Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша.
Академии Наук СССР

N84-15981

П.М. Блехер, Н.М. Зуева, Э.И. Юрченко

TM-77285

РАСЧЕТЫ ВЛИЯНИЯ ПРОФИЛЯ ТОКА НА ТИРИНГ-НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Препринт № 149 за 1982 г.

Москва.

JOB No.
TM 77285

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
АКАДЕМИИ НАУК СССР

(0914-26)

П.М.Блехер, Н.М.Зуева, Э.И.Юрченко

РАСЧЕТЫ ВЛИЯНИЯ ПРОФИЛЯ ТОКА НА ТИРИНГ-НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Москва, 1982 г.

Аннотация

Приводятся результаты расчетов тиринг-неустойчивости плазменного шнура в сильном продольном магнитном поле для различных профилей тока. Рассмотрены и проанализированы степенные профили тока $j = j_0 (1-(\frac{r}{a})^p)^\nu$ для различных значений параметров p и ν. Исследована тиринг-неустойчивость сглаженных двухступенчатых профилей; построены "оптимальные" сглаженные двухступенчатые профили, устойчивые относительно любых винтовых крупномасштабных возмущений.

COMPUTATIONS OF THE CURRENT PROFILE INFLUENCE ON THE TEARING INSTABILITY

P.M.Blecher, N.M.Zueva, E.I.Yurchenko

Results of the computations of the tearing instability of the plasma column in the strong longitudinal magnetic field are presented for various current profiles. The power current profiles $j = j_0 (1-(\frac{r}{a})^p)^\nu$ are considered and analyzed for various values of the parameters p and ν. The tearing instability of smoothed two-steps profiles is studied. "Optimal" smoothed two-steps profiles are constructed which are stable with respect to all helical large scale perturbations.

I. Введение

Влияние профиля тока, протекающего по плазменному шнуру в сильном продольном магнитном поле, на неустойчивости, питаемые энергией магнитного поля тока, т.е. на винтовую неустойчивость со свободной границей и на тиринг-неустойчивость, впервые было рассмотрено в работах [I] и [2], соответственно. Основной результат этих работ, подтвержденный в более поздних и подробных расчетах [3-6], заключался в том, что обострение профиля тока, т.е. собирание тока в центральную часть шнура, подавляет обе крупномасштабные гидромагнитные неустойчивости. Заметим, что наиболее просто подавляются высшие моды неустойчивостей, возбуждаемых током, а низшие моды, представляющие наибольшую опасность в реальном эксперименте, $m=3/n=1$; $m=3/n=2$ и, особенно, $m=2/n=1$ (m - азимутальное число, n - тороидальное число), требуют сильного пикирования тока.

Наряду с пикированием тока в центре шнура, т.е. с увеличением плотности тока на магнитной оси, сильную стабилизирующую роль на винтовую неустойчивость со свободной границей оказывает также уменьшение градиента плотности тока вблизи границы плазменного шнура [6]. При фиксированной плотности тока в центре шнура и заданном полном токе, протекающем по шнуру, винтовые возмущения при свободной границе оказались чувствительными к самому профилю тока. При этом, как показано в работе [6], профили близкие к реальным, особенно при дополнительном напуске газа на периферии, что уменьшает плотность тока вблизи границы шнура, обеспечивают достаточно широкие зоны устойчивости по величине запаса устойчивости на границе шнура q_a $(q_a=\frac{aB_0}{RB_J}\sim\frac{1}{J}$, B_0 - тороидальное поле, B_J - поле тока, a - радиус шнура, J - ток в шнуре).

В связи с этим представляют интерес расчеты влияния профиля тока на тиринг-неустойчивость, т.е. неустойчивость при которой резонансная магнитная поверхность $(m-nq(r_s)=0)$, в отличие от винтовой неустойчивости, находится внутри плазменного шнура ($0<r_s<a$). Подавление тиринг-неустойчивости за счет специальных двухступенчатых профилей было впервые рассмотрено в работе [7]. При этом был найден профиль тока, устойчивый по отношению как к винтовой неустойчивости, так и ко всем

модам тиринг-неустойчивости. Несмотря на некоторую экзотичность найденного устойчивого профиля тока существуют две причины, по которым двухступенчатые профили могут представлять практический интерес.

Известно, что на нелинейной стадии развития тиринг-неустойчивости вблизи резонансной поверхности на размере магнитного острова происходит выполаживание плотности тока [8], так что вполне возможно возникновение сглаженного двухступенчатого профиля в процессе разряда. Но даже, если этого не происходит самосогласованно и двухступенчатый профиль не возникает естественным образом при джоулевом нагреве, необходимо исследовать свойства таких профилей, так как такие профили можно создавать специально. В настоящий момент дополнительные высокочастотные методы нагрева (электронно-циклотронный и нижне-гибридный) уже позволяют вкладывать в плазму мощность, сравнимую и превышающую джоулеву мощность. А так как эти методы нагрева являются локальными, то они, вообще говоря, позволяют формировать необходимые профили тока.

В настоящей работе приведены результаты расчетов устойчивости двухпараметрического семейства степенных профилей тока относительно тиринг-неустойчивости, а также проведено сопоставление этих результатов с расчетами работы [6], где степенные профили исследовались относительно идеальной винтовой неустойчивости. Далее анализируются результаты расчетов тиринг-неустойчивости для сглаженных двухступенчатых профилей тока, приводятся их диаграммы устойчивости относительно низших мод (2/1, 3/2, 3/1, 4/2, 4/3, 5/2, 5/3, 5/4), проводится сравнение этих диаграмм с теоретическими выводами работы [10]. В приложениях дается вывод асимптотической формулы для инкремента тиринг-моды при магнитной вязкости, стремящейся к нулю (см. также работы [9, 2]) и приводятся аналитические формулы для сглаженных двухступенчатых профилей, использованных нами в расчетах.

2. Исходные уравнения

Будем исходить из линеаризованных упрощенных гидродинамических уравнений, справедливых для мод с $m \geqslant 2$ [9,6] :

$$\frac{\omega c^2}{B_0^2}\left[r\frac{d}{dr}\left(\rho_0 r\frac{d\varphi}{dr}\right)-\rho_0 m^2\varphi\right]+\frac{m}{B_0}\,r\,\frac{dj_0}{dr}\,A=$$

$$= \frac{c}{4\pi} k_{\parallel} \left[r \frac{d}{dr}\left(r \frac{dA}{dr} \right) - m^2 A \right], \tag{2.1}$$

$$r \frac{d}{dr}\left(r \frac{dA}{dr} \right) - m^2 A := i \frac{4\pi}{c} r^2 \sigma \left(k_{\parallel} \varphi - \frac{\omega}{c} A \right) \tag{2.2}$$

Здесь возмущенные величины: продольная компонента векторного потенциала A и скалярный потенциал φ выбраны в виде $f(r) \exp\left(-i\omega t + i m \theta - i n \frac{z}{R}\right)$, $k_{\parallel} = R^{-1}\left(\frac{m}{q} - n\right)$.

Для численного счета удобно перейти к безразмерным переменным:

$$\psi = -\frac{R\omega}{c} A, \quad \gamma = -i\omega R \sqrt{4\pi \rho_0 / B_0^2}, \quad f_\rho = \rho_0(r)/\rho_0(0),$$

$$j = \frac{4\pi R}{B_0 c} j_0, \quad \nu = \frac{c^2 R}{4\pi \sigma(0)} \sqrt{4\pi \rho_0 / B_0^2}, \quad f_\sigma = \sigma(r)/\sigma(0),$$

при этом уравнения (2.1) и (2.2) примут следующий вид:

$$\gamma^2 \left[r \frac{d}{dr}\left(f_\rho r \frac{d\varphi}{dr} \right) - m^2 f_\rho \varphi \right] + m r \frac{dj}{dr} \psi =$$
$$= K_{\parallel} \left[r \frac{d}{dr}\left(r \frac{d\psi}{dr} \right) - m^2 \psi \right], \tag{2.3}$$

$$r \frac{d}{dr}\left(r \frac{d\psi}{dr} \right) - m^2 \psi = \frac{\gamma}{\nu} r^2 f_\sigma \left(K_{\parallel} \varphi + \psi \right), \tag{2.4}$$

где

$$K_{\parallel} = m\mu(r) - n, \tag{2.5}$$

$$\mu = \frac{1}{q} = r^{-2} \int_0^r \tau j(\tau)\, d\tau. \tag{2.6}$$

Пусть $r = a$ есть граница плазма-вакуум и $r = b$ - идеально проводящий кожух. Граница плазменного шнура $a < b$ определяется условием $j(r) = 0$, $f_\sigma(r) = 0$ при $r > a$. Граничные условия имеют вид

$$\varphi(0) = \psi(0) = \varphi(b) = \psi(b) = 0 \qquad (2.7)$$

Резонансная магнитная поверхность или резонансный радиус определяются из условия

$$K_{\parallel}(r_s) = 0 , \qquad \text{или} \qquad \mu(r_s) = \frac{n}{m} . \qquad (2.8)$$

В том случае, когда точка резонанса $r = r_s$ находится внутри плазменного шнура ($0 < r_s < a$), может развиваться тиринг-неустойчивость с инкрементом γ ([9] , см. также Приложение 1):

$$\gamma \sim 0.55\ \Delta'^{\,4/5} \left(\frac{\nu}{f_\sigma}\right)^{3/5} \left(m \left|\frac{d\mu}{dr}\right|\right)^{2/5} f_\rho^{\,-1/5} , \qquad (2.9)$$

где

$$\Delta' = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\psi^{-1} \frac{d\psi}{dr} \right]_{r_s - \varepsilon}^{r_s + \varepsilon} , \qquad (2.10)$$

а $\psi(r)$ есть решение уравнения (2.3) с $\gamma = 0$, при условии вмороженности $K_{\parallel} \varphi + \psi = 0$,

$$r \frac{d}{dr}\left(r \frac{d\psi}{dr}\right) - m^2 \psi - \frac{r j'}{\mu - \frac{n}{m}} \psi = 0 \qquad (2.11)$$

с граничными условиями (2.7) и при

$$\psi(r_s - 0) = \psi(r_s + 0) . \qquad (2.12)$$

Все величины f_ρ , f_σ , μ' в формуле (2.9) вычисляются на резонансной магнитной поверхности $r = r_s$. Из формулы (2.9) следует, что тиринг-неустойчивость развивается только при условии

$$\Delta' > 0 . \qquad (2.13)$$

Величина $\Delta' > 0$ пропорциональна инкременту и будет рассчитываться нами при заданных профилях тока.

3. Степенные профили тока

В работе [6] были приведены результаты расчетов идеальной винтовой неустойчивости для степенных профилей тока вида

$$j(r) = j_0 \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^p\right]^\nu . \qquad (3.1)$$

На рис.1-4 приведены результаты расчетов тиринг-неустойчивости для профилей того же вида. Сопоставление результатов работы [6] с настоящими расчетами дает возможность получить полную картину крупномасштабных неустойчивостей, возбуждаемых током, для степенных профилей вид (3.1). Профили вида (3.1) являются обобщением профилей с $p = 2$, рассматривавшихся в работах [3,5].

Структура рис.1-3 одинакова: на черт.1[а] изображены три профиля тока, отличающиеся при заданном показателе $\nu = 1$ показателем p (p = 1,5; 2; 4); увеличение p приводит к уплощению профиля тока в центре и увеличению градиента тока на границе шнура, на черт.1[б] изображены отнормированные на величину q_a соответствующие профили коэффициента запаса устойчивости, а на черт. 1[в], 1[г], 1[д] приведены диаграммы устойчивости в координатах $\Delta', q_a \sim 1/J$. На рис.2 показатель ν = 1,5, а на рис.3 ν = 2.

Сравнение черт. 1[в] - 1[д], черт. 2[в] - 2[д] или черт.3[в]-3[д] показывает, что увеличение параметра p дестабилизирует профиль тока, т.е. уменьшение плотности тока в центре и увеличение градиента тока на границе шнура влияют на тиринг-неустойчивость точно так же, как и на винтовую неустойчивость со свободной границей [6]. Здесь можно указать на следующий общий принцип: тиринг-неустойчивость для значений $q(a)$, близких к m/n, существует (т.е. $\Delta' > 0$) только в том случае, когда существует щель неустойчивости для идеальной винтовой моды при

$$q(a) < \frac{m}{n} . \qquad (3.2)$$

Условие существования точки резонанса внутри плазменного шнура, т.е. необходимое условие тиринг-неустойчивости, приводит к тому, что для данной моды m/n соответствующие значения $q(a)$ лежат в интервале

$$\frac{m}{n} < q(a) < \frac{q(a)}{q(0)} \frac{m}{n} . \qquad (3.3)$$

Таким образом, сравнение диаграмм устойчивости с результатами работы [6] позволяет определить те моды m/n, которые неустойчивы вблизи левого конца интервала (3.3), соответствующего точке резонанса на границе плазма-вакуум. Правому концу этого интервала отвечает ситуация, когда точка резонанса стремится к центру шнура. Поведение Δ' в этом пределе определяется свойствами профиля тока в окрестности центра шнура [10]. Для профилей вида (3.1) поведение Δ' при $q(a) \to \frac{q(a)}{q(0)} \cdot \frac{m}{n} - 0$ определяется величинами p и m : чем больше p, тем больше неустойчивых мод. Так при $p = 2$ неустойчивы моды $m = 2,3$, при $p = 4$ неустойчивы моды $m = 2,3,4$. Для нецелых p отметим, что при $p = 1,1$ неустойчива только мода 2/1, а при $p = 1,5$ неустойчивы моды с $m = 2,3$.

Сравнение черт. 1в), 2в), 3в), когда фиксирован показатель p и меняется ν ($\nu = 1;\ 1,5;\ 2$), аналогично черт. 1г), 2г), 3г) и 1д), 2д), 3д), показывает, что пикирование тока в центре и уменьшение градиента на границе шнура стабилизирует профиль тока относительно тиринг-неустойчивости, так же как это было и в случае идеальной винтовой неустойчивости [6]. Для того, чтобы ярче подчеркнуть стабилизирующие свойства таких профилей на рис.4 приведены чертежи для острого профиля с $\nu = 5$. Из диаграммы устойчивости на черт.4в) видно, что при $q(a) < 4$ неустойчива лишь одна мода $m/n = 2/1$. На черт.4г) приведена диаграмма устойчивости в координатах Δ', r_s, из которой видно, что неустойчивы еще две моды 3/2 и 3/1, но при больших $q(a)$, т.е. при малых токах.

Для того, чтобы исследовать влияние на устойчивость самого профиля тока, когда фиксированы как плотность тока в центре шнура j_0, т.е. величина $q(0)$, так и полный ток в шнуре J, т.е. величина $q(a)$, были специально выбраны два профиля тока вида (3.1) с одинаковыми значениями отношения $q(a)/q(0)$ и исследованы их свойства неустойчивости как по отношению к идеальным винтовым модам, так и тиринг-модам. Рис.5 дает возможность оценить влияние профиля тока при фиксированных значениях $q(0)$ и $q(a)$ на оба типа неустойчивостей. Профиль с $\nu = 2.0$, $p = 3.65$ оказывается более устойчивым по отношению к идеальным винтовым модам, чем профиль $\nu = 1$, $p = 2$. Причина этого обсуждалась в [6] и связана с более плавным подходом первого профиля к границе плазма-вакуум, чем у второго профиля. Для тиринг-моды ситуация меняется и более устойчивым оказывается параболический профиль ($\nu = 1$, $p = 2$) – у него меньшее число неустойчивых мод. Это явление связано в основном с тем, что параболический профиль является более "острым" в центре шнура. Еще резче тот факт, что на идеальную и тиринг-неустойчивости влияют различные свойства профиля тока, проявляется на рис.6. Здесь рассмотрены два степенных профиля тока вида (3.1) с одинаковыми диаграммами идеальной винтовой неустойчивости, но существенно различными диаграммами тиринг-неустойчивости.

Как видно из проведенных расчетов, только "острые" степенные профили с $\nu \geq 2$, $p \geq 1,5$ имеют щели устойчивости по величине $q(a)$ относительно любых мод, возбуждаемых током. Например, на черт.3[в] – это очень маленькая щель $2 < q(a) < 2,05$, а на черт.4[в] для очень "острого" профиля с $\nu = 5$, $p = 2$ – это реальная щель $2 < q(a) < 3,53$. В последнем примере полный ток может меняться в процессе разряда в 1,5 раза, а плазма будет устойчива.

4. Двухступенчатые профили тока

Аналитическое выражение для сглаженных двухступенчатых профилей, используемое в расчетах, приведено в Приложении 2. Три характерных профиля изображены на рис.7-9 (см.черт.7[а], 8[а], 9[а]), на этих же рисунках изображены и диаграммы устойчивости, т.е. зависимость величины Δ' от $q(a)$ и τ. Профиль такого вида был использован в работе [7] при построении "оптимального" полностью устойчивого профиля тока. Анализ диаграмм $\Delta'(q(a))$ показывает наличие глубоких "провалов" зависимости Δ' от $q(a)$. Эти провалы связаны с изломами профиля тока: величина Δ' резко падает, когда точка резонанса приближается к концу ступенек, где имеется излом профиля тока с отрицательным скачком производной. При приближении точки резонанса к началу ступенек происходит резкий подъем Δ', связанный с изломом профиля тока с положительным скачком производной.

Наличие "провалов" в зависимости Δ' от $q(a)$ (а также от r_s) приводит к появлению лакун устойчивости для сглаженных двухступенчатых профилей тока. "Оптимальные" полностью устойчивые профили как работы [7], так и построенные нами, лежат как раз в этих лакунах устойчивости. Отметим, что, как правило, лакуны устойчивости не очень велики по своим размерам как по величине $q(a)$, так и по положению точки резонанса r_s.

На рис.7-9 рассмотрено влияние параметров сглаженного двухступенчатого профиля на устойчивость винтовых и тиринг-мод. Профиль тока, изображенный на рис.7, обладает довольно широкой центральной частью и небольшим пьедесталом. В связи с этим он не имеет лакун устойчивости по всем модам одновременно, хотя по отдельным модам зоны устойчивости существуют. Например, для моды 2/I его зона устойчивости есть интервал $2.4 < q(a) < 3.1$, а для моды 3/2 - интервал $1.8 < q(a) < 2.7$. Отметим, что лакуна устойчивости всех мод по r_s, которую можно наблюдать на рис.7г), не реализуется в эксперименте при заданном полном токе, т.к. соответствующие этой лакуне щели устойчивости по $q(a)$ для различных мод не перекрываются (см. рис.7в)). Данный профиль имеет также зоны неустойчивости относительно винтовых мод со свободной границей, что можно видеть из рис.7г), поскольку $\Delta' > 0$ при r_s $(r_s/a \to 1-0)$, лежащих вблизи границы шнура.

На рис.8 рассмотрены результаты расчета профиля тока с более обостренной центральной частью и более широким пьедесталом по сравнению с предыдущим рисунком. Для этого профиля моды 2/I и 3/2 имеют широкие зоны устойчивости: $2.4 < q(a) < 3.8$ и $1.8 < q(a) < 3.4$. Этот профиль также имеет зоны неустойчивости относительно винтовых мод со свободной границей, что связано с относительно большим градиентом профиля тока $j(r)$ вблизи границы шнура.

На рис.9 приведены результаты для профиля тока с резко выраженным максимумом плотности тока в центре, небольшим пьедесталом и малым градиентом профиля тока вблизи границы шнура. Для этого профиля существуют две лакуны устойчивости по всем модам, кроме $m=1$: $q(a) < 2.15$ ($q(0) < 0.54$) и $3.9 < q(a) < 4.3$ $(0.98 < q(0) < 1.08)$, причем этот профиль устойчив относительно всех винтовых мод со свободной границей, что объясняется в основном малым градиентом $j(r)$ вблизи границы шнура.

Таким образом, проведенные расчеты показывают, что специальным профилированием тока можно обеспечивать щели устойчивости плазменного шнура по $q(a)$ относительно винтовой и тиринг-неустойчивостей и тем самым предотвращать срывы в реальном эксперименте.

Приложение I. Асимптотика инкремента тиринг-моды при $\nu \to 0$.

Решение уравнения идеальной МГД (2.II) имеет особенность в точке резонанса

$$\psi(r) \sim \psi(r_s) + C\,(r-r_s)\ln|r-r_s| + C_{\pm}(r-r_s) + \ldots ,$$

где $C_{\pm}$ относится к областям $r > r_s$ и $r < r_s$, и

$$\varphi(r) \sim \frac{\psi(r_s)}{m\mu'(r_s)(r-r_s)} + \ldots$$

(см.рис.IO). В полных уравнениях (2.3),(2.4) при конечной проводимости ν в окрестности точки резонанса происходит сглаживание этих решений (см. рис.II). Для построения сглаженных

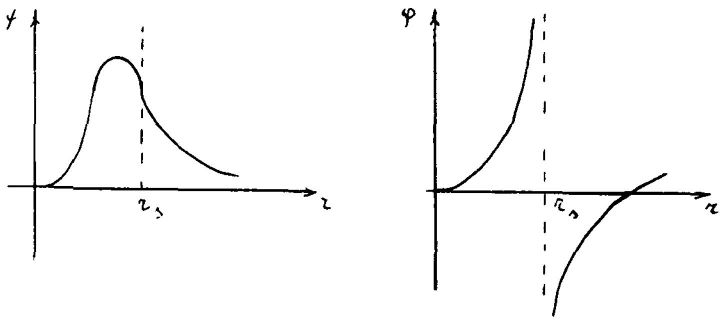


Рис.IO

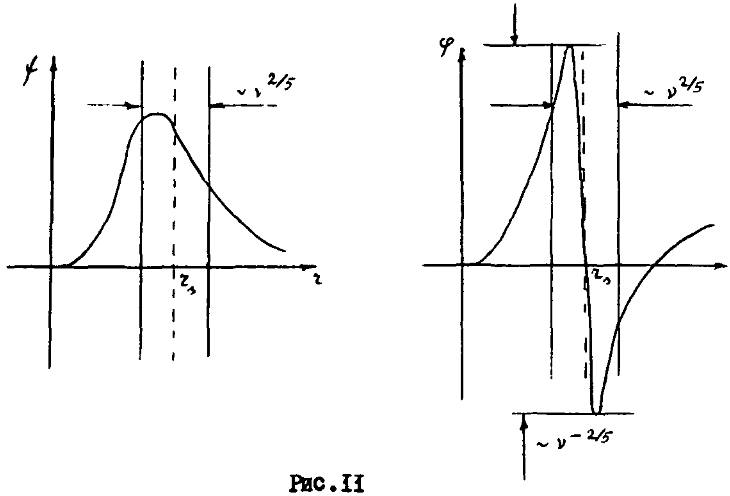


Рис.II

решений запишем

$$\varphi(r) = \nu^{-\alpha}\,\bar{\varphi}\left(\frac{r-r_s}{\nu^{\alpha}}\right), \qquad \text{(П1)}$$

$$\psi(r) = 1 + \nu^{\alpha}\,\bar{\psi}\left(\frac{r-r_s}{\nu^{\alpha}}\right), \qquad \text{(П2)}$$

где $\alpha > 0$ есть неизвестный параметр. Подставим в уравнения (2.3),(2.4) эти соотношения и удержим старшие члены по ν. В результате мы получим систему $\left(\tau = \frac{r-r_s}{\nu^{\alpha}}\right)$:

$$\gamma^2 \nu^{-3\alpha} f_\rho(r_s)\,\frac{d^2\bar{\varphi}}{d\tau^2} + m\,\frac{j'(r_s)}{r_s} = m\mu'(r_s)\,\tau\,\frac{d^2\bar{\psi}}{d\tau^2}, \qquad \text{(П3)}$$

$$\frac{d^2\bar{\psi}}{d\tau^2} = \frac{\gamma}{\nu^{1-\alpha}}\,f_\sigma(r_s)\left[m\mu'(r_s)\tau\bar{\varphi} + 1\right]. \qquad \text{(П4)}$$

Сравнение степеней γ и ν дает:

$$\gamma^2\nu^{-3\alpha} \sim 1, \qquad \gamma\nu^{\alpha-1} \sim 1,$$

откуда $\alpha = 2/5$ и $\gamma \sim \nu^{3/5}$. Запишем

$$\gamma = \bar{\gamma}\,\nu^{3/5}. \qquad \text{(П5)}$$

Подставляя это соотношение в (П3),(П4), имеем:

$$\bar{\gamma}^2 \frac{d^2\bar{\varphi}}{d\tau^2} = a\tau \frac{d^2\bar{\psi}}{d\tau^2} + b, \tag{П6}$$

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} = \bar{\gamma}\,(c\tau\bar{\varphi} + d), \tag{П7}$$

где $a = \dfrac{m\mu'(\tau_s)}{f_\rho(\tau_s)}$, $b = -\dfrac{m j'(\tau_s)}{\tau_s f_\rho(\tau_s)}$, $c = f_\sigma(\tau_s)\, m\mu'(\tau_s)$

$d = f_\sigma(\tau_s)$. Из уравнений (П6),(П7) следует уравнение на $\bar{\varphi}$:

$$\bar{\gamma}^2 \frac{d^2\bar{\varphi}}{d\tau^2} - \bar{\gamma}\, ac\tau^2\bar{\varphi} = \bar{\gamma}\, ad\tau + b \tag{П8}$$

При любом $\bar{\gamma} > 0$ это уравнение имеет единственное ограниченное решение и это решение имеет при $\tau \to \pm\infty$ асимптотику

$$\bar{\varphi} = -\frac{d}{c}\tau^{-1} - \frac{b}{\bar{\gamma}ac}\tau^{-2} + O(|\tau|^{-5}). \tag{П9}$$

Подставим эту асимптотику в (П7):

$$\frac{d^2\bar{\psi}}{d\tau^2} = -\frac{b}{a}\tau^{-1} + O(|\tau|^{-4}). \tag{П10}$$

Отсюда

$$\frac{d\bar{\psi}}{d\tau} = -\frac{b}{a}\ln|\tau| + \xi(\tau), \tag{П11}$$

где $\lim\limits_{\tau\to\pm\infty} \xi(\tau) = \xi_\pm$. Из условия склейки решений внутри пограничного слоя и вне него имеем соотношение

$$\Delta' = \xi_+ - \xi_-. \tag{П12}$$

Осталось найти связь $\bar{\gamma}$ и Δ' . Имеем:

$$\Delta' = \xi_+ - \xi_- = \lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} \frac{d^2\bar{\psi}}{d\tau^2}d\tau = \lim_{A\to\infty} \bar{\gamma}\int_{-A}^{A}(c\tau\bar{\varphi} + d)\,d\tau.$$

Четная часть функции $\bar{\varphi}$ не дает вклада в $\int_{-A}^{A}$, поэтому мы можем заменить $\bar{\varphi}$ на функцию $\bar{\bar{\varphi}}$, удовлетворяющую уравнению

$$\bar{\gamma}^{2}\frac{d^{2}\bar{\bar{\varphi}}}{d\tau^{2}}-\bar{\gamma}\,ac\tau^{2}\bar{\bar{\varphi}}=\bar{\gamma}\,ad\tau.$$

Для приведения этого уравнения к безразмерному виду сделаем замену переменных

$$\tau=\omega\sqrt{\frac{\bar{\gamma}}{ac}}\,,\qquad \tilde{\varphi}(\omega)=\bar{\bar{\varphi}}\left(\omega\sqrt[4]{\frac{\bar{\gamma}}{ac}}\right). \tag{П13}$$

Тогда получим:

$$\frac{d^{2}\tilde{\varphi}}{d\omega^{2}}-\omega^{2}\tilde{\varphi}=\lambda\omega$$

где $\lambda=\dfrac{\bar{\gamma}ad\,(\bar{\gamma}/ac)^{1/4}}{\bar{\gamma}ac\,(\bar{\gamma}/ac)^{1/2}}=\dfrac{d}{c}\left(\dfrac{\bar{\gamma}}{ac}\right)^{-1/4}$. Пусть φ_0 есть решение уравнения

$$\frac{d^{2}\varphi_0}{d\omega^{2}}-\omega^{2}\varphi_0=\omega. \tag{П14}$$

Тогда $\tilde{\varphi}=\lambda\varphi_0$ и

$$\Delta'=\bar{\gamma}\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}(c\tau\bar{\bar{\varphi}}+d)\,d\tau=\bar{\gamma}\left(\frac{\bar{\gamma}}{ac}\right)^{1/4}\times$$

$$\times\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}\left(c\left(\frac{\bar{\gamma}}{ac}\right)^{1/4}\omega\lambda\varphi_0(\omega)+d\right)d\omega=$$

$$=\bar{\gamma}\left(\frac{\bar{\gamma}}{ac}\right)^{1/4}d\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}(\omega\varphi_0(\omega)+1)\,d\omega,$$

$$\Delta'=C_0\,\bar{\gamma}^{5/4}(ac)^{-1/4}d=C_0\,\bar{\gamma}^{5/4}\left(\frac{m^{2}\mu'(r_s)^{2}f_{\sigma}(r_s)}{f_{\rho}(r_s)}\right)^{-1/4}f_{\sigma}(r_s),$$

где

$$C_0 = \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} (\omega\,\varphi_0(\omega)+1)'\,d\omega \qquad (\text{П15})$$

С помощью обращения полученной формулы имеем:

$$\bar{\gamma} = C_0^{-4/5}\,\Delta'^{\,4/5}\,(m|\mu'|)^{2/5}\, f_\sigma^{-3/5}\, f_\rho^{-1/5},$$

или с учетом (П5)

$$\gamma = C_0^{-4/5}\,\Delta'^{\,4/5}\left(\frac{\nu}{f_\sigma}\right)^{3/5}(m|\mu'|)^{2/5}\, f_\rho^{-1/5}. \qquad (\text{П16})$$

Это и есть искомая формула. Ширина δ пограничного слоя находится из формул замены переменных $\tau = \dfrac{r-r_s}{\nu^{2/5}}$ и $\tau = \omega\left(\dfrac{\bar{\gamma}}{ac}\right)^{1/4}$

$$\delta = \nu^{2/5}\left(\frac{\bar{\gamma}}{ac}\right)^{1/4} = \nu^{2/5}\left(\frac{\bar{\gamma}\, f_\rho}{m^2\mu'^2 f_\sigma}\right)^{1/4} = \qquad (\text{П17})$$

$$= C_0^{-1/5}\,\Delta'^{\,1/5}\left(\frac{\nu}{f_\sigma}\right)^{2/5}(m|\mu'|)^{-2/5}\, f_\rho^{1/5}.$$

Отметим, что константа C_0 допускает следующую интерпретацию. Пусть $y(x)$ есть решение задачи

$$y'' - x^2 y = 0, \quad x \geqslant 0 \qquad (\text{П18})$$

$$y|_{x=0} = 1, \quad y|_{x=\infty} = 0 \qquad (\text{П19})$$

Тогда $C_0 = -\pi y'(0)$. Численное решение задачи (П18),(П19) дает $C_0 = 2.12366$. Точное значение C_0 было найдено Фюртом:

$$C_0 = 2\pi\,\frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} = 2\;12365.$$

Приложение 2. Аналитические формулы для сглаженных двухступенчатых профилей тока

В качестве сглаженной ступенчатой функции удобно использовать функцию

$$s_0(r; A,B,C) = A \{ 1 + \pi^{-1} \operatorname{arctg} [B(r - C)] \},$$

зависящую от параметров A, B, C. Величина A задает высоту ступеньки, B – ее крутизну, C – ее координату. При построении двухступенчатых профилей тока мы пользовались функцией

$$s(r; A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2) = s_0(r, A_1, B_1, C_1) + s_0(r; A_2, B_2, C_2),$$

зависящей от шести параметров. Их варьирование позволяет изменять количественные характеристики сглаженной двухступенчатой функции – крутизну ступенек, их высоту и относительное расположение. Отметим значения параметров для профилей, изображенных на рис. 7–9:

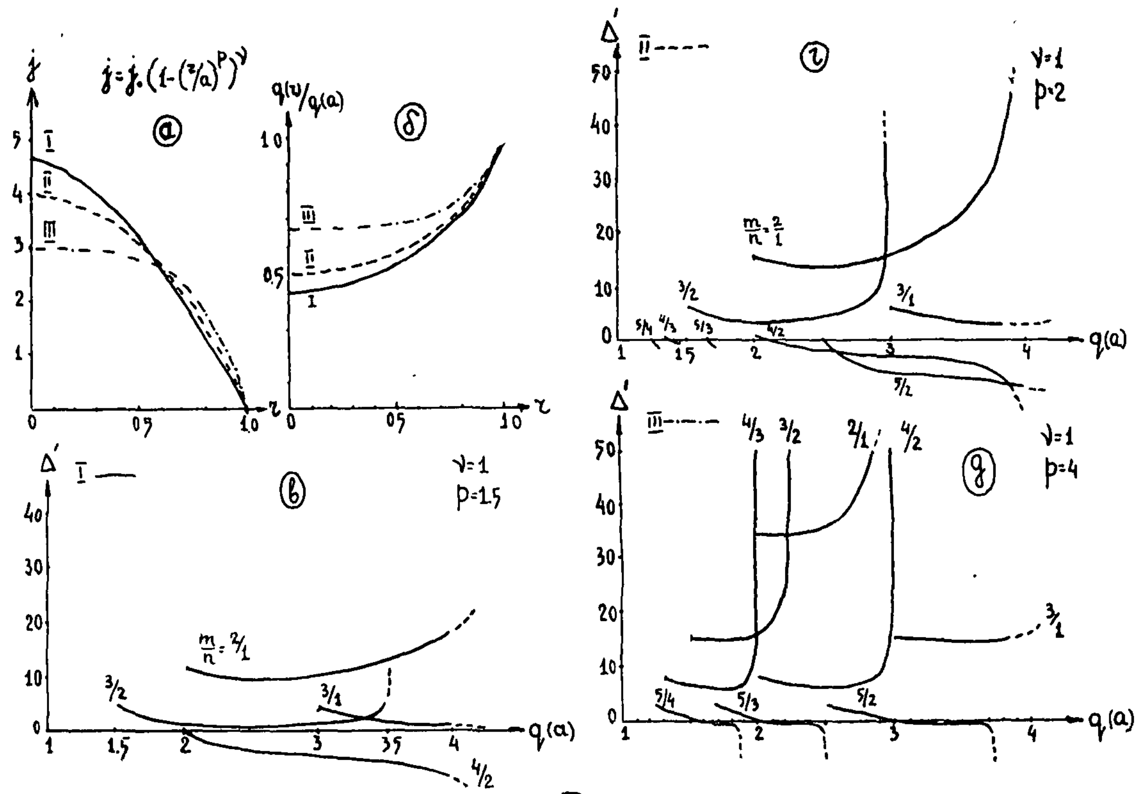
рис.7 $A_1/A_2 = 2$, $B_1 = B_2 = 6$, $C_1 = 0.5$, $C_2 = 0.9$;

рис.8 $A_1/A_2 = 2$, $B_1 = B_2 = 6$, $C_1 = 0.3$, $C_2 = 0.9$;

рис.9 $A_1/A_2 = 2$, $B_1 = B_2 = 6$, $C_1 = 0.3$, $C_2 = 0.7$

ЛИТЕРАТУРА

1. Шафранов В.Д. ЖТФ, 1970, 40, 241.
2. Furth H.P.,Rutherford P.H.,Selberg H.,Phys.Fluids,1973,16, 1054.
3. Wesson J.A. in: Controlled Fusion and Plasma Physics. Proc. 7th Europ. Conf.,Lausanne,1975,2,102.
4. Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П., Попов А.М., Препринт ВЦ МГУ, 1971.
5. Блехер П.М., Зуева Н.М., Юрченко Э.И., Препринт ИПМ, 1981, № 144.
6. Блехер П.М., Зуева Н.М., Юрченко Э.И., Препринт ИПМ, 1982.
7. Glasser A.H.,Furth H.P.,Rutherford P.H.,Phys.Rev.Lett., 1977,38,234.
8. White R.B.,Monticello D.A.,Rosenbluth M.N.,Waddell B.V., Phys.Fluids,1977,20,800.
9. Furth H.P.,Killeen J.,Rosenbluth M.N.,Phys.Fluids,1963,6, 459.
10. Блехер П.М., Зуева Н.М., Юрченко Э.И., Препринт ИПМ, 1982.



j = j₀(1-(r/a)^p)^ν
a
б
в
г
д
ν=1
p=1.5
ν=1
p=2
ν=1
p=4
q(r)/q(a)
q(a)
Δ'
m/n = 2/1
3/2
3/1
4/2
5/2
5/3
5/4
4/3
2/1
I
II
III

Рис. 1

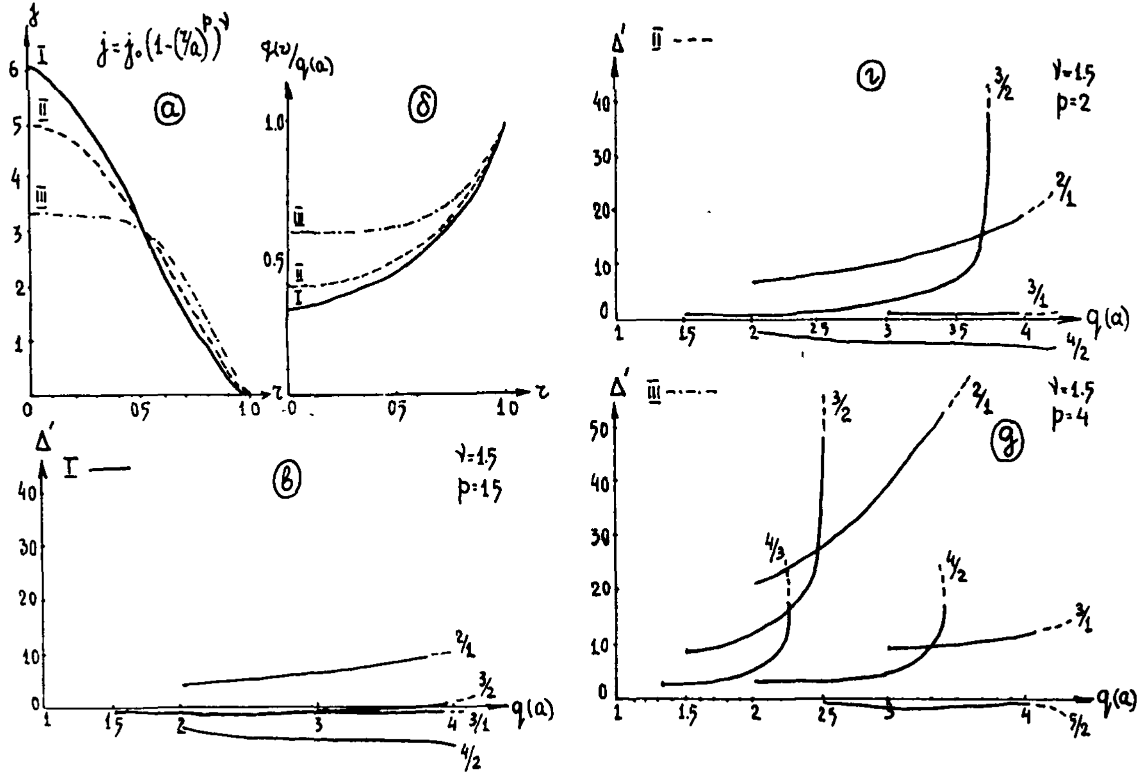
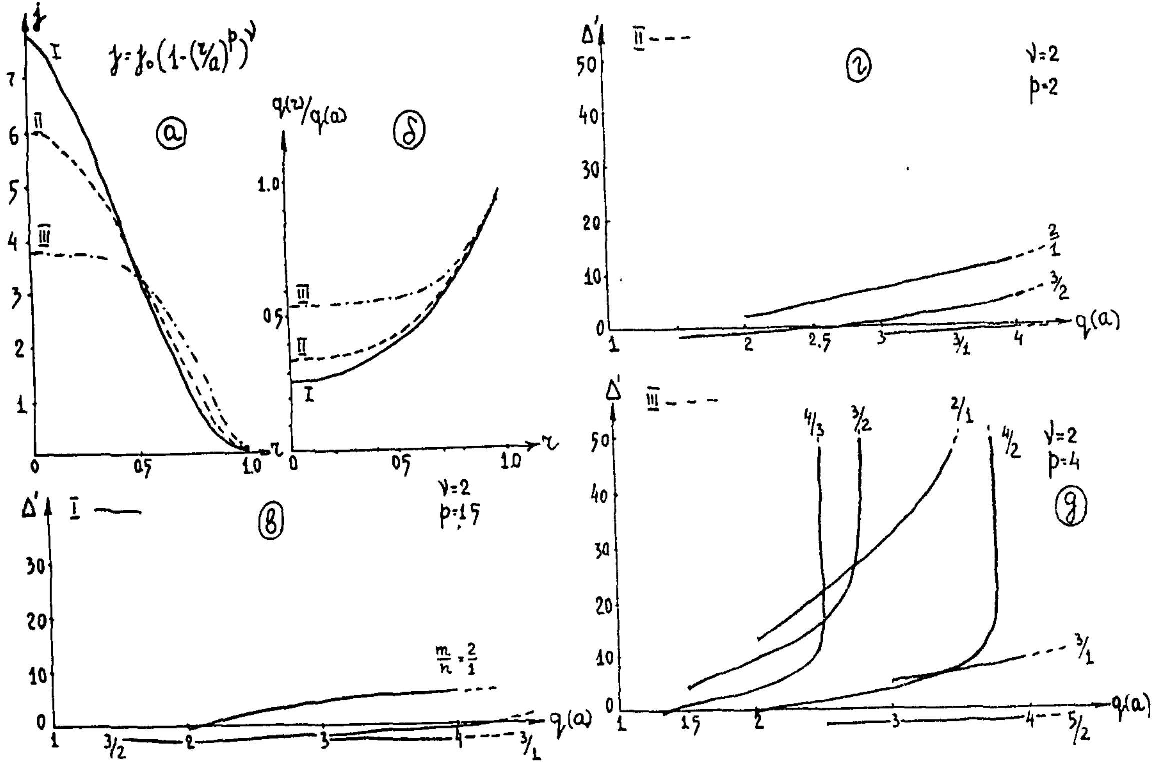
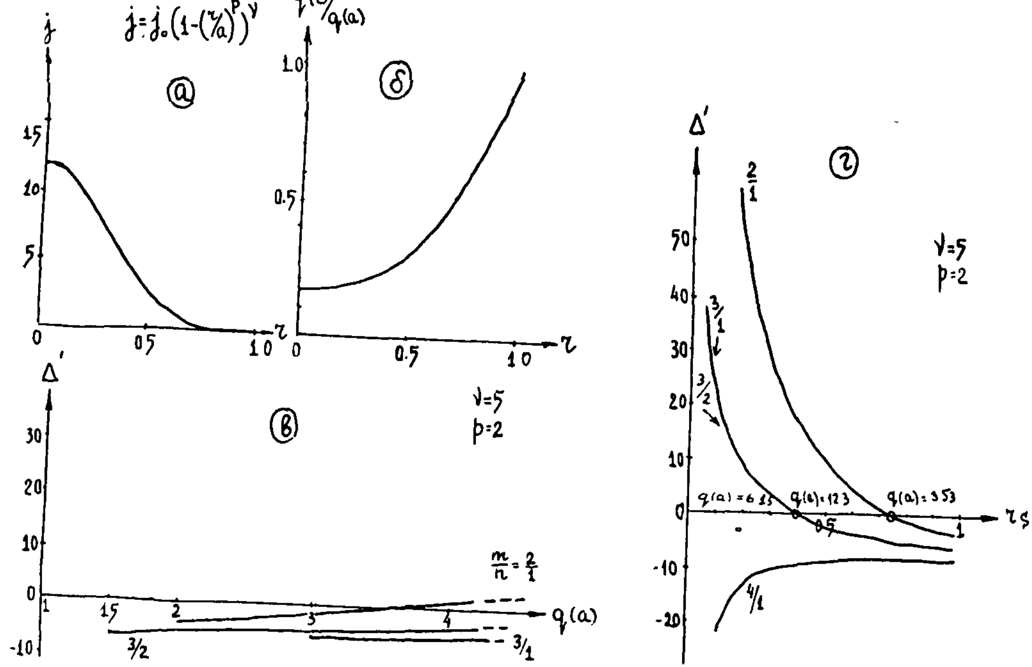

$j = j_0(1-(r/a)^p)^\nu$
а
б
в
г
д
$q(r)/q(a)$
Δ'
I —
II - - -
III -·-·-
$\nu=1.5$ p=1.5
$\nu=1.5$ p=2
$\nu=1.5$ p=4
q(a)

Рис. 2



$j = j_0 (1-(r/a)^p)^\nu$
а
б
в
г
д
$q(r)/q(a)$
Δ'
$q(a)$
I
II
III
$\nu=2$
$p=1.5$
$\nu=2$
$p=2$
$\nu=2$
$p=4$
$\frac{m}{n}=\frac{2}{1}$

Рис. 3



$j = j_0 (1-(r/a)^p)^\nu$
а
б
в
г
$q(r)/q(a)$
$\nu=5$
$p=2$
$\nu=5$
$p=2$
$\frac{m}{n}=\frac{2}{1}$
3/2
3/1
2/1
4/1
$q(a)=6.15$
$q(a)=1.23$
$q(a)=3.53$
Δ'
$q(a)$

Рис. 4

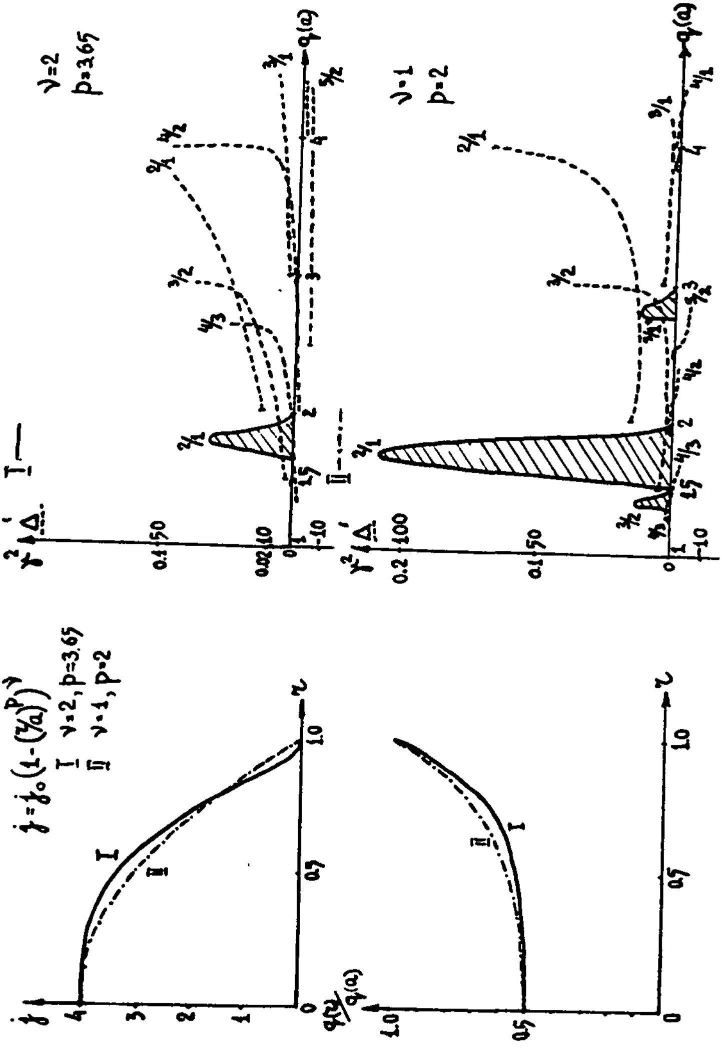
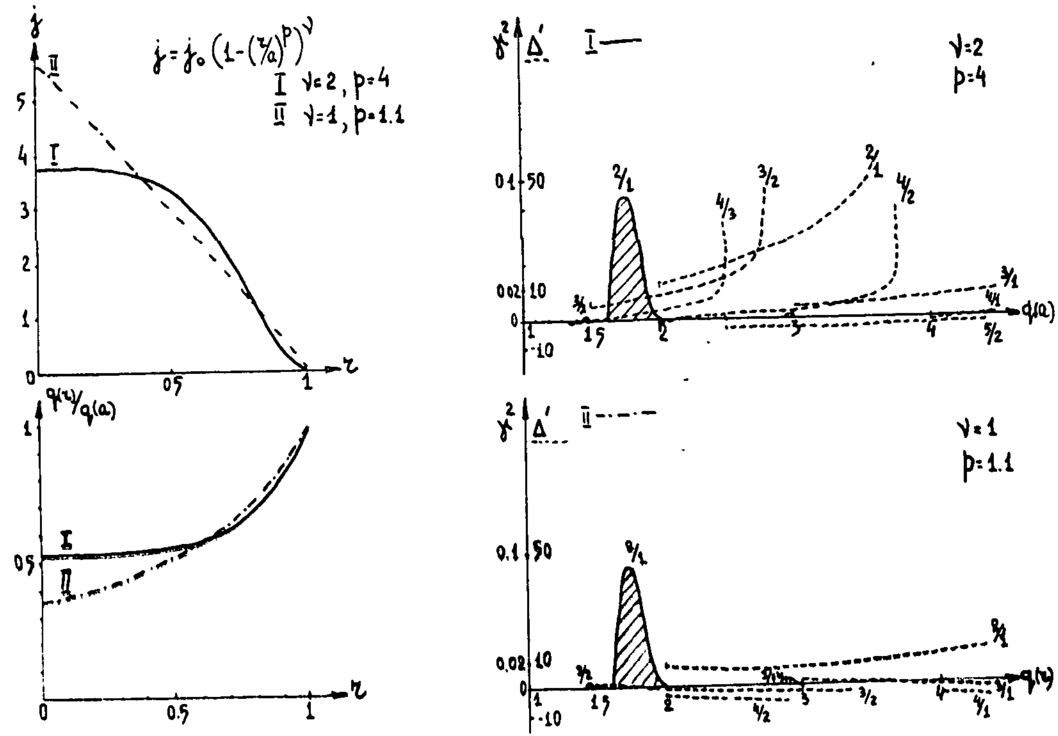


Рис. 5



$j = j_0 (1-(r/a)^p)^\nu$
I $\nu=2$, $p=4$
II $\nu=1$, $p=1.1$
$q(r)/q(a)$
γ^2 Δ'
I
II
$\nu=2$
$p=4$
$\nu=1$
$p=1.1$
$q(a)$

Рис. 6

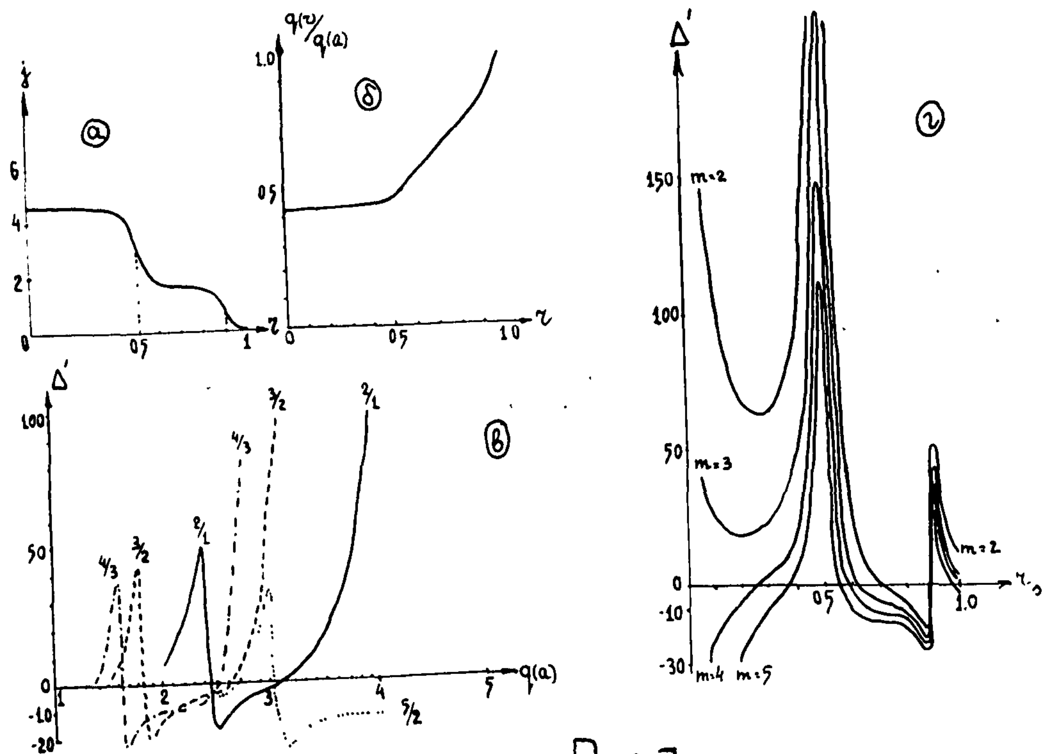


Рис. 7

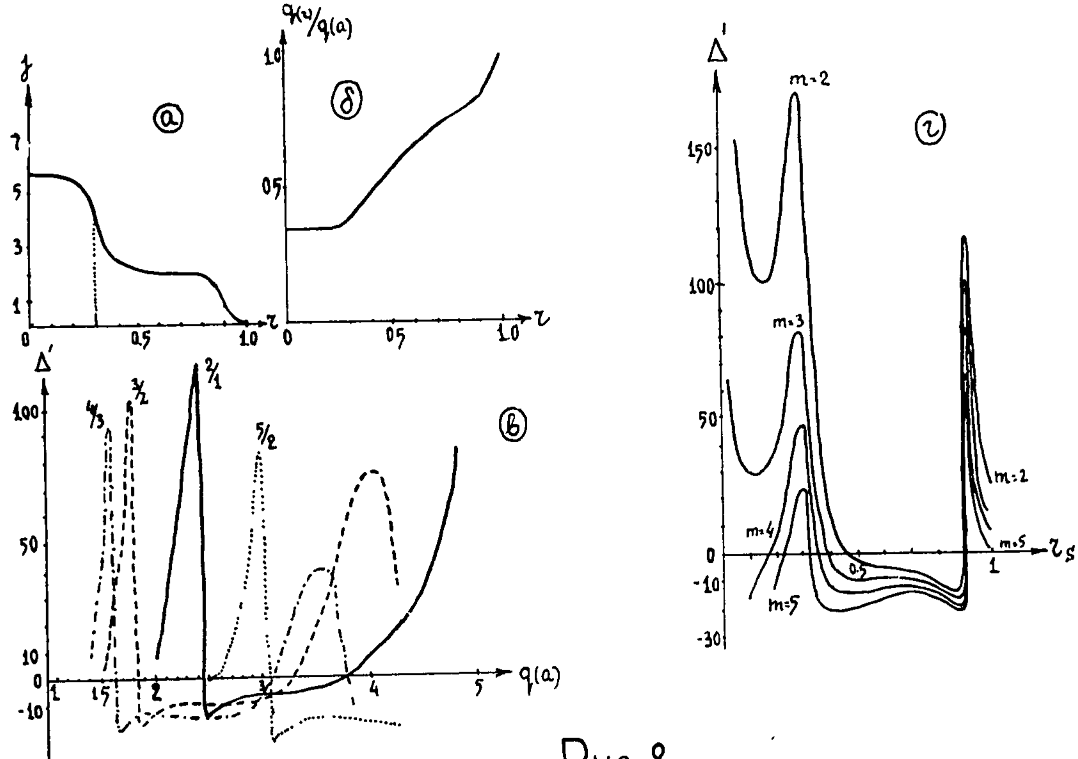


Рис. 8

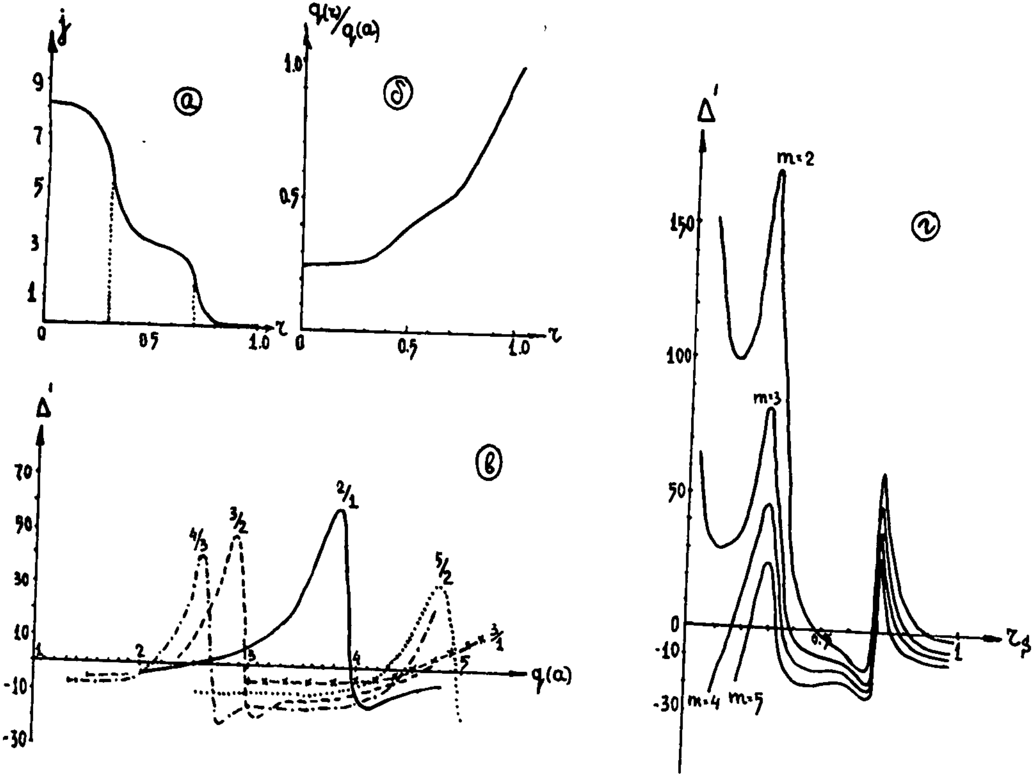


Рис. 9

П.М. Блехер, Н.М. Зуева, Э.И. Юрченко " Расчеты влияния профиля тока на тиринг-неустойчивость. "
Редактор В.В. Савельев.   Корректор А.М. Заборов.

Подписано к печати 06.10.82 г. № Т-08176. Заказ № 743.
Формат бумаги 60Х90 1/16. Тираж 190 экз.
Объем 1,6 уч.изд.л. Цена 12 коп.

055(02)2

Отпечатано на ротапринтах в Институте прикладной математики АН СССР
Москва, Миусская пл. 4.