Министерство образования и науки Украины
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина

С. М. Загороднюк

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ НА РАДИАЛЬНЫХ ЛУЧАХ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Методические указания к лекционным и практическим занятиям
для студентов четвертого курса механико-математического факультета

Харьков – 2014

УДК 517.587(075.8)
ББК 22.161.5я73
З-14

Рецензенты:

доктор физ.– мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник ФТИНТ НАН Украины **Золотарев В. А.;**

доктор физ.– мат. наук, профессор кафедры математических методов в экономике Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина **Янцевич А. А.**

Утверждено к печати решением Научно-методического совета Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина (протокол № 1 от 29.10.2014 г.)

Загороднюк С. М.

З-14 Ортогональные многочлены на радиальных лучах в комплексной плоскости : методические указания к лекциям и практическим занятиям / С. М. Загороднюк. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2014. – 32 с.

Учебно-методическое пособие содержит основные теоретические сведения, необходимые для овладения основами курса по ортогональным многочленам на радиальных лучах в комплексной плоскости и практическими навыками для решения задач. Приведены упражнения различной степени сложности для составления текущих и итоговых тестов и для самостоятельной работы студентов.

УДК 517.587(075.8)
ББК 22.161.5я73

Оглавление

Предисловие

Под системой ортогональных многочленов понимают набор многочленов $\{p_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, $\deg p_n = n$, обладающих тем или иным свойством ортогональности. При этом многочлены могут быть вещественными или комплексными, скалярными или матричнозначными, а также иметь более сложную структуру. Первой системой ортогональных многочленов были, по-видимому, многочлены Лежандра, появившиеся в 1785 году. Они нашли широкое применение в теории сферических и других гармонических функций. Определение ортогональных многочленов Чебышева–Эрмита встречается у П. Лапласа в 1810 году. Позднее эти многочлены изучали П. Л. Чебышев (1859) и Ш. Эрмит (1864). Ортогональные многочлены Якоби были введены К. Якоби в 1859 году в связи с решением гипергеометрического уравнения. Ортогональные многочлены Чебышева–Лагерра появляются в трудах Ж. Лагранжа, Н. Абеля, П. Л. Чебышева, К. А. Поссе в некотором частном случае. Общий случай был затем рассмотрен Ю. В. Сохоцким (1873). И лишь в 1876 году вышла первая работа Э. Лагерра, в которой рассматриваются эти многочлены в упомянутом частном случае. После этого общий случай изучался Н. Я. Сониным (1880).

Основы общей теории ортогональных многочленов были заложены в трудах великого русского математика Пафнутия Львовича Чебышева. Существенный вклад в теорию был сделан В. А. Стекловым. В XX веке важные методы изучения асимптотических свойств были созданы С. Н. Бернштейном и Г. Сегё. Эти методы затем были развиты в работах Я. Л. Геронимуса.

Пусть $\sigma(x)$ – неубывающая функция на вещественной оси, имеющая ограниченную вариацию. Если вещественные многочлены $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\deg p_n = n$ удовлетворяют соотношению

$$\int_{\mathbb{R}} p_n(x)p_m(x)d\sigma(x) = 0, \qquad n \neq m,$$

то их называют ортогональными многочленами на вещественной оси (или вещественными ортогональными многочленами). Если же выполняется

$$\int_{\mathbb{R}} p_n(x)p_m(x)d\sigma(x) = \delta_{n,m} \qquad (n, m \in \mathbb{Z}_+), \tag{1}$$

то их называют ортонормированными многочленами на вещественной оси (вещественными ортонормированными многочленами). Легко устанавливается, что три соседних ортонормированных многочлена связаны разностным соотношением

$$\lambda_{n-1}p_{n-1}(x) + \alpha_n p_n(x) + \lambda_n p_{n+1}(x) = xp_n(x) \qquad (n \in \mathbb{Z}_+), \tag{2}$$

где α_n являются некоторыми вещественными, а λ_n – положительными числами ($\lambda_{-1} = 0$, $p_{-1} = 0$). Более того, верно и обратное утверждение: если набор многочленов $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $\deg p_n = n$ и p_n имеет положительный старший коэффициент (т. е. коэффициент при старшей степени), удовлетворяет соотношению (2), то найдется неубывающая функция ограниченной вариации σ на $\mathbb{R}$ такая, что выполнено (1) (теорема Фавара).

Соотношение (2) может быть записано в матричной форме:

$$J\vec{p}(x) = x\vec{p}(x), \tag{3}$$

где

$$J = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \lambda_0 & \alpha_1 & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_1 & \alpha_2 & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \alpha_3 & \lambda_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{4}$$

и $\vec{p}(x) = (p_0(x), p_1(x), p_2(x), ...)^T$, индекс T обозначает транспонирование. Полубесконечные матрицы вида (4) называются якобиевыми. Они играют важную роль во многих вопросах анализа, теории операторов, алгебры и теории механических колебаний. Как следует из теоремы Фавара, каждой якобиевой матрице соответствует система ортонормированных многочленов относительно неубывающей функции ограниченной вариации σ на $\mathbb{R}$. Эта функция носит название спектральной функции якобиевой матрицы и играет центральную роль в теории обратных спектральных задач анализа. Данная функция определяется, вообще говоря, неоднозначно. Ортонормированные многочлены могут быть ортонормированными относительно нескольких различных функций. Описание всех таких функций есть предмет изучения в теории проблем моментов.

Соотношение (3) можно заменить на соотношение более общего вида:

$$J\vec{p}(x) = x^N \vec{p}(x), \tag{5}$$

где J уже является $(2N+1)$-диагональной полубесконечной эрмитовой матрицей, $N \in \mathbb{N}$. Многочлены, удовлетворяющие такому соотношению, впервые изучались в работах Duran и Van Assche ([5],[6],[7]). В частности, было установлено, что эти многочлены удовлетворяют некоторым соотношениям ортогональности, обобщающими соотношения (1). В [10] для многочленов, удовлетворяющих соотношению (5), было получено соотношение ортогональности на радиальных лучах в комплексной плоскости. Свойствам данных многочленов будет уделено центральное место в нашем изложении. Поскольку класс ортогональных многочленов на радиальных лучах содержит как подкласс стандартные ортогональные многочлены на вещественной оси, то мы предварительно кратко познакомимся с этим важнейшим частным случаем. Упражнения, приведенные в конце каждого параграфа, либо составлены нами, либо представляют собой хорошо известные факты.

Посредством $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+$ обозначаются множества вещественных, комплексных, натуральных, целых и неотрицательных целых чисел, соответственно. Для $n \in \mathbb{N}$ мы обозначаем посредством $\mathbb{C}_{n\times n}$ множество всех $n \times n$ матриц с комплексными коэффициентами, а посредством $\mathbb{C}_{n\times n}^{\geq}$ — множество всех положительно полу-определенных эрмитовых матриц из $\mathbb{C}_{n\times n}$. Открытую верхнюю полуплоскость $\{z \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Im} z > 0\}$ обозначаем $\mathbb{C}_+$. $\mathbb{P}$ – множество всех многочленов с комплексными коэффициентами, $\mathbb{P}_r$ – множество всех многочленов с вещественными коэффициентами. Вариация вещественной функции $f(x)$ на отрезке $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ будет обозначаться $\operatorname{Var}_{[a,b]} f(x)$.

Благодарности. Автор выражает благодарность профессору В. А. Золотареву, по предложению которого автор стал изучать многочлены, удовлетворяющие соотношению (5) с $N = 2$.

§1. Полубесконечные матрицы

Рассмотрим бесконечную вправо и вниз комплексную числовую матрицу A:

$$A = (a_{k,j})_{k,j=0}^{\infty} = \begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Подобные полубесконечные матрицы возникают в теории операторов при представлении ограниченного оператора матрицей в ортонормированном базисе, в теории суммирования рядов, а также в других областях математики. Нас прежде всего будут интересовать полубесконечные матрицы с конечным числом ненулевых диагоналей, т. е. удовлетворяющие

условию
$$a_{k,j}=0, \qquad \text{если } |k-j|>N,$$
для некоторого целого неотрицательного числа N. В частности, при $N=0$ мы получаем диагональную матрицу, при $N=1$ т.н. трехдиагональную, при $N=2$ пятидиагональную и т. д. Такие матрицы называют **ленточными**.

Для ленточных матриц мы можем задать операции сложения, вычитания, умножения на комплексное число, матричного умножения естественным образом. Если $A=(a_{k,j})_{k,j=0}^{\infty}$, $B=(b_{k,j})_{k,j=0}^{\infty}$, $c\in\mathbb{C}$, то
$$A+B=(a_{k,j}+b_{k,j})_{k,j=0}^{\infty}, \quad A-B=(a_{k,j}-b_{k,j})_{k,j=0}^{\infty},$$
$$cA=(ca_{k,j})_{k,j=0}^{\infty},$$
$$AB=(d_{k,j})_{k,j=0}^{\infty},$$
$$d_{k,j}=\sum_{l=0}^{\infty}a_{k,l}b_{l,j}. \tag{7}$$
Поскольку матрицы A и B имеют лишь конечное число ненулевых диагоналей, то суммы вида (7) содержат лишь конечное число ненулевых слагаемых и вопросов о сходимости не возникает. Определим также транспонированную и сопряженную матрицу для матрицы A:
$$A^T=(a_{j,k})_{k,j=0}^{\infty}, \quad A^*=(\overline{a_{j,k}})_{k,j=0}^{\infty}.$$
В том случае, когда $A=A^*$, матрицу A называют **эрмитовой**. Если же $A=A^T$, то матрицу A называют **(комплексной) симметрической**.

Матрицу $A_N=(a_{k,j})_{k,j=0}^{N}$ называют **урезанной матрицей** ($N\in\mathbb{Z}_+$).

Для произвольного комплексного полубесконечного вектора
$$\vec{u}=(u_k)_{k=0}^{\infty}=\begin{pmatrix} u_0\\ u_1\\ u_2\\ \vdots \end{pmatrix}$$
мы полагаем
$$A\vec{u}=(d_k)_{k=0}^{\infty},$$
$$d_k=\sum_{l=0}^{\infty}a_{k,l}u_l.$$

Упражнения к §1

1. Для полубесконечной матрицы вида (4), где
а) $\lambda_n=1$, $\alpha_n=0$, $n\in\mathbb{Z}_+$;
б) $\lambda_n=1$, $\alpha_n=\beta i$, $\beta\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}_+$;
в) $\lambda_n=1$, $\alpha_n=(-1)^n\beta i$, $\beta\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}_+$;
вычислить квадрат матрицы $A^2=AA$.

2. Будет ли квадрат полубесконечной трехдиагональной матрицы пятидиагональной матрицей? Сколько диагоналей будет у n-й степени трехдиагональной матрицы?

3. Пусть A, B и C – полубесконечные матрицы вида (4), где $\lambda_n=1$, $\alpha_n=0$ для матрицы A; $\lambda_n=n$, $\alpha_n=0$ для матрицы B; $\lambda_n=\frac{1}{n+1}$, $\alpha_n=0$, для матрицы C ($n\in\mathbb{Z}_+$). Вычислить следующие выражения:
а) $A+BC$;

б) $A - CB$;
в) $AB + 2C$;
г) $3BA - C$;
д) $-AC + B$;
е) $CA - 2B$;
ж) $AB - BA$;
з) $AC - CA$;
и) $BC - CB$;
к) ABC;
4. Пусть A – матрица вида (6), где $a_{n-1,n} = a_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$; $a_{n,n} = b_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z}_+$; $a_{n,n+1} = c_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z}_+$, а все остальные элементы матрицы A равны нулю. Пусть $D = (d_{k,j})_{k,j=0}^{\infty}$ – диагональная матрица, т. е. $d_{k,j} = 0$ при $k \neq j$. Предположим, что $d_{k,k} \neq 0,\ k \in \mathbb{Z}_+$. Пусть $D' = (d'_{k,j})_{k,j=0}^{\infty}$ – диагональная матрица и $d'_{k,k} = \frac{1}{d_{k,k}}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Вычислить произведение DAD'.
5. Пусть A, D, D' – матрицы из предыдущего упражнения. Предположим, что матрица A является эрмитовой, т. е. выполнено $b_n \in \mathbb{R}$, $c_n = a_n^*$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Можно ли выбрать числа d_n таким образом, чтобы матрица DAD' была вещественной якобиевой матрицей?
6. Для матриц из упражнения 1 вычислить определители урезанных матриц J_N ($N \in \mathbb{Z}_+$).
7. При каких условиях квадрат полубесконечной комплексной трехдиагональной матрицы A будет эрмитовой матрицей? Привести пример невещественной матрицы A, удовлетворяющей этим условиям.

§2. Ортогональные многочлены на вещественной оси

Прежде всего дадим следующее определение:

Определение 1. *Будем называть функцию $h(x)$ на интервале $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$* **весовой функцией***, если выполнены следующие условия:*
1) $h(x) \geq 0,\ x \in (a,b)$;
2) $0 < \int_a^b h(x)dx < \infty$;
3) в случае бесконечного интервала должны сходиться интегралы

$$s_k = \int_a^b x^k h(x)dx, \qquad k = 0, 1, 2, ...;$$

4) функция $h(x)$ является непрерывной на интервале (a,b) за исключением, быть может, конечного числа точек.

Условие 4) можно не налагать на весовую функцию. Его обычно добавляют в целях упрощения доказательств последующих утверждений. Все формулируемые далее результаты справедливы для общего случая.

Числа s_k называют **(степенными) моментами** функции $h(x)$.

Определение 2. *Набор вещественных многочленов $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\deg p_n = n$ называют* **ортогональной системой многочленов на вещественной оси относительно весовой функции** *$h(x)$, если выполнены соотношения*

$$\int_a^b p_n(x)p_m(x)h(x)dx = 0, \qquad n \neq m.$$

Если же выполняются соотношения

$$\int_a^b p_n(x)p_m(x)h(x)dx = \delta_{n,m} \qquad (n, m \in \mathbb{Z}_+),$$

то говорят, что $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ *является* **ортонормированной системой многочленов на вещественной оси относительно весовой функции** $h(x)$.
При этом многочлены называют **ортогональными (соответственно ортонормированными) относительно весовой функции** $h(x)$.

Приведем несколько примеров ортогональных систем многочленов.
1. Пусть $T_0(x) = 1,\ T_1(x) = 2x,\ T_2(x) = 2x^2 - 1$, и в общем случае

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n \in \mathbb{Z}_+,\ x \in [-1, 1]. \tag{8}$$

Многочлены $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ являются ортогональными многочленами на отрезке $(-1, 1)$ относительно весовой функции $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Они называются **многочленами Чебышева 1-го рода**.
2. Положим $U_0(x) = 1,\ U_1(x) = 2x,\ U_2(x) = 4x^2 - 1$, и

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1) \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,\ x \in [-1, 1].$$

Многочлены $\{U_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ являются ортогональными многочленами на отрезке $(-1, 1)$ относительно весовой функции $h(x) = \sqrt{1-x^2}$. Они носят название **многочленов Чебышева 2-го рода**.
3. Рассмотрим $p_0(x) = 1,\ p_1(x) = x,\ p_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$, и

$$p_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2-1)^n\right] \qquad (n \in \mathbb{Z}_+).$$

Многочлены $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ носят название **многочленов Лежандра**. Многочлены Лежандра являются ортогональными многочленами на отрезке $(-1, 1)$ относительно весовой функции $h(x) = 1$.
4. Рассмотрим некоторый параметр $\alpha > -1$ и пусть $L_0(x; \alpha) = 1,\ L_1(x; \alpha) = -x + \alpha + 1$,

$$L_n(x; \alpha) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} \left[x^{\alpha+n} e^{-x}\right] \qquad (n \in \mathbb{Z}_+).$$

Многочлены $\{L_n(x; \alpha)\}_{n=0}^{\infty}$ называют **многочленами Чебышева–Лагерра**. Многочлены Чебышева–Лагерра являются ортогональными многочленами на интервале $(0, +\infty)$ относительно весовой функции $h(x) = x^{\alpha} e^{-x}$.
5. Пусть $H_0(x) = 1,\ H_1(x) = 2x,\ H_2(x) = 4x^2 - 2$, и

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left[e^{-x^2}\right] \qquad (n \in \mathbb{Z}_+).$$

Многочлены $\{H_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ называют **многочленами Чебышева–Эрмита**. Многочлены Чебышева–Эрмита являются ортогональными многочленами на интервале $(-\infty, +\infty)$ относительно весовой функции $h(x) = e^{-x^2}$.

При изучении свойств ортогональных многочленов часто используются следующие леммы:

Лемма 1. *Пусть задан конечный набор вещественных многочленов* $\{p_n(x)\}_{n=0}^{N}$, $\deg p_n = n$ N *– целое неотрицательное число. Тогда любой вещественный многочлен* $R(x)$ *степени* N *можно единственным образом разложить в сумму вида*

$$R(x) = c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + \dots + c_N p_N(x), \tag{9}$$

с некоторыми вещественными коэффициентами c_k $(k = 0, 1, \dots, N)$.

Лемма 2. *Пусть* $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $\deg p_n = n$, *является ортогональной системой многочленов на вещественной оси относительно весовой функции* $h(x)$. *Тогда для любого* $n \in \mathbb{Z}_+$ *и произвольного многочлена* $Q(x)$ *степени* k, $k < n$, *выполняется соотношение*

$$\int_a^b p_n(x)Q(x)h(x)dx = 0. \tag{10}$$

Одним из основных свойств ортонормированных многочленов является следующая теорема.

Теорема 1. (о рекуррентном соотношении). *Пусть* $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *– система ортонормированных многочленов с положительными старшими коэффициентами. Три соседних многочлена связаны следующим соотношением:*

$$\lambda_{n-1}p_{n-1}(x) + \alpha_n p_n(x) + \lambda_n p_{n+1}(x) = xp_n(x), \tag{11}$$

где $\lambda_n > 0$, $\alpha_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, *и* $\lambda_{-1} = 0$, $p_{-1} = 0$.

Отметим, что рекуррентное соотношение может быть записано в виде (3), (4). Например, ортонормированные многочлены Чебышева 1-го рода имеют вид

$$\widehat{T}_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}T_0(x), \qquad \widehat{T}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}T_n(x), \quad n \geq 1,$$

и для них $\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\lambda_n = \frac{1}{2}$, $n \geq 1$; $\alpha_n = 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Ортонормированные многочлены Чебышева 2-го рода имеют вид

$$\widehat{U}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}U_n(x), \qquad n \in \mathbb{Z}_+,$$

и для них $\lambda_n = \frac{1}{2}$, $\alpha_n = 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Непосредственно из теоремы о рекуррентном соотношении получается следующая теорема.

Теорема 2. (формула Кристоффеля–Дарбу). *Пусть* $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *– система ортонормированных многочленов с положительными старшими коэффициентами. Имеет место следующая формула:*

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(x)p_k(t) = \lambda_n \frac{p_{n+1}(x)p_n(t) - p_n(x)p_{n+1}(t)}{x-t}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+,\ x \neq t, \tag{12}$$

где λ_n *из рекуррентного соотношения (11).*

Функцию

$$K_n(x_0, x) = \sum_{k=0}^{n} \overline{p_k(x_0)}p_k(x), \qquad x_0, x \in \mathbb{C}, \tag{13}$$

называют **полиномиальным ядром**. Связано это с выполнением следующего *воспроизводящего свойства*:

$$\int_a^b K_n(t,x)r(t)h(t)dt = r(x), \tag{14}$$

справедливого для произвольного комплексного многочлена $r(x)$ степени не превосходящей n (см. упражнение 8).

Возникает вопрос: для всякой ли весовой функции существует ортонормированная система многочленов (ОСМ)? Положительный ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 3. (существования и единственности ОСМ). *Пусть $h(x)$ – весовая функция на (a,b). Для нее существует, притом единственная, система ортонормированных многочленов $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ с положительными старшими коэффициентами.*

Определение 3. *Комплексная квадратная числовая матрица порядка $(n+1)\times(n+1)$ вида*

$$A = (a_{k,j})_{k,j=0}^{n} = (a_{k+j})_{k,j=0}^{n} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n+1} \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix},$$

называется **ганкелевой**.

Пусть $h(x)$ – весовая функция на (a,b) и $s_k,\ k\in\mathbb{Z}_+$ – её степенные моменты. Определим следующие числа:

$$\Delta_n = |s_{k+j}|_{k,j=0}^{n} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_{n+1} \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \dots & s_{2n} \end{vmatrix}, \qquad n\in\mathbb{Z}_+. \tag{15}$$

Лемма 3. *Числа Δ_n, $n\in\mathbb{Z}_+$, определенные выше, положительны.*

Следующая теорема дает явный вид для ОСМ.

Теорема 4. *Пусть $h(x)$ – весовая функция на (a,b) и $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ – её моменты. Соответствующая система ортонормированных многочленов $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ с положительными старшими коэффициентами имеет вид:*

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-1} \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^n \end{vmatrix}, \qquad n\in\mathbb{Z}_+, \tag{16}$$

где Δ_n из (15) и $\Delta_{-1}:=1$.

Заметим, что формула (16) в практическом применении не очень удобна, т. к. порядок определителей растет и это осложняет анализ свойств соответствующих многочленов.

Теорема 5. (о свойствах нулей ортонормированных многочленов). *Пусть $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – система ортонормированных многочленов с положительными старшими коэффициентами относительно весовой функции $h(x)$ на (a,b). О нулях многочленов можно сказать следующее:*
а) все нули многочленов вещественные, простые и расположены в интервале (a,b);
б) нули многочленов p_n и p_{n+1} перемежаются, т. е. между любыми двумя соседними нулями многочлена p_{n+1} найдется нуль многочлена p_n.

В качестве примера найдем нули многочлена Чебышева $T_n(x)$. Полагая $T_n(x) = \cos(n \arccos x) = 0$, получаем, что корни имеют вид

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), \qquad k = 0, 1, ..., n-1.$$

Легко видеть справедливость для этих корней утверждений предыдущей теоремы.

Заметим теперь, что сформулированнные выше теоремы **справедливы и для более общего случая** ортонормированных многочленов $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ относительно $d\sigma$, определенных в (1), если только функция $\sigma(x)$ имеет бесконечное число точек роста.

Определение 4. *Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется* **точкой роста** *вещественнозначной функции $s(x)$ на $\mathbb{R}$, если в любой окрестности этой точки функция $s(x)$ отлична от постоянной. Другими словами, в любой окрестности точки x_0 найдутся точки t, y такие, что $s(t) \neq s(y)$.*

Поскольку всякая неубывающая функция на вещественной оси определяет позитивную борелевскую меру на $\mathbb{R}$, то часто говорят об ортонормированных (ортогональных) многочленах относительно (позитивной борелевской) меры $d\sigma$ или относительно распределения $d\sigma$.

Мы будем обозначать L^p_σ $(p \geq 1)$ пространство всех измеримых относительно меры $d\sigma$ комплекснозначных функций $f(x)$, для которых

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p d\sigma\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Здесь интеграл понимается в смысле Лебега. Заметим, что пространство L^2_σ является гильбертовым относительно скалярного произведения

$$(f, g)_2 := \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)} d\sigma, \qquad f, g \in L^2_\sigma.$$

Ортонормированные многочлены $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ образуют ортонормированную систему в пространстве L^2_σ. Возникает вопрос: будут ли многочлены плотны во всем пространстве L^2_σ? Для ответа на этот и ряд других вопросов используется специальная классификация матриц Якоби и результаты теории кругов Вейля. Эта теория возникла в теории дифференциальных уравнений, а затем применялась и для матриц Якоби.

Пусть $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ является ОСМ относительно меры $d\sigma$. Определим функционал вида

$$S(r(x)) = \int_{\mathbb{R}} r(x) d\sigma(x), \qquad r(x) \in \mathbb{P}.$$

Если $r(x) \geq 0$ на $\mathbb{R}$, то очевидно, что $S(r) \geq 0$. Будем считать, что функция $\sigma(x)$ имеет бесконечное число точек роста. Если $r(x)$ ненулевой многочлен, то нетрудно показать, что $S(r) > 0$.

Определение 5. *Функционал S, заданный на $\mathbb{P}_r$, называется* **позитивным***, если для любого ненулевого неотрицательного многочлена на вещественной оси $r(x)$ выполняется неравенство $S(r) > 0$.*

Определим многочлены

$$q_n(x) = S_t\left(\frac{p_n(x) - p_n(t)}{x - t}\right), \qquad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где индекс t означает, что функционал S действует на многочлен от переменной t. Заметим, что многочлен $q_n(x)$ имеет степень $n-1$ $(n \geq 1)$, а $q_0(x) = 0$. Многочлены $\{q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ называются **многочленами второго рода**. При этом $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ называются **многочленами первого рода**.

Как мы видели ранее (см. теорему 1), многочлены первого рода удовлетворяют рекуррентному соотношению. Рассмотрим следующее разностное уравнение:

$$\lambda_{n-1}y_{n-1} + (\alpha_n - \lambda)y_n + \lambda_n y_{n+1} = 0, \qquad n = 1, 2, ..., \tag{17}$$

где коэффициенты λ_n, α_n из (11), $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ – неизвестные, а λ – комплексный параметр.

Уравнению (17) удовлетворяют не только многочлены первого рода, но и многочлены второго рода. Это проверяется непосредственной подстановкой.

Уравнение (17) является линейным разностным уравнением второго порядка. Решения $\widetilde{y}_n$ и $\widehat{y}_n$ уравнения (17) называют линейно независимыми, если равенство $C_1\widetilde{y}_n + C_2\widehat{y}_n = 0,\ n \in \mathbb{N}$, возможно лишь при $C_1 = C_2 = 0$. Многочлены первого и второго родов являются линейно независимыми решениями уравнения (17), что следует из начальных условий:

$$p_0(\lambda) = 1, \quad p_1(\lambda) = \frac{\lambda - \alpha_0}{\lambda_0}, \quad q_0(\lambda) = 0, \quad q_1(\lambda) = \frac{1}{\lambda_0}. \tag{18}$$

Два линейно независимые решения уравнения (17) называют фундаментальной системой решений этого уравнения. Любое решение уравнения (17) представляется в виде:

$$y_n = y_n(\lambda) = C_1 p_n(\lambda) + C_2 q_n(\lambda),$$

где C_1, C_2 – произвольные комплексные числа.

Всюду в дальнейшем мы будем считать меру $d\sigma$ нормированной таким образом, что её нулевой момент равен единице: $s_0 = \int_{\mathbb{R}} d\sigma = 1$. Тогда, как легко видеть, будет выполнено $p_0(x) = 1$.

Используя формулу Кристоффеля–Дарбу и ортогональность многочленов, несложно проверяется выполнение следующего соотношения:

$$p_{n-1}(\lambda)q_n(\lambda) - p_n(\lambda)q_{n-1}(\lambda) = \frac{1}{\lambda_{n-1}}, \qquad \lambda \in \mathbb{C},\ n = 1, 2, ... \tag{19}$$

Это соотношение является аналогом формулы Лиувилля–Остроградского из теории дифференциальных уравнений. Следующая теорема обобщает формулу Кристоффеля–Дарбу и является аналогом формулы Грина для дифференциальных уравнений.

Теорема 6. *Пусть $\{\widetilde{y}_n(\lambda_1)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\widehat{y}_n(\lambda_2)\}_{n=0}^{\infty}$ являются некоторыми решениями уравнения (17), отвечающими параметрам λ_1 и λ_2, соответственно. Тогда имеет место следующее соотношение:*

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\sum_{k=m}^{n-1} \widetilde{y}_k(\lambda_1)\widehat{y}_k(\lambda_2) = \lambda_{n-1}(\widetilde{y}_n(\lambda_1)\widehat{y}_{n-1}(\lambda_2) - \widetilde{y}_{n-1}(\lambda_1)\widehat{y}_n(\lambda_2)) -$$
$$-\lambda_{m-1}(\widetilde{y}_m(\lambda_1)\widehat{y}_{m-1}(\lambda_2) - \widetilde{y}_{m-1}(\lambda_1)\widehat{y}_m(\lambda_2)), \tag{20}$$

где $n = 2, 3, ...;\ 1 \leq m \leq n-1$.

Многочлен $p_n(\lambda, \tau) = p_n(\lambda) - \tau p_{n-1}(\lambda)$, где τ – комплексный параметр, будем называть **квазиортогональным многочленом степени n**. Действуя аналогично доказательству теоремы 5 мы установим, что нули этих многочленов вещественные и простые. Однако мы уже не можем утверждать, что они расположены в интервале (a, b).

Упражнения к §2

1. Предположим, что весовая функция $h(x)$ задана на интервале (a,b) следующим образом:
а) $(a,b)=(-2,2)$; $h(x)=1$, при $x\in(-2,-1)\cup(1,2)$; $h(x)=0$, при $x\in[-1,1]$;
б) $(a,b)=(-1,1)$; $h(x)=1$, при $x\in(-1,0)$; $h(x)=x+1$, при $x\in[0,1)$;
в) $(a,b)=(1,2)$; $h(x)=x^\alpha$, $x\in(1,2)$; $\alpha\in\mathbb{R}$ – параметр;
г) $(a,b)=(-1,1)$; $h(x)=\frac{1}{x^2+1}$, $x\in(-1,1)$;
д) $(a,b)=(0,\frac{\pi}{2})$; $h(x)=\cos x$, $x\in(0,\frac{\pi}{2})$;
е) $(a,b)=(0,\pi)$; $h(x)=\sin x$, $x\in(0,\pi)$.

С помощью формулы (16) вычислить для данной весовой функции первые пять ортонормированных многочленов, а также первые пять многочленов второго рода.

2. Для многочленов, построенных в предыдущем упражнении, используя компьютер вычислить приблизительно корни многочленов. Проверить выполнение свойств нулей многочленов (см. теорему 5).

3. Пусть $h(x)$ – весовая функция на интервале $(a,b)\subseteq\mathbb{R}$. Рассмотрим ненулевой многочлен $R(x)$ такой, что $R(x)\geq 0,\ x\in(a,b)$. Показать, что $\int_a^b R(x)h(x)dx>0$.

4. Показать, что корни многочленов первого и второго рода одинаковой степени перемежаются (т. е. между двумя соседними корнями многочлена первого рода расположен корень многочлена второго рода). (Воспользуйтесь соотношением (19)).

5. Если в определениях весовой функции и ортонормированных многочленов (определения 1 и 2) заменить вещественный интервал (a,b) комплексным (a,b), $a,b\in\mathbb{C}$ и не требовать вещественности многочленов, то сохранятся ли все утверждения теорем 1–5?

6. Если в определении весовой функции (определение 1) убрать условия 1) и 2), и потребовать выполнение условия

$$\int_a^b R^2(x)h(x)dx\neq 0,$$

для любого ненулевого многочлена $R(x)$, то можно ли построить систему ортонормированных многочленов? Сохранятся ли утверждения теорем 1–5?

7. Доказать, что ортонормированные многочлены $\{p_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ допускают следующее представление:

$$p_n(\lambda)=p_n(\lambda_0)+(\lambda-\lambda_0)\sum_{k=0}^{n-1}(p_k(\lambda_0)q_n(\lambda_0)-p_n(\lambda_0)q_k(\lambda_0))p_k(\lambda),\qquad \lambda,\lambda_0\in\mathbb{C}:\ \lambda\neq\lambda_0,\quad (21)$$

где $q_n(\lambda)$ – многочлены второго рода. (Представить многочлен $\frac{p_n(\lambda)-p_n(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}$ в виде линейной комбинации $\sum_{k=0}^{n-1}a_{n,k}p_k(\lambda)$ и вычислить коэффициенты $a_{n,k}$).

8. Для полиномиального ядра $K_n(x_0,x)$ проверить выполнение воспроизводящего свойства (14).

9. Показать, что полиномиальное ядро $K_n(x_0,x)$ допускает следующее представление:

$$K_n(x_0,x)=-\frac{1}{\Delta_n}\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_n & 1\\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_{n+1} & \overline{x_0}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \dots & s_{2n} & \overline{x_0^n}\\ 1 & x & x^2 & \dots & x^n & 0\end{vmatrix},$$

где Δ_n из (15), а s_k – степенные моменты весовой функции. (Проверьте для правой части последней формулы выполнение воспроизводящего свойства).

10. Рассмотрим полиномиальное ядро $K_n(x_0,x)$ в том случае, когда отрезок ортогональности $[a,b]$ конечен, а x_0 – произвольное невещественное число. Показать, что нули многочлена

$K_n(x_0, x)$ лежат в области D, ограниченной отрезком $[a, b]$ и дугой окружности, проходящей через точки a, b, x_0, с концами в точках a и b, и не содержащей точку x_0. (Пользуясь воспроизводящим свойством проверить, что

$$\int_a^b \left|(x - x_0)\frac{K_n(x_0, x)}{x - \xi}\right|^2 \frac{x - \xi}{x - x_0} h(x)dx = 0,$$

где ξ – произвольный нуль $K_n(x_0, x)$. Показать, что под действием дробно-линейного отображения $\frac{x-\xi}{x-x_0}$ область D перейдет в область, содержащую точку 0.)

11. Пусть $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – система ортонормированных многочленов с положительными старшими коэффициентами. Показать, что справедливо следующее соотношение:

$$p_n(x) = (A_n x + B_n)p_{n-1}(x) - C_n p_{n-2}(x), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{22}$$

где $A_n, C_n > 0$, $B_n \in \mathbb{R}$ и $p_{-1} = 0$. Найдите выражение коэффициентов A_n, B_n, C_n через старшие коэффициенты многочленов p_n.

12. Пусть $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – система ортонормированных многочленов с положительными старшими коэффициентами. Пользуясь соотношением (22) получите следующее представление:

$$p_n(x) = p_0(x)\begin{vmatrix} A_1x + B_1 & \sqrt{C_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sqrt{C_2} & A_2x + B_2 & \sqrt{C_3} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{C_3} & A_3x + B_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{C_n} & A_nx + B_n \end{vmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{23}$$

(Воспользуйтесь индукцией.)

13. Пусть $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – система ортонормированных многочленов с положительными старшими коэффициентами. Показать, что многочлены допускают следующее представление:

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}}\begin{vmatrix} s_0x - s_1 & s_1x - s_2 & s_2x - s_3 & \dots & s_{n-1}x - s_n \\ s_1x - s_2 & s_2x - s_3 & s_3x - s_4 & \dots & s_nx - s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1}x - s_n & s_nx - s_{n+1} & s_{n+1}x - s_{n+2} & \dots & s_{2n-2}x - s_{2n-1} \end{vmatrix}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{24}$$

где Δ_n из (15), а s_n – моменты весовой функции.

14. (*Экстремальное свойство ортонормированных многочленов.*) Пусть $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – система ортонормированных многочленов с положительными старшими коэффициентами относительно позитивной меры $d\sigma(x)$ на $[a, b]$. Показать, что

$$\min_{r(x)\in\widetilde{\mathbb{P}}_n} \int_a^b |r(x)|^2 d\sigma(x) = \frac{1}{\mu_n^2}, \tag{25}$$

где $\widetilde{\mathbb{P}}_n$ – множество многочленов степени n с единичным старшим коэффициентом, а μ_n – старший коэффициент многочлена $p_n(x)$. Минимум в (25) достигается при $r(x) = \frac{1}{\mu_n}p_n(x)$ и только в этом случае.

15. Пусть $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – система ортонормированных многочленов с положительными старшими коэффициентами относительно позитивной меры $d\sigma(x)$ на конечном отрезке $[a, b]$. Показать, что

$$\mu_n > 2^{2n-1}(b - a)^{-n}\left(\int_a^b d\sigma(x)\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{26}$$

где μ_n – старший коэффициент многочлена $p_n(x)$. (Воспользуйтесь экстремальным свойством (25) для многочлена $2^{1-2n}(b-a)^n T_n(2\frac{x-a}{b-a}-1)$, где T_n – многочлены Чебышева 1-го рода (8).)
16. Показать, что не существует позитивной меры на $\mathbb{R}$, относительно которой многочлены $p_n(x)=x^n$, $n\in\mathbb{Z}_+$ были бы ортогональными.
17. Пусть $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – система ортонормированных многочленов с положительными старшими коэффициентами относительно весовой функции $h(x)$ на $[a,b]$. Пусть $c>0,\ d\in\mathbb{R}$ – произвольные числа. Будут ли многочлены $\sqrt{c}p_n(cx+d)$ ортонормированными? На каком промежутке?
18. Пусть $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – система ортонормированных многочленов с положительными старшими коэффициентами. Предположим, что в рекуррентном соотношении (11) $\alpha_n=0$, $n\in\mathbb{Z}_+$. Вычислить $p_{2n}(0)$.
19. а) Для многочленов Чебышева 1-го рода $T_n(x)$ вычислить $T_n(-1)$, $T_n(0)$, $T_n(1)$ и $T_n'(-1)$, $T_n'(0)$, $T_n'(1)$;
б) Для многочленов Чебышева 2-го рода $U_n(x)$ вычислить $U_n(-1)$, $U_n(0)$, $U_n(1)$ и $U_n'(-1)$, $U_n'(0)$, $U_n'(1)$.
20. Определим следующую функцию:

$$G(x,w)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(x)w^n, \qquad x\in[-1,1],\ |w|<1, \tag{27}$$

где $T_n(x)$ – многочлены Чебышева 1-го рода. Используя рекуррентное соотношение для многочленов Чебышева получить алгебраическое соотношение для функции $G(x,w)$, из которого следует, что

$$G(x,w)=\frac{1-xw}{1-2xw+w^2}. \tag{28}$$

21. Показать, что в рекуррентном соотношении (11) коэффициенты α_n удовлетворяют неравенствам:

$$a<\alpha_n<b, \qquad n\in\mathbb{Z}_+. \tag{29}$$

22. Рассмотрим полиномиальное ядро $K_n(x_0,x)$ и произвольную комплексную точку z_0. Показать, что

$$\max_{r(x)\in\mathbb{P}_n(h)}|r(z_0)|^2=K_n(z_0,z_0), \tag{30}$$

где $\mathbb{P}_n(h)$ – множество комплексных многочленов $p(x)$ степени n, таких, что

$$\int_a^b |p(x)|^2 h(x)dx=1.$$

Минимум в (30) достигается при

$$r(x)=\varepsilon\frac{K_n(z_0,x)}{\sqrt{K_n(z_0,z_0)}},$$

где $\varepsilon\in\mathbb{C}:\ |\varepsilon|=1,$ – произвольное число.
23. Рассмотрим полиномиальное ядро $K_n(x_0,x)$ и произвольную комплексную точку z_0. Доказать, что

$$\min_{r(x)\in\widehat{\mathbb{P}}_n}\int_a^b |r(x)|^2 h(x)dx=\frac{1}{K_n(z_0,z_0)}, \tag{31}$$

где $\widehat{\mathbb{P}}_n(h)$ – множество комплексных многочленов $p(x)$ степени n, таких, что $p(z_0) = 1$. Минимум в (31) достигается при

$$r(x) = \frac{K_n(z_0, x)}{K_n(z_0, z_0)}.$$

24. а) Пусть $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – система ортонормированных многочленов с положительными старшими коэффициентами относительно весовой функции $h(x)$ на $[a, b]$, и $a > -\infty$. Рассмотрим полиномиальное ядро $K_n(x_0, x)$ для произвольной конечной вещественной точки $x_0 \le a$. Показать, что многочлены $\{K_n(x_0, x)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ ортогональны на $[a, b]$ относительно весовой функции $(x-x_0)h(x)$. Тогда многочлены $\{\frac{1}{p_n(x_0)\mu_n} K_n(x_0, x)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ имеют единичный старший коэффициент и ортогональны на $[a, b]$ относительно весовой функции $(x - x_0)h(x)$.

б) Пусть $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – система ортонормированных многочленов с положительными старшими коэффициентами относительно весовой функции $h(x)$ на $[a, b]$ и $b < +\infty$. Рассмотрим полиномиальное ядро $K_n(x_0, x)$ для произвольной конечной вещественной точки $x_0 \ge b$. Показать, что многочлены $\{K_n(x_0, x)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ ортогональны на $[a, b]$ относительно весовой функции $(x_0 - x)h(x)$. Многочлены $\{\frac{1}{p_n(x_0)\mu_n} K_n(x_0, x)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ имеют единичный старший коэффициент и ортогональны на $[a, b]$ относительно весовой функции $(x_0 - x)h(x)$. (Воспользуйтесь воспроизводящим свойством.)

25. Используя свойства, полученные в предыдущей задаче, доказать следующие представления.

а) Пусть $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – система ортогональных многочленов с единичными старшими коэффициентами относительно весовой функции $h(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ на $[a, b] = [-1, 1]$. Многочлены допускают следующее представление:

$$p_n(x) = \frac{\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\arccos x\right)}{2^n \cos\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+,\ x \in (-1, 1]. \tag{32}$$

б) Пусть $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – система ортогональных многочленов с единичными старшими коэффициентами относительно весовой функции $h(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ на $[a, b] = [-1, 1]$. Многочлены имеют следующее представление:

$$p_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\arccos x\right)}{2^n \sin\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+,\ x \in [-1, 1). \tag{33}$$

в) Пусть $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – система ортогональных многочленов с единичными старшими коэффициентами относительно весовой функции $h(x) = \sqrt{(1-x)(1+x)^3}$ на $[a, b] = [-1, 1]$. Получить представление для многочленов $p_n(x)$.

26. (*Формула Кристоффеля*) Пусть $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ (p_n имеет степень n и положительный старший коэффициент) является ортонормированной системой на $[a, b]$ относительно весовой функции $h(x)$. Пусть $\rho(x) = c(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_l)$, где $\{x_k\}_{k=0}^{l}$ – различные вещественные числа, $c \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{N}$. Предположим, что многочлен $\rho(x)$ является неотрицательным на $[a, b]$. Определим многочлены $q_n(x)$ следующим образом:

$$\rho(x)q_n(x) = \begin{vmatrix} p_n(x) & p_{n+1}(x) & \dots & p_{n+l}(x) \\ p_n(x_1) & p_{n+1}(x_1) & \dots & p_{n+l}(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_n(x_l) & p_{n+1}(x_l) & \dots & p_{n+l}(x_l) \end{vmatrix}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{34}$$

Показать, что многочлены $\{q_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ являются ортогональной системой на $[a, b]$ относительно весовой функции $\rho(x)h(x)$.

27. Пусть $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ (p_n имеет степень n и положительный старший коэффициент) является ортонормированной системой на $[a,b]$ относительно весовой функции $h(x)$. Предположим, что $a=-b$, а функция $h(x)$ четна. Показать, что имеет место равенство

$$p_n(-x) = (-1)^n p_n(x), \qquad n \in \mathbb{Z}_+,\ x \in \mathbb{C}.$$

28. Пусть $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ (p_n имеет степень n и положительный старший коэффициент) является ортонормированной системой на конечном отрезке $[a,b]$ относительно весовой функции $h(x)$. Показать, что для коэффициентов λ_n из рекуррентного соотношения (11) справедлива оценка:

$$0 < \lambda_n < c, \qquad n = 0,1,...,$$

где $c = \max(|a|,|b|)$.

§3. Полубесконечные симметрические (2N+1)-диагональные матрицы и отвечающие им многочлены

Рассмотрим систему многочленов $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ (p_n имеет степень n и положительный старший коэффициент), которые удовлетворяют следующему соотношению:

$$\sum_{j=1}^{N} (\overline{\alpha_{k-j,j}} p_{k-j}(\lambda) + \alpha_{k,j} p_{k+j}(\lambda)) + \alpha_{k,0} p_k(\lambda) = \lambda^N p_k(\lambda), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{35}$$

где $\alpha_{m,n} \in \mathbb{C},\ m,n \in \mathbb{Z}_+ :\ \alpha_{m,N} > 0, \alpha_{m,0} \in \mathbb{R}$, и $\alpha_{m,n}$, p_k с отрицательными индексами считаются равными нулю. Здесь N – фиксированное натуральное число. Соотношение (35) может быть записано в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \alpha_{0,2} & \dots & \alpha_{0,N} & 0 & 0 & \dots \\ \overline{\alpha_{0,1}} & \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,N-1} & \alpha_{1,N} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \overline{\alpha_{0,N}} & \overline{\alpha_{1,N-1}} & \overline{\alpha_{2,N-2}} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \overline{\alpha_{1,N}} & \overline{\alpha_{2,N-1}} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0(\lambda) \\ p_1(\lambda) \\ \vdots \\ p_N(\lambda) \\ p_{N+1}(\lambda) \\ \vdots \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda^N \begin{pmatrix} p_0(\lambda) \\ p_1(\lambda) \\ \vdots \\ p_N(\lambda) \\ p_{N+1}(\lambda) \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Обозначим матрицу в левой части (36) посредством J и $\vec{p}(\lambda) := (p_0(\lambda), p_1(\lambda), p_2(\lambda), ...)^T$. Тогда мы можем записать

$$J\vec{p}(\lambda) = \lambda^N \vec{p}(\lambda). \tag{37}$$

В частности, при $N=1$ мы получим соотношение (3).

Запишем соотношение (36) для $\lambda = z$, возьмем комплексное сопряжение и умножим затем обе части получившегося равенства на $p_k(\lambda)$:

$$\sum_{j=1}^{N} (\alpha_{k-j,j} \overline{p_{k-j}(z)} p_k(\lambda) + \overline{\alpha_{k,j}}\, \overline{p_{k+j}(z)} p_k(\lambda)) + \alpha_{k,0} \overline{p_k(z)} p_k(\lambda) = \overline{z}^N \overline{p_k(z)} p_k(\lambda), \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{38}$$

Умножим соотношение (35) на $\overline{p_k(z)}$ и вычтем соотношение (38):

$$\sum_{j=1}^{N}((\overline{\alpha_{k-j,j}}p_{k-j}(\lambda)\overline{p_k(z)}-\alpha_{k-j,j}p_k(\lambda)\overline{p_{k-j}(z)})+(\alpha_{k,j}p_{k+j}(\lambda)\overline{p_k(z)}-$$

$$-\overline{\alpha_{k,j}}p_k(\lambda)\overline{p_{k+j}(z)}))=(\lambda^N-\overline{z}^N)p_k(\lambda)\overline{p_k(z)},\quad k\in\mathbb{Z}_+. \tag{39}$$

Суммируя по k приходим к следующей теореме.

Теорема 7. *Пусть $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ (p_n имеет степень n и положительный старший коэффициент) является системой многочленов, удовлетворяющих соотношению (35). Тогда имеет место следующее равенство:*

$$\sum_{k=0}^{m}p_k(\lambda)\overline{p_k(z)}=$$

$$=\frac{\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=\max(m-j+1,0)}^{m}\left(\alpha_{k,j}p_{k+j}(\lambda)\overline{p_k(z)}-\overline{\alpha_{k,j}}p_k(\lambda)\overline{p_{k+j}(z)}\right)}{\lambda^N-\overline{z}^N},$$

$$m\in\mathbb{Z}_+. \tag{40}$$

Переходя к пределу в (40) при $\lambda\to z$ мы получаем соотношение

$$\sum_{k=0}^{m}|p_k(z)|^2=\lim_{\lambda\to z}\frac{\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=\max(m-j+1,0)}^{m}A_{k,j}(\lambda,z)}{\lambda^N-\overline{z}^N}. \tag{41}$$

Рассмотрим различные варианты расположения точки z в комплексной плоскости. Обозначим $L_N=\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda^N-\overline{\lambda}^N=0\}=\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda^N\in\mathbb{R}\}$, $N\in\mathbb{N}$.

1) *Случай $z\notin L_N$.* В этом случае мы получаем

$$0<\sum_{k=0}^{m}|p_k(z)|^2=\frac{\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=\max(m-j+1,0)}^{m}\operatorname{Im}(\alpha_{k,j}p_{k+j}(z)\overline{p_k(z)})}{\operatorname{Im}(z^N)}.$$

Из последнего соотношения следует, что при $m\geq N-1$ многочлены $p_m,p_{m-1},...,p_{m-N+1}$ не имеют общих нулей вне L_N. В противном случае, правая часть обратилась бы в ноль в такой точке, что невозможно.

2) *Случай $z\in L_N\backslash\{0\}$.* В этом случае, пользуясь правилом Лопиталя мы получаем

$$0<\sum_{k=0}^{m}|p_k(z)|^2=\frac{1}{Nz^{N-1}}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=\max(m-j+1,0)}^{m}\left(\alpha_{k,j}p'_{k+j}(z)\overline{p_k(z)}-\overline{\alpha_{k,j}}p'_k(z)\overline{p_{k+j}(z)}\right).$$

Из этого соотношения следует, что при $m\geq N-1$ многочлены $p_m,p_{m-1},...,p_{m-N+1}$ и их производные не имеют общих корней в $L_N\backslash\{0\}$.

3) *Случай $z=0$.* В этом случае мы получаем, что

$$0<\sum_{k=0}^{m}|p_k(0)|^2=\frac{1}{N!}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=\max(m-j+1,0)}^{m}\left(\alpha_{k,j}p_{k+j}^{(N)}(0)\overline{p_k(0)}-\overline{\alpha_{k,j}}p_k^{(N)}(0)\overline{p_{k+j}(0)}\right),$$

где производная $A_{k,j}$ взята по первому аргументу. Из данного соотношения следует, что при $m\geq N-1$ для многочленов $p_m,p_{m-1},...,p_{m-N+1}$ и их N-х производных $z=0$ не является совместным корнем.

Теорема 8. *Пусть $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ (p_n имеет степень n и положительный старший коэффициент) является системой многочленов, удовлетворяющих (35). Справедливы следующие утверждения:*
1. N последовательные многочлена не имеют общих нулей вне L_N.
2. $2N$ последовательные многочлена не имеют общих нулей.
3. N последовательные многочлена и их производные не имеют общих нулей в $L_N\backslash\{0\}$.
4. $z = 0$ не может быть общим нулем для N последовательных многочленов и их N-х производных.

При $N = 1$ мы получаем известные нам свойства ортогональных многочленов на вещественной оси:
1. Нули многочленов вещественные.
2. Два последовательные многочлена не имеют общих нулей.
3–4. Многочлен и его производная не имеют общих нулей. Другими словами, нули многочленов простые.

Для $N = 2$ мы получаем более слабые условия:
1. Два последовательные многочлена не имеют общих нулей вне вещественной и мнимой осей.
2. Четыре последовательные многочлена не имеют общих нулей.
3. Два последовательные многочлена и их производные не имеют общих нулей на вещественной и мнимой осях исключая точку 0.
4. $z = 0$ не может быть общим нулем двух последовательных многочленов и их вторых производных.

Заметим, что множество L_N, определенное выше, является набором из $2N$ радиальных пучей или пучком из N прямых:

$$L_N = \bigcup_{k=0}^{2N-1} \{x\widehat{\varepsilon}^k,\ x \geq 0\} = \bigcup_{k=0}^{N-1} \{x\widehat{\varepsilon}^k,\ x \in \mathbb{R}\}, \tag{42}$$

где $\widehat{\varepsilon} = \cos\frac{\pi}{N} + i\sin\frac{\pi}{N}$ — первообразный корень из единицы порядка $2N$. Обозначим теперь

$$L_{N,k} := \{x\widehat{\varepsilon}^k,\ x \geq 0\}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2N-1. \tag{43}$$

Пусть $M(\lambda)$ — $\mathbb{C}_{N\times N}$-значная функция на $L_N\backslash\{0\}$, неубывающая на каждом луче $L_{N,k}\backslash\{0\}$, $k = 0, 1, \ldots, 2N-1$, в направлении от 0 к ∞. Это означает, что $M(\lambda_2) - M(\lambda_1) \geq 0$, если λ_1, $\lambda_2 \in L_{N,k}\backslash\{0\}$ и $|\lambda_2| \geq |\lambda_1|$ ($k = 0, 1, \ldots, 2N-1$).

Мы предположим, что функция $M(\lambda)$ удовлетворяет следующим условиям (сравните с определением весовой функции для ортогональных многочленов на вещественной оси, данным выше):

$$\int_{L_N} (\lambda^n, (\lambda\varepsilon)^n, (\lambda\varepsilon^2)^n, \ldots, (\lambda\varepsilon^{N-1})^n) dM(\lambda) \overline{\begin{pmatrix} \lambda^n \\ (\lambda\varepsilon)^n \\ \vdots \\ (\lambda\varepsilon^{N-1})^n \end{pmatrix}} < \infty,\ n \in \mathbb{Z}_+, \tag{44}$$

где $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{N} + i\sin\frac{2\pi}{N}$ является первообразным корнем из единицы порядка N. Здесь и далее интеграл по L_N понимается как сумма интегралов по каждому лучу $L_{N,k}$, $k = 0, 1, \ldots, 2N-1$. Интеграл по $L_{N,k}$ ($k = 0, 1, \ldots, 2N-1$) понимается как несобственный в нуле, т. е.

$$\int_{L_{N,k}} \ldots = \lim_{\delta\to+0} \int_{L_{N,k}\backslash U_\delta(0)} \ldots,$$

где $U_\delta(0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \delta\}$.

Пусть также задана матрица $A \in \mathbb{C}^{\geq}_{N\times N}$. Определим следующий функционал:

$$\sigma(u,v) = \int_{L_N} (u(\lambda), u(\lambda\varepsilon), u(\lambda\varepsilon^2), \dots, u(\lambda\varepsilon^{N-1})) dM(\lambda) \overline{\begin{pmatrix} v(\lambda) \\ v(\lambda\varepsilon) \\ \vdots \\ v(\lambda\varepsilon^{N-1}) \end{pmatrix}} +$$

$$+(u(0), u'(0), u''(0), \dots, u^{(N-1)}(0)) A \overline{\begin{pmatrix} v(0) \\ v'(0) \\ \vdots \\ v^{(N-1)}(0) \end{pmatrix}}, \qquad u,v \in \mathbb{P}. \tag{45}$$

Условия (44) обеспечивают корректность его определения на всех многочленах. Нетрудно видеть, что функционал σ билинеен. Он обладает следующими свойствами:

$$\sigma(\lambda^N u(\lambda), v(\lambda)) = \sigma(u(\lambda), \lambda^N v(\lambda)), \quad u,v \in \mathbb{P}; \tag{46}$$

$$\overline{\sigma(u,v)} = \sigma(v,u), \quad u,v \in \mathbb{P}; \tag{47}$$

$$\sigma(u,u) \geq 0, \quad u \in \mathbb{P}. \tag{48}$$

Здесь уместно сравнить его свойства со свойствами позитивного функционала, который мы выше определили для ортогональных многочленов на вещественной оси. Более того, мы также предположим положительную определенность функционала σ в следующемусмысле:

$$\sigma(u,u) > 0, \tag{49}$$

для всех ненулевых $u \in \mathbb{P}$.

Пользуясь «весовой функцией» $(M(\lambda), A)$ можно построить систему ортонормированных многочленов. Действительно, применяя процесс ортогонализации Грама–Шмидта к функционалу σ (в роли скалярного произведения) для последовательности степеней: $1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^n, \dots$, мы получим систему ортонормированных многочленов на радиальных лучах $\{g_n(\lambda)\}_{n=0}^\infty$ (g_n имеет степень n и положительный старший коэффициент):

$$\int_{L_N} (g_n(\lambda), g_n(\lambda\varepsilon), g_n(\lambda\varepsilon^2), \dots, g_n(\lambda\varepsilon^{N-1})) dM(\lambda) \overline{\begin{pmatrix} g_m(\lambda) \\ g_m(\lambda\varepsilon) \\ \vdots \\ g_m(\lambda\varepsilon^{N-1}) \end{pmatrix}} +$$

$$+(g_n(0), g_n'(0), g_n''(0), \dots, g_n^{(N-1)}(0)) A \overline{\begin{pmatrix} g_m(0) \\ g_m'(0) \\ \vdots \\ g_m^{(N-1)}(0) \end{pmatrix}} = \delta_{n,m}, \qquad n,m \in \mathbb{Z}_+. \tag{50}$$

Пользуясь этим соотношением, можно показать, что эти многочлены удовлетворяют рекуррентному соотношению вида (35). Более того, оказывается, что для любых многочленов, удовлетворяющих рекуррентному соотношению вида (35), найдется функция M и матрица A, для которых они являются ортонормированными многочленами на лучах.

Упражнения к §3

1. Рассмотрим многочлены $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющие следующему соотношению:

$$J\vec{p}(\lambda) = \lambda^2 \vec{p}(\lambda), \tag{51}$$

где $\vec{p}(\lambda) = (p_0(\lambda), p_1(\lambda), ...)^T$,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \overline{\beta} & 0 & \beta & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & \overline{\beta} & 0 & \beta & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \overline{\beta} & 0 & \beta & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{52}$$

и $\beta \in \mathbb{C}$ – фиксированный параметр, с начальными условиями $p_0(\lambda) = 1$, $p_1(\lambda) = \lambda$. Найти явный вид многочленов $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$. (Для соответствующего разностного соотношения с постоянными коэффицииентами искать решение в виде степенной функции.)

2. Используя компьютер, вычислить приближенно нули многочленов $p_j(\lambda)$, $j = 1, 2, ..., 6$, определенных в предыдущем упражнении для случаев:

а) $\beta = 1$;

б) $\beta = -1$;

в) $\beta = i$;

г) $\beta = -i$.

Для $j = 1, 2, 3, 4$ найти также аналитическое представление корней.

3. Рассмотрим систему многочленов $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ (p_n имеет степень n и положительный старший коэффициент), удовлетворяющую соотношению (35). Определим функционал $\sigma(u, v)$, $u, v \in \mathbb{P}$, следующим образом: если $u = \sum_{k=0}^{\infty} a_k p_k(\lambda)$, $v = \sum_{j=0}^{\infty} b_j p_j(\lambda)$, $a_k, b_j \in \mathbb{C}$, где лишь конечное число коэффициентов a_k, b_k являются ненулевыми, то

$$\sigma(u, v) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \overline{b_k}. \tag{53}$$

Показать, что такое определение корректно и функционал σ обладает следующими свойствами:

$$\sigma(u, u) > 0, \qquad u \in \mathbb{P},\ u \neq 0,$$

$$\sigma(u, v) = \overline{\sigma(v, u)}, \qquad u, v \in \mathbb{P},$$

$$\sigma(p_n(\lambda), p_m(\lambda)) = \delta_{n,m}, \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+,$$

$$\sigma(\lambda^N u(\lambda), v(\lambda)) = \sigma(u(\lambda), \lambda^N v(\lambda)), \qquad u, v \in \mathbb{P}.$$

4. Рассмотрим систему многочленов $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ (p_n имеет степень n и положительный старший коэффициент), удовлетворяющую соотношению (35). Предположим, что для некоторого целого k, $k \geq N$, многочлен $p_k(\lambda)$ имеет среди своих корней различные числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$, такие, что $\lambda_j^N = a$, $j = 1, 2, ..., N$, $a \in \mathbb{C}$. Показать, что число a вещественно. (Воспользоваться свойствами функционала σ, определенного в предыдущем упражнении.)

5. Рассмотрим систему многочленов $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ (p_n имеет степень n и положительный старший коэффициент), удовлетворяющую соотношению

$$J\vec{p}(\lambda) = \lambda \vec{p}(\lambda), \tag{54}$$

где $\vec{p}(\lambda) = (p_0(\lambda), p_1(\lambda), ...)^T$,

$$J = \begin{pmatrix} \beta i & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & -\beta i & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2} & \beta i & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\beta i & \frac{1}{2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{55}$$

и $\beta \in \mathbb{C}$ – фиксированный параметр, с начальным условием $p_0(\lambda) = 1$.
Найти явный вид многочленов $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$. (Проверить, что $(J^2)^* = J^2$ и $J^2\vec{p}(\lambda) = \lambda^2\vec{p}(\lambda)$ и выразить многочлены $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ через многочлены Чебышева 2-го рода.)
6. Рассмотрим систему многочленов $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ (p_n имеет степень n и положительный старший коэффициент), удовлетворяющую соотношению

$$J\vec{p}(\lambda) = \lambda\vec{p}(\lambda), \tag{56}$$

где $\vec{p}(\lambda) = (p_0(\lambda), p_1(\lambda), ...)^T$, а матрица J такова, что

$$(J^2)^* = J^2.$$

Показать, что корни многочленов $p_n(\lambda)$ лежат на вещественной и мнимой осях в комплексной плоскости.

§4. Полиномиальные возмущения меры: обобщение формулы Кристоффеля

Рассмотрим матричнозначную функцию $M(\lambda)$ и неотрицательную матрицу A с теми же свойствами, что и в предыдущем параграфе. Будем обозначать через $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ (p_n имеет степень n и положительный старший коэффициент) соответствующую последовательность ортонормированных многочленов, удовлетворяющих соотношениям ортонормированности (50).

Пусть найдется такой интервал $[a,b]$, $-\infty \le a < b \le +\infty$, что

$$\int_{L_N} (p(\lambda), p(\lambda\varepsilon), p(\lambda\varepsilon^2), \dots, p(\lambda\varepsilon^{N-1}))dM(\lambda)\overline{\begin{pmatrix} q(\lambda) \\ q(\lambda\varepsilon) \\ \vdots \\ q(\lambda\varepsilon^{N-1}) \end{pmatrix}} =$$

$$= \int_{\{z\in\mathbb{C}:\ z^N\in[a,b]\}} (p(\lambda), p(\lambda\varepsilon), p(\lambda\varepsilon^2), \dots, p(\lambda\varepsilon^{N-1}))dM(\lambda)\overline{\begin{pmatrix} q(\lambda) \\ q(\lambda\varepsilon) \\ \vdots \\ q(\lambda\varepsilon^{N-1}) \end{pmatrix}}, \tag{57}$$

для всех многочленов $p, q \in \mathbb{P}$. Это означает, что по возможности мы исключаем часть интеграла по L_N, которая не влияет на значения функционала $\sigma(u,v)$.

Пусть $\rho(x) \in \mathbb{P}$ – положительна на $[a,b]$, где $\deg\rho = l$, $l \in \mathbb{N}$. Предположим, что эта функция может быть записана в следующей форме:

$$\rho(x) = c(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_l), \qquad c \ne 0, \tag{58}$$

с c, $x_j \in \mathbb{R}$, $c \ne 0$ и что ее нули простые. Также предположим, что

$$\rho(0) > 0. \tag{59}$$

Тогда

$$\rho(\lambda^N) = c(\lambda^N - x_1)(\lambda^N - x_2)\dots(\lambda^N - x_l) = c\prod_{j=1}^{l}\prod_{k=1}^{N}(\lambda - x_{j,k}), \tag{60}$$

где

$$\mathcal{X}_j := \{x_{j,k}\}_{k=1}^N \tag{61}$$

является набором всех корней N-й степени $\sqrt[N]{x_j}$, $j = 1, 2, \dots, l$.

Обозначим

$$D_n(\lambda) := \begin{vmatrix} p_n(\lambda) & p_{n+1}(\lambda) & \dots & p_{n+Nl}(\lambda) \\ p_n(x_{1,1}) & p_{n+1}(x_{1,1}) & \dots & p_{n+Nl}(x_{1,1}) \\ p_n(x_{1,2}) & p_{n+1}(x_{1,2}) & \dots & p_{n+Nl}(x_{1,2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_n(x_{1,N}) & p_{n+1}(x_{1,N}) & \dots & p_{n+Nl}(x_{1,N}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_n(x_{l,1}) & p_{n+1}(x_{l,1}) & \dots & p_{n+Nl}(x_{l,1}) \\ p_n(x_{l,2}) & p_{n+1}(x_{l,2}) & \dots & p_{n+Nl}(x_{l,2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_n(x_{l,N}) & p_{n+1}(x_{l,N}) & \dots & p_{n+Nl}(x_{l,N}) \end{vmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,\ \lambda \in \mathbb{C}; \tag{62}$$

$$d_n := \begin{vmatrix} p_n(x_{1,1}) & p_{n+1}(x_{1,1}) & \dots & p_{n+Nl-1}(x_{1,1}) \\ p_n(x_{1,2}) & p_{n+1}(x_{1,2}) & \dots & p_{n+Nl-1}(x_{1,2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_n(x_{1,N}) & p_{n+1}(x_{1,N}) & \dots & p_{n+Nl-1}(x_{1,N}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_n(x_{l,1}) & p_{n+1}(x_{l,1}) & \dots & p_{n+Nl-1}(x_{l,1}) \\ p_n(x_{l,2}) & p_{n+1}(x_{l,2}) & \dots & p_{n+Nl-1}(x_{l,2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_n(x_{l,N}) & p_{n+1}(x_{l,N}) & \dots & p_{n+Nl-1}(x_{l,N}) \end{vmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,\ \lambda \in \mathbb{C}. \tag{63}$$

Лемма 4. *Пусть d_n заданы посредством (63). Тогда $d_n \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$.*

Доказательство. Мы поступаем аналогично рассуждениям в (частном) случае ортогональных многочленов на вещественной оси (см. [2]). Предположим, что $d_k = 0$ для $k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда найдутся комплексные числа ξ_k, $k = n, n+1, \dots, n+Nl-1$, не все нули, такие, что

$$Q(\lambda) := \sum_{k=n}^{n+Nl-1} \xi_k p_k(\lambda) = 0, \qquad \lambda \in \mathcal{X}_j,\ j = 1, 2, \dots, l. \tag{64}$$

Тогда $Q(\lambda) = \rho(\lambda^N)G(\lambda)$, где $G(\lambda) \in \mathbb{P}$, $\deg G \leq n-1$. Пользуясь ортонормированностью многочленов p_k и соотношением (64) мы получим

$$\sigma(Q(\lambda), p_m(\lambda)) = 0, \qquad m = 0, 1, \dots, n-1,$$

где $\sigma(u,v)$ является функционалом из (45). Тогда $\sigma(Q(\lambda), q(\lambda)) = 0$ для произвольного $q \in \mathbb{P}$ с $\deg q \leq n-1$. В частности, мы получим $\sigma(Q(\lambda), G(\lambda)) = \sigma(\rho(\lambda^N)G(\lambda), G(\lambda)) = 0$. Это означает, что

$$\int_{L_N} \rho(\lambda^N)(G(\lambda), G(\lambda\varepsilon), G(\lambda\varepsilon^2), \dots, G(\lambda\varepsilon^{N-1}))dM(\lambda)\overline{\begin{pmatrix} G(\lambda) \\ G(\lambda\varepsilon) \\ \vdots \\ G(\lambda\varepsilon^{N-1}) \end{pmatrix}} +$$

$$+(\rho(\lambda^N)G(\lambda),(\rho(\lambda^N)G(\lambda))',\ldots,(\rho(\lambda^N)G(\lambda))^{(N-1)})A\left.\overline{\begin{pmatrix} G(\lambda)\\ G'(\lambda)\\ \vdots\\ G^{(N-1)}(\lambda)\end{pmatrix}}\right|_{\lambda=0}=0. \qquad (65)$$

Через $\widehat{A}$ обозначим второе слагаемое слева в (65). Вначале допустим, что A ненулевая матрица. Тогда

$$\rho(\lambda^N)=c_0+\lambda^N r(\lambda), \qquad r\in\mathbb{P}. \qquad (66)$$

Отсюда вытекает, что

$$\widehat{A}=(c_0G(\lambda),(c_0G(\lambda))',\ldots,(c_0G(\lambda))^{(N-1)})A\left.\overline{\begin{pmatrix} G(\lambda)\\ G'(\lambda)\\ \vdots\\ G^{(N-1)}(\lambda)\end{pmatrix}}\right|_{\lambda=0}+$$

$$+(\lambda^N r(\lambda)G(\lambda),(\lambda^N r(\lambda)G(\lambda))',\ldots,(\lambda^N r(\lambda)G(\lambda))^{(N-1)})A\left.\overline{\begin{pmatrix} G(\lambda)\\ G'(\lambda)\\ \vdots\\ G^{(N-1)}(\lambda)\end{pmatrix}}\right|_{\lambda=0}=$$

$$=c_0(G(\lambda),G'(\lambda),\ldots,G^{(N-1)}(\lambda))A\left.\overline{\begin{pmatrix} G(\lambda)\\ G'(\lambda)\\ \vdots\\ G^{(N-1)}(\lambda)\end{pmatrix}}\right|_{\lambda=0}. \qquad (67)$$

Отметим, что $c_0=\rho(0)>0$, см. (59). Поскольку A является положительно полуопределенной эрмитовой матрицей, то

$$\widehat{A}\geq 0. \qquad (68)$$

Первое слагаемое слева в (65) также является неотрицательным. Следовательно, оба слагаемых слева в (65) равны нулю. Используя (67) мы получаем, что

$$(G(\lambda),G'(\lambda),\ldots,G^{(N-1)}(\lambda))A\left.\overline{\begin{pmatrix} G(\lambda)\\ G'(\lambda)\\ \vdots\\ G^{(N-1)}(\lambda)\end{pmatrix}}\right|_{\lambda=0}=0. \qquad (69)$$

В случае $A=0$ соотношение (69) выполняется тривиально.

Если интервал $[a,b]$ конечен, тогда, поскольку $\rho(x)$ непрерывна на $[a,b]$, найдется точка $x_m\in[a,b]$ такая, что

$$\rho(x)\geq\rho(x_m)>0, \qquad x\in[a,b]. \qquad (70)$$

Если же $a=-\infty$ и/или $b=\infty$, мы заметим, что $|\rho(x)|\to+\infty$ при $x\to\infty$. Итак, в любом случае выполняется:

$$\rho(x)\geq m_0>0, \qquad x\in[a,b]. \qquad (71)$$

Значит

$$0=\int_{L_N}\rho(\lambda^N)(G(\lambda),G(\lambda\varepsilon),G(\lambda\varepsilon^2),\ldots,G(\lambda\varepsilon^{N-1}))dM(\lambda)\overline{\begin{pmatrix} G(\lambda)\\ G(\lambda\varepsilon)\\ \vdots\\ G(\lambda\varepsilon^{N-1})\end{pmatrix}}\geq$$

$$\geq m_0 \int_{L_N} (G(\lambda), G(\lambda\varepsilon), G(\lambda\varepsilon^2), \ldots, G(\lambda\varepsilon^{N-1})) dM(\lambda) \overline{\begin{pmatrix} G(\lambda) \\ G(\lambda\varepsilon) \\ \vdots \\ G(\lambda\varepsilon^{N-1}) \end{pmatrix}}.$$

Тогда

$$\int_{L_N} (G(\lambda), G(\lambda\varepsilon), G(\lambda\varepsilon^2), \ldots, G(\lambda\varepsilon^{N-1})) dM(\lambda) \overline{\begin{pmatrix} G(\lambda) \\ G(\lambda\varepsilon) \\ \vdots \\ G(\lambda\varepsilon^{N-1}) \end{pmatrix}} = 0. \qquad (72)$$

Из (69),(72) следует, что $\sigma(G(\lambda), G(\lambda)) = 0$. Поскольку $G \neq 0$, мы приходим к противоречию с соотношением (49). Лемма доказана.

Из леммы 4 следует, что многочлен D_n, $n \in \mathbb{Z}_+$ имеет степень $n + Nl$. Кроме того, числа $x_{j,k}$, $j = 1, 2, \ldots, l$; $k = 1, 2, \ldots, N$ являются нулями этого многочлена. Значит

$$D_n = \rho(\lambda^N) r_n(\lambda), \qquad (73)$$

где $r_n(\lambda) \in \mathbb{P}$ с $\deg r_n = n$. Используя определение D_n записываем:

$$D_n = \sum_{j=n}^{n+Nl} \xi_j p_j(\lambda), \qquad \xi_j \in \mathbb{C},\ \xi_{n+Nl} \neq 0. \qquad (74)$$

Пользуясь соотношениями (74),(50) мы получаем, что

$$0 = \sigma\left(\sum_{j=n}^{n+Nl} \xi_j p_j(\lambda), t(\lambda) \right) = \sigma(D_n, t) = \sigma(\rho(\lambda^N) r_n(\lambda), t(\lambda)) =$$

$$= \sigma_\rho(r_n(\lambda), t(\lambda)), \qquad (75)$$

для произвольного $t(\lambda) \in \mathbb{P}:\ \deg t \leq n - 1$. Здесь мы обозначаем

$$\sigma_\rho(u, v) := \sigma(\rho(\lambda^N) u, v) = \int_{\{z \in \mathbb{C}:\ z^N \in [a,b]\}} (u(\lambda), u(\lambda\varepsilon), u(\lambda\varepsilon^2), \ldots, u(\lambda\varepsilon^{N-1})) \cdot$$

$$\cdot \rho(\lambda^N) dM(\lambda) \overline{\begin{pmatrix} v(\lambda) \\ v(\lambda\varepsilon) \\ \vdots \\ v(\lambda\varepsilon^{N-1}) \end{pmatrix}} + \rho(0)(u(0), u'(0), u''(0), \ldots, u^{(N-1)}(0)) A \cdot$$

$$\cdot \overline{\begin{pmatrix} v(0) \\ v'(0) \\ \vdots \\ v^{(N-1)}(0) \end{pmatrix}}, \qquad u, v \in \mathbb{P}. \qquad (76)$$

Функционал σ_ρ билинеен. Он удовлетворяет соотношениям (46), (47) и (48). Непосредственно проверяется, что выполнено (49) для функционала σ_ρ. Из (75) и (47) (для σ_ρ) следует, что

$$\sigma_\rho(r_n(\lambda), r_m(\lambda)) = 0, \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+,\ n \neq m. \qquad (77)$$

Многочлены $\{r_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$, $\deg r_n = n$, которые удовлетворяют соотношению (77), называются *ортогональными относительно* σ_ρ.

Пусть $\{t_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ (t_n имеет степень n и положительный старший коэффициент) — ортонормированные многочлены, отвечающие положительной мере $\rho(\lambda)dM(\lambda)$ и матрице $\rho(0)A$, построенные так, как это было сделано в предыдущем параграфе. Тогда

$$\sigma_\rho(t_n(\lambda), t_m(\lambda)) = \delta_{n,m}, \qquad n, m \in \mathbb{Z}_+. \tag{78}$$

Мы будем называть многочлены $\{t_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ *ортонормированными относительно* σ_ρ. Если $t_n(\lambda) = \mu_n\lambda^n + ...$; $r_n(\lambda) = \widehat{\mu}_n\lambda^n + ...$, то $\sigma_\rho\left(r_n - \frac{\widehat{\mu}_n}{\mu_n}t_n, r_n - \frac{\widehat{\mu}_n}{\mu_n}t_n\right) = 0$. Используя соотношение (49) мы получаем, что $r_n = \frac{\widehat{\mu}_n}{\mu_n}t_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+$. Итак, как и в случае ортогональных многочленов на вещественной оси, ортогональные многочлены $\{r_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ отличаются постоянным множителем от ортонормированных многочленов $\{t_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$.

В том случае, когда $\rho(x)$ имеет кратные корни, нужно заменить соответствующие строки в определителях (62) и (63) строками с производными порядка $0, 1, \ldots, m-1$ в соответствующих точках, где m — соответствующая кратность. В этом случае наши предыдущие рассуждения применимы для построения ортогональных многочленов $\{r_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, $\deg r_n = n$.

Подытожим наши результаты в следующей теореме.

Теорема 9. *Пусть $A \in \mathbb{C}_{N\times N}^{\geq}$ и $M(\lambda)$ — $\mathbb{C}_{N\times N}$-значная функция на $L_N\backslash\{0\}$, неубывающая на каждом луче $L_{N,k}\backslash\{0\}$, $k = 0, 1, \ldots, 2N-1$ по направлению от 0 к ∞. Предположим, что функция $M(\lambda)$ имеет все конечные моменты (44). Определим функционал $\sigma(u, v)$, $u, v \in \mathbb{P}$, как в (45), и предположим, что он удовлетворяет соотношению (49). Пусть $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ (p_n имеет степень n и положительный старший коэффициент) — соответствующая последовательность ортонормированных многочленов (50).*

Выберем интервал $[a, b]$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, такой, что выполнено соотношение (57). Пусть $\rho(x) \in \mathbb{P}$, $\deg\rho = l$, $l \in \mathbb{N}$, — положительная функция на $[a, b]$ имеющая вид (58) с $c, x_j \in \mathbb{R}, c \neq 0$. Если A ненулевая матрица, то предполагаем, что $\rho(0) > 0$.

Определим многочлены D_n, $n \in \mathbb{Z}_+$ в соответствии с (62). Для кратного нуля $\rho(\lambda^N)$ порядка m мы заменяем соответствующую строку в определителе (62) строками с производными порядка $0, 1, \ldots, m-1$ в этой точке.

Обозначим $r_n(\lambda) := \frac{D_n(\lambda)}{\rho(\lambda^N)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Определим функционал $\sigma_\rho(u, v)$, $u, v \in \mathbb{P}$, как в (76).

Тогда многочлены $\{r_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ ортогональны относительно σ_ρ.

Пример. Пусть $N = 2$ и $M(\lambda)$ — следующая матричнозначная функция на $(\mathbb{R}\cup i\mathbb{R})\backslash\{0\}$:

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} m(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$m(\lambda) = \begin{cases} \lambda, & \lambda \in (0, 1] \\ -\lambda, & \lambda \in (0, -1] \\ -i\lambda, & \lambda \in (0, i] \\ i\lambda, & \lambda \in (0, -i] \\ 0, & \text{в других случаях} \end{cases},$$

and $A = 0$. Функция $M(\lambda)$ является неубывающей на каждом радиальном луче из $(\mathbb{R}\cup i\mathbb{R})\setminus\{0\}$.

Пусть $\{p_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ — соответствующие ортонормированные многочлены (50) и $\sigma(u, v)$, $u, v \in \mathbb{P}$, — соответствующий билинейный функционал (45).

Пусть $\{\widetilde{p}_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, $\deg\widetilde{p}_n = n$, — многочлены с единичным старшим коэффициентом ($\widetilde{p}_n(\lambda) = \lambda^n + \ldots$), такие, что

$$\sigma(\widetilde{p}_n(\lambda), \widetilde{p}_m(\lambda)) = \int_{-1}^{1} \widetilde{p}_n(\lambda)\overline{\widetilde{p}_m(\lambda)}d\lambda + \int_{-i}^{i} \widetilde{p}_n(\lambda)\overline{\widetilde{p}_m(\lambda)}\frac{d\lambda}{i} = A_n\delta_{n,m}, \tag{79}$$

где $A_n > 0$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Такие многочлены изучались Г. В. Миловановичем в работе [8]. Применяя лемму 6.2 и теорему 6.5 из этой работы мы получим, что

$$\widetilde{p}_{4k+\nu}(z) = z^\nu q_k^{(\nu)}(z^4), \qquad \nu = 0, 1, 2, 3, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{80}$$

и многочлены $q_k^{(\nu)}(x)$ являются ортогональными многочленами с единичным старшим коэффициентом на $[0,1]$ относительно веса $x^{\frac{2\nu-3}{4}}$.

Пусть $\{\widetilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ — многочлены Якоби с единичным старшим коэффициентом. Напомним, что многочлены Якоби ортогональны на отрезке $[-1,1]$ относительно весовой функции $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ for $\alpha, \beta > -1$. Для многочленов Якоби выполнена следующая формула (см. [3]):

$$\widetilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta}\left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right]^{(n)}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{81}$$

Здесь $\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}dt$, $a > 0$, — гамма функция Эйлера.

Пользуясь заменой переменной, мы заключаем, что многочлены $\{\frac{1}{2^n}\widetilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(2x-1)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ являются ортогональными многочленами с единичным старшим коэффициентом на $[0,1]$ относительно $(1-x)^\alpha x^\beta$. Значит

$$q_n^{(\nu)}(x) = \frac{1}{2^n}\widetilde{P}_n^{(0,\frac{2\nu-3}{4})}(2x-1), \qquad \nu = 0, 1, 2, 3, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{82}$$

Тогда

$$\widetilde{p}_{4k+\nu}(z) = \frac{1}{2^k}z^\nu\widetilde{P}_k^{(0,\frac{2\nu-3}{4})}(2z^4-1), \qquad \nu = 0, 1, 2, 3, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{83}$$

Обозначим

$$\|p\| := \sqrt{\sigma(p,p)}, \qquad p \in \mathbb{P}.$$

Заметим, что

$$p_n(\lambda) = \frac{\widetilde{p}_n}{\|\widetilde{p}_n\|}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{84}$$

Действительно, ортогонормированные многочлены с положительными старшими коэффициентами единственны (см. рассуждения выше о многочленах r_n и t_n).

В [8, p. 132] было установлено, что

$$\|\widetilde{p}_n\|^2 = \frac{4}{2n+1}, \qquad n = 0, 1, 2, 3; \tag{85}$$

$$\|\widetilde{p}_n\|^2 = \|\widetilde{p}_{4k+\nu}\|^2 = \frac{4}{8n+2\nu+1}\left(\prod_{k=n}^{2n-1}\frac{4(k-n+1)}{4k+2\nu+1}\right)^2, \qquad n \geq 4. \tag{86}$$

Таким образом, у нас есть явные формулы для многочленов $p_n(\lambda)$.

Теперь мы получим явные формулы для некоторой новой системы ортогональных многочленов. Для этого мы применим теорему 9. Возьмем $[a,b] = [-1,1]$, $\rho(x) = x + c$, $c > 1$. Многочлен $\rho(x)$ положителен на $[-1,1]$ и $\rho(\lambda^2) = \lambda^2 + c = (\lambda + i\sqrt{c})(\lambda - i\sqrt{c})$. Определители D_n из (62) примут следующий вид:

$$D_n = \begin{vmatrix} p_n(\lambda) & p_{n+1}(\lambda) & p_{n+2}(\lambda) \\ p_n(i\sqrt{c}) & p_{n+1}(i\sqrt{c}) & p_{n+2}(i\sqrt{c}) \\ p_n(-i\sqrt{c}) & p_{n+1}(-i\sqrt{c}) & p_{n+2}(-i\sqrt{c}) \end{vmatrix}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{87}$$

Следовательно, ортогональные многочлены $\{r_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, отвечающие $M_1(\lambda)$, где $dM_1(\lambda) = (\lambda^2+c)dM(\lambda)$, имеют следующий вид:

$$r_n(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2+c}\begin{vmatrix} p_n(\lambda) & p_{n+1}(\lambda) & p_{n+2}(\lambda) \\ p_n(i\sqrt{c}) & p_{n+1}(i\sqrt{c}) & p_{n+2}(i\sqrt{c}) \\ p_n(-i\sqrt{c}) & p_{n+1}(-i\sqrt{c}) & p_{n+2}(-i\sqrt{c}) \end{vmatrix}, \qquad n\in\mathbb{Z}_+. \tag{88}$$

§5. Полиномиальное ядро и соответствующие ему многочлены

Пусть $M(\lambda)$ и A будут такими же, как и в предыдущих параграфах, и $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^\infty$ (p_n имеет степень n и положительный старший коэффициент) — последовательность ортонормированных многочленов, удовлетворяющая соотношению (50). Пусть σ — билинейный функционал (45). Обозначим

$$\widetilde{K}_n(x,y) = \sum_{j=0}^n p_j(x)\overline{p_j(y)}, \qquad n\in\mathbb{Z}_+. \tag{89}$$

Такие многочлены изучались в [6], где, в частности, были получены для них некоторые асимптотические формулы.

Соотношения ортогональности немедленно влекут следующее воспроизводящее свойство:

$$\sigma_t(P(t),\widetilde{K}_n(t,\lambda)) = P(\lambda), \qquad P\in\mathbb{P}:\ \deg P\le n. \tag{90}$$

Здесь запись σ_t означает, что σ действует на многочлены от переменной t.

Теорема 10. *Пусть λ_0 — произвольное комплексное число и $P(\lambda)\in\mathbb{P}$ — такой многочлен, что*

$$\sigma(P,P) = 1. \tag{91}$$

Максимальное значение величины $\|P(\lambda_0)\|^2$ достигается для многочленов

$$P(\lambda) = \varepsilon\{\widetilde{K}_n(\lambda_0,\lambda_0)\}^{-\frac{1}{2}}\widetilde{K}_n(\lambda,\lambda_0), \qquad |\varepsilon| = 1. \tag{92}$$

Максимальное значение равно $\widetilde{K}_n(\lambda_0,\lambda_0)$.

Многочлены $\{q_n(\lambda)\}_{n=0}^\infty$, $\deg q_n = n$ называются *N-ортогональными относительно функционала σ*, если

$$\sigma(q_n,q_m) = 0, \qquad n,m\in\mathbb{Z}_+:\ |n-m|\ge N. \tag{93}$$

Заметим, что в случае $N=1$, мы получаем квазиортогональные многочлены.

Теорема 11. *Предположим, что соотношение (57) выполнено для конечного отрезка $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Пусть $x_0>\max(|a|,|b|)$. Тогда многочлены $\{\widetilde{K}_n(\lambda,\ \sqrt[N]{x_0})\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ являются N-ортогональными относительно функционала $\widehat{\sigma}$, определенного через $(x_0-\lambda^N)dM(\lambda)$ вместо $dM(\lambda)$, и матрицу A.*

Доказательство. Подставляя $P(t) = (x_0-t^N)P_{n-N}(t)$, $\deg P_{n-N}\le n-N$, и $\lambda = \sqrt[N]{x_0}>0$ в (90), мы получим

$$0 = \sigma_t((x_0-t^N)P_{n-N}(t),\widetilde{K}_n(t,\ \sqrt[N]{x_0})) = \widehat{\sigma}_t(P_{n-N}(t),\widetilde{K}_n(t,\ \sqrt[N]{x_0})), \tag{94}$$

где $\widehat{\sigma}$ отвечает матричнозначной функции $(x_0-\lambda^N)M(\lambda)$. Из последнего соотношения следует, что многочлены $\widetilde{K}_n(t,\ \sqrt[N]{x_0})$ являются N-ортогональными.

Следующее предложение показывает, что N-ортогональные многочлены являются некоторыми обобщениями квазиортогональных многочленов.

Предложение 1. *Пусть заданы многочлены* $\{\widetilde{q}_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$, $\deg \widetilde{q}_n = n$. *Они являются* N*-ортогональными относительно функционала* σ *в том и только в том случае, когда они имеют следующий вид*

$$\widetilde{q}_n(\lambda) = \sum_{j=n-N+1}^{n} a_{n,j} p_j(\lambda), \qquad a_{n,j} \in \mathbb{C}, \ a_{n,n} \neq 0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{95}$$

Здесь многочлены с отрицательными индексами равны нулю.

Доказательство просто следует из ортогональности многочленов $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

Список литературы

1. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею / Н. И. Ахиезер. – М. : Изд-во физ.-мат. литературы, 1961. – 310с.
2. Сегё Г. Ортогональные многочлены / Г. Сегё. – М. : Физматгиз, 1962. – 500с.
3. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены / П. К. Суетин. – М. : Наука, 1979 – 416с.
4. Chihara T. S. An introduction to orthogonal polynomials / T. S. Chihara. – New York, London, Paris. – Gordon and Breach Science Publishers, 1978.
5. Duran A. J. A generalization of Favard's theorem for polynomials satisfying a recurrence relation / A. J. Duran / J. Approx. Theory. – 74. – 1993. – P. 83–109.
6. Duran A. J. On orthogonal polynomials with respect to a positive definite matrix of measures / A. J. Duran / Canad. J. Math. – 47. – 1995. – P. 88–112.
7. Duran A. J. Orthogonal matrix polynomials and higher order recurrence relations / A. J. Duran, W. Van Assche / Linear Algebra and Appl. – 219. – 1995. – P. 261–280.
8. Milovanović G. V. A class of orthogonal polynomials on the radial rays in the complex plane / G. V. Milovanović / J. Math. Anal. Appl. – 206. – 1997. – P. 121–139.
9. Shohat J. A. The problem of moments / J. A. Shohat, J. D. Tamarkin. – New York City. – AMS, 1943.
10. Zagorodnyuk S. M. On generalized Jacobi matrices and orthogonal polynomials / S. M. Zagorodnyuk / New York J. Math. – 9. – 2003. – P. 117–136.
11. Zagorodnyuk S. M. Orthogonal polynomials on rays: properties of zeros, related moment problems and symmetries / S. M. Zagorodnyuk / Zh. Mat. Fiz. Analiz. Geom. –4. – N3. – 2008. – P. 395–419.
12. Choque Rivero A. E. Orthogonal polynomials on rays: Christoffel's formula / A. E. Choque Rivero, S. M. Zagorodnyuk / Bol. Soc. Mat. Mexicana. – 15. – 3. – 2009. – P. 149–164.

Навчальне видання

Загороднюк Сергій Михайлович

Ортогональні многочлени на радіальних променях у комплексній площині

Методичні вказівки до лекційних та практичних занять
для студентів четвертого курсу механіко-математичного факультету

(Рос. мовою)

Коректор *Ю. В. Леонтієва*

Комп'ютерне верстання С. *М. Загороднюк*

Макет обкладинки *І. М. Дончик*

Формат 60×84/16. Умов. друк. арк. 1,1. Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.09

Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна
Тел. 705-24-32