

Untersuchungen zur singulären Minimalflächengleichung

Inauguraldissertation zur Erlangung des Doktorgrades Dr. rer. nat.
der Fakultät für Mathematik an der Universität Duisburg-Essen

vorgelegt von

Tobias Tennstädt

aus Dinslaken

April 2016

Gutachter:

Prof. Dr. Ulrich Dierkes

Prof. Dr. Josef Bemelmans

Vorsitzende des Prüfungsausschusses: Prof. Paola Pozzi, PhD

Datum der mündlichen Prüfung: 30.06.2016

Zusammenfassung

Wir untersuchen Minimierer des Funktionals

$$\mathcal{F}^*(u) := \int_{\Omega} u^{\alpha} \sqrt{1 + |Du|^2} + \frac{1}{1 + \alpha} \int_{\partial\Omega} |u^{1+\alpha} - \phi^{1+\alpha}| d\mathcal{H}^{n-1},$$

für ein offenes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit Lipschitz-Rand, eine Funktion $u \in BV_+^{1+\alpha} = \{u \in L^1(\Omega, \mathbb{R}_+) : u^{1+\alpha} \in BV(\Omega)\}$ und Randwerte $\phi \in L^\infty(\partial\Omega)$, welches in dieser Form auf BEMELMANNS und DIERKES [4] zurückgeht und dessen Untersuchung seitdem bereits ausgiebig, hauptsächlich durch U. Dierkes sowie G. Huisken, vorangetrieben wurde. Die Hauptergebnisse dieser Arbeit sind unter anderem die Endlichkeit des Perimeters der Koinkidenzmenge $\{u = 0\}$ und die Nichtnegativität ihrer inneren mittleren Krümmung, die $\frac{1}{2}$ -Hölderstetigkeit bereits als stetig vorausgesetzter Lösungen u , sowie die Regularität von Lösungen eines zugehörigen parametrischen Hindernisproblems.

Inhaltsverzeichnis

1	Das nichtparametrische Problem	1
1.1	Notation	1
1.2	Formulierung des Variationsproblems	4
1.3	Bisheriger Stand der Forschung	5
1.4	Absolutstetigkeit	7
1.5	Perimeter der Koinzidenzmenge $\{u = 0\}$	9
1.6	\mathcal{H} -Konvexität der Koinzidenzmenge	16
1.7	Schwache Euler-Lagrange-Gleichungen	19
1.8	Zusammenhang zwischen der $\frac{1}{2}$ -Hölderstetigkeit einer Lösung und der mittleren Krümmung ihrer Nullstellenmenge	29
1.9	Rotationssymmetrische Lösungen	32
1.10	Parametrische Lösungen als Graphen	34
1.11	Hölderstetigkeit im allgemeinen Fall	37
2	Das parametrische Problem	42
2.1	Formulierung für rektifizierbare Ströme	42
2.2	Formulierung für Caccioppolimengen	45
2.3	Regularität	46
2.4	Die Monotonieformel für $z = 0$	52
2.5	Blow-ups um den Nullpunkt	57
2.6	Folgerungen für nichtparametrische Minimierer	59

Einleitung

Es sei $a < b$ und man betrachte eine Kurve $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, lipschitzstetig auf $[a, b]$, mit $\gamma(a) = (a, \psi_a)$ und $\gamma(b) = (b, \psi_b)$ mit beliebig vorgegebenen $\psi_a, \psi_b > 0$. Dann ist der Inhalt der Fläche

$$\mathcal{M} := \{(t, \gamma(t) \cos(\phi), \gamma(t) \sin(\phi)) : t \in (0, 1), \phi \in [0, 2\pi)\},$$

die durch Rotation von γ um die x_1 -Achse entsteht, gegeben durch

$$\int_0^1 \gamma_2(t) \sqrt{\dot{\gamma}_1^2(t) + \dot{\gamma}_2^2(t)} dt.$$

Die Aufgabe lautet nun, herauszufinden, welche Kurven γ zu einer Rotationsfläche mit minimalem Flächeninhalt unter allen Vergleichsflächen mit demselben Rand wie \mathcal{M} , d.h. den Kreisen

$$\{(a, \psi_a \cos(\phi), \psi_a \sin(\phi)) : \phi \in [0, 2\pi)\} \text{ und} \\ \{(b, \psi_b \cos(\phi), \psi_b \sin(\phi)) : \phi \in [0, 2\pi)\}$$

führen. Diese Frage stellte 1831 C. W. B. GOLDSCHMIDT in seiner Dissertation [21] und er fand heraus, dass nur zwei Arten von Lösungen existieren: Kettenlinien und die sogenannte Goldschmidt-Lösung, die aus den drei Geradenstücken $\overline{(a, \psi_a)(a, 0)}$, $\overline{(a, 0)(b, 0)}$ und $\overline{(b, 0)(b, \psi_b)}$ zusammengesetzt ist. Die Kettenlinien erzeugen bei Rotation ein Katenoid, das die beiden Kreise verbindet, während die Goldschmidt-Lösung die beiden Kreise eben ausfüllt und sie dann mit einem Geradenstück verbindet (welches selbst natürlich nicht zum Flächeninhalt beiträgt). Abhängig vom Abstand der beiden Punkte (a, ψ_a) und (b, ψ_b) haben entweder das Katenoid oder die beiden Kreisscheiben den kleineren Flächeninhalt. Als Grenzfall zwischen diesen beiden Extremen kann auch die Situation auftreten, dass Katenoid und Kreisscheiben denselben Flächeninhalt haben, sodass also Lösungen im Allgemeinen nicht eindeutig sein müssen. Dies zeigte auch, dass das zugehörige nichtparametrische Dirichletproblem, d.h. die Aufgabe des Minimierens von

$$\int_a^b u \sqrt{1 + (u')^2} dx$$

unter den Bedingungen

$$u \in C^1((a, b)) \cap C^0([a, b]), \quad u(a) = \psi_a, \quad u(b) = \psi_b \quad \text{und} \quad u \geq 0,$$

im Allgemeinen keine Lösung besitzt.

Im Jahr 1980 wurde diese Aufgabe von BÖHME, HILDEBRANDT und TAUSCH [5] auf zwei Dimensionen verallgemeinert. Vorgegeben ist nun als Rand eine Jordankurve Γ im \mathbb{R}^3 und gesucht wird eine Parametrisierung $X: \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, die $\partial B_1(0)$ monoton auf Γ abbildet und die

$$\int_{B_1(0)} X_3 |X_u \times X_v| \, dudv \quad (1)$$

unter allen Flächen mit derselben Randbedingung minimiert. Angesichts der Interpretation als Rotationsfläche ist es sinnvoll, für alle Vergleichsflächen $X_3 \geq 0$ zu fordern, allerdings erhält man nur dann ein reguläres Problem, wenn $X_3 > 0$, sodass sich die Untersuchung von Hindernisproblemen mit strikt positivem Hindernis anbietet. Die dreidimensionale Rotationsfläche wäre hier

$$\mathcal{M} := \{(u, v, X(u, v) \cos(\phi), X(u, v) \sin(\phi)) : (u, v) \in B_1(0), \phi \in [0, 2\pi)\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Es existieren allerdings noch vielfältige weitere Interpretationen des Integrals (1). So lässt es sich auch als Energie einer schweren Fläche in einem vertikalen Gravitationsfeld interpretieren (siehe dazu auch [14]), deren Minimierer sich gewissermaßen als *Seifenhäute mit Gewicht* zu erkennen geben. Spiegelt man eine solche an der x_1 - x_2 -Ebene, d.h. betrachtet man

$$\{(X_1(u, v), X_2(u, v), -X_3(u, v)) : (u, v) \in B_1(0)\}$$

so erhält man die ideale Form einer Kuppel [14], was Anwendungen in der Architektur findet. BÖHME ET AL. [5] konnten zeigen, dass unter Voraussetzung der Quasiregularität des Hindernisses reguläre Lösungen des Plateauproblems zu (1) existieren und zusätzlich eine Reihe von Einschließungssätzen beweisen.

Die Verallgemeinerung auf n Dimensionen erfolgte 1987 durch BEMELMANS und DIERKES [4] mit Hilfe des Kalküls der Caccioppolimengen. Es sei $U \subset Q \subset \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$, dann ist

$$\int_Q x_{n+1} |D\chi_U| := \sup \left\{ \int_Q \chi_U \sum_{i=1}^{n+1} D_i(x_{n+1} \phi_i) \, dx : \phi_i \in C_c^1(Q), \sum_{i=1}^{n+1} \phi_i^2(x) \leq 1 \right\}$$

die zu minimierende Energie.

Es lässt sich auch analog dazu das nichtparametrische Funktional betrachten, welches, gegeben eine Funktion $u: \Omega \rightarrow [0, \infty)$, zu

$$\int_{\Omega} u \sqrt{1 + |Du|^2} \, dx \quad (2)$$

erklärt ist. Bemelmans und Dierkes konnten dieses Funktional allgemein für Funktionen in der Klasse

$$BV_+^2(\Omega) := \{u \in L^1(\Omega) : u^2 \in BV(\Omega), u \geq 0\}$$

definieren und zeigen, dass das zugehörige Dirichletproblem zu vorgegebenen Randwerten $\psi \in L^2(\partial\Omega)$, $\psi \geq 0$, stets einen Minimierer in $BV_+^2(\Omega)$ besitzt, der für $n \leq 6$ stetig in Ω und analytisch in $\{u > 0\}$ ist. Diese nichtparametrische Formulierung war der Schwerpunkt einer Reihe weiterer Arbeiten von DIERKES [9] [13] und DIERKES und HUISKEN [11] [12]. Es wurde unter anderem gezeigt, dass die Randwerte bei \mathcal{H} -konvexem Ω stetig angenommen werden, dass, wenn $\inf_{\partial\Omega} \psi$ relativ zum Maß von Ω hinreichend groß ist, die Lösungen u ebenfalls positiv und regulär sind, und dass, bei hinreichend kleinen Randwerten, die Nullstellenmenge $\{u = 0\}$ stets positives Maß besitzen muss.

Die Frage nach der Regularität in diesem letzten Fall, wenn also u auf einer Menge positiven Maßes verschwindet, hat sich als überaus schwieriges Problem erwiesen. 1988 fand DIERKES [7] [10] singuläre minimale Kegel und rotationssymmetrische Minimierer, die zwar in $C^{0, \frac{1}{2}}$, jedoch für kein $\epsilon > 0$ in $C^{0, \frac{1}{2} + \epsilon}$ liegen. Es sind keine noch weniger regulären Minimierer bekannt, allerdings ist ebenfalls unbekannt, ob nun tatsächlich alle Minimierer aus der Klasse $C^{0, \frac{1}{2}}$ sind, oder auch nur, ob sie überhaupt im Allgemeinen stetig sind. Die Untersuchung singulärer Minimierer mit *großer*, d.h. n -dimensionaler, Nullstellenmenge ist eine der wesentlichen Motivationen für die vorliegende Arbeit.

Wir werden zunächst das Regularitätsresultat von BEMELMANS und DIERKES [4] auf höhere Dimensionen erweitern und dies nutzen, um die Absolutstetigkeit des Variationsmaßes $|Du|$ unabhängig von der Dimension n zu beweisen, sodass u also schwach differenzierbar ist, was es uns erlaubt, die Endlichkeit des Perimeters der Koinzidenzmenge $\{u = 0\}$ nachzuweisen. Aus dieser Abschätzung des Perimeters lässt sich dann sogar auf die \mathcal{H} -Konvexität der Koinzidenzmenge schließen.

Mit denselben Methoden werden wir daraufhin eine schwache mittlere Krümmungsgleichung herleiten, die eine notwendige Bedingung für die Minimumeigenschaft einer Funktion u bedeutet. Da das Funktional (2) in u mit großer Nullstellenmenge nicht differenzierbar ist, ist dies keine triviale Aussage. Schließlich leiten wir noch einen Zusammenhang zwischen der mittleren Krümmung von $\partial\{u = 0\}$ und der $\frac{1}{2}$ -Hölderstetigkeit von u her.

Dieser liefert uns eine Idee für den Nachweis der Hölderstetigkeit rotationssymmetrischer Lösungen: die Annahme, u sei nicht in $C^{0, \frac{1}{2}}$, liefert einen Widerspruch zur strikten

Positivität der mittleren Krümmung der Nullstellenmenge, welche im rotationssymmetrischen Fall eine Kugel sein muss.

Auch ohne Symmetrieannahmen sind wir anschließend in der Lage, unter Verwendung einer auf KOREVAAR [22] zurückgehenden Methode, die Hölderstetigkeit stetiger Lösungen nachzuweisen, was wegen der Beispiele von DIERKES [7] das optimale Regularitätsresultat in diese Richtung darstellt.

Im zweiten Kapitel wenden wir uns zunächst von den Graphen ab und untersuchen das parametrische Problem, vor allem in der auf Bemelmans und Dierkes zurückgehenden Formulierung mit Caccioppolimengen. So beweisen wir die Regularität von Minimierern eines Hindernisproblems mit positivem Hindernis in der Klasse $C^{1,\alpha}$ unter Verwendung des auf TAMANINI [27] zurückgehenden Begriffes der Fast-Minimalität. Im Anschluss wird noch eine Monotonieformel um einen Punkt in der $\{x^{n+1} = 0\}$ -Ebene hergeleitet. Durch Anwendung dieser auf minimierende Graphen folgern wir, dass ganze Lösungen im \mathbb{R}^n mit sublinearem Wachstum stets konstant verschwinden müssen. Indem wir die umgekehrte Situation im Infinitesimalen betrachten, können wir abschließend zeigen, dass Minimierer u in keinem Punkt des maßtheoretischen Randes von $\{u = 0\}$ differenzierbar sein können.

Ich möchte an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. Ulrich Dierkes herzlich dafür danken, mich auf dieses Thema aufmerksam gemacht und so hilfreich und unterstützend betreut zu haben.

Das nichtparametrische Problem

1.1 Notation

Unsere Notation folgt in den meisten wesentlichen Punkten der in der Fachrichtung üblichen Schreibweise. Wir arbeiten stets im \mathbb{R}^n oder \mathbb{R}^{n+1} , wobei wir für Punkte des Letzteren eine spezielle Notation verwenden. Wir wollen $y = (x, z) \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ und $z \in \mathbb{R}$ schreiben. Diese Vereinbarung ist der Natur des betrachteten Problems mit der ausgezeichneten Rolle der $n + 1$ -ten Koordinate angemessen.

Kugeln $B_r(x_0)$ mit Radius r und Mittelpunkt x_0 sind bei uns stets offen. B_r ist die offene Kugel mit Radius r und Mittelpunkt 0. Mit $C_r := \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in B_r\}$ und $C_r^h := B_r \times (-h, h)$ bezeichnen wir offene Zylinder im \mathbb{R}^{n+1} .

Zu einer gegebenen Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnen ∂A ihren *topologischen* Rand, \bar{A} ihren Abschluss, $\text{int}(A)$ ihr Inneres und $\text{ext}(A)$ ihr Äußeres. Dieselben Ausdrücke mit $*$ versehen, $\partial^* A$, $\text{int}^* A$ und $\text{ext}^* A$ bezeichnen den *maßtheoretischen* Rand, das Innere und das Äußere von A bezüglich des Lebesguemaßes. Letzteres notieren wir mit $|A| = \mathcal{L}^n(A)$, während wir für das Maß der n -dimensionalen Einheitskugel $|B_1|$ das Symbol ω_n verwenden. Ein $x \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein maßtheoretischer innerer Punkt von A , falls

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|A \cap B_\rho(x)|}{|B_\rho(x)|} = 1,$$

ein maßtheoretischer äußerer Punkt von A , falls er ein maßtheoretischer innerer Punkt von $\mathbb{R}^n \setminus A$ ist, und ein maßtheoretischer Randpunkt, falls er in keine der beiden anderen Kategorien fällt.

Das Integral über eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bezüglich eines Maßes μ bezeichnen wir

in der Regel wie allgemein üblich mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu$$

bzw.

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx,$$

wenn es sich bei μ um das Lebesgue-Maß handelt. Das k -dimensionale Hausdorff-Maß kennzeichnen wir mit \mathcal{H}^k und die Hausdorff-Dimension einer Menge A mit $\dim_{\mathcal{H}}(A)$.

Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen. Die Klasse aller k -Differentialformen mit kompaktem Träger in U wollen wir mit $\mathcal{D}^k(U)$ bezeichnen, und mit $\mathcal{D}_k(U)$ ihren Dualraum. Elemente von $\mathcal{D}_k(U)$ heißen *k -dimensionale Ströme* in U . Die *Masse* eines Stroms $T \in \mathcal{D}_k(U)$ ist definiert als

$$\mathbb{M}(T) := \sup\{T(\omega) : \omega \in \mathcal{D}^k(U), \|\omega\| \leq 1\}.$$

$\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ wird *abzählbar k -rektifizierbar* genannt, wenn \mathcal{M} , bis auf eine \mathcal{H}^k -Nullmenge, Teilmenge einer abzählbaren Vereinigung eingebetteter, k -dimensionaler C^1 -Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^{n+1} ist.

Wir bezeichnen mit $\mathcal{R}_k(U)$ die Klasse der k -dimensionalen rektifizierbaren Ströme in der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit ganzzahliger Vielfachheit. Ein *k -dimensionaler rektifizierbarer Strom* T in U ist eine lineare Abbildung der k -Differentialformen mit kompaktem Träger in U nach \mathbb{R} , eindeutig bestimmt durch eine \mathcal{H}^k -messbare und abzählbar k -rektifizierbare Menge $\mathcal{M} = \mathcal{M}(T)$, eine $\mathcal{H}^k \llcorner \mathcal{M}$ integrierbare Funktion $\theta: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, genannt die *Vielfachheit* von T , und ein \mathcal{H}^k -messbares k -Vektorfeld $\zeta: \mathcal{M} \rightarrow \Lambda_k \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\|\zeta\| = 1$ $\mathcal{H}^k \llcorner \mathcal{M}$ -fast überall (die *Orientierung* von T), sodass

$$T(\omega) = \int_{\mathcal{M}} \langle \zeta, \omega \rangle \theta d\mathcal{H}^k,$$

für alle $\omega \in \mathcal{D}^k(U)$. Außerdem schreiben wir $\|T\| = \theta \mathcal{H}^k \llcorner \mathcal{M}$. Durch die Identifikation einer differenzierbaren Untermannigfaltigkeit M des \mathbb{R}^{n+1} mit dem Strom

$$\llbracket M \rrbracket(\omega) := \int_M \omega,$$

können solche Untermannigfaltigkeiten als rektifizierbare Ströme mit ganzzahliger Vielfachheit im \mathbb{R}^{n+1} betrachtet werden. Wir nennen eine Folge $T_k \in \mathcal{D}_k(U)$ *schwach konvergent* gegen $T \in \mathcal{D}_k(U)$, in Zeichen $T_k \rightarrow T, k \rightarrow \infty$, wenn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k(\omega) = T(\omega)$$

für alle $\omega \in \mathcal{D}^k(U)$. Als *Träger* eines Stroms $T \in D_k(U)$ wird schließlich die Menge

$$\text{spt } T := U \setminus \bigcup \left\{ B \subset U : B \text{ ist offen und } T(\omega) = 0 \text{ für alle } \omega \in \mathcal{D}^k(B) \right\}.$$

Der Raum $BV(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$, ist die Menge aller Funktionen $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, deren totale Variation beschränkt ist, d.h. für die

$$\sup \left\{ \int_U f \operatorname{div} \phi \, dx : \phi \in C_c^\infty(U, \mathbb{R}^n), |\phi| \leq 1 \right\} < \infty.$$

Für derartige Funktionen existiert nach dem Satz von Riesz ein vektorwertiges Radonmaß, genannt Df , sodass

$$\int_U \phi \cdot Df := \int_U \phi \cdot dDf = - \int_U \operatorname{div} \phi f \, dx$$

für alle $\phi \in C_c^1(U)$. Ist $U \subset \mathbb{R}^n$, dann sind die Graphen F von BV -Funktionen $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ n -dimensionale rektifizierbare Ströme im \mathbb{R}^{n+1} mit Vielfachheit 1 und

$$\mathbb{M}(F) = \int_U \sqrt{1 + |Df|^2} := \sup \left\{ \int_U \sum_{i=1}^n D_i \phi_i f + \phi_{n+1} : \phi \in C_c^\infty(U, \mathbb{R}^{n+1}), |\phi| \leq 1 \right\}.$$

(siehe GIAQUINTA ET AL. [19] 4.2.4) Generell schreiben wir für BV -Funktionen f

$$\int Df \text{ anstelle von } \int dDf$$

bzw.

$$\int |Df| \text{ anstelle von } \int d|Df|$$

etc., sodass also

$$\int \phi Df = - \int D\phi f \, dx$$

für alle $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Weiterhin verwenden wir die Notation $Df = D^a f + D^s f$ für die Zerlegung der Ableitung von f in ihren *absolutstetigen* und *singulären* Anteil bezüglich des Lebesgue-Maßes, wobei ihr *singulärer* Teil sich weiter in $D^s f = D^c f + D^j f$ zerlegen lässt. Dabei bezeichnet $D^j f$ den sogenannten *Sprungteil*, welcher die Einschränkung von D^s auf die Menge der *approximativen Sprungpunkte* J_f darstellt. $D^c f := D^s f - D^j f$ wird der *Cantorteil* von Df genannt. x_0 ist ein *approximativer Sprungpunkt* von f , wenn ein Vektor $\nu \in S^{n-1}$ und Zahlen $f^+(x_0) \neq f^-(x_0)$ existieren, sodass

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho^n} \int_{B_\rho^\pm(x_0, \nu)} |f(x) - f^\pm(x_0)| \, dx = 0,$$

wobei $B_\rho^\pm(x_0, \nu) := \{x \in B_\rho(x_0) : (x - x_0) \cdot \pm \nu > 0\}$.

Eine Caccioppoli-Menge ist eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$, deren charakteristische Funktion in BV liegt. Ihren reduzierten Rand, d.h. die Menge aller Punkte $\xi \in \mathbb{R}^n$, für die

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{B_r(\xi)} D\chi_E}{\int_{B_r(\xi)} |D\chi_E|}$$

existiert und Betrag 1 hat, bezeichnen wir mit $\mathcal{F}M$. Es gilt $\mathcal{F}M \subset J_{\chi_M} \subset \partial^* M$, im Allgemeinen ohne Gleichheit (siehe AMBROSIO ET AL. [2] Theorem 3.61 und GIAQUINTA ET AL. [19] 4.1.4).

Ist $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$, so bezeichnen wir mit $\tilde{u}(x_0)$ den *approximativen Grenzwert* von u in x_0 , falls er existiert, d.h. eine Zahl z_0 , sodass die Funktionen

$$u^{x_0, \rho}(x) := u(x_0 + \rho x)$$

mit $\rho \rightarrow 0$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ gegen die konstante Funktion $f \equiv z_0 := \text{aplim}_{x \rightarrow x_0} u(x)$ konvergieren. Der approximative Grenzwert einer solchen Funktion u existiert \mathcal{L}^n -fast überall. Man beachte, dass unsere Definition des approximativen Grenzwertes nicht mit der schwächeren Version von FEDERER 2.9.12 [18], die nur lokale Maßkonvergenz fordert, übereinstimmt. In AMBROSIO ET AL. 3.6 [2] findet sich eine Diskussion der Unterschiede. In direkter Analogie zur klassischen Situation nennen wir u *approximativ stetig* in x_0 , falls $u(x_0) = \tilde{u}(x_0)$.

Häufig verzichten wir bei Integralen auf die Angabe des Integrationsbereichs, wenn es sich dabei um den gesamten Definitionsbereich des Integranden handelt. Also ist

$$\int f \, d\mu = \int_{\Omega} f(x) \, d\mu(x).$$

Ist μ_k eine Folge von Radon-Maßen mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f \, d\mu_k = \int f \, d\mu$$

mit einem Radon-Maß μ , so nennen wir μ_k *schwach konvergent* gegen μ und schreiben $\mu_k \rightharpoonup \mu$, $k \rightarrow \infty$. Dies wird auch häufig als schwach*-Konvergenz bezeichnet.

1.2 Formulierung des Variationsproblems

Im Folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ stets eine beschränktes, zusammenhängendes Gebiet mit C^1 -Rand. Wir halten uns an die von BEMELMANS und DIERKES [4] aufgestellte Formulierung des Variationsproblems mit einem zusätzlichen Exponenten $\alpha \geq 1$. Durch Substitution $v := u^{1+\alpha}$ erhalten wir

$$\int u^\alpha \sqrt{1 + |Du|^2} \, dx = \int \sqrt{v^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}} + \frac{1}{(1+\alpha)^2} |Dv|^2} \, dx.$$

Die rechte Seite lässt sich nun einfach für $v \in BV(\Omega)$ erklären:

$$\int_{\Omega} \sqrt{v^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}} + \frac{1}{(1+\alpha)^2} |Dv|^2} \\ := \sup \left\{ \int_{\Omega} v^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \phi_{n+1} + \frac{1}{1+\alpha} v \sum_{i=1}^n D_i \phi \, dx : \phi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}), \|\phi\|_{\infty} \leq 1 \right\}.$$

Es bietet sich also an, unser Funktional in der Klasse

$$BV_+^{1+\alpha}(\Omega) := \{u \in L^{1+\alpha}(\Omega) : u \geq 0, u^{1+\alpha} \in BV(\Omega)\}$$

zu definieren. So setzen wir also

$$\mathcal{F}(u) := \int_{\Omega} u^{\alpha} \sqrt{1 + |Du|^2} := \int_{\Omega} \sqrt{v^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}} + \frac{1}{(1+\alpha)^2} |Dv|^2}$$

für $u \in BV_+^{1+\alpha}(\Omega)$. Die Randwerte lassen sich wie im Minimalflächenfall durch einen zusätzlichen Strafterm realisieren:

$$\mathcal{F}^*(u) := \int_{\Omega} u^{\alpha} \sqrt{1 + |Du|^2} + \frac{1}{1+\alpha} \int_{\partial\Omega} |u^{1+\alpha} - \psi^{1+\alpha}| \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

für Randwerte $\psi \in L^{\infty}(\partial\Omega)$, $\psi \geq 0$. Im Folgenden bezeichnen wir mit u immer einen Minimierer von \mathcal{F}^* .

1.3 Bisheriger Stand der Forschung

Von BEMELMANS und DIERKES [4] wurde gezeigt, dass das Funktional \mathcal{F}^* immer einen Minimierer besitzt, und dass

$$\inf\{\mathcal{F}(u) : u \in BV_+^{1+\alpha}(\Omega), u = \psi \text{ auf } \partial\Omega\} = \inf\{\mathcal{F}^*(u) : u \in BV_+^{1+\alpha}(\Omega)\},$$

was die Verwendung von \mathcal{F}^* rechtfertigt. Darüber hinaus gilt das schwache Maximumprinzip,

$$\|u\|_{\infty, \Omega} \leq \|\psi\|_{\infty, \partial\Omega} \tag{1.1}$$

und die Implikation

$$\|\psi\|_{\infty, \partial\Omega} < \frac{|\Omega|}{\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)} \Rightarrow |\{u = 0\}| > 0. \tag{1.2}$$

Es konnte weiterhin mittels eines Umwegs über die parametrische Formulierung gezeigt werden, dass, wenn $U := \{y \in \Omega \times \mathbb{R} : z \leq u(x)\}$ den Subgraphen von u bezeichne und man $Q := \Omega \times \mathbb{R}_+$ vereinbart, der folgende Satz gilt:

Satz 1 (Bemelmans, Dierkes). *Sei u ein Minimierer von \mathcal{F}^* . Dann ist $\mathcal{F}U \cap \text{int}(Q)$ eine analytische Hyperfläche in $\text{int}(Q)$ und die Menge $\text{sing}(\partial U) := \partial U \setminus \mathcal{F}U$ ist kompakt in jedem Halbraum der Form $\{z > \delta\}$, $\delta > 0$, und besitzt die folgenden Eigenschaften:*

- $\text{sing}(\partial U) = \emptyset$, falls $n \leq 6$.
- $\text{sing}(\partial U)$ ist lokal endlich in $\text{int}(Q)$ für $n = 7$.
- $\mathcal{H}^{n-7+\gamma}(\text{sing}(\partial U)) = 0$ für alle $\gamma > 0$, wenn $n > 7$.

Für $n \leq 6$ ließ sich daraus auf die Stetigkeit der Lösung u und ihre Analytizität auf $\{u > 0\}$ schließen. Satz 1 wurde in [4] nur für den Fall $\alpha = 1$ bewiesen. Für beliebiges $\alpha \geq 1$ lässt er sich jedoch ohne Umwege verallgemeinern. Er lässt sich aber auch alternativ über den Begriff der fast minimalen Mengen beweisen. Siehe Korollar 3 in dieser Arbeit.

Zur Frage, ob die Randwerte stetig angenommen werden, gibt es den folgenden Satz von DIERKES [9]:

Satz 2 (Dierkes). *Hat $\partial\Omega$ nichtnegative innere mittlere Krümmung in der Nähe von $\xi \in \partial\Omega$, d.h. existiert eine Kugel $B = B_r(\xi)$ mit*

$$\int_B |D\chi_\Omega| \leq \int_B |D\chi_{\Omega \cup K}|$$

*für jedes $K \subset\subset B$, dann erfüllt jeder Minimierer u von \mathcal{F}^**

$$\lim_{x \rightarrow \xi} u(x) = \psi(\xi).$$

Eine weitere interessante Frage ist noch, ob die Implikation (1.2) sich auch umkehren lässt. Das ist bis heute ungeklärt, aber es gibt, ebenfalls von DIERKES [13], den folgenden wichtigen Satz in diese Richtung:

Satz 3 (Dierkes). *Aus*

$$\inf_{x \in \partial\Omega} \phi(x) > k_0 = (1 + \alpha) \omega_n^{-\frac{1}{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} |\Omega|^{\frac{1}{n}}$$

folgt, dass jeder Minimierer u von \mathcal{F}^ positiv und analytisch ist.*

Diese Auflistung ist natürlich nicht vollständig, sondern enthält nur die Ergebnisse, auf welche wir uns in diesem Kapitel unmittelbar beziehen werden.

1.4 Absolutstetigkeit

Wir werden in diesem Abschnitt zunächst zeigen, dass Lösungen u unseres Variationsproblems schwach differenzierbar sind. Dazu werden wir die durch Satz 1 garantierte, teilweise Regularität der Lösung ausnutzen, um das Verschwinden der singulären Anteile $D^s u$ des Variationsmaßes zu beweisen.

Satz 4. Sei $u \in BV_+^{1+\alpha}(\Omega)$ ein Minimierer des Funktionals \mathcal{F}^* . Dann existiert eine Menge $S \subset \Omega$ mit $\dim_{\mathcal{H}}(S) \leq n - 6$, sodass $u \in C^0(\Omega \setminus S)$. Zudem existiert eine offene Menge $R \subset \Omega$, die bis auf eine \mathcal{H}^{n-6} -Nullmenge mit $\{\tilde{u} > 0\}$ übereinstimmt und in der $u \in C^\omega(R)$. Außerdem gilt noch $u^{1+\alpha} \in W^{1,1}(\Omega)$.

Beweis. Zunächst sei U so, dass $\partial U = \overline{\mathcal{F}U}$. Für Caccioppoli-Mengen ist es immer möglich, einen derartigen Repräsentanten zu finden (siehe GIUSTI [20] 4.4). Dann setzen wir

$$\Omega_\delta := \{x \in \Omega : \exists z > \delta ((x, z) \in \partial U)\}.$$

Ferner definieren wir

$$R_\delta := \{x \in \Omega_\delta : \forall z > \delta ((x, z) \in \partial U \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{F}U)\}$$

und $S_\delta = \Omega_\delta \setminus R_\delta$. Dann ist $\dim_{\mathcal{H}}(S_\delta) \leq n - 6$, da $S_\delta = \text{proj}((\partial U \setminus \mathcal{F}U) \cap \{z > \delta\})$, wobei $\text{proj}: (x, z) \mapsto x$ die orthogonale Projektion des \mathbb{R}^{n+1} auf den \mathbb{R}^n bezeichne.

Zuerst zeigen wir nun: Wenn $x_0 \in R_\delta$, dann existiert nur genau ein $z_0 > 0$ mit $(x_0, z_0) \in \partial U$. Denn gäbe es ein weiteres $z_1 > 0$ mit $(x_0, z_1) \in \partial U$, dann wäre wegen der Definition von U auch das Geradenstück $g = \overline{(x_0, z_0)(x_0, z_1)} \subset \partial U$ und weil $x_0 \in R_\delta$, $g \cap \{z > \delta\} \subset \mathcal{F}U$. Aber $\mathcal{F}U$ ist analytisch, d.h. g müsste sich bis ins Unendliche fortsetzen, im Widerspruch zur Beschränktheit von u , $\|u\|_{\infty, \Omega} \leq \|\psi\|_{\infty, \partial \Omega}$. Also existiert nur ein solches z_0 .

Wir definieren $R := R_0 = \bigcup_{\delta > 0} R_\delta$. Außerdem setzen wir $S := S_0 = \text{proj}((\partial U \setminus \mathcal{F}U) \cap \{z > 0\})$, sodass $\Omega_0 = S \cup R$. Im Folgenden werden wir stets von dem Repräsentanten von u ausgehen, der in $\Omega \setminus S$ eindeutig durch unsere Wahl von U bestimmt ist.

Als nächstes zeigen wir, dass u stetig in R ist. Denn wäre für ein $x_0 \in R$,

$$\bar{u}(x_0) := \limsup_{x \rightarrow x_0} u(x) > \liminf_{x \rightarrow x_0} u(x) =: \underline{u}(x_0),$$

dann wären auch, weil ∂U abgeschlossen ist, $(x_0, \bar{u}(x_0)) \in \partial U$ und $(x_0, \underline{u}(x_0)) \in \partial U$, im Widerspruch zum oben gezeigten, sodass u in x_0 tatsächlich stetig sein muss. Offensichtlich folgt mit derselben Argumentation auch die Stetigkeit von u in $\Omega \setminus \Omega_0$, da

für jedes x_0 in dieser Menge immer nur der Punkt $(x_0, 0)$ in ∂U liegt. Insgesamt erhalten wir $u \in C^0(\Omega \setminus S)$. Das impliziert auch sofort $|D^j u^{1+\alpha}|(\Omega) = |D^j u^{1+\alpha}|(S) = 0$ mit AMBROSIO ET AL. [2] (3.90).

Nun werden wir zeigen, dass R offen ist. Da $R_\delta = \Omega_\delta \setminus S_\delta$ und S_δ als Bild einer kompakten Menge unter Projektion wieder kompakt ist, ist R_δ relativ offen in Ω_δ . Wir zeigen jetzt indirekt, dass $R_\delta \subset \text{int } \Omega_\delta$. Angenommen es gäbe ein $x_0 \in \partial \Omega_\delta \cap R_\delta$. Dann existiert genau ein $z_0 > \delta$ mit $y_0 = (x_0, z_0) \in \partial U$. Außerdem gibt es eine Folge von Punkten $x_j \in \Omega \setminus \Omega_\delta$ mit

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = x_0 \text{ und } \limsup_{j \rightarrow \infty} u(x_j) \leq \delta.$$

Dies steht jedoch im Widerspruch zur Stetigkeit von u in $x_0 \in R$ und $u(x_0) = z_0 > 0$. Es ist also tatsächlich $R_\delta \subset \text{int } \Omega_\delta$. Da R_δ auch relativ offen in Ω_δ ist, ist R_δ offen in Ω . Als Vereinigung offener Mengen ist R somit ebenfalls offen.

In dieser offenen Menge R lässt sich nun die Argumentation von BEMELMANS und DIERKES [4] Theorem 14 anwenden, was uns $u \in C^\omega(R)$ liefert. Als Folgerung daraus ist $|D^c u^{1+\alpha}|(R) = 0$. Da $\dim_{\mathcal{H}}(S) \leq n - 6$ gilt sowieso $|D^c u^{1+\alpha}|(S) = 0$ und daher insgesamt $|D^c u^{1+\alpha}|(\Omega_0) = 0$. Nun besagt Proposition 3.92 aus AMBROSIO ET AL. [2], dass $|D^c f|(\{\tilde{f} = 0\}) = 0$ für jedes $f \in BV$. Die Menge $\{\tilde{u} = 0\}$ ist offenbar eine Obermenge von $\Omega \setminus \Omega_0$, während $\{u = 0\}$ mit $\{u^{1+\alpha} = 0\}$ übereinstimmt, sodass $|D^c u^{1+\alpha}|(\Omega \setminus \Omega_0)$ ebenfalls verschwinden muss und damit haben wir $u^{1+\alpha} \in W^{1,1}(\Omega)$. \square

Der obige Satz ermöglicht die sinnvolle Auswahl konkreter Repräsentanten der Mengen $\{u > \epsilon\}$. So definieren wir

$$\{u > \epsilon\} := \{x \in R : u(x) > \epsilon\}$$

welcher dann ein offener Repräsentant seiner Art ist und es gilt $u \in C^\omega(\{u > \epsilon\})$. Weiterhin vereinbaren wir

$$\{u > 0\} := \bigcup_{\epsilon > 0} \{u > \epsilon\}$$

was dann ebenfalls eine offene Menge ist und wir dürfen $u \in C^\omega(\{u > 0\})$ schreiben. Es gilt außerdem für jedes Radon-Maß μ :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu(\{u > \epsilon\}) = \mu(\{u > 0\}).$$

Dies ermöglicht es uns, ab jetzt von der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\text{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) = \frac{\alpha}{u \sqrt{1 + |Du|^2}}$$

zu sprechen, die in der ganzen Menge $\{u > 0\}$ erfüllt sein muss. Dies ist unser Ausgangspunkt für die folgenden Untersuchungen.

Man beachte, dass u nicht als stetig vorausgesetzt wird und dass die von uns als $\{u = 0\}$ bezeichnete Menge nur ein möglicher Repräsentant dieser Menge im Sinne des Lebesgue-Maßes ist. Bereits die Tatsache, dass sich ein solcher als relativ abgeschlossen wählen lässt, ist eine Regularitätsaussage an u . Selbst ein Repräsentant von u , dessen Subgraph die oben geforderte Bedingung $\partial U = \overline{\mathcal{F}U}$ erfüllt, ist nicht notwendigerweise konstant 0 in der Menge $\{u = 0\}$, sodass wir auf diese Weise nicht auf die Stetigkeit von u schließen können. Wir verwenden aber im Folgenden einen Repräsentanten von u der $u = 0$ in S erfüllt, was die obige Schreibweise rechtfertigt. Die Mengen $\{u = \epsilon\}$ sind entsprechend für alle $\epsilon > 0$ Teilmengen von $\{u > 0\}$. Da u jedoch nicht stetig sein muss, ist im Allgemeinen $\partial\{u > \epsilon\} \neq \{u = \epsilon\}$.

1.5 Perimeter der Koinzidenzmenge $\{u = 0\}$

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass der Perimeter der Koinzidenzmenge $\{u = 0\}$ endlich ist. Dazu beginnen wir mit folgender Überlegung, für die wir $u \in W^{1,1}(\Omega)$ annehmen wollen:

$$\begin{aligned}
 \int |D\chi_{\{u=0\}}| &= \int |D\chi_{\{u>0\}}| \\
 &= \int_0^1 \int |D\chi_{\{u>t\}}| dt \\
 &\leq \int_0^1 \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int |D\chi_{\{u>\epsilon\}}| dt \\
 &= \int_0^1 \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int |D\chi_{\{u>t\epsilon\}}| dt \\
 &\leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \int |D\chi_{\{u>t\epsilon\}}| dt \\
 &= \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon \int |D\chi_{\{u>t\}}| dt \\
 &\leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^\infty \int_{\{0 \leq u \leq \epsilon\}} |D\chi_{\{u>t\}}| dt \\
 &= \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{\{0 \leq u \leq \epsilon\}} |Du| dx, \\
 &= \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{\{0 < u < \epsilon\}} |Du| dx,
 \end{aligned}$$

wobei wir das Lemma von Fatou, die Koareaformel [2] Theorem 3.40 und die Tatsache, dass $u \in W^{1,1}(\Omega)$ und damit $|Du|(\{u = 0\}) = |Du|(\{u = \epsilon\}) = 0$, benutzt haben. Es ist also hinreichend die Beschränktheit des letzten Ausdrucks zu beweisen.

Wir werden die Voraussetzung, dass u eine Lösung der Aufgabe $\mathcal{F}^* \rightarrow \min$ sei, in Zukunft implizit annehmen und beginnen mit der Abschätzung von $\frac{1}{\varepsilon} \int_{\{0 < u < \varepsilon\}} |Du| dx$. Den Ansatzpunkt dafür liefert eine einfache Umformung der Euler-Lagrange-Gleichung: Es gilt nämlich

$$\operatorname{div} \left(\frac{u^\alpha Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) = \alpha u^{\alpha-1} \sqrt{1 + |Du|^2} \quad (1.3)$$

und damit weiter

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + |Du|^2} &= \frac{|Du|^2}{\sqrt{1 + |Du|^2}} + \frac{u \Delta u (1 + |Du|^2) - Du \cdot D^2 u Du}{(1 + |Du|^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{|Du|^2}{\sqrt{1 + |Du|^2}} + \frac{1}{\alpha} \operatorname{div} \left(\frac{u Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right), \end{aligned} \quad (1.4)$$

auf der Menge $\{u > 0\}$.

Bevor wir damit beginnen, benötigen wir noch ein Lemma, um die singuläre Menge S zu kontrollieren.

Lemma 1. *Es existiert eine Folge $U_j \supset S$ offener Mengen mit endlichem Perimeter,*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |U_j| = 0 \text{ und } \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* U_j) = 0.$$

Beweis. Es ist $\mathcal{H}^{n-1}(S) = 0$, also existiert für alle $j \in \mathbb{N}$ ein $\delta = \delta(j) > 0$, sodass $\mathcal{H}_{\delta(j)}^{n-1}(S) < \frac{1}{2^{j+1}}$, sowie eine Folge offener Kugeln $B_{\rho_{k,j}}(x_{k,j})$ mit $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_{\rho_{k,j}}(x_{k,j}) \supset S$, $\rho_{k,j} < \frac{\delta(j)}{2}$ und

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \omega_{n-1} \rho_{k,j}^{n-1} &\leq \mathcal{H}_{\delta(j)}^{n-1}(S) + \frac{1}{2^{j+1}} \\ &\leq \frac{1}{2^j}, \end{aligned}$$

wobei

$$\mathcal{H}_{\delta}^{n-1}(S) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \omega_{n-1} \left(\frac{\operatorname{diam}(B_k)}{2} \right)^{n-1} : \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \supset S, \operatorname{diam}(B_k) < \delta \right\},$$

sodass $\mathcal{H}^{n-1}(S) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\delta}^{n-1}(S)$.

Wir setzen $U_j := \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{\rho_{k,j}}(x_{k,j}) \supset S$ und sehen

$$\begin{aligned}
 \int |D\chi_{U_j}| &= \int |D\chi_{\bigcup_{k=1}^{\infty} B_{\rho_{k,j}}(x_{k,j})}| \\
 &\leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \int |D\chi_{\bigcup_{k=1}^N B_{\rho_{k,j}}(x_{k,j})}| \\
 &\leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \int |D\chi_{B_{\rho_{k,j}}(x_{k,j})}| \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \int |D\chi_{B_{\rho_{k,j}}(x_{k,j})}| \\
 &= n\omega_n \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{k,j}^{n-1} \\
 &= \frac{n\omega_n}{\omega_{n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \omega_{n-1} \rho_{k,j}^{n-1} \\
 &\leq \frac{n\omega_n}{\omega_{n-1}} \frac{1}{2^j} \\
 &\rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

Die Sobolew-Ungleichung liefert damit auch $|U_j| \rightarrow 0, j \rightarrow \infty$. \square

Lemma 2. Sei $\epsilon > 0$ derart, dass $\{u = \epsilon\}$ eine glatte Hyperfläche ist, und $G \subset\subset \Omega$ eine glattberandete offene Menge. Dann gilt für alle $j \in \mathbb{N}$ mit den U_j aus Lemma 1

$$\begin{aligned}
 &\int_{\{0 < u < \epsilon\} \cap G \setminus U_j} \sqrt{1 + |Du|^2} \, dx \\
 &\leq \frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_{\{0 < u < \epsilon\} \cap G \setminus U_j} \frac{|Du|^2}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \, dx + \frac{\epsilon}{\alpha} \int_{\{u = \epsilon\} \cap G \text{next}^* U_j} \frac{|Du|}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \, d\mathcal{H}^{n-1} \\
 &\quad + \frac{\epsilon}{\alpha} \mathcal{H}^{n-1}(\partial G \cap \{0 < u < \epsilon\}) + \frac{\epsilon}{\alpha} \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* U_j).
 \end{aligned}$$

Beweis. Wir beginnen mit der bereits hergeleiteten Formel für $\sqrt{1 + |Du|^2}$:

$$\sqrt{1 + |Du|^2} = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{|Du|^2}{\sqrt{1 + |Du|^2}} + \frac{1}{\alpha} \operatorname{div} \left(\frac{u Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right)$$

in $\{u > 0\}$. Diese integrieren wir über die Menge $\{\delta < u < \epsilon\} \cap G \setminus U_j$, wobei wir $\delta > 0$ und $\epsilon > 0$ derart wählen wollen, dass die Niveaumengen $\{u = \delta\}$ und $\{u = \epsilon\}$ glatte Hyperflächen sind und außerdem $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\{\delta < u < \epsilon\} \cap \partial G) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial\{\delta < u < \epsilon\} \cap \partial^* U_j) = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Nach dem Satz von Sard und [24] Proposition 2.16 ist dies für fast alle positiven ϵ und δ der Fall. Auf diesen Niveaumengen gilt dann $|Du| \neq 0$, sodass ihre Normalen durch $\pm \frac{Du}{|Du|}$ gegeben sind. Die äußere Normale an G

bezeichnen wir mit v_G , die von U_j analog mit v_{U_j} . Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \int_{\{\delta < u < \epsilon\} \cap G \setminus U_j} \sqrt{1 + |Du|^2} dx &= \frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_{\{\delta < u < \epsilon\} \cap G \setminus U_j} \frac{|Du|^2}{\sqrt{1 + |Du|^2}} dx \\ &\quad + \frac{1}{\alpha} \int_{\{\delta < u < \epsilon\} \cap G \setminus U_j} \operatorname{div} \left(\frac{u Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) dx. \end{aligned}$$

Der zweite Term auf der rechten Seite lässt sich nun partiell integrieren:

$$\begin{aligned} &\int_{\{\delta < u < \epsilon\} \cap G \setminus U_j} \sqrt{1 + |Du|^2} dx \\ &= \frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_{\{\delta < u < \epsilon\} \cap G \setminus U_j} \frac{|Du|^2}{\sqrt{1 + |Du|^2}} dx - \frac{1}{\alpha} \left(\int_{\{u=\delta\} \cap G \cap \text{next}^* U_j} \frac{u |Du|}{\sqrt{1 + |Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} \right. \\ &\quad - \int_{\{u=\epsilon\} \cap G \cap \text{next}^* U_j} \frac{u |Du|}{\sqrt{1 + |Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\{\delta < u < \epsilon\} \cap \partial G \cap \text{next}^* U_j} \frac{u Du \cdot v_G}{\sqrt{1 + |Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\quad \left. + \int_{\{\delta < u < \epsilon\} \cap G \cap \partial^* U_j} \frac{u Du \cdot v_{U_j}}{\sqrt{1 + |Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\{\delta < u < \epsilon\} \cap \partial G \cap \partial^* U_j} \frac{u Du \cdot v_G}{\sqrt{1 + |Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} \right) \\ &\leq \frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_{\{\delta < u < \epsilon\} \cap G \setminus U_j} \frac{|Du|^2}{\sqrt{1 + |Du|^2}} dx + \frac{1}{\alpha} \left(\int_{\{u=\epsilon\} \cap G \cap \text{next}^* U_j} \frac{u |Du|}{\sqrt{1 + |Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} \right. \\ &\quad + \int_{\{\delta < u < \epsilon\} \cap \partial G \cap \text{next}^* U_j} \frac{u |Du|}{\sqrt{1 + |Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\{\delta < u < \epsilon\} \cap G \cap \partial^* U_j} \frac{u |Du|}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \\ &\quad \left. + \int_{\{\delta < u < \epsilon\} \cap \partial G \cap \partial^* U_j} \frac{u |Du|}{\sqrt{1 + |Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} \right). \end{aligned}$$

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} &\int_{\{\delta < u < \epsilon\} \cap G \setminus U_j} \sqrt{1 + |Du|^2} dx \\ &\leq \frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_{\{\delta < u < \epsilon\} \cap G \setminus U_j} \frac{|Du|^2}{\sqrt{1 + |Du|^2}} dx + \frac{\epsilon}{\alpha} \int_{\{u=\epsilon\} \cap G \cap \text{next}^* U_j} \frac{|Du|}{\sqrt{1 + |Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\quad + \frac{\epsilon}{\alpha} \mathcal{H}^{n-1}(\partial G \cap \{0 < u < \epsilon\}) + \frac{\epsilon}{\alpha} \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* U_j). \end{aligned}$$

Mit $\delta \rightarrow 0$ erhalten wir daraus die Behauptung. □

Die beiden Terme aus Lemma 2 lassen sich wie folgt zusammenfassen:

Lemma 3. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 2 gilt ebenfalls*

$$\begin{aligned} &\int_{\{0 < u < \epsilon\} \cap G \setminus U_j} \frac{|Du|^2}{\sqrt{1 + |Du|^2}} dx \\ &\leq \epsilon \int_{\{u=\epsilon\} \cap G \cap \text{next}^* U_j} \frac{|Du|}{\sqrt{1 + |Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} + \epsilon \mathcal{H}^{n-1}(\partial G \cap \{0 < u < \epsilon\}) \\ &\quad + \epsilon \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* U_j). \end{aligned}$$

Beweis. Wir gehen wieder wie in Lemma 2 vor, allerdings beginnen wir mit der Gleichung

$$\operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right) = \frac{\alpha}{u\sqrt{1+|Du|^2}},$$

die wir zunächst mit u multiplizieren und dann genau wie in Lemma 2 integrieren: So ergibt sich

$$\begin{aligned} & \int_{\{\delta < u < \epsilon\} \cap G \setminus U_j} \frac{|Du|^2}{\sqrt{1+|Du|^2}} dx \\ &= - \int_{\{\delta < u < \epsilon\} \cap G \setminus U_j} \frac{\alpha}{\sqrt{1+|Du|^2}} dx - \int_{\{u=\delta\} \cap G \cap \operatorname{next}^* U_j} \frac{|Du|u}{\sqrt{1+|Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} \\ & \quad + \int_{\{u=\epsilon\} \cap G \cap \operatorname{next}^* U_j} \frac{|Du|u}{\sqrt{1+|Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\partial G \cap \{\delta < u < \epsilon\} \cap \operatorname{next}^* U_j} \frac{u Du \cdot \nu_G}{\sqrt{1+|Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} \\ & \quad - \int_{\partial^* U_j \cap \{\delta < u < \epsilon\} \cap G} \frac{u Du \cdot \nu_{U_j}}{\sqrt{1+|Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\{\delta < u < \epsilon\} \cap \partial G \cap \partial^* U_j} \frac{u Du \cdot \nu_G}{\sqrt{1+|Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} \\ & \leq \int_{\{u=\epsilon\} \cap G \cap \operatorname{next}^* U_j} \frac{|Du|u}{\sqrt{1+|Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\partial G \cap \{\delta < u < \epsilon\} \cap \operatorname{next}^* U_j} \frac{|Du|u}{\sqrt{1+|Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} \\ & \quad + \int_{\partial^* U_j \cap \{\delta < u < \epsilon\} \cap G} \frac{|Du|u}{\sqrt{1+|Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\{\delta < u < \epsilon\} \cap \partial G \cap \partial^* U_j} \frac{u|Du|}{\sqrt{1+|Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} \\ & \leq \epsilon \int_{G \cap \{u=\epsilon\} \cap \operatorname{next}^* U_j} \frac{|Du|}{\sqrt{1+|Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} + \epsilon \mathcal{H}^{n-1}(\partial G \cap \{0 < u < \epsilon\}) \\ & \quad + \epsilon \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* U_j). \end{aligned}$$

$\delta \rightarrow 0$ liefert die Behauptung. □

Noch eine letzte Abschätzung dieser Art:

Lemma 4. *Mit den Voraussetzungen von Lemma 2 gilt*

$$\frac{\alpha \chi_{\{u>0\}}}{u\sqrt{1+|Du|^2}} \in L^1_{loc}(\Omega)$$

und die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \int_{\{u=\epsilon\} \cap G \cap \operatorname{next}^* U_j} \frac{|Du|}{\sqrt{1+|Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} \\ & \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial G \cap \{u > \epsilon\}) - \int_{\{u>\epsilon\} \cap G \setminus U_j} \frac{\alpha}{u\sqrt{1+|Du|^2}} dx + \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* U_j). \end{aligned}$$

Beweis. Wir integrieren dieses Mal direkt die Gleichung

$$\operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right) = \frac{\alpha}{u\sqrt{1+|Du|^2}},$$

ohne sie umzuformen, auf dem Gebiet $\{u > \epsilon\} \cap G \setminus U_j$. Nach partieller Integration ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 & \int_{G \cap \{u=\epsilon\} \cap \text{next}^* U_j} \frac{|Du|}{\sqrt{1+|Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} \\
 = & - \int_{\{u>\epsilon\} \cap G \setminus U_j} \frac{\alpha}{u \sqrt{1+|Du|^2}} dx + \int_{\partial G \cap \{u>\epsilon\} \cap \text{next}^* U_j} \frac{Du \cdot \nu_G}{\sqrt{1+|Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} \\
 & - \int_{\partial^* U_j \cap \{u>\epsilon\} \cap G} \frac{Du \cdot \nu_{U_j}}{\sqrt{1+|Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\{u>\epsilon\} \cap \partial G \cap \partial^* U_j} \frac{Du \cdot \nu_G}{\sqrt{1+|Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} \\
 \leq & \int_{\partial G \cap \{u>\epsilon\} \cap \text{next}^* U_j} \frac{|Du|}{\sqrt{1+|Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\{u>\epsilon\} \cap G \setminus U_j} \frac{\alpha}{u \sqrt{1+|Du|^2}} dx \\
 & + \int_{\partial^* U_j \cap \{u>\epsilon\} \cap G} \frac{|Du|}{\sqrt{1+|Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\{u>\epsilon\} \cap \partial G \cap \partial^* U_j} \frac{|Du|}{\sqrt{1+|Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} \\
 \leq & \mathcal{H}^{n-1}(\partial G \cap \{u > \epsilon\}) - \int_{\{u>\epsilon\} \cap G \setminus U_j} \frac{\alpha}{u \sqrt{1+|Du|^2}} dx + \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* U_j),
 \end{aligned}$$

was die gesuchte Abschätzung ist. Umsortieren der Terme liefert

$$\begin{aligned}
 \int_{\{u>\epsilon\} \cap G \setminus U_j} \frac{\alpha}{u \sqrt{1+|Du|^2}} dx & \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial G \cap \{u > \epsilon\}) + \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* U_j) \\
 & \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial G) + \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* U_j).
 \end{aligned}$$

Auf der linken Seite können wir, da der Integrand auf $\{u > \epsilon\}$ beschränkt ist, $j \rightarrow \infty$ gehen lassen und anschließend aufgrund des Satzes über monotone Konvergenz auch $\epsilon \rightarrow 0$, was wegen der Beliebigkeit von G , den ersten Teil der Behauptung beweist. \square

Nun müssen wie die letzten drei Lemmata nur noch zusammenfassen:

Satz 5. Sei $u \in BV^{1+\alpha}(\Omega)$ ein Minimierer von \mathcal{F}^* zu Randwerten $\psi \in L^\infty(\Omega)$. Dann ist $u \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$, $\{u = 0\}$ eine Menge mit lokal endlichem Perimeter in Ω und es gelten die Abschätzungen

$$\int_G |D\chi_{\{u=0\}}| \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial G \cap \{u > 0\}) - \int_{\{u>0\} \cap G} \frac{\alpha}{u \sqrt{1+|Du|^2}} dx$$

für jedes offene $G \subset\subset \Omega$ mit $\partial G \in C^1$, sowie, falls Ω einfach zusammenhängend ist mit $\partial\Omega \in C^2$, $u \in W^{1,1}(\Omega)$,

$$\int_\Omega |D\chi_{\{u>0\}}| \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) - \int_{\{u>0\}} \frac{\alpha}{u \sqrt{1+|Du|^2}} dx,$$

und in diesem Fall ist $\{u = 0\}$ eine Caccioppoli-Menge in Ω .

Beweis. Für fast jedes $\epsilon > 0$, für das $\{u = \epsilon\}$ eine glatte Hyperfläche ist, lassen sich die Lemmata 2 bis 4 anwenden, die zusammen die Abschätzung

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\epsilon} \int_{\{0 < u < \epsilon\} \cap G \setminus U_j} \sqrt{1+|Du|^2} dx & \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial G \cap \{u > 0\}) - \int_{\{u>\epsilon\} \cap G \setminus U_j} \frac{\alpha}{u \sqrt{1+|Du|^2}} dx \\
 & + 2\mathcal{H}^{n-1}(\partial U_j)
 \end{aligned}$$

ergeben. $j \rightarrow \infty$ führt zu

$$\frac{1}{\epsilon} \int_{\{0 < u < \epsilon\} \cap G} \sqrt{1 + |Du|^2} dx \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial G \cap \{u > 0\}) - \int_{\{u > \epsilon\} \cap G} \frac{\alpha}{u \sqrt{1 + |Du|^2}} dx. \quad (1.5)$$

Indem wir $\epsilon \geq \|u\|_\infty$ wählen, erhalten wir $u \in W^{1,1}(\{u > 0\} \cap G)$ für jedes $G \subset \subset \Omega$. Wir wählen nun eine Folge $\epsilon_j \rightarrow 0$ so, dass die $\{u = \epsilon_j\}$ allesamt glatte Hyperflächen sind. Die Definition

$$u_j(x) := \begin{cases} u(x), & \text{falls } x \in \{u > \epsilon_j\} \setminus U_j \\ \epsilon_j, & \text{sonst} \end{cases}$$

liefert eine Funktionenfolge $u_j \in BV(\Omega)$ mit $u_j \rightarrow u \in L^1(\Omega)$. Da außerdem

$$\begin{aligned} \int_G |Du_j| &\leq \int_{G \cap \{u > \epsilon_j\} \setminus U_j} |Du| dx + \|u\|_\infty \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* U_j) \\ &\leq \int_{G \cap \{u > 0\}} |Du| dx + \|u\|_\infty \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* U_j) \\ &\leq \|u\|_\infty \left(\mathcal{H}^{n-1}(\partial G) + \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* U_j) \right) \end{aligned}$$

folgt mit der Unterhalbstetigkeit der totalen Variation bezüglich der Konvergenz in L^1 , dass $u \in BV(G)$. Die im Beweis des Satzes 4 auf $u^{1+\alpha}$ angewandte Argumentation liefert $u \in W^{1,1}(G)$ und damit aufgrund der Beliebigkeit der Wahl von G auch $u \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$.

Nun können wir wie schon zu Beginn des Abschnitts erläutert argumentieren und verwenden dabei (1.5):

$$\begin{aligned} &\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_G |D\chi_{\{u > \epsilon\}}| \\ &= \int_0^1 \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_G |D\chi_{\{u > t\epsilon\}}| dt \\ &\leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \int_G |D\chi_{\{u > t\epsilon\}}| dt \\ &= \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon \int_G |D\chi_{\{u > t\}}| dt \\ &\leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{\{0 < u < \epsilon\} \cap G} |Du| dx \\ &\leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{\{0 < u < \epsilon\} \cap G} \sqrt{1 + |Du|^2} dx \\ &\leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial G \cap \{u > 0\}) - \int_{\{u > 0\} \cap G} \frac{\alpha}{u \sqrt{1 + |Du|^2}} dx. \end{aligned}$$

Da $\chi_{\{u > \epsilon_j\}} \rightarrow \chi_{\{u > 0\}}$ in L^1 folgt $\chi_{\{u > 0\}}$ in $BV(G)$ und weil $\chi_{\{u=0\}} = 1 - \chi_{\{u > 0\}}$ hat die Koinzidenzmenge ebenfalls endlichen Perimeter und es gilt die Erste der behaupteten

Abschätzungen. Für die Zweite wählen wir $G = \Omega_\delta$ mit $\delta > 0$, wobei Ω_δ die Menge aller Punkte $x \in \Omega$ mit $\text{dist}(x, \partial\Omega) > \delta$ bezeichne. Da $\partial\Omega \in C^2$ gilt dies bei hinreichend kleinem δ auch für Ω_δ und es folgt

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\delta} |D\chi_{\{u=0\}}| \\ & \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega_\delta \cap \{u > 0\}) - \int_{\{u>0\} \cap \Omega_\delta} \frac{\alpha}{u \sqrt{1 + |Du|^2}} dx \\ & \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega_\delta) - \int_{\{u>0\} \cap \Omega_\delta} \frac{\alpha}{u \sqrt{1 + |Du|^2}} dx. \end{aligned}$$

Lassen wir dort $\delta \rightarrow 0$, so folgt die zweite Abschätzung. \square

Korollar 1. Sei $\{u < \epsilon\} \subset \subset \Omega$ für ein $\epsilon > 0$, dann ist $\{u = 0\}$ eine Caccioppoli-Menge.

Beweis. In diesem Fall wähle $\Omega \supset \supset G \supset \{u < \epsilon\}$ in Satz 5. Dann ist $\{u = 0\} \subset G$ und folglich

$$\int_G |D\chi_{\{u=0\}}| = \int |D\chi_{\{u=0\}}| < \infty.$$

\square

Die erste Abschätzung aus Satz 5 impliziert die \mathcal{H} -Konvexität von $\{u = 0\}$, wie wir im Folgenden ausführen werden.

1.6 \mathcal{H} -Konvexität der Koinzidenzmenge

Wir erinnern an die Definition der \mathcal{H} -Konvexität einer Caccioppoli-Menge:

Definition 1. Eine Caccioppoli-Menge $E \subset \Omega$ heißt \mathcal{H} -konvex, wenn

$$\int_{\Omega} |D\chi_E| \leq \int_{\Omega} |D\chi_{E \cup F}| \quad (1.6)$$

für alle Caccioppoli-Mengen $F \subset \subset \Omega$.

Wenn $\partial E \in C^2$, dann impliziert die \mathcal{H} -Konvexität von E , dass die innere mittlere Krümmung $H_{\partial E}$ von ∂E überall nichtnegativ ist. Dies lässt sich leicht durch Bestimmen der ersten Variation des Flächeninhalts von ∂E überprüfen. Denn sind $\eta \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $\Phi_\epsilon(x) := x + \epsilon\eta(x)$ derart, dass $\Phi_\epsilon(E) \supset E$, dann ist auch $\eta \cdot \nu < 0$, wenn ν die innere Einheitsnormale von ∂E bezeichnet. Folglich gilt

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\int_{\Omega} |D\chi_{\Phi_\epsilon(E)}| - \int_{\Omega} |D\chi_E| \right) \\ & = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^{n-1}(\Phi_\epsilon(\partial E)) - \mathcal{H}^{n-1}(\partial E)}{\epsilon} \\ & = - \int_{\partial E} H_{\partial E} \eta \cdot \nu d\mathcal{H}^{n-1}. \end{aligned}$$

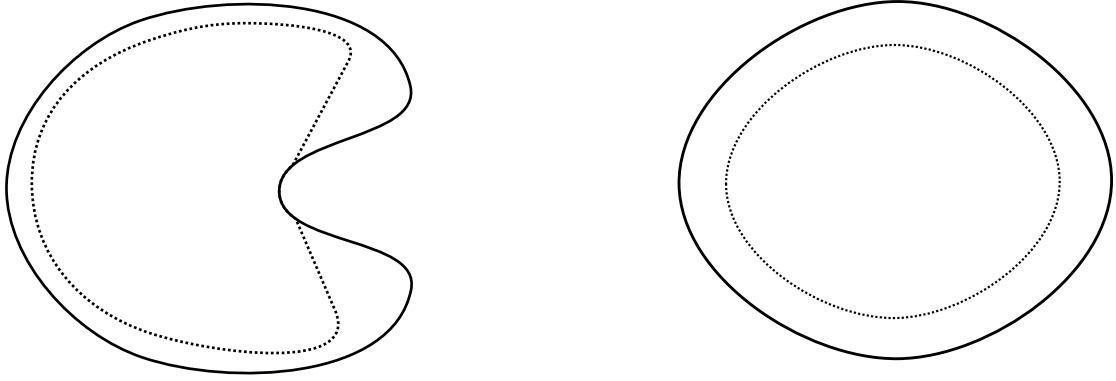


Abbildung 1.1: Links: Nicht \mathcal{H} -konvexes Gebiet; die Nullstellenmenge (gepunktet) ist nur als Teilmenge von Ω \mathcal{H}^* -konvex. Rechts: \mathcal{H} -konvexes Gebiet; die Nullstellenmenge ist ebenfalls \mathcal{H} -konvex.

Da η variierbar ist, folgt $H_{\partial E} \geq 0$ aus der \mathcal{H} -Konvexität von E .

Die obige Definition der \mathcal{H} -Konvexität ist nur für Mengen mit endlichem Perimeter sinnvoll, da die linke Seite der definierenden Ungleichung (1.6) ansonsten stets unendlich ist. Für Mengen mit lokal endlichem Perimeter wollen wir dagegen folgende Definition verwenden:

Definition 2. Eine Menge $E \subset \Omega$ mit lokal endlichem Perimeter heißt \mathcal{H}^* -konvex, wenn

$$\int_{\Omega} |D\chi_{F \cap E}| \leq \int_{\Omega} |D\chi_F| \quad (1.7)$$

für alle Caccioppoli-Mengen $F \subset \subset \Omega$.

Da

$$\int_{\Omega} |D\chi_{F \cup E}| \leq \int_{\Omega} |D\chi_F| + \int_{\Omega} |D\chi_E| - \int_{\Omega} |D\chi_{F \cap E}|$$

ist \mathcal{H}^* -Konvexität schwächer als \mathcal{H} -Konvexität. Hat $E \subset \subset \Omega$ jedoch endlichen Perimeter, so darf man in (1.7) mit $F \cup E$ testen und erhält (1.6), sodass in diesem Fall die beiden Begriffe äquivalent sind.

Satz 6. Sei $u \in BV^{1+\alpha}(\Omega)$ ein Minimierer von \mathcal{F}^* . Dann gilt

$$\int_{\Omega} |D\chi_{E \cap \{u=0\}}| \leq \int_{\Omega} |D\chi_E| - \int_{\{u>0\} \cap E} \frac{\alpha}{u \sqrt{1 + |Du|^2}} dx$$

für alle Caccioppoli-Mengen $E \subset \subset \Omega$, d.h. $\{u = 0\}$ ist \mathcal{H}^* -konvex.

Ist zusätzlich $\{u = 0\} \subset \subset \Omega$ bekannt, so gilt sogar

$$\int_{\Omega} |D\chi_{\{u=0\}}| \leq \int_{\Omega} |D\chi_{\{u=0\} \cup E}| - \int_{\{u>0\} \cap E} \frac{\alpha}{u \sqrt{1 + |Du|^2}} dx$$

für alle Caccioppoli-Mengen $E \subset \subset \Omega$, d.h. $\{u = 0\}$ ist \mathcal{H} -konvex.

Beweis. Ist $G \subset\subset \Omega$ eine offene Menge mit $\partial G \in C^1$, so gilt nach Satz 5, dass

$$\begin{aligned} & \int_G |D\chi_{\{u=0\}}| \\ & \leq \int_{\{u>0\}} |D\chi_G| - \int_{\{u>0\} \cap G} \frac{\alpha}{u\sqrt{1+|Du|^2}} dx \\ & \leq \int_{\text{ext}^*\{u=0\}} |D\chi_G| - \int_{\{u>0\} \cap G} \frac{\alpha}{u\sqrt{1+|Du|^2}} dx, \end{aligned}$$

da $\{u > 0\} = \text{ext}\{u = 0\} \subset \text{ext}^*\{u = 0\}$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} & \int_{\{u>0\} \cap G} \frac{\alpha}{u\sqrt{1+|Du|^2}} dx \\ & \leq \int_{\text{ext}^*\{u=0\}} |D\chi_G| - \int_G |D\chi_{\{u=0\}}| \\ & \quad \text{Da } \partial G \in C^1 \text{ und somit } \partial^* G = \partial G: \\ & = \int_{\text{ext}^*\{u=0\}} |D\chi_G| - \int_{\text{int}^* G} |D\chi_{\{u=0\}}| \\ & = \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* G \cap \text{ext}^*\{u = 0\}) - \mathcal{H}^{n-1}(\partial^*\{u = 0\} \cap \text{int}^* G) \\ & = \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* G) - \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* G \cap \text{int}^*\{u = 0\}) - \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* G \cap \partial^*\{u = 0\}) \\ & \quad - \mathcal{H}^{n-1}(\partial^*\{u = 0\} \cap \text{int}^* G) \\ & \leq \int |D\chi_G| - \int |D\chi_{G \cap \{u=0\}}|, \end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Abschätzung das Theorem 16.3 aus MAGGI [24] verwendet haben. Dieses besagt, dass für zwei beliebige Mengen A und B mit endlichem Perimeter

$$\int |D\chi_{A \cap B}| = \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* A \cap \text{int}^* B) + \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* B \cap \text{int}^* A) + \mathcal{H}^{n-1}(\{v_A = v_B\}),$$

was die oben verwendete Abschätzung impliziert.

Ist nun $E \subset\subset \Omega$ eine beliebige Caccioppoli-Menge, so existiert nach MAGGI [24] Theorem 13.8 eine Folge solcher glattberandeter Gebiete $G_j \subset\subset \Omega$ mit $\chi_{G_j} \rightarrow \chi_E$ in L^1 und $\int |D\chi_{G_j}| \rightarrow \int |D\chi_E|$. Mit diesen gilt dann

$$\begin{aligned} & \int_{\{u>0\} \cap E} \frac{\alpha}{u\sqrt{1+|Du|^2}} dx \\ & \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\{u>0\} \cap G_j} \frac{\alpha}{u\sqrt{1+|Du|^2}} dx \\ & \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \left(\int |D\chi_{G_j}| - \int |D\chi_{G_j \cap \{u=0\}}| \right) \\ & \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \int |D\chi_{G_j}| - \liminf_{j \rightarrow \infty} \int |D\chi_{G_j \cap \{u=0\}}| \\ & \leq \int |D\chi_E| - \int |D\chi_{E \cap \{u=0\}}| \\ & = \int_{\Omega} |D\chi_E| - \int_{\Omega} |D\chi_{E \cap \{u=0\}}|. \end{aligned}$$

Hier sind wir davon ausgegangen, dass auch $\chi_{G_j} \rightarrow \chi_E$ punktweise f.ü., was sich durch Auswahl einer geeigneten Teilfolge realisieren lässt, und haben das Lemma von Fatou angewendet. Für die letzte Abschätzung wurde die Unterhalbstetigkeit des Perimeters zusammen mit $\chi_{G_j \cap \{u=0\}} \rightarrow \chi_{E \cap \{u=0\}}$ in L^1 verwendet.

Die zweite Aussage ist eine Folgerung aus Korollar 1. □

Im Allgemeinen lässt sich die mittlere Krümmung $H \in L^1(\mathbb{R}^n)$ einer Caccioppoli-Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ über das Funktional

$$H(E) = \int |D\chi_E| + \int_E H dx$$

definieren. Ist E ein lokaler Minimierer von H unter allen Caccioppoli-Mengen in \mathbb{R}^n , so hat E die mittlere Krümmung H . Eine solche existiert immer, siehe BAROZZI ET AL. [3]. Satz 6 hat also die zusätzliche Aussage, dass

$$-\frac{\alpha}{u\sqrt{1+|Du|^2}}$$

eine mittlere Krümmung von $\{u = 0\}$ für Variationen nach außen ist. Diese ist zunächst verblüffenderweise genau das Negative der mittleren Krümmung des Graphen von u . Wenn man jedoch bedenkt, dass eben dieser Graph durch Rotation eine Minimalfläche ergeben soll, so ist das weniger verwunderlich als vielmehr zu erwarten gewesen. Denn die mittlere Krümmung des rotierten Graphen in einem Punkt der Rotationsebene ist eben nichts anderes als die Summe der mittleren Krümmung des Graphen von u und der des Randes der Koinzidenzmenge, welche verschwinden muss.

1.7 Schwache Euler-Lagrange-Gleichungen

Wesentlich für die Untersuchungen des letzten Abschnitts war die Erfülltheit der starken Euler-Lagrange-Gleichung

$$\operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right) = \frac{\alpha}{u\sqrt{1+|Du|^2}}$$

in $\{u > 0\}$. Leider ist es nicht möglich, diese auf klassische Art und Weise in eine schwache Form zu bringen, die auf ganz Ω gilt. Wie wir im Folgenden sehen werden, kann die Gleichung

$$-\int_{\{u>0\}} \frac{Du \cdot D\phi}{\sqrt{1+|Du|^2}} dx = \int_{\{u>0\}} \frac{\alpha\phi}{u\sqrt{1+|Du|^2}} dx$$

nur dann für alle $\phi \in C_c^1(\Omega)$ erfüllt sein, wenn $|D\chi_{\{u=0\}}|(\Omega) = 0$. Eine Untersuchung dieses Falls ist sicherlich ebenfalls nicht uninteressant, stellt hier jedoch nicht unsere Absicht dar. MEADOWS [26] unternahm dies für die verwandte Gleichung $\Delta u = \frac{1}{u}$.

Um dennoch eine schwache Euler-Lagrange-Gleichung formulieren zu können, müssen wir die distributiven zweiten Ableitungen betrachten. Dazu verwenden wir die von CHEN und FRID [6] mit \mathcal{DM}^p bezeichneten Räume von L^p -Vektorfeldern, deren Divergenz ein Radon-Maß ist.

Definition 3. Für $F \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $1 \leq p \leq \infty$, definieren wir

$$|\operatorname{div} F|(\Omega) := \sup \left\{ \int F \cdot D\phi \, dx : \phi \in C_c^1(\Omega), \|\phi\|_{\infty, \Omega} \leq 1 \right\}.$$

und

$$\mathcal{DM}^p(\Omega, \mathbb{R}^N) := \left\{ F \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^N) : |\operatorname{div} F|(\Omega) < \infty \right\}$$

sowie

$$\mathcal{DM}_{loc}^p(\Omega, \mathbb{R}^N) := \left\{ F \in L_{loc}^p(\Omega, \mathbb{R}^N) : |\operatorname{div} F|(G) < \infty \, \forall G \subset\subset \Omega \text{ offen} \right\}$$

Offenbar gilt $\mathcal{DM}^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \supset BV(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

Für den Beweis des folgenden Satzes benötigen wir eine etwas stärkere Version der Koareaformel in BV :

Lemma 5. Ist $u \in BV_+^{1+\alpha}(\Omega)$ eine Lösung des Minimierungsproblems zu \mathcal{F}^* in $BV_+^{1+\alpha}(\Omega)$ und $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt mit kompaktem Träger, dann gilt

$$\int_U \phi |Du| \, dx = \int_0^\infty \int_U \phi |D\chi_{\{u>t\}}| \, dt$$

für jede offene Menge $U \subset \Omega$.

Beweis. Sei $V_j \subset\subset \{u > 0\}$ eine monoton wachsende Folge offener Mengen mit $u \in C^{0,1}(V_j)$ für alle j , deren Vereinigung $\bigcup_{j=1}^\infty V_j = \{u > 0\} \cap U$ erfüllt. Dann lässt sich in jeder dieser Mengen die Koareaformel für Lipschitz-Funktionen [17] 3.4 Theorem 2 anwenden:

$$\int_{V_j} \phi |Du| \, dx = \int_0^\infty \int_{V_j} \phi |D\chi_{\{u>t\}}| \, dt.$$

Nun ist links $|\chi_{V_j} \phi |Du|| \leq |\phi| |Du| \in L^1(\Omega)$, sodass sich dort der Satz über dominierte Konvergenz anwenden lässt. Auf der rechten Seite hingegen ist $|\chi_{V_j} \phi| \leq |\chi_{\{u>0\}} \phi|$ integrierbar bezüglich $|D\chi_{\{u>t\}}|$ für fast alle t , sodass

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{V_j} \phi |D\chi_{\{u>t\}}| = \int_{\{u>0\} \cap U} \phi |D\chi_{\{u>t\}}| \text{ für fast alle } t,$$

was, wegen

$$\left| \int_{V_j} \phi |D\chi_{\{u>t\}}| \right| \leq \|\phi\|_\infty \int_{\text{spt } \phi} |D\chi_{\{u>t\}}|,$$

als Folgerung aus der Koareaformel in BV [17] 5.5 Theorem 1 wiederum eine bezüglich t integrierbare Majorante besitzt. Insgesamt erhalten wir also mit $j \rightarrow \infty$

$$\int_{\{u>0\} \cap U} \phi |Du| dx = \int_0^\infty \int_{\{u>0\} \cap U} \phi |D\chi_{\{u>t\}}| dt. \quad (1.8)$$

Nun impliziert $u \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$, dass $|Du|(\{u=0\}) = 0$, sodass

$$\int_{\{u>0\} \cap U} \phi |Du| dx = \int_U \phi |Du| dx.$$

Es gilt außerdem, dass $\int_{\{u=0\}} |D\chi_{\{u>t\}}| = 0$ für alle $t > 0$, da

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial\{u > t\} \cap \{u = 0\}) \leq \mathcal{H}^{n-1}(S) = 0,$$

sodass wir auch auf der rechten Seite von (1.8) $\{u > 0\} \cap U$ durch U ersetzen können. \square

Satz 7. *Es existiert ein Radon-Maß, von uns mit $\frac{|Du|}{\sqrt{1+|Du|^2}} |D\chi_{\{u>0\}}|$ bezeichnet, mit*

$$\text{spt} \left(\frac{|Du|}{\sqrt{1+|Du|^2}} |D\chi_{\{u>0\}}| \right) \subset \partial\{u > 0\},$$

sodass

$$\begin{aligned} & - \int_{\{u>0\}} \frac{Du \cdot D\phi}{\sqrt{1+|Du|^2}} dx \\ &= \int_{\{u>0\}} \frac{\alpha\phi}{u\sqrt{1+|Du|^2}} dx + \int \phi \frac{|Du|}{\sqrt{1+|Du|^2}} |D\chi_{\{u>0\}}| \end{aligned}$$

für alle $\phi \in C_c^1(\Omega)$. Insbesondere existiert die mittlere Krümmung \mathcal{H}_u von u als Radon-Maß in Ω und

$$\mathcal{H}_u = \mathcal{L}^n \llcorner \frac{\alpha\chi_{\{u>0\}}}{u\sqrt{1+|Du|^2}} + \frac{|Du|}{\sqrt{1+|Du|^2}} |D\chi_{\{u>0\}}|.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \int \phi \frac{|Du|}{\sqrt{1+|Du|^2}} |D\chi_{\{u>0\}}| &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\{u=\epsilon_j\} \text{next}^* U_j} \phi \frac{|Du|}{\sqrt{1+|Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\epsilon_j} \int_{\{0 < u < \epsilon_j\} \text{next}^* U_j} \frac{\phi |Du|^2}{\sqrt{1+|Du|^2}} dx \end{aligned}$$

für jede positive Folge $\epsilon_j \rightarrow 0$, die $\{u = \epsilon_j\} \in C^\infty$ erfüllt, sowie für alle $\phi \in C_c^1(\Omega)$.

Beweis. Wir zeigen, dass $\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}} \in \mathcal{DM}_{loc}^\infty(\Omega)$. Sei dazu $G \subset\subset \Omega$ und $\phi \in C_c^1(G)$ mit $\|\phi\|_{\infty, G} \leq 1$ beliebig. Ohne Einschränkungen dürfen wir $\partial G \in C^1$ annehmen, denn ansonsten ließe sich G durch eine Obermenge mit dieser Eigenschaft ersetzen. Wir starten wieder mit der ursprünglichen ELG

$$\operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right) = \frac{\alpha}{u\sqrt{1+|Du|^2}},$$

multiplizieren mit ϕ und integrieren über $\{u > \epsilon\} \cap G \setminus U_j$, mit einem $\epsilon > 0$ für das $\{u = \epsilon\} \in C^\infty$, sowie den U_j aus Lemma 1, und erhalten

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\{u > \epsilon\} \cap G \setminus U_j} \frac{Du \cdot D\phi}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right| \\ &= \left| - \int_{\{u > \epsilon\} \cap G \setminus U_j} \frac{\alpha\phi}{u\sqrt{1+|Du|^2}} dx - \int_{\{u = \epsilon\} \cap G \cap \text{ext}^* U_j} \phi \frac{|Du|}{\sqrt{1+|Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} \right. \\ & \quad \left. - \int_{\{u > \epsilon\} \cap G \cap \partial^* U_j} \phi \frac{Du \cdot \nu_{U_j}}{\sqrt{1+|Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} \right| \\ &\leq \int_{\{u > \epsilon\} \cap G \setminus U_j} \frac{\alpha}{u\sqrt{1+|Du|^2}} dx + \int_{\{u = \epsilon\} \cap G \cap \text{ext}^* U_j} \frac{|Du|}{\sqrt{1+|Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} \\ & \quad + \int_{\{u > \epsilon\} \cap G \cap \partial^* U_j} \frac{|Du|}{\sqrt{1+|Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial G \cap \{u > 0\}) + 2\mathcal{H}^{n-1}(\partial^* U_j) \\ &< \infty, \end{aligned}$$

wobei wir Lemma 4 verwendet haben. Lassen wir dort $\epsilon \rightarrow 0$ und $j \rightarrow \infty$, so folgt

$$\left| \operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right) \right| (G) < \infty,$$

da $|Du|(\{u = 0\}) = 0$. Folglich ist $\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}} \in \mathcal{DM}_{loc}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und es existiert ein Radon-Maß μ in Ω mit

$$- \int_{\Omega} \frac{Du \cdot D\phi}{\sqrt{1+|Du|^2}} dx = \int_{\Omega} \phi d\mu$$

für alle $\phi \in C_c^1(\Omega)$. Aufgrund der starken ELG wissen wir, dass

$$\mu \llcorner \{u > 0\} = \mathcal{L}^n \llcorner \frac{\alpha}{u\sqrt{1+|Du|^2}} \text{ und } \mu \llcorner \operatorname{int}\{u = 0\} = 0.$$

Folglich gilt für den bezüglich des Lebesgue-Maßes singulären Anteil von μ , μ_{sing} , dass $\operatorname{spt}(\mu_{sing}) \subset \partial\{u > 0\}$. Wir nennen

$$\mu \llcorner \partial\{u = 0\} =: \frac{|Du|}{\sqrt{1+|Du|^2}} |D\chi_{\{u > 0\}}|.$$

Schließlich sei $\phi \in C_c^1(\Omega)$ beliebig und ϵ_j eine positive Nullfolge mit $\{u = \epsilon_j\} \in C^\infty$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Durch Multiplikation der klassischen mittleren Krümmungsgleichung von u mit ϕ und partielle Integration über $\{u > \epsilon_j\} \setminus U_j$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \int_{\{u=\epsilon_j\} \cap \text{ext}^* U_j} \phi \frac{|Du|}{\sqrt{1+|Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= - \int_{\{u>\epsilon_j\} \setminus U_j} \frac{\alpha\phi}{u\sqrt{1+|Du|^2}} dx - \int_{\{u>\epsilon_j\} \setminus U_j} \frac{Du \cdot D\phi}{\sqrt{1+|Du|^2}} dx \\ & \quad - \int_{\partial^* U_j \cap \{u \geq \epsilon_j\}} \phi \frac{Du \cdot \nu_{U_j}}{\sqrt{1+|Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1}. \end{aligned}$$

Mit $j \rightarrow \infty$ folgt daraus

$$\begin{aligned} & \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\{u=\epsilon_j\} \cap \text{ext}^* U_j} \phi \frac{|Du|}{\sqrt{1+|Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= - \int_{\{u>0\}} \frac{\alpha\phi}{u\sqrt{1+|Du|^2}} dx - \int_{\{u>0\}} \frac{Du \cdot D\phi}{\sqrt{1+|Du|^2}} dx \\ &= \int \phi \frac{|Du|}{\sqrt{1+|Du|^2}} |D\chi_{\{u>0\}}| \end{aligned}$$

nach Definition von $\frac{|Du|}{\sqrt{1+|Du|^2}} |D\chi_{\{u>0\}}|$.

Zum Beweis des letzten Teils der Behauptung verwenden wir die Koareaformel Lemma 5:

$$\begin{aligned} & \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\epsilon_j} \int_{\{0 < u < \epsilon_j\} \cap \text{ext}^* U_j} \frac{\phi |Du|^2}{\sqrt{1+|Du|^2}} dx \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\epsilon_j} \int_0^{\epsilon_j} \int_{\{u=t\} \cap \text{ext}^* U_j} \frac{\phi |Du|}{\sqrt{1+|Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} dt \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^1 \int_{\{u=t\epsilon_j\} \cap \text{ext}^* U_j} \frac{\phi |Du|}{\sqrt{1+|Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} dt \\ &= \int_0^1 \int \phi \frac{|Du|}{\sqrt{1+|Du|^2}} |D\chi_{\{u>0\}}| dt \\ &= \int \phi \frac{|Du|}{\sqrt{1+|Du|^2}} |D\chi_{\{u>0\}}|. \end{aligned}$$

Die Konvergenz in dieser Gleichungskette gilt, da die Folge

$$\int_{\{u=t\epsilon_j\} \cap \text{ext}^* U_j} \frac{\phi |Du|}{\sqrt{1+|Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1}$$

gleichgradig absolutstetige Integrale bezüglich t besitzt. Denn sei $M \subset (0, 1)$ eine be-

liebige messbare Menge, so gilt

$$\begin{aligned}
 \int_M \left| \int_{\{u=\epsilon_j\} \cap \text{next}^* U_j} \frac{\phi |Du|}{\sqrt{1+|Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} \right| dt &\leq \int_M \int_{\{u=\epsilon_j\}} \frac{|\phi| |Du|}{\sqrt{1+|Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} dt \\
 &= \int_{u^{-1}(\epsilon_j M)} \frac{|\phi| |Du|^2}{\sqrt{1+|Du|^2}} dx \\
 &\leq \int_{u^{-1}(\epsilon_j M)} |\phi| |Du| dx \\
 &= \int_{\epsilon_j M} \int |\phi| |D\chi_{\{u>t\}}| dt \\
 &\rightarrow 0
 \end{aligned}$$

mit $\mathcal{L}^1(M) \rightarrow 0$, unabhängig von j , da $\mathcal{L}^1(\epsilon_j M) = \epsilon_j \mathcal{L}^1(M) \leq \max_j \epsilon_j \mathcal{L}^1(M)$. \square

Interessanterweise gilt die alternative Form der Euler-Lagrange-Gleichung (1.3) tatsächlich in der klassischen schwachen Formulierung, ohne auf Radon-Maße zurückgreifen zu müssen:

Satz 8. *Mit den Voraussetzungen von Satz 7 gilt*

$$- \int_{\{u>0\}} \frac{u^\alpha Du \cdot D\phi}{\sqrt{1+|Du|^2}} dx = \int_{\{u>0\}} \alpha u^{\alpha-1} \sqrt{1+|Du|^2} \phi dx$$

für alle $\phi \in C_c^1(\Omega)$.

Beweis. Wir multiplizieren Gleichung (1.3) mit ϕ und integrieren über die Menge $\{u > \epsilon_j\} \setminus U_j$, wobei $\epsilon_j > 0$ so gewählt sei, dass $\{u = \epsilon_j\}$ eine glatte Hyperfläche ist. Nach partieller Integration ergibt sich

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\{u>\epsilon_j\} \setminus U_j} \frac{u^\alpha Du \cdot D\phi}{\sqrt{1+|Du|^2}} dx \\
 &= \int_{\{u=\epsilon_j\} \cap \text{next}^* U_j} \frac{u^\alpha |Du| \phi}{\sqrt{1+|Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\{u>\epsilon_j\} \setminus U_j} \alpha u^{\alpha-1} \sqrt{1+|Du|^2} \phi dx \\
 & \quad + \int_{\partial^* U_j \cap \{u>\epsilon_j\}} \frac{u^\alpha \phi Du \cdot \nu_{U_j}}{\sqrt{1+|Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} \\
 &= \epsilon_j^\alpha \int_{\{u=\epsilon_j\} \cap \text{next}^* U_j} \frac{|Du| \phi}{\sqrt{1+|Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\{u>\epsilon_j\} \setminus U_j} \alpha u^{\alpha-1} \sqrt{1+|Du|^2} \phi dx \\
 & \quad + \int_{\partial^* U_j \cap \{u>\epsilon_j\}} \frac{u^\alpha \phi Du \cdot \nu_{U_j}}{\sqrt{1+|Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1}
 \end{aligned}$$

Mit $j \rightarrow \infty$ folgt die Behauptung. \square

Satz 8 ist schwächer als Satz 7, da er sich aus diesem auch durch Einsetzen der Testfunktion $u^\alpha \phi$ erhalten ließe, wobei man sich vorsichtig überlegen muss, dass es sich dabei auch tatsächlich um eine gültige Testfunktion handelt.

Die große offene Frage ist natürlich, ob $\frac{|Du|}{\sqrt{1+|Du|^2}} |D\chi_{\{u>0\}}| = |D\chi_{\{u>0\}}|$. Immerhin gilt die folgende Abschätzung:

Satz 9. *Es gilt*

$$\int \phi \frac{|Du|}{\sqrt{1+|Du|^2}} |D\chi_{\{u>0\}}| \geq \int \phi |D\chi_{\{u>0\}}|$$

für alle nichtnegativen $\phi \in C_c^1(\Omega)$. Außerdem ist

$$\begin{aligned} & \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\epsilon_j} \int_{\{0 < u < \epsilon_j\}} \phi |Du| dx \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\epsilon_j} \int_{\{0 < u < \epsilon_j\}} \phi \sqrt{1 + |Du|^2} dx \\ &= \int \phi \frac{|Du|}{\sqrt{1 + |Du|^2}} |D\chi_{\{u>0\}}| \end{aligned}$$

für alle $\phi \in C_c^1(\Omega)$ und alle positiven Nullfolgen ϵ_j mit $\{u = \epsilon_j\} \in C^\infty$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir schätzen ab:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon_j} \int_{\{0 < u < \epsilon_j\} \cap \text{ext}^* U_j} \frac{\phi |Du|^2}{\sqrt{1 + |Du|^2}} dx \\ & \leq \frac{1}{\epsilon_j} \int_{\{0 < u < \epsilon_j\} \setminus U_j} \frac{\phi |Du|^2}{\sqrt{1 + |Du|^2}} dx \\ & \leq \frac{1}{\epsilon_j} \int_{\{0 < u < \epsilon_j\} \setminus U_j} \phi |Du| dx \\ & \leq \frac{1}{\epsilon_j} \int_{\{0 < u < \epsilon_j\} \setminus U_j} \phi \sqrt{1 + |Du|^2} dx \\ & = \frac{1}{\epsilon_j} \int_{\{0 < u < \epsilon_j\} \setminus U_j} \phi \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{|Du|^2}{\sqrt{1 + |Du|^2}} + \frac{1}{\alpha} \operatorname{div} \left(\frac{u Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) \right) dx \\ & \leq \frac{1}{\epsilon_j} \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_{\{0 < u < \epsilon_j\} \setminus U_j} \frac{|Du|^2 \phi}{\sqrt{1 + |Du|^2}} dx + \frac{1}{\alpha} \int_{\{u = \epsilon_j\} \cap \text{ext}^* U_j} \frac{u \phi |Du|}{\sqrt{1 + |Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\alpha} \int_{\{0 < u < \epsilon_j\} \setminus U_j} \frac{u Du \cdot D\phi}{\sqrt{1 + |Du|^2}} dx + \frac{\epsilon_j}{\alpha} \|\phi\|_\infty \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* U_j) \right), \end{aligned}$$

wobei wir Gleichung (1.4) zusammen mit einer Abschätzung analog zu Lemma 2 verwendet haben. Zur weiteren Abschätzung starten wir mit

$$u \phi \operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) = \frac{\alpha \phi}{\sqrt{1 + |Du|^2}}$$

multiplizieren mit $\phi \geq 0$, integrieren partiell über $\{\delta < u < \epsilon_j\} \setminus U_j$, lassen $j \rightarrow \infty$ und $\delta \rightarrow 0$ und erhalten

$$\begin{aligned} & \int_{\{0 < u < \epsilon_j\} \setminus U_j} \frac{|Du|^2 \phi}{\sqrt{1 + |Du|^2}} dx \\ & \leq \int_{\{u = \epsilon_j\} \cap \text{ext}^* U_j} \frac{u |Du| \phi}{\sqrt{1 + |Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\{0 < u < \epsilon_j\} \setminus U_j} \frac{u Du \cdot D\phi}{\sqrt{1 + |Du|^2}} dx \\ & \quad + \epsilon_j \|\phi\|_\infty \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* U_j). \end{aligned}$$

Damit folgt weiter

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon_j} \int_{\{0 < u < \epsilon_j\} \cap \text{ext}^* U_j} \frac{\phi |Du|^2}{\sqrt{1 + |Du|^2}} dx \\ & \leq \frac{1}{\epsilon_j} \int_{\{0 < u < \epsilon_j\} \setminus U_j} \phi |Du| dx \\ & \leq \frac{1}{\epsilon_j} \int_{\{0 < u < \epsilon_j\} \setminus U_j} \phi \sqrt{1 + |Du|^2} dx \\ & \leq \frac{1}{\epsilon_j} \left(\int_{\{u = \epsilon_j\} \cap \text{ext}^* U_j} \frac{u \phi |Du|}{\sqrt{1 + |Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\{0 < u < \epsilon_j\} \setminus U_j} \frac{u Du \cdot D\phi}{\sqrt{1 + |Du|^2}} dx \right. \\ & \quad \left. + \epsilon_j \|\phi\|_\infty \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* U_j) \right) \\ & \leq \int_{\{u = \epsilon_j\} \cap \text{ext}^* U_j} \frac{\phi |Du|}{\sqrt{1 + |Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\{0 < u < \epsilon_j\}} |D\phi| dx + \|\phi\|_\infty \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* U_j). \end{aligned}$$

Hier konvergieren mit $j \rightarrow \infty$ sowohl die linke als auch die rechte Seite gegen

$$\int \phi \frac{|Du|}{\sqrt{1 + |Du|^2}} |D\chi_{\{u > 0\}}|$$

und es folgt

$$\begin{aligned} & \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\epsilon_j} \int_{\{0 < u < \epsilon_j\} \setminus U_j} \phi |Du| dx \\ & = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\epsilon_j} \int_{\{0 < u < \epsilon_j\} \setminus U_j} \phi \sqrt{1 + |Du|^2} dx \tag{1.9} \\ & = \int \phi \frac{|Du|}{\sqrt{1 + |Du|^2}} |D\chi_{\{u > 0\}}|. \end{aligned}$$

Für beliebige ϕ folgt die Aussage durch Aufteilen in positive und negative Anteile. Da die Grenzwerte

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\epsilon} \int_{\{0 < u < \epsilon\} \setminus U_j} \phi |Du| dx$$

und

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\epsilon} \int_{\{0 < u < \epsilon\} \setminus U_j} \phi \sqrt{1 + |Du|^2} dx$$

für beliebige $\epsilon > 0$ existieren und die Konvergenz in (1.9) unabhängig von der Wahl beliebiger Teilfolgen aus ϵ_j und U_j ist, gilt auch

$$\begin{aligned} & \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\epsilon_j} \int_{\{0 < u < \epsilon_j\}} \phi |Du| dx \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\epsilon_j} \int_{\{0 < u < \epsilon_j\}} \phi \sqrt{1 + |Du|^2} dx \\ &= \int \phi \frac{|Du|}{\sqrt{1 + |Du|^2}} |D\chi_{\{u > 0\}}|. \end{aligned}$$

Ist nun wieder $\phi \geq 0$, so folgt

$$\begin{aligned} & \int \phi |D\chi_{\{u > 0\}}| \\ & \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{\{0 < u < \epsilon\}} \phi |Du| dx \\ & \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\epsilon_j} \int_{\{0 < u < \epsilon_j\}} \phi |Du| dx \\ & = \int \phi \frac{|Du|}{\sqrt{1 + |Du|^2}} |D\chi_{\{u > 0\}}| \end{aligned}$$

□

Die umgekehrte Abschätzung erscheint wegen unser Wahl der Bezeichnung des mittleren Krümmungsmaßes offensichtlich, allerdings ist es uns nicht gelungen, sie zu beweisen. Ihr Wahrheitswert hängt im Wesentlichen davon ab, ob

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int |D\chi_{\{u > \epsilon\}}| = \int |D\chi_{\{u > 0\}}|,$$

was alles andere als klar ist. Denn da

$$\begin{aligned} & \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int \phi |D\chi_{\{u > \epsilon\}}| \\ & \geq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\{u = \epsilon\}} \phi \frac{|Du|}{\sqrt{1 + |Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} \\ & = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{\{0 < u < \epsilon\}} \phi |Du| dx \\ & = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon \int \phi |D\chi_{\{u > t\}}| dt \\ & \geq \int_0^1 \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int \phi |D\chi_{\{u > \epsilon\}}| dt \\ & = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int \phi |D\chi_{\{u > \epsilon\}}|, \end{aligned}$$

für alle $\phi \geq 0$, gilt

$$\int \phi \frac{|Du|}{\sqrt{1 + |Du|^2}} |D\chi_{\{u > 0\}}| = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int \phi |D\chi_{\{u > \epsilon\}}|$$

für alle $\phi \in C_c^1(\Omega)$, $\phi \geq 0$. In gewisser Hinsicht geht also zwangsläufig $|Du| \rightarrow \infty$ mit $u \rightarrow 0$.

Immerhin bekommen wir den folgenden Satz.

Satz 10. Sei $u \in BV_+^{1+\alpha}(\Omega)$ ein Minimierer von \mathcal{F}^* , dessen Nullstellenmenge sich von außen durch eine Folge offener Mengen mit endlichem Perimeter $E_j \supset \supset \{u = 0\}$ derart annähern lässt, dass

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |E_j \setminus \{u = 0\}| = 0 \text{ und } |D\chi_{E_j}| \rightarrow |D\chi_{\{u=0\}}|, j \rightarrow \infty.$$

Dann gilt $|D\chi_{\{u>0\}}| = \frac{|Du|}{\sqrt{1+|Du|^2}} |D\chi_{\{u>0\}}|$ und

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int \frac{\phi}{\sqrt{1+|Du|^2}} Du \cdot D\chi_{E_j} = \int \phi |D\chi_{\{u=0\}}|$$

für alle $\phi \in C_c^1(\Omega)$.

Beweis. Wir multiplizieren die mittlere Krümmungsgleichung mit $\phi \in C_c^1(\Omega)$ und integrieren partiell über E_j :

$$- \int_{E_j} \frac{Du \cdot D\phi}{\sqrt{1+|Du|^2}} dx = \int_{E_j} \frac{\alpha\phi}{\sqrt{1+|Du|^2}} dx + \int \frac{\phi}{\sqrt{1+|Du|^2}} Du \cdot D\chi_{E_j}.$$

Mit $j \rightarrow \infty$ folgt

$$\begin{aligned} & \lim_{j \rightarrow \infty} \int \frac{\phi}{\sqrt{1+|Du|^2}} Du \cdot D\chi_{E_j} \\ &= - \int_{\{u>0\}} \frac{Du \cdot D\phi}{\sqrt{1+|Du|^2}} dx - \int_{\{u>0\}} \frac{\alpha\phi}{u\sqrt{1+|Du|^2}} dx \\ &= \int \phi \frac{|Du|}{\sqrt{1+|Du|^2}} |D\chi_{\{u>0\}}|. \end{aligned}$$

Gleichzeitig gilt aber

$$\begin{aligned} & \lim_{j \rightarrow \infty} \int \frac{\phi}{\sqrt{1+|Du|^2}} Du \cdot D\chi_{E_j} \\ & \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \int \phi |D\chi_{E_j}| \\ & = \int \phi |D\chi_{\{u>0\}}| \end{aligned}$$

falls $\phi \geq 0$, womit die Behauptung folgt. \square

Die Voraussetzungen des obigen Satzes sind beispielsweise dann erfüllt, wenn $\{u = 0\}$ einfach zusammenhängend ist mit $\partial\{u = 0\} \in C^2$, da man in diesem Fall $E_j = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \{u = 0\}) > \frac{1}{j}\}$ wählen kann. Im Allgemeinen führt diese Wahl jedoch nicht

zur Konvergenz der Perimeter (siehe KRAFT [23] Example 1). In [23] werden jedoch auch einige Bedingungen genannt, unter denen diese erreicht werden kann.

Wir erhalten in diesem Fall:

Satz 11. *Sei u ein Minimierer von \mathcal{F}^* , dessen Nullstellenmenge die Voraussetzung aus Satz 10 erfüllt. Dann ist*

$$\mathcal{H}_u = \mathcal{L}^n \llcorner \frac{\alpha \chi_{\{u>0\}}}{u \sqrt{1 + |Du|^2}} + |D\chi_{\{u>0\}}|.$$

Die Schwierigkeit besteht darin, dass die Mengen $E_j \setminus \{u = 0\}$ von außen approximieren sollen. Die Approximation einer Caccioppoli-Menge mit beliebigen glattberandeten offenen Mengen bei gleichzeitiger Konvergenz des Perimeters ist jedoch immer möglich [2] Theorem 3.42.

1.8 Zusammenhang zwischen der $\frac{1}{2}$ -Hölderstetigkeit einer Lösung und der mittleren Krümmung ihrer Nullstellenmenge

Wie wir in den vorangegangenen Abschnitten gesehen haben, ist sowohl die variative mittlere Krümmung des Randes der Koinzidenzmenge $\{u = 0\}$ als auch die des Graphen von u in $\{u > 0\}$ durch den Ausdruck

$$\frac{\alpha \chi_{\{u>0\}}}{u \sqrt{1 + |Du|^2}}$$

gegeben. Nehmen wir nun an, dieser sei gleichmäßig von Null weg beschränkt, sodass also die klassische mittlere Krümmung von $\partial\{u = 0\}$ nach Innen strikt positiv sei, dann ist auch

$$u \sqrt{1 + |Du|^2} \leq C$$

für eine Konstante $C > 0$ und insbesondere

$$u |Du| \leq C$$

in ganz Ω . Setzen wir $v = u^2$, so folgt $Dv = 2uDu$ und damit

$$|Dv| \leq \frac{C}{2},$$

d.h. $v \in C_{loc}^{0,1}(\Omega)$. Dies impliziert

$$\begin{aligned} |u(x) - u(\xi)| &= |\sqrt{v(x)} - \sqrt{v(\xi)}| \\ &\leq |v(x) - v(\xi)|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{L_v} |x - \xi|^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

und folglich $u \in C_{loc}^{0, \frac{1}{2}}(\Omega)$.

Daraus ergibt sich die Vermutung, dass Minimierer genau dann $\frac{1}{2}$ -Hölderstetig sind, falls die innere mittlere Krümmung ihrer Nullstellenmenge strikt positiv ist.

Wie sich im Folgenden zeigen wird, ist die eigentlich entscheidende Eigenschaft gar nicht die $\frac{1}{2}$ -Hölderstetigkeit von u , sondern die Lipschitzstetigkeit von u^2 , eine stärkere Bedingung. Diese ist es auch, die in den Beweisen der Regularitätssätze 14 und 16 tatsächlich gezeigt wird.

Satz 12. Sei u ein Minimierer von \mathcal{F}^* in Ω und $\partial\{u > 0\} \in C^2$. Dann erfüllt die innere mittlere Krümmung $H \in C^0(\partial\{u = 0\})$ die folgende Abschätzung:

$$\inf_{\{u > 0\}} \frac{\alpha}{u \sqrt{1 + |Du|^2}} \leq \inf_{\partial\{u > 0\}} H$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$, $\phi \in C_c^1(\Omega)$ nichtnegativ und ν eine stetig differenzierbare Fortsetzung der äußeren Einheitsnormalen ν von $\partial\{u = 0\}$. Dann ist

$$\Phi_\epsilon: \Omega \rightarrow \Omega, \quad \Phi_\epsilon: x \mapsto x + \epsilon \phi(x) \nu(x)$$

eine Variation von $\{u > 0\}$ nach Innen. Es folgt nach der bekannten Formel für die erste Variation des Perimeters (siehe Theorem 10.4 aus [20]) und Satz 6, dass

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\{u > 0\}} H \phi \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\int |D\chi_{\Phi_\epsilon(\{u > 0\})}| - \int |D\chi_{\{u > 0\}}| \right) \\ &\geq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{\{u > 0\} \setminus \Phi_\epsilon(\{u > 0\})} \frac{\alpha}{u \sqrt{1 + |Du|^2}} \, dx \end{aligned}$$

Setzen wir nun abkürzend $f := \frac{\alpha}{u \sqrt{1 + |Du|^2}}$, dann folgt damit

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\{u > 0\}} H \phi \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\geq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{\{u > 0\} \setminus \Phi_\epsilon(\{u > 0\})} \|f\|_{-\infty, \{u > 0\}} \, dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\|f\|_{-\infty, \{u > 0\}}}{\epsilon} \left(|\{u > 0\}| - \int_{\{u > 0\}} |\det D\Phi_\epsilon| \, dx \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\|f\|_{-\infty, \{u > 0\}}}{\epsilon} \left(\int_{\{u > 0\}} 1 \, dx - \int_{\{u > 0\}} 1 + \epsilon \operatorname{div}(\phi \nu) \, dx \right) \\ &= - \|f\|_{-\infty, \{u > 0\}} \int_{\{u > 0\}} \operatorname{div}(\phi \nu) \, dx \\ &= \|f\|_{-\infty, \{u > 0\}} \int_{\partial\{u > 0\}} \phi \, d\mathcal{H}^{n-1} \end{aligned}$$

sodass also

$$\frac{\int_{\partial\{u>0\}} H\phi \, d\mathcal{H}^{n-1}}{\int_{\partial\{u>0\}} \phi \, d\mathcal{H}^{n-1}} \geq \|f\|_{-\infty, \{u>0\}}.$$

Nun lässt sich zu jedem beliebigem $x_0 \in \partial\{u > 0\}$ eine Folge um x_0 radialsymmetrischer $\phi_j \in C_c^\infty(\Omega)$ derart wählen, dass

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\int_{\partial\{u>0\}} H\phi_j \, d\mathcal{H}^{n-1}}{\int_{\partial\{u>0\}} \phi_j \, d\mathcal{H}^{n-1}} = H(x_0).$$

Insbesondere gilt

$$\inf_{\partial\{u>0\}} H \geq \|f\|_{-\infty, \{u>0\}}.$$

□

So erhalten wir daraus zumindest eine Hälfte unserer zu Beginn dieses Abschnitts aufgestellten Vermutung.

Satz 13. Sei $\partial\{u > 0\} \in C^2$ und $u^2 \in C^{0,1}(\Omega)$. Dann existiert eine Konstante $c > 0$, die nur von der Lipschitzkonstanten von u^2 abhängt, mit

$$\inf_{\partial\{u>0\}} H \geq c.$$

Beweis. Aus $u^2 \in C^{0,1}(\Omega)$ folgt, dass $u|Du| \leq C$ für ein $C > 0$ und damit

$$\frac{\alpha}{u\sqrt{1+|Du|^2}} \geq c$$

mit einer Konstanten $c > 0$. Satz 12 liefert dann die Behauptung.

□

1.9 Rotationssymmetrische Lösungen

Eine rotationssymmetrische Lösung u des Variationsproblems

$$\mathcal{F}^* \rightarrow \min,$$

die mehr als eine Nullstelle hat, muss stets $\partial\{u > 0\} \in C^2$ und $\|H\|_{-\infty, \partial\{u=0\}} > 0$ erfüllen, sodass die Vermutung naheliegt, dass für solche Lösungen stets $u \in C^{0, \frac{1}{2}}(\Omega)$ erfüllt sein muss. Tatsächlich fand DIERKES [7] [10] bereits Beispiele rotationssymmetrischer Lösungen, die in $C^{0, \frac{1}{2}}(\Omega) \setminus C^{0, \gamma}(\Omega)$ für alle $\gamma > \frac{1}{2}$ liegen, sodass $C^{0, \frac{1}{2}}$ -Regularität sogar optimal wäre.

Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis, dass *alle* rotationssymmetrischen Minimierer u $\frac{1}{2}$ -Hölderstetig sind. Wir werden später das allgemeinere Resultat beweisen, dass stetige Lösungen u in \mathcal{H} -konvexen Gebieten in $C^{0, \frac{1}{2}}$ liegen, was dieses Ergebnis beinhaltet. Da sich die Beweise allerdings erheblich unterscheiden, werden wir den Spezialfall trotzdem ausführen.

Für den Nachweis der Hölderstetigkeit benötigen wir noch das folgende elementare Lemma:

Lemma 6. Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \infty \text{ und } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^3} \text{ existiere in } \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}.$$

Dann ist

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^3} = 0.$$

Beweis. Die Annahmen an f und die Regel von l'Hôpital implizieren, dass

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x - \frac{f(x)}{f'(x)} - a}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{x - a}{f(x)} - \frac{1}{f'(x)} \right) = 0.$$

Da sowohl Zähler als auch Nenner des obigen Ausdrucks gegen 0 konvergieren, gilt nach l'Hôpitals Regel, dass

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{d}{dx} \left(x - \frac{f(x)}{f'(x)} - a \right)}{f'(x)} = 0,$$

sofern der Grenzwert überhaupt existiert. Und er existiert, da

$$\frac{d}{dx} \left(x - \frac{f(x)}{f'(x)} - a \right) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}.$$

□

Satz 14. Sei $u \in BV_+^{1+\alpha}(B)$ ein rotationssymmetrischer Minimierer von \mathcal{F}^* in der Kugel $B = B_R(0)$ zu konstanten Randwerten $\psi = C > 0$. Dann ist $u^2 \in C^{0,1}(B)$ und insbesondere $u \in C^{0,\frac{1}{2}}(B)$.

Beweis. Wir werden im Folgenden annehmen, dass $\{u > 0\}$ nicht leer ist. Weil die singuläre Menge von u höchstens $(n-7)$ -dimensional ist, impliziert die Radialsymmetrie $u \in C^0 \cap C^\omega(\{u > 0\} \setminus \{0\})$. Zunächst werden wir davon ausgehen, dass 0 auch ein regulärer Punkt von u ist. In $\{u > 0\}$ löst u die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\alpha u^{\alpha-1} |Du|^2 + u^\alpha \Delta u - u^\alpha \frac{Du D^2 u \cdot Du}{1 + |Du|^2} = \alpha u^{\alpha-1} (1 + |Du|^2).$$

Indem wir $u(x) = U(|x|)$ und $r = |x|$ setzen, bekommen wir

$$|Du|^2 = U_r^2, \quad \Delta u = \left(U_{rr} + \frac{n-1}{r} U_r \right) \quad \text{und} \quad Du D^2 u \cdot Du = U_{rr} U_r^2.$$

Die ELG wird also zu

$$U \left(U_{rr} \left(1 - \frac{U_r^2}{1 + U_r^2} \right) + \frac{n-1}{r} U_r \right) = \alpha.$$

Setzen wir nun noch $V = U^2$, $U_r = \frac{V_r}{2\sqrt{V}}$, $U_{rr} = \frac{V_{rr}}{2\sqrt{V}} - \frac{V_r}{4V^{\frac{3}{2}}}$, erhalten wir

$$\frac{V_{rr} V}{\left(V + \frac{1}{4} V_r^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2} \frac{V_r}{\left(V + \frac{1}{4} V_r^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{n-1}{r} \frac{V_r}{\sqrt{V + \frac{1}{4} V_r^2}} + \frac{2\alpha}{\sqrt{V + \frac{1}{4} V_r^2}}. \quad (1.10)$$

Aufgrund der Tatsache, dass u kein inneres lokales Maximum annehmen kann (da sich die Euler-Lagrange-Gleichung zu $\Delta u = \frac{1}{u}$ reduziert, falls $|Du| = 0$), ist die Menge $\{u = 0\}$ nur eine Kugel mit Mittelpunkt 0.

Wir zeigen nun, dass V Lipschitz-stetig ist. Denn bei Annahme des Gegenteils existierte eine monoton fallende Folge $r_k \rightarrow r_0$, wobei $\overline{B_{r_0}} = \{u = 0\}$, mit $V(r_k) \rightarrow 0$ aufgrund der Stetigkeit von V , aber $V_r(r_k) \rightarrow \infty$. Aus Gleichung 1.10 lässt sich nun folgern, dass immer, wenn $V_r(r)$ groß genug ist, $V_{rr}(r) < 0$ sein muss. Wegen der Existenz der Folge r_k , existiert mindestens ein solches r und wir können annehmen, dass V_r in einem Intervall (r_0, r_1) monoton fallend ist. Das bedeutet $\lim_{r \rightarrow r_0} V_r(r) = \infty$. Bilden wir den Grenzwert auf der rechten Seite, so sehen wir

$$\lim_{r \rightarrow r_0} \frac{V_{rr} V}{\left(V + \frac{1}{4} V_r^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2(n-1)}{r_0}.$$

Aber dann ist auch

$$\lim_{r \rightarrow r_0} \frac{V_{rr} V}{V_r^3} = -\frac{(n-1)}{4r_0} \neq 0,$$

ein Widerspruch zu Lemma 6. Das beendet den Beweis für in 0 reguläre u . Ist nun 0 kein regulärer Punkt, dann gilt notwendigerweise $u(0) = 0$. Die erneute Wahl einer

monoton fallenden Folge $r_k \rightarrow 0$ mit $V_r(r_k) \rightarrow \infty$ liefert wieder, da V beschränkt ist, dass $V_r(r)$ für alle hinreichend kleinen r positiv ist. Das impliziert die Stetigkeit von V in 0 und wir können wie oben fortfahren, wobei wir r_0 durch 0 und $\frac{1}{r_0}$ durch ∞ ersetzen. \square

1.10 Parametrische Lösungen als Graphen

Eine weitere interessante Frage ist es, ob sich parametrische, α -minimale Flächen in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$, deren Ränder sich als Graph einer Funktion ϕ über dem Rand eines Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschreiben lassen, selbst als Graph einer Funktion über Ω oder der konvexen Hülle von Ω darstellen lassen. Im Fall $n = 2$ wurde dies von DIERKES [8] untersucht, der herausfand, dass dies in der Tat der Fall ist, wenn Ω konvex ist. Genauer bewies er folgenden Satz:

Satz 15 (Dierkes). *Sei $X = X(u, v) \in C^\omega(B) \cap C^0(\bar{B})$, $B = B_1(0)$, eine Lösung des Systems*

$$\Delta X = \frac{1}{2} \frac{\omega'}{\omega} |\nabla X|^2 - X_u \left(\frac{\omega'}{\omega} X_u \right) - X_v \left(\frac{\omega'}{\omega} X_v \right)$$

mit $\omega = X_3$, $\omega' = (0, 0, 1)$. Weiterhin sei $X|_{\partial B} \rightarrow \Gamma$ ein Homöomorphismus auf eine vorgegebene Randkurve Γ , welche die Darstellung

$$\Gamma = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) : \xi_3 = \phi(\xi_1, \xi_2), (\xi_1, \xi_2) \in \partial K, K \subset \mathbb{R}^2 \text{ abgeschlossen und streng konvex}\}$$

besitze. Dann besitzt $X = X(u, v)$ die nichtparametrische Darstellung $z(x_1, x_2)$, welche eine analytische Lösung von

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{zz_{x_i}}{\sqrt{1 + |\nabla z|^2}} \right\} = \sqrt{1 + |\nabla z|^2}, (x_1, x_2) \in \text{int } K$$

ist.

Inspiziert von diesem Theorem, wollen wir damit beschäftigen, ob sich diese Frage in dem von uns betrachteten Kontext auch dann noch positiv beantworten lässt, wenn Ω nicht konvex ist, und wenn nicht, ob sich unsere Fläche wenigstens noch als Graph über der konvexen Hülle von Ω oder überhaupt irgendeiner geeigneten Menge darstellen lässt.

Wir werden in diesem Abschnitt ein Beispiel konstruieren, welches zeigt, dass dies im Allgemeinen *nicht* möglich ist, d.h. es gibt ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (nicht konvex) mit Randwerten $\phi \in C^\infty(\partial\Omega)$ derart, dass eine parametrische Lösung des zugehörigen Variationsproblems geringere Energie hat als jeder Graph in Ω mit Randwerten ϕ .

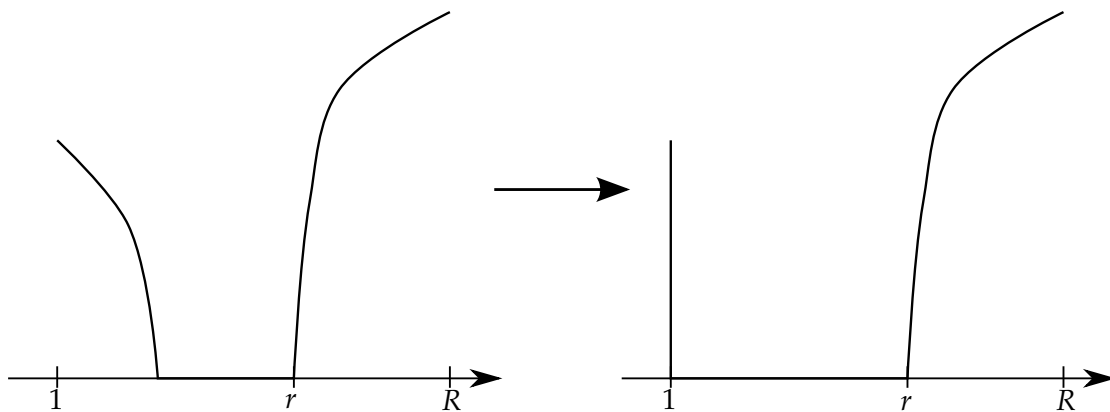


Abbildung 1.2: Die Projektion des Graphen von $u \upharpoonright B_r$ auf den Zylinder $B_1 \times \mathbb{R}$ kann die Energie nicht vergrößern.

Sei $A_R := B_R \setminus \overline{B_1}$, $\phi := \sqrt{\frac{1}{n-1}}$, $\alpha = 1$ und u ein radialsymmetrischer Minimierer des zugehörigen Funktionals \mathcal{F}^* . Wegen Satz 14, der Tatsache, dass B_R \mathcal{H} -konvex ist und Satz 1 aus [9], ist $u \in C^{0, \frac{1}{2}}(A_R) \cap C^0(\overline{B_R} \setminus \overline{B_1})$. Außerdem ist, falls

$$\sqrt{\frac{1}{n-1}} = \sup_{\partial A_R} \phi < \frac{|A_R|}{\mathcal{H}^{n-1}(\partial A_R)} = \frac{1}{n} \frac{R^n - 1}{1 + R^{n-1}},$$

$|\{u = 0\}| > 0$. Wählen wir also R so groß, dass dies erfüllt ist. Sei $1 < r < R$ die kleinste Zahl mit $u(x) = 0$ für ein x mit $|x| = r$. Wir zerlegen nun A_R in drei Teile:

$$A_1 = \{x \in A_R : |x| \leq r \text{ und } u(x) > 0\},$$

$$A_2 = \{x \in A_R : u(x) = 0\},$$

$$A_3 = \{x \in A_R : u(x) > 0 \text{ und } |x| > r\}.$$

Alle drei sind zusammenhängend. A_2 und A_3 sind nicht leer. Wir behaupten nun zusätzlich, dass A_1 leer ist. Um das einzusehen, projiziere man den Graphen von u in $B_r \setminus B_1$ auf den Zylinder $B_1 \times \mathbb{R}$, was die Energie nicht erhöht und tatsächlich sogar verkleinert, falls $u(x) > 0$ für ein $|x| < r$ (Dass dies wirklich so ist, wird im nächsten Kapitel im Beweis des Satzes 19 nachgewiesen), d.h. man ersetze u durch die Funktion

$$x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } |x| \leq r \\ u(x), & \text{sonst} \end{cases},$$

welche ebenfalls ein Minimierer sein muss.

Das liefert uns ein ungefähres Bild davon, wie Minimierer auf A_R aussehen müssen.

Konkrete Beispiele derartiger minimierender Funktionen wurden bereits von DIERKES [10] Theorem 3 gefunden. Wir wollen nun eine solche minimierende Dierkes-Funktion $D : B_R \rightarrow \mathbb{R}$ auswählen, welche ihre Randwerte $\delta > 0$ auf ∂B_R stetig annimmt und in

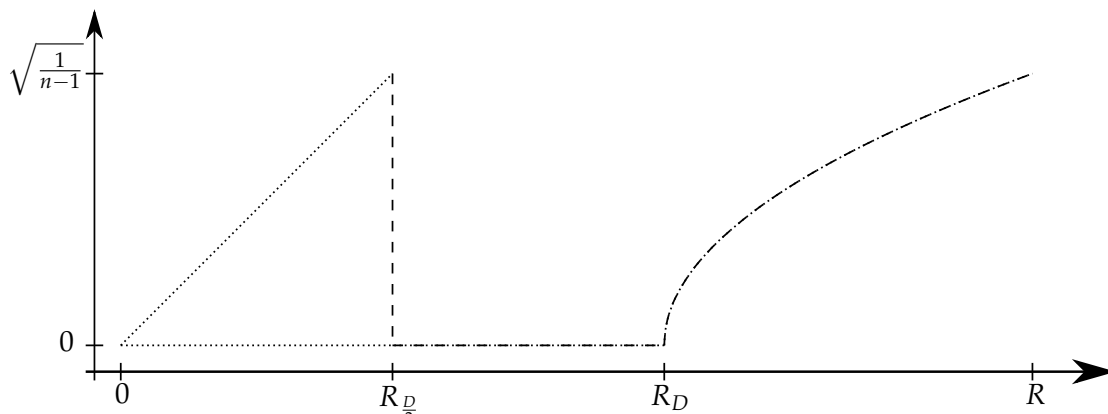


Abbildung 1.3: Die Fläche $\text{graph}(k) \cup B_{R_D} \times \{0\} \cup \text{graph}(D \upharpoonright B_R \setminus \overline{B_{R_D/2}})$ (gepunktet) hat geringere Energie als $\text{graph}(D) \cup \partial B_1 \times [0, \sqrt{\frac{1}{n-1}}]$ (gestrichelt).

einer kleineren Kugel $\overline{B_{R_D}} = \{D = 0\}$ verschwindet. Diese Funktion löst das Minimierungsproblem zu \mathcal{F}^* auf $B_R \setminus \overline{B_{R_D/2}}$ zu Randwerten

$$\phi = \begin{cases} \delta, & \text{auf } \partial B_R \\ 0, & \text{auf } \partial B_{R_D/2} \end{cases},$$

da sie nach obiger Untersuchung dafür nur mit jeder anderen Funktion u verglichen werden muss, die im stetigen Sinne dieselben Randwerte auf $B_R \setminus \overline{B_{R_D/2}}$ wie D hat.

Jetzt setzen wir noch

$$k(x) := \sqrt{\frac{1}{n-1}}|x|$$

für $x \in B_{R_D/2}$. Damit ist $\text{graph}(k) \cup B_{R_D} \times \{0\} \cup \text{graph}(D \upharpoonright B_R \setminus \overline{B_{R_D/2}})$ eine zulässige Vergleichsfläche für das Plateauprobem und sie hat geringere Energie als jede Vergleichsfunktion für das Dirichletproblem auf $B_R \setminus \overline{B_{R_D/2}}$, da

$$\int_{B_{R_D/2}} k \sqrt{1 + |Dk|^2} dx = \frac{n^{\frac{3}{2}} \omega_n}{(n-1)(n+1)} \left(\frac{R_D}{2}\right)^{n+1},$$

was für $n \geq 2$ echt kleiner ist als die Energie der Zylinderwand $\partial B_{R_D/2} \times (0, \sqrt{\frac{1}{n-1}} \frac{R_D}{2})$:

$$n \omega_n \left(\frac{R_D}{2}\right)^{n-1} \int_0^{\sqrt{\frac{1}{n-1}} \frac{R_D}{2}} z dz = \frac{n \omega_n}{2(n-1)} \left(\frac{R_D}{2}\right)^{n+1}.$$

1.11 Hölderstetigkeit im allgemeinen Fall

Wir werden in diesem Abschnitt unter gewissen Voraussetzungen zeigen, dass stetige Minimierer u von \mathcal{F}^* stets global $\frac{1}{2}$ -Hölderstetig sind. Dazu verwenden wir eine Methode von KOREVAAR und SIMON [22], die von diesen zum Nachweis der globalen $\frac{1}{2}$ -Hölderstetigkeit von Lösungen der mittleren Krümmungsgleichung

$$\operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right) = H(x, u)$$

verwendet wurde. Die dort vorausgesetzten Bedingungen an H sind in unserem Fall allerdings nicht erfüllt, sodass sich dieses Ergebnis nicht direkt verwenden lässt.

Satz 16. Sei $u \in C^0(\bar{\Omega})$ ein Minimierer von \mathcal{F}^* zu Randwerten $\psi \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ mit $\psi > 0$ auf $\partial\Omega$. Dann ist $u^2 \in C^{0,1}(\{u \leq \delta\})$ für alle $\delta > 0$ mit $\delta < \inf_{\partial\Omega} \psi$ und zudem $u \in C^{0, \frac{1}{2}}(\bar{\Omega})$.

Beweis. Wir werden in diesem Beweis auf dem Graphen von $u \upharpoonright \{u > 0\}$ arbeiten und rechnen in den Koordinaten $x = \operatorname{proj}(x, u(x))$. Mit ∇ und Δ bezeichnen wir die tangentiellen Gradienten- und Laplace-Operatoren auf $\operatorname{graph}(u)$, sodass also für ein beliebiges $f \in C^2(\{u > 0\})$:

$$\nabla f = (Df, 0) - D_i f v^i v = \left(Df - \frac{Df \cdot Du}{1+|Du|^2} Du, \frac{Df \cdot Du}{1+|Du|^2} \right) \quad (1.11)$$

und damit

$$|\nabla f|^2 = |Df|^2 - (D_i f v^i)^2 \quad (1.12)$$

sowie

$$\Delta f = g^{ij} D_i D_j f + H v^i D_i f \quad (1.13)$$

wobei wir mit $v = \frac{(-Du, 1)}{\sqrt{1+|Du|^2}}$ die obere Einheitsnormale an $\operatorname{graph}(u)$, mit $g^{ij} = \delta^{ij} - v^i v^j$ die Inverse der ersten Fundamentalform und mit $H(x) = -\nabla_i v^i = \frac{\alpha}{u \sqrt{1+|Du|^2}}$ die mittlere Krümmung des Graphen von u bezeichnen wollen. Wegen (1.13) gilt auch

$$\Delta u = H v^{n+1}. \quad (1.14)$$

Außerdem gilt noch die Jacobigleichung (vgl. [15] Kapitel 3.4, Proposition 2):

$$\Delta v^{n+1} = -v^{n+1} |A|^2 - e_{n+1} \cdot \nabla H, \quad (1.15)$$

wobei $|A| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} |\nabla v^i|^2}$ die Norm der zweiten Fundamentalform von $\operatorname{graph}(u)$ bezeichne. Für ∇u gilt

$$\nabla u = \left(\frac{Du}{1+|Du|^2}, \frac{|Du|^2}{1+|Du|^2} \right),$$

sodass

$$|\nabla u|^2 = \frac{|Du|^2}{1 + |Du|^2} = e_{n+1} \cdot \nabla u. \quad (1.16)$$

Sei nun $\delta > 0$ eine Zahl derart, dass $\{u < \delta\} \subset\subset \Omega$. Da $u \in C^0(\overline{\Omega})$ existiert ein solches δ , es hängt aber im Allgemeinen von der Lösung u ab. δ wird im Verlauf des Beweises nicht mehr verändert. Zudem sei $\phi \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ derart, dass $\phi = 0$ in $\{u < \delta\}$, $\phi = \psi$ in einer Umgebung von $\partial\Omega$ und $\|\phi\|_{C^2(\mathbb{R}^n)} \leq \gamma = \gamma(\delta, \psi) < \infty$. Nun definieren wir die Funktion $\eta: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$,

$$\eta(t) := (e^{Kt} - 1)e^{-2\gamma K}$$

mit einer noch zu wählenden Konstanten $K > 0$. Bezeichnen wir mit $(u - \phi)^+$ das Maximum von $u - \phi$ und 0, so ist offenbar $0 \leq \eta((u - \phi)^+) \leq 1$, da nach dem Maximumprinzip $u \leq \gamma$ gelten muss. Sei nun $\epsilon > 0$ beliebig und M das Maximum der Funktion

$$f(x) := \frac{\eta((u - \phi)^+)}{v^{n+1} + \epsilon}$$

auf $\overline{\{u > 0\}}$. Wegen des ϵ im Nenner ist f stetig auf $\overline{\{u > 0\}}$, nichtnegativ, $f = 0$ auf $\partial\{u > 0\}$ und positiv mindestens in $\{0 < u < \delta\}$, sodass f sein Maximum M in einem Punkt $x_0 \in \{u > 0\}$ annehmen muss. Dort gilt also für die Funktion

$$\Psi(x) := \eta((u - \phi)^+) - M(v^{n+1} + \epsilon) \leq 0,$$

dass

$$\Psi(x_0) = 0, \quad \nabla\Psi(x_0) = 0, \quad \text{und} \quad \Delta\Psi(x_0) \leq 0. \quad (1.17)$$

Wir berechnen:

$$\nabla\Psi = \eta'\nabla(u - \phi) - M\nabla v^{n+1} = 0 \quad (1.18)$$

in x_0 (Offenbar ist in x_0 $u > \phi$). Da u in $\{u > 0\}$ die Differentialgleichung

$$H = \frac{\alpha v^{n+1}}{u} \quad (1.19)$$

löst, gilt dort auch $v^{n+1} = \frac{uH}{\alpha}$, also

$$\nabla v^{n+1} = \frac{1}{\alpha}(\nabla u H + u \nabla H).$$

Eingesetzt in (1.18) ergibt dies

$$\eta'\nabla(u - \phi) - \frac{M}{\alpha}(\nabla u H + u \nabla H) = 0,$$

bzw. nach Umformung

$$\nabla H = \frac{1}{Mu} (\alpha\eta'\nabla(u - \phi) - MH\nabla u). \quad (1.20)$$

Nun berechnen wir

$$\begin{aligned} \Delta\Psi &= \eta''|\nabla(u - \phi)|^2 + \eta'\Delta(u - \phi) - M\Delta v^{n+1} \\ &\quad \text{unter Verwendung von (1.14) und (1.15):} \\ &= \eta''|\nabla(u - \phi)|^2 + \eta'Hv^{n+1} - \eta'\Delta\phi + M(v^{n+1}|A|^2 + e_{n+1} \cdot \nabla H) \\ &\quad \text{unter Verwendung von (1.19) und (1.20):} \\ &= \eta''|\nabla(u - \phi)|^2 + \alpha\eta'\frac{(v^{n+1})^2}{u} - \eta'\Delta\phi + \frac{e_{n+1}}{u} \cdot (\alpha\eta'\nabla(u - \phi) - MH\nabla u) \\ &\quad + Mv^{n+1}|A|^2 \end{aligned}$$

Wir verwenden (1.16) und (1.19):

$$\begin{aligned} &= \eta''|\nabla(u - \phi)|^2 + \alpha\eta'\frac{(v^{n+1})^2}{u} - \eta'\Delta\phi + \alpha\eta'\frac{|\nabla u|^2}{u} - \alpha\eta'\frac{e_{n+1} \cdot \nabla\phi}{u} \\ &\quad - \alpha\frac{M|\nabla u|^2}{u^2}v^{n+1} + M\nabla^{n+1}|A|^2 \\ &\quad (\text{Man beachte, dass } (v^{n+1})^2 + |\nabla u|^2 = 1.) \\ &= \eta''|\nabla(u - \phi)|^2 + \alpha\frac{\eta'}{u} - \eta'\Delta\phi - \alpha\eta'\frac{e_{n+1} \cdot \nabla\phi}{u} - \alpha\frac{Mv^{n+1}}{u^2}|\nabla u|^2 + Mv^{n+1}|A|^2 \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Jetzt ist $\Psi(x_0) = 0$, sodass dort

$$v^{n+1} = \frac{\eta - M\epsilon}{M} \leq \frac{1}{M} - \epsilon \leq \frac{1}{M}$$

oder äquivalent dazu $\sqrt{1 + |Du|^2} \geq M$. Zudem gilt nach (1.12)

$$\begin{aligned} &|\nabla(u - \phi)|^2 \\ &= |D(u - \phi)|^2 - \frac{|Du \cdot D(u - \phi)|^2}{1 + |Du|^2} \\ &= |Du|^2 - 2Du \cdot D\phi + |D\phi|^2 - \frac{|Du|^4 - 2|Du|^2 Du \cdot D\phi + (Du \cdot D\phi)^2}{1 + |Du|^2} \\ &= \frac{|Du|^2 - 2Du \cdot D\phi + |D\phi|^2 + |Du|^2|D\phi|^2 - (Du \cdot D\phi)^2}{1 + |Du|^2} \\ &\geq \frac{|Du|^2 - 2\gamma|Du|}{1 + |Du|^2} \\ &\rightarrow 1, |Du| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Es existiert also eine nur von γ abhängige Konstante M_0 , sodass im Fall $M > M_0$ auch $|\nabla(u - \phi)|^2 > \frac{1}{2}$ gelten müsste. Nehmen wir nun an, es wäre $M > M_0$. Dann können

wir weiter abschätzen:

$$\eta'' + 2\alpha \frac{\eta'}{u} - 2\eta' \left(\Delta\phi + \alpha \frac{e_{n+1} \nabla\phi}{u} \right) - 2\alpha \frac{\eta}{u^2} \leq 0,$$

da im Punkt x_0 : $-Mv^{n+1} = -\eta + M\epsilon \geq -\eta$. Nehmen wir nun zunächst auch noch an, dass $x_0 \in \{u < \delta\}$. Dort ist $\phi \equiv 0$, d.h.

$$u^2 \eta'' + 2\alpha u \eta' - 2\alpha \eta \leq 0$$

bzw.

$$(u^2 K^2 + 2\alpha u K - 2\alpha) e^{Ku} + 2\alpha \leq 0$$

$s := Ku$ erfüllt also die Ungleichung

$$(2\alpha - 2\alpha s - s^2) e^s \geq 2\alpha.$$

Diese ist aber nur für $s = 0$ erfüllt. Da $s > 0$ ist dies ein Widerspruch und es muss $x_0 \in \{u \geq \delta\}$ oder $M \leq M_0$ gelten. Nehmen wir nun weiterhin an, dass $M > M_0$ und dann also $x_0 \in \{u \geq \delta\}$. Wegen (1.13), (1.11), (1.19) und $u(x_0) \geq \delta$ ist

$$\left| \Delta\phi + \alpha \frac{e_{n+1} \nabla\phi}{u} \right| \leq C = C(\gamma, \delta).$$

So folgt also

$$\eta'' - 2C\eta' - 2\alpha \frac{\eta}{u^2} \leq 0,$$

was

$$\left(K^2 - 2CK - \frac{2\alpha}{\delta^2} \right) e^{K(u-\phi)^+} \leq \frac{-2\alpha}{\gamma^2}$$

impliziert. Wählen wir K nun so groß, dass $K^2 - 2CK - 2\frac{\alpha}{\delta^2} > 0$, so folgt

$$0 < -\frac{2\alpha}{\gamma^2},$$

ein Widerspruch. Es muss also $M \leq M_0$ gelten und demnach

$$\frac{\eta((u-\phi)^+)}{v^{n+1} + \epsilon} \leq M_0. \quad (1.21)$$

Indem wir dieses Verfahren nun noch einmal mit

$$g(x) := \frac{\eta((\phi-u)^+)}{v^{n+1} + \epsilon}$$

anstelle von f durchführen, erhalten wir die die Abschätzung (1.21) auch für $(\phi-u)^+$. Hier ist schon vorab klar, dass das Maximum M von g auf $\{u > \delta\}$ angenommen werden muss, da g auch auf $\{0 < u < \delta\}$ verschwindet. Wieder definieren wir

$$\Phi(x) := \eta((\phi-u)^+) - M(v^{n+1} + \epsilon) \leq 0.$$

Bei der Berechnung von $\Delta\Phi$ ändert sich gegenüber $\Delta\Psi$ nur das Vorzeichen des Terms $\frac{\alpha}{u}\eta'$, der sich aber auch durch $\frac{\alpha}{\delta}\eta'$ abschätzen lässt. Der Rest verläuft völlig analog zum obigen Fall und es folgt insgesamt, dass

$$\frac{\eta(|u - \phi|)}{\nu^{n+1} + \epsilon} \leq M_0$$

für alle $\epsilon > 0$. Mit $\epsilon \rightarrow 0$ folgt also

$$\eta(|u - \phi|)\sqrt{1 + |Du|^2} \leq M_0.$$

Folglich ist

$$|u - \phi||D(u - \phi)| \leq \frac{1}{K}e^{2\gamma K}\eta(|u - \phi|)(\sqrt{1 + |Du|^2} + |D\phi|) \leq \frac{1}{K}e^{2\gamma K}(M_0 + \gamma).$$

Die Funktion $|u - \phi|$ lässt sich stetig durch 0 außerhalb von $\{u > 0\}$ fortsetzen und es folgt $(u - \phi)^2 \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$, was, da die Quadratwurzel $\frac{1}{2}$ -Hölderstetig ist, $(u - \phi) \in C^{0,\frac{1}{2}}(\bar{\Omega})$ impliziert. Da $\phi \in C^2$ ist also auch $u \in C^{0,\frac{1}{2}}(\bar{\Omega})$. Die Behauptung $u^2 \in C^{0,1}(\{u \leq \delta\})$ folgt, da $\phi \equiv 0$ auf dieser Menge ist. \square

Die Bedingung der stetigen Annahme der Randwerte an u in Satz 16 ist laut DIERKES [9] erfüllt, wenn Ω nichtnegative innere mittlere Krümmung besitzt. Auf die innere Stetigkeit von u ließe sich durch die Voraussetzung $n \leq 6$ nach BEMELMANS und DIERKES [4] schließen. Eine lokale Variante von Satz 16 erhält man, indem man das Gebiet Ω geringfügig verkleinert:

Satz 17. Sei $u \in C^0(\Omega)$ ein Minimierer von \mathcal{F}^* in Ω mit $\{u < \delta\} \subset\subset \Omega$ für ein $\delta > 0$. Dann ist $u^2 \in C^{0,1}(\{u < \delta\})$.

Beweis. Wende Satz 16 auf $\{u < \delta\}$ anstelle von Ω an, wobei δ so gewählt sei, dass $\partial\{u < \delta\} \in C^2$ und wähle als Randwerte $\psi = u$ in einer Umgebung von $\partial\{u < \delta\}$. \square

In Satz 13 lässt sich die Voraussetzung der Lipschitzstetigkeit von u^2 durch einfache Stetigkeit von u ersetzen:

Satz 18. Sei u ein Minimierer von \mathcal{F}^* in Ω mit $\partial\{u > 0\} \in C^2$ und $\{u = 0\}$ kompakt, sowie $u \in C^0(\Omega)$. Dann existiert eine Konstante $c = c(\psi, \text{dist}(\{u = 0\}, \partial\Omega)) > 0$ mit

$$\|H\|_{-\infty, \partial\{u > 0\}} \geq c.$$

Jedes Beispiel einer stetigen Lösung u müsste also am Punkt der Unstetigkeit eine Singularität des Randes der Nullstellenmenge oder verschwindende mittlere Krümmung dessen aufweisen.

Das parametrische Problem

2.1 Formulierung für rektifizierbare Ströme

Für ein vorgegebenes Hindernis $L \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, sodass $\mathbb{R}_-^{n+1} := \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : z < 0\} \subset L$, eine Konstante $\alpha \geq 1$ und einen Randstrom $S \in \mathcal{R}_{n-1}(\mathbb{R}^{n+1})$, $\partial S = 0$, $\text{spt } S \subset \mathbb{R}_+^{n+1} := \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : z > 0\}$, wollen wir das Funktional

$$\Phi[R] = \int |z|^\alpha d\|R\|(x, y)$$

minimieren, wobei R in der Klasse

$$\mathcal{C} = \{R \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+1}) : \text{spt}(R) \cap L = \emptyset, \partial R = S, \text{spt } R \text{ kompakt}\}$$

liegen soll.

Lemma 7. Φ ist schwach unterhalbstetig in $\mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+1})$.

Beweis. Zu vorgegebenem $R \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+1})$ können wir $\Phi[R] = \mathbb{M}(R \llcorner z^\alpha)$ schreiben. $R \llcorner z^\alpha$ ist ebenfalls rektifizierbar (wenn auch nicht mit ganzzahliger Vielfachheit). Somit impliziert also die Unterhalbstetigkeit der Massenorm die des Funktionals Φ . □

Satz 19. Seien L und S wie oben. Weiterhin existiere ein Zylinder C_r^h derart, dass $L \setminus C_r^h = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : z < \lambda\} \setminus C_r^h$ für ein $\lambda > 0$ und außerdem $\text{spt } S \subset C_r^h$. Falls dann wenigstens ein $T \in \mathcal{C}$ mit endlicher Masse existiert, existiert auch ein $T \in \mathcal{C}$ mit $\Phi[T] \leq \Phi[R]$ für alle $R \in \mathcal{C}$.

Beweis. Man wähle eine beliebige Minimalfolge $T_i \in \mathcal{C}$. Weil $\text{spt } T_i \subset \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : z \geq$

$\lambda\}$ haben wir

$$\begin{aligned}
 \mathbb{M}(T_i) + \mathbb{M}(\partial T_i) &\leq \int d\|T_i\| + \mathbb{M}(S) \\
 &\leq \frac{1}{\lambda^\alpha} \int z^\alpha d\|T_i\| + \mathbb{M}(S) \\
 &= \frac{1}{\lambda^\alpha} \Phi[T_i] + \mathbb{M}(S) \\
 &\leq \text{const} < \infty.
 \end{aligned}$$

Folglich existiert eine Teilfolge T_i (ohne Umbenennung) mit $T_i \rightarrow T \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+1})$. Da $\mathbb{R}^{n+1} \setminus L$ abgeschlossen ist, können wir schließen, dass $\text{spt } T \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus L$. Es gilt weiter $\partial T = S$ weil $S(\omega) = \partial T_i(\omega) = T_i(d\omega) \rightarrow T(d\omega) = \partial T(\omega)$. Nun werden wir zeigen, dass T kompakt gewählt werden kann. Sei $f(x, z) := (\text{argmin}_{\xi \in B_r} |x - \xi|, z)$. Dann ist für alle $R \in \mathcal{C}$, $f_{\#}R \in \mathcal{C}$, da $f|_{C_r} = \text{id}_{C_r}$, $\text{spt } S \subset C_r$ und $L \setminus C_r = \{z < \lambda\} \setminus C_r$. Weil außerdem $\text{Lip } f \leq 1$ und damit

$$\begin{aligned}
 \Phi[f_{\#}R] &= \int_{\mathcal{M}(R)} z^\alpha J_f^{\mathcal{M}}(y) \theta_R(y) d\mathcal{H}^n(y) \\
 &\leq \int_{\mathcal{M}} z^\alpha \theta(y) d\mathcal{H}^n(y) \\
 &= \Phi[R]
 \end{aligned}$$

dürfen wir T_i durch $f_{\#}T_i$ ersetzen, welche ebenfalls eine Minimalfolge ist, und erhalten $\text{spt } T \subset C_R$. Analog dazu erkennen wir, indem wir $g(y) := (x, \min(z, h))$ setzen, dass

$$\begin{aligned}
 \Phi[g_{\#}R] &= \int_{\mathcal{M}(R)} \min(z, h)^\alpha J_g^{\mathcal{M}}(y) \theta_R(y) d\mathcal{H}^n(y) \\
 &\leq \int_{\mathcal{M} \setminus \{z \leq h\}} h^\alpha \theta(y) d\mathcal{H}^n(y) + \int_{\mathcal{M} \cap \{z \leq h\}} z^\alpha \theta(y) d\mathcal{H}^n(y) \\
 &\leq \int_{\mathcal{M} \setminus \{z \leq h\}} z^\alpha \theta(y) d\mathcal{H}^n(y) + \int_{\mathcal{M} \cap \{z \leq h\}} z^\alpha \theta(y) d\mathcal{H}^n(y) \\
 &= \Phi[R]
 \end{aligned}$$

und ersetzen wir noch T_i durch $g_{\#}T_i$ so stellen wir auch $T \in C_R^h$ sicher. Die Minimalität von T wird uns schließlich von Lemma 7 geliefert. □

Man beachte, dass die Annahme, dass \mathcal{C} nicht leer sei, notwendig ist. Zum Beispiel stelle man sich ein Hindernis mit mehreren eingeschlossenen und unzusammenhängenden Kammern vor. Und ohne zu verlangen, dass $L \setminus C_r = \{z < \lambda\} \setminus C_r$, kann die Kompaktheit von Minimierern nicht garantiert werden:

Wir wählen

$$L := \left\{ y \in \mathbb{R}^{n+1} : z < \frac{1}{2|x|^{\frac{1+n}{\alpha}}} \right\} \cup C_{\frac{1}{2}}^h$$

mit einem $h > 2$ als Hindernis und $S := \partial|\{|y \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| < 1, z = 1\}|$. Durch Projektion nach unten wie im Beweis des Satzes 19 zuvor, sehen wir, die Energie eines jeden kompakten Minimierers dieses Hindernisproblems mindestens $h^\alpha \left(\frac{1}{2}\right)^n \omega_n$ betragen muss, was der Energie der oberen Kreisscheibe aus dem Rand des Hinderniszylinders entspricht. Andererseits hat der Graph von $u(x) := \frac{1}{|x|^\beta} \cdot \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)}$, wobei $\beta := \frac{1+n}{\alpha}$, eine Energie von höchstens

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)} u^\alpha \sqrt{1 + |Du|^2} &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)} \frac{1}{|x|^{\alpha\beta}} \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{|x|^{2\beta+2}}} dx \\ &= n\omega_n \int_1^\infty r^{n-1-\alpha\beta} \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{|x|^{2\beta+2}}} dr \\ &\leq n\omega_n \sqrt{1 + \beta^2} \int_1^\infty r^{-2} dr \\ &= n\omega_n \sqrt{1 + \left(\frac{1+n}{\alpha}\right)^2}, \end{aligned}$$

sodass für hinreichend große h kein kompakter globaler Minimierer dieses Problems existieren kann.

Es ist wahrscheinlich möglich, die Annahme der Ebenheit des Hindernisses L außerhalb einer kompakten Menge durch eine angemessene Kleinheitsbedingung im Unendlichen zu ersetzen und trotzdem noch die Existenz kompakter Minimierer zu garantieren.

Satz 20. Sei $S \in \mathcal{R}_{n-1}(\mathbb{R}_+^{n+1})$ mit kompaktem Träger. Außerdem setze

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &:= \{T \in \mathcal{R}_{n,loc}(\mathbb{R}^{n+1}) : \text{spt } T \text{ kompakt, } \partial T = S, \text{spt } T \subset \mathbb{R}_+^{n+1}\} \text{ und} \\ \mathcal{C}_2 &:= \mathcal{C}_1 \cap \{T \in \mathcal{R}_{n,loc}(\mathbb{R}^{n+1}) : \text{spt } T \cap L = \emptyset\}. \end{aligned}$$

1. Sei T ein Minimierer von Φ in \mathcal{C}_1 . Dann gilt für jedes streng konvexe, abgeschlossene $K \subset \mathbb{R}^n$ und jedes $h > 0$ so, dass $\text{spt } S \subset K \times (0, h)$, dass $\text{spt } T \subset K \times (0, h)$.
2. Sei T ein Minimierer von Φ in \mathcal{C}_2 . Dann gilt für jedes streng konvexe, abgeschlossene $K \subset \mathbb{R}^n$ und jedes $h > 0$ so, dass $\text{spt } S \subset K \times (0, h)$ und $L \setminus (K \times (0, h)) = \{z < \lambda\} \setminus (K \times (0, h))$ für ein $\lambda > 0$, dass $\text{spt } T \subset K \times (0, h)$.

Da der Durchschnitt konvexer Mengen stets wieder konvex ist, bedeutet dies das jeder Minimierer unseres Variationsproblems im kleinsten konvexen Zylinder, der sowohl S als auch den nichtebenen Teil von L enthält, enthalten ist.

Beweis. Wir werden nur die Behauptung 1 beweisen. Der Beweis von 2 lässt sich analog durchführen. Zunächst nehmen wir an, dass $\text{spt } T \cap \{z > h\}$ nicht leer wäre. In diesem

Fall erhalten wir wieder mit $g(y) = (x, \min(z, h))$ wie im Beweis des Satzes 19, dass $g\#T \in \mathcal{C}_1$. Aber da nun $\mathbb{M}_{\{z>h\}}(T) > 0$, gilt $\Phi[g\#T] < \Phi[T]$, sodass T kein Minimierer gewesen sein kann. Andererseits erhielten wir, falls $\text{spt } T \setminus (K \times \mathbb{R}_+)$ nicht leer wäre, mit $f(y) := (\text{argmin}_{\xi \in K} |x - \xi|, z) =: (\tilde{f}, z)$ wie folgt erneut einen Widerspruch: f ist Lipschitzstetig mit $\text{Lip } \tilde{f} \leq 1$, $\text{Lip } \tilde{f}|_{\mathbb{R}^n \setminus K_\epsilon \times (0, \infty)} < 1$, wobei wir $K_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{dist}(x, K) \leq \epsilon\}$ für ein $\epsilon > 0$ gesetzt haben. Man beachte, dass K_ϵ wieder streng konvex ist und dass, für hinreichend kleine ϵ , $\text{spt } T \setminus (K_\epsilon \times \mathbb{R}_+) \neq \emptyset$. Das liefert

$$\begin{aligned} \Phi[f\#T] &= \int_{\mathcal{M} \setminus (K_\epsilon \times \mathbb{R}_+)} |z|^\alpha J_f^{\mathcal{M}} d|T| + \int_{\mathcal{M} \cap (K_\epsilon \times \mathbb{R}_+)} |z|^\alpha J_f^{\mathcal{M}} d|T| \\ &< \int_{\mathcal{M} \setminus (K_\epsilon \times \mathbb{R}_+)} |z|^\alpha d|T| + \int_{\mathcal{M} \cap (K_\epsilon \times \mathbb{R}_+)} |z|^\alpha d|T| \\ &= \Phi[T], \end{aligned}$$

was erneut einen Widerspruch zur Minimalität von f bedeutet. \square

2.2 Formulierung für Caccioppolimengen

Das parametrische Problem lässt sich auch mit Caccioppolimengen formulieren, was den einzigen Nachteil hat, dass diese Formulierung des Plateauproblems weitaus weniger topologische Vielfalt zulässt. Allerdings geht es in dieser Arbeit in erster Linie um Lösungen als Graphen, welche sich stets als Rand einer Caccioppolimenge (ihres Subgraphen) zu erkennen geben. Deswegen ist diese Formulierung für uns von größerem Interesse. Das von uns untersuchte Funktional lautet dann

$$\begin{aligned} \Phi[E] &= \int |z|^\alpha |D\chi_E| \\ &:= \sup \left\{ \int \text{div}(|z|^\alpha \phi) \chi_E dy : \phi \in C_c^1(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1}), \|\phi\|_\infty \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

für eine Borelmenge $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Man beachte, dass jedes E , für das $\Phi[E]$ endlich ist, in jedem offenen $B \subset \subset \mathbb{R}_+^{n+1}$ endlichen Perimeter besitzt.

Die Untersuchung des Plateauproblems in dieser Situation würde uns keine neuen Erkenntnisse gegenüber dem vorangegangenen Abschnitt liefern. Stattdessen sollen uns in erster Linie lokale Minimierer interessieren.

Definition 4. Wir nennen eine Borelmenge $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ lokal α -minimal in der offenen Menge $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$, wenn, mit

$$\mathbf{N}^*(E, A) := \inf \left\{ \int_A |z|^\alpha |D\chi_F| : F \text{ ist Caccioppoli und } F \Delta E \subset \subset A \right\},$$

$$\Psi^*(E, A) := \int_A |z|^\alpha |D\chi_E| - N^*(E, A) = 0$$

ist.

Sollte ein Hindernis $L \subset \mathbb{R}^{n+1}$ vorgegeben sein, so vereinbaren wir

Definition 5. Die Borelmenge $E \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus L$ heißt lokal α -minimal bezüglich des Hindernisses L in der offenen Menge $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$, wenn, mit

$$N_L^*(E, A) := \inf \left\{ \int_A |z|^\alpha |D\chi_F| : F \Delta E \subset\subset A, L \subset F \right\},$$

$$\Psi_L^*(E, A) := \int_A |z|^\alpha |D\chi_E| - N_L^*(E, A) = 0$$

2.3 Regularität

Das Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis, dass $C^{1,\gamma}$ -Regularität des Hindernisses die der Lösung zur Folge hat, wobei wir im Kontext der Caccioppolimengen arbeiten. Wir verwenden eine Idee von TAMANINI [27], die auf fast minimale Mengen zurückgreift.

Es ist für Caccioppolimengen E immer möglich einen Repräsentanten \tilde{E} mit $\overline{\mathcal{F}\tilde{E}} = \partial\tilde{E}$ zu finden. Daher werden wir im Folgenden davon ausgehen, dass dies für alle vorkommenden Caccioppolimengen erfüllt ist.

In diesem Abschnitt werden wir bei Abschätzungen häufiger unterschiedliche Konstanten mit demselben Buchstaben c bezeichnen.

Definition 6. Eine Caccioppolimenge $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ heißt (C, γ) -fast minimal, wenn mit den Definitionen

$$N(E, A) := \inf \left\{ \int_A |D\chi_F| : F \text{ ist Caccioppoli und } F \Delta E \subset\subset A \right\}$$

und

$$\Psi(E, A) := \int_A |D\chi_E| - N(E, A)$$

für $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, eine Konstante $\rho_0 > 0$ existiert, sodass

$$\Psi(E, B_\rho(y_0)) \leq c\rho^{n+2\gamma}$$

für alle Kugeln $B_\rho(y_0)$ mit Radius $\rho < \rho_0$ und beliebigem Mittelpunkt $y_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ erfüllt ist.

Eine Erweiterung des De Giorgischen Regularitätssatzes zeigt, dass der reduzierte Rand (C, γ) -fast minimaler Mengen lokal eine $C^{1,\gamma}$ -Hyperfläche ist [27] (siehe auch [25] für eine ausführliche Ausarbeitung). Unser Ziel ist es also, zu zeigen, dass Lösungen des Hindernisproblems fast minimal sind, hinreichende Regularität des Hindernisses vorausgesetzt.

Wir wollen noch einige zusätzliche Definitionen vereinbaren.

Definition 7. Für Caccioppolimengen $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und offene Mengen $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ definieren wir

1. $N_0(E, A) := \inf\{\int_A |D\chi_F| : F \text{ ist Caccioppoli und } F\Delta E \subset\subset A, F \subset E\}$
2. $N_0^*(E, A) := \inf\{\int_A |z|^\alpha |D\chi_F| : F \text{ ist Caccioppoli und } F\Delta E \subset\subset A, F \subset E\}$
3. $\Psi_0(E, A) := \int_A |D\chi_E| - N_0(E, A)$
4. $\Psi_0^*(E, A) := \int_A |z|^\alpha |D\chi_E| - N_0^*(E, A)$

Lemma 8. Sei $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Menge endlichen Perimeters mit $\partial E \in C^{1,\gamma}$. Dann existiert für jedes kompakte $K \subset \mathbb{R}_+^{n+1}$ eine nur von K abhängige Konstante $c > 0$ und ein $\rho_0 > 0$, sodass, mit $\gamma' = \min(\gamma, \frac{1}{2})$,

$$\Psi^*(E, B_\rho(y_0)) \leq c\rho^{n+2\gamma'}$$

für alle $y_0 \in \partial E \cap K$ und alle $\rho < \rho_0$.

Beweis. Wir bezeichnen mit ν eine Einheitsnormale von ∂E in y_0 und setzen

$$Q_{\rho,R} := \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : |(y - y_0) \cdot \nu| < R, |(y - y_0) - ((y - y_0) \cdot \nu)\nu| < \rho\}$$

wobei $R = c'\rho$ mit einem $c' > 1$ so, dass $\partial E \cap Q_{\rho,R}$ sich nach Rotation um y_0 als den Graphen einer $C^{1,\gamma}(B_\rho(x_0))$ -Funktion u über dem \mathbb{R}^n schreiben lässt und für das $Q_{\rho,R} \subset$

\mathbb{R}_+^{n+1} . Wir schätzen ab:

$$\begin{aligned}
 \Psi^*(E, B_\rho(y_0)) &\leq \Psi^*(E, Q_{\rho,R}) \\
 &= \int_{B_\rho(x_0)} z^\alpha(x, u(x)) \sqrt{1 + |Du|^2} dx - \inf_{F\Delta E \subset\subset Q_{\rho,R}} \int_{Q_{\rho,R}} z^\alpha |D\chi_F| \\
 &\text{mit einer affin linearen Funktion } z: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R} \\
 &\leq \int_{B_\rho(x_0)} (z_0 + R)^\alpha \sqrt{1 + |Du|^2} - (z_0 - R)^\alpha dx \\
 &\text{da } \delta \sqrt{1 + \epsilon^2} - \beta \leq \frac{\delta}{2} \epsilon^2 + (\delta - \beta) : \\
 &\leq \int_{B_\rho(x_0)} \frac{(z_0 + R)^\alpha}{2} |Du|^2 + (z_0 + R)^\alpha - (z_0 - R)^\alpha dx \\
 &\text{weil } a^\alpha - b^\alpha \leq (a - b) \alpha a^{\alpha-1} : \\
 &\leq \int_{B_\rho(x_0)} \frac{(z_0 + R)^\alpha}{2} |Du|^2 + 2R\alpha (z_0 + R)^{\alpha-1} dx \\
 &\leq \omega_n \rho^n \left(\frac{(z_0 + R)^\alpha}{2} c \rho^{2\gamma} + 2\alpha R (z_0 + R)^{\alpha-1} \right) \\
 &= \omega_n \left[\frac{(z_0 + c'\rho)^\alpha}{2} c \rho^{n+2\gamma} + 2\alpha c' \rho^{n+1} (z_0 + c'\rho)^{\alpha-1} \right] \\
 &\leq \omega_n c'' \rho^{n+2\gamma'}
 \end{aligned}$$

für $\rho < 1$. □

Lemma 9. Sei $A \subset \mathbb{R}_+^{n+1}$ offen und $L \subset E$ habe endlichen Perimeter in A . Wenn $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ lokal α -minimal bezüglich des Hindernisses L in A ist, so gilt

$$\Psi^*(E, B_\rho(y_0)) \leq \Psi_0^*(L, B_\rho(y_0))$$

für alle $B_\rho(y_0) \subset\subset A, y_0 \in \partial E$.

Beweis. Für $B_\rho(y_0)$ wie oben und ein beliebiges F mit $F\Delta E \subset\subset B_\rho$ gilt

$$\int_{B_\rho(y_0)} z^\alpha |D\chi_E| \leq \int_{B_\rho(y_0)} z^\alpha |D\chi_{F\cup L}|.$$

Damit und mit

$$\int |z|^\alpha |D\chi_{F\cap L}| + \int |z|^\alpha |D\chi_{F\cup L}| \leq \int |z|^\alpha |D\chi_L| + \int |z|^\alpha |D\chi_F|$$

(nach DIERKES [9]) bekommen wir

$$\begin{aligned}
 \int_{B_\rho(y_0)} z^\alpha |D\chi_E| - \int_{B_\rho(y_0)} z^\alpha |D\chi_F| &\leq \int_{B_\rho(y_0)} z^\alpha |D\chi_L| - \int_{B_\rho(y_0)} z^\alpha |D\chi_{F\cap L}| \\
 &\leq \Psi_0^*(L, B_\rho(y_0)).
 \end{aligned}$$

Da F beliebig war, folgt die Behauptung unmittelbar. □

Lemma 10. Sei E eine Caccioppolimenge, die $\Psi^*(E, B_\rho(y_0)) \leq c\rho^{n+2\gamma}$ für ein $y_0 \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ und alle $\rho > 0$, die kleiner als eine vorgegebene Konstante $\rho_0 < \min(1, z_0)$ sind, erfüllt. Dann gilt

$$\rho^{-n} \int_{B_\rho(y_0)} z^\alpha |D\chi_E| \leq n\omega_n(z_0 + \rho)^\alpha + c\rho^{2\gamma}$$

für alle $\rho < \rho_0$.

Beweis. Für alle $\tau \in (0, 1)$ mit $|D\chi_E|(\partial B_{\tau\rho}(y_0)) = 0$ (also für fast alle $\tau \in (0, 1)$) können wir wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^*(E, B_\rho(y_0)) &\leq \int_{B_\rho \setminus \overline{B_{\tau\rho}(y_0)}} z^\alpha |D\chi_E| + \int_{B_\rho(y_0)} z^\alpha |D\chi_{B_{\tau\rho}(y_0)}| \\ &\leq \int_{B_\rho \setminus \overline{B_{\tau\rho}(y_0)}} z^\alpha |D\chi_E| + n\omega_n(\tau\rho + z_0)^\alpha (\tau\rho)^n, \end{aligned}$$

sodass

$$\begin{aligned} \rho^{-n} \int_{B_\rho(y_0)} z^\alpha |D\chi_E| &\leq \rho^{-n} \mathbf{N}^*(E, B_\rho(y_0)) + c\rho^{2\gamma} \\ &\leq \rho^{-n} \int_{B_\rho \setminus \overline{B_{\tau\rho}(y_0)}} z^\alpha |D\chi_E| + n\omega_n(\tau\rho + z_0)^\alpha \tau^n + c\rho^{2\gamma}. \end{aligned}$$

Mit $\tau \rightarrow 1$ folgt daraus

$$\rho^{-n} \int_{B_\rho(y_0)} z^\alpha |D\chi_E| \leq n\omega_n(z_0 + \rho)^\alpha + c\rho^{2\gamma}.$$

□

Korollar 2. Mit den Annahmen aus Lemma 10 bekommen wir noch

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho(y_0)} |D\chi_E| &\leq \frac{1}{(z_0 - \rho_0)^\alpha} \int_{B_\rho(y_0)} z^\alpha |D\chi_E| \\ &\leq \frac{\rho^n}{(z_0 - \rho_0)^\alpha} (n\omega_n(z_0 + \rho)^\alpha + c\rho^{2\gamma}) \\ &\leq \frac{c\rho^n}{(z_0 - \rho_0)^\alpha}. \end{aligned}$$

wobei $\rho < \rho_0$.

Lemma 11. Wieder unter den Voraussetzungen von Lemma 10 erhalten wir

$$\Psi(E, B_\rho(y_0)) \leq \frac{1}{z_0^\alpha} \left[\Psi^*(E, B_\rho(y_0)) + c\rho^{n+1} \right]$$

für alle $\rho < \rho_0$, wobei zusätzlich $\rho_0 \leq \frac{\lambda}{2}$ und $z_0 \geq \lambda$ angenommen sei, mit einer von λ abhängigen Konstanten $c > 0$.

Beweis. Sei $F \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit $F \Delta E \subset\subset B_\rho(y_0)$ beliebig. Wir schätzen ab:

$$\begin{aligned}
 \Psi^*(E, B_\rho(y_0)) &\geq \int_{B_\rho(y_0)} z^\alpha |D\chi_E| - \int_{B_\rho(y_0)} z^\alpha |D\chi_F| \\
 &\geq (z_0 - \rho)^\alpha \int_{B_\rho(y_0)} |D\chi_E| - (z_0 + \rho)^\alpha \int_{B_\rho(y_0)} |D\chi_F| \\
 &\geq (z_0^\alpha - \rho\alpha z_0^{\alpha-1}) \int_{B_\rho(y_0)} |D\chi_E| - (z_0^\alpha + \rho\alpha z_0^{\alpha-1}) \int_{B_\rho(y_0)} |D\chi_F| \\
 &= z_0^\alpha \left(\int_{B_\rho(y_0)} |D\chi_E| - \int_{B_\rho(y_0)} |D\chi_F| \right) \\
 &\quad - \rho\alpha z_0^{\alpha-1} \left(\int_{B_\rho(y_0)} |D\chi_E| + \int_{B_\rho(y_0)} |D\chi_F| \right).
 \end{aligned}$$

Lassen wir nun $\int_{B_\rho(y_0)} |D\chi_F|$ gegen $N(E, B_\rho(y_0))$ gehen, so impliziert dies

$$\Psi^*(E, B_\rho(y_0)) \geq z_0^\alpha \Psi(E, B_\rho(y_0)) - \frac{c\alpha z_0^{\alpha-1}}{(z_0 - \rho_0)^\alpha} \rho^{n+1} - \rho\alpha z_0^{\alpha-1} N(E, B_\rho(y_0)).$$

Sortieren der Terme und die Abschätzung $N(E, B_\rho(y_0)) \leq \frac{n\omega_n}{2} \rho^n$ (siehe GIUSTI [20] (5.14)) liefern das gesuchte Ergebnis:

$$\Psi(E, B_\rho(y_0)) \leq \frac{1}{z_0^\alpha} \left[\Psi^*(E, B_\rho(y_0)) + c\rho^{n+1} \right].$$

□

Korollar 3. *Wenn*

$$\Psi^*(E, B_\rho(y_0)) \leq c\rho^{n+2\gamma}$$

für alle $B_\rho(y_0) \subset\subset \mathbb{R}_+^{n+1}$ mit $z_0 \geq \lambda$, $\rho < \rho_0 \leq \min(1, \frac{\lambda}{2})$, dann gilt

$$\Psi(E, B_\rho(y_0)) \leq c\rho^{n+2\gamma'}$$

für alle $B_\rho(y_0)$ wie oben, wobei $\gamma' = \min(\gamma, \frac{1}{2})$.

Satz 21. *Sei $L \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Menge lokal endlichen Perimeters, die $\{z < \lambda\} \subset L$ für ein $\lambda > 0$ und $\partial L \in C^{1,\gamma}$ für ein $\gamma \in (0, 1)$ erfüllt. Dann gilt für jede Menge $E \supset L$ mit lokal endlichem Perimeter, dass*

$$\Psi_L^*(E, A) = 0$$

$\mathcal{F}E \cap A \in C^{1,\gamma'}$ impliziert, wobei $\gamma' = \min(\frac{1}{2}, \gamma)$. Außerdem ist die singuläre Menge $S = \partial E \setminus \mathcal{F}E$ leer, vorausgesetzt, dass $n \leq 6$. Falls $n \geq 7$, ist $\mathcal{H}^s(S) = 0$ für jedes $s > n - 7$.

Beweis. Lemma 8 liefert

$$\Psi^*(L, B_\rho(y_0)) \leq c\rho^{n+2\gamma'},$$

für alle y_0 in einer beliebigen kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}_+^{n+1}$, während wir durch Lemma 9

$$\Psi^*(E, B_\rho(y_0)) \leq \Psi_0^*(L, B_\rho(y_0)) \leq \Psi^*(L, B_\rho(y_0)),$$

erhalten, sodass

$$\Psi^*(E, B_\rho(y_0)) \leq c\rho^{n+2\gamma'},$$

wie immer für $\rho < \rho_0$ hinreichend klein, aber, da $z_0 \geq \lambda$ für alle $y_0 \in \partial E \cap K$, unabhängig von z_0 . Unter Beachtung von Korollar 3 bedeutet dies, dass

$$\Psi(E, B_\rho(y_0)) \leq c\rho^{n+2\gamma'},$$

sodass also E eine lokal fast minimale Menge in A ist. Insbesondere ist damit auch $\mathcal{F}E \cap A \in C^{1,\gamma'}$. □

Eine weiteres bekanntes Resultat aus De Giorgis Regularitätstheorie besagt, dass die reguläre Menge $\mathcal{F}E$ relativ offen in ∂E ist. Daher lassen sich wohlbekannt Resultate aus der elliptischen Regularitätstheorie anwenden, die $(\partial E \setminus S) \cap B \in C^\omega$ für alle Kugeln B mit $L \cap B = \emptyset$ zur Folge haben. Zusätzlich gilt der folgende Satz.

Satz 22. Sei $L \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Menge lokal endlichen Perimeters, die $\{z < \lambda\} \subset L$ für ein $\lambda > 0$ und $\partial L \in C^{1,\gamma}$ für ein $\gamma \in (0, 1)$ erfüllt, während für $E \supset L$

$$\Psi_L^*(E, A) = 0$$

gilt. Dann ist ∂E von der Klasse $C^{1,\gamma'}$ in einer Umgebung von ∂L , wobei $\gamma' = \min(\frac{1}{2}, \gamma)$.

Beweis. Da E nach Korollar 3 fast minimal ist, unterscheidet sich der Beweis nicht von dem für Minimierer des Perimeters. Siehe TAMANINI [27] Proposition 3. Es wird gezeigt, dass der Tangentialkegel von E in einem Punkt $y_0 \in \partial E \cap \partial L$ mit dem von L übereinstimmt. □

2.4 Die Monotonieformel für $z = 0$

Da, wie im vorigen Kapitel gezeigt wurde, lokal α -minimale Mengen $E \subset \Omega \subset \mathbb{R}_+^{n+1}$ stets fast minimal sind, gilt für sie die bekannte Monotonieformel für fast minimale Mengen.

Satz 23. Sei $\alpha \geq 1$ und $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Caccioppolimenge mit

$$\Psi^*(E, B) = 0$$

für alle Kugeln $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Dann ist E fast minimal in jeder kompakten Teilmenge $K \subset \mathbb{R}_+^{n+1}$.

Beweis. Diese Aussage ist eine direkte Konsequenz aus Lemma 11. □

Es folgt die Monotonieformel:

Satz 24. Sei $\alpha \geq 1$ und $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Caccioppolimenge mit $\Psi^*(E, B_\rho(y_0)) = 0$ für alle Kugeln $B_\rho(y_0) \subset \mathbb{R}_+^{n+1}$. Dann ist der Ausdruck

$$\rho^{-n} \int_{B_\rho(y_0)} |D\chi_E| + nc\rho$$

monoton wachsend in $0 < \rho < z_0$, wobei c die Konstante der Fast-Minimalität aus Satz 23 bezeichne.

Beweis. Dies ist die Monotonieformel für fast minimale Mengen. □

Indem man den Beweis der Monotonieungleichung für minimale Mengen analog für α -minimale Mengen durchführt, erhält man alternativ auch eine Monotonieformel für den Ausdruck

$$\rho^{-n} \int_{B_\rho(y_0)} |z|^\alpha |D\chi_E|,$$

wenn $z_0 > 0$, wieder mit einem zusätzlichen Störterm (siehe [15] 3.5, Lemma 4), die für uns allerdings nicht weiter interessant ist.

Von Bedeutung ist jedoch der Fall $z_0 = 0$, in dem man bemerkenswerterweise sogar eine wesentlich elegantere Monotonieformel erhält. Zunächst ein Lemma:

Lemma 12. Sei $f \in BV(\mathbb{R}^{n+1})$ und $y_0 = (x_0, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ beliebig. Dann gilt für alle $0 < \rho < r$,

$$\int_{\partial B_1(y_0)} |z|^\alpha |f^+(y_0 + ry) - f^+(y_0 + \rho y)| d\mathcal{H}^n \leq \int_{B_r(y_0) \setminus B_\rho(y_0)} |z^\alpha| \left| \frac{y \cdot Df}{|y|^{n+1+\alpha}} \right|. \quad (2.1)$$

Beweis. Ohne Einschränkungen sei $x_0 = 0$. Zudem sei $h \in C_c^1(\mathbb{R}^{n+1})$ zunächst beliebig mit $|h| \leq 1$, $\beta(y) := h\left(\frac{y}{|y|}\right)$, $g(y) := \frac{y}{|y|^{n+1}}$ und $\gamma(y) := \frac{|z|^\alpha}{|y|^\alpha}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\beta\gamma g) &= \beta\gamma \operatorname{div}(g) + \gamma D\beta \cdot g + \beta D\gamma \cdot g \\ &= 0 + 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

außerhalb von y_0 , denn

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(g) &= \sum_{i=1}^{n+1} D_i \left(\frac{y_i}{|y|^{n+1}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{|y|^{n+1} - y_i(n+1)|y|^n \frac{y_i}{|y|}}{|y|^{2(n+1)}} \\ &= \frac{n+1}{|y|^{n+1}} - \frac{n+1}{|y|^{n+1}} = 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} D \left(\frac{y_j}{|y|} \right) \cdot y &= \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{\delta_{ij}}{|y|} - \frac{y_i y_j}{|y|^3} \right) y_i \\ &= y_j \left(\frac{1}{|y|} - \frac{|y|^2}{|y|^3} \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} D_i \gamma y_i &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\alpha |z|^{\alpha-1}}{|y|^\alpha} \left(\frac{z}{|z|} \delta_{i,n+1} - \frac{|z| y_i}{|y|^2} \right) y_i \\ &= \frac{\alpha |z|^{\alpha-1}}{|y|^\alpha} (|z| - |z|) = 0. \end{aligned}$$

Nun wenden wir den Satz von Gauß für BV-Funktionen auf $f\beta\gamma g$ an und erhalten

$$\begin{aligned} &\int_{B_r \setminus \overline{B_\rho}} \operatorname{div}(f\beta\gamma g) \, dy \\ &= \int_{B_r \setminus \overline{B_\rho}} \beta\gamma g \cdot Df \\ &= \int_{\partial B_r} \beta\gamma f^+ g \cdot \frac{y}{|y|} \, d\mathcal{H}^n - \int_{\partial B_\rho} \beta\gamma f^- g \cdot \frac{y}{|y|} \, d\mathcal{H}^n \\ &= r^{-n-\alpha} \int_{\partial B_r} \beta |z|^\alpha f^+ \, d\mathcal{H}^n - \rho^{-n-\alpha} \int_{\partial B_\rho} \beta |z|^\alpha f^- \, d\mathcal{H}^n \\ &= \int_{\partial B_1} |z|^\alpha h(f^+(ry) - f^-(\rho y)) \, d\mathcal{H}^n. \end{aligned}$$

Dies impliziert

$$\begin{aligned} \int_{B_r \setminus \overline{B_\rho}} |\gamma g \cdot Df| &\geq \int_{B_r \setminus \overline{B_\rho}} \beta\gamma g \cdot Df \\ &= \int_{\partial B_1} |z|^\alpha h(f^+(ry) - f^-(\rho y)) \, d\mathcal{H}^n \end{aligned}$$

und Supremumsbildung über h liefert

$$\int_{\partial B_1} |z|^\alpha |f^+(ry) - f^-(\rho y)| d\mathcal{H}^n \leq \int_{B_r \setminus \overline{B_\rho}} |z|^\alpha \left| \frac{y \cdot Df}{|y|^{n+1+\alpha}} \right|. \quad (2.2)$$

Für fast alle $\rho > 0$ gilt $\int_{\partial B_\rho(y_0)} |Df| = 0$, sodass zumindest für diese $\rho < r$ die Behauptung bewiesen ist. Ist hingegen $\rho < r$ beliebig, so existiert eine monoton wachsende Folge $\rho_j \rightarrow \rho$, die (2.1) für alle $j \in \mathbb{N}$ erfüllen und $j \rightarrow \infty$ liefert die Behauptung. Für die Konvergenz auf der linken Seite ersetzen wir in (2.2) r durch ρ und ρ durch ρ_j , was $|z|^\alpha f^-(\rho_j y) \rightarrow |z|^\alpha f^+(\rho y)$ in $L^1(\partial B_1)$ impliziert. \square

Satz 25. Sei E eine Caccioppolimenge in $B_R(y_0)$, wobei $z_0 = 0$. Dann gilt für alle $\rho < r < R$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\partial B_1} |z|^\alpha |\chi_E^+(y_0 + r(y - y_0)) - \chi_E^+(y_0 + \rho(y - y_0))| d\mathcal{H}^n \right|^2 \\ & \leq 2 \left(\int_{B_r(y_0) \setminus B_\rho(y_0)} |z|^\alpha |y - y_0|^{-n-\alpha} |D\chi_E|(y) \right) \left(r^{-\alpha-n} \int_{B_r(y_0)} |z|^\alpha |D\chi_E|(y) \right. \\ & \quad \left. - \rho^{-\alpha-n} \int_{B_\rho(y_0)} |z|^\alpha |D\chi_E|(y) + (n + \alpha) \int_\rho^r \tau^{-n-\alpha-1} \Psi^*(E, B_\tau(y_0)) d\tau \right). \end{aligned}$$

Beweis. Ohne Einschränkungen dürfen wir $y_0 = 0$ voraussetzen. Sei nun ϕ_E^ϵ eine Glättung von χ_E wie in [24] 12.3 derart, dass $\phi_E^\epsilon \rightarrow \chi_E$ in L^1 und

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_r} |\chi_E - \phi_E^\epsilon| d\mathcal{H}^n = 0, \quad (2.3)$$

sowie

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{B_r} |z|^\alpha |D\phi_E^\epsilon| dy = \int_{B_r} |z|^\alpha |D\chi_E| \quad (2.4)$$

für fast alle r mit $\int_{\partial B_r} |z|^\alpha |D\chi_E| = 0$. Dies folgt aus $\mathcal{L}^n \llcorner |D\phi_E^\epsilon| \rightarrow |D\chi_E|$. Wir setzen weiter

$$\chi_{E_{B_r}}(y) := \begin{cases} \chi_E\left(r \frac{y}{|y|}\right) & \text{falls } |y| \leq r \\ \chi_E(y) & \text{falls } |y| > r \end{cases}$$

sowie

$$\eta_r^\epsilon := \phi_E^\epsilon\left(r \frac{y}{|y|}\right).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{B_r} |\eta_r^\epsilon - \chi_{E_{B_r}}| dy &= \int_0^r \int_{\partial B_\rho} |\eta_r^\epsilon - \chi_{E_{B_r}}| d\mathcal{H}^n d\rho \\ &= \int_0^r \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \int_{\partial B_r} |\eta_r^\epsilon - \chi_{E_{B_r}}| d\mathcal{H}^n d\rho \\ &= \frac{r}{n+1} \int_{\partial B_r} |\phi_E^\epsilon - \chi_E| d\mathcal{H}^n \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

mit $\epsilon \rightarrow 0$. Da die Abbildung $\chi_E \mapsto \int |z|^\alpha |D\chi_E|$ unterhalbstetig bezüglich der Konvergenz in L^1 ist, folgern wir noch

$$\begin{aligned} \int_{B_r} |z|^\alpha |D\chi_E| - \Psi^*(E, B_r) &\leq \int_{B_r} |z|^\alpha |D\chi_{E_{B_r}}| \\ &\leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{B_r} |z|^\alpha |D\eta_r^\epsilon| dy. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Jetzt berechnen wir

$$D\eta_r^\epsilon(y) = r \left(\frac{D\phi_E^\epsilon \left(r \frac{y}{|y|} \right)}{|y|} - \frac{D\phi_E^\epsilon \left(r \frac{y}{|y|} \right) \cdot y}{|y|^3} y \right)$$

und weiter

$$\begin{aligned} &\int_{B_r} |z|^\alpha |D\eta_r^\epsilon| dy \\ &= r \int_{B_r} |z|^\alpha \sqrt{|y|^{-2} \left| D\phi_E^\epsilon \left(r \frac{y}{|y|} \right) \right|^2 - |y|^{-4} \left(y \cdot D\phi_E^\epsilon \left(r \frac{y}{|y|} \right) \right)^2} dy \\ &= r \int_0^r \int_{\partial B_\rho} |z|^\alpha |y|^{-1} \left| D\phi_E^\epsilon \left(r \frac{y}{|y|} \right) \right| \left(1 - |y|^{-2} \left| D\phi_E^\epsilon \left(r \frac{y}{|y|} \right) \right|^2 \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(y \cdot D\phi_E^\epsilon \left(r \frac{y}{|y|} \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\mathcal{H}^n(y) d\rho \\ &\text{Transformation: } y \mapsto \frac{\rho}{r} y \\ &= r \int_0^r \int_{\partial B_\rho} |z|^\alpha |y|^{-1} \frac{r}{\rho} \left| D\phi_E^\epsilon(y) \right| \left(1 - \left(\frac{r}{\rho} \right)^2 |y|^{-2} \left| D\phi_E^\epsilon(y) \right|^2 \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(\frac{\rho}{r} y \cdot D\phi_E^\epsilon(y) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\rho}{r} \right)^{n+\alpha} d\mathcal{H}^n(y) d\rho \\ &= r \int_0^r \left(\frac{\rho}{r} \right)^{n+\alpha-1} \int_{\partial B_\rho} |z|^\alpha r^{-1} \left| D\phi_E^\epsilon(y) \right| \sqrt{1 - r^{-2} \left| D\phi_E^\epsilon(y) \right|^2 (y \cdot D\phi_E^\epsilon(y))^2} d\mathcal{H}^n(y) d\rho \\ &= \frac{r}{n+\alpha} \int_{\partial B_r} |z|^\alpha \left| D\phi_E^\epsilon(y) \right| \sqrt{1 - |y|^{-2} \left| D\phi_E^\epsilon(y) \right|^2 (y \cdot D\phi_E^\epsilon(y))^2} d\mathcal{H}^n(y) \\ &\leq \frac{r}{n+\alpha} \int_{\partial B_r} |z|^\alpha \left| D\phi_E^\epsilon(y) \right| \left(1 - \frac{1}{2} |y|^{-2} \left| D\phi_E^\epsilon(y) \right|^2 (y \cdot D\phi_E^\epsilon(y))^2 \right) d\mathcal{H}^n(y). \end{aligned}$$

Daraus folgern wir mit (2.5)

$$\begin{aligned}
 & \int_{\rho}^r \tau^{-n-\alpha-1} \left(\int_{B_{\tau}} |z|^{\alpha} |D\chi_E| - \Psi^*(E, B_{\tau}) \right) d\tau \\
 & \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\rho}^r \tau^{-n-\alpha-1} \int_{B_{\tau}} |z|^{\alpha} |D\eta_{\tau}^{\epsilon}| dy d\tau \\
 & \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{n+\alpha} \int_{\rho}^r \tau^{-n-\alpha} \int_{\partial B_{\tau}} |z|^{\alpha} |D\phi_E^{\epsilon}(y)| d\mathcal{H}^n(y) d\tau \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2(n+\alpha)} \int_{\rho}^r \tau^{-n-\alpha} \int_{\partial B_{\tau}} |z|^{\alpha} |y \cdot D\phi_E^{\epsilon}|^2 |y|^{-2} |D\phi_E^{\epsilon}|^{-1} d\mathcal{H}^n(y) d\tau \right) \\
 & = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{n+\alpha} \left(r^{-n-\alpha} \int_{B_r} |z|^{\alpha} |D\phi_E^{\epsilon}(y)| dy \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \rho^{-n-\alpha} \int_{B_{\rho}} |z|^{\alpha} |D\phi_E^{\epsilon}(y)| dy \right) + \int_{\rho}^r \tau^{-n-\alpha-1} \int_{B_{\tau}} |z|^{\alpha} |D\phi_E^{\epsilon}(y)| dy d\tau \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2(n+\alpha)} \int_{\rho}^r \tau^{-n-\alpha} \int_{\partial B_{\tau}} |z|^{\alpha} |y \cdot D\phi_E^{\epsilon}|^2 |y|^{-2} |D\phi_E^{\epsilon}(y)|^{-1} d\mathcal{H}^n(y) d\tau \right).
 \end{aligned}$$

Eine Umformung ergibt

$$\begin{aligned}
 & \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2(n+\alpha)} \int_{B_r \setminus B_{\rho}} |z|^{\alpha} |y \cdot D\phi_E^{\epsilon}(y)|^2 |y|^{-n-\alpha-2} |D\phi_E^{\epsilon}(y)|^{-1} dy \\
 & \leq - \int_{\rho}^r \tau^{-n-\alpha-1} \int_{B_{\tau}} |z|^{\alpha} |D\chi_E| d\tau + \int_{\rho}^r \tau^{-n-\alpha-1} \Psi^*(E, B_{\tau}) d\tau \\
 & \quad + \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{n+\alpha} \left(r^{-n-\alpha} \int_{B_r} |z|^{\alpha} |D\phi_E^{\epsilon}(y)| dy - \rho^{-n-\alpha} \int_{B_{\rho}} |z|^{\alpha} |D\phi_E^{\epsilon}(y)| dy \right) \right. \\
 & \quad \left. + \int_{\rho}^r \tau^{-n-\alpha-1} \int_{B_{\tau}} |z|^{\alpha} |D\phi_E^{\epsilon}(y)| dy d\tau \right).
 \end{aligned}$$

Der erste Ausdruck lässt nun sich mit Hilfe der Hölderungleichung nach unten abschätzen:

$$\begin{aligned}
 & \int_{B_r \setminus B_{\rho}} |z|^{\alpha} \frac{|D\phi_E^{\epsilon}(y) \cdot y|}{|y|^{n+1+\alpha}} dy \\
 & \leq \left(\int_{B_r \setminus B_{\rho}} |z|^{\alpha} |y \cdot D\phi_E^{\epsilon}(y)|^2 |y|^{-n-\alpha-2} |D\phi_E^{\epsilon}(y)|^{-1} dy \right. \\
 & \quad \left. \cdot \int_{B_r \setminus B_{\rho}} |z|^{\alpha} \frac{1}{|y|^{n+\alpha}} |D\phi_E^{\epsilon}(y)| dy \right)^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}
 & \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{B_r \setminus B_{\rho}} |z|^{\alpha} \frac{|D\phi_E^{\epsilon}(y) \cdot y|}{|y|^{n+1+\alpha}} dy \right)^2 \\
 & \leq 2(n+\alpha) \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{B_r \setminus B_{\rho}} |z|^{\alpha} \frac{1}{|y|^{n+\alpha}} |D\phi_E^{\epsilon}(y)| dy \right) \left(- \int_{\rho}^r \tau^{-n-\alpha-1} \int_{B_{\tau}} |z|^{\alpha} |D\chi_E| d\tau \right. \\
 & \quad \left. + \int_{\rho}^r \tau^{-n-\alpha-1} \Psi^*(E, B_{\tau}) d\tau + \frac{1}{n+\alpha} \left(r^{-n-\alpha} \int_{B_r} |z|^{\alpha} |D\phi_E^{\epsilon}(y)| dy \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \rho^{-n-\alpha} \int_{B_{\rho}} |z|^{\alpha} |D\phi_E^{\epsilon}(y)| dy \right) + \int_{\rho}^r \tau^{-n-\alpha-1} \int_{B_{\tau}} |z|^{\alpha} |D\phi_E^{\epsilon}(y)| dy d\tau \right)
 \end{aligned}$$

bzw. wegen (2.3)

$$\begin{aligned}
 & \left(\int_{B_r \setminus B_\rho} |z|^\alpha \frac{|D\chi_E \cdot y|}{|y|^{n+1+\alpha}} \right)^2 \\
 & \leq 2(n+\alpha) \left(\int_{B_r \setminus B_\rho} |z|^\alpha \frac{1}{|y|^{n+\alpha}} |D\chi_E| \right) \left(- \int_\rho^r \tau^{-n-\alpha-1} \int_{B_\tau} |z|^\alpha |D\chi_E| d\tau \right. \\
 & \quad \left. + \int_\rho^r \tau^{-n-\alpha-1} \Psi^*(E, B_\tau) d\tau + \frac{1}{n+\alpha} \left(r^{-n-\alpha} \int_{B_r} |z|^\alpha |D\chi_E| \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \rho^{-n-\alpha} \int_{B_\rho} |z|^\alpha |D\chi_E| \right) + \int_\rho^r \tau^{-n-\alpha-1} \int_{B_\tau} |z|^\alpha |D\chi_E| d\tau \right)
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

für fast alle r und ρ . Sind nun r und ρ beliebig, so folgt durch Annäherung dieser Werte von unten mit solchen, für die (2.6) gilt, dass letztere für alle $\rho < r < R$ erfüllt ist. Mit Lemma 12 folgt schließlich, dass

$$\begin{aligned}
 & \left(\int_{\partial B_1} |z|^\alpha |\chi_E^+(ry) - \chi_E^+(\rho y)| d\mathcal{H}^n(y) \right)^2 \\
 & \leq \left(\int_{B_r \setminus B_\rho} |z|^\alpha \left| \frac{y}{|y|^{n+1+\alpha}} \cdot D\chi_E(y) \right| \right)^2,
 \end{aligned}$$

was die Behauptung beweist. □

Daraus folgern wir sofort die Monotonieformel:

Satz 26. Sei E eine Caccioppolimenge in $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\Psi^*(E, \Omega) = 0$ und $y_0 = (x_0, 0) \in \Omega$. Dann ist der Ausdruck

$$r^{-n-\alpha} \int_{B_r(y_0)} |z|^\alpha |D\chi_E|$$

monoton wachsend in $r < \text{dist}(y_0, \partial\Omega)$.

Beweis. Die Aussage ist ein Korollar zu Satz 25. □

Auf die Existenz dieser Monotonieformel wurde der Autor von U. DIERKES [16] hingewiesen.

2.5 Blow-ups um den Nullpunkt

Definition 8. Gegeben eine Caccioppolimenge $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\rho > 0$ und $y_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$, definieren wir den Blow-up

$$E_\rho(y_0) := \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : \rho(y - y_0) + y_0 \in E\}.$$

Wir schreiben abkürzend $E_\rho := E_\rho(0)$.

Der Blow-up um den Nullpunkt skaliert wie $\rho^{n+\alpha}$:

Lemma 13. $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ habe endlichen Perimeter. Dann gilt

$$\int_B |z|^\alpha |D\chi_{E_\rho}| = \rho^{-n-\alpha} \int_{\rho B} |z|^\alpha |D\chi_E|$$

für alle $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen.

Beweis. Allgemein gilt für beliebiges $g \in C_c^0(B)$:

$$\int_B g(y) D\chi_{E_\rho}(y) = \rho^{-n} \int_{\rho B} g\left(\frac{y}{\rho}\right) D\chi_E(y).$$

Wählt man hier $g = \phi|z|^\alpha$ mit $\phi \in C_c^1(B)$, $|\phi| \leq 1$, so folgt mit Supremumsbildung über ϕ die Behauptung. \square

Dieses Lemma beweist auch, dass die Minimalitätseigenschaft durch den Blow-up erhalten bleibt.

Satz 27. Sei $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Caccioppolimenge mit $\Psi^*(E, \Omega) = 0$. Dann gilt die folgende Abschätzung für jedes $y_0 = (x_0, 0) \in \partial E \cap \Omega$ und alle $\rho < \text{dist}(y_0, \partial\Omega)$:

$$\rho^{-n-\alpha} \int_{B_\rho(y_0)} |z|^\alpha |D\chi_E| \leq \frac{(n+1)\omega_{n+1}}{2}.$$

Beweis. Ist y_0 beliebig und $\tau \in (0, 1)$ derart, dass $|D\chi_E|(\partial B_{\tau\rho}(y_0)) = 0$, so können wir abschätzen

$$\begin{aligned} & \int_{B_\rho(y_0)} |z|^\alpha |D\chi_E| \\ &= N^*(E, B_\rho(y_0)) \\ &\leq \min \left(\int_{B_\rho(y_0)} |z|^\alpha |D\chi_{E \cup B_{\tau\rho}(y_0)}|, \int_{B_\rho(y_0)} |z|^\alpha |D\chi_{E \setminus B_{\tau\rho}(y_0)}| \right) \\ &\leq (\tau\rho)^\alpha \min \left(\int_{B_\rho(y_0)} |D\chi_{E \cup B_{\tau\rho}(y_0)}|, \int_{B_\rho(y_0)} |D\chi_{E \setminus B_{\tau\rho}(y_0)}| \right) \\ &= (\tau\rho)^\alpha \left(\int_{B_\rho(y_0) \setminus B_{\tau\rho}(y_0)} |D\chi_E| + \min \left(\int_{\partial B_{\tau\rho}(y_0)} \chi_E d\mathcal{H}^n, \int_{\partial B_{\tau\rho}(y_0)} (1 - \chi_E) d\mathcal{H}^n \right) \right) \\ &\leq (\tau\rho)^\alpha \left(\int_{B_\rho(y_0) \setminus B_{\tau\rho}(y_0)} |D\chi_E| + \frac{(n+1)\omega_{n+1}}{2} (\tau\rho)^n \right). \end{aligned}$$

$\tau \rightarrow 1$ liefert die Behauptung. \square

Leider lässt sich eine Abschätzung wie in Satz 27 nicht nach unten gewinnen, da der Halbraum $\{z < 0\}$ minimal ist und verschwindende Energie besitzt.

2.6 Folgerungen für nichtparametrische Minimierer

Lemma 14. $u \in W^{1,1}(\Omega)$ sei lokaler Minimierer von \mathcal{F} in Ω . Dann gilt

$$\int_{G \cap \{u > 0\}} \sqrt{1 + |Du|^2} dx \leq \int_{\partial G} u d\mathcal{H}^{n-1}$$

für alle offenen $G \subset \subset \Omega$ mit $\partial G \in C^1$.

Beweis. Der Beweis dieses Lemmas ist im Wesentlichen schon in den Beweisen des Abschnitts 1.5 enthalten. Ausgehend von der Gleichung (1.3) integrieren wir für ein $\delta > 0$ mit $\{u = \delta\} \in C^\infty$ über $\{\delta < u\} \cap G \setminus U_j$ wie in Lemma 3 und erhalten

$$\begin{aligned} & \int_{\{\delta < u\} \cap G \setminus U_j} \sqrt{1 + |Du|^2} dx \\ &= \frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_{\{\delta < u\} \cap G \setminus U_j} \frac{|Du|^2}{\sqrt{1 + |Du|^2}} dx + \frac{1}{\alpha} \int_{\{\delta < u\} \cap G \setminus U_j} \operatorname{div} \left(\frac{u Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) dx \\ &\leq \frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_{\{\delta < u\} \cap G \setminus U_j} \frac{|Du|^2}{\sqrt{1 + |Du|^2}} dx + \frac{1}{\alpha} \int_{\partial G \cap \{\delta < u\} \cap \operatorname{next}^* U_j} \frac{u Du \cdot \nu_{\partial G}}{\sqrt{1 + |Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\quad - \frac{1}{\alpha} \int_{\partial^* U_j \cap \{\delta < u\} \cap G} \frac{u Du \cdot \nu_{U_j}}{\sqrt{1 + |Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} + \frac{1}{\alpha} \int_{\{\delta < u\} \cap \partial G \cap \partial^* U_j} \frac{u Du \cdot \nu_{\partial G}}{\sqrt{1 + |Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\leq \frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_{\{\delta < u\} \cap G \setminus U_j} \frac{|Du|^2}{\sqrt{1 + |Du|^2}} dx + \frac{1}{\alpha} \int_{\partial G \cap \{\delta < u\}} u dx + \frac{\|u\|_{\infty, G}}{\alpha} \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* U_j). \end{aligned}$$

Beginnt man stattdessen mit der Gleichung

$$u \operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + |Du|^2}},$$

so folgt

$$\begin{aligned} & \int_{\{\delta < u\} \cap G \setminus U_j} \frac{|Du|^2}{\sqrt{1 + |Du|^2}} dx \\ &\leq - \int_{\{\delta < u\} \cap G \setminus U_j} \frac{\alpha}{\sqrt{1 + |Du|^2}} dx + \int_{\partial G \cap \{\delta < u\} \cap \operatorname{next}^* U_j} \frac{u Du \cdot \nu_{\partial G}}{\sqrt{1 + |Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\quad - \int_{\partial^* U_j \cap \{\delta < u\} \cap G} \frac{u Du \cdot \nu_{U_j}}{\sqrt{1 + |Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\partial^* U_j \cap \{\delta < u\} \cap \partial G} \frac{u Du \cdot \nu_G}{\sqrt{1 + |Du|^2}} d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\leq \int_{\partial G \cap \{\delta < u\}} u d\mathcal{H}^{n-1} + \|u\|_{\infty, G} \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* U_j). \end{aligned}$$

Also erhalten wir insgesamt mit $j \rightarrow \infty$

$$\int_{\{\delta < u\} \cap G} \sqrt{1 + |Du|^2} dx \leq \int_{\partial G} u d\mathcal{H}^{n-1}$$

und $\delta \rightarrow 0$ liefert die Behauptung. □

Korollar 4. *Mit den Voraussetzungen von Lemma 14 folgt auch, dass*

$$|\{u > 0\} \cap G| \leq \|u\|_{L^1(\partial G)}.$$

Da $|\{u > 0\} \cap G| = |G| - |\{u = 0\} \cap G|$ ist also immer

$$|\{u = 0\} \cap G| \geq |G| - \|u\|_{L^1(\partial G)},$$

sodass $\|u\|_{L^1, \partial G} < |G|$ direkt $|\{u = 0\} \cap G| > 0$ impliziert.

Genauso ließe sich aus Lemma 14 die Aussage von BEMELMANS und DIERKES [4] herleiten, dass

$$\sup_{\partial G} u < \frac{|G|}{\mathcal{H}^{n-1}(\partial G)}$$

$|\{u = 0\} \cap G| > 0$ impliziert.

Lemma 15. *Sei u ein lokaler Minimierer von \mathcal{F} in Ω . Dann gilt für alle offenen $G \subset\subset \Omega$ mit $\partial G \in C^1$ und alle $\delta \geq 0$, dass*

$$\int_{G \cap \{u > \delta\}} u \sqrt{1 + |Du|^2} \geq \alpha \frac{|\{u > \delta\} \cap G|^2}{\mathcal{H}^{n-1}(\partial G)}.$$

Beweis. Nach Lemma 4 gilt

$$\int_{\{u > \delta\} \cap G} \frac{\alpha}{u \sqrt{1 + |Du|^2}} dx \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial G).$$

Gleichzeitig gilt für beliebige Lebesgue-messbare $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ die Ungleichung vom arithmetischen und harmonischen Mittelwert:

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f dx \geq \frac{1}{\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \frac{1}{f} dx}.$$

Setzen wir hier $f := \frac{1}{\alpha} u \sqrt{1 + |Du|^2}$ und $\Omega = G \cap \{u > \delta\}$, so folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{|G \cap \{u > \delta\}|} \int_{G \cap \{u > \delta\}} \frac{1}{\alpha} u \sqrt{1 + |Du|^2} dx &\geq \frac{1}{\frac{1}{|G \cap \{u > \delta\}|} \int_{G \cap \{u > \delta\}} \frac{\alpha}{u \sqrt{1 + |Du|^2}} dx} \\ &\geq \frac{|G \cap \{u > \delta\}|}{\mathcal{H}^{n-1}(\partial G)} \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

Für Minimierer $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ des Perimeters gilt sowieso die Abschätzung nach unten

$$\omega_n \leq r^{-n} \int_{B_r} |D\chi_E|.$$

Allerdings ist eine vergleichbare Abschätzung der Form

$$C \leq r^{-n-\alpha} \int_{B_r} |z|^\alpha |D\chi_E|,$$

mit einer von E und r unabhängigen Konstanten $C > 0$, für Minimierer der α -Energie nicht zu erwarten. Lemma 15 liefert uns für den Graphenfall wenigstens eine etwas schwächere Abschätzung dieser Art. Ist $G = B_r$ eine Kugel, so ist $\frac{|B_r|^2}{\mathcal{H}^{n-1}(\partial B_r)} = \frac{1}{n}r^{n+1}$, was der zu erwartenden Potenz von r entspricht.

Satz 28. *Sei u ein lokaler Minimierer von \mathcal{F} in \mathbb{R}^n mit sublinearem Wachstum im Unendlichen. Dann ist $u \equiv 0$.*

Beweis. Sublineares Wachstum im Unendlichen bedeutet, dass zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\rho_0 > 0$ existiert, sodass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| \geq \rho_0$ auch $u(x) < \epsilon|x|$ gilt. Für die Wahl $\epsilon < \frac{1}{n}$ gilt mit dem zugehörigen ρ_0 insbesondere, dass

$$\sup_{\partial B_{\rho_0}} u < \frac{1}{n}\rho_0 = \frac{|B_{\rho_0}|}{\mathcal{H}^{n-1}(\partial B_{\rho_0})},$$

was uns $|\{u = 0\} \cap B_{\rho_0}| > 0$ liefert. Nehmen wir nun an, dass $u \not\equiv 0$, dann existiert also ein $R > \rho_0$ mit $\partial^*\{u = 0\} \cap B_R \neq \emptyset$. Ohne Einschränkungen wollen wir also im Folgenden annehmen, dass $0 \in \partial^*\{u = 0\}$.

Nach Lemma 15 gilt für beliebiges $R > 0$ und $\delta > 0$, dass

$$\begin{aligned} \int_{B_R \cap \{u > \delta\}} u^\alpha \sqrt{1 + |Du|^2} dx &\geq \delta^{\alpha-1} \int_{B_R \cap \{u > \delta\}} u \sqrt{1 + |Du|^2} dx \\ &\geq \alpha \delta^{\alpha-1} \frac{|B_R \cap \{u > \delta\}|^2}{\mathcal{H}^{n-1}(\partial B_R)}. \end{aligned}$$

Für kleines $\delta > 0$ und festes R ist die linke Seite also größer als eine Konstante $M > 0$. Dieses R wählen wir so, dass für alle x mit $|x| \geq R$, $u(x) < \sqrt{3}|x|$ gilt. Nach dem Maximumprinzip für u gilt dann auch $u(x) < \sqrt{3}R$ für alle $|x| < R$. Für $\rho_0 = 2R$ gilt insbesondere

$$\begin{aligned} \int_{\{|x|^2 + |u|^2 < \rho_0^2\}} u^\alpha \sqrt{1 + |Du|^2} dx &\geq \int_{\{|x|^2 + |u|^2 < \rho_0^2\} \cap \{u > \delta\}} u^\alpha \sqrt{1 + |Du|^2} dx \\ &\geq \int_{B_{\frac{\rho_0}{2}} \cap \{u > \delta\}} u^\alpha \sqrt{1 + |Du|^2} dx \\ &\geq M. \end{aligned}$$

Nach Satz 26 folgt also für $\rho > \rho_0$

$$\rho^{-n-\alpha} \int_{\{|x|^2 + |u|^2 < \rho^2\}} u^\alpha \sqrt{1 + |Du|^2} dx \geq \rho_0^{-n-\alpha} M.$$

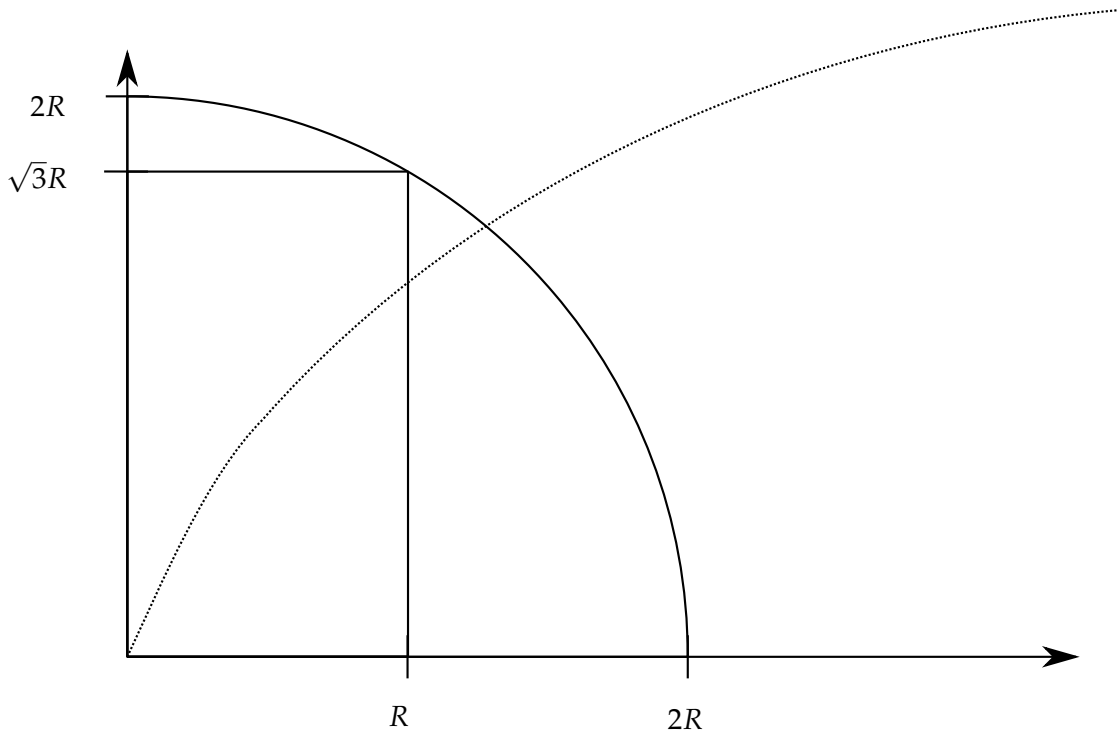


Abbildung 2.1: Der Graph von u (gepunktet), eingeschränkt auf $B_R \subset \mathbb{R}^n$, ist vollständig in $B_{2R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ enthalten.

Es gilt aber auch

$$\begin{aligned} \int_{\{|x|^2+|u|^2<\rho^2\}} u^\alpha \sqrt{1+|Du|^2} dx &\leq \rho^\alpha \int_{\{|x|^2+|u|^2<\rho^2\} \cap \{u>0\}} \sqrt{1+|Du|^2} dx \\ &\leq \rho^\alpha \int_{B_\rho \cap \{u>0\}} \sqrt{1+|Du|^2} dx \\ &\leq \rho^\alpha \int_{\partial B_\rho} u d\mathcal{H}^{n-1} \end{aligned}$$

nach Lemma 14. Ist nun $\rho = \rho(\epsilon)$ so groß, dass $u(x) < \epsilon|x|$ für alle x mit $|x| \geq \rho$, dann lässt sich weiter abschätzen

$$\rho^\alpha \int_{\partial B_\rho} u d\mathcal{H}^{n-1} \leq \epsilon \rho^{n+\alpha} n \omega_n.$$

Insgesamt haben wir also

$$\epsilon n \omega_n \geq M \rho_0^{-n-\alpha}$$

und für hinreichend kleine ϵ ergibt sich ein Widerspruch zu $u \not\equiv 0$. □

Satz 29. Ist $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ein lokaler Minimierer von \mathcal{F} , so ist u nirgendwo in $\partial^* \{u = 0\}$ differenzierbar.

Beweis. Angenommen, u wäre in $x_0 \in \partial^*\{u = 0\}$ differenzierbar. Ohne Einschränkungen sei $x_0 = 0$. Da u im Nullpunkt differenzierbar ist mit $Du(0) = 0$, existiert ein $R_0 > 0$, sodass

$$u(x) \leq |x|$$

für alle $x \in B_{R_0}$. Bezeichnen wir mit $u_\rho(x) = \frac{1}{\rho}u(\rho x)$ den Blow-up von u um den Nullpunkt, so erfüllt dieser ebenfalls

$$u_\rho(x) = \frac{1}{\rho}u(\rho x) \leq \frac{1}{\rho}|\rho x| = |x|$$

für alle x mit $\rho x \in B_{R_0}$. Ist $\rho < 1$, so gilt dies bereits, wenn nur $x \in B_{R_0}$. Sei also im Folgenden $\rho < 1$. u_ρ ist damit insbesondere beschränkt in B_{R_0} und weil die Differenzierbarkeit von u im Nullpunkt $u_\rho \rightarrow 0$ punktweise mit $\rho \rightarrow 0$ impliziert, gilt auch $u_\rho \rightarrow 0$ in $L^1(B_{R_0})$. Lemma 14 liefert die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{B_R} u_\rho \sqrt{1 + |Du_\rho|^2} dx &\leq R \int_{B_R \cap \{u_\rho > 0\}} \sqrt{1 + |Du_\rho|^2} dx \\ &\leq R \int_{\partial B_R} u_\rho d\mathcal{H}^{n-1} \end{aligned}$$

für alle $R < R_0$. Für fast alle derartigen R geht die rechte Seite mit $\rho \rightarrow 0$ gegen 0. Sei im Folgenden $R < R_0$ beliebig mit dieser Eigenschaft. Für dieses R gilt dann nach Lemma 15

$$\begin{aligned} \int_{B_R} u_\rho \sqrt{1 + |Du_\rho|^2} dx &\geq \alpha \frac{|\{u_\rho > 0\} \cap B_R|^2}{\mathcal{H}^{n-1}(\partial B_R)} \\ &= \alpha \rho^{-2n} \frac{|\{u > 0\} \cap B_{\rho R}|^2}{\mathcal{H}^{n-1}(\partial B_R)}. \end{aligned}$$

Da $0 \in \partial^*\{u > 0\}$ ist

$$\limsup_{\rho \rightarrow 0} \frac{|\{u > 0\} \cap B_{\rho R}|}{|B_{\rho R}|} > 0,$$

sodass eine Nullfolge $\rho_k \rightarrow 0$ existiert, mit der

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_R} u_{\rho_k} \sqrt{1 + |Du_{\rho_k}|^2} dx \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha \rho_k^{-2n} \frac{M |B_{\rho_k R}|^2}{\mathcal{H}^{n-1}(\partial B_R)} \\ &= \alpha \frac{M |B_R|^2}{\mathcal{H}^{n-1}(\partial B_R)} \\ &> 0 \end{aligned}$$

für eine Konstante $M > 0$. u kann also nicht in x_0 differenzierbar gewesen sein. \square

Ausblick

Wir konnten mit dieser Arbeit einige offene Fragen beantworten, jedoch bleibt noch vieles im Dunkeln. Bezüglich der Regularität nichtparametrischer Minimierer ist die entscheidende Frage nun, ob diese auch in höheren Dimensionen $n \geq 7$ noch stetig sind. Für nichtparametrische Minimalflächen ist dies der Fall, allerdings endet die Analogie zu Minimalflächen an der $z = 0$ -Ebene. Ein solches Resultat würde auch die strikte \mathcal{H} -Konvexität der Nullstellenmenge implizieren, wenn diese glattberandet ist, was direkt die nächste Frage aufwirft: Was ist die optimale Regularität von $\{u = 0\}$? Über diese Frage ist, außer den in dieser Arbeit bewiesenen Ergebnissen, nichts bekannt. Die Arbeit von ALT und CAFFARELLI [1] über ein verwandtes Problem lässt vermuten, dass zumindest ein partielles Regularitätsresultat wie für fast minimale Caccioppoli-Mengen zu erwarten ist.

Dies würde eventuell dabei helfen, die im Abschnitt 1.7 aufgestellte Vermutung zu beweisen, dass die mittlere Krümmungsgleichung

$$\mathcal{H}_u = \mathcal{L}^n \llcorner \frac{\alpha \chi_{\{u>0\}}}{u \sqrt{1 + |Du|^2}} + |D\chi_{\{u>0\}}|$$

eine notwendige Bedingung für die lokale Minimalitätseigenschaft von u darstellt. Da bei dem betrachteten Variationsproblem keine freien Randbedingungen auftreten, wäre dies eine interessante Aussage.

Die in 1.7 hergeleiteten schwachen Euler-Lagrange-Gleichung lassen sich möglicherweise gewinnbringend als Ausgangspunkt für die numerische Berechnung stationärer Punkte verwenden. Die für $u = 0$ auftretende Singularität und das Fehlen natürlicher freier Randbedingungen haben dies bisher erschwert.

Von Interesse wäre schließlich noch die Erweiterung der Resultate über minimierende Caccioppolimengen aus den Abschnitten 2.3 und 2.4 auf Mengen mit endlicher α -Energie einerseits und auf rektifizierbare Ströme andererseits, auch wenn dies für die Anwendung auf nichtparametrische Minimierer keine Relevanz besitzt, da diese stets in BV liegen.

Literaturverzeichnis

- [1] H.W. Alt, L.A. Caffarelli, *Existence and Regularity for a minimum problem with free boundary*, J. Reine Angew. Math. 325, 105–144, 1981.
- [2] Luigi Ambrosio, Nicola Fusco, Diego Pallara, *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, Oxford University Press, 2000.
- [3] Elisabetta Barozzi, Eduardo Gonzalez, Italo Tamanini, *The Mean Curvature of a Set of Finite Perimeter*, Proc. Am. Math. Soc. Vol 99, No. 2, 313-316, 1987.
- [4] Josef Bemelmans, Ulrich Dierkes, *On a Singular Variational Integral with Linear Growth, I: Existence and Regularity of Minimizers*, Arch. Rational Mech. Anal. 100, no. 1, 83-103, 1987.
- [5] Reinhold Böhme, Stefan Hildebrandt, Engelbert Tausch, *The two-dimensional Analogue of the Catenary* Pacific J. Math. 88, no. 2, 247–278. 1980.
- [6] Gui-Qiang Chen, Hermano Frid, *On the theory of divergence-measure fields and its applications*, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) 32, no. 3, 401–433, 2001.
- [7] Ulrich Dierkes, *Minimal Hypercones and $C^{0,\frac{1}{2}}$ Minimizers for a Singular Variational Problem* Indiana Univ. Math. J. 37, no. 4, 841-863, 1988.
- [8] Ulrich Dierkes, *A geometric maximum principle, Plateau's problem for surfaces of prescribed mean curvature, and the two-dimensional analogue of the catenary* Lecture Notes in Math., 1357, Springer, Berlin, 1988.
- [9] Ulrich Dierkes, *Boundary Regularity for Solutions of a Singular Variational Problem with Linear Growth*, Arch. Rational Mech. Anal. 105, no. 4, 285-289, 1989.
- [10] Ulrich Dierkes, *A Classification of Minimal Cones in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ and a Counterexample to Interior Regularity of Energy Minimizing Functions* Manuscripta Math. 63, no. 2, 173-192, 1989.

- [11] Ulrich Dierkes, Gerhard Huisken, *The n -dimensional analogue of the catenary: existence and nonexistence*. Pacific J. Math. 141, no. 1, 47–54, 1990.
- [12] Ulrich Dierkes, Gerhard Huisken, *The N -dimensional analogue of the catenary: prescribed area*. Geometric analysis and the calculus of variations, 1–12, Int. Press, Cambridge, MA, 1996.
- [13] Ulrich Dierkes, *On the regularity of solutions for a singular variational problem*, Math. Z. 225, no. 4, 657-670, 1997.
- [14] Ulrich Dierkes, *Singular Minimal Surfaces* Geometric Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations, 177-193, Springer, 2003.
- [15] Ulrich Dierkes, Stefan Hildebrandt, Anthony J. Tromba, *Global Analysis of Minimal Surfaces* Springer, 2010
- [16] Ulrich Dierkes, *Non-existence for entire singular minimal graphs of controlled growth*
Noch nicht erschienen.
- [17] Lawrence C. Evans, Ronald F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions* CRC Press, 1992.
- [18] Herbert Federer, *Geometric Measure Theory* Springer, 1969.
- [19] Mariano Giaquinta, Giuseppe Modica, Jiří Souček, *Cartesian Currents in the Calculus of Variations I* Springer, 1998.
- [20] Enrico Giusti, *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation* Springer, 1984.
- [21] Benjamin Goldschmidt, *Determinatio superficiei minimae rotatione curvae data duo puncta jungentis circa datum axem ortae* Göttingen, 1831.
- [22] Nicholas J. Korevaar, Leon Simon, *Continuity Estimates for Solutions to the Prescribed-Curvature Dirichlet Problem* Math. Z. 197, 457-464, 1987.
- [23] Daniel Kraft, *Measure-Theoretic Properties of Level Sets of Distance Functions* J. Geom. Anal., 1-20, 2015.
- [24] Francesco Maggi, *Sets of Finite Perimeter and Geometric Variational Problems* Cambridge University Press, 2012.
- [25] Umberto Massari, Mario Miranda, *Minimal Surfaces of Codimension One* North-Holland, 1984.

LITERATURVERZEICHNIS

- [26] Alexander M. Meadows, *Stable and singular solutions of the equation $\Delta u = 1/u$* .
Indiana Univ. Math. J. 53, no. 6, 1681–1703, 2004.
- [27] Italo Tamanini, *Boundaries of Caccioppoli sets with Hölder-continuous normal vector*.
Reine Angew. Math. 334, 27-39, 1982.