II. EL METODO DE LAS ECUACIONES INTEGRALES

N84-29250

TM 77449
(0507-237)
File Copy

P. KITTL.
Instituto de Investigaciones y Ensayes de Materiales (IDIEM),
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de
Chile, Santiago (Chile).

RESUMEN

~~En el presente trabajo se muestra cómo con un ensayo de flexión se puede encontrar la función riesgo de Weibull, sin postular su forma analítica, resolviendo una ecuación integral. Se dan las fórmulas para el caso de vigas de sección rectangular y circular, en el primer caso la solución se expresa por un algoritmo de derivación y en el segundo por medio de series. Como la función probabilidad acumulativa de fractura que aparece en la solución de las ecuaciones integrales sólo tiene que ser continua y creciente, se pueden tratar cualquier caso de fabricación y selección de piezas~~

SUMMARY

The present work shows how, with the aid of a bending test, the Weibull fracture risk function can be determined without postuling its analytical form, resolving an integral ecuation.

The respectives solutions for rectangular and circular sections beams are given. In the first case the function are expressed in form of an algorithm and in the second, in form of series. Taking into account that the cumulative fracture probability that appears in the solutions of the integral equation must be continuous and monotonic increasing, any case of fabrication or selection of samples can be treated.

agregar

RESUME

~~Dans ce travail on démontre comment avec un essai de flexion on peut trouver la fouction de risque de Weibull sans postuler sa forme analitique, en cherchant la solution d'une equation intégrale. On donne les formules pour le cas des poutres de section reactangulaire et circulaire, dans le premier cas la solution s'énonce par un algorithme de dérivation et dans le second au moyen de séries. Comme la fouction probabilité accumultaive de fracture que l'on trouve dans la solution des écuations intégrales doit suelement être continue y croissante, on peut traiter n'importe quel cas de fabrication et sélection de pièces.~~

ZUSAMMENFASSUNG.

~~In der vorliegenden Arbeit wird dargelegt, wie mittles eines Beigeversuchs die Weibullsche Risikofunktion –ohne deren analytische Form zur Bedingung zu machen– durch Auflosung einer Integralgleichung bestimmt werden kann Die Formeln fur Trager mit rechteckigem und rundem Querschnitt werden angegeben, fur erstere wird die Losung durch den Algorithmus einer Abeitung, fur die Rundtrager durch Reihen darsgestellt. Da die bei der Auflösung der Integralgleichungen auftrentende Fuktion der kumulierten Bruchwahrscheinlichkeit nur stetig und zunehmend sein muss, kann sie auf alle Fabrikationsfalle und Prufstuck-Auswahlen angewandt werden.~~

INTRODUCCION

La fórmula que vincula la probabilidad acumulativa de fractura $F(\sigma)$ con un campo variable de tensiones de tracción $\sigma(r) = \sigma\,(x,y,z) = \sigma f\,(x,y,z)$, con $[f\,(x,y,z)] \leq 1$ para rev, ya fue establecida por Weibull (1, 2):

$$F(\sigma) = 1-\exp\left[-\frac{1}{V_0}\int_V \varphi[\sigma(r)]\,dV\right] \qquad (1)$$

donde V_0 es la unidad de volumen y $\varphi(\sigma)$ la función riesgo de fractura. En el caso de una tensión constante:

$$\varphi[\sigma(r)] = \varphi(\sigma)$$

y (1) se transforma en

$$F(\sigma) = 1-\exp\left[-\frac{V}{V_0}\varphi(\sigma)\right] \qquad (2)$$

De la fórmula (2) se puede determinar $\phi(\sigma)$, conocida pro medidas experimentales $F(\sigma)$, despejándola

$$\varphi(\sigma) = \frac{V_0}{V}\ln\left[\frac{1}{1-F(\sigma)}\right] \qquad (3)$$

Pero como ya se observa desde los primeros ensayos de tracción en cuerpos frágiles (3), los errores experimentales introducen tensiones aleatorias $\Delta\sigma$ que son del orden de las σ. La magnitud de estos errores descarta, en general, el ensayo de tracción. Es, por lo tanto, necesario introducir los ensayos de flexión –con una o dos cargas al medio– y, en consecuencia, un campo variable de tensiones En ese caso es necesario darle una forma analítica a la función $\phi(\sigma)$ y resolviendo la integral de la fórmula (1) y puesto que se conoce $F(\sigma)$ por experiencias, determinar los parámetros de la función $\phi(\sigma)$. De esta manera si.

$$\varphi(\sigma) = \varphi_{\sigma_0,\sigma_L,m,\ldots}(\sigma) \qquad (4)$$

se tiene:

$$\int_V \varphi[\sigma(r)]\,dV = \Phi_{\sigma_0,\sigma_L,m,\ldots}(\sigma) \qquad (5)$$

y reemplazando (5) en (4) se tiene:

$$F(\sigma) = 1-\exp\left[-\frac{V}{V_0}\Phi_{\sigma_0,\sigma_L,m,}(\sigma)\right] \qquad (6)$$

La ecuación (6) permite encontrar σ_0, σ_1 y m, . . . y puesto que se conocen un número mayor de valores σ en (6) que el número de parámetros σ_0, σ_1, m, . . . , se puede –por algún criterio de ajuste– encontrar los valores de los parámetros que mejor se adaptan de acuerdo a ese criterio, que puede ser el de mínimos cuadrados, x^2, u otro Este problema de fácil enunciado es de difícil solución, lo que hizo introducir el método de las ecuaciones integrales (4, 5, 6) que permite obtener la función $\phi(\sigma)$ a partir de $F(\sigma)$ sin hacer hipótesis alguna sobre la forma de la función $\phi(\sigma)$, como se mostrará más adelante.

METODO DE LAS FUNCIONES DEFINIDAS

Cuando se adopta una forma definida para la función riesgo específico de fractura se puede resolver la integral en (1). Las funciones que se adoptan son las de Weibull:

$$\varphi(\sigma)=\begin{cases} 0,\ 0 \leqslant \sigma < \sigma_L \\ \left(\frac{\sigma-\sigma_L}{\sigma}\right)^m,\ \sigma \leqslant \sigma < \infty \end{cases} \tag{7}$$

o la Kies (7):

$$\varphi(\sigma)=\begin{cases} 0,\ 0 \leqslant \sigma < \sigma_L \\ \left(\frac{\sigma-\sigma_L}{\sigma-\sigma}\right)^m,\ \sigma \leqslant \sigma \leqslant \sigma_s \\ \infty,\ \sigma < \sigma < \infty \end{cases} \tag{8}$$

En el caso de Weibull normalmente $\sigma_1 = 0$, en el caso de que se adopte la función de Kies (8) la forma analítica de la integral en (1) es muy complicada y se descarta.

En la teoría elemental de la flexión el campo interno de tensiones de tracción se puede describir como fórmulas bastante simples. Usando estas expresiones para calcular la integral de la fórmula (1) se tiene:

(caso a) **Viga rectangular de altura h, ancho b y largo L, con una carga P al medio.**

$$0 \leqslant \sigma(x,y,z) = \frac{4xy\sigma}{Lh} \leqslant \sigma = \frac{3}{2}\,\frac{PL}{bh^2}$$

$$0 \leqslant x \leqslant L/2,\ 0 \leqslant y \leqslant h/2,\ 0 \leqslant z \leqslant b \tag{9}$$

$$\ln\left[\frac{1}{1-F(\sigma)}\right]=\begin{cases} \dfrac{\sigma_L^{m+1}\ bhL}{2V_0\sigma_0^m(m+1)\sigma}\displaystyle\int_1^{\sigma/\sigma_L}\frac{(\eta-1)^{m+1}}{\eta}\,d\eta\ (\sigma_L \neq 0) \\ \dfrac{L\,bh\,\sigma^m}{2(m+1)^2 V_0\sigma_0^m}\quad (\sigma_L = 0) \end{cases}$$

(caso b) **Viga sección circular de radio r y largo L, con carga P al medio**

$$0 \leqslant \sigma(x,y,z) = \frac{2xy\sigma}{rL} \leqslant \sigma = \frac{PL}{\pi r^3}$$

$$0 \leqslant X \leqslant L/2,\ 0 \leqslant y = \sqrt{r^2-z^2} \leqslant r,\ -r \leqslant z \leqslant +r \tag{10}$$

$$\ln\left[\frac{1}{1-F(\sigma)}\right]=\begin{cases} \dfrac{2\sigma_L^{m+1}Lr^2}{(m+1)V_0\sigma_0^m\sigma}\displaystyle\int_1^{\sigma/\sigma_L}\frac{(\eta+1)^{m+1}}{\eta}\left(1+\eta^2\frac{\sigma_L^2}{\sigma^2}\right)^{1/2}d\eta\ (\sigma_L = 0) \\ \dfrac{2Lr^2\sigma^m}{(m+1)V_0\sigma_0^m}\ \dfrac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+4}{2}\right)}\ \dfrac{\sqrt{\pi}}{4}\quad (\sigma_L = 0) \end{cases}$$

donde r (n) es la función gama de Euler.

(caso c) **Viga de sección-rectangular con un momento constante M = Pa en un largo L.**

$$0 \leqslant \sigma(x,y,z) = \frac{2y\sigma}{h} \leqslant \sigma = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6Pa}{bh^2}$$

$$0 \leqslant x \leqslant L,\ 0 \leqslant y \leqslant h/2,\ 0 \leqslant z \leqslant b \tag{11}$$

$$\ln\left[\frac{1}{1-F(\sigma)}\right] = \frac{bhL}{2(m+1)V_0}\cdot\frac{(\sigma-\sigma_L)^{m+1}}{\sigma_0^m\sigma}$$

(caso d) **Viga de sección circular de radio r y con un momento constante M = Pa en un largo L.**

$$0 \leqslant \sigma(x,y,z) = \frac{2y\sigma}{h} \leqslant \sigma = \frac{4M}{\pi r^3} = \frac{4Pa}{\pi r^3}$$

$$0 \leqslant x \leqslant L,\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{r^2-z^2} \leqslant r,\ -r \leqslant z \leqslant +r \tag{12}$$

$$\ln\left[\frac{1}{1-F(\sigma)}\right]=\begin{cases} \dfrac{Lr^2\sigma_L^{m+1}}{V_0\sigma_0^m\sigma}\displaystyle\int_1^{\sigma/\sigma_L}(\eta-1)^m\left(1-\eta^2\frac{\sigma_L^2}{\sigma^2}\right)^{1/2}d\eta\ (\sigma_L \neq 0) \\ \dfrac{2Lr^2}{V_0\sigma_0^m}\ \dfrac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+4}{2}\right)}\ \dfrac{\sqrt{\pi}}{4}\quad (\sigma_L = 0) \end{cases}$$

Cuando $\sigma_1 \neq 0$ el caso (c) es especialmente indicado para obtener σ_1 y m. Cuando $\sigma_1 = 0$ los casos (a) y (c) son simples. En el caso de barras cilíndricas, aunque son muy buenas para eliminar los momentos de tensión que aparecen por errores geométricos, son de cálculo bastante difícil, aunque teniendo en cuenta (11), se puede determinar m y luego los cálculos de las integrales se simplifican para obtener σ_1. De todos modos se ve cómo se trata de una serie de tanteos y cálculos, en algunos casos, muy difíciles. Todo ésto se simplifica con el método de las ecuaciones integrales, como se verá en párrafo siguiente.

EL METODO DE LAS ECUACIONES INTEGRALES

Si suponemos que en el caso (a) $\phi(\sigma)$ es una función desconocida, la integral de (1) al introducir el campo de tensiones (9) se transforma en:

$$\ln\left[\frac{1}{1-F(\sigma)}\right]=\frac{2}{V_0}\int_0^b dz\int_0^{h/2} dy\int_0^{L/2}\varphi\left(\frac{4\sigma xy}{Lh}\right)dx=$$
$$=\frac{bhL}{2\sigma V}\int_0^{h/2}\frac{dy}{y}\int_0^{L/2}\varphi\left(\frac{4\sigma xy}{Lh}\right)\frac{4\sigma y\,dx}{hL} \qquad (13)$$

Introduciendo en (13) los cambios de variables

$$\mathcal{E}=\frac{4\sigma xy}{Lh}\ ,\quad \eta=\frac{2\sigma y}{h} \qquad (14)$$

se obtiene finalmente:

$$\ln\left[\frac{1}{1-F(\sigma)}\right]=\frac{hbL}{2\sigma V_0}\int_0^{\sigma}\frac{d\eta}{\eta}\int_0^{\eta}\varphi(\mathcal{E})\,d\mathcal{E} \qquad (15)$$

Derivando dos veces (15) con respecto a σ se tiene

$$\varphi(\sigma)=\frac{2V}{bhL}\,\frac{d}{d\sigma}\left[\sigma\frac{d}{d\sigma}\left\{\sigma\ln\left[\frac{1}{1-F(\sigma)}\right]\right\}\right] \qquad (16)$$

La fórmula (16) es un algoritmo de fácil aplicación a la curva $\ln\,[1/1\text{-}F(\sigma)]$, que se puede trazar aproximándola con una parábola de grado variable de acuerdo a los casos, por un simple trazado geométrico.

En el caso b se obtiene de una forma similar la ecuación integral:

$$\ln\left[\frac{1}{1-F(\sigma)}\right]=\frac{4Lr^2}{V_0}\int_0^1\int_0^1\varphi(\mathcal{E}\eta\sigma)\sqrt{1-\eta^2}\;d\mathcal{E}\,d\eta \qquad (17)$$

que debe resolverse desarrollando en serie $\phi(\sigma)$, con lo que se tiene

$$\varphi(\sigma)=\frac{V_0}{\sqrt{\pi}Lr^2}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{n+1}{n!}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+4}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\left\{\ln\left[\frac{1}{1-F(\sigma)}\right]\right\}^{(n)}\sigma^{n} \qquad (18)$$

Para el caso (c), la ecuación integral es:

$$\ln\left[\frac{1}{1-F(\sigma)}\right]=\frac{bhL}{2V_0\sigma}\int_0^{\sigma}\varphi(\eta)\,d\eta \qquad (19)$$

cuya solución se obtiene por simple derivación de (19)

$$\varphi(\sigma)=\frac{2V_0}{bhL}\,\frac{d}{d\sigma}\left\{\sigma\ln\left[\frac{1}{1-F(\sigma)}\right]\right\} \qquad (20)$$

Finalmente, el caso (d) se obtiene:

$$\ln\left[\frac{1}{1-F(\sigma)}\right]=\frac{2Lr}{V_0}\int_0^1\varphi(\mathcal{E}\sigma)\sqrt{1-\mathcal{E}^2}\;d\mathcal{E} \qquad (21)$$

cuya solución es:

$$\varphi(\sigma)=\frac{2V_0}{\sqrt{\pi}Lr^2}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{n!}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+4}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\left\{\ln\left[\frac{1}{1-F(\sigma)}\right]\right\}^{(n)}\sigma^{n} \qquad (22)$$

En todos los casos tratados por el método de las ecuaciones integrales, la solución es sistemática y se obtiene como algoritmos fácilmente aplicables a la función $\ln\,[1/1\text{-}F(\sigma)]$ que se puede aproximar con parábolas de grado superior. En el texto hemos usado la función $\phi(\sigma)$, en lugar de $g(\sigma) = \not{g}(\sigma)$ que usan Matthews y colaboradores (4) o Evans y Jones (5). El uso de $\phi(\sigma)$ simplifica el problema y no enmáscara la verdadera forma de las ecuaciones integrales y su solución. Como ejemplo, la fórmula compacta (15) se transforma en:

$$g(\sigma)=\frac{2V_0}{bhL}\left\{4\frac{d}{d\sigma}\left[\ln\frac{1}{1-F(\sigma)}\right]+\right.$$

de aplicación más difícil.

$$\left.+5\sigma\frac{d^2}{d\sigma^2}\left[\ln\frac{1}{1-F(\sigma)}\right]+\sigma^2\frac{d^3}{d\sigma^3}\left[\ln\frac{1}{1-F(\sigma)}\right]\right\} \qquad (23)$$

BIBLIOGRAFIA

(1) Weibull, W., Phenomenon of Rupture in Solids, Proc. Roy. Swedish Inst. Eng. Res. N^{O} 153, (1939), pp. 1-55

(2) Freudenthal, A.M., Statistical approach to brittle fracture. In: Fracture, an advanced treatise. H. Liebowitz (ed), New York, Academic Press, (1968), Vol 2, Chapt 6, pp. 591-619.

(3) Marshall, C.W. y Rudnick, A., Conventional strength testing of ceramics. In: Fracture Mechanics of Ceramics, Bradt, Hasselman y Lange (ed), New York, Plenum Press, (1973), Vol 1, pp. 69-92.

(4) Matthews, J.R., Mc. Clintock, F.A. y Shack, W.J., Statistical determination of surface flaw density in brittle materials., J. Am. Ceram Soc., (1976), Vol 59, pp. 304-308.

(5) Evans, A.G. y Jones, R.L., Evaluation of a fundamental approach for statistical analysis of fracture J Am. Ceram. Soc , (1978), Vol. 61, pp. 156-160.

(6) Kittl, P , Transformation of a flexural stress Weibull's diagram into a tractional one. Res Mechanica, (1980) Vol. 1, pp. 161-165.

(7) Kies, J.A , The strenght of glass. NRL Report 5093 Naval Research Lab , Washington D C , (1958)