А. В. Шитиков,
С. А. Шитиков

МАЛЫЕ ДЕФОРМАЦИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ УПРОЧНЯЮЩИХСЯ СРЕД

При построении определяющих уравнений упругопластического течения возникают две, связанные между собой, проблемы. Первая состоит в определении кинетических уравнений для параметров истории процесса, описывающих эволюцию поверхности нагружения. Вторая проблема связана с существованием различных возможностей (неоднозначностью) введения понятия скорости пластической деформации при конечных деформациях [1], которое обычно используется как для построения кинетических уравнений для параметров истории (внутренние переменные), так и для замыкания системы уравнений упругопластичности в активной области (для записи ассоциированного с поверхностью нагружения закона течения). В нашей работе был предложен подход к решению этих проблем с единой точки зрения с помощью некоторого экстремального принципа [2].

В данной работе этот подход использован для построения замкнутой системы уравнений изотермического упругопластического течения при малых деформациях, включающей в себя дифференциальные уравнения для внутренних переменных. Рассмотрены условия активного и нейтрального нагружения, разгрузки, неотрицательности мощности диссипации механической энергии и внутренних источников тепла. Обсуждаются некоторые следствия предлагаемых уравнений.

Рассмотрим случай малых упругопластических деформаций, когда

$$\varepsilon = e + p; \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right), \tag{1}$$

где $\varepsilon(x,t)$, $e(x,t)$, $p(x,t)$ - симметричные тензоры второго ранга, описывающие полные, упругие и пластические деформации соответственно; t - время; x - вектор текущего положения материальной точки в декартовой системе координат (Эйлеровы координаты); u - вектор перемещения.

Пусть внутренняя энергия на единицу массы $U(e, p, S, \varkappa)$ зависит от упругих e и пластических деформаций p, энтропии на единицу массы S и симметричного тензора второго ранга - тензора внутренних переменных $\varkappa$, смысл которого поясним ниже. Внутри поверхности нагружения $\Phi(e, p, S, \varkappa) \leq 0$

$$p^{\cdot} = \partial p/\partial t + V\cdot \partial p/x = 0\ ; \quad \text{æ}^{\cdot} = 0\ , \qquad (2)$$

где V - вектор скорости перемещений, точка означает материальную производную по времени.

Закон сохранения энергии запишем в виде

$$\rho U^{\cdot} = \sigma \cdot\cdot \varepsilon^{\cdot} - I \cdot\cdot \partial q/\partial x\ , \qquad (3)$$

где ρ плотность, σ - тензор напряжений Коши, q - вектор потока тепла, I - единичный тензор.

Через свободную энергию $F(e,p,T,\text{æ}) = U - TS$ (T - **абсолютная температура; уравнение (3) можно представить в виде**

$$TS^{\cdot} + \frac{1}{\rho}\left(I \cdot\cdot \partial q/\partial x\right) + F_{\text{æ}} \cdot\cdot \text{æ}^{\cdot} = D; \qquad S = -\frac{\partial F}{\partial T}\ ; \qquad (4)$$

$$D = \rho^{-1}\sigma \cdot\cdot \varepsilon^{\cdot} - F_e \cdot\cdot e^{\cdot} - F_p \cdot\cdot p^{\cdot}\ . \qquad (5)$$

Здесь $F_{\text{æ}} = \partial F/\partial \text{æ}$, $F_e = \partial F/\partial e$, $F_p = \partial F/\partial p$ - симметричные тензоры второго ранга. D имеет смысл мощности диссипации механической энергии на единицу массы, которая складывается на мощности внутренних источников тепла $TS^{\cdot} + \rho^{-1} I \cdot\cdot \partial q/\partial x$ и добавки $U_{\text{æ}} \cdot\cdot \text{æ}^{\cdot} = F_{\text{æ}} \cdot\cdot \text{æ}^{\cdot}$, имеющей смысл энергии, затрачиваемой в единицу времени на перестройку структуры материала при пластическом деформировании. То есть постулирована возможность введения такого тензора æ, при котором данная энергия выражается указанным способом [1].

Условие равенства нулю диссипации механической энергии при любых процессах внутри поверхности нагружения определяет связь тензора напряжений с параметрами состояния e, p, T, æ. Пусть элемент среды разгружается, тогда из (2) $e^{\cdot} = \varepsilon^{\cdot}$ и $D = (\rho^{-1}\sigma - F_e) \cdot\cdot \varepsilon^{\cdot}$, откуда

$$\sigma = \rho F_e\ ; \qquad \underset{e\to 0,\ T\to T_0}{F_e \to 0} \qquad (6)$$

Полагая связь (6) справедливой и на поверхности нагружения, выражение (5) для мощности диссипации преобразуем к виду

$$D = (F_e - F_p) \cdot\cdot p^{\cdot}\ . \qquad (7)$$

Следуя [2], рассмотри функционал

$$\int_{t_1}^{t_2} D(t)dt, \tag{8}$$

имеющий смысл диссипации механической энергии на единицу массы рассматриваемого элемента за время активного процесса от t_1 до t_2.

Ограничимся в данной работе случаем изотермического процесса T = const.

При активном нагружении дифференциальные уравнения для параметров состояния p и $\varkappa$ при заданном пути в пространстве напряжения определяют экстремаль функционала.

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} (D - \lambda\varphi) dt, \tag{9}$$

где $\varphi(e, p, \varkappa) = 0$ - уравнение поверхности нагружения.

Так как при малых деформациях и компонентах тензора $\varkappa$ связь $\sigma = \sigma(e, p, \varkappa)$ линейна, то с учетом требования (6) напряжения должны зависеть только от упругих деформаций $\sigma = \sigma(e)$ и $e = e(\sigma)$. Поэтому задание пути в пространстве упругих деформаций эквивалентно пути в пространстве напряжений.

Экстремаль функционала (9) ищем варьированием по переменным p и $\varkappa$ при заданных значениях $p(t_1) = p_1$ и $p(t_2) = p_2$ и произвольных $\varkappa(t_1)$ и $\varkappa(t_2)$. Упругие деформации считаются заданными функциями времени.

Поскольку L не зависит от $\varkappa$, а вариации δp в моменты t_1 и t_2 равны нулю, то условие трансверсальности $(\delta\varkappa \cdot\cdot \partial L/\partial\dot{\varkappa} + \delta p \cdot\cdot \delta L/\partial \dot{p})|_{t_1}^{t_2} = 0$ выполняется автоматически.

Искомая экстремаль определяется уравнениями Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial \varkappa} = 0; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{p}} - \frac{\partial L}{\partial p} = 0. \tag{10}$$

Пусть среда пластически несжимаема. Тогда можно полагать тензор $\varkappa$ девиатором $(I \cdot\cdot \varkappa = 0)$, так как в определяющие уравнения он входит лишь через инвариант $p \cdot\cdot \varkappa$ в свободной энергии (инвариант $e \cdot\cdot \varkappa$ в F входить не может в силу второго соотношения (6)) и функцию нагружения $\varphi(e, p, \varkappa)$. Варьирование функционала (9) по $I \cdot\cdot \varkappa$ дает $\partial\varphi/\partial(I \cdot\cdot \varkappa) = 0$ для любых e, p, т. е. $\varphi(e, p, \varkappa)$ не должна зависеть от следа тензора $\varkappa$.

Будем также считать, что φ не зависит от шаровой части тензора упругих деформаций.

Для рассматриваемого случая изотермического процесса и пластически несжимаемой среды с точностью до инвариантов второго порядка свободную энергию можно задать в виде

$$F(e,\bar{p},\bar{æ})=\frac{a_1}{2}(I\cdot\cdot e)^2+\frac{a_2}{2}\bar{e}\cdot\cdot\bar{e}+\frac{a_3}{2}\bar{p}\cdot\cdot\bar{p}+a_4\bar{p}\cdot\cdot\bar{æ}+\frac{a_5}{2}\bar{æ}\cdot\cdot\bar{æ}. \qquad (11)$$

Здесь учтено требование $F_e \to 0$ при $e \to 0$. Черта над тензором означает девиатор этого тензора.

Используя разложение (11), из (6), (9), (10) получаем

$$a_4\dot{\bar{p}}=-\lambda\varphi_{\bar{æ}}\,; \quad a_4\dot{\bar{æ}}=\lambda\varphi_{\bar{p}}+a_2\dot{\bar{e}}\,; \qquad (12)$$

$$\sigma=\rho[a_1(I\cdot\cdot e)I+a_2\bar{e}\,]. \qquad (13)$$

Для определения множителя Лагранжа λ рассмотрим условие $\dot{\varphi}=0$ и учтем уравнения (12)

$$\dot{\varphi}=\lambda a_4^{-1}(\varphi_{\bar{æ}}\cdot\cdot\varphi_{\bar{p}}-\varphi_{\bar{p}}\cdot\cdot\varphi_{\bar{æ}})+a_4^{-1}(a_2\varphi_{\bar{æ}}+a_4\varphi_{\bar{e}})\cdot\cdot\dot{\bar{e}}=0\,. \qquad (14)$$

Здесь коэффициент перед λ тождественно равен нулю, поэтому условие $\dot{\varphi}=0$ может иметь место только если

$$(a_2\varphi_{\bar{æ}}+a_4\varphi_{\bar{e}})\cdot\cdot\dot{\bar{e}}=0\,. \qquad (15)$$

Дальнейшее исследование распадается на два принципиально разных случая. В первом случае

$$a_2\varphi_{\bar{æ}}+a_4\varphi_{\bar{e}}\neq 0 \qquad (16)$$

на поверхности нагружения, и во втором - выражение (15) тождественно обращается в ноль.

Выполнение условия (16) означает, что в рассматриваемой теории упрочняющейся упругопластической среды, как и при идеальной пластичности, при активном нагружении вектор догрузки $d\bar{e}$ не произволен, а ортогонален некоторому вектору, причем при соответствующем определении поверхности нагружения должно выполняться условие

$$(a_2\varphi_{\bar{æ}}+a_4\varphi_{\bar{e}})_{\bar{æ}\to 0,\ \bar{p}\to 0}\to\mu\bar{e}\,, \qquad (17)$$

- т.е. предельный переход к ситуации в идеальной пластичности с поверхностью нагружения Мизеса, где $\bar{e}\cdot\cdot d\bar{\varepsilon}=0$.

Определим λ из условий (15), (12).

$$\bar{p}=\bar{\varepsilon}^{\cdot}-\bar{e}^{\cdot}=-\frac{\lambda}{a_4}\varphi_{\bar{\varkappa}},$$

откуда

$$(a_2\varphi_{\bar{\varkappa}}+a_4\varphi_{\bar{e}})\cdot\cdot\bar{\varepsilon}^{\cdot}=-\frac{\lambda}{a_4}(a_2\varphi_{\bar{\varkappa}}+a_4\varphi_{\bar{e}})\cdot\cdot\varphi_{\bar{\varkappa}}$$, или

$$\lambda=-\frac{a_4(a_2\varphi_{\bar{\varkappa}}+a_4\varphi_{\bar{e}})\cdot\cdot\bar{\varepsilon}^{\cdot}}{(a_2\varphi_{\bar{\varkappa}}+a_4\varphi_{\bar{e}})\cdot\cdot\varphi_{\bar{\varkappa}}}. \tag{18}$$

Как и в идеальной пластичности, для определения модуля скорости пластической деформации $|\bar{p}^{\cdot}|=\sqrt{\bar{p}^{\cdot}\cdot\cdot\bar{p}^{\cdot}}$ недостаточно знать параметры состояния e, $\bar{p}$, $\bar{\varkappa}$ и $\bar{e}^{\cdot}$ (или $\bar{\sigma}^{\cdot}$), но если мы знаем скорость полных деформаций $\bar{\varepsilon}^{\cdot}$, то λ, и следовательно, (12) $|\bar{p}^{\cdot}|$ находится однозначно (18).

Как видно из (12), (18) нейтральному нагружению ($\bar{p}^{\cdot}=0$ $\lambda=0$, но $\bar{\varkappa}^{\cdot}\neq 0$) соответствует условие

$$(a_2\varphi_{\bar{\varkappa}}+a_4\varphi_{\bar{e}})\cdot\cdot\bar{\varepsilon}^{\cdot}=0. \tag{19}$$

Для дальнейшего исследования зададим конкретный вид функции нагружения.

Предполагая в данной работе поверхность нагружения гладкой, ее уравнение с точностью до инвариантов второго порядка по $\bar{e}$, $\bar{p}$, $\bar{\varkappa}$ имеет вид

$$\varphi(\bar{e},\bar{p},\bar{\varkappa})=(a_2\bar{e}-c_4\bar{\varkappa}-c_1\bar{p})^2-c_2\bar{p}^2-c_3\bar{\varkappa}^2-2c_5\bar{\varkappa}\cdot\cdot\bar{p}-k_0^2=0. \tag{20}$$

Конкретизируем выражение для мощности диссипации механической энергии (7) с помощью соотношений (11), (12), (20)

$$D=2\lambda\frac{c_4}{a_4}\left\{(a_2\bar{e}-a_3\bar{p}-a_4\bar{\varkappa})\cdot\cdot\left[a_2\bar{e}-\left(c_1-\frac{c_5}{c_4}\right)\bar{p}-\left(c_4-\frac{c_3}{c_4}\right)\bar{\varkappa}\right]\right\}. \tag{21}$$

Если $|\bar{p}|\ll|\bar{e}|$ и $|\bar{\varkappa}|\ll|\bar{e}|$, то $D\simeq 2\lambda\frac{c_4}{a_4}k_0^2$

и требование неотрицательности мощности диссипации сводится к условию

$$\lambda=\frac{c_4}{a_4}\geqslant 0 \tag{22}$$

Для того чтобы неравенство $D\geqslant 0$ выполнялось при любых соотношениях между $|\bar{e}|$, $|\bar{p}|$, $|\bar{\varkappa}|$, достаточно к условию (22) присоединить ряд неравенств между коэффициентами a_i, c_i, вытекающих из требования положительной определенности квадратичной формы, записанной в фигурных скобках выражения (21).

Имея в виду (11), (18), (20), запишем (22) в виде

$$\lambda \frac{c_4}{a_4} = \frac{a_2^{-1}(a_4-c_4)^{-1}(a_2\varphi_{\bar{\text{æ}}}+a_4\varphi_{\bar{e}})\cdot\cdot\,\bar{\mathcal{E}}^{\cdot}}{-a_2^{-1}(a_4-c_4)^{-1}c_4^{-1}(a_2\varphi_{\bar{\text{æ}}}+a_4\varphi_{\bar{e}})\cdot\cdot\,\varphi_{\bar{\text{æ}}}} \,. \tag{23}$$

При $p\to 0$, $\text{æ}\to 0$ выражение в знаменателе стремится к $4K_0^2$ и

$$\left(\lambda\frac{c_4}{a_4}\right)_{p\to 0,\,\text{æ}\to 0} \longrightarrow \frac{a_2}{2}\,\frac{\bar{e}\cdot\cdot\,\bar{\mathcal{E}}^{\cdot}}{K_0^2}\;;\quad D_{\substack{p\to 0\\ \text{æ}\to 0}} \to \frac{1}{\rho}\,\bar{\sigma}\cdot\cdot\,\bar{\mathcal{E}}^{\cdot}. \tag{24}$$

Если наложить соответствующие ограничения на коэффициенты квадратичной формы в знаменателе выражения (23), то его положительность будет обеспечена на поверхности нагружения при любых соотношениях между $|\bar{e}|$, $|\bar{p}|$, $|\bar{\text{æ}}|$.

Таким образом, при любых возможных e, p, æ, удовлетворяющих уравнению поверхности нагружения (20), условием активного нагружения, обеспечивающим положительность мощности диссипации механической энергии, является

$$a_2^{-1}(a_4-c_4)^{-1}(a_2\varphi_{\bar{\text{æ}}}+a_4\varphi_{\bar{e}})\cdot\cdot\,\bar{\mathcal{E}}^{\cdot}>0\,. \tag{25}$$

Противоположное неравенство соответствует разгрузке, а при равенстве нулю левой части выражения (25) получаем условие нейтрального нагружения (19), при котором $\bar{p}^{\cdot}=0$, но $\bar{\text{æ}}^{\cdot}\neq 0$.

Рассмотрим часть мощности диссипации механической энергии, затрачиваемую на перестройку внутренней структуры. В линейном по p æ приближении из (11), (12), (20), (18)

$$\overset{\circ}{F}_{\text{æ}}\cdot\cdot\,\text{æ}^{\cdot}=(a_4\bar{p}+a_5\bar{\text{æ}})\cdot\cdot\left[\frac{a_2}{a_4}\bar{e}^{\cdot}-\frac{c_1a_2^2}{c_4K_0^2}\,(\bar{e}\cdot\cdot\,\bar{\mathcal{E}}^{\cdot})\,\bar{e}\,\right], \tag{26}$$

т.е. в начальный момент активного процесса ($\bar{p}=0$, $\bar{\text{æ}}=0$) эта часть мощности равна нулю, и вся механическая работа диссипирует в тепло (24).

Из (4) следует, что мощность внутренних источников тепла равна $D-F_{\bar{\text{æ}}}\cdot\cdot\,\bar{\text{æ}}^{\cdot}$, поэтому при $|\bar{\text{æ}}|\ll|\bar{e}|$, $|\bar{p}|\ll|\bar{e}|$ ее неотрицательность очевидна.

Знак выражения в правой части (26) может быть как положительным, так и отрицательным. В случае его отрицательности мощность внутренних источников тепла превышает мощность диссипации механической энергии - дополнительным источником тепла является ранее запасенная энергия (26).

Отметим, что, кроме упомянутых выше ограничений, на коэффициенты разложения (20) должны быть наложены требования, обеспечивающие выполнение неравенства $\varphi_{e \to 0} < 0$

(состояние с $e = 0$ - внутри поверхности нагружения).

В заключение выпишем уравнения (12) для рассматриваемого вида функции $\varphi(\bar{e}, \bar{p}, \bar{\varkappa})$

$$\dot{\bar{p}} = 2\lambda \frac{c_4}{a_4}\left[a_2\bar{e} + \left(\frac{c_3}{c_4} - c_4\right)\bar{\varkappa} + \left(\frac{c_5}{c_4} - c_1\right)\bar{p}\right], \tag{27}$$

$$\dot{\bar{\varkappa}} = -2\lambda \frac{c_1}{a_4}\left[a_2\bar{e} + \left(\frac{c_2}{c_1} - c_1\right)\bar{p} + \left(\frac{c_5}{c_1} - c_4\right)\bar{\varkappa}\right] + \frac{a_2}{a_4}\dot{\bar{e}}. \tag{28}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16921).

Литература

1. Седов Л.И. Понятие разных скоростей изменения тензоров // ПММ. 1960. Т.24. N 3. С.393-398.

2. Шитиков А.В. О вариационном принципе построения уравнений упругопластичности при конечных деформациях // ПММ. 1995. Т.59. N 1. С.199-202.