisemblance en fonction de la limite de fatigue « asymptotique » à $R=0$ mesurée à l'étape 1

Le maximum maximorum de vraisemblance est atteint pour une valeur de $\sigma_{f\infty(1)}^{R=0}$. Au vu de l'approche probabiliste simplifiée, pragmatique, présentée, il est vraisemblable que la limite de fatigue du CMO tissé 3D soit non nulle (ici pour des tractions/compressions suivant la direction $k=1$). Précisons que ce résultat est lié aux choix de modélisation faits :

- au choix du modèle d'endommagement lui-même (incluant un diagramme de Haigh bilinéaire),
- au fait de faire porter toute l'incertitude sur le seuil d'endommagement de fatigue en déformation $\varepsilon_{0(1)}^f$ (considéré comme la seule variable aléatoire),
- au choix d'une densité de probabilité Weibullienne,
- au choix de la méthodologie d'identification des divers paramètres.

Afin d'illustrer les résultats obtenus pour le choix le plus vraisemblable de $\sigma_{f\infty(1)}^{R=0}$, la **Figure 97** représente la courbe de Wöhler et ses quantiles pour la limite de fatigue « asymptotique » la plus vraisemblable. Les abscisses représentent la contrainte maximale normée par la limite de fatigue « asymptotique » la plus vraisemblable. Les essais expérimentaux sont représentés par une courbe en pointillés. Les courbes de Wöhler et leurs quantiles sont représentés pour les quatre rapports de charge étudiés. Les résultats paraissent corrects puisque les points expérimentaux ne dépassent pas les quantiles extrêmes ($P_{cum} = 0.05$ et $P_{cum} = 0.95$), ils se trouvent même proche du quantile à $P_{cum} = 0.5$.

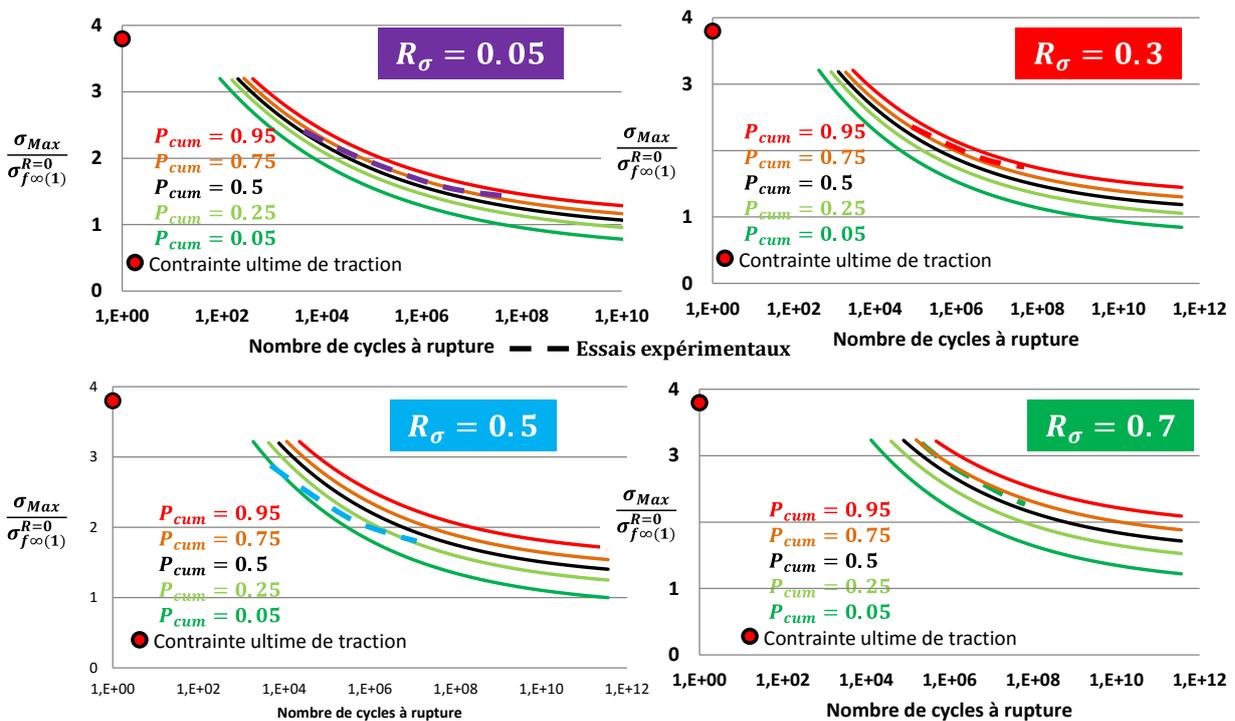


Figure 97 (annexe confidentielle): Quantiles des courbes de Wöhler pour les quatre rapports de charge

Les quantiles du diagramme de Haigh (**Figure 98**) à Iso-durée de vie ($N_R = 10^8$ cycles) montrent que la quasi-totalité des données expérimentales se trouve au dessus du quantile à $P_{cum} = 0.5$.

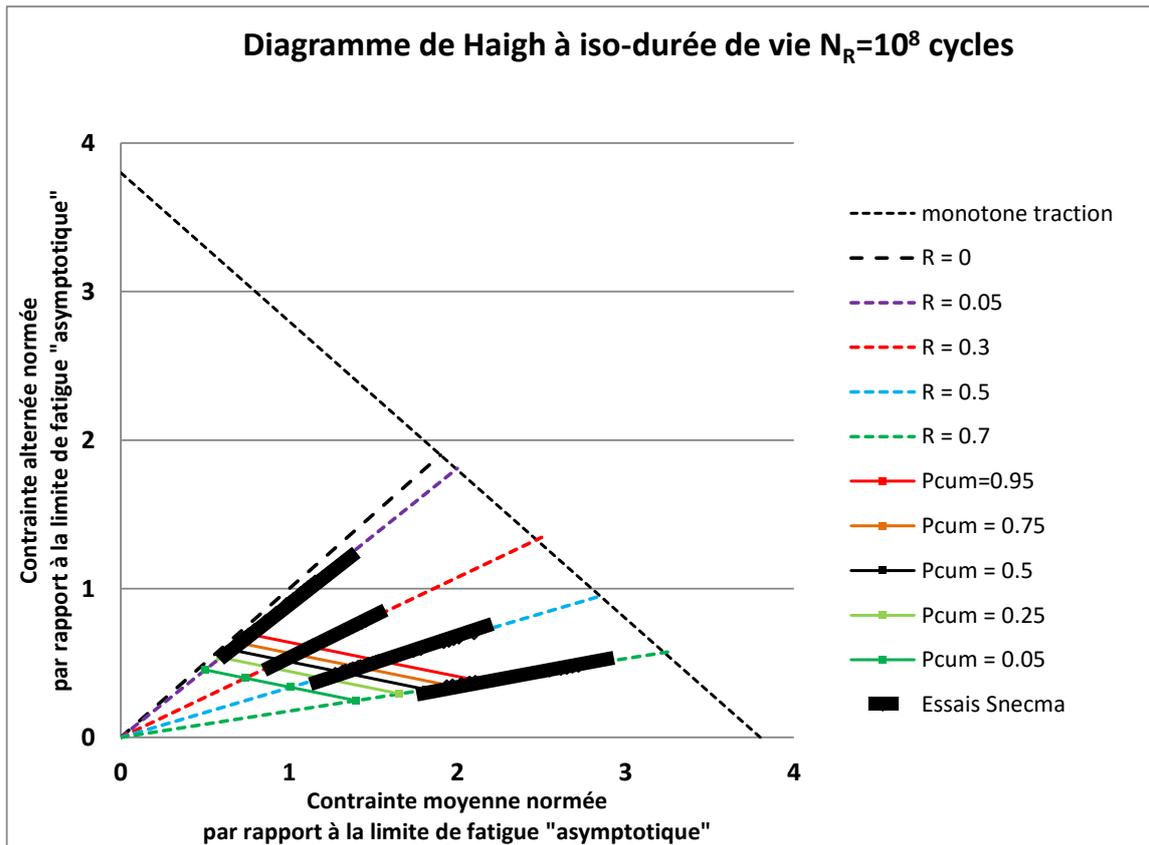


Figure 98 (annexe confidentielle): Quantiles du diagramme de Haigh à Iso-durée de vie ($N_R=10^8$ cycles) ; données expérimentales Snecma (en noir)

Nous sommes en mesure de calculer des chargements complexes et donner les évolutions de l'endommagement pour lesquels le seuil d'endommagement de fatigue en déformation correspond à un quantile associé à une probabilité de survie (ou de rupture). C'est ce que représente la Figure 99. Plus le seuil diminue, plus l'endommagement calculé est élevé et ainsi plus la probabilité de survie est petite (et donc la probabilité de rupture est grande).

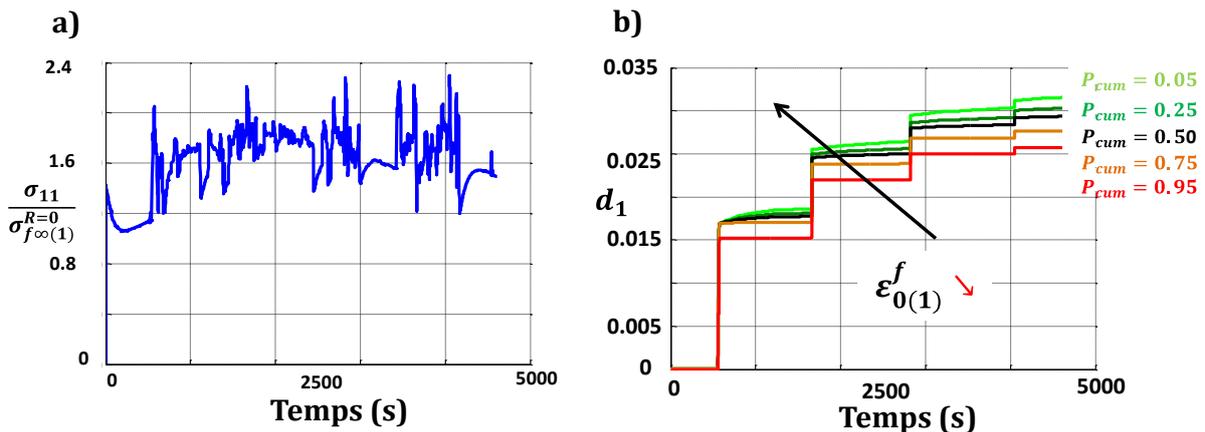


Figure 99 (annexe confidentielle): Evolution de l'endommagement (b) pour un chargement complexe (a) ; représentation des évolutions de l'endommagement pour divers seuils d'endommagement de fatigue en déformation correspondant à une probabilité de survie P_{cum}

VII. 5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une première extension probabiliste du modèle d'endommagement de fatigue *ODM*.

La démarche retenue est pragmatique, elle étend aux composites tissés, les travaux existants de Lemaitre sur les métaux donnant le statut de variable aléatoire au paramètre responsable de la limite de fatigue asymptotique. Cette hypothèse forte est simplificatrice, elle concerne uniquement la partie à grands nombres de cycles de la courbe de fatigue. Elle montre qu'un traitement probabiliste peut être fait pour un modèle de comportement et d'endommagement sophistiqué (avec écriture temporelle de la loi d'endommagement). Elle permet notamment de traiter les cas de chargements aléatoires.

Dès que possible, il faudra bien évidemment revenir sur les hypothèses fortes faites dans ce travail, en particulier sur le nombre de variables aléatoires (inclure les informations expérimentales disponibles à Snecma sur les distributions statistiques des propriétés élastiques et des contraintes à rupture statique) mais aussi sur le choix des lois de probabilité considérées et enrichir la méthodologie d'identification.

Nous pourrions prendre exemple sur des travaux réalisés sur le composite CMC. En effet, dans [Guillaumat et Lamon, 1995], les auteurs se sont intéressés à la modélisation probabiliste du comportement des composite tissé SiC/SiC, en montrant notamment que le comportement non-linéaire du matériau pouvait être prédit à partir des propriétés mécaniques des constituants. Une approche numérique, basée sur les Eléments Finis, a été utilisées pour calculer la distribution du champ des contraintes ainsi que les probabilités de rupture, causées par l'évolution de l'endommagement notamment due à différentes familles de fissures. Les probabilités de rupture ont été déterminées grâce à l'utilisation d'un post-processeur basé sur un modèle de rigidité multiaxial développé par [Lamon et Evans, 1983].

Des approches ont également été proposées pour relier les propriétés de fatigue à grand nombre de cycles à des mesures thermiques sous chargements cycliques par [Poncelet et al., 2010]. Pour aller plus loin, des travaux sur la notion de fiabilité des probabilités de rupture (ou de survie) pourront être menés. Sur les composites à matrice organique, [Guillaumat et al., 2005] ont proposé un modèle de fiabilité pour les composites forés.

CHAPITRE VIII APPLICATIONS : CHARGEMENTS DE FATIGUE CYCLIQUES ET ALEATOIRES

Sommaire du chapitre VIII

VIII. 1. Prise en compte de la montée en charge lors d'essais cycliques à amplitude constante	148
VIII. 2. Applications aux chargements complexes uniaxiaux.....	150
VIII. 2. 1. Chargement aléatoire constitué de plusieurs blocs	150
VIII. 2. 2. Chargement aléatoire avec des sur-contraintes	152
VIII. 3. Chargements complexes multiaxiaux	153
VIII. 3. 1. Chargements proportionnel et non proportionnel à contraintes positives.....	154
VIII. 3. 2. Chargements non proportionnels avec passages en traction et en compression	158
VIII. 4. CONCLUSION.....	160

Dans les chapitres précédents, nous avons construit le modèle d'endommagement temporel $O\dot{D}M$, en introduisant notamment une loi avec une seule variable d'endommagement (par mécanisme de dégradation pour les chargements à la fois « monotone » et « de fatigue »), laquelle tient compte de l'effet de contrainte moyenne. Un premier jeu de paramètres, déterministe, a été obtenu à température ambiante (20°C) au travers de l'étude des diagrammes d'aide au dimensionnement à la fatigue (courbes de Wöhler et diagrammes de Haigh). Des premiers résultats en termes de durée de vie, prévus par le modèle, ont alors été présentés, complétés par une démarche qui considère la limite de fatigue comme probabiliste. A partir de la base d'essais Snecma, nous avons obtenu deux autres identifications des paramètres de fatigue pour deux autres températures (une température basse (-55°C) et une température élevée (95°C)), ainsi qu'une première modélisation de leur dépendance en température fournissant ainsi une loi de comportement et d'endommagement anisotherme pour les CMO tissés 3D.

L'objet de ce chapitre vise à illustrer les capacités du modèle $O\dot{D}M$ à travers des cas de chargements complexes purement mécaniques. Pour ce faire nous utilisons le modèle déterministe isotherme, avec déformations permanentes (récapitulatif des équations constitutives donné dans le Tableau 3, Chapitre V). Rappelons que les modèles d'endommagement en cycles peuvent également prendre en compte ces chargements complexes, mais cela nécessite un traitement préalable des chargements (par méthode de comptage de cycles de type Rainflow par exemple, travail très délicat en multiaxial et lorsque la température varie sur un cycle [*Taira, 1973, Lemaitre et Chaboche, 1985*]). A noter que, nous nous intéressons ici aux capacités du modèle mais ces résultats ne pourront être validés car nous ne disposons pas des essais correspondants.

VIII. 1. Prise en compte de la montée en charge lors d'essais cycliques à amplitude constante

Pour les composites et particulièrement les composites tissés 3D, les essais de fatigue réalisés à Snecma, sont le plus souvent des essais cycliques à amplitude constante. Il y a deux manières de mettre en charge l'éprouvette; soit la montée en charge est continue jusqu'à une contrainte maximale ; soit la montée en charge se fait de manière incrémentale pour atteindre petit à petit à la contrainte maximale et ainsi éviter tout effet de surcharge. Dans les travaux de [*Rakotoarisoa, 2013*] la modélisation de la mise en charge est une montée continue jusqu'à la contrainte maximale puisque le modèle en cycles ne décrit pas de différence de comportement avec une montée en charge incrémentale. Par la formulation choisie, il en va autrement pour le modèle d'endommagement temporel. Nous comparons ici la différence entre ces deux modélisations réalisées avec le modèle $O\dot{D}M$, pour vérifier notamment si la mise en charge a un impact sur la durée de vie. Nous considérons soit la montée en charge continue (**Figure 100-a**) soit la montée en charge incrémentale (**Figure 100-b**) et nous comparons les évolutions de l'endommagement d_1 calculées correspondantes (**Figure 101-a** et **Figure 101-b**) représentées en rouge. Malgré une différence de l'évolution de l'endommagement d_1 au début du chargement à cause des deux chemins de chargement différents lors de la mise en charge à contrainte maximale (**Figure 100-c**), l'endommagement final atteint après 1.10^5 cycles n'est pas très différent. En effet, les moyennes évolutives deviennent constantes et les endommagements sont égaux après un nombre de cycles d'environ 187. Nous pouvons conclure qu'en matière de modélisation, nous pouvons bien représenter la montée en charge incrémentale par une simple montée en charge jusqu'à la contrainte maximale, cette modélisation n'a *a priori* pas d'effet sur la durée de vie.

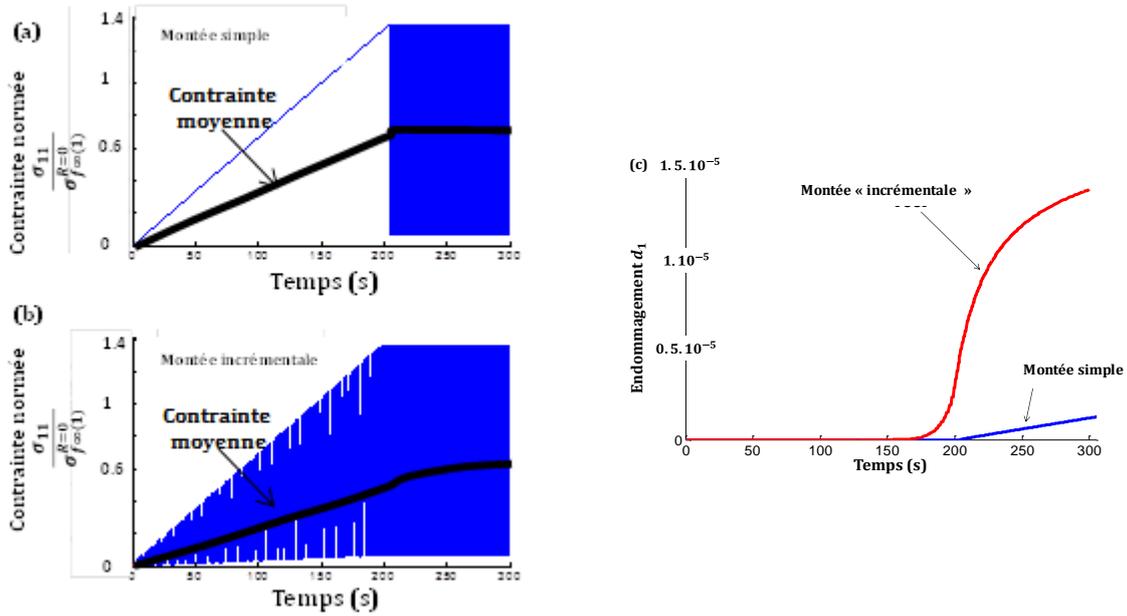
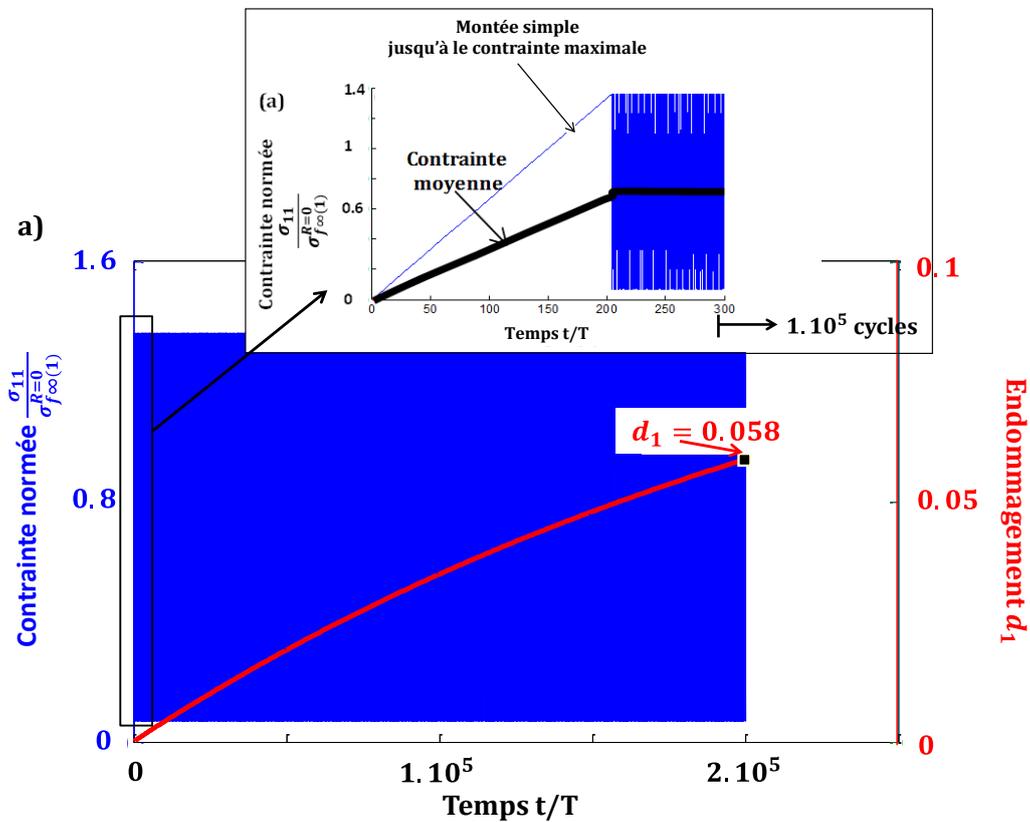


Figure 100 (annexe confidentielle): (a) représentation du chargement de fatigue (contrainte imposée normée par rapport à la limite de fatigue asymptotique $\sigma_{f\infty(1)}^{R=0}$) avec une montée simple jusqu'à la contrainte maximale ; (b) représentation du chargement de fatigue (contrainte imposée normée par rapport à la limite de fatigue asymptotique $\sigma_{f\infty(1)}^{R=0}$) avec une montée incrémentale jusqu'à la contrainte maximale ; (c) Evolutions de l'endommagement d_1 (en rouge pour la montée « incrémentale », en bleu pour la montée dite « simple »)



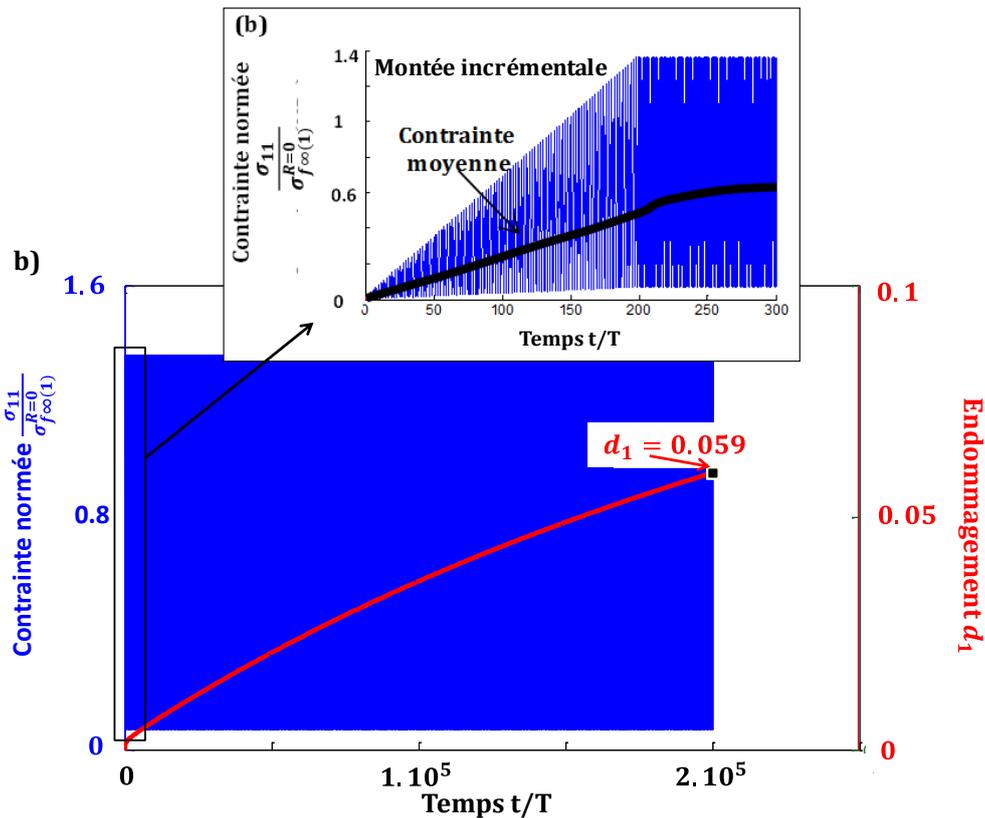


Figure 101 (annexe confidentielle): (a) représentation du chargement de fatigue (contrainte imposée normée par rapport à la limite de fatigue asymptotique $\sigma_{f\infty(1)}^{R=0}$) avec une montée simple jusqu'à la contrainte maximale et évolution de l'endommagement d_1 (en rouge) ; (b) représentation du chargement de fatigue (contrainte imposée normée par rapport à la limite de fatigue asymptotique $\sigma_{f\infty(1)}^{R=0}$) avec une montée incrémentale jusqu'à la contrainte maximale et évolution de l'endommagement d_1 (en rouge) (annexe confidentielle)

VIII. 2. Applications aux chargements complexes uniaxiaux

Nous nous intéressons maintenant aux chargements complexes aléatoires. Ils peuvent être complètement aléatoires ou peuvent être constitués de blocs de cycles aléatoires répétés plusieurs fois. Nous pouvons imaginer tout un éventail de chargements divers et variés, seulement quelques-uns sont présentés ci-dessous. La prise en compte naturelle de tels chargements est un avantage majeur des modèles temporels, et c'était là un des objectifs principaux de ces travaux : étendre les modèles d'endommagement à l'étude de la fatigue pour de tels chargements. Il n'est pas nécessaire d'utiliser une méthode de comptage de cycles car le modèle prend compte l'ordre des cycles et donc il rend compte de l'effet de séquence qui est souvent considéré comme important pour le cumul du dommage en fatigue.

VIII. 2. 1. Chargement aléatoire constitué de plusieurs blocs

Nous présentons trois chargements composés de blocs complexes. Le premier chargement (**Figure 102-a**) est composé de 26 blocs de niveau élevé. Le second chargement (**Figure 102-b**) est composé d'un bloc à niveau élevé et les 25 suivants à un niveau plus faible. Inversement, le troisième chargement (**Figure 102-c**) est composé d'un bloc à faible niveau et les 25 suivants à un niveau plus élevé. La **Figure 102-d** représente un chargement est composé de 26 blocs de faible niveau. Pour chacun des chargements, la contrainte moyenne évolutive est représentée en rouge.

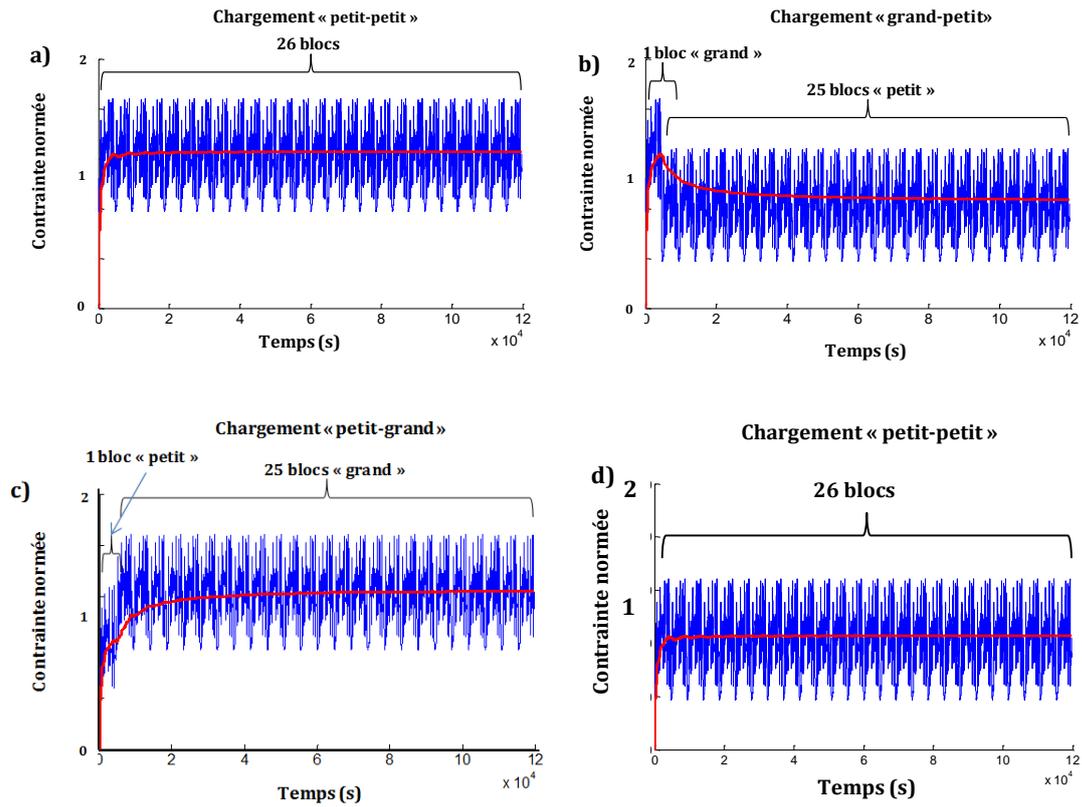


Figure 102 (annexe confidentielle): Chargements complexes constitués de blocs (contrainte imposée normée par rapport à la limite de fatigue asymptotique $\sigma_{f\infty(1)}^{R=0}$, la contrainte moyenne est représentée en rouge) ; (a) 26 blocs de haut niveau ; (b) 1 bloc de niveau élevé suivi de 25 blocs de niveau plus faible ; (c) 1 bloc de niveau faible suivi de 25 blocs de niveau plus élevé ; (d) 26 blocs de faible niveau

Les résultats (**Figure 103**) vont dans le sens des résultats obtenus pour les métaux [*Lemaitre et Chaboche, 1985*]. L'endommagement est plus important pour un chargement « grand-petit » que pour un chargement « petit-grand ».

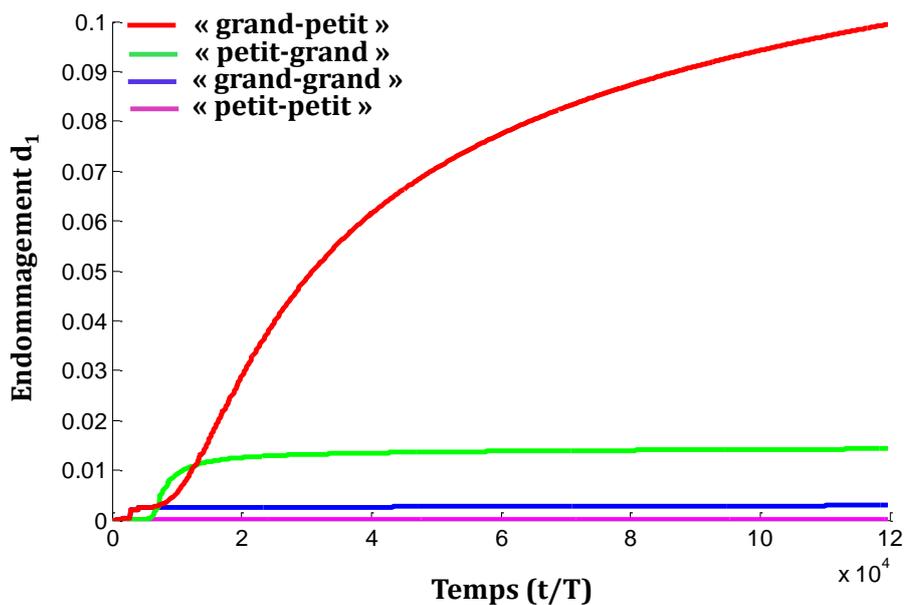


Figure 103 : Evolution de l'endommagement sens chaîne pour les trois chargements complexes (**Figure 102**)

La **Figure 104** représente les évolutions de l'endommagement d_1 superposées aux chargements en contrainte, au début du chargement lors des trois premiers blocs. Pour le chargement « grand-petit » (**Figure 104-b**), l'endommagement évolue fortement lors du premier bloc lorsque la contrainte augmente fortement. Puis, une fois passé ce bloc, l'endommagement continue d'augmenter de façon « exponentielle ». Tandis que pour le chargement « petit-grand », l'endommagement évolue rapidement au début puis tend rapidement vers une constante (**Figure 103** et **Figure 104-c**), comme pour le chargement « constant ».

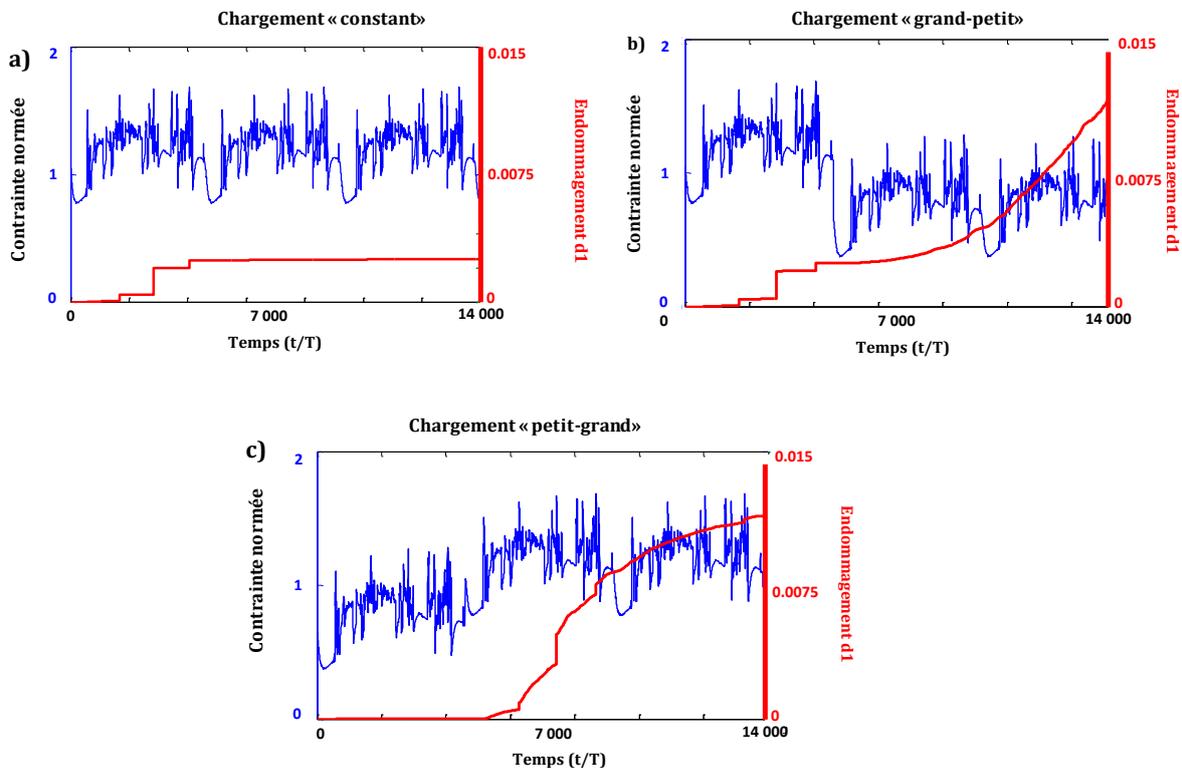


Figure 104 (annexe confidentielle): Evolution de l'endommagement (en rouge) sens chaîne pour les trois chargements complexes (en bleu)

Encore une fois, une analyse plus détaillée doit être faite, notamment sur l'effet de contrainte moyenne qui n'est peut-être pas le bon. De plus, il faudrait valider ses résultats sur des essais expérimentaux.

VIII. 2. 2. Chargement aléatoire avec des sur-contraintes

Un autre chargement est présenté ci-dessous (**Figure 105**), en bleu la contrainte normée par rapport à la limite de fatigue « asymptotique » $\sigma_{f\infty(1)}^{R=0}$ (constitué de 70011 points, soit 35006 charges décharges, discrétisées en autant de pas de temps) et en rouge, l'évolution calculée de l'endommagement d_1 (mécanisme de dégradation $k=1$). Cette fois-ci le chargement est aléatoire (sans répétition de bloc), il présente quelques pics représentant des surcharges en contrainte dont l'un d'entre eux ($t \cong 2 \cdot 10^4$ s) monte assez haut en contrainte.

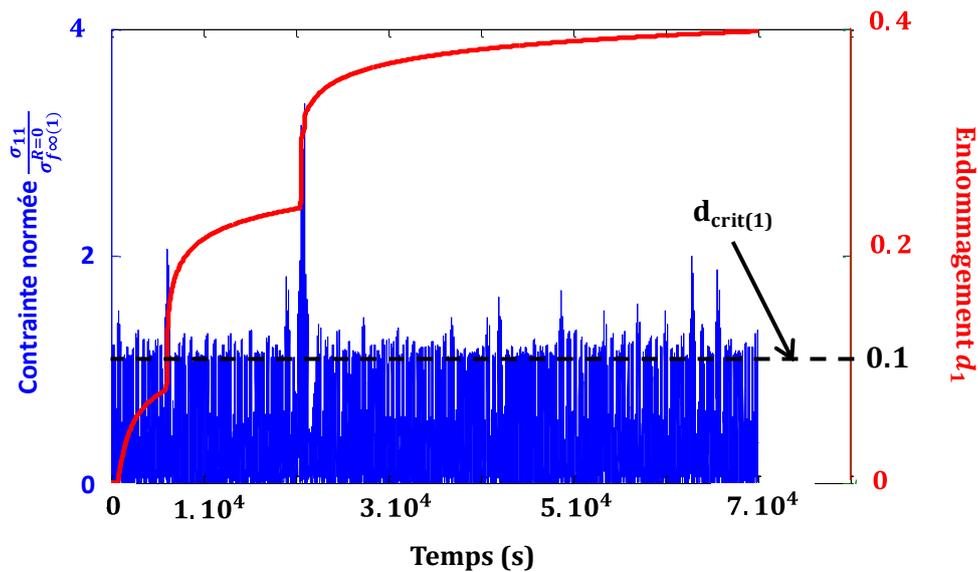


Figure 105 (annexe confidentielle): Chargement aléatoire (contrainte imposée (en bleu) normée par rapport à la limite de fatigue asymptotique $\sigma_{f\infty(1)}^{R=0}$) et l'évolution de l'endommagement d_1 (en rouge)

Nous constatons une évolution plutôt brutale de l'endommagement d_1 au niveau des pics de surcharge. Ce chargement montre que les pics de surcharge peuvent avoir des conséquences non négligeables sur l'évolution de l'endommagement, ici dans le cas de chargements aléatoires.

VIII. 3. Chargements complexes multiaxiaux

Les chargements multiaxiaux peuvent être proportionnels ou non proportionnels. Ils peuvent se représenter de la manière suivante (**Figure 106** et **Figure 107**), en traçant la contrainte σ_{11} en fonction la contrainte σ_{22} (courbes normées par la limite de fatigue « asymptotique » $\sigma_{f\infty(1)}^{R=0}$). Quatre chargements sont étudiés et présentés ci-après.

- Nous appelons « chargement proportionnel 1 », le chargement pour lequel les contraintes σ_{11} et σ_{22} atteignent les maximums et minimums aux mêmes instants. Les minimums sont égaux à zéro. Ce chargement forme une droite dans le diagramme ($\sigma_{22} = f(\sigma_{11})$). Le « chargement non proportionnel 1 » forme un rectangle dans le diagramme ($\sigma_{22} = f(\sigma_{11})$) (**Figure 106**) et a les mêmes valeurs minimum et maximum que le chargement proportionnel 1. Mais les contraintes minimales et maximales σ_{11} et σ_{22} , en fonction du temps, ne sont pas atteintes aux mêmes instants. Les deux chargements σ_{11} et σ_{22} ont une forme de trapèze. Les résultats de ces deux chargements seront confrontés et présentés dans la partie (VIII. 3. 1).
- Les deux autres chargements vont en compression. Les deux chargements sont non proportionnels et sont comparés dans la partie (**Figure 107**). Le « chargement non proportionnel 3 » est sinusoïdal et forme une ellipse dans le diagramme ($\sigma_{22} = f(\sigma_{11})$), tandis que le « chargement non proportionnel 4 » est trapézoïdal et forme un rectangle dans le diagramme ($\sigma_{22} = f(\sigma_{11})$) (VIII. 3. 2).

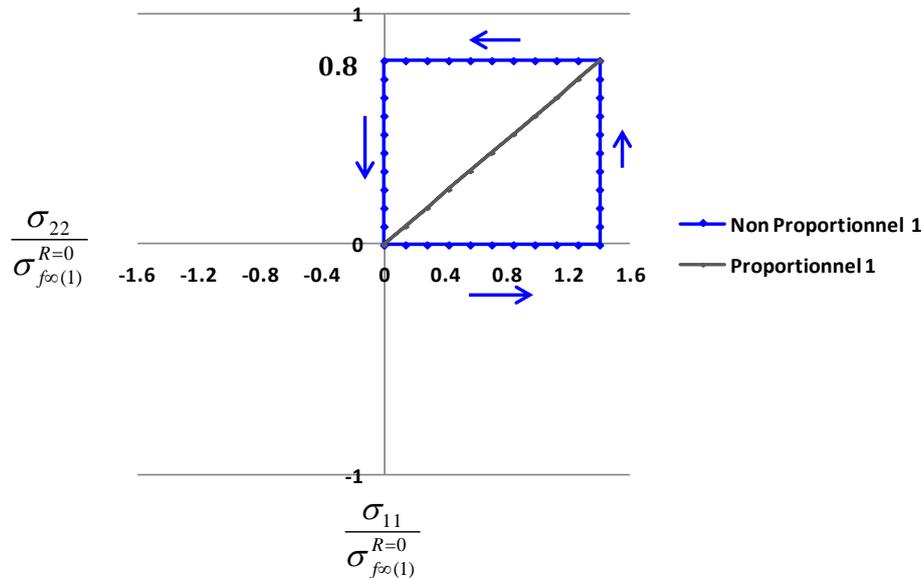


Figure 106 (annexe confidentielle): Représentation des chargements proportionnels et non proportionnels, en traction ; σ_{11} (MPa) en abscisse et σ_{22} (MPa) en ordonnée (normées par rapport à la limite de fatigue « asymptotique » $\sigma_{f\infty(1)}^{R=0}$)

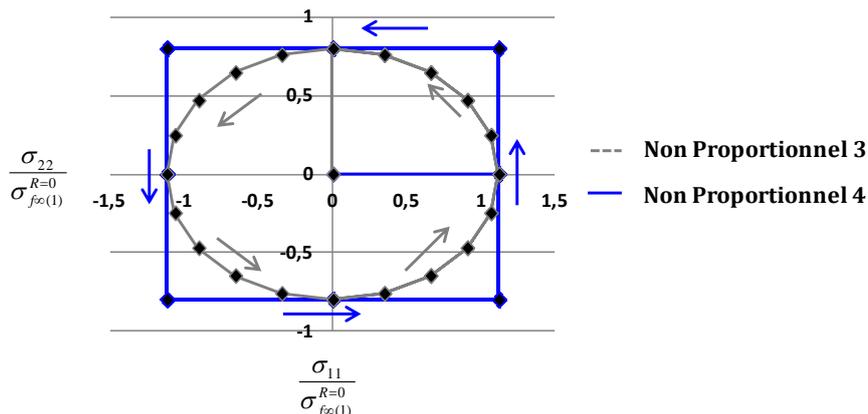


Figure 107 (annexe confidentielle): Représentation des chargements proportionnels et non proportionnels, en traction et compression ; σ_{11} (MPa) en abscisse et σ_{22} (MPa) en ordonnée (normées par rapport à la limite de fatigue « asymptotique » $\sigma_{f\infty(1)}^{R=0}$)

VIII. 3. 1. Chargements proportionnel et non proportionnel à contraintes positives

Les deux chargements représentés sur la **Figure 108** restent dans le domaine des contraintes positives, les contraintes sont normées par rapport à la limite de fatigue « asymptotique ». Les contraintes maximales et minimales sont constantes mais différentes dans la direction chaîne et trame, à savoir $\sigma_{11}/\sigma_{f\infty(1)}^{R=0} = 1.4$ et $\sigma_{22}/\sigma_{f\infty(1)}^{R=0} = 0.8$. La contrainte σ_{11} est 1.75 fois supérieure à la contrainte σ_{22} . Les minima et maxima des deux contraintes, σ_{11} (en bleu) et σ_{22} (en gris), sont atteints aux mêmes instants pour le chargement **Figure 108-a**), mais pas pour celui **Figure 108-b**).

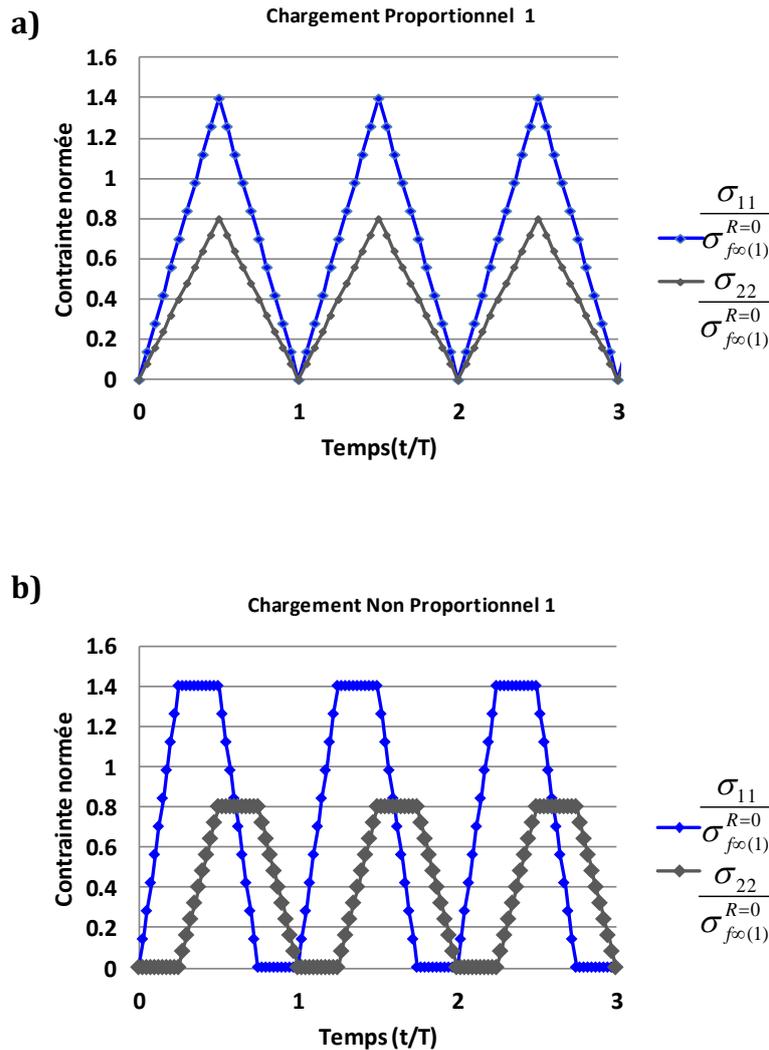


Figure 108 (annexe confidentielle): a) *Chargement proportionnel 1 (traction)* ; b) *Chargement non proportionnel 1 (traction)* ; Contraintes imposées normées par rapport à la limite de fatigue asymptotique $\sigma_{f\infty(1)}^{R=0}$; σ_{11} en bleu et σ_{22} en gris en fonction du temps

Les simulations ont été réalisées jusqu'à atteindre $t=1000$ secondes, soit 1000 cycles (fréquence de 1 Hz). La Figure 109 représente l'évolution des endommagements, pour chacun des chargements. Les niveaux de chargements choisis ne permettent pas d'atteindre la rupture ici après 1000 cycles simulés, les endommagements critiques valent rappelons-le $d_{\text{crit}(1)}=0.1$, $d_{\text{crit}(2)}=0.26$, $d_{\text{crit}(3)}=0.24$. Pour les deux chargements, l'endommagement hors-plan d_3 est nul puisque nous n'allons pas dans le domaine de compression. Nous remarquons aussi que les endommagements pour le « chargement non proportionnel 1 » sont supérieurs à ceux atteints pour le chargement proportionnel, nous expliquons ce constat ci-après.

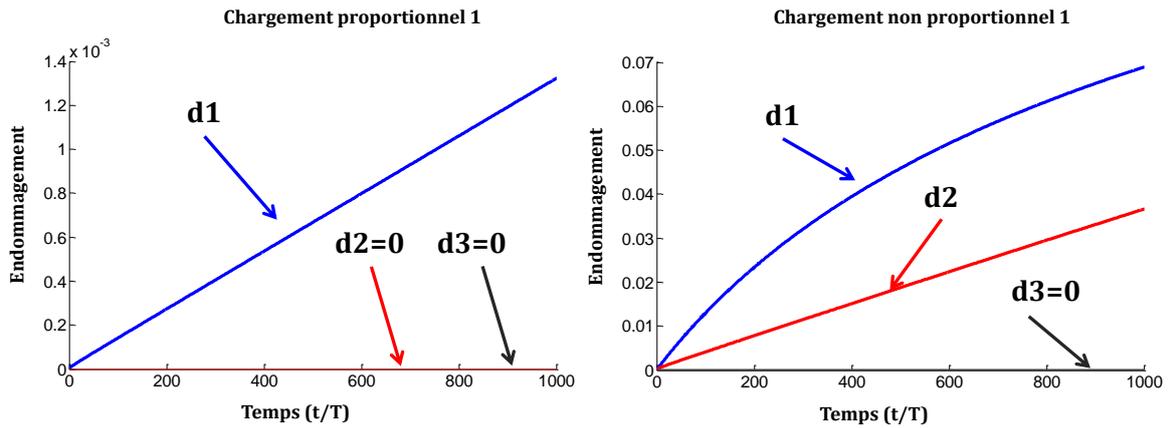


Figure 109 : Evolution des endommagements d_1 , d_2 et d_3 pour le chargement proportionnel en a) et pour le chargement non proportionnel en b) (Figure 108)

Les Figure 110 et Figure 111 représentent ce qui se passe pendant les trois premiers cycles, en comparant notamment les évolutions des endommagements avec les évolutions des déformations équivalentes en jeu pour chaque endommagement (soit ici pour les mécanismes de dégradations $k=1$ et $k=2$) et des moyennes des déformations élastiques. En effet, nous allons voir que pour les deux chargements proposés ici, les seuils d'endommagement « monotone » ne sont pas atteints, ainsi seule la contribution « de fatigue » de la loi d'endommagement permet de calculer l'endommagement. Nous avons vu dans le Chapitre IV comment prendre en compte un effet de contrainte moyenne au moyen du calcul des déformations élastiques moyennes, inséré dans les fonctions critères (Eq. IV-11) de la contribution « fatigue ». La fonction critère fait intervenir la déformation équivalente, la moyenne d'une composante de la déformation élastique et le seuil de fatigue. Nous pouvons alors représenter la quantité, noté κ_k (par mécanisme de dégradation k) comme étant la somme de la déformation équivalente et la déformation élastique telle que :

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \varepsilon_{eq(1)} - m_{11} \bar{\varepsilon}_{11}^e \\ \kappa_2 &= \varepsilon_{eq(2)} - m_{22} \bar{\varepsilon}_{22}^e \\ \kappa_3 &= \varepsilon_{eq(3)} - m_{33} \bar{\varepsilon}_{33}^e \end{aligned} \quad \text{Eq. VIII-1}$$

Pour le « chargement proportionnel 1 », il n'y a pas de plateau à contrainte maximale constante, une fois passé le pic à contrainte maximale, celle-ci diminue immédiatement (et donc la déformation équivalente diminue elle aussi). Il n'y a donc pas création d'endommagement. Ceci est représenté sur la Figure 110, plus précisément entre les temps $t=1.5s$ et $t=2s$ par exemple. La Figure 110-a) représente la quantité κ_1 ainsi que le seuil « de fatigue », la Figure 110-b) représente l'évolution de l'endommagement. Lorsque κ_1 atteint et dépasse le seuil « de fatigue » $\varepsilon_{0(1)}^f$, il y a création d'endommagement « de fatigue ».

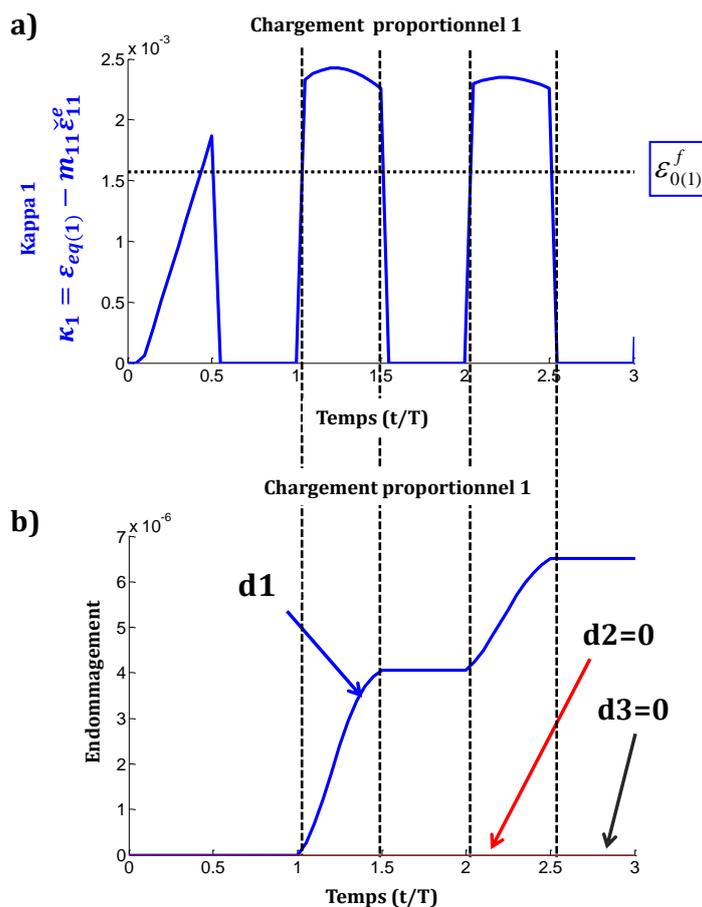


Figure 110 : Evolution des déformations équivalentes $\varepsilon_{eq(1)}$ en a) et de l'endommagements d_1 en b) pour le « chargement proportionnel 1 » (Figure 108-a))

Nous faisons le même constat pour le chargement non proportionnel 1, pour l'endommagement d_1 et aussi pour l'endommagement d_2 . En effet, pour ce chargement, il y a création d'endommagement sens trame. Cela est représenté sur la Figure 111, en venant comme précédemment comparer la quantité κ_2 avec le seuil « de fatigue » sens trame $\varepsilon_{0(2)}^f$.

Par contre, pour le « chargement non-proportionnel 1 », une fois atteinte la contrainte maximale lors d'un cycle, celle-ci est maintenue pendant un court instant $\Delta t = 0.25s$, la déformation équivalente évolue toujours par effet de multiaxialité, ce qui implique une évolution de l'endommagement. Ceci est représenté sur la Figure 111. Nous avons alors, pour le « chargement non proportionnel 1 », un niveau plus important de l'endommagement d_1 (sens chaîne) et l'apparition de l'endommagement (sens trame) d_2 pour lequel le seuil d'endommagement a été dépassé. En effet, si on s'intéresse à la contrainte σ_{22} , au temps $t = 1.25s$, par exemple, il y a création d'endommagement. En effet, la quantité κ_2 augmente et dépasse le seuil « de fatigue » $\varepsilon_{0(2)}^f$ (Figure 111-a)). Au temps $t = 1.5s$ jusqu'à $t = 1.75s$, la contrainte σ_{22} est imposée constante. La déformation équivalente $\varepsilon_{eq(2)}$ continue d'augmenter et la quantité κ_2 est toujours au-dessus du seuil, nous avons alors toujours création d'endommagement d_2 (Figure 111-b)). Enfin, pour les deux chargements présentés, nous voyons qu'il n'y a pas création d'endommagement lors de la première montée en charge, même si le seuil « de fatigue » est dépassé. C'est la contribution « monotone » qui calcule l'endommagement lors de cette première montée or les seuils d'endommagement « monotone » n'ont pas été atteints, il n'y a donc pas création d'endommagement. Rappelons que la contribution « monotone » de la loi

d'endommagement est activée seulement si le dernier maximum vu au cours du chargement est dépassé.

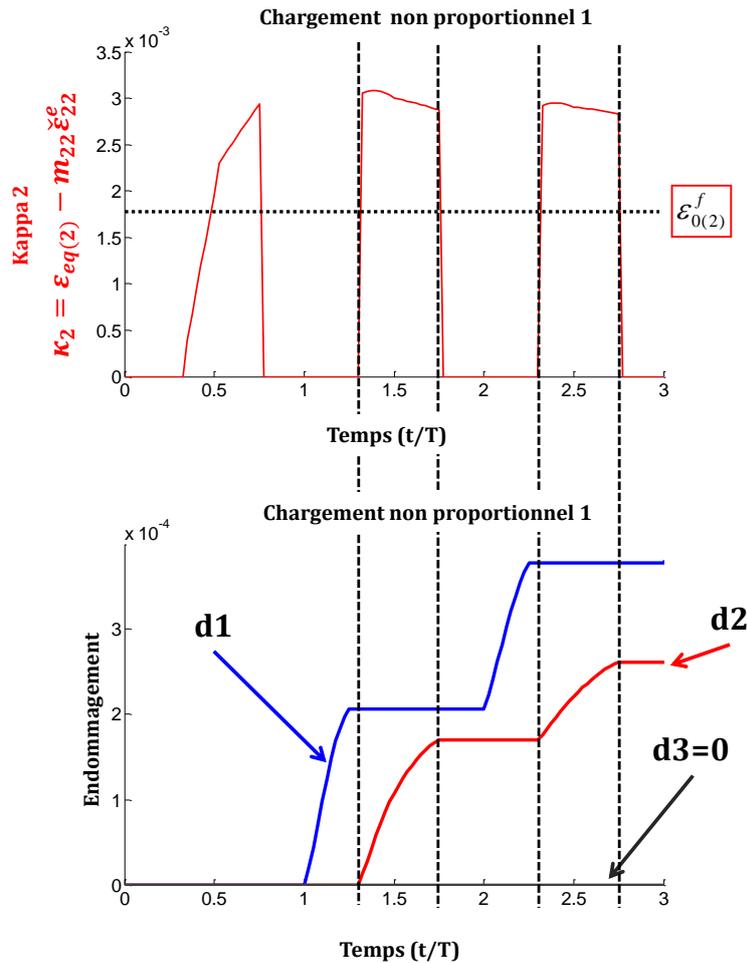


Figure 111 : Evolution des déformations équivalentes $\varepsilon_{eq(2)}$ en a) et de l'endommagement d_2 en b) pour le « chargement non proportionnel 1 » (Figure 108-b))

VIII. 3. 2. Chargements non proportionnels avec passages en traction et en compression

Le chargement non-proportionnel sinusoïdal nommé « chargement non proportionnel 3 » représenté sur la **Figure 112-a)** n'implique pas les mêmes niveaux de contrainte pour la direction chaîne et la direction trame ($\sigma_{11} = 1.75 \sigma_{22}$), mais les deux contraintes vont dans le domaine de compression. Les signaux sont normés par rapport à la limite de fatigue « asymptotique » $\sigma_{f\infty(1)}^{R=0}$ sens chaîne. Nous le comparons au « chargement non proportionnel 4 » de forme trapézoïdale, pour des mêmes niveaux de contraintes. De la même manière, le chargement représenté sur la **Figure 108-b)** est normé par rapport à la limite de fatigue « asymptotique » $\sigma_{f\infty(1)}^{R=0}$ sens chaîne. Les deux chargements sont représentés dans le diagramme ($\sigma_{22} = f(\sigma_{11})$) sur la **Figure 107**. Les niveaux maximums de contraintes imposées ne permettent pas le dépassement du seuil d'endommagement « monotone », ce qui implique que seule la contribution « de fatigue » permet de calculer l'endommagement, dans les résultats présentés ici. Les endommagements calculés après 1000 cycles sont représentés, pour les deux chargements, sur la **Figure 113**.

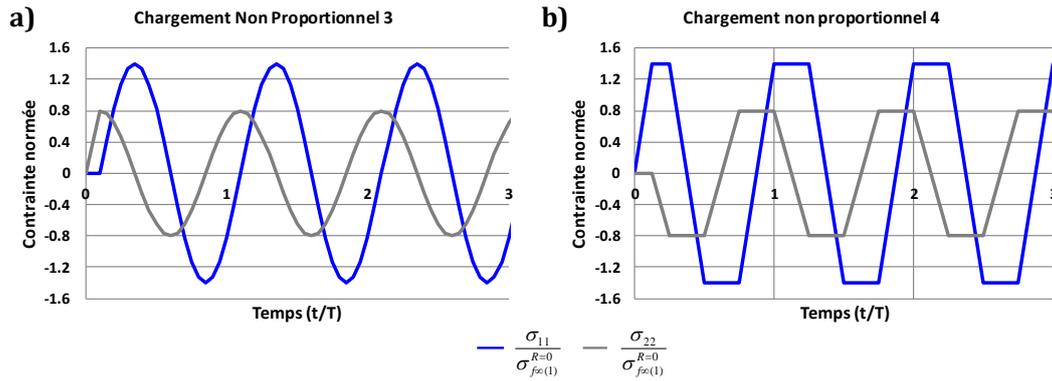


Figure 112 (annexe confidentielle): a) : *Chargement non proportionnel 3* ; b) : *Chargement non proportionnel 4* ; Contraintes imposées normées par rapport à la limite de fatigue asymptotique $\sigma_{f\infty(1)}^{R=0}$; σ_{11} en bleu et σ_{22} en gris en fonction du temps

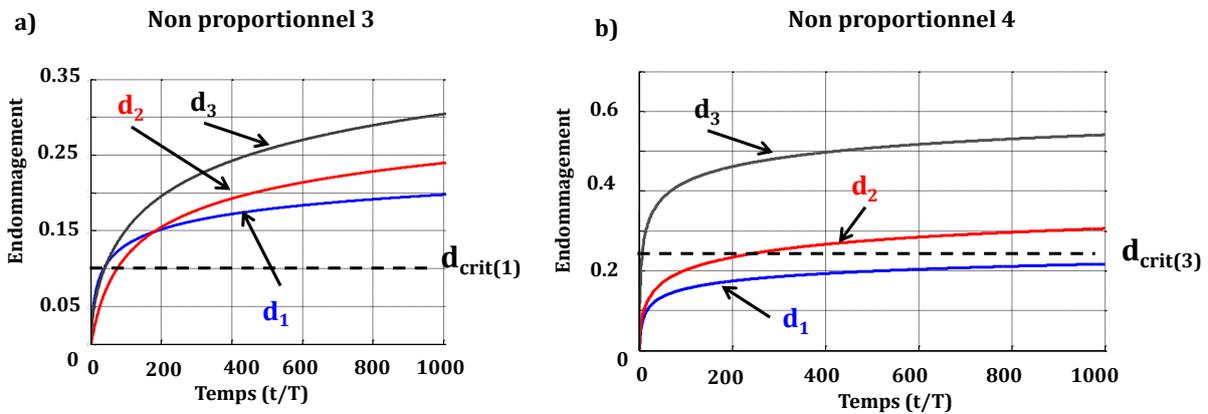


Figure 113 : a) : *Evolutions des endommagements pour le « chargement non proportionnel 3 »* ; b) : *Evolution des endommagements pour le « chargement non proportionnel 4 »*

L'analyse est réalisée en s'intéressant plus particulièrement à trois cycles (**Figure 114**). Les trois endommagements d_1, d_2 et d_3 évoluent et démarrent une fois les seuils d'endommagement « de fatigue » respectifs atteints. Nous voyons notamment l'évolution de l'endommagement d_3 du fait des passages dans le domaine de compression. Le « chargement non proportionnel 4 » est plus endommageant. En effet, nous avons vu que les passages à contraintes imposées constantes et non nulles sont endommageantes par effet de multiaxialité (la contrainte dans l'autre direction évolue) et les passages à contraintes constantes sont plus longs pour le « chargement non proportionnel 4 » que pour le « chargement non proportionnel 3 ».

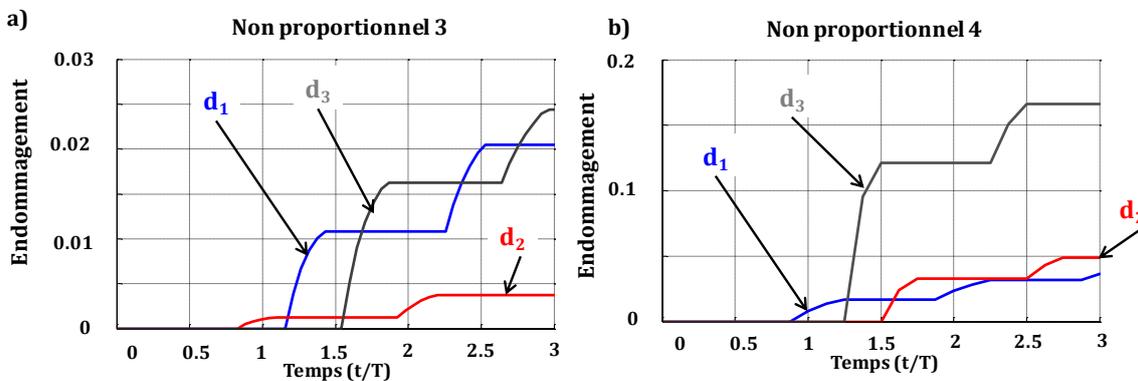


Figure 114 : a) : *Evolutions des endommagements pour le « chargement non proportionnel 3 »* ; b) : *Evolution des endommagements pour le « chargement non proportionnel 4 »*

Le modèle ODM permet de calculer des chargements multiaxiaux et calculer les trois endommagements simultanément.

VIII. 4. CONCLUSION

Nous avons présenté dans ce chapitre quelques applications naturellement prises en compte par le modèle d'endommagement temporel ODM proposé dans ces travaux. Toutes les simulations proposées ici ont été réalisées en un point de Gauss.

Nous nous sommes principalement intéressés aux chargements complexes et multiaxiaux, avec, dans un premier temps, les chargements uniaxiaux de fatigue composés de blocs de cycles à amplitude constante et à amplitude variable. Nous nous sommes également intéressés aux chargements complexes faisant intervenir plusieurs blocs de cycles aléatoires disposés différemment. Nous avons répété le bloc pour former un chargement quasi-aléatoire. Les simulations réalisées ont montré que le modèle permet le calcul de ce type de chargement complexe. Nous avons proposé un chargement aléatoire avec des pics de sur-contrainte au milieu du chargement, pour lequel nous avons étudié l'impact sur l'évolution de l'endommagement.

Dans un second temps, nous avons calculé les réponses à des chargements multiaxiaux dont nous avons analysé les premiers cycles pour voir distinctement les évolutions des trois endommagements (dans les phases où les chargements vont dans le domaine de compression notamment).

Nous avons illustré la capacité du modèle ODM à rendre compte de la fatigue sous chargements complexes, mais rappelons que nous n'avons pas de résultats d'essais pour estimer la qualité de nos résultats. Nous pouvons seulement conclure que le modèle ODM et les exemples traités dans ce chapitre permettent de construire une campagne expérimentale intéressante à mener.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Les travaux de cette thèse s'insèrent dans la problématique du dimensionnement de pièces en composite tissé 3D, matériau innovant devant remplacer à terme plusieurs pièces en titane, pour toute la nouvelle gamme de moteurs LEAP, par exemple. Les développements de cette thèse, essentiellement de modélisation, ont répondu à l'objectif premier de proposer un modèle d'endommagement temporel (ou « incrémental en temps »), capable à la fois de calculer les évolutions d'endommagement pour chacun des trois mécanismes de dégradation et de prévoir la durée de vie du matériau pour des sollicitations de fatigue mécanique. Le modèle proposé est capable de prendre en compte des chargements thermomécaniques de fatigue cyclique mais aussi de fatigue aléatoire et complexe, tout en donnant des résultats identiques au modèle initial ODM-CMO pour les chargements les plus simples (monotones ou cycliques à amplitude constante)

Le modèle d'endommagement temporel (ou « incrémental en temps »), nommé *ODM*, se veut différent des modèles d'endommagement en cycles, adaptés principalement au cas des chargements cycliques à amplitude constante. Ce modèle temporel permet de prendre en compte « naturellement » des chargements spectraux, multiaxiaux et potentiellement non proportionnels sans passer par des techniques de comptage de cycles de type Rainflow.

Le modèle d'endommagement temporel proposé intègre l'effet de contrainte moyenne, y compris sous chargement aléatoire, mais son implantation numérique répond également à la problématique des temps de calculs, qui doivent rester raisonnables. Ceci a été possible grâce à des modifications sur la formulation du modèle (reformulation des déformations permanentes), et à l'intégration exacte des lois d'endommagement même sur de grands pas de temps.

La loi d'endommagement n'introduit qu'une seule variable scalaire d'endommagement (par mécanisme de dégradation), contrairement à de nombreuses lois de la littérature. La loi d'évolution fait néanmoins intervenir deux contributions, une pour les chargements monotones et une pour les chargements de fatigue (simples ou complexes). Ces deux contributions ne peuvent pas évoluer en même temps, contrairement au modèle de fatigue de [Rakotoarisoa, 2013] où les deux variables d'endommagement évoluent simultanément lors des sollicitations de fatigue. La grandeur qui gouverne l'évolution de l'endommagement est une déformation équivalente (élastique sans viscosité et dérivée directement des forces thermodynamiques du modèle ODM). Ce choix nous a permis de modéliser relativement simplement des diagrammes de Haigh en privilégiant une construction bilinéaire.

Dans le modèle « en cycles » ODM-CMO, [Rakotoarisoa, 2013] a introduit explicitement dans la loi d'évolution de fatigue, le rapport de charge en force motrice R_y . Pour les chargements complexes, pour lesquels les valeurs minimales et maximales ne sont pas constantes, le rapport de charge n'est pas défini. Nous avons donc modifié la contribution « de fatigue » de la loi d'endommagement temporelle de façon à ce qu'elle prenne en compte l'effet de contrainte moyenne (chapitre IV). Ceci a été réalisé par l'ajout dans la fonction critère (de fatigue) de la moyenne évolutive des composantes du tenseur des déformations élastiques. L'originalité de ce travail a été de proposer une moyenne évolutive, la moyenne évoluant à chaque pas de temps en même temps que le chargement. Ainsi, la moyenne proposée tient compte de toute l'histoire du chargement. Le concept de moyenne évolutive s'applique bien évidemment aussi pour les sollicitations cycliques à amplitude constante. La moyenne tend alors vers la moyenne constante standard. L'effet de contrainte moyenne est *in fine* bien représenté notamment sur les courbes

de Wöhler, sens chaîne et sens trame (chapitre IV) mais également présent lors sollicitations complexes de fatigue aléatoire.

Une procédure d'identification a été proposée. Ces travaux faisant suite à ceux de l'Onera, le modèle temporel a été établi le plus souvent possible sur la base des équations du modèle d'endommagement ODM-CMO [Laurin et al., 2007 ; Marcin, 2010 ; Rakotoarisoa, 2013 ; Hémon, 2013 ; Hurmane, 2015 ; Elias, 2015]. Nous avons construit les lois d'évolution de l'endommagement de ODM à partir de celles du modèle ODM-CMO. Ainsi, nous avons pu faire, par identification croisée, le lien entre les paramètres des deux modèles, notamment les paramètres de la loi d'endommagement monotone. En ce qui concerne l'identification des paramètres de la loi de fatigue, la stratégie proposée se déroule en deux étapes, une première fondée sur un modèle simplifié découplé, une seconde de recalage du modèle ODM complet. Elle a nécessité l'étude des diagrammes de Haigh et des courbes de Wöhler. Les deux étapes sont :

1. à partir de l'hypothèse de découplage élasticité – endommagement, on obtient une formulation analytique qui permet une première estimation rapide des coefficients du modèle
2. une seconde étape de recalage des paramètres prenant en compte (numériquement) les déformations résiduelles et le couplage élasticité – endommagement.

Notons que cette démarche permet également de construire des courbes maîtresses de manière à superposer l'ensemble des courbes de Wöhler à différents rapports de charge sur une unique courbe.

Le calcul de durée de vie impose la définition d'un critère de rupture. Le critère retenu diffère de celui proposé dans le modèle initial de [Rakotoarisoa, 2013] et consiste en la définition d'un endommagement critique. Le choix de ce critère très simple a été étayé par l'analyse de nombreux résultats d'essais de fatigue et d'essais monotones.

Nous avons livré un outil numérique, utilisable par les ingénieurs Snecma, pour la prévision de la durée de vie des pièces CMO tissés 3D sur un élément de volume.

La procédure d'identification a été appliquée aux résultats d'essais à trois températures différentes, une température « élevée », une température « basse » et la température ambiante. Un travail sur une identification « anisotherme » permettant de paramétrer l'évolution de chacun des coefficients du modèle en fonction de la température a été amorcé. A terme, cela devrait permettre de prendre en compte, en plus des chargements mécaniques, des chargements complexes en température et éventuellement aléatoires.

L'inconvénient connu des modèles temporels est *a priori* le temps des calculs. En effet, tandis que les modèles cycliques ne calculent de manière discrète l'évolution de l'endommagement qu'à chaque fin de cycle, voire sur un certain nombre de cycles, les modèles temporels calculent de façon continue l'évolution de l'endommagement à chaque pas de temps. Le calcul sera d'autant plus long que le chargement sera défini avec un nombre de pas de temps conséquent. Un effort sur les méthodes numériques employées a été fait afin de réduire les coûts de calcul :

- la loi d'endommagement est résolue de façon exacte et le calcul en un seul pas de temps de sommet à sommet est possible (par la méthode min-max que nous avons programmée),
- et afin d'obtenir une intégration exacte sur un grand pas de temps (avec le modèle ODM complet), nous avons modifié la loi d'évolution des déformations résiduelles. Telle qu'elle était définie dans le modèle ODM-CMO, sa résolution nécessitait une méthode de quadrature de Gauss coûteuse [Rakotoarisoa, 2013]. La proposition faite est quasi-équivalente à la loi d'évolution des déformations résiduelles initiale d'ODM-CMO, elle est résolue par une intégration exacte (chapitre V).

Pour résumer, si le chargement est défini avec un unique pas de temps entre la valeur minimale et maximale d'un chargement de fatigue (soit deux pas de temps pour faire un cycle entier), le modèle proposé calcule l'évolution de l'endommagement et des déformations résiduelles de

façon exacte, ce qui permet de diminuer grandement les coûts de temps de calcul. Toutefois, il reste encore des efforts à faire sur cette question et nous y reviendrons dans les perspectives. L'implantation numérique est très simplifiée par rapport au modèle de [Rakotoarisoa, 2013], notamment parce que les déformations visqueuses n'ont pas été prises en compte dans ces travaux.

Nous avons présenté une première extension probabiliste du modèle d'endommagement de fatigue ODM où nous avons donné le statut de variable aléatoire au paramètre responsable de la limite de fatigue asymptotique. Cette hypothèse forte est simplificatrice, elle concerne uniquement la partie à grands nombres de cycles de la courbe de fatigue. Elle montre qu'un traitement probabiliste peut être fait pour un modèle de comportement et d'endommagement sophistiqué (avec écriture temporelle de la loi d'endommagement). Elle permet notamment de traiter les cas de chargements aléatoires.

Plusieurs applications du modèle proposé ont été présentées. Elles résument les capacités des modèles temporels et leurs avantages par rapport aux modèles de fatigue en cycles. Les modèles en cycles peuvent prendre en compte des chargements en cycles à amplitude constante, ces chargements peuvent être décomposés en plusieurs blocs de cycles qui permettent notamment l'étude du cumul des dommages. Ils peuvent également prendre en compte des chargements complexes aléatoires, mais nécessitent au préalable de travailler le chargement pour le traduire en bloc de cycles équivalents caractérisés par une contrainte minimum et une contrainte maximum comme proposé par exemple dans la méthode de Rainflow.

Les modèles temporels permettent en plus de simuler les chargements réels par exemple, tels qu'ils sont réalisés lors des essais sur éprouvette. Ils peuvent permettre de justifier l'impact d'un choix pour la mise en charge en fatigue et d'aider à la compréhension des mécanismes de dégradation qui interviennent. Enfin, ils permettent d'appréhender les sollicitations de fatigue spectrale, telles que subies par les pièces lors d'un vol, avec des pics éventuels de surcharge.

Perspectives :

A court terme, différents points nécessitent d'être approfondis : la viscosité, le critère de rupture directement lié à la notion de durée de vie et la réduction des temps de calcul.

Nous avons choisi dès le départ de ce travail de thèse de ne pas prendre en compte le caractère visqueux du matériau lié à la matrice époxy utilisée. Cela nous semble justifié car nous sommes principalement intéressé aux sollicitations sens chaîne et trame. Pour les chargements en cisaillement ou hors-plan, la *viscosité* doit être introduite dans le modèle, car elle est une des sources significatives de non-linéarité du comportement du matériau. Celle-ci n'a pas été prise en compte jusqu'à présent dans un souci de simplification mais son introduction constitue la prochaine étape.

L'endommagement est donc actuellement piloté dans le modèle par les déformations élastiques seulement, contrairement au modèle de [Rakotoarisoa, 2013] où l'endommagement est piloté par les déformations dites « mécaniques », somme des déformations élastiques et des déformations visqueuses. Il existe donc déjà une base sur laquelle s'appuyer pour introduire la viscosité dans le modèle temporel. La viscosité des CMO tissés 3D est dépendante du temps et de la fréquence de chargement, elle est donc définie grâce à un modèle visco-élastique spectral non-linéaire [Maire, 1992 ; Schieffer, 2003] dans ODM-CMO. La déformation visqueuse est découpée en plusieurs mécanismes visqueux, à chacun desquels sont attribués des temps caractéristiques et un poids. Dans le modèle de [Rakotoarisoa, 2013], lors de sollicitations de fatigue, deux

contributions interviennent, (i) la contribution de fluage à contrainte moyenne qui fait évoluer l'endommagement « monotone » et (ii) la contribution du cyclage mécanique entre la contrainte minimale et la contrainte maximale qui fait évoluer l'endommagement « de fatigue ». Les deux variables d'endommagement évoluent donc pendant les sollicitations de fatigue.

Dans notre modèle, les deux contributions, « monotone » et « de fatigue », ne peuvent pas évoluer en même temps. La contribution du phénomène de fluage ne peut donc pas être prise en compte par la variable d'endommagement monotone. L'idée serait de faire le lien entre viscosité et contrainte moyenne (ou déformation moyenne) grâce à la contribution «de fatigue» dans laquelle la fonction critère ferait intervenir la moyenne des déformations mécaniques. Les temps caractéristiques qui définissent les déformations visqueuses pourraient être les mêmes que ceux de la moyenne évolutive que nous avons définie. Une possibilité serait donc de modifier la définition de la moyenne pour qu'elle soit dépendante du temps réel (et donc de la fréquence) et non d'un temps fictif.

D'autre part, rappelons que la moyenne évolutive, telle qu'elle est définie actuellement, est dépendante de toute l'histoire du chargement (intégration à partir de $t=0$). Cela signifie que, pour des chargements cycliques à amplitude constante par exemple, la moyenne peut mettre plus ou moins de temps à atteindre la moyenne dite « constante » du chargement. La **Figure 115** représente deux chargements à quatre blocs de cycles, de niveaux différents deux à deux. Nous remarquons que, notamment pour le troisième bloc de cycles, la moyenne (en noir) n'atteint pas du tout la valeur qu'elle devrait. Le temps de « réaction » dépend du chargement vu précédemment. Ce point est à étudier et à analyser plus finement. D'autres définitions de moyennes évolutives peuvent être envisagées comme les moyennes dites « glissantes » ou les moyennes dites « exponentielles » comme utilisées dans le domaine de la finance. Ces moyennes ne dépendent que d'une partie du chargement, et non de toute l'histoire de chargement, ce qui devrait permettre une évolution plus rapide vers la moyenne dite « constante ».

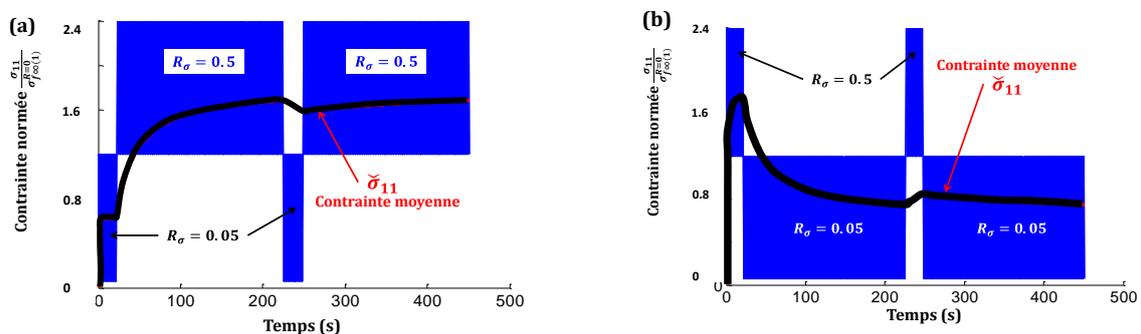


Figure 115 : (a) : chargement de fatigue (normé par rapport à la limite de fatigue asymptotique) à deux niveaux de contrainte maximale et deux rapports de charge ; (b) : évolution de l'endommagement d_1

Par ailleurs, l'introduction de la viscosité est certainement essentielle dans la prise en compte des effets de la température sur la réponse en fatigue car le rôle de la température est surtout de modifier le comportement de la résine.

La prévision de la durée de vie est possible seulement si un *critère de rupture* est défini dans le modèle. Ce critère est établi en fonction de variables internes qui évoluent au cours des chargements. Si le critère dépasse une valeur critique, il est activé et cela signifie que le matériau est rompu. Dans un premier temps et avec le même souci de simplification, le critère retenu a été un critère type endommagement critique. Différents critères pourraient être utilisés, en contrainte, en déformation ou en force motrice. Leur étude devrait permettre de mieux modéliser la rupture lorsqu'un toron de fibres cède.

Enfin un travail doit être mené sur les coûts de calcul. Une première étape a été réalisée dans ce sens sur les lois d'évolution du modèle (loi d'endommagement et évolution des déformations résiduelles). Nous pouvons envisager de réaliser ce même travail sur la formulation des

déformations visqueuses. D'autre part, la méthode de sauts de cycles, qui n'a pas été programmée dans ces travaux, peut être avantageusement envisagée pour les modèles temporels. Ce dernier point devrait diminuer considérablement les coûts de temps de calcul. Rappelons néanmoins que nous avons construit un modèle « en cycles » à partir de l'intégration analytique de la loi d'endommagement temporelle. Ces deux approches conduisent donc à des résultats quasi identiques et nous disposons donc de deux approches très complémentaires.

Le travail sur l'identification anisotherme doit être approfondi. Même si nous n'avons pas cherché à illustrer ce point, le modèle proposé est déjà anisotherme. Il suffit juste pour cela de disposer de l'histoire du champ de température et d'utiliser à chaque instant, en chaque point d'une structure, les coefficients « matériau » à la température correspondante. Néanmoins, rendre « physiquement » anisotherme le modèle semble une perspective à **plus long terme**, nécessitant l'étude et la formulation mécanique des couplages avec la physique-chimie pour prendre en compte les éventuelles évolutions des propriétés de la résine. Il s'agira alors de passer d'un modèle de prévision de la durée de vie en fatigue à un modèle de durabilité qui devra inclure par exemple les travaux menés à l'Institut Pprime de Poitiers sur le vieillissement thermique et humide de ce type de matériaux.

A plus long terme également il sera nécessaire de traiter correctement le passage à la pièce en prenant en compte d'une part les gradients de contrainte et d'autre part les effets hors-plan sur le comportement en fatigue. Ces deux aspects nous paraissent essentiel en particulier pour traiter le problème de la nocivité des défauts (défauts initiaux issus de la fabrication ou en service par exemple induits par des chocs). En effet, le but serait de développer les outils capables de répondre à la difficile question : est-ce que ces défauts peuvent se propager lors de chargement de fatigue ?

Enfin, le dernier point juste esquissé dans cette thèse est le passage à une démarche probabiliste complète qui permet d'intégrer les différentes sources d'incertitude :

- La variabilité du matériau (variation locale du taux de fibres, dispersion de la probabilité de rupture des fibres, état local de la résine,...).
- La méconnaissance sur certains couplages par exemple ou sur les effets de sollicitations non planes.
- L'incertitude sur les mesures expérimentales
- Les erreurs de modèles

Le but est alors de permettre des estimations de durée de vie qui tiennent compte de ces différents aspects pour avoir une confiance suffisante dans les prévisions et les simulations afin de les utiliser plus intimement dans les phases de certification des structures aéronautiques.

REFERENCES

[**Abdelal et al., 2002**] ; G.F. Abdelal, A. Caceres et E.J. Barbero, A micro-mechanics damage approach for fatigue of composite materials, *Composite Structures*, vol.56, no.4, pp.413-422

[**Aiello. 2001**] : G. Aiello. Utilisation des composites à matrice céramique SiCf/SiC comme matériau de structure de composants internes du tore d'un réacteur à fusion. *Thèse de doctorat, Université d'Evry Val d'Essonne*, 2001.

[**Ansell et al. 1993**] ; M.P. Ansell, I.P. Bond et P.W. Bonfield, Constant life diagrams for wood composites and polymer matrix composites, *Proc 9th Int Conf Compos Mater (ICCM 9)*, 1993

[**Barbier, 2009**] : G. Barbier, Fatigue biaxiale à grand nombre de cycles : étude expérimentale et endommagement à deux échelles probabiliste, LMT Cachan, 2009

[**Basquin. 1910**] : Basquin, O.H. The exponential law of endurance tests, *Proceedings of ASTM*, Vol. 10(II), pp. 625-630.

[**Bastenaire. 1972**] : F. A. Bastenaire, New method for the statistical evaluation of constant stress amplitude fatigue-test results, Tech. rep., ASTM, Philadelphia, PA, 1972

[**Berthelot. 1992**] : J.M. Berthelot. Matériaux composites, comportement mécanique et analyse des structures. Masson, Paris, 1992.

[**Besson et al., 2001**] : J. Besson, G. Cailletaud, J.-L. Chaboche, S. Forest, ; Mécanique non linéaire des matériaux, *Edition Lavoisier et Hermès*, 2001

[**Bizeul, 2009**] : M. Bizeul, Contribution à l'étude de la propagation de coupure en fatigue dans les revêtements composites tissés minces, *Thèse de Doctorat, Université de Toulouse*

[**Böhm et al., 2010**] : R. Böhm, M. Gude, W. Hufenbach. A phenomenologically based damage model for textile composites with crimped reinforcement, *Composites Science and Technology*, vol.70, no.1, pp.81-87

[**Boller, 1964**] ; K.H. Boller, Fatigue characteristics of RP laminates subjected to axial loading, *Modern Plastics*, pp. 145-150, 1964

[**Bond et Ansell, 1998a**] ; I.P. Bond, M.P. Ansell, Fatigue properties of jointed wood composites, Part I Statistical analysis, fatigue master curves and constant life diagrams, *J Mater Sci*, 1998

[**Bond et Ansell, 1998b**] ; I.P. Bond, M.P. Ansell, Fatigue properties of jointed wood composites, Part II Life prediction analysis for variable amplitude loading, *J Mater Sci*, 1998

[**Bond, 1999**] ; I.P. Bond, Fatigue life prediction for GRP subjected to variable amplitude loading, *Compos Part A*, 1999

[**Cantournet. 2002**] : S.Cantournet, Endommagement et fatigue des élastomères, *Mécanique des matériaux solides*, 2002

[**Chaboche, 1974**] : J.-L. Chaboche, Une loi différentielle d'endommagement de fatigue avec

cumulation non linéaire. *Rev. Française de Mécanique* 1974;50-51

[**Chaudonneret, 1993**] A simple and efficient multiaxial fatigue damage model for engineering applications of macro-crack initiation, *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol.115, no.4, pp.373-379

[**Couegnat, 2008**]; G. Couegnat, Approche multiéchelle du comportement mécanique de matériaux composites à renfort tissé, *Thèse de Doctorat, Université Bordeaux 1*

[**Chevalier, 1991**] : Y. Chevalier, Critère de rupture des composites : Approche macroscopique, *Technique de l'ingénieur*

[**Ciré Sall, 2012**] : Amadou Ciré Sall, Comportement dynamique d'un redresseur de turbomachine aéronautique : effet de désaccordage, *Thèse de doctorat, Ecole centrale de Lyon*, 2012

[**De Luycker, 2009**] : E. De Luycker, *Simulation et experimentation en mise en forme de renforts composites 3D interlocks*, 2009, Thèse de doctorat, INSA Lyon

[**Desmorat et al., 2010**] : R. Desmorat, Dissymétrie de comportement élastique anisotrope couplé ou non à l'endommagement, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics*, vol.328, no.6, pp.445-450, 2010

[**Desmorat et al., 2015**] : R. Desmorat, L. Angrand, P. Gaborit, M. Kaminski, C. Rakotoarisoa, On the introduction of a mean stress in kinetic damage evolution laws for fatigue, *International Journal of Fatigue*, 2015

[**Diao et al., 1999**] ; X. Diao, L.B. Lessard et M.M. Shokrieh, Statistical model for multiaxial fatigue behavior of unidirectional plies, *Composites Science and Technology*, vol.59, no.13, pp.2025-2035

[**Diao et al., 2003**] ; X. Diao, L. Ye and Y.W. Mai, A statistical study of the fatigue performance of fibre-reinforced composite laminates, *Fatigue in composites: Science and technology of the fatigue response of fibre-reinforced plastics* édité par B.Harris, Chapitre 16, pp.442-469

[**Dodson, 1994**] : B. Dodson, Weibull Analysis, *ASQC Quality Press*, Milwaukee

[**Futji et al. 1993**] : Fujii T., Amijima S., et Okubo K., Microscopic fatigue processes in a plain-weave glass-fibre composite, *Composites Science and Technology*, vol.49, no.4, pp.327-333

[**Gerber, 1874**] ; W. Gerber, Bestimmung der zulossigne Spannungen in eisin Constructionen, *Z. Bayer Arch. Ing.*, 1874

[**Goodman, 1899**] ; J. Goodman, *Mechanics Applied to Engineering*, New York, Longman Green and Co, 1899

[**Gornet et Ijaz. 2011**] : L.Gornet, H.Ijaz, A high-cyclic elastic fatigue damage model for carbon fibre epoxy matrix laminates with different mode mixtures, *Article Journal Elsevier*, 2011

[**Govindje et Simo, 1991**] ; S. Govindjee and J.C. Simo, A Micro-Mechanically Based Continuum Damage Model for Carbon Black Filled Rubbers Incorporating Mullins' Effect, *J. Mech. Phys. Sol.*, 39, 87-112, 1991

[**Grail, 2013**] ; G. Grail, Approche multimodèle pour la conception de structures composites à renfort tissé, *Thèse de doctorat, Université d'Orléans* 2013

[**Guillaumat, 1996**] : L. Guillaumat, J. Lamon ; Probabilistic – Statistical Simulation of the nOn-Linear Mechanical behavior of a Woven SiC/SiC Composite, *Composite Science and Technology*, 1996

[**Guillaumat, 2005**] : L. Guillaumat, Z. Hamdoun ; Reliability model of drilled composite materials, *Composite Science and Technology*, 1996

[**Gurtin and Francis, 1981**] : M.E. Gurtin, E.C. Francis, Simple rate-independent model for damage, *J. Spacecraft*, 18: 225-286

[**Hahn, 1979**] ; H.T. Hahn, Fatigue behavior and life prediction of composite laminates, in Tsai S W, *Composite Materials : Testing and Design (Fifth Conference)*, ASTM STP 674, PP. 383 – 417, 1979

[**Halpin et al., 1973**] ; J.C. Halpin, K.L. Jerina and T.A. Johnson, Characterization of composites for the purpose of reliability evaluation, *Analysis of Test Methods for High Modulus Fibers and Composites*, ASTM STP 521, pp.5-64

[**Harwood et al., 1965**] ; J.A.C. Harwood, L. Mullins and A.R. Payne, Tensile stress softening effects in pure gum and filler loaded vulcanizates, *Journal of Polymer Science Part B : Polymer Letters*, vol. 3, pp. 119-122, 1965

[**Hémon, 2010**] ; E. Hémon, Modèle multi-niveaux de prévision des durées de vie en fatigue des structures en composites à matrice céramique, Rapport ONERA , No.RA 1/17532 DMSC

[**Hémon, 2013**] ; E. Hémon, Modèle multi-niveaux de prévision des durées de vie en fatigue des structures composites à matrice céramique pour usage en turbomachines aéronautiques, *Thèse de Doctorat, Université de Bordeaux 1 / Onera (non soutenue à de la rédaction de ce mémoire)*

[**Henry. 2013**] : Henry. J, Mécanismes d'endommagement en fatigue dans les tissus multicouches 3Ds, Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne

[**Hochard et al., 2001**] : C. Hochard, P.A. Aubourg et J.P. Charles, Modelling of the mechanical behaviour of woven-fabric CFRP laminates up to failure, *Composites Science and Technology*, vol.61, no.2, pp.221-230

[**Hochard, 2006**] : C. Hochard, J. Payan et C. Bordreuil, A progressive first ply failure model for woven ply CFRP laminates under static and fatigue loads, *International Journal of Fatigue*, vol.28, no.10, pp.1270-1276

[**Hochard, 2009**] : C. Hochard, S. Miot, N. Lahellec, F. Mazerolle, M. Herman et J.P. Charles, Behaviour up to rupture of woven ply laminate structures under static loading conditions, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, vol.40, no.8, pp.1017-1023

[**Hochard, 2010**] : C. Hochard et Y. Thollon, A generalized damage model for woven ply laminates under static and fatigue loading conditions, *International Journal of Fatigue*, vol.32, no.1, pp.158-165

[**Hurmane, 2015**] ; A. Hurmane, Analyse par un dialogue essais/calculs de la tenue en compression de structures composites tissées 3D, Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne

[**Iannucci, 2006**] ; L.Iannucci, Progressive failure modelling of woven carbon composite under impact, *International Journal of Impact Engineering*, vol.32, no.6, pp.1013-1043

[**Iannucci, 2006**] ; L.Iannucci et M.L. Willows, An energy based damage mechanics approach to modelling impact onto woven composite materials - Part I: Numerical models, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, vol.37, no.11, pp.2041-2056

[**Jitendra et al., 2008**] : S. Jitendra, Tate, Ajit D Kelkar, Stiffness degradation model for biaxial braided composites under fatigue loading, *Composites Part B: Engineering*, v. 39, pp. 548-555

[**Johnson, 2001**] ; A.F. Johnson, Modelling fabric reinforced composites under impact loads, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, vol.32, no.9, pp.1197-1206

[**Johnson et al., 2001**] ; A.F. Johnson, A.K. Pickett et P. Rozycki, Computational methods for predicting impact damage in composite structures, *Composites Science and Technology*, vol.61, no.15, pp.2183-2192

[**Kachanov. 1986**] : L.M. Kachanov, Introduction to continuum damage mechanics, *Mechanics of Elastic Stability*, vol. 10, 1986

[**Kaminski. 2007**] : M. Kaminski, Modélisation de l'endommagement en fatigue des superalliages monocristallins pour aubes de turbine en zone de concentration de contrainte, *PhD thesis ENSMP*, 2007

[**Kelkar et Whitcomb. 2009**] : A.D. Kelkar et J.D. Whitcomb, Characterization and Structural Behavior of Braided Composites, Rapport , No.DOT/FAA/AR-08/52

[**Krajcinovic et Lemaitre, 1987**] ; D. Krajcinovic, J. Lemaitre, Micromechanical Basis of Phenomenological Models, *Continuum Damage Mechanics : Theory and Application*, pp. 195-206, 1987

[**Ladevèze et LeDantec, 1992**] : P. Ladevèze et E. LeDantec, Damage modelling of the elementary ply for laminated composites, *Composites Science and Technology*, vol.43, no.3, pp.257-267

[**Ladevèze et Lubineau, 2002**] ; P. Ladevèze et G. Lubineau, An enhanced mesomodel for laminates based on micromechanics, *Composites Science and Technology*, vol.62, no.4, pp.533-541

[**Laurin, 2005**] : F. Laurin, Approche multiéchelle des mécanismes de ruine progressive des matériaux stratifiés et analyse de la tenue de structures composites. *Thèse de doctorat*, Université de Franche-Comté, 2005.

[**Laurin et al, 2007**] : F. Laurin, N. Carrère et J.F. Maire, A multiscale progressive failure approach for composite laminates based on thermodynamical viscoelastic and damage models, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, vol.38, no.1, pp.198-209

[**Laurin, 2010**] : F. Laurin, Implantation de loi de comportement dans ZebFront, *Communication interne Onera*

[**Laurin et al, 2011**] : F. Laurin, N. Carrère, C. Huchette et J.F. Maire. Proposition d'une approche hybride d'endommagement et de rupture pour la prévision de la tenue de structures composites, *Journées Nationales des Composites 17 (JNC17)*, Poitiers-Futuroscope, France

[**Laurin et al, 2013**] : F. Laurin, N. Carrère, C. Huchette et J.F. Maire, A multiscale hybrid approach for damage and final failure predictions of composite structures, *Journal of Composite Materials* en ligne (doi:10.1177/0021998312470151)

[**Lemaitre et Chaboche, 1985**] : J. Lemaitre, J-L. Chaboche, Mécanique des matériaux Solides, Dunod, 1985

[**Lemaitre et Chaboche, 1990**] : J. Lemaitre, J-L. Chaboche, Mechanics of solids materials. Cambridge Univ. Press, 1990.

[**Lemaitre, 1992**] : J. Lemaitre, A course on Damage Mechanics. Springer Verlag, Berlin, 1992

[**Lemaitre et Desmorat, 1999**] J. Lemaitre, R. Desmorat, M. Sauzay, Loi d'évolution de l'endommagement anisotrope, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Astronomy*, vol.327, no.12, pp.1231-1236

[**Lemaitre et Desmorat. 2005**] : Engineering Damage Mechanics: ductile, creep, fatigue and brittle failures, Springer

[**Lomov. 2000**] : S. v. Lomov, A. V. Gusakov, G. Huysmans, A. Prodromou & I. Verpoest, Textile geometry preprocessor for meso-mechanical models of woven composites, *Composites Science and Technology*, vol. 60. No. 11, pages 2083 – 2095, 2000

[**Lubineau, 2002**] ; G. Lubineau, Sur un mésomodèle d'endommagement des composites stratifiés: relations micro-méso, possibilités et limites, *Thèse de Doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan*

[**Lubineau, 2002**] ; G. Lubineau, P.Ladevèze et D. Violeau, Durability of CFRP laminates under thermomechanical loading: A micro-meso damage model, *Composites Science and Technology*, vol.66, pp.983-992

[**Maimi, 2007**] : P. Maimi, P.P. Camanho, J.A. Mayugo, et C.G. Davila, A continuum damage model for composite laminates: Part I - Constitutive model, *Mechanics of Materials*, vol.39, no.10, pp.897-908

[**Maire. 1992**] : J.F. Maire, Etudes théorique et expérimentale du comportement de matériaux composites en contraintes planes, *Thèse de Doctorat, Université de Franche-Comté*

[**Maire et Pacou, 1996**] ; J.F. Maire and D. Pacou, Essais de traction-compression-torsion sur tubes composites céramique-céramique, *10ème Journées Nationales sur les Composites (JNC10)*

[**Marcin. 2010**] : L. Marcin, Modélisation du comportement, de l'endommagement et de la rupture de matériaux composites à renforts tissés pour le dimensionnement robuste de structures, *Thèse de Doctorat, Université Bordeaux 1 - Onera*

[**Marcin Et al., 2011**] : L. Marcin, J.F Maire, et N. Carrère, Development of a Macroscopic Damage Model for Woven Ceramic Matrix Composites, *International Journal of Damage Mechanics*, vol.20, pp.939-957

[**Marmi, 2009**] : A. Marmi, A. Habraken, L. Duchene, Multiaxial fatigue damage modelling at macro scale of Ti6AL4V alloy. *International Journal of Fatigue* 2009;31:2031-40.

[**Miehe. 1995**] : C. Miehe, Discontinuous and continuous damage evolution in Ogden-type large-strain elastic materials, *European journal of mechanics. A. Solids*, 1995, vol. 14, p.697-720

[**Mouritz et al., 1999**] : A.P. Mouritz, M.K. Banister, P.J. Falzon, K.H. Leong, *Review of applications for advanced three-dimensional fibre textile composites*, *Composites Part A*, 1999, 30:1445-61

[**Mullins, L. et Tobin, N.R., 1965**] ; L. Mullins et N.R. Tobin, Stree softening in rubber vulcanizates, *Journal of Applied Polymer Science*, vol. 9, pp. 2993-3009, 1965

[**Mullins, 1969**] ; L. Mullins, *Softening of Rubber by deformation*, *Rubber Chemistry and Technology*, vol. 42, no. 1, pp. 339-362, 1969

[**Ngarmaïm et al. 2014**] : N. Ngarmaïm, B. Tikri, B. Bassa, N. Kimtanger, F. Pennec et J-L. Robert, *A New Expression of the Curve S-N in Fatigue based on the Concept of the "Weakest Link" of Weibull*, *Global Journal of Research in Engineering : A Mechanical and Mechanics Engineering*, V. 14 2014

[**Nairn et Hu, 1992**] ; J.A. Nairn et S. Hu, The initiation and growth of delaminations induced by matrix microcracks in laminated composites, *International Journal of Fracture*, vol.57, no.1, pp.1-24

[**Nairn, 2000**] ; J.A. Nairn 2.12 - Matrix Microcracking in Composites, *Comprehensive Composite Materials* édité par Editors-in-Chief: á-á Anthony Kelly and Carl, Z., pp.403-432

[**Nairn et Hu, 1992**] ; J.A. Nairn et S. Hu, Matrix microcracking, *Damage Mechanics of Composite Materials* édité par Talreja, R., pp.187-241

[**Otin, 2007**] : S. Otin, Lois d'endommagement incrémentales isotrope/anisotropes pour applications thermomécaniques complexes, *LMT Cachan*, 2007

[**Osada et al., 2003**] : T. Osada, A. Nakai, H. Hamada. Initial fracture behavior of satin woven fabric composites, *Composite Structures*, vol.61, no.4, pp.333-339

[**Pailhes et al., 2002**] ; J. Pailhes, G. Camus et J. Lamon, A constitutive model for the mechanical behavior of a 3D C/C composite, *Mechanics of Materials*, vol.34, no.3, pp.161-177

[**Pandita et al., 2001**] : S.D. Pandita, G. Huysmans, M. Weyers, I. Verpoest, Tensile fatigue behaviour of glass plain-weave fabric composites in on- and off-axis directions, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, vol.32, no.10, pp.1533-1539

[**Pandita et Verpoest, 2004**] : S.D. Pandita, I. Verpoest, Tension-tension fatigue behaviour of knitted fabric composites, *Composite Structures*, vol.64, no.2, pp.199-209

[**Pavan et Hochard, 2002**] ; J. Payan et C. Hochard, Damage modelling of laminated carbon/epoxy composites under static and fatigue loadings, *International Journal of Fatigue*, vol.24, pp.299-306

[**Peerlings. R.H.J. 1999**] : Enhanced damage modelling for fracture and fatigue, *PhD*

[**Philippidis et Passipoularidis, 2007**] : T.P. Philippidis, V.A. Passipoularidis, Residual strength after fatigue in composites: Theory vs. experiment, *Internaional Journal of Fatigue*, 2104 - 2116

[**Poncelet et al., 2010**] : M. Poncelet, C. Doudard, S. Calloch, B. Weber, F. Hild, Probabilistic multiscale models and measurements of self-heating under multiaxial high cycle fatigue, *J. of Mech. And Phys of Sol.* 2010

[**Rakotoarisoa. C. 2012**] : C. Rakotoarisoa, F. Laurin, M. Hirsekorn, J.-F. Maire, L. Olivier, Development of a fatigue model for 3D woven polymer matrix composites based on a damage model, *ECCM15 Venice, Italy*

[**Rakotoarisoa. C. 2013**] : Prévision de la durée de vie en fatigue des composites à matrice organique tissés 3D, *Thèse de doctorat, Université Technologique de Compiègne, France*

[**Ramani et Williams, 1977**] ; S.V. Ramani, D.P. Williams, Notched and unnotched fatigue behavior of angle-ply graphite/epoxy composites, *Fatigue and Filamentary Composite Materials*, 1977

[**Reifsnider et al., 1982**] : K.L. Reifsnider, R. Jamison, Fracture of fatigue-loaded composite laminates, *International Journal of Fatigue*

[**Reifsnider, 1990**] : K.L. Reifsnider, G. Zhanjun, A micromechanics model for composites under fatigue loading, *International Journal of Fatigue*, no. 2, pp.149 - 156

[**Revest. N. 2011**] : N. Revest. Comportement en fatigue de pièces épaisses en matériaux composites, *Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris – Centre des Matériaux*

[**Schneider, 2011**] : Mécanismes d'endommagement dans les pièces composites multicouches à renforts interlock, *Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 2011*

[**Sendekyj, 1981**] ; G. P. Sendekyj, "Fitting models to composite materials fatigue data." Test methods and design allowables for fibrous composites. ASTM STP 734 (1981): 245-260.

[**Simo, 1987**] ; C. Simo, An obstruction method for the destruction of invariant curves, *Physica D : Nonlinear Phenomena*, vo. 26, pp. 181 – 192, 1987

[**Simo et Ju, 1989**] ; C. Simo et J.W. Ju, On continuum damage-elastoplasticity at finite strains, *A computational framework*, 1989

[**Sidoroff et al., 1987**] ; F. Sidoroff and B. Subiago, Fatigue damage modelling of composite materials from bending test, *6th International Conference on Composite Materials and 2nd European Conference on Composite Materials*, vol.4, pp.4.32-4.39, 1987

[**Song et Otani, 1998**] : D.Y. Song, N. Otani, Approximate estimation of fatigue strength of polymer matrix composites by material properties, *Materials Science and Engineering: A*, vol.254, pp.200-206, 1998

[**Strohmeier, 1914**] : C. E. Strohmeier, The determination of fatigue limits under alternating stress conditions, *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 90(620):411–425, 1914

[**Suffis et al, 2003**] ; A. Suffis, T.A.A. Lubrecht et A. Combescure, Damage model with delay effect: Analytical and numerical studies of the evolution of the characteristic damage length, *International Journal of Solids and Structures*, vol.40, no.13-14, pp.3463-3476

[**Subramanian et al., 1995**] : S. Subramanian, K.L. Reifsnider, W.W. Stinchcomb, A cumulative damage model to predict the fatigue life of composite laminates including the effect of a fibre-matrix interphase, *International Journal of Fatigue*, no. 5, pp.343 – 351

[**Sutherland et Mandell, 2004**] : H.J. Sutherland, J.F. Mandell, The effect of mean stress on damage predictions for spectral loading of fiberglass composite coupons, *EWEA, Special Topic Conference 2004 : The science of making torque from the wind*, 2004

[**Taira, 1973**] : Relationship between thermal and low-cycle fatigue at elevated temperatures," Fatigue at Elevated Temperatures, ASTM STP 520, American Society for Testing and Materials, 80-101, 1973

[**Takemura et Fudji, 1994**] : K. Takemura et T. Fudji, Fatigue Damage and Fracture of Carbon Fabric/Epoxy Composites under Tension-Tension Loading, *The Japan Society of Mechanical Engineers*, vol.37, no.4, pp.472-480

[**Tate et Kelkar, 2008**] : J.S. Tate et A.D. Kelkar, Stiffness degradation model for biaxial braided composites under fatigue loading, *Composites Part B: Engineering*, vol.39, no.3, pp.548-555

[**Thionnet, 2002**] ; A. Thionnet, L. Chambon et J. Renard, A theoretical and experimental study to point out the notion of loading mode in damage mechanics: Application to the identification and validation of a fatigue damage modeling for laminates composites, *International Journal of Fatigue*, vol.24, pp.147-154

[**Thollon, 2009**] : Y. Thollon, Analyse du comportement à rupture de composites stratifiés constitués de plis tissés sous chargements statique et de fatigue, *Thèse de Doctorat, Aix-Marseille Université - Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique*

[**Thollon et Hochard, 2009**] : Y. Thollon, C. Hochard, A general damage model for woven fabric composite laminates up to first failure, *Mechanics of Materials*, vol.41, no.7, pp.820-827

[**Tsai 1971**] : S.W. Tsai & E.M. Wu. A general theory of strenght for anisotropic material. *Journal of Composite Materials*, vol. 5, pages 58–80, 1971.

[**Tserpes, 2004**] : K.I. Tserpes, P. Papanikos, G. Labeas, et S. Pantelakis, Fatigue damage accumulation and residual strength assessment of CFRP laminates, *Composite Structures*, vol.63, no.2, pp.219-230

[**Van Paepegem W. et Degrieck J., 2001**] : W. Van Paepegem et J. Degrieck, Fatigue degradation modelling of plain woven glass/epoxy composites, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, vol.32, no.10, pp.1433-1441

[**Verhoef. RC. 2001**] : Residual Strength of FRP Materials : Development of test set-up and numerical model unsing probability aspects, *Rapport de stage à TU-Delft, Pays-Bas*

[**Verpoest. 2005**] : I. Verpoest & S. V. Lomov, Virtual textile composites software WiseTex : Integration with micro-mechanical, permeability and structural analysis, *Composites Science and Technology*, vol. 65, pages 2563-2574, 2005

[**Whitworth. 1990**] : Whitworth. H.A, Cumulative Damage in Composites, *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 112, no.3, pp. 358-361

[**Wöhler. 1870**] : Wöhler A. *Zeitschrift Bauwesen*, 1870, 20 (Spalten), p. 73-106

[**Yeh. 1994**] : H.Y Yeh & C.H. Kim. The Yeh-Stratton criterion for composite materials. *Journal of composite materials*, vol. 28, pages 926–939, 1994.

ANNEXE 1. CONFIDENTIEL

ANNEXE 2. CALCUL DE LA MATRICE JACOBIENNE ET DE LA MATRICE TANGENTE COHERENTE

🔧 Matrice Jacobienne

Résidu sur les variables d'endommagement pour le calcul de la Jacobienne

$$\varepsilon_{connu}, d_k^{estimé}, \eta_k^{estimé}$$

Etape 1 : calcul des déformations résiduelles et des dérivées des déformations résiduelles par rapport aux variables d'endommagement

- Déformation résiduelle

$$\varepsilon_{(n+1)}^r = \varepsilon_{(n)}^r + \Delta \varepsilon^r$$

$$\Delta \varepsilon^r = \sum_{k=1}^2 \left(\frac{\chi_k}{r_k} (e^{r_k d_{k(n+1)}} - e^{r_k d_{k(n)}}) \mathbb{R}_k : \mathbf{e}_k^* \right)$$

- Dérivée des déformations résiduelles par rapport aux variables d'endommagement

$$\frac{\partial \varepsilon^r}{\partial d_1} = \frac{\partial \Delta \varepsilon^r}{\partial d_1} = (\chi_1 e^{r_1 d_{1(n+1)}} \mathbb{R}_1 : \mathbf{e}_1^*)$$

$$\frac{\partial \varepsilon^r}{\partial d_2} = \frac{\partial \Delta \varepsilon^r}{\partial d_2} = (\chi_2 e^{r_2 d_{2(n+1)}} \mathbb{R}_2 : \mathbf{e}_2^*)$$

Etape 2 : calcul des effets de l'endommagement sur la souplesse de la matrice

$$\mathbb{H}_{1m} = \eta_{1(estimé)} \mathbb{H}_1^+ + (1 - \eta_{1(estimé)}) \mathbb{H}_1^-$$

$$\mathbb{H}_{2m} = \eta_{2(estimé)} \mathbb{H}_2^+ + (1 - \eta_{2(estimé)}) \mathbb{H}_2^-$$

$$\mathbb{H}_{3M} = \eta_{3(estimé)} \mathbb{H}_3^+ + (1 - \eta_{3(estimé)}) \mathbb{H}_3^-$$

Etape 3 : calcul du tenseur des souplesses

$$\mathbb{S}^{eff} = \mathbb{S}^0 + \sum_{k=1}^3 \mathbb{H}_k d_{k(estimé)}$$

Etape 4 : calcul du tenseur des rigidités

$$\mathbb{C}^{eff} = [\mathbb{S}^{eff}]^{-1}$$

Etape 5 : Calcul de l'index des désactivations des fissures et test pour vérifier si l'index calculé est le même que celui imposé au début de la boucle, si ce n'est pas le cas, poursuivre les calculs avec la nouvelle valeur de l'index (et cela pour chaque mécanisme de dégradation)

$$\eta_k = \mathcal{H} \left((\mathbb{C}^{eff} : \varepsilon^*)_{kk} \right)$$

Etape 6 : Calcul de déformations élastiques et calcul des dérivées de la déformation élastique par rapport aux variables d'endommagement

- Déformation élastique

$$\varepsilon_{(n+1)}^e = \varepsilon_{(connu)}^* - \mathbb{S}^{eff} : \mathbb{C}^0 : \varepsilon_{(n+1)}^r = \varepsilon_{connu} - \mathbb{S}^{eff} : \mathbb{C}^0 : \varepsilon_{(n+1)}^r$$

- Dérivées de la déformation élastique par rapport aux variables d'endommagement

$$\frac{\partial \varepsilon_{(n+1)}^e}{\partial d_1} = - \frac{\partial \mathbb{S}^{eff}}{\partial d_1} : \mathbb{C}^0 : \varepsilon_{(n+1)}^r - \mathbb{S}^{eff} : \mathbb{C}^0 : \frac{\partial \varepsilon^r}{\partial d_1}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{(n+1)}^e}{\partial d_1} = - (\mathbb{H}_{1m} : \mathbb{C}^0) : \varepsilon_{(n+1)}^r - \mathbb{S}^{eff} : \mathbb{C}^0 : \frac{\partial \varepsilon^r}{\partial d_1}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{(n+1)}^e}{\partial d_2} = - (\mathbb{H}_{2m} : \mathbb{C}^0) : \varepsilon_{(n+1)}^r - \mathbb{S}^{eff} : \mathbb{C}^0 : \frac{\partial \varepsilon^r}{\partial d_2}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{(n+1)}^e}{\partial d_3} = - (\mathbb{H}_{3M} : \mathbb{C}^0) : \varepsilon_{(n+1)}^r$$

Etape 7 : Calcul de déformations mécaniques (pour rester cohérente avec les travaux de carole et dans les perspectives d'ajout de la viscosité) et calcul des dérivées de la déformation mécanique par rapport aux variables d'endommagement

- Déformation mécanique

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^d = \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^e + \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{ve} = \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^e$$

- Dérivée de la déformation mécanique

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^d}{\partial d_1} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^e}{\partial d_1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^d}{\partial d_2} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^e}{\partial d_2}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^d}{\partial d_3} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^e}{\partial d_3}$$

Etape 8 : Calcul de déformations mécaniques positive et calcul des dérivées de la déformation mécanique positive par rapport aux variables d'endommagement

- Déformation mécanique positive

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{dk+} = \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{dk+}(\boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^e)$$

- Dérivée de la déformation mécanique positive

- Déformation mécanique positive qui endommage en sens chaîne // par rapport aux trois variables d'endommagement

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d1+}}{\partial d_1} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d1+}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^e} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^e}{\partial d_1} ; \quad \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d1+}}{\partial d_2} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d1+}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^e} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^e}{\partial d_2} ; \quad \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d1+}}{\partial d_3} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d1+}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^e} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^e}{\partial d_3}$$

- Déformation mécanique positive qui endommage en sens trame // par rapport aux trois variables d'endommagement

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d2+}}{\partial d_1} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d2+}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^e} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^e}{\partial d_1} ; \quad \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d2+}}{\partial d_2} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d2+}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^e} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^e}{\partial d_2} ; \quad \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d2+}}{\partial d_3} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d2+}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^e} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^e}{\partial d_3}$$

- Déformation mécanique positive qui endommage en hors-plan // par rapport aux trois variables d'endommagement

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d3+}}{\partial d_1} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d3+}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^e} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^e}{\partial d_1} ; \quad \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d3+}}{\partial d_2} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d3+}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^e} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^e}{\partial d_2} ; \quad \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d3+}}{\partial d_3} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d3+}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^e} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^e}{\partial d_3}$$

Etape 9 : Calcul des forces motrices et des dérivées des forces motrices

- Forces motrices

$$y_1 = \frac{1}{2} \left[C_{11}^0 \varepsilon_1^{d1+2} + b_{55} C_{55}^0 \varepsilon_5^{d1+2} + b_{66} C_{66}^0 \varepsilon_6^{d1+2} \right]$$

$$y_2 = \frac{1}{2} \left[C_{22}^0 \varepsilon_2^{d2+2} + b_{44} C_{44}^0 \varepsilon_4^{d2+2} + b_{66} C_{66}^0 \varepsilon_6^{d2+2} \right]$$

$$y_3 = \frac{1}{2} \left[C_{33}^0 \varepsilon_3^{d3+2} + b_{44} C_{44}^0 \varepsilon_4^{d3+2} + b_{55} C_{55}^0 \varepsilon_5^{d3+2} \right]$$

Ou encore

$$y_1 = {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d1+} : \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d1+}$$

$$y_2 = {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d2+} : \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d2+}$$

$$y_3 = {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d3+} : \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d3+}$$

- Dérivées des forces motrices par rapport aux variables d'endommagement

$$\frac{\partial y_1}{\partial d_1} = {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d1+} : \mathbb{C}^0 : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d1+}}{\partial d_1} ; \quad \frac{\partial y_1}{\partial d_2} = {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d1+} : \mathbb{C}^0 : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d1+}}{\partial d_2} ; \quad \frac{\partial y_1}{\partial d_3} = {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d1+} : \mathbb{C}^0 : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d1+}}{\partial d_3}$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial d_1} = {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d2+} : \mathbb{C}^0 : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d2+}}{\partial d_1} ; \quad \frac{\partial y_2}{\partial d_2} = {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d2+} : \mathbb{C}^0 : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d2+}}{\partial d_2} ; \quad \frac{\partial y_2}{\partial d_3} = {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d2+} : \mathbb{C}^0 : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d2+}}{\partial d_3}$$

$$\frac{\partial y_3}{\partial d_1} = {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d3+} : \mathbb{C}^0 : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d3+}}{\partial d_1} ; \quad \frac{\partial y_3}{\partial d_2} = {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d3+} : \mathbb{C}^0 : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d3+}}{\partial d_2} ; \quad \frac{\partial y_3}{\partial d_3} = {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d3+} : \mathbb{C}^0 : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{(n+1)}^{d3+}}{\partial d_3}$$

Etape 10 : Calcul des déformations équivalentes et des dérivées des déformations équivalentes

- Déformation équivalente

$$\begin{aligned} \varepsilon_{eq1(n+1)} &= \sqrt{\frac{2y_{1(n+1)}}{C_{11}^0}} \\ \varepsilon_{eq2(n+1)} &= \sqrt{\frac{2y_{2(n+1)}}{C_{22}^0}} \\ \varepsilon_{eq3(n+1)} &= \sqrt{\frac{2y_{3(n+1)}}{C_{33}^0}} \end{aligned}$$

- Dérivées des déformations équivalentes

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{eq1(n+1)}}{\partial d_1} &= \frac{1}{\sqrt{2y_1 C_{11}^0}} \frac{\partial y_1}{\partial d_1} ; & \frac{\partial \varepsilon_{eq1(n+1)}}{\partial d_2} &= \frac{1}{\sqrt{2y_1 C_{11}^0}} \frac{\partial y_1}{\partial d_2} ; & \frac{\partial \varepsilon_{eq1(n+1)}}{\partial d_3} &= \frac{1}{\sqrt{2y_1 C_{11}^0}} \frac{\partial y_1}{\partial d_3} \\ \frac{\partial \varepsilon_{eq2(n+1)}}{\partial d_1} &= \frac{1}{\sqrt{2y_2 C_{22}^0}} \frac{\partial y_2}{\partial d_1} ; & \frac{\partial \varepsilon_{eq2(n+1)}}{\partial d_2} &= \frac{1}{\sqrt{2y_2 C_{22}^0}} \frac{\partial y_2}{\partial d_2} ; & \frac{\partial \varepsilon_{eq2(n+1)}}{\partial d_3} &= \frac{1}{\sqrt{2y_2 C_{22}^0}} \frac{\partial y_2}{\partial d_3} \\ \frac{\partial \varepsilon_{eq3(n+1)}}{\partial d_1} &= \frac{1}{\sqrt{2y_3 C_{33}^0}} \frac{\partial y_3}{\partial d_1} ; & \frac{\partial \varepsilon_{eq3(n+1)}}{\partial d_2} &= \frac{1}{\sqrt{2y_3 C_{33}^0}} \frac{\partial y_3}{\partial d_2} ; & \frac{\partial \varepsilon_{eq3(n+1)}}{\partial d_3} &= \frac{1}{\sqrt{2y_3 C_{33}^0}} \frac{\partial y_3}{\partial d_3} \end{aligned}$$

Etape 11 : Calcul des moyennes des déformations équivalentes et des dérivées

- Moyenne des déformations totales

$$\begin{cases} \varepsilon_{kk}^{ac}|_{(n+1)} = \varepsilon_{kk}^{ac}|_{(n)} + |\varepsilon_{kk}|_{(n+1)} - \varepsilon_{kk}|_{(n)} \\ I|_{(k)(n+1)} = I|_{(k)(n)} + \frac{1}{2} (\varepsilon_{kk}|_{(n+1)} + \varepsilon_{kk}|_{(n)}) |\varepsilon_{kk}|_{(n+1)} - \varepsilon_{kk}|_{(n)} \\ \check{\varepsilon}_{kk}|_{(n+1)} = \frac{I|_{(k)(n+1)}}{\varepsilon_{kk}^{ac}|_{(n+1)}} \end{cases}$$

$$\check{\varepsilon}_{11}|_{(n+1)} = \frac{I|_{(1)(n+1)}}{\varepsilon_{11}^{ac}|_{(n+1)}} ; \quad \check{\varepsilon}_{22}|_{(n+1)} = \frac{I|_{(2)(n+1)}}{\varepsilon_{22}^{ac}|_{(n+1)}} ; \quad \check{\varepsilon}_{33}|_{(n+1)} = \frac{I|_{(3)(n+1)}}{\varepsilon_{33}^{ac}|_{(n+1)}}$$

- Dérivées des moyennes de déformations totales

$$\frac{\partial \check{\varepsilon}_{kk}|_{(n+1)}}{\partial d_k} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \check{\varepsilon}_{11}|_{(n+1)}}{\partial d_1} &= 0 ; & \frac{\partial \check{\varepsilon}_{11}|_{(n+1)}}{\partial d_2} &= 0 ; & \frac{\partial \check{\varepsilon}_{11}|_{(n+1)}}{\partial d_3} &= 0 \\ \frac{\partial \check{\varepsilon}_{22}|_{(n+1)}}{\partial d_1} &= 0 ; & \frac{\partial \check{\varepsilon}_{22}|_{(n+1)}}{\partial d_2} &= 0 ; & \frac{\partial \check{\varepsilon}_{22}|_{(n+1)}}{\partial d_3} &= 0 \\ \frac{\partial \check{\varepsilon}_{33}|_{(n+1)}}{\partial d_1} &= 0 ; & \frac{\partial \check{\varepsilon}_{33}|_{(n+1)}}{\partial d_2} &= 0 ; & \frac{\partial \check{\varepsilon}_{33}|_{(n+1)}}{\partial d_3} &= 0 \end{aligned}$$

Etape 12 : Calcul des maximums de la déformation équivalente

$$\begin{aligned} \varepsilon_{eq(1)(n+1)}^{Max} &= \max(\varepsilon_{eq(1)(n+1)}, \varepsilon_{eq(1)(n)}) \\ \varepsilon_{eq(2)(n+1)}^{Max} &= \max(\varepsilon_{eq(2)(n+1)}, \varepsilon_{eq(2)(n)}) \\ \varepsilon_{eq(3)(n+1)}^{Max} &= \max(\varepsilon_{eq(3)(n+1)}, \varepsilon_{eq(3)(n)}) \end{aligned}$$

Etape 13 : Calcul des variables d'endommagement et des dérivées en fonction des variables d'endommagement

Si $\varepsilon_{eq(1)(n+1)} > \varepsilon_{eq(1)(n)}$

1 : si $\varepsilon_{eq(1)Max(n)} = 0$ et $\varepsilon_{eq(1)(n+1)} = \varepsilon_{eq(1)Max(n+1)}$: cas monotone seul

- Si $\varepsilon_{eq1(n+1)} > \varepsilon_{0(1)}$

- Si $\varepsilon_{eq1(n)} > \varepsilon_{0(1)}$

Calcul de l'endommagement monotone

$$d_{1(n+1)}^{eff} = d_{1\infty} - (d_{1\infty} - d_{1(n)}) e^{\left(\left(\frac{\langle \varepsilon_{eq1(n)} - \varepsilon_{0(1)} \rangle_+}{S_{0(1)}} \right)^{s_{0(1)+1}} - \left(\frac{\langle \varepsilon_{eq1(n+1)} - \varepsilon_{0(1)} \rangle_+}{S_{0(1)}} \right)^{s_{0(1)+1}} \right)}$$

- Sinon

$$d_{1(n+1)}^{eff} = d_{1\infty} - (d_{1\infty} - d_{1(n)}) e^{\left(- \left(\frac{\langle \varepsilon_{eq1(n+1)} - \varepsilon_{0(1)} \rangle_+}{S_{0(1)}} \right)^{s_{0(1)+1}} \right)}$$

- Sinon

$$d_{1(n+1)}^{eff} = d_{1(n)}^{eff}$$

Dérivée de la variable d'endommagement par rapport aux variables d'endommagement : cas monotone

$$\frac{\partial d_1^{eff}}{\partial d_1} = (d_{1\infty} - d_{1(n)}) \left(\left(\frac{\langle \varepsilon_{eq1(n)} - \varepsilon_{0(1)} \rangle_+}{S_{0(1)}} \right)^{s_{0(1)+1}} - \left(\frac{\langle \varepsilon_{eq1(n+1)} - \varepsilon_{0(1)} \rangle_+}{S_{0(1)}} \right)^{s_{0(1)+1}} \right) \frac{s_{0(1)} + 1}{S_{0(1)}} \left(\frac{\langle \varepsilon_{eq1(n+1)} - \varepsilon_{0(1)} \rangle_+}{S_{0(1)}} \right)^{s_{0(1)}} \frac{\partial \varepsilon_{eq1(n+1)}}{\partial d_1}$$

$$\frac{\partial d_1^{eff}}{\partial d_2} = (d_{1\infty} - d_{1(n)}) \left(\left(\frac{\langle \varepsilon_{eq1(n)} - \varepsilon_{0(1)} \rangle_+}{S_{0(1)}} \right)^{s_{0(1)+1}} - \left(\frac{\langle \varepsilon_{eq1(n+1)} - \varepsilon_{0(1)} \rangle_+}{S_{0(1)}} \right)^{s_{0(1)+1}} \right) \frac{s_{0(1)} + 1}{S_{0(1)}} \left(\frac{\langle \varepsilon_{eq1(n+1)} - \varepsilon_{0(1)} \rangle_+}{S_{0(1)}} \right)^{s_{0(1)}} \frac{\partial \varepsilon_{eq1(n+1)}}{\partial d_2}$$

$$\frac{\partial d_1^{eff}}{\partial d_3} = (d_{1\infty} - d_{1(n)}) \left(\left(\frac{\langle \varepsilon_{eq1(n)} - \varepsilon_{0(1)} \rangle_+}{S_{0(1)}} \right)^{s_{0(1)+1}} - \left(\frac{\langle \varepsilon_{eq1(n+1)} - \varepsilon_{0(1)} \rangle_+}{S_{0(1)}} \right)^{s_{0(1)+1}} \right) \frac{s_{0(1)} + 1}{S_{0(1)}} \left(\frac{\langle \varepsilon_{eq1(n+1)} - \varepsilon_{0(1)} \rangle_+}{S_{0(1)}} \right)^{s_{0(1)}} \frac{\partial \varepsilon_{eq1(n+1)}}{\partial d_3}$$

Sinon (2)

2 : cas fatigue combiné au monotone

$$\varepsilon_{eq(1)}^* = \varepsilon_{eq(1)}^{Max}$$

$$\kappa_1 = \varepsilon_{eq(1)}^* - m_{11} \check{\varepsilon}_{11}^e(n+1)$$

$$f_1 = \kappa_1 - \varepsilon_{0(1)}^f$$

- Si $f_1 > 0$

$$\kappa_{1(n)} = \varepsilon_{eq1(n)} - m_{11} \check{\varepsilon}_{11}^e(n+1)$$

$$f_{1(n)} = \kappa_{1(n)} - \varepsilon_{0(1)}^f$$

$$f_1^* = \max(0, f_{1(n)})$$

Calcul de l'endommagement de fatigue

$$d_1^* = d_{1\infty} - \left[(d_{1\infty} - d_{1(n)})^{1-\gamma_1} + (\gamma_1 - 1) \frac{S_1}{(s_1 + 1)} \left(\left(\frac{f_1}{S_1} \right)^{s_1+1} - \left(\frac{f_1^*}{S_1} \right)^{s_1+1} \right) \right]^{\frac{1}{1-\gamma_1}}$$

$$d_1^{eff} = d_{1\infty} - (d_{1\infty} - d_1^*) e^{\left(\left(\frac{\langle \varepsilon_{eq(1)}^* - \varepsilon_{0(1)} \rangle_+}{S_{0(1)}} \right)^{s_{0(1)+1}} - \left(\frac{\langle \varepsilon_{eq1(n+1)} - \varepsilon_{0(1)} \rangle_+}{S_{0(1)}} \right)^{s_{0(1)+1}} \right)}$$

Dérivée de la variable d'endommagement par rapport aux variables d'endommagement : cas de fatigue

$$\frac{\partial f_{1(n+1)}}{\partial d_1} = -m_{11} \frac{\partial \check{\varepsilon}_{11}^e}{\partial d_1}; \quad \frac{\partial f_{1(n+1)}}{\partial d_2} = -m_{11} \frac{\partial \check{\varepsilon}_{11}^e}{\partial d_2}; \quad \frac{\partial f_{1(n+1)}}{\partial d_3} = -m_{11} \frac{\partial \check{\varepsilon}_{11}^e}{\partial d_3}$$

$$\frac{\partial f_1^*}{\partial d_1} = -m_{11} \frac{\partial \check{\varepsilon}_{11}^e}{\partial d_1}; \quad \frac{\partial f_1^*}{\partial d_2} = -m_{11} \frac{\partial \check{\varepsilon}_{11}^e}{\partial d_2}; \quad \frac{\partial f_1^*}{\partial d_3} = -m_{11} \frac{\partial \check{\varepsilon}_{11}^e}{\partial d_3}$$

$$\frac{\partial \mathbf{d}_1^*}{\partial d_1} = \left[(d_{1\infty} - d_{1(n)})^{1-\gamma_1} + (\gamma_1 - 1) \frac{S_1}{(s_1 + 1)} \left(\left(\frac{f_1}{S_1} \right)^{s_1+1} - \left(\frac{f_1^*}{S_1} \right)^{s_1+1} \right) \right]^{\frac{\gamma_1}{1-\gamma_1}} \left(\left(\frac{f_1}{S_1} \right)^{s_1} \frac{\partial f_{1(n+1)}}{\partial d_1} - \left(\frac{f_1^*}{S_1} \right)^{s_1} \frac{\partial f_{1(n+1)}^*}{\partial d_1} \right)$$

$$\frac{\partial \mathbf{d}_1^*}{\partial d_2} = \left[(d_{1\infty} - d_{1(n)})^{1-\gamma_1} + (\gamma_1 - 1) \frac{S_1}{(s_1 + 1)} \left(\left(\frac{f_1}{S_1} \right)^{s_1+1} - \left(\frac{f_1^*}{S_1} \right)^{s_1+1} \right) \right]^{\frac{\gamma_1}{1-\gamma_1}} \left(\left(\frac{f_1}{S_1} \right)^{s_1} \frac{\partial f_{1(n+1)}}{\partial d_2} - \left(\frac{f_1^*}{S_1} \right)^{s_1} \frac{\partial f_{1(n+1)}^*}{\partial d_2} \right)$$

$$\frac{\partial \mathbf{d}_1^*}{\partial d_3} = \left[(d_{1\infty} - d_{1(n)})^{1-\gamma_1} + (\gamma_1 - 1) \frac{S_1}{(s_1 + 1)} \left(\left(\frac{f_1}{S_1} \right)^{s_1+1} - \left(\frac{f_1^*}{S_1} \right)^{s_1+1} \right) \right]^{\frac{\gamma_1}{1-\gamma_1}} \left(\left(\frac{f_1}{S_1} \right)^{s_1} \frac{\partial f_{1(n+1)}}{\partial d_3} - \left(\frac{f_1^*}{S_1} \right)^{s_1} \frac{\partial f_{1(n+1)}^*}{\partial d_3} \right)$$

$$\frac{\partial d_1^{eff}}{\partial d_1} = \left[\frac{\partial \mathbf{d}_1^*}{\partial d_1} + (d_{1\infty} - \mathbf{d}_1^*) \frac{(s_{0(1)} + 1)}{S_{0(1)}} \left(\frac{\langle \varepsilon_{eq1(n+1)} - \varepsilon_{0(1)} \rangle_+}{S_{0(1)}} \right)^{s_{0(1)}} \frac{\partial \varepsilon_{eq1(n+1)}}{\partial d_1} \right] \exp \left(\left(\frac{\langle \varepsilon_{eq(1)} - \varepsilon_{0(1)} \rangle_+}{S_{0(1)}} \right)^{s_{0(1)}+1} - \left(\frac{\langle \varepsilon_{eq1(n+1)} - \varepsilon_{0(1)} \rangle_+}{S_{0(1)}} \right)^{s_{0(1)}+1} \right)$$

$$\frac{\partial d_1^{eff}}{\partial d_2} = \left[\frac{\partial \mathbf{d}_1^*}{\partial d_2} + (d_{1\infty} - \mathbf{d}_1^*) \frac{(s_{0(1)} + 1)}{S_{0(1)}} \left(\frac{\langle \varepsilon_{eq1(n+1)} - \varepsilon_{0(1)} \rangle_+}{S_{0(1)}} \right)^{s_{0(1)}} \frac{\partial \varepsilon_{eq1(n+1)}}{\partial d_2} \right] \exp \left(\left(\frac{\langle \varepsilon_{eq(1)} - \varepsilon_{0(1)} \rangle_+}{S_{0(1)}} \right)^{s_{0(1)}+1} - \left(\frac{\langle \varepsilon_{eq1(n+1)} - \varepsilon_{0(1)} \rangle_+}{S_{0(1)}} \right)^{s_{0(1)}+1} \right)$$

$$\frac{\partial d_1^{eff}}{\partial d_3} = \left[\frac{\partial \mathbf{d}_1^*}{\partial d_3} + (d_{1\infty} - \mathbf{d}_1^*) \frac{(s_{0(1)} + 1)}{S_{0(1)}} \left(\frac{\langle \varepsilon_{eq1(n+1)} - \varepsilon_{0(1)} \rangle_+}{S_{0(1)}} \right)^{s_{0(1)}} \frac{\partial \varepsilon_{eq1(n+1)}}{\partial d_3} \right] \exp \left(\left(\frac{\langle \varepsilon_{eq(1)} - \varepsilon_{0(1)} \rangle_+}{S_{0(1)}} \right)^{s_{0(1)}+1} - \left(\frac{\langle \varepsilon_{eq1(n+1)} - \varepsilon_{0(1)} \rangle_+}{S_{0(1)}} \right)^{s_{0(1)}+1} \right)$$

Idem pour d_2 et d_3

Matrice Tangente cohérente

$$\sigma = \mathbb{C}^{eff} : \varepsilon^* - \mathbb{C}^0 : \varepsilon^r$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = -\mathbb{C}^{eff} : \frac{\partial \mathbb{S}^{eff}}{\partial \varepsilon} : \mathbb{C}^{eff} : \varepsilon^* - \mathbb{C}^0 : \frac{\partial \varepsilon^r}{\partial \varepsilon} + \mathbb{C}^{eff}$$

$$\sigma^{sr} = \mathbb{C}^{eff} : \varepsilon^*$$

$$1 : \frac{\partial \mathbb{S}^{eff}}{\partial \varepsilon} : \mathbb{C}^{eff} : \varepsilon^* = \left(\sum_{k=1}^3 (\mathbb{H}_k : \sigma^{sr}) \otimes \frac{\partial d_k}{\partial \varepsilon^e} \right) \frac{\partial \varepsilon^e}{\partial \varepsilon} \quad 2 \quad 3$$

$$2 : \frac{\partial \varepsilon^r}{\partial \varepsilon} = \left(\sum_{k=1}^2 \chi_k e^{r_k d_k(t+\Delta t)} (\mathbb{R}_k : e_k^*) \otimes \frac{\partial d_k}{\partial \varepsilon^e} \right) : \frac{\partial \varepsilon^e}{\partial \varepsilon} + \sum_{k=1}^2 \chi_k (e^{r_k d_k(t+\Delta t)} - e^{r_k d_k(t)}) \mathbb{R}_k \otimes \frac{\partial e_k^*}{\partial \varepsilon}$$

$$3 : \text{Calcul de } \frac{\partial \varepsilon^e}{\partial \varepsilon} \Rightarrow \varepsilon^e = \mathbb{S}^{eff} : \sigma$$

$$\frac{\partial \varepsilon^e}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \mathbb{S}^{eff}}{\partial \varepsilon} : \sigma + \mathbb{S}^{eff} : \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}$$

$$\frac{\partial \varepsilon^e}{\partial \varepsilon} = \left(\sum_{k=1}^3 (\mathbb{H}_k : \sigma) \otimes \frac{\partial d_k}{\partial \varepsilon^e} \right) \frac{\partial \varepsilon^e}{\partial \varepsilon} + \mathbb{S}^{eff} : \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}$$

$$\left(\mathbb{I} - \sum_{k=1}^3 (\mathbb{H}_k : \sigma) \otimes \frac{\partial d_k}{\partial \varepsilon^e} \right) \frac{\partial \varepsilon^e}{\partial \varepsilon} = \mathbb{S}^{eff} : \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}$$

$$\frac{\partial \varepsilon^e}{\partial \varepsilon} = \left[\mathbb{I} - \sum_{k=1}^3 (\mathbb{H}_k : \sigma) \otimes \frac{\partial d_k}{\partial \varepsilon^e} \right]^{-1} : \mathbb{S}^{eff} : \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = A : \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}$$

Nous posons :

$$A \text{ partir de 1 : } \frac{\partial \mathbb{S}^{eff}}{\partial \varepsilon} : \mathbb{C}^{eff} : \varepsilon^* = \left(\sum_{k=1}^3 (\mathbb{H}_k : \sigma^{sr}) \otimes \frac{\partial d_k}{\partial \varepsilon^e} \right) \frac{\partial \varepsilon^e}{\partial \varepsilon} = B : A : \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}$$

$$A \text{ partir de 2 : } \frac{\partial \varepsilon^r}{\partial \varepsilon} = D : \frac{\partial \varepsilon^e}{\partial \varepsilon} + E \Rightarrow \frac{\partial \varepsilon^r}{\partial \varepsilon} = D : A : \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} + E$$

Alors :

$$\text{Calcul de } \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = -\mathbb{C}^{eff} : \frac{\partial \mathbb{S}^{eff}}{\partial \varepsilon} : \mathbb{C}^{eff} : \varepsilon^* - \mathbb{C}^0 : \frac{\partial \varepsilon^r}{\partial \varepsilon} + \mathbb{C}^{eff}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = -\mathbb{C}^{eff} : B : A : \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} - \mathbb{C}^0 : D : A : \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} - \mathbb{C}^0 : E + \mathbb{C}^{eff}$$

$$[\mathbb{I} + \mathbb{C}^{eff} : B : A + \mathbb{C}^0 : D : A] : \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \mathbb{C}^{eff} - \mathbb{C}^0 : E$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = [\mathbb{I} + \mathbb{C}^{eff} : B : A + \mathbb{C}^0 : D : A]^{-1} (\mathbb{C}^{eff} - \mathbb{C}^0 : E)$$

Calcul des dérivées des variables d'endommagement par rapport au tenseur des déformations pour le calcul de la matrice tangente (exemple pour $k=1$).

Dérivée des variables d'endommagement par rapport au tenseur des déformations élastiques

- Cas monotone

$$\frac{\partial d_1^{eff}}{\partial \varepsilon^e} = (d_{1\infty} - d_{1(n)}) \left(\left(\frac{\langle \varepsilon_{eq1(n)} - \varepsilon_{0(1)} \rangle_+}{S_{0(1)}} \right)^{s_{0(1)}+1} - \left(\frac{\langle \varepsilon_{eq1(n+1)} - \varepsilon_{0(1)} \rangle_+}{S_{0(1)}} \right)^{s_{0(1)}+1} \right) \frac{s_{0(1)} + 1}{S_{0(1)}} \left(\frac{\langle \varepsilon_{eq1(n+1)} - \varepsilon_{0(1)} \rangle_+}{S_{0(1)}} \right)^{s_{0(1)}} \frac{\partial \varepsilon_{eq1(n+1)}}{\partial \varepsilon^e}$$

$$\frac{\partial d_2^{eff}}{\partial \varepsilon^e} = (d_{2\infty} - d_{2(n)}) \left(\left(\frac{\langle \varepsilon_{eq2(n)} - \varepsilon_{0(2)} \rangle_+}{S_{0(2)}} \right)^{s_{0(2)}+1} - \left(\frac{\langle \varepsilon_{eq2(n+1)} - \varepsilon_{0(2)} \rangle_+}{S_{0(2)}} \right)^{s_{0(2)}+1} \right) \frac{s_{0(2)} + 1}{S_{0(2)}} \left(\frac{\langle \varepsilon_{eq2(n+1)} - \varepsilon_{0(2)} \rangle_+}{S_{0(2)}} \right)^{s_{0(2)}} \frac{\partial \varepsilon_{eq2(n+1)}}{\partial \varepsilon^e}$$

$$\frac{\partial d_3^{eff}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = (d_{3\infty} - d_{3(n)}) \left(\left(\frac{\langle \varepsilon_{eq3(n)} - \varepsilon_{0(3)} \rangle_+}{S_{0(3)}} \right)^{s_{0(3)}+1} - \left(\frac{\langle \varepsilon_{eq3(n+1)} - \varepsilon_{0(3)} \rangle_+}{S_{0(3)}} \right)^{s_{0(3)}+1} \right) \frac{\partial \varepsilon_{eq3(n+1)}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}$$

- Cas fatigue

$$\frac{\partial f_{1(n+1)}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \frac{\partial \varepsilon_{eq1(n+1)}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} - m_{11} \frac{\partial \xi_{11(n+1)}^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}; \quad \frac{\partial f_{2(n+1)}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \frac{\partial \varepsilon_{eq2(n+1)}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} - m_{22} \frac{\partial \xi_{22(n+1)}^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}; \quad \frac{\partial f_{3(n+1)}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \frac{\partial \varepsilon_{eq3(n+1)}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} -$$

$$m_{33} \frac{\partial \xi_{33(n+1)}^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}$$

$$\frac{\partial f_1^*}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = -m_{11} \frac{\partial \xi_{11(n+1)}^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}; \quad \frac{\partial f_2^*}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = -m_{22} \frac{\partial \xi_{22(n+1)}^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}; \quad \frac{\partial f_3^*}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = -m_{33} \frac{\partial \xi_{33(n+1)}^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}$$

$$\frac{\partial \mathbf{d}_1^*}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \left[(d_{1\infty} - d_{1(n)})^{1-\gamma_1} + (\gamma_1 - 1) \frac{S_1}{(s_1 + 1)} \left(\left(\frac{f_1}{S_1} \right)^{s_1+1} - \left(\frac{f_1^*}{S_1} \right)^{s_1+1} \right) \right]^{\frac{\gamma_1}{1-\gamma_1}} \left(\left(\frac{f_1}{S_1} \right)^{s_1} \frac{\partial f_{1(n+1)}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} - \left(\frac{f_1^*}{S_1} \right)^{s_1} \frac{\partial f_{1(n+1)}^*}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right)$$

$$\frac{\partial d_1^{eff}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \left[\frac{\partial \mathbf{d}_1^*}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} + (d_{1\infty} - \mathbf{d}_1^*) \frac{(s_{0(1)} + 1)}{S_{0(1)}} \left(\frac{\langle \varepsilon_{eq1(n+1)} - \varepsilon_{0(1)} \rangle_+}{S_{0(1)}} \right)^{s_{0(1)}} \frac{\partial \varepsilon_{eq1(n+1)}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right] \exp \left(\left(\frac{\langle \varepsilon_{eq1}^* - \varepsilon_{0(1)} \rangle_+}{S_{0(1)}} \right)^{s_{0(1)}+1} - \left(\frac{\langle \varepsilon_{eq1(n+1)} - \varepsilon_{0(1)} \rangle_+}{S_{0(1)}} \right)^{s_{0(1)}+1} \right)$$

Idem pour d_2 et d_3

ANNEXE 3. POSITIVITE DE LA DISSIPATION

Le potentiel thermodynamique de Helmholtz est :

$$\rho\psi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^* : \mathbb{C}^{eff} : \boldsymbol{\varepsilon}^* - \boldsymbol{\varepsilon}^* : \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}^r$$

$$\mathbb{C}^{eff} = [\mathbb{S}^{eff}]^{-1} = \left[\mathbb{S}^0 + \sum_{k=1}^3 d_k \mathbb{H}_k^+ \eta_k + d_k \mathbb{H}_k^- (1 - \eta_k) \right]^{-1}$$

où l'index de désactivation η_k est considéré comme une variable interne.

Variables d'état		Forces Thermodynamiques
Variable Observable	Variables Internes	Variables associées
	V_k	A_k
$\boldsymbol{\varepsilon}$		$\boldsymbol{\sigma}$
	$\boldsymbol{\varepsilon}^r$	$-\boldsymbol{\sigma}^r$
	η_k	$-K_k$
	d_k	$-Y_k$

Tableau 8 : Tableau des variables d'état et des forces thermodynamiques associées du modèle ODM

Le modèle proposé dans cette thèse utilise un index de désactivation instantanée des fissures (en utilisant la fonction d'Heaviside). Nous devons vérifier alors que la dissipation dues à ces refermetures de fissures est positive.

La dissipation totale doit être positive ou nulle, elle est défini comme $\mathcal{D} = \sum -A_k \dot{V}_k \geq 0$ où les $A_k = \rho \frac{\partial \psi}{\partial V_k}$ sont les forces thermodynamiques associées aux variables internes.

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{\sigma}^r \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^r + \sum_k K_k \dot{\eta}_k + \sum_k Y_k \dot{d}_k = \mathcal{D}_r + \mathcal{D}_\eta + \mathcal{D}_d$$

Les forces thermodynamiques $Y_k = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial d_k}$ ont été définies de façon à être toujours positives ou nulles, la dissipation due à l'évolution de l'endommagement $Y_k \dot{d}_k \geq 0$ est donc toujours positive ou nulle car l'endommagement ne peut que croître ($\dot{d}_k \geq 0$).

➤ CALCUL DE LA DISSIPATION DUE A L'ACTIVATION / DESACTIVATION DES DOMMAGES EST $\mathcal{D}_\eta = \sum_k K_k \dot{\eta}_k$:

$$K_k = -\frac{1}{2} \varepsilon^* : \frac{\partial \mathbb{C}^{eff}}{\partial \eta_k} : \varepsilon^*$$

$$K_k = -\frac{1}{2} \varepsilon^* : \mathbb{C}^{eff} : \frac{\partial \mathbb{S}^{eff}}{\partial \eta_k} : \mathbb{C}^{eff} : \varepsilon^* = \frac{1}{2} (\varepsilon^* : \mathbb{C}^{eff}) : \Delta \mathbb{H}_k : (\mathbb{C}^{eff} : \varepsilon^*) d_k$$

avec

$$\Delta \mathbb{H}_k = \mathbb{H}_k^+ - \mathbb{H}_k^- \text{ (Eq. I-16)}$$

Ici pour $k = 1$ et $k = 2$:

$$\Delta \mathbb{H}_1 = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta \mathbb{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Soit :

$$\Delta \mathbb{H}_1 = h_1 \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 \quad \text{et} \quad \Delta \mathbb{H}_2 = h_2 \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2$$

Nous avons alors pour $k=1$ et $k=2$:

$$(\varepsilon^* : \mathbb{C}^{eff}) : \Delta \mathbb{H}_k : (\mathbb{C}^{eff} : \varepsilon^*) = \varepsilon^* : \mathbb{C}^{eff} : (\vec{e}_k \otimes \vec{e}_k) (\vec{e}_k \otimes \vec{e}_k) : \mathbb{C}^{eff} : \varepsilon^* = (\mathbb{C}^{eff} : \varepsilon^*)_{kk}^2$$

$$\text{où } (\mathbb{C}^{eff} : \varepsilon^*)_{kk} = \vec{e}_k \otimes \vec{e}_k : \mathbb{C}^{eff} : \varepsilon^*$$

La dissipation due à la refermeture des fissures est donc :

$$\mathcal{D}_\eta = \sum_{k=1}^2 K_k \dot{\eta}_k = \frac{1}{2} \left[(\mathbb{C}^{eff} : \varepsilon^*)_{11}^2 d_1 \dot{\eta}_1 + (\mathbb{C}^{eff} : \varepsilon^*)_{22}^2 d_2 \dot{\eta}_2 \right]$$

L'index de désactivation est défini comme étant instantané.

$$\eta_k = \mathcal{H} \left((\mathbb{C}^{eff} : \varepsilon^*)_{kk} \right) \text{ sans sommation}$$

Nous allons vérifier que dans le cas où \mathcal{H} (fonction d'Heaviside), la refermeture des fissures est non dissipative. En effet, on a alors :

$$\dot{\eta}_k = \delta \left((\mathbb{C}^{eff} : \varepsilon^*)_{kk} \right) \frac{d}{dt} (\mathbb{C}^{eff} : \varepsilon^*)_{kk} \text{ où } \delta \text{ est un Dirac}$$

La dissipation est alors :

$$\mathcal{D}_\eta = \frac{1}{2} \left[(\mathbb{C}^{eff} : \varepsilon^*)_{11}^2 d_1 \delta \left((\mathbb{C}^{eff} : \varepsilon^*)_{11} \right) \frac{d}{dt} (\mathbb{C}^{eff} : \varepsilon^*)_{11} \right. \\ \left. + (\mathbb{C}^{eff} : \varepsilon^*)_{22}^2 d_2 \delta \left((\mathbb{C}^{eff} : \varepsilon^*)_{22} \right) \frac{d}{dt} (\mathbb{C}^{eff} : \varepsilon^*)_{22} \right]$$

La dissipation est nulle grâce à la propriété :

$$x^2 \delta(x) = 0 \text{ avec } x = (\mathbb{C}^{eff} : \boldsymbol{\varepsilon}^*)_{kk}$$

✎ CALCUL DE LA DISSIPATION DUE A L'EVOLUTION DES DEFORMATIONS RESIDUELLES $\mathcal{D}_r = \boldsymbol{\sigma}_r : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^r$:

$$\mathcal{D}_r = \boldsymbol{\varepsilon}^* : \mathbb{C}^0 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^r$$

$$\mathcal{D}_r = \boldsymbol{\varepsilon}^* : \mathbb{C}^0 : \sum_k [R'_k(d_k) \dot{d}_k \mathbb{R}_k : \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^*}{|\max_i \boldsymbol{\varepsilon}_{ki}^*|}]$$

Où les tenseurs \mathbb{R}_k sont choisis diagonaux, de la forme :

$$\mathbb{R}_1 = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_6 \end{bmatrix} \quad \mathbb{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ceci implique que le produit $\mathbb{C}^0 : \mathbb{R}_k$ est symétrique et positif :

$$\mathcal{D}_r = \sum_k \left[\frac{R'_k(d_k) \dot{d}_k}{|\max_i \boldsymbol{\varepsilon}_{ki}^*|} \boldsymbol{\varepsilon}^* : \mathbb{C}^0 : \mathbb{R}_k : \boldsymbol{\varepsilon}^* \right]$$

Comme le premier terme est toujours positif ou nul, la dissipation due à l'évolution des déformations résiduelles \mathcal{D}_r est alors positive ou nulle.

ANNEXE 4. MODELE ODM-CMO

Fermeture progressive des refermetures des fissures

Dans le modèle ODM_CMO, le caractère unilatéral du dommage est décrit à l'aide d'un index de désactivation du dommage $\eta_i^{(m)}$. Lorsque le dommage est passif, l'état du dommage tel que $\eta_i^{(m)} = 0$. Inversement, lorsque le dommage est actif, $\eta_i^{(m)} = 1$. Cependant, d'un point de vue physique, de par la dispersion sur l'orientation des fissures, toutes les fissures ne se ferment pas complètement au même moment. De plus, il est intéressant d'avoir une fermeture progressive des fissures pour éviter une discontinuité d'un point de vue numérique (discontinuité de la matrice tangente), qui n'est d'ailleurs pas observée expérimentalement lors de passage en compression. L'index de désactivation est donc défini de la manière suivante :

$$\eta_i^{(m)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta \varepsilon_i^{close} \leq \bar{\varepsilon}_i \\ \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{\bar{\varepsilon}_i + \Delta \varepsilon_i^{close}}{\Delta \varepsilon_i^{close}} \right) \right) & \text{si } -\Delta \varepsilon_i^{close} \leq \bar{\varepsilon}_i \leq \Delta \varepsilon_i^{close} \\ 0 & \text{si } \bar{\varepsilon}_i \leq -\Delta \varepsilon_i^{close} \end{cases}$$

où $\bar{\varepsilon}_i$ est la $i^{\text{ème}}$ composante du tenseur $\bar{\underline{\varepsilon}} = \underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^{th} - \underline{\varepsilon}^0$ avec $\underline{\varepsilon}^0$ qui représente la déformation au moment de la fermeture des fissures, et permet de rendre compte des effets des contraintes résiduelles dues au process de fabrication sur la fermeture des fissures. Elle est déterminée par la relation suivante $\underline{\varepsilon}^0 = \Delta \alpha (T - T_0)$ avec $\Delta \alpha$ la différence de dilatation entre les fibres et la matrice. L'amplitude de variation des déformations entre les états ouvert et fermé pour les fissures au sein du matériau est considérée égale à $2^* \Delta \varepsilon_i^{close}$. Cette fermeture progressive des fissures est clairement observée expérimentalement pour les composites CMC [*Gasser et al. 1996; Hémon 2013*].

Pour rendre compte de l'augmentation de la déformation de compression à appliquer pour refermer toutes les fissures (et donc retrouver les propriétés élastiques initiales) en fonction de la densité de fissurations présentes dans le composite, l'amplitude de fermeture est définie par $\Delta \varepsilon_i^{close} = (1 + a_i \cdot d_i^{(m)}) \cdot \Delta \varepsilon_i^{o,close}$ avec $\Delta \varepsilon_i^{o,close}$ étant la demi-amplitude de variation initiale et a_i un paramètre modifiant la taille de cette amplitude liée à l'endommagement.

Déformation mécanique positive

Dans les travaux de [*Rakotoarisoa, 2013*], dans un premier temps les déformations positives étaient définies comme la partie positive de la décomposition spectrale du tenseur des déformations, ce qui posait des problèmes en termes d'implémentation mais également dans le calcul de la matrice tangente⁸. En effet, la dérivée du tenseur $\underline{\varepsilon}^+$ ne pouvait pas être facilement obtenue analytiquement à cause des parties positives au sens de Macaulay. La matrice tangente était donc calculée numériquement par perturbation rendant le modèle peu performant en termes de temps de calcul. La formulation suivante a donc été proposée pour chaque variable d'endommagement $d_i^{(m)}$ avec i, j et $k=1,2$ ou $3, i \neq j \neq k$:

$$\lambda_{d_i}^+ = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_{ii} + \sqrt{\varepsilon_{ii}^2 + 4 \cdot (\varepsilon_{ij}^2 + \varepsilon_{ik}^2)} \right)$$

⁸ Le calcul de la matrice tangente consistante est nécessaire pour tout type de lois matériau dans un code éléments finis implicite.

$$\Omega_{d_i} = (\lambda_{d_i}^+)^2 + (\varepsilon_{ij}^2 + \varepsilon_{ik}^2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{ii}^+ = \frac{(\lambda_{d_i}^+)^3}{\Omega_{d_i}} \\ \varepsilon_{ij}^+ = \frac{\varepsilon_{ij} \cdot (\lambda_{d_i}^+)^2}{\Omega_{d_i}} \\ \varepsilon_{ik}^+ = \frac{\varepsilon_{ik} \cdot (\lambda_{d_i}^+)^2}{\Omega_{d_i}} \end{array} \right.$$

Cette formulation de la déformation positive permet de donner des résultats similaires à l'ancienne formulation tout en permettant un calcul facile et analytique de la dérivée de la partie positive des déformations en fonction de la déformation nécessaire pour le calcul de la matrice tangente consistante. Cette reformulation des déformations positives a été effectuée dans le but de faciliter son implémentation dans un code E.F. et réduire les coûts de calcul.

Titre : Modèle en taux d'endommagement
pour la prévision de la durée de vie des composites tissés 3D
en fatigue cyclique et en fatigue aléatoire

Mots clés : Composite tissé 3D, fatigue cyclique fatigue aléatoire, modèle en taux d'endommagement

Résumé :

La prévision de la durée de vie des matériaux composites tissés 3D à matrice organique est un enjeu important pour les industriels du secteur aéronautique. Un modèle de fatigue dit « temporel », *ODM*, est proposé afin de calculer l'évolution de l'endommagement de façon continue, en fonction du temps. Ce modèle s'affranchit de la notion de cycle, il rend compte aussi bien des chargements de fatigue cyclique, que des chargements de fatigue sous chargements complexes, aléatoires. La loi d'endommagement proposée fait intervenir deux contributions, une contribution monotone pour les sollicitations monotones et une contribution de fatigue. La contribution de fatigue de la loi d'endommagement prend en compte l'effet de contrainte moyenne, effet primordial en fatigue en incluant dans celle-ci une moyenne évolutive (évoluant en fonction de l'histoire du chargement).

Une méthodologie d'identification de la loi de fatigue simple en deux étapes est proposée.

Une identification préliminaire des paramètres de fatigue en utilisant la contribution de fatigue réécrite dans sa version uniaxiale dans le cas où l'élasticité et l'endommagement sont découplés, permet de tracer simplement et rapidement les courbes de Wöhler et les diagrammes de Haigh. L'ajustement des deux paramètres restants est réalisé numériquement avec le modèle complet couplé (programmé en 3D). L'identification à d'autres températures, dans le but de proposer des modélisations anisothermes, est également possible. Le modèle d'endommagement est finalement rendu probabiliste grâce à une première approche, pragmatique, pour la fatigue à grands nombres de cycles. Un paramètre du modèle, initialement obtenu de façon déterministe, prend le statut de variable aléatoire : il s'agit du seuil d'endommagement de fatigue (en déformation) délimitant le domaine d'endurance illimitée.

Title : A kinetic damage model

to predict the lifetime of 3D woven composite

for cyclic fatigue and complex fatigue loads

Keywords : 3D woven composite, cyclic fatigue and complex fatigue, kinetic damage law

Abstract :

The fatigue life prediction of 3D woven organic matrix composites is a current challenge for the aerospace industry. A kinetic damage evolution law for fatigue, ODM , is tested and calculates the damage evolution in a continuous way contrary to fatigue cyclic models. This law deals with both cyclic fatigue loads and complex or random fatigue loads. The tested damage law uses two contributions, one for monotone loads and the other one for fatigue loads. The fatigue contribution takes into account the mean stress effect thanks to the calculation of an evolutive mean (in function of the load history) of the elastic strain. The concept of evolutive mean stress gives the possibility to model fatigue under complex loading with no need to define a cycle.

A two-step methodology for the identification of the fatigue law is proposed. A preliminary identification of fatigue parameters using the fatigue contribution rewritten in its uniaxial version where the elasticity and damage are decoupled, is used to plot quickly and easily the Wöhler curves and the Haigh diagrams. The adjustment of the two remaining parameters is realized numerically with the coupled model (3D). This methodology allows the identification of parameters at others temperatures in order to test anisotherm modelings. A very practical probabilistic model is tested for high cycle fatigue. An initially deterministic parameter of the model, the (strain) asymptotic fatigue limit, takes the status of a random variable.