

# 第12回数学総合若手研究集会

～ 数学の交叉点 ～

The 12th Mathematics Conference for Young Researchers

—MCYR12—

世話人

土田旭 相川勇輔 浅原啓輔 阿部眞尊  
加葉田雄太朗 齋藤逸人 中村文彦 本多俊一

札幌, 2016

Series#165.February, 2016

**HOKKAIDO UNIVERSITY**  
**TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS**  
<http://eprints3.math.sci.hokudai.ac.jp/view/type/techreport.html>

- #143 M. Hayashi, T. Nakazi, M. Yamada and R. Yoneda, 第 18 回関数空間セミナー, 80 pages. 2010.
- #144 Liang Chen, Doctoral thesis “On differential geometry of surfaces in anti de Sitter 3-space”, 79 pages. 2010.
- #145 T. Funaki, Y. Giga, M.-H. Giga, H. Ishii, R. V. Kohn, P. Rybka, T. Sakajo, P. E. Souganidis, Y. Tonegawa, and E. Yokoyama, Proceedings of minisemester on evolution of interfaces, Sapporo 2010, 279 pages. 2010.
- #146 T. Ozawa, Y. Giga, T. Sakajo, H. Takaoka, K. Tsutaya, Y. Tonegawa, and G. Nakamura, Proceedings of the 35th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 67 pages. 2010.
- #147 M. Hayashi, T. Nakazi, M. Yamada and R. Yoneda, 第 19 回関数空間セミナー, 111 pages. 2011.
- #148 T. Fukunaga, N. Nakashima, A. Sekisaka, T. Sugai, K. Takasao and K. Umeta, 第 7 回数学総合若手研究集会, 280 pages. 2011.
- #149 M. Kasedou, Doctoral thesis “Differential geometry of spacelike submanifolds in de Sitter space”, 69 pages. 2011.
- #150 T. Ozawa, Y. Giga, T. Sakajo, S. Jimbo, H. Takaoka, K. Tsutaya, Y. Tonegawa and G. Nakamura, Proceedings of the 36th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 63 pages. 2011.
- #151 K. Takasao, T. Ito, T. Sugai, D. Suyama, N. Nakashima, N. Miyagawa and A. Yano, 第 8 回数学総合若手研究集会, 286 pages. 2012.
- #152 M. Hayashi, T. Nakazi and M. Yamada, 第 20 回関数空間セミナー, 89 pages. 2012.
- #153 Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, T. Ozawa, T. Sakajo, H. Takaoka, Y. Tonegawa and K. Tsutaya, Proceedings of the 37th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 81 pages. 2012.
- #154 N. Hu, Doctoral thesis “Affine geometry of space curves and homogeneous surfaces”, 69 pages. 2012.
- #155 2013 代数幾何学シンポジウム, 127 pages. 2013.
- #156 M. Hayashi, S. Miyajima, T. Nakazi, I. Saito and M. Yamada, 第 21 回関数空間セミナー, 90 pages. 2013.
- #157 D. Suyama, T. Ito, M. Kuroda, Y. Goto, N. Teranishi, S. Futakuchi, T. Fuda and N. Miyagawa, 第 9 回数学総合若手研究集会, 344 pages. 2013.
- #158 Y. Giga, S. Jimbo, H. Terao, K. Yamaguchi, Proceedings of the 6th Pacific RIM Conference on Mathematics 2013, 154 pages. 2013.
- #159 Y. Giga, S. Jimbo, T. Ozawa, K. Tsutaya, Y. Tonegawa, H. Kubo, T. Sakajo, and H. Takaoka, Proceedings of the 38th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 76 pages. 2013.
- #160 M. Kuroda, Y. Goto, K. Sasaki, S. Futakuchi, D. Funakawa, T. Yamashita, and K. Wada, 第 10 回数学総合若手研究集会, 335 pages. 2014.
- #161 S. Ei, Y. Giga, S. Jimbo, H. Kubo, T. Ozawa, T. Sakajo, H. Takaoka, Y. Tonegawa, and K. Tsutaya, Proceedings of the 39th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 147 pages. 2014.
- #162 D. Funakawa, T. Kagaya, Y. Kabata, K. Sasaki, H. Takeda, Y. Chino, A. Tsuchida, T. Yamashita, and K. Wada, 第 11 回数学総合若手研究集会, 359 pages. 2015.
- #163 S. Jimbo, S. Goto, Y. Kohsaka, H. Kubo, Y. Maekawa, and M. Ohnuma, Mathematics for Nonlinear Phenomena: Analysis and Computation - International Conference in honor of Professor Yoshikazu Giga on his 60th birthday - , 47 pages. 2015.
- #164 S. Ei, Y. Giga, S. Jimbo, H. Kubo, T. Ozawa, T. Sakajo, H. Takaoka, Y. Tonegawa and K. Tsutaya, Proceedings of the 40th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 122 pages. 2015.

# はじめに

大学院生および若手研究者により組織・運営されているこの数学総合若手研究集会も今年で第12回を迎えることとなりました。当研究集会は、数学に関わる物理・化学・経済・工学・医学などの様々な分野の若手研究者の講演の場となることで、研究の発展および人的ネットワークの構築を目的として行われてきました。近年、多くの分野で数学的手法が取り入れられているなか、本研究集会のように数学を中心とした分野間交流を行うことは意義があると信じております。当研究集会を支援して下さる皆様のおかげで研究集会としての規模も年々大きくなり、今年は幅広い分野の若手研究者の方々61名にご講演して頂くこととなりました。

当研究集会の講演は、口頭発表であるシングルセッション(60分)とパラレルセッション(30分)、そしてポスターセッションからなります。シングルセッションは、あらゆる分野の参加者を対象とした講演であり、問題の背景・動機などを含んだ入門的な内容となっております。パラレルセッションでは、分野ごとに部屋を分け、より専門的な内容の講演が行われます。ポスターセッションは講演者と聴講者との間の自由な議論の場となっております。

このテクニカルレポート集は講演者の皆様から事前に提供して頂いた原稿を印刷し、まとめたものです。サブタイトルに「数学の交叉点」とありますように、数学が様々な分野の“交叉点”となることを目的とし、数学以外の分野の方々にもわかりやすく入門的な事項を含んだものとなっております。参加者の皆様が講演をより深く理解し、またご自身の研究を進展させる一助となればこの上ない喜びです。

開催にあたり

- 講演者の皆様・参加者の皆様
- 北大数学教室の先生方
- 数学事務室の方々
- 過去の数学総合若手研究集会世話人の方々

から多大なるご支援を頂きました。この場を借りて心より感謝申し上げます。

また今年も、より円滑な運営のため、ウェブ上での申し込みを継続致しました。申し込みフォームの制作・管理は広島大学の山口崇幸氏主導の下で行われております。山口氏に厚くお礼申し上げます。

なお、この研究集会は北海道大学大学院理学研究院数学部門の財政的援助を受けて開催されています。深く感謝いたしております。

2016年2月

MCYR12 世話人

土田旭(代表) 相川勇輔 浅原啓輔 阿部眞尊  
加葉田雄太郎 齋藤逸人 中村文彦 本多俊一

# 第12回 数学総合若手研究集会

～数学の交叉点～

The 12th Mathematics Conference for Young Researchers

日時：2016年2月29日(月)～3月3日(木)

場所：北海道大学 理学部5号館

S : 大講堂5-203 (シングル会場)    A : 5-305 (パラレル会場)  
B : 5-206 (パラレル会場)        C : 5-205 (パラレル会場)  
D : 5-304 (パラレル会場)        E : 5-201 (ポスター会場・休憩所)

URL:<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~wakate/mcyr/2016/index.html>

## ● シングルセッション (会場S)

平川 義之輔 (Yoshinosuke HIRAKAWA)	慶應義塾大学理工学研究科	
On the descent of certain modular Calabi-Yau varieties via the Cynk-Hulek construction .....		3
後藤 良彰 (Yoshiaki GOTO)	神戸大学大学院理学研究科数学専攻	
超幾何多項式の数値計算と隣接関係式 .....		11
川越 大輔 (Daisuke KAWAGOE)	京都大学大学院情報学研究科複雑系科学専攻	
定常輸送方程式の解の正則性とその拡散光トモグラフィへの応用 .....		21
小山 民雄 (Tamio KOYAMA)	東京大学大学院情報理工学研究科数理情報学専攻	
Holonomic gradient method for the probability content of a simplex region with a multivariate normal distribution .....		28
岡本 健太郎 (Kentaro OKAMOTO)	九州大学大学院数理学府数理学専攻	
ゼータ関数と結び目不変量 .....		37
緒方 勇太 (Yuta OGATA)	神戸大学大学院理学研究科数学専攻	
平面的な曲率線をもつ極小曲面の分類とその変形について .....		44
大場 貴裕 (Takahiro OBA)	東京工業大学大学院理工学研究科数学専攻	
Compact Stein surfaces as branched coverings of $D^4$ with same branch sets .....		50
弓林 司 (Tsukasa YUMIBAYASHI)	首都大学東京大学院理工学研究科物理学専攻	
不変周期点代数多様体の“成分”と再帰方程式の“基本領域”の双対性 .....		57

## ● パラレルセッション (会場A)

大川 幸男 (Sachio OHKAWA)	東京大学大学院数理科学研究科	
On the Riemann-Hilbert correspondence for unit $F$ -crystals .....		67
辻栄 周平 (Shuhei TSUJIE)	北海道大学大学院理学研究院数学部門	
$\psi$ グラフ配置の自由性の頂点重み付きグラフの性質による特徴づけ .....		72
黒田 匡迪 (Masamichi KURODA)	北海道大学大学院理学研究院数学部門	
ある型の混合 Hodge 構造の分類空間のコンパクト化について .....		79

大竹 秀一 (Shuichi OTAKE)	早稲田大学基幹理工学部	
Orthogonal decompositions of integral trace forms of certain algebraic number fields via Bezoutians .		89
山縣 幸司 (Koji YAMAGATA)	名古屋工業大学院工学研究科情報工学専攻情報数理類	
円分体の最大実部分体の整数環について .....		93
百瀬 康弘 (Yasuhiro MOMOSE)	信州大学大学院総合工学系研究科	
行列戸田積と三角圏 .....		97
岩佐 亮明 (Ryomei IWASA)	東京大学大学院数理科学研究科	
Deformation of algebraic cycle classes on a degenerate fiber .....		100
田村 朋之 (Tomoyuki TAMURA)	九州大学大学院数理学府	
有限群の整数値指標と necklace ring の有限の台を持つ元に関する考察 .....		105
伊藤 孝明 (Takaaki ITO)	首都大学東京大学院理工学研究科数理情報科学専攻	
プロジェクトネットワークの最短完了時間として実現できるトロピカル多項式の特徴づけ .....		113
早坂 亮太 (Ryota HAYASAKA)	山形大学地域教育文化学部地域教育文化学科システム 情報学コース	
新しい格子不変量 .....		117
太田 和惟 (Kazuto OTA)	慶應義塾大学理工学部数理科学科	
On the Mazur-Tate refined conjecture of BSD type .....		122
<b>● パラレルセッション (会場B)</b>		
佐々野 詠淑 (Nagatoshi SASANO)	九州大学マス・フォア・インダストリ研究所	
双一次形式を用いて Lie 代数とその表現を次数つき Lie 代数に埋め込む方法 .....		129
李 滋錫 (Hyunseok LEE)	延世大学大学院数学専攻	
On Transcendence Theory with little history, new results and open problems .....		133
小山 宏次郎 (Kojiro OYAMA)	九州大学大学院数理学府数理学専攻	
Ohno-type relation for finite multiple zeta values .....		143
柴田 和樹 (Kazuki SHIBATA)	立教大学理学部	
マトロイドの組合せにおけるトーリックイデアルについて .....		148
金久保 有輝 (Yuki KANAKUBO)	上智大学大学院理工学研究科理工学専攻数学領域	
古典群の double Bruhat cell 上のクラスター変数と結晶基底 .....		150
大音 智弘 (Tomohiro OOTO)	筑波大学大学院数理物質科学研究科数学専攻	
有限係数のローラン級数におけるディオファントス近似 .....		160
土谷 昭善 (Akiyoshi TSUCHIYA)	大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻	
Gorenstein Fano polytopes arising from order polytopes and chain polytopes .....		169
原田 遼太郎 (Ryoutarou HARADA)	名古屋大学大学院多元数理科学研究科	
Euler の二重ゼータ値の公式について .....		174
鈴木 雄太 (Yuta SUZUKI)	名古屋大学大学院多元数理科学研究科	
素数と素数の $k$ 乗の和について .....		176

小野塚 友一 (Tomokazu ONOZUKA)	名古屋大学大学院多元数理科学研究科	
リーマンゼータ関数の導関数の $a$ 点 .....		182
川崎 菜穂 (Naho KAWASAKI)	京都産業大学大学院理学研究科数学専攻	
多重ゼータスター値の $q$ -類似の積分表示について .....		186

## ● パラレルセッション (会場C)

千野 由喜 (Yuki CHINO)	北海道大学大学院理学院数学専攻	
Self-avoiding walk on random conductors .....		195
長尾 秀人 (Hidehito NAGAO)	明石工業高等専門学校一般科目	
$q$ -Painlevé equation of type $E_6^{(1)}$ arising from Padé approximation .....		199
<b>Stefan HOROCHOLYN</b>	首都大学東京理工学研究科数理情報科学専攻	
On the Stokes matrices of the $tt^*$ -Toda equation .....		205
一木 信吾 (Shingo ICHIKI)	東京大学大学院工学系研究科	
隣接サイトの状態に依存する吸脱着機構を持つ完全非対称単純排他過程 .....		208
永原 健太郎 (Kentaro NAGAHARA)	東京工業大学大学院理工学研究科数学専攻	
ロジスティック成長する個体群に対して空間非一様性が与える影響 .....		211
北川 めぐみ (Megumi KITAGAWA)	お茶の水女子大学大学院人間文化創成科学研究科理学専攻	
Regular multiplicity ergodic actions of compact quantum groups .....		221
布田 徹 (Toru FUDA)	北海道大学大学院理学院数学専攻	
$\mathbb{Z}^d$ サブシフトにおける Brudno の定理 .....		225
板倉 恭平 (Kyohei ITAKURA)	神戸大学大学院理学研究科数学専攻	
一般化されたシュタルクハミルトニアンに対する固有値の非存在 .....		234
若狭 恭平 (Kyouhei WAKASA)	北海道大学大学院理学研究院数学部門	
非線型波動方程式に対する初期値問題の解析 .....		238
近内 翔太郎 (Shotaro KONNAI)	神戸大学理学研究科数学専攻	
中間畳み込みと接続係数 .....		243
船川 大樹 (Daiju FUNAKAWA)	北海道大学大学院理学院数学専攻	
ボース場と相互作用する量子系のモデルの基底状態に対する縮退度の評価 .....		248

## ● パラレルセッション (会場D)

劉 曉静 (Xiaojing LIU)	茨城大学理工学研究科宇宙地球システム科学専攻	
Remarks on Kato's inequality when $\Delta_p u$ is a measure .....		257
渡邊 一義 (Kazuyoshi WATANABE)	東北大学大学院理学研究科数学専攻	
Zero-point of continuous closed 1-form and Lusternik-Schnirelman type Category .....		261
藤沢 好 (Ko FUJISAWA)	北海道大学大学院理学院数学専攻	
同変理論の応用とその発展 .....		265
只野 誉 (Homare TADANO)	大阪大学大学院理学研究科数学専攻	
Ricci ソリトンとその種々の一般化について .....		270

佐竹 翔平 (Shohei SATAKE)	名古屋大学大学院情報科学研究科計算機数理科学専攻
Oriented graph の非対称性について .....	280
山本 悠登 (Yuto YAMAMOTO)	東京大学大学院数理科学研究科
トロピカル幾何学とモノドロミー変換 .....	283
久野 恵理香 (Erika KUNO)	東京工業大学大学院理工学研究科数学専攻
Right-angled Artin group のハンドル体群への埋め込みに関して .....	288
大森 源城 (Genki OMORI)	東京工業大学大学院理工学研究科数学専攻
向き付け不可能曲面の写像類群の表示について .....	292
韓 呼和 (Huhe HAN)	横浜国立大学
Strictly Convex Wulff Shapes and $C^1$ Convex Integrands .....	295
鉢州太 恵里香 (Erica BATISTA)	横浜国立大学
Topological classification of map germs using Reeb graphs .....	300
親木 翔平 (Shohei OYANOKI)	奈良教育大学大学院修士課程教育学専攻科数学教育専修 (情報を含む)
グラフに付随したハイパー群 .....	304

## ● ポスターセッション (会場 E)

金森 由妃 (Yuki KANAMORI)	北海道大学大学院環境科学院生物圏科学専攻
eigenvector sensitivity analysis による 生物群集の季節動態を駆動するプロセスの環境勾配に沿った空間パターン .....	315
加葉田 雄太朗 (Yutaro KABATA)	北海道大学大学院理学院数学専攻
Recognition problem of map-germs and applications .....	320
篠田 万穂 (Mao SHINODA)	慶應義塾大学大学院基礎理工学専攻数理科学専修
Ruelle-Perron-Frobenius の定理による Gibbs 測度の存在証明 .....	325
竹内 博志 (Hiroshi TAKEUCHI)	東北大学大学院理学研究科数学専攻
行列問題を用いた可換梯子型パーシステントホモロジー群の直既約分解 .....	329
野島 崇史 (Takafumi NOJIMA)	東京工業大学大学院理工学研究科数学専攻
局所 Hardy 空間の元を外力項とする Rivière 型方程式の弱解の正則性 .....	338
半田 悟 (Satoshi HANDA)	北海道大学大学院理学院数学専攻
イジング模型の確率幾何的解析について .....	344
<b>Glauber PEREIRA</b>	サンパウロ大学
Transmuted Logistic II Distribution .....	349
本多 俊一 (Shun'ichi HONDA)	北海道大学大学院理学院数学専攻
正則曲面上のフロントルと接触可展面 .....	353
山田 祐見 (Yumi YAMADA)	山形大学地域教育文化学部地域教育文化学科システム情報学コース
ルート系のエルハルト多項式とその零点 .....	359

世話人： 土田旭 (代表) 相川勇輔 浅原啓輔 阿部眞尊  
加葉田雄太朗 齋藤逸人 中村文彦 本多俊一

# Schedule

## 2月29日(月)

9:50-10:00	開会			
10:00-11:00	平川 義之輔 (代数)			
11:20-12:20	後藤 良彰 (解析)			
12:20-14:00	昼食			
	会場 A	会場 B	会場 C	会場 D
14:00-14:30	大川 幸男 (代数)	佐々野 詠淑 (代数)	千野 由喜 (数理)	劉 曉静 (解析)
14:50-15:20	辻栄 周平 (代数)	李 汝錫 (代数)	長尾 秀人 (解析)	渡邊 一義 (幾何)
15:40-16:10	黒田 匡迪 (代数)	小山 宏次郎 (代数)	HOROCHOLYN Stefan(数理)	藤沢 好 (幾何)
16:30-17:00	大竹 秀一 (代数)	柴田 和樹 (代数)	一木 信吾 (数理)	只野 誉 (幾何)

## 3月1日(火)

10:00-11:00	川越 大輔 (解析)			
11:20-12:20	小山 民雄 (数理)			
12:20-14:00	昼食			
	会場 A	会場 B	会場 C	会場 D
14:00-14:30	山縣 幸司 (代数)	金久保 有輝 (代数)	永原 健太郎 (数理)	佐竹 翔平 (幾何)
14:50-15:20	伊藤 孝明 (代数)	大音 智弘 (代数)	北川 めぐみ (解析)	山本 悠登 (幾何)
15:40-16:10	岩佐 亮明 (代数)	土谷 昭善 (代数)	布田 徹 (数理)	久野 恵理香 (幾何)
16:30-17:30	ポスターセッション (会場 E)			
18:30-20:30	懇親会			

## 3月2日(水)

10:00-11:00	岡本 健太郎 (代数)			
11:20-12:20	緒方 勇太 (幾何)			
12:20-14:00	昼食			
	会場 A	会場 B	会場 C	会場 D
14:00-14:30	田村 朋之 (代数)	原田 遼太郎 (代数)	板倉 恭平 (解析)	大森 源城 (幾何)
14:50-15:20	百瀬 康弘 (代数)	鈴木 雄太 (代数)	若狭 恭平 (解析)	韓 呼和 (幾何)
15:40-16:10	早坂 亮太 (代数)	小野塚 友一 (代数)	近内 翔太郎 (解析)	鉢州太 恵里香 (幾何)
16:30-17:00	太田 和惟 (代数)	川崎 菜穂 (代数)	船川 大樹 (解析)	親木 翔平 (代数)

## 3月3日(木)

10:00-11:00	大場 貴裕 (幾何)			
11:20-12:20	弓林 司 (数理)			
12:20-12:30	閉会			





# シングルセッション 会場S



# ON THE DESCENT OF CERTAIN MODULAR CALABI-YAU VARIETIES VIA THE CYNK-HULEK CONSTRUCTION

平川 義之輔 (Yoshinosuke Hirakawa)<sup>1</sup>

ABSTRACT. S. Cynk と K. Hulek は、低次元 Calabi-Yau 多様体から高次元 Calabi-Yau 多様体を帰納的に構成する方法を導入し、 $L$  関数が保型形式で記述される (保型的な) Calabi-Yau 多様体の例を構成した. (Canad. Math. Bull., 2007, 486–503.) 本稿では、彼らの方法に Weil 係数制限関手と K3 曲面 (Calabi-Yau 曲面) 上の固定点自由対合とを組み合わせること、有理数体上の保型的な Calabi-Yau 多様体の新たな例を構成する方法について述べる.

## 1. Introduction

この節では、数論幾何において“代数多様体の  $L$  関数と保型形式の  $L$  関数との対応関係”が重要視される背景を (非常に大雑把に) 紹介した後、本稿 §2 以降の構成を述べる.

数論幾何においては、Fermat 予想<sup>2</sup>に代表されるように、代数体上の代数多様体<sup>3</sup>の数論的な性質を調べることが、中心的な研究課題となっている. 特に、それらの代数多様体に付随する  $L$  関数と呼ばれる複素解析関数は、もとの代数多様体の数論的な性質を著しく反映していると期待されているため、最も重要な研究対象の 1 つである. 一方で、代数多様体の  $L$  関数の複素解析的な性質には未知な部分が多く、ミレニアム問題の 1 つである BSD 予想<sup>4</sup>に代表されるように、数多くの未解決問題が存在する. それらの未解決問題の中でも、Hasse-Weil 予想<sup>5</sup>は最も基本的な位置を占めており、実際有理数体  $\mathbb{Q}$  上の楕円曲線に対して Hasse-Weil 予想を証明することで、初めて BSD 予想の厳密な定式化が可能となった. しかし、 $\mathbb{Q}$  上の楕円曲線に対する Hasse-Weil 予想以上に、その証明に用いられた谷山-志村予想<sup>6</sup>は数論幾何に大きなインパクトをもたらした. 類似の性質を持つ代数多様体、あるいはそのコホモロジー群として生じる Galois 表現の研究が大きく進展した.

本稿では、上述の谷山-志村予想に代表される“代数多様体の  $L$  関数と保型形式の  $L$  関数との対応関係”について、著者により得られた結果 (Theorem 4.1) の紹介を行う. §2 では、基本的な用語を導入した後、本稿で紹介する諸研究の動機である B. Mazur と D. van Straten による問題 (Problem 2.4) を紹介する. §3 では、この問題に対する先行結果を紹介した後、それらの結果を拡張する上で生じる問題点について述べる. §4 では、著者が得た結果とその証明の概略を紹介する.

<sup>1</sup>慶應義塾大学理工学研究科後期博士課程 2 年 (e-mail: hirakawa@keio.jp)

<sup>2</sup>Fermat 曲線  $F_n : x^n + y^n = 1$  ( $n \geq 3$ ) 上の有理点は  $x = 0$  または  $y = 0$  を満たすものに限るであろう、という予想 (Fermat の最終“定理”とも呼ばれる). その名の通り P. Fermat により“定式化”され、L. Euler をはじめ多くの数学者により証明が試みられ、最終的には A. Wiles により証明された.

<sup>3</sup>有理数体  $\mathbb{Q}$  の有限次拡大体の元を係数とする代数方程式の零点集合として表される図形. 尚、本稿では、適当な埋め込みを固定して代数体を複素数体  $\mathbb{C}$  の部分体と見なす.

<sup>4</sup>楕円曲線  $E : y^2 = x^3 + ax + b$  上に有理点が無数に存在するならば  $L(E, 1) = 0$  であり、また  $L(E, 1) = 0$  となるのはそのときに限るであろう、という予想. (正確には、楕円曲線とは上の  $E$  に単位元 (無限遠点) を添加した群多様体であり、精密な形の BSD 予想は、 $L(E, s)$  を  $s = 1$  の周りで Taylor 展開したときの先頭項を  $E(\mathbb{Q})$  の群構造等を用いて明示的に記述できることを主張している.)

<sup>5</sup>任意の代数多様体の  $L$  関数は全複素平面上定義された有理型関数に解析接続可能であり、然るべき関数等式を満たすであろう、という予想.

<sup>6</sup> $\mathbb{Q}$  上の任意の楕円曲線  $E$  に対して、ある保型形式 (より正確には、正規化された Hecke 固有新尖点形式)  $f$  が存在して、 $L(f, s) = L(E, s)$  が成り立つという予想. 保型形式の  $L$  関数に対しては Hasse-Weil 予想に対応する定理が既に証明されているため、この予想から  $\mathbb{Q}$  上の楕円曲線に対する Hasse-Weil 予想が直ちに従う. A. Wiles と R. Taylor により semi-stable な楕円曲線に対して証明され、C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond, R. Taylor により一般の楕円曲線に対して証明された.

## 2. Preliminaries and motivation

まず、本稿の中心的な対象である (狭義の) Calabi-Yau 多様体とは、以下のような代数多様体である。

**Definition 2.1.** 体  $F^7$  上の  $d$  次元の滑らかな射影代数多様体  $X$  が  $d$  次元 Calabi-Yau 多様体であるとは、以下の 2 つが成り立つことである。

- (i)  $H^0(X, \Omega_X^p) = 0$  ( $1 \leq \forall p \leq d-1$ ), i.e.,  $H^q(X, \mathcal{O}_X) = 0$  ( $1 \leq \forall q \leq d-1$ )<sup>8</sup>,
- (ii)  $\Omega_X^d \simeq \mathcal{O}_X$ , i.e.,  $K_X \equiv 0$  modulo linear equivalence.<sup>9</sup>

**Example 2.2.** 1次元 Calabi-Yau 多様体は、種数 1 の滑らかな代数曲線に他ならない。実際、 $d=1$  のとき、(i) は空であり、(ii) は代数曲線  $X$  の種数が 1 であることと同値である。<sup>10</sup> 特に、複素数体  $\mathbb{C}$  上の 1次元 Calabi-Yau 多様体は、複素トーラスに他ならない。<sup>11</sup>

次に、本稿で扱う保型形式 (正規化された Hecke 固有尖点形式) とは、以下のような複素上半平面  $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$  上の正則関数である。<sup>12</sup>

**Definition 2.3.**  $\mathcal{H}$  上の正則関数  $f$  が重さ  $k \in \mathbb{Z}$ , レベル  $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  の正規化された Hecke 固有尖点形式であるとは、以下が成り立つことである。

- (i) (保型性) ある群準同型写像  $\varepsilon: (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  が存在して、任意の  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ , 及び  $z \in \mathcal{H}$  に対して、 $f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \varepsilon(d)(cz+d)^{-k}f(z)$  が成り立つ。<sup>13</sup>
- (ii) (緩増大性) 任意の  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$  に対して  $\lim_{z \rightarrow i\infty} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = 0$  が成り立つ。
- (iii) (正規性)  $\lim_{z \rightarrow i\infty} e^{-2\pi iz} f(z) = 1$  が成り立つ。
- (iv) (固有性)  $N$  と素な  $n \in \mathbb{Z}$  に対して、 $f$  は Hecke 作用素  $T_n$  の固有関数である。

$f$  を Hecke 固有尖点形式とする。任意の  $N$  に対して  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$  であるから、 $f$  は Fourier 展開  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi inz}$  を持つ。さらに、(ii), (iii) から、 $f(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{2\pi inz}$  であり、各 Fourier 係数  $a_n$  は (iv) における Hecke 作用素の固有値であることも分かる。このとき、 $f$  の  $L$  関数は  $L(f, s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$  ( $\text{Re}(s) \gg 0$ ) で定義される。

以上の準備の下で、本稿で紹介する諸研究の最も大きな動機である B. Mazur と D. van Starten による問題は、以下のように述べられる。

**Problem 2.4** ([7] §7).  $f_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi inz}$  を重さ  $k = d+1 \geq 2$  で  $a_n \in \mathbb{Q}$  となる Hecke 固有尖点形式 (新形式) とする。このとき、 $\mathbb{Q}$  上のある  $d$  次元 Calabi-Yau 多様体  $X$  の  $L$  関数  $L(X/\mathbb{Q}, s)$  の因子<sup>14</sup>に  $f$  の  $L$  関数  $L(f_k, s)$  が現れるか?

<sup>7</sup>本稿で扱う基礎体は  $\mathbb{C}$  の部分体であり、特に標数は 0 である。

<sup>8</sup>この同値性は Hodge 理論の帰結である。

<sup>9</sup>ここで、 $K_X$  は  $X$  上の標準因子 (類) を表す。また、この同値性は直線束、あるいは可逆層の同型類と因子の線形同値類との対応による。

<sup>10</sup>種数  $g$  の滑らかな代数曲線  $X$  に対して  $\deg(K_X) = 2g-2$  が分かる (例えば、Riemann-Roch の定理を用いればよい) ので、(ii) から  $g=1$  が従う。一方、(有理点を持つ) 種数 1 の代数曲線上には群構造が入り、その曲線上には至る所 0 でない正則微分形式 (不変微分形式) が定数倍を除いて一意に存在するので、(ii) が成り立つ。

<sup>11</sup>Riemann 面の一意化定理により、複素トーラスは至る所曲率 0 の Riemann 計量を許容する。(ii) を満たす複素多様体に対するこの事実の一般化が、S.-T. Yau により証明された Calabi 予想であり、(広義の) Calabi-Yau 多様体の名前の由来になっているようであるが、ここでは詳しく述べない。

<sup>12</sup>詳細、特に (iv) 及び後に出てくる Hecke 固有 “新” 尖点形式の定義は、[11], [4] を参照。

<sup>13</sup>ここで、 $\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$  であり、 $\varepsilon$  は  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  上に 0-延長している。

<sup>14</sup>代数多様体の  $L$  関数については [1] を参照。また、ここで言う因子とは、正確には  $\mathbb{Q}$  上の純モチーフの分解から生じる  $L$  関数の因子を指す。

### 3. Previous results

さて、前節で述べた Mazur と van Straten による問題 (Problem 2.4) に対する先行結果を述べる。まず、重さ 2 の保型形式、すなわち 1 次元 Calabi-Yau 多様体に対しては、志村五郎による先駆的な研究 [12] 等があり、Problem 2.4 は肯定的に解かれている。そこで、重さ 3 以上の保型形式に関する結果を述べるために、幾つか用語を導入する。

**Definition 3.1.** ある複素数  $z \in \mathbb{C}$  が代数的整数であるとは、 $z$  を根とする最高次係数が 1 の  $\mathbb{Z}$ -係数多項式が存在することである。また、代数体  $K$  の整数環  $\mathcal{O}_K$  とは、 $K$  に属する代数的整数全体のなす環である。さらに、各代数体  $K$  に対して、有限 Abel 群  $Cl(K) = \{K$  の 0 でない分数イデアル  $\} / \{K$  の 0 でない単元生成イデアル  $\}$  の位数を  $K$  の類数という。<sup>15</sup>

**Theorem 3.2** ([2] §2).  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$  ( $D \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ : 非平方数) を類数 1 の虚 2 次体、 $E$  を  $\mathbb{Q}$  上の楕円曲線で  $End_K(E) \simeq \mathcal{O}_K$  を満たすものとする。このとき、各  $d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  に対して、( $E$  から代数幾何的な手続きで構成される)  $\mathbb{Q}$  上のある  $d$  次元 Calabi-Yau 多様体  $X$  が存在して、 $L(X/\mathbb{Q}, s)$  の因子に  $L(f_{d+1}, s)$  が現れる。ここで、 $f_{d+1}(z) = \sum_{\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K} \psi_{E^n}(\mathfrak{a})^n e^{2\pi i z N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})}$  は  $d$  次元 CM Abel 多様体  $E^{d16}$  に付随する  $K$  の Hecke 指標  $\psi_{E^n}$  から定まる重さ  $k = d + 1$  の新形式<sup>17</sup>である。

その後、[2] による Calabi-Yau 多様体の構成方法と Weil 係数制限関手  $R_{F/F'}$ <sup>18</sup> とを組み合わせることで、S. Cynk と M. Schütt は  $\mathbb{Q}$  上の 3 次元 Calabi-Yau 多様体で、[2] の方法だけでは得られないものを構成した。

**Theorem 3.3** ([3] Proposition 8).  $K$  を類数 3 の虚 2 次体、 $E$  を  $\mathbb{Q}(j_E)$  上の  $\mathbb{Q}$ -楕円曲線<sup>19</sup> であって、 $End_{K(j_E)}(E) \simeq \mathcal{O}_K$  を満たし、かつ  $K/\mathbb{Q}$  の判別式を割らない素点で良い還元を持つものとする。このとき、( $E$  から代数幾何的な手続きで構成される)  $\mathbb{Q}$  上のある 3 次元 Calabi-Yau 多様体  $X$  が存在して、 $L(X/\mathbb{Q}, s)$  の因子に  $L(f_4, s)$  が現れる。ここで、 $f_4(z)$  は  $K$  に CM を持つ<sup>20</sup>重さ  $4 = 3 + 1$  の新形式である。

ここで、S. Cynk と M. Schütt は重さ 3、すなわち 2 次元 Calabi-Yau 多様体に関しても同様の結果を得ていることに注意しておく。ただし、重さ 3 の場合には、より強力な結果が N. Elkies と M. Schütt により得られている。

**Theorem 3.4** ([5] Theorem 1 (§3 も参照)). 2 次の奇な Dirichlet 指標に付随する  $L$  関数全てに対して、一般化された Riemann 予想が正しいと仮定する。このとき、 $k = 3$  (i.e.,  $d = 2$ ) に対する Problem 2.4 は肯定的である。

以下では、[2] 及び [3] による Calabi-Yau 多様体の構成方法と、それを拡張する上で生じる問題点について述べる。

<sup>15</sup>各代数体  $K$  に対して、一般にはその整数環  $\mathcal{O}_K$  は素元分解の一意性を満たさない代わりに、素イデアル分解の一意性を満たすことが知られている。 $Cl(K)$  は、 $K$  のイデアルが  $K$  の単元生成イデアルに比べてどの程度多く存在するか、すなわち  $\mathcal{O}_K$  での素イデアル分解が  $\mathbb{Z}$  での素元分解に比べてどの程度複雑かを計る不変量である。一方、各代数体  $K$  に対して、その Hilbert 類体と呼ばれる  $K$  上の有限次 Abel 拡大体  $H_K$  と“自然”な同型  $Gal(H_K/K) \simeq Cl(K)$  が存在して、 $K$  の任意のイデアルを  $H_K$  まで係数拡大すると単元生成イデアルになる、などの性質を満たすことが知られている。(類体論)

<sup>16</sup>( $\mathbb{C}$  上の) Abel 多様体とは、射影的な複素トーラスのことである。また、 $d$  次元 CM Abel 多様体とは、射影的な  $d$  次元複素トーラス  $A$  であって、 $\mathbb{Q}$  上  $2d$  次の代数体  $T$  の (非自明な) 作用を許容する (従って、その基本群  $\pi_1(A) \simeq \mathbb{Z}^{\oplus 2d}$  の係数拡大  $\pi_1(A) \otimes \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}^{\oplus 2d}$  は  $T$ -加群として  $T$  自身と同型になる) ものである。

<sup>17</sup>詳細は [10] を参照。

<sup>18</sup>体の有限次分離拡大  $F/F'$  に対して定まる、 $F$  上の (射影) 代数多様体の圏から  $F'$  上の (射影) 代数多様体の圏への関手であって、然るべき普遍性を満たすもの。  $F/F'$  が Galois 拡大のとき、 $R_{F/F'}(X) \times Spec(F) \simeq \prod_{\sigma \in Gal(F/F')} X^\sigma$  が成り立つ。詳細は [13] を参照。

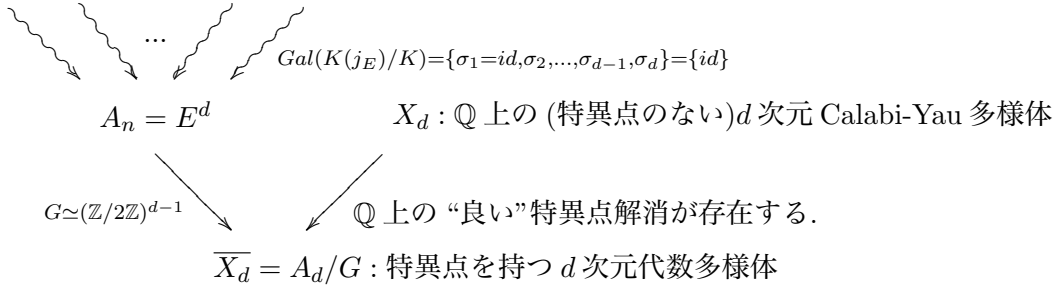
<sup>19</sup>代数体  $F$  上の楕円曲線  $E$  が  $\mathbb{Q}$ -楕円曲線であるとは、 $\mathbb{Q}$  の代数閉包  $\bar{\mathbb{Q}}$  に関して、 $E$  とその全ての Galois 共役  $E^\sigma$  ( $\sigma \in Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ ) との間に、 $\bar{\mathbb{Q}}$  上の定数射でない射が存在することである。特に、 $\mathbb{Q}$  上の楕円曲線は  $\mathbb{Q}$ -楕円曲線である。詳細は [6] を参照。

<sup>20</sup>詳細は [10] を参照。

まず, [2] による構成方法を述べるが, [3] による構成方法, 及び §4 で紹介する著者自身による構成方法との比較がしやすいよう, [2] と若干記述を変える (得られる Calabi-Yau 多様体は同型である). S. Cynk と K. Hulek は, 楕円曲線  $E$  とその群構造に関する逆元を対応させる射  $-1_E$  に対して, 直積  $A_d = E^{d \cdot 21}$  への群  $G = \{((-1_E)^{a_i}) \in \langle -1_E \rangle^d \mid \sum_{i=1}^d a_i \equiv 0 \pmod{2}\} \subset \text{Aut}(A_d)$  の作用を考察し, 商多様体  $A_d/G$  の特異点解消として  $d$  次元 Calabi-Yau 多様体  $X_d$  を構成した. 特に, Theorem 3.3 のように,  $E$  として  $\mathbb{Q}$  上の楕円曲線を取れば,  $\mathbb{Q}$  上の  $d$  次元 Calabi-Yau 多様体  $X_d$  を得る. この構成からも明らかのように,  $X_d$  のコホモロジー群に関する計算, 特に  $L$  関数の計算は, 本質的には Abel 多様体  $A_d$  のそれに帰着される.

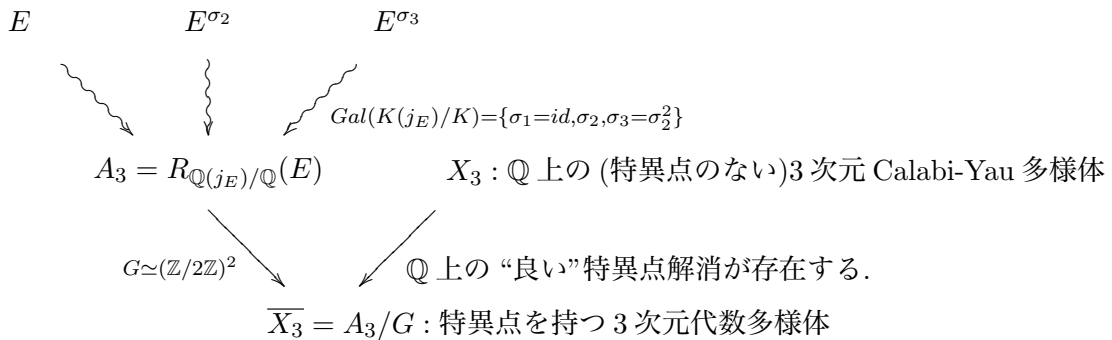
Construction by [2] (for all  $d$ ).

$$E = E^{\sigma_2} \quad \dots \quad E^{\sigma_{d-1}} = E^{\sigma_d}$$



次に, [3] による 3 次元 Calabi-Yau 多様体  $X_3$  の構成方法を述べる. S. Cynk と M. Schütt は,  $d$  次元代数体  $\mathbb{Q}(j_E)$  上の楕円曲線に Weil 係数制限関手  $R_{\mathbb{Q}(j_E)/\mathbb{Q}}$  を施すことで得られる  $d$  次元 Abel 多様体  $A_d = R_{\mathbb{Q}(j_E)/\mathbb{Q}}(E)$  が,  $\mathbb{Q}(j_E)/\mathbb{Q}$  の Galois 閉包  $K(j_E)/\mathbb{Q}^{22}$  上では  $A_d \times \text{Spec}(K(j_E)) \simeq \prod_{\sigma \in \text{Gal}(K(j_E)/K)} E^\sigma$  と分解することを用いて, [2] と同様の方法で, 商多様体  $A_d/G$  の特異点解消として  $d$  次元 Calabi-Yau 多様体  $X_d$  を構成した. ただし, この場合,  $X_d$  は a priori には  $K(j_E)$  上の代数多様体であるため, Problem 2.4 への応用上, その定義体が  $\mathbb{Q}$  まで降下 (descent) することを示さなければならない. S. Cynk と M. Schütt は,  $d = 3$  の場合には,  $A_3/G$  の具体的な “良い” 特異点解消を構成し,  $X_3$  の定義体が  $\mathbb{Q}$  まで降下することを示したが, 同様の方法は  $d = 4$  の場合には上手くいかないことを注意している (cf. [3] §4). また, [2] と同様に,  $X_3$  のコホモロジー群に関する計算, 特に  $L$  関数の計算は, 本質的には Abel 多様体  $A_3 = R_{\mathbb{Q}(j_E)/\mathbb{Q}}(E)$  のそれに帰着されることを注意しておく. この際,  $E$  が  $\mathbb{Q}$ -楕円曲線であることが本質的である. (cf. §4)

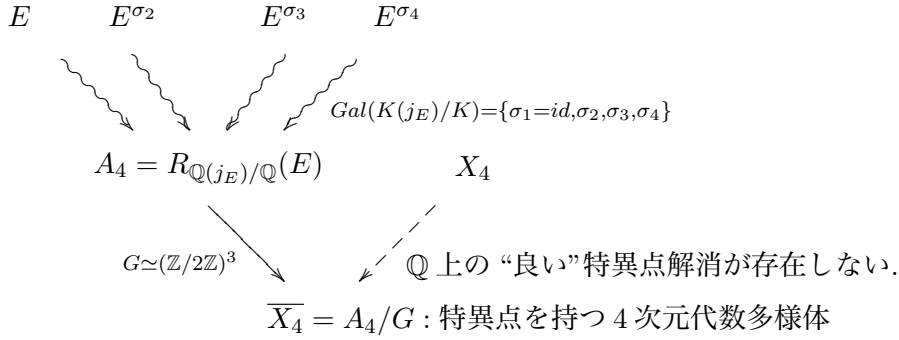
Construction by [3] for  $d = 3$ .



<sup>21</sup>代数多様体を表す記号の右下添え字は, その代数多様体の次元を表す.

<sup>22</sup>(Theorem 3.3 の設定の下では)  $K(j_E)$  は  $K$  の Hilbert 類体であることが知られている. (虚数乗法論)

Construction by [3] for  $d = 4$ .



以上のことから, [2] と Weil 係数制限関手とを組み合わせると 4次元以上の Calabi-Yau 多様体を構成する場合, 途中で生じる特異点を上手くコントロールすることで, その特異点解消の定義体を降下する必要があることが分かる. 次節では, この問題点に対する著者のアイデアを紹介し, 主結果とその証明の概略を述べる.

## 4. Main result

以下が本稿の主結果である.

**Theorem 4.1.**  $K$  を類数  $2^n$  の虚 2 次体とし,  $E$  を  $\mathbb{Q}(j_E)$  上の  $\mathbb{Q}$ -楕円曲線であって  $End_{K(j_E)}(E) \simeq \mathcal{O}_K$  を満たすものとする. さらに,  $E$  の  $\mathbb{Q}(j_E)$  上の有理点全体がなす Abel 群  $E(\mathbb{Q}(j_E))$  が単位元でない 2-捻れ点を持つと仮定する. このとき, ( $E$  から代数幾何的な手続きで構成される)  $\mathbb{Q}$  上のある  $2^n$  次元 Calabi-Yau 多様体  $X$  が存在して,  $L(X/\mathbb{Q}, s)$  の因子に  $L(f_{2^n+1}, s)$  が現れる. ここで,  $f_{2^n+1}(z)$  は  $K$  に CM を持つ重さ  $2^n + 1$  の新形式である.

$E(\mathbb{Q}(j_E))$  に関する仮定は付いているものの, Theorem 3.3 と同様の設定の下で, 4次元を含め, 保型形式の  $L$  関数を因子に持つ 2 冪次元 Calabi-Yau 多様体を無数に構成できたことを注意しておく.

Theorem 4.1 における Calabi-Yau 多様体  $X = X_{2^i}$  の構成方法を述べる前に, 1 つ準備をしておく. 今,  $K$  の類数が  $2^n$  であることから,  $K(j_E)/K$  の部分体の列  $\{K_i\}_{0 \leq i \leq n}$  で  $[K_{i-1} : K_i] = 2$  となるものが存在するので, 任意に選び固定する. さらに, 固定した  $\{K_i\}_{0 \leq i \leq n}$  に対して,  $\mathbb{Q}(j_E)/\mathbb{Q}$  の部分体の列  $\{F_i\}_{0 \leq i \leq n}$  を  $F_i = \mathbb{Q}(j_E) \cap K_i$  で定める. また,  $Gal(K_{i-1}/K_i)$  の非自明な元を  $\sigma_i$  とする. (以下の図を参照)

まず,  $F_0 = \mathbb{Q}(j_E)$  上の ( $\mathbb{Q}$ -) 楕円曲線から  $F_1$  上の 2 次元 Calabi-Yau 多様体を構成する. これは, [2] をそのまま適用すればよい.<sup>23</sup> すなわち,  $A_2 = R_{F_0/F_1}(E)$  に対して,  $A_2/\langle -1_{A_2} \rangle$  の (極小) 特異点解消を  $X_2$  とすれば,  $X_2$  は  $F_1$  上の 2 次元 Calabi-Yau 多様体である. この  $X_2$  に対して,  $E(F_0)$  に関する仮定から, 以下が成り立つ.

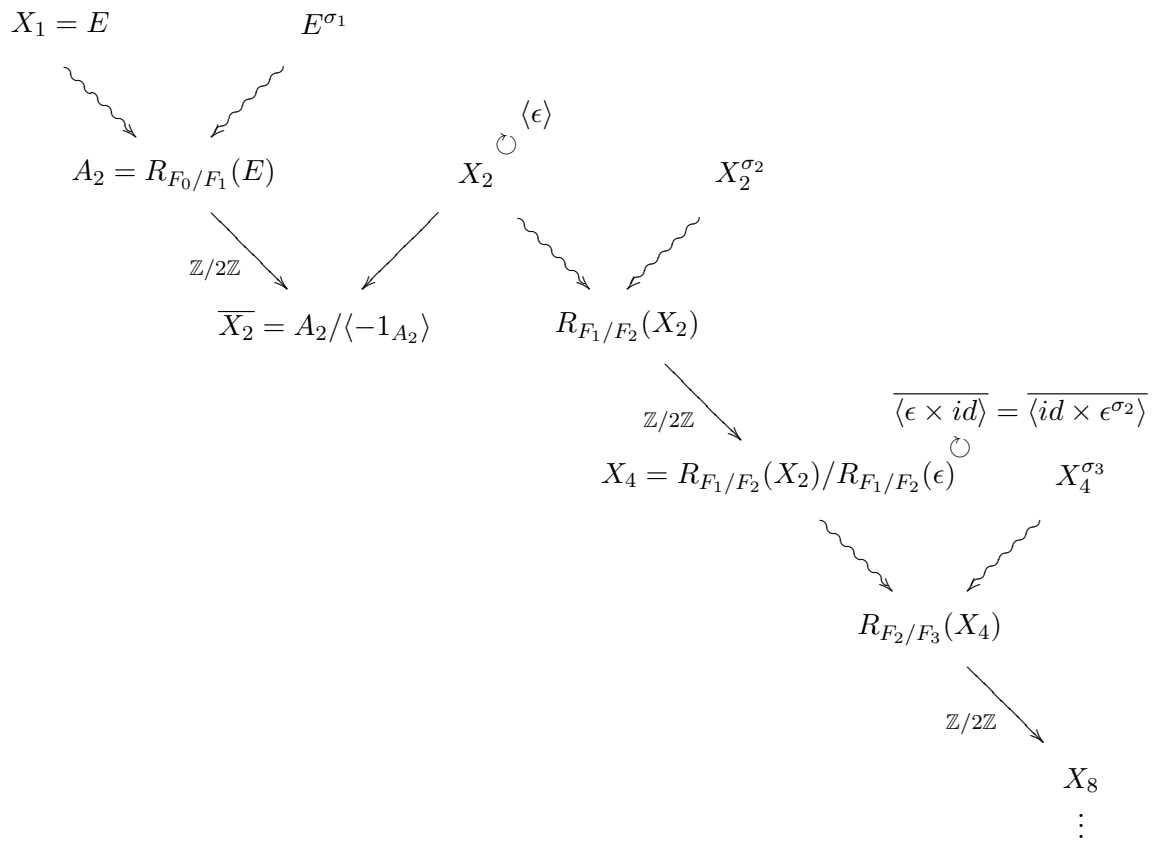
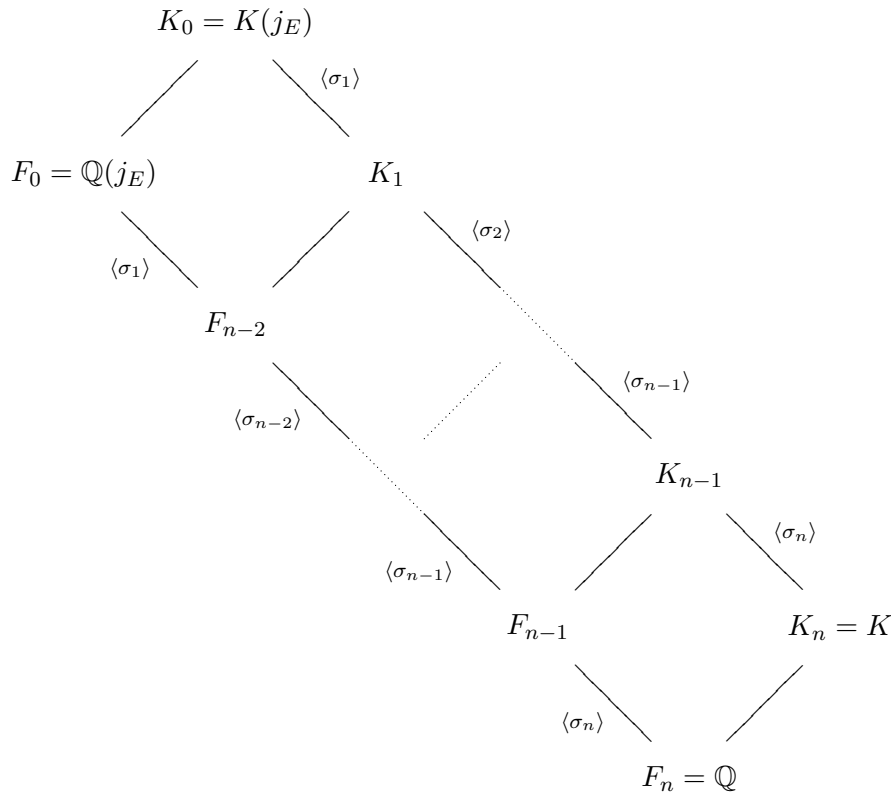
**Proposition 4.2.**  $P' = R_{F_0/F_1}(P) \in A_2(F_1)[2]$  に対して,  $t_{P'} \in Aut_{F_1}(A_2)$  を  $P'$  による平行移動 (translation) とする. このとき,  $(-1_E, 1_{E^{\sigma_1}}) \circ t_{P'} \in Aut_{K_0}(A) = Aut_{K_0}(E \times E^{\sigma_1})$  が誘導する  $X_2$  上の自己同型写像  $\epsilon$ <sup>24</sup> は  $F_1$  上定義され, 固定点を持たない. 特に,  $X_4 = R_{F_1/F_2}(X_2)/R_{F_1/F_2}(\epsilon)$  は  $F_2$  上の 4 次元 Calabi-Yau 多様体である.

以下同様にして,  $F_i$  上の  $2^i$  次元 Calabi-Yau 多様体  $X_{2^i}$  を帰納的に構成することができる.

<sup>23</sup>実際, 以下で出てくる  $X_2$  は,  $A_2$  に付随する Kummer 曲面と呼ばれる最も古典的な 2 次元 Calabi-Yau 多様体であり, Kummer 曲面の構成方法を (狭義の) 高次元 Calabi-Yau 多様体や既約シンプレクティック多様体 (超 Kähler 多様体) に拡張に関する研究は, [2] 以外にも複数存在する.

<sup>24</sup>この自己同型写像  $\epsilon$  は ( $P'$  に付随する) Lieberman 対合と呼ばれている.





上のようにして得られた  $\mathbb{Q}$  上の Calabi-Yau 多様体  $X = X_{2^i}$  の  $L$  関数の因子に保型形式が現れることを示すためには、そのモチーフ  $h(X_{2^i})$  から適切な階数 2 の純モチーフを切り出し、2次元 Galois 表現の一般論を適用する。<sup>25</sup> 特に、前者には  $E$  が  $\text{End}_{K(j_E)}(E) \simeq \mathcal{O}_K$  を満たす  $\mathbb{Q}$ -楕円曲線であることを用いる。<sup>26</sup>

まず、階数 2 の純モチーフを切り出す方法について述べる。これは、 $X_{2^n}$  の構成方法と同様に帰納的に行う。1次元の場合は CM 楕円曲線の一般的性質としてよく知られているので、以下では 2次元以上の場合について述べる。[8] による代数曲面の一般的性質から、2次元 Calabi-Yau 多様体  $X_2$  のモチーフ  $h(X_2)$  は Künneth 分解  $h(X_2) = \bigoplus_{i=0}^4 h_i(X_2)$  を持ち、さらに 2次のモチーフ  $h_2(X_2)$  は代数的サイクル (Néron-Severi 群) に対応するモチーフ  $h_2^{\text{alg}}(X_2)$  とその直既約成分に対応するモチーフ  $t_2(X_2)$  に分解する。今、 $t_2(A_2)$  が階数 2 の純モチーフである<sup>27</sup>ことから、 $t_2(X_2)$  も階数 2 の純モチーフであることが分かる。さらに、4次元 Calabi-Yau 多様体  $X_4$  の 4次モチーフ  $h_4(X_4)$  の直和因子として、階数 4 の純モチーフ  $t_2(X_2) \otimes t_2(X_2^{\sigma_2})$  を得るが、これは代数的サイクルから生じる階数 2 のモチーフを含むことが分かる<sup>28</sup>ので、[8] と同様の方法で、階数 2 の代数的サイクルから生じる部分モチーフとその直既約成分に対応する階数 2 の純モチーフ  $t_4(X_4)$  に分解することができる。以下、帰納的に、 $h(X_{2^n})$  の部分モチーフとして階数 2 の純モチーフ  $t_{2^n}(X_{2^n})$  を得る。

以上のように構成された  $\mathbb{Q}$  上の純モチーフ  $t_{2^n}(X_{2^n})$  に対して以下の定理を適用することで、Theorem 4.1 を得る。

**Theorem 4.3** (a part of [9]).  $M$  を  $\mathbb{Q}$  上の階数 2 の純モチーフで Hodge 数が  $h^{p,0} = h^{0,p} = 1$  ( $p \geq 0$ ) となるものとする。  $M$  の Betti 実現上のカップ積  $\cup : H_B(M) \times H_B(M) \rightarrow \mathbb{Q}$  が、非退化かつ対称的である<sup>29</sup>と仮定し、 $D$  を  $\cup$  の判別式<sup>30</sup>とする。このとき、各素数  $l$  に対して定まる  $M$  の  $l$  進実現  $\rho_l$  に対して、虚 2 次体  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$  に値を持つ  $\infty$ -型  $z \mapsto z^p$  のある指標  $\psi : \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\times}/\mathbb{Q}^{\times} \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$  が存在して、 $\rho_l \otimes K \simeq \text{Ind}_{\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K)}^{\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})}(\psi \circ \text{rec}^{-1})$  が成り立つ。<sup>31</sup>

## References

- [1] M. Chida, Galois 表現の基礎 II, 第 17 回整数論サマースクール報告集.
- [2] S. Cynk and K. Hulek, Higher-dimensional modular Calabi-Yau manifolds, *Canad. Math. Bull.*, **50** (4), 2007, 486–503.
- [3] S. Cynk and M. Schütt, Generalized Kummer constructions and Weil restrictions, *J. Number Theory*, **129**, 2009, 1965–1975.
- [4] F. Diamond and J. Shurman, A first course in modular forms, GTM 228, Springer-Verlag, New York, 2005.
- [5] N. D. Elkies and M. Schütt, Modular forms and K3 surfaces, *Adv. Math.*, **240**, 2013, 106–131.
- [6] B. H. Gross, Arithmetic of elliptic curves with complex multiplication with an appendix by B. Mazur, LNM, vol. **776**, Springer, 1980.
- [7] K. Hulek, R. Kloosterman and M. Schütt, Modularity of Calabi-Yau varieties. in *Global aspects of complex geometry*, Springer, Berlin, 2006, 271–309.

<sup>25</sup>モチーフの一般論については、[8] 及びその reference を参照。

<sup>26</sup> $E(\mathbb{Q}(j_E))$ [2] に関する仮定とは異なり、 $E$  にこれら 2 つの性質を課すことは、 $E$  に Weil 制限関手を施して得られる Abel 多様体の商を経由して高次元 Calabi-Yau 多様体を構成する上では、本質的である。

<sup>27</sup>これは、 $E$  が  $\text{End}_{K(j_E)}(E) \simeq \mathcal{O}_K$  を満たす  $\mathbb{Q}$ -楕円曲線であることの帰結である。一方だけでは、高々階数 3、または 4 の純モチーフまでしか切り出せない。

<sup>28</sup>これも  $E$  が  $\mathbb{Q}$ -楕円曲線であることの帰結である。このように、building block である  $E$  が  $\mathbb{Q}$ -楕円曲線であること、すなわち “Galois 共役との間に非自明な代数対応を持つ” ことが、我々の構成した Calabi-Yau 多様体  $X_{2^n}$  のモチーフ  $h_{2^n}(X_{2^n})$  が十分細かく分解することを保証している。

<sup>29</sup>例えば、滑らかな偶数次元射影代数多様体の中間次コホモロジー群上のカップ積は、この条件を満たす。

<sup>30</sup> $\mathbb{Q}$  係数 Betti 実現に対しては、この判別式は  $\mathbb{Q}^{\times 2}$  の曖昧さを除いて一意に定まる。いずれにせよ、主張に現れる虚 2 次体  $K$  は  $\mathbb{Q}$  係数 Betti 実現から一意に定まることに注意。

<sup>31</sup> $\text{rec} : \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\times}/\mathbb{Q}^{\times} \rightarrow \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})^{ab}$  は (適切に正規化された) Artin 相互写像である。

- [8] B. Kahn, J. Murre and C. Pedrini, On the transcendental part of the motive of a surface, in Algebraic cycles and motives. vol. 2, London Math. Soc. Lecture Note **344**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007, 143–202.
- [9] R. Livné, Motivic orthogonal two-dimensional representations of  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ , Israel J. Math., **92**, 1995, 149–156.
- [10] K. A. Ribet, Galois representations attached to eigenforms with nebentypus, Modular Functions of One Variable V, LNM, vol. **601**, 1977, 17–52.
- [11] G. Shimura, Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions, Reprint of the 1971 original, Publications of the Mathematical Society of Japan, 11. Kanô Memorial Lectures, 1, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994.
- [12] G. Shimura, On the factors of the jacobian variety of a modular function field, J. Math. Soc. Japan **25**, 1973, 523–544.
- [13] A. Weil, Adeles and algebraic groups, with appendices by M. Demazure and Takashi Ono, Progr. Math., **23**. Birkhäuser, Boston, Mass., 1982.

# 超幾何多項式の数値計算と隣接関係式

後藤 良彰 (GOTO Yoshiaki)\*

## 1. はじめに—周辺和固定の分割表の正規化定数と超幾何多項式

$u = (u_{ij}) \in M(r_1, r_2; \mathbb{Z}_{\geq 0})$  を分割表と呼ぶことにする<sup>1</sup>. このとき, 行和  $\beta_i^{(1)} (= u_{i\cdot}) = \sum_{j=1}^{r_2} u_{ij}$ , 列和  $\beta_j^{(2)} (= u_{\cdot j}) = \sum_{i=1}^{r_1} u_{ij}$ , 総和  $\beta_+ (= u_{\cdot\cdot}) = \sum_{i,j} u_{ij}$  が定まる<sup>2</sup>.

$$u = \begin{array}{cccc|c} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1r_2} & \beta_1^{(1)} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2r_2} & \beta_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{r_1 1} & u_{r_1 2} & \cdots & u_{r_1 r_2} & \beta_{r_1}^{(1)} \\ \hline \beta_1^{(2)} & \beta_2^{(2)} & \cdots & \beta_{r_2}^{(2)} & \beta_+ \end{array}$$

総和を  $N$  で固定し,  $p = (p_{ij})$  を各セルに入る確率 (表の形になっていることを忘れる.  $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$ ) として, 多項分布を考える. このとき, 分割表  $u$  が得られる確率は

$$P(U = u) = \frac{N!}{u!} p^u, \quad u! := \prod_{i,j} u_{ij}!, \quad p^u := \prod_{i,j} p_{ij}^{u_{ij}}$$

となる. 次に, 行和と列和 (合わせて周辺和と呼ぶ)  $\beta = (\beta^{(1)}; \beta^{(2)}) = (\beta_1^{(1)}, \dots, \beta_{r_1}^{(1)}; \beta_1^{(2)}, \dots, \beta_{r_2}^{(2)})$  を固定したときの条件付き確率を考えると, 分割表  $u$  が得られる確率は

$$P(U = u | \beta) = \frac{1}{\tilde{Z}(\beta; p)} \frac{N!}{u!} p^u, \quad \tilde{Z}(\beta; p) = N! \cdot \sum_{u: \text{周辺和は}\beta} \frac{p^u}{u!}$$

となる. ここで,  $\tilde{Z}(\beta; p)$  は全確率を 1 にするために必要な数で, 正規化定数と呼ばれる.  $N!$  はキャンセルされるので, 以下

$$Z(\beta; p) = \sum_{u: \text{周辺和は}\beta} \frac{p^u}{u!}$$

も正規化定数と呼び, 主にこちらについて議論する. また,  $(i, j)$ -セルの期待値が

$$E[U_{ij}] = \frac{1}{Z(\beta; p)} \sum_u u_{ij} \frac{p^u}{u!} = \frac{1}{Z(\beta; p)} \cdot p_{ij} \frac{\partial Z(\beta; p)}{\partial p_{ij}} = p_{ij} \frac{\partial}{\partial p_{ij}} \log Z(\beta; p)$$

と表されるので,  $Z(\beta; p)$  の偏微分も重要な値となる. 計算代数統計からの要請は

$Z(\beta; p)$  とその偏微分を (高速に) 数値計算すること

である. 多項式の数値計算なので一見難しくなさそうだが, 定義通りの計算では, 周辺和や分割表のサイズが大きくなると項数が膨大となり, (コンピュータを用いても) 計

\* 神戸大学大学院理学研究科数学専攻

e-mail: y-goto@math.kobe-u.ac.jp

<sup>1</sup> 分割表に関しては, 例えば [4, 第 4 章] を参照.

<sup>2</sup> 括弧内の表記は統計の文脈で使われる記法.

算が困難となる. この困難さを克服するために, 超幾何関数の重要な性質の1つである「隣接関係式」を利用する, というのが本講演の目標である.

簡単のため,  $2 \times 2$  分割表を例に超幾何関数との関係を記述する. 正規化定数は,

$$Z(\beta; p) = \sum_u \frac{p_{11}^{u_{11}} p_{12}^{u_{12}} p_{21}^{u_{21}} p_{22}^{u_{22}}}{u_{11}! u_{12}! u_{21}! u_{22}!} = \sum_u \frac{p_{11}^{u_{11}} p_{12}^{u_{12}} p_{21}^{u_{21}} p_{22}^{u_{22}}}{\Gamma(u_{11} + 1) \Gamma(u_{12} + 1) \Gamma(u_{21} + 1) \Gamma(u_{22} + 1)}$$

と表すことができる.  $1/\Gamma(n) = 0$  ( $n \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ ) の約束のもと, 分母の  $\Gamma$  関数の中に 0 以下の整数を代入しても良いことにする. ここで, 和を取る分割表  $u$  は, 周辺和の条件より

$$u = \begin{array}{|c|c|} \hline u_{11} & u_{12} \\ \hline u_{21} & u_{22} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \beta_1^{(1)} & 0 \\ \hline \beta_1^{(2)} - \beta_1^{(1)} & \beta_2^{(2)} \\ \hline \end{array} + u_{12} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline -1 & 1 \\ \hline 1 & -1 \\ \hline \end{array}$$

と (一意に) 表すことができるので, ( $u_{12} = n$  と置き直して)

$$Z(\beta; p) = p_{11}^{\beta_1^{(1)}} p_{21}^{\beta_1^{(2)} - \beta_1^{(1)}} p_{22}^{\beta_2^{(2)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{p_{12}p_{21}}{p_{11}p_{22}}\right)^n}{\Gamma(\beta_1^{(1)} - n + 1) \Gamma(\beta_2^{(2)} - n + 1) \Gamma(\beta_1^{(2)} - \beta_1^{(1)} + n + 1) \Gamma(n + 1)}$$

と変形することができる. 級数の形で書いているが, 十分大きな  $n$  に対しては  $\Gamma$  関数の逆数が 0 となるため, 多項式であることに注意する. Pochhammer 記号

$$(a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = (-1)^n \frac{\Gamma(-a+1)}{\Gamma(-a+1-n)}$$

を用いると, 上の和 ( $\sum$  以降) は

$$\frac{1}{\Gamma(\beta_1^{(1)} + 1) \Gamma(\beta_2^{(2)} + 1) \Gamma(\beta_1^{(2)} - \beta_1^{(1)} + 1)} \cdot {}_2F_1 \left( -\beta_1^{(1)}, -\beta_2^{(2)}, \beta_1^{(2)} - \beta_1^{(1)} + 1; \frac{p_{12}p_{21}}{p_{11}p_{22}} \right)$$

と表されることがわかる. ここで,  ${}_2F_1$  は Gauss の超幾何級数で

$${}_2F_1(a, b, c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (1)_n} x^n \quad (1)$$

で定義される.  $a, b, c$  はパラメータで,  $x$  が変数である.  $c \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$  の時は分母が 0 となる項があり  ${}_2F_1$  が定義できないので, 最後の書き換えは  $\beta_1^{(2)} - \beta_1^{(1)} + 1 > 0$  の時のみ有効である. このような場合分けを排除するため, 今後は  $\Gamma$  関数を分母にした和をそのまま扱うことにする (これも便宜上「超幾何関数 (級数)」と呼ぶ).

同様の議論を一般の  $r_1 \times r_2$  行列に対して行くと, 正規化定数  $Z(\beta; p)$  は超幾何級数

$$S(\alpha; x) = \sum_{m=(m_{ij}) \in M(r_1-1, r_2-1; \mathbb{Z}_{\geq 0})} \frac{1}{\Gamma_m(\alpha)} \cdot \prod_{i,j} x_{ij}^{m_{ij}},$$

$$\Gamma_m(\alpha) := \prod_{i=1}^{r_1-1} \Gamma(-\alpha_i - \sum_{j=1}^{r_2-1} m_{ij} + 1) \cdot \prod_{j=1}^{r_2-1} \Gamma(\alpha_{r_1+j-1} - \sum_{i=1}^{r_1-1} m_{ij} + 1)$$

$$\cdot \Gamma\left(\sum_{i=1}^{r_1-1} \alpha_i + \alpha_{r_1+r_2-1} + \sum_{i=1}^{r_1-1} \sum_{j=1}^{r_2-1} m_{ij} + 1\right) \cdot \prod_{i=1}^{r_1-1} \prod_{j=1}^{r_2-1} \Gamma(m_{ij} + 1)$$

を用いて記述することができる. ただし,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{r_1+r_2-1})$  はパラメータで,  $x = (x_{ij})$  は  $(r_1-1) \times (r_2-1)$  個の変数である. 上述のように Pochhammer 記号を用いた表記に直すと,  $(r_1, r_1+r_2)$  型の超幾何級数 (の定数倍) に一致する (定義は [2, 第3章 §1.3]).

以上から, 正規化定数とその偏微分の計算は, 超幾何級数 (多項式)  $S(\alpha; x)$  とその偏微分の数値計算に帰着されたことになる.

## 2. Gauss の超幾何関数の隣接関係式

§1 で,  $\Gamma$  関数を係数にする級数の方を扱う, と述べたが, この節ではよく知られている結果を使うため,  ${}_2F_1$  について議論する.

$\partial_x = \frac{d}{dx}$ ,  $\theta_x = x\partial_x$  とおく. このとき,

$${}_2F_1(a+1, b, c; x) = \frac{1}{a}(\theta_x + a){}_2F_1(a, b, c; x), \quad (2)$$

$${}_2F_1(a-1, b, c; x) = \frac{1}{c-a}((1-x)\theta_x - bx + c - a){}_2F_1(a, b, c; x) \quad (3)$$

という関係式が成り立つ. このように, パラメータを  $\pm 1$  ずらした  ${}_2F_1$  をもとの  ${}_2F_1$  とその微分を用いて表す関係式を隣接関係式と呼ぶ<sup>3</sup>.

さて, 目標は  $a, b \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$  となるときの  ${}_2F_1$  の計算であった. 簡単のために  $f(-N) = {}_2F_1(-N, b, c; x)$  と書くことにすると,  $f(-1) = 1 - \frac{b}{c}x$  は簡単に計算できる. そこで, 隣接関係式(3)を用いて,  $f(-1)$  から  $f(-2), f(-3), \dots, f(-N)$  と目標のところまで計算できないかを考える.  $\theta_x f(-1) = -\frac{b}{c}x$  なので  $f(-2)$  の値は計算できるが,  $f(-3)$  の計算で  $\theta_x f(-2)$  の値が必要となる. つまり, (3)だけでは不十分で,  $\theta_x({}_2F_1)$  に関する隣接関係式も必要となる. それは次のようにして計算できる:  ${}_2F_1(a, b, c; x)$  は超幾何微分方程式

$$[\theta_x(\theta_x + c - 1) - x(\theta_x + a)(\theta_x + b)]g(x) = 0 \quad (4)$$

の解なので, (3)の両辺に  $\theta_x$  を作用させて, 2階の微分を(4)で消去することにより

$$\begin{pmatrix} f(a-1) \\ \theta_x f(a-1) \end{pmatrix} = M(a) \cdot \begin{pmatrix} f(a) \\ \theta_x f(a) \end{pmatrix}, \quad M(a) = \frac{1}{c-a} \begin{pmatrix} -bx + c - a & (1-x) \\ (a-1)bx & (a-1)(x-1) \end{pmatrix}$$

を得る(第1成分は(3)そのもの). これも隣接関係式と呼ぶことにする. これを用いると, 目標であった  $f(-N)$  は

$$\begin{pmatrix} f(-N) \\ \theta_x f(-N) \end{pmatrix} = M(-N+1) \cdots M(-2) \cdot M(-1) \begin{pmatrix} 1 - \frac{b}{c}x \\ -\frac{b}{c}x \end{pmatrix}$$

(1番右の縦ベクトルは  ${}^t(f(-1), \theta_x f(-1))$  である) のように行列の積で計算できる. ちなみに, §1 で述べたように  ${}_2F_1$  の微分の値も興味ある値であるが, それも第2成分として得られていることに注意する.

1変数の場合は特に計算が易くなるわけではないが, この方法は多変数の超幾何級数  $S(\alpha; x)$  に対しても有効で, §1 で述べた多項式の計算をかなり高速化できる. そこで, 以下では多変数超幾何級数  $S(\alpha; x)$  に対する隣接関係式を(コンピュータのプログラムに載せられるくらい)明示的に記述することを目標とする<sup>4</sup>.

多変数の場合の議論をする前に, もう少し1変数の場合の注意を述べておく. 隣接関係式(2)は級数(1)の形からすぐに分かるが, (3)を得るのは少々面倒である. (3)を得る方法を4個紹介する.

<sup>3</sup> $b$  や  $c$  をずらす公式も知られているが, ここでは省略する.

<sup>4</sup>このような計算法はホロノミック勾配法[6]の考え方に基いている. ホロノミック勾配法は微分方程式を1階の連立系に書き直して数値計算するという考え方で, ここで考えているのはその差分方程式版とみなすことができる. 微分方程式の数値計算と違い, 差分方程式版では,  $x$  が有理数であれば答えの有理数を正確値で求められる, という利点もある.

- (I) 級数を力技で変形する. (答えを知っていればできる)
- (II) 簡単な方 (2) の微分作用素  $S_+$  と (4) の微分作用素  $E$  に対して, 有理関数係数の微分作用素環  $\mathbb{C}(x)\langle\partial_x\rangle$  における互除法を行うことで

$$S_- \cdot S_+ + P \cdot E = 1$$

を満たす  $S_-, P \in \mathbb{C}(x)\langle\partial_x\rangle$  が計算できる. この両辺を  ${}_2F_1(a, b, c; x)$  に作用させると,

$$S_-({}_2F_1(a+1, b, c; x)) = {}_2F_1(a, b, c; x)$$

となるので, ( $a$  を調整すれば)  $S_-$  が求める微分作用素になる.

- (III) 微分方程式 (4) を 1 階の連立系 (Pfaffian 系)

$$\theta_x \begin{pmatrix} f(a) \\ \theta_x f(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{abx}{1-x} & \frac{(a+b)x+1-c}{1-x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f(a) \\ \theta_x f(a) \end{pmatrix}$$

に直し, 簡単な方 (2) の微分作用素を行列表示すると, その逆行列が  $M(a+1)$  となる.

- (IV)  ${}_2F_1$  の Euler 型積分表示

$${}_2F_1(a, b, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^a (1-t)^{c-a} (1-xt)^{-b} \frac{dt}{t(1-t)}$$

に着目する. 収束条件についてはここでは割愛する. 適当な条件下で微分と積分の交換ができて,

$$\theta_x({}_2F_1(a, b, c; x)) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^a (1-t)^{c-a} (1-xt)^{-b} \cdot \frac{bx \cdot dt}{(1-t)(1-xt)}$$

と表すことができる<sup>5</sup>. この積分で  $a \rightarrow a-1$  とした後, 部分積分 (境界  $0, 1$  での値が  $0$  となるようパラメータに条件をつける) と部分分数展開を計算すれば,  ${}_2F_1(a+1, b, c; x)$  を  ${}_2F_1(a, b, c; x)$  と  $\theta_x({}_2F_1(a, b, c; x))$  を用いて書き直すことができ, (3) を得る.

(II), (III), (IV) の手法は多変数の場合に一般化できる. 次節以降で (IV) の手法を一般化した, ねじれコホモロジー群による隣接関係式の導出を紹介していく.

(II), (III) の一般化について少しだけ述べておく. (II) に関しては, [10], [9] で,  $A$ -超幾何系 (ここで考えている  $S(\alpha; x)$  も含まれる) に対して, 簡単な方の「逆」に対応する微分作用素を微分作用素環での Buchberger algorithm を用いて計算する方法が与えられている. (III) に関しては, [8] において  $A$ -超幾何系に対する一般化が与えられ, さらにプログラムの実装もされている (パラメータや変数が数字の時はより速い手法も考案されている). これらの一般化は幅広く使えて強力だが, Gröbner 基底で割り算等を行うため, 計算コストが大きかったり, 答えがかなり複雑になったりするという難点もある.

<sup>5</sup> 微分形式をこのように書く理由は §3 で説明する.

### 3. ねじれコホモロジー群<sup>6</sup>

以下, 記号の都合上,  $(k+1, k+n+2)$  型の超幾何関数を考察する ( $(k, n) = (r_1-1, r_2-1)$ ). また,  $\alpha_0 = -\sum_{i=1}^{k+n+1} \alpha_i$  とおき, パラメータを  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k+n+1})$  と書くことにする. さらに, ここでは  $\alpha_i$  たちは整数でないと仮定する (最後に整数にする).

積分で定義される関数

$$F(\alpha; x) = \int_{\Delta} \prod_{j=1}^{n+k+1} L_j^{\alpha_j} \frac{dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_k}{t_1 \cdots t_k}, \quad (5)$$

$$L_j = t_j \quad (1 \leq j \leq k), \quad L_{k+j} = 1 + t_1 x_{1j} + \cdots + t_k x_{kj} \quad (1 \leq j \leq n),$$

$$L_{k+n+1} = 1 + t_1 + \cdots + t_k$$

を考える. これは  $(k+1, k+n+2)$  型の超幾何積分と呼ばれる.  $\Delta$  は

$$\Delta = \{(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k \mid t_1 < 0, \dots, t_k < 0, t_1 + \cdots + t_k > -1\}$$

で定義される領域を考えればよいが,  $\alpha_i \notin \mathbb{Z}$  の条件下では, 正則化 (regularization) と呼ばれる操作をすることで, 広義積分ではなくコンパクトな集合の上の積分とみなすことができる (詳しくは [2, 第3章 §2] を参照). 適当な条件下で,  $F(\alpha; x)$  のべき級数展開を考えると,

$$F(\alpha; x) = e^{-\pi\sqrt{-1}(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)} \cdot \prod_{i=1}^k \Gamma(\alpha_i) \Gamma(-\alpha_i + 1) \cdot \prod_{j=1}^{n+1} \Gamma(\alpha_{k+j} + 1) \cdot S(\alpha; x) \quad (6)$$

となることがわかる. 従って,  $S(\alpha; x)$  の隣接関係式は  $F(\alpha; x)$  の隣接関係式と等価となる. そこで, 以下超幾何積分  $F(\alpha; x)$  の隣接関係式を調べていく.

1変数の場合は部分積分を使って隣接関係式を導出できると述べたが, 部分積分の多変数化は Stokes の定理を使って理解できる. これを幾何学的に扱う道具として, ねじれコホモロジー群を導入する. しばらくの間  $x = (x_{ij})$  は固定しておき,

$$T = \{t = (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{C}^k \mid L_i(t) \neq 0\} \subset \mathbb{C}^k \subset \mathbb{P}^k$$

とおく.  $T$  は超平面配置の補集合である.  $T$  上の多価関数と微分形式を

$$U = U(t) = \prod_{j=1}^{n+k+1} L_j^{\alpha_j}, \quad \omega = d \log U = \sum_{j=1}^{k+n+1} \alpha_j \frac{dL_j}{L_j}$$

と定める. ただし,  $d$  は  $t_1, \dots, t_k$  (積分の変数) に関する外微分. また,  $\Omega^l(T)$  を  $\mathbb{P}^k - T$  に極を許す有理  $l$ -形式全体のなすベクトル空間とする. このとき,

$$\nabla^\alpha : \Omega^l(T) \rightarrow \Omega^{l+1}(T); \quad \varphi \mapsto \nabla^\alpha(\varphi) := d\varphi + \omega \wedge \varphi$$

と定めると, これは  $\nabla^\alpha \circ \nabla^\alpha = 0$  を満たすことがわかるので, ねじれコホモロジー群を

$$H^l(\Omega^\bullet(T), \nabla^\alpha) = \ker(\nabla^\alpha : \Omega^l(T) \rightarrow \Omega^{l+1}(T)) / \nabla^\alpha(\Omega^{l-1}(T))$$

で定義する<sup>7</sup>.

<sup>6</sup>以降の議論は松本圭司氏 (北大) との共同研究 [3] に基づく

<sup>7</sup>微分方程式  $dh = h\omega$  の局所解 (局所的に  $U$  の定数倍) から作られるランク 1 の局所系を係数とする (コ)ホモロジーとして定義しても, 同型となることが知られている [2, 第2章].



**Fact 1.**  $H^l(\Omega^\bullet(T), \nabla^\alpha) = 0$  ( $l \neq k$ ) である. さらに,  $\dim H^k(\Omega^\bullet(T), \nabla^\alpha) = \binom{k+n}{k}$ .

特に,  $H^k(\Omega^\bullet(T), \nabla^\alpha) = \Omega^k(T)/\nabla^\alpha(\Omega^{k-1}(T))$  となっていることに注意する. ここで,  $\nabla^\alpha$  に関するコホモロジーを考える理由を簡単に説明する. (5) のような多価関数の積分は被積分関数の枝を指定する必要がある. そこで,

$$\int_\sigma U\varphi \quad (\sigma \subset T : k\text{-単体}, \varphi \in \Omega^k(T))$$

という積分を,  $\sigma$  とその上での  $U$  の枝を組にしたもの ( $\sigma \otimes U$  と書く) と 1 価な微分形式  $\varphi$  のペアリング  $\langle \varphi, \sigma \otimes U \rangle$  とみなすことにする. このとき, Stokes の定理は,  $\psi \in \Omega^{k-1}(T)$  に対して,

$$\begin{aligned} \langle \psi, \partial\sigma \otimes U|_{\partial\sigma} \rangle &= \int_{\partial\sigma} U\psi = \int_\sigma d(U\psi) = \int_\sigma (dU \wedge \psi + U d\psi) \\ &= \int_\sigma U \cdot \left( d\psi + \frac{dU}{U} \wedge \psi \right) = \int_\sigma U \cdot \nabla^\alpha(\psi) = \langle \nabla^\alpha(\psi), \sigma \otimes U \rangle \end{aligned}$$

となる. 特に, (枝の情報込みで) 境界が消える  $\sigma \otimes U$  (これをねじれサイクルという) とのペアリングでは,  $\nabla^\alpha(\psi)$  を足しても積分の値が変わらないので,  $\nabla^\alpha(\Omega^{k-1}(T))$  で modulo した微分形式 (すなわちねじれコホモロジー群の元) が積分の値を決めていることになる. 詳しい説明は省略するが, 積分 (5) における  $\Delta$  上で適当な枝を決めて  $\Delta \otimes U$  としたもの (あるいはその正則化) はねじれサイクルとなっている.

$J = \{j_0, \dots, j_k\} \subset \{0, 1, \dots, k+n+1\}$  に対して,

$$\varphi\langle J \rangle = \varphi\langle j_0 \cdots j_k \rangle := d \log \frac{L_{j_1}}{L_{j_0}} \wedge d \log \frac{L_{j_2}}{L_{j_0}} \wedge \cdots \wedge d \log \frac{L_{j_k}}{L_{j_0}}$$

とおき, 対数微分形式と呼ぶ. ただし,  $L_0 := 1$  とする ( $\mathbb{P}^k$  の無限遠超平面に対応). また,  $p \neq q$  に対して,

$${}_q\mathcal{J}_p := \{J \subset \{0, 1, \dots, k+n+1\} \mid p \in J, q \notin J, \#J = k+1\}$$

とおく.

**Fact 2** ([2], [5]).  $H^k(\Omega^\bullet(T), \nabla^\alpha)$  の元は  $\varphi\langle J \rangle$  の 1 次結合で表すことができる. さらに,  $p \neq q$  を 1 組固定して,  $\{\varphi\langle J \rangle \mid J \in {}_q\mathcal{J}_p\}$  を基底として取ることができる.

$\varphi\langle J \rangle$  の具体形を与えておく.  $x = (x_{ij})$  は  $k \times n$  行列だが, これを使って  $(k+1) \times (k+n+2)$  行列

$$\tilde{x} = \begin{matrix} & 0 & 1 & \cdots & k & k+1 & \cdots & k+n & k+n+1 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ k \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & & 0 & x_{11} & \cdots & x_{1n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{k1} & \cdots & x_{kn} & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

を考え (“ $(k+1, k+n+2)$ 型超幾何”はこの行列のサイズに由来する),  $J = \{j_0, j_1, \dots, j_k\}$  に対して,  $|\tilde{x}\langle J \rangle|$  を  $\tilde{x}$  の第  $j_0, j_1, \dots, j_k$  列を取り出して作った小行列式とすると,

$$\varphi\langle J \rangle = \frac{|\tilde{x}\langle J \rangle|}{\prod_{p=0}^k L_{j_p}} dt, \quad dt := dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k$$

となることがわかる.

以下では,  $\dot{\mathcal{J}} = {}_{k+n+1}\mathcal{J}_0 = \{J = \{0, j_1, \dots, j_k\} \mid 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n+k\}$  とおき,  $\{\varphi\langle J \rangle \mid J \in \dot{\mathcal{J}}\} \subset H^k(\Omega^\bullet(T), \nabla^\alpha)$  を基底に取ることが多い. この基底を縦に並べて,  $U$  を掛けて積分したベクトル値関数

$$\mathbf{F}(\alpha; x) = \begin{pmatrix} \int_{\Delta} U \varphi\langle \dot{J} \rangle \\ \vdots \\ \int_{\Delta} U \varphi\langle J \rangle \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \dot{J} &:= \{0, 1, 2, \dots, k\}, \\ \varphi\langle \dot{J} \rangle &= \varphi\langle 012 \dots k \rangle = \frac{dt}{t_1 \dots t_k} \end{aligned}$$

を考えると,

$$\mathbf{F}(\alpha; x) = \begin{pmatrix} F(\alpha; x) \\ \vdots \\ \pm \frac{|\tilde{x}\langle i_1, \dots, i_l, \dot{J}_{k+j_1, \dots, k+j_l} \rangle|}{\prod_{s=1}^l \alpha_{k+j_s}} \cdot \frac{\partial^l F(\alpha; x)}{\partial x_{i_1 j_1} \dots \partial x_{i_l j_l}} \\ \vdots \end{pmatrix},$$

$$i_1, \dots, i_l, \dot{J}_{k+j_1, \dots, k+j_l} := (\dot{J} - \{i_1, \dots, i_l\}) \cup \{k+j_1, \dots, k+j_l\}$$

$$(1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq k, 1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq n)$$

となることがわかる (±の決め方については省略. 小行列式の列の並べ方に由来する).

このベクトルが §2 で用いた  $\begin{pmatrix} f(a) \\ \theta_x f(a) \end{pmatrix}$  に対応するものである. このベクトルに行列を掛けて  $\alpha$  を変化させる公式が隣接関係式である.

$U$  を  $U^{-1} = 1/U$  (すなわち,  $\alpha$  を  $-\alpha$ ) に置き換えることで, ねじれコホモロジー群  $H^k(\Omega^\bullet(T), \nabla^{-\alpha}) = \Omega^k(T)/\nabla^{-\alpha}(\Omega^{k-1}(T))$  も定義される.  $H^k(\Omega^\bullet(T), \nabla^\alpha)$  と  $H^k(\Omega^\bullet(T), \nabla^{-\alpha})$  の間には交点形式と呼ばれる非退化で双線形なペアリング

$$\mathcal{I} : H^k(\Omega^\bullet(T), \nabla^\alpha) \times H^k(\Omega^\bullet(T), \nabla^{-\alpha}) \rightarrow \mathbb{C}$$

が定まっている. 厳密な定義は少し準備が必要となるので省略するが, 気持ちとしては

$$\mathcal{I}(\varphi, \psi) = \int_T \varphi \wedge \psi, \quad \varphi \in H^k(\Omega^\bullet(T), \nabla^\alpha), \psi \in H^k(\Omega^\bullet(T), \nabla^{-\alpha})$$

である<sup>8</sup>. Fact 2 があるので, 交点形式の厳密な定義を与える代わりに, 対数微分形式に関する交点数の公式を与えておく.

<sup>8</sup> このままだと  $2k$ -形式が 0 となるため無意味だが, 開多様体  $T$  上の積分なので不定形のようにになっている. 積分が意味を持つようによく変形することができる [7].

**Fact 3** ([7]).  $J = \{j_0, \dots, j_k\}$ ,  $J' = \{j'_0, \dots, j'_k\}$  に対して,

$$\mathcal{I}(\varphi\langle J \rangle, \varphi\langle J' \rangle) = (2\pi\sqrt{-1})^k \times \begin{cases} \frac{\sum_{j \in J} \alpha_j}{\prod_{j \in J} \alpha_j} & (J = J'), \\ \frac{(-1)^{p+q}}{\prod_{j \in J \cap J'} \alpha_j} & \left( \begin{array}{l} \#(J \cap J') = k, \\ J - \{j_p\} = J' - \{j'_q\} \end{array} \right), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

以上の準備により, 多価関数の積分に関する計算を交点形式 (内積のようなもの) を持ったねじれコホモロジー群 (有限次元ベクトル空間) の議論に置き換えることができる.

#### 4. 隣接関係式

$\alpha_i \rightarrow \alpha_i + 1$  とする隣接関係式を考察する. §3 の最初の  $\alpha_0$  の定義から, 考えるべきパラメータベクトルは  $\alpha^{(i)} = (\alpha_0 - 1, \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i + 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{k+n+1})$  となる. パラメータをずらしたねじれコホモロジー群も考えるため, 記号がやや煩雑になってしまうので, 次の記法を使うことにする.

**Notation.**

$$\begin{aligned} V &:= H^k(\Omega^\bullet(T), \nabla^\alpha), & V^{(i)} &:= H^k(\Omega^\bullet(T), \nabla^{\alpha^{(i)}}), \\ V^\vee &:= H^k(\Omega^\bullet(T), \nabla^{-\alpha}), & V^{(i)\vee} &:= H^k(\Omega^\bullet(T), \nabla^{-\alpha^{(i)}}). \end{aligned}$$

また,  $\psi \in \Omega^k(T)$  で代表されるねじれコホモロジー群  $V$  (resp.  $V^{(i)}$ ,  $V^\vee$ ,  $V^{(i)\vee}$ ) の元を区別するために  $[\psi]$  (resp.  $[\psi]_i$ ,  $[\psi]^\vee$ ,  $[\psi]_i^\vee$ ) と書くこともある.

さて,  $\alpha_i \rightarrow \alpha_i + 1$  を考えることは, 積分表示で見ると,  $U \cdot \varphi$  を  $U \cdot L_i \cdot \varphi$  に取り替えることに対応する.

**Proposition 4.**  $L_i$  倍  $\Omega^k(T) \ni \varphi \mapsto L_i \cdot \varphi \in \Omega^k(T)$  は well-defined な線形写像

$$\mathcal{U}_i : V^{(i)} \rightarrow V; \quad [\varphi]_i \mapsto [L_i \cdot \varphi]$$

を誘導する.

基底  $\{[\varphi\langle J \rangle]_i\}_{J \in \mathcal{J}} \subset V^{(i)}$ ,  $\{[\varphi\langle J \rangle]\}_{J \in \mathcal{J}} \subset V$  に関する  $\mathcal{U}_i$  の表現行列を  $U_i(\alpha; x)$  とおく.

$$\int_{\Delta} \prod_{j=1}^{k+n+1} L_j^{\alpha_j} \cdot \mathcal{U}_i([\varphi\langle J \rangle]_i) = \int_{\Delta} \prod_{j=1}^{k+n+1} L_j^{\alpha_j} \cdot L_i \cdot \varphi\langle J \rangle = F(\alpha^{(i)}; x)$$

となることなどから,  $U_i(\alpha; x)$  は隣接関係式

$$\mathbf{F}(\alpha^{(i)}; x) = U_i(\alpha; x) \cdot \mathbf{F}(\alpha; x)$$

を与えることがわかる. あとは, この  $U_i(\alpha; x)$  を具体的に表示すればよい. 実は, 基底を  $\{[\varphi\langle J \rangle]_i\}_{J \in \mathcal{J}_i} \subset V^{(i)}$ ,  $\{[\varphi\langle J \rangle]\}_{J \in \mathcal{J}_0} \subset V$  で取ると,

$$\mathcal{U}_i([\varphi\langle ij_1 \dots j_k \rangle]_i) = \left[ L_i \cdot \frac{|\tilde{x}\langle ij_1 \dots j_k \rangle| dt}{L_i L_{j_1} \dots L_{j_k}} \right] = \left[ \frac{|\tilde{x}\langle ij_1 \dots j_k \rangle| dt}{L_{j_1} \dots L_{j_k}} \right] = \frac{|\tilde{x}\langle ij_1 \dots j_k \rangle|}{|\tilde{x}\langle 0j_1 \dots j_k \rangle|} [\varphi\langle 0j_1 \dots j_k \rangle]$$

となり, 表現行列が対角行列になることがわかる. 従って, 基底  $\{[\varphi\langle J \rangle]_i\}_{J \in \mathcal{J}} \subset V^{(i)}$ ,  $\{[\varphi\langle J \rangle]\}_{J \in \mathcal{J}} \subset V$  に変換する基底変換行列を計算すれば良いが, (内積空間での議論と同様に) それは交点数を用いて簡単に計算できる.

**Theorem 5.** 表現行列  $U_i(\alpha; x)$  は以下の表示を持つ:

$$U_i(\alpha; x) = C(\alpha^{(i)})P_i(\alpha^{(i)})^{-1}D_i(x)Q_i(\alpha)C(\alpha)^{-1}.$$

ただし,

$$D_i(x) = \text{diag} \left( \dots, \frac{|\tilde{x}\langle J \rangle|}{|\tilde{x}\langle J_0 \rangle|}, \dots \right)_{J \in \mathcal{J}_i}, \quad C(\alpha) = \left( \mathcal{I}(\varphi\langle I \rangle, \varphi\langle J \rangle) \right)_{I, J \in \mathcal{J}},$$

$$P_i(\alpha) = \left( \mathcal{I}(\varphi\langle I \rangle, \varphi\langle J \rangle) \right)_{I \in \mathcal{J}_i, J \in \mathcal{J}}, \quad Q_i(\alpha) = \left( \mathcal{I}(\varphi\langle I \rangle, \varphi\langle J \rangle) \right)_{I \in \mathcal{J}_0, J \in \mathcal{J}}.$$

Theorem 中の交点数は全て Fact 3 を用いて計算可能である. また,  $C(\alpha^{(i)})$ ,  $P_i(\alpha^{(i)})$  は  $V^{(i)}$  と  $V^{(i)\vee}$  での交点数として現れる.

**Remark 6.** (i) §2 の隣接関係式の導出 (IV) の「部分積分と部分分数展開を計算」という部分が「コホモロジー群 (modulo  $\nabla^\alpha$ ) と交点数の計算」により機械的にできるようになっている<sup>9</sup>.

(ii) 公式中に交点行列の逆行列が現れるので非実用的に見えるが, 実際にはこの逆行列を (再び交点行列を用いて) 陽に書く方法がわかっている. 従って, Theorem 中の行列は全て陽な表示を持つ.

(iii) §2 で,  $a$  を増やす方は簡単で減らす方が複雑, と述べたが, この手法だと増やす方も減らす方もほとんど同じ形をしている. 実際, 具体形は書かないが  $\alpha_i$  を減らす隣接関係式も同様に求められる.

(iv) (6) 式を用いれば, 級数  $S(\alpha; x)$  とその偏微分が並んだベクトル値関数に関する隣接関係式が得られる.  $\alpha$  は整数ベクトルでないとして議論していたので, 正規化定数の計算に応用する際は  $\alpha$  が整数ベクトルで  $S(\alpha; x)$  が多項式になる場合でも公式が正しいことを示す必要がある. 実際, 多少の議論で証明することができる.

(v)  ${}_2F_1$  の時は 1 個のパラメータ  $a$  に関する隣接関係式だけで十分だったが, 多変数の場合は 1 個のパラメータを小さくしただけでは定義からの計算が簡単になるとは限らないので, 全てのパラメータを動かす隣接関係式を用意しておく必要がある.

## 5. 正規化定数の数値計算—実装

§4 で求めた隣接関係式はコンピュータに実装できるくらい具体的に書くことができたので, 正規化定数やその偏微分などを計算するプログラムを Risa/Asir<sup>10</sup> 上に実装した.

**Example 7** ( $3 \times 3$  分割表  $\dots$  (3, 6) 型 ( $k = n = 2$ ), 4 変数多項式).

			60
			60
			100
120	50	50	220

<sup>9</sup>[1] でもねじれコホモロジー群による計算が与えられているが, 交点形式は利用されていない. それゆえ, 多少の複雑な計算が必要.

<sup>10</sup> オープンソースの計算機代数 (数式処理) システム. <http://www.math.kobe-u.ac.jp/Asir>

という周辺和に対して、素朴に級数  $S(\alpha; x)$  の定義で計算するプログラムでは 396 秒かかり、我々の実装では約 0.5 秒で計算できた。我々の実装では、周辺和を全て 10 倍しても 110 秒で計算できた。(Intel Xeon E5-4650 (2.7GHz) with 256G memory で計算)

関係式を求めるための計算量については以下の評価が得られている。

**Proposition 8.**  $n \times n$  行列のかけ算に要する計算量を  $O(n^3)$  とするとき、隣接関係式の行列を得るための計算量の上限は、次のようになる。

1.  $r_1$  を固定し、 $r_2 \rightarrow \infty$  を考えるとき、 $O(r_2^{3r_1})$ .
2.  $r_1 = r_2$  の条件下で  $r_1 \rightarrow \infty$  を考えるとき、 $O(2^{6r_1})$ .

考えている行列のサイズ<sup>11</sup> は  $r = \binom{r_1 + r_2 - 2}{r_1 - 1}$  であり、計算量は  $r^3$  のオーダーになっている(つまり、交点行列の掛け算が一番重い)。分割表のサイズが大きくなるとこの計算量がネックとなるため、 $10 \times 10$  などの大きな分割表に対しては、隣接関係式の行列を求めるのが困難となる<sup>12</sup>。

隣接関係式の行列さえ求められれば、周辺和に関しては線形のオーダーの計算量となる(定義通りだと多項式オーダー)。しかし、実際に計算すると、分母と分子が巨大な整数であるような有理数の計算を行うことになるため、計算量はもっと多くなる<sup>13</sup>。これを解決するために、modular method と呼ばれる手法(簡単に述べると、複数の有限体上で計算(並列化可能)を行い、中国剰余定理などを用いて有理数体に戻す方法)が有効であるということが、橘義仁氏(神戸大)の実装による改善で確かめられている。

## 参考文献

- [1] K. Aomoto, Les équations aux différences linéaires et les intégrales des fonctions multiformes, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 22 (1975), no. 3, 271–297.
- [2] 青本和彦, 喜多通武, 超幾何関数論シュプリンガー・フェアラーク東京, 1994.
- [3] Y. Goto and K. Matsumoto, A Pfaffian equation and contiguity relations of the hypergeometric function of type  $(k+1, k+n+2)$  and their applications, preprint.
- [4] JST CREST 日比チーム編, グレブナー道場, 共立出版, 2011.
- [5] M. Kita and K. Matsumoto, Duality for hypergeometric functions and invariant Gauss-Manin systems, *Compositio Math.*, 108 (1997), no. 1, 77–106.
- [6] H. Nakayama, K. Nishiyama, M. Noro, K. Ohara, T. Sei, N. Takayama, and A. Take-mura, Holonomic Gradient Descent and its Application to Fisher-Bingham Integral, *Adv. in Appl. Math.* 47 (2011), 639–658
- [7] K. Matsumoto, Intersection numbers for logarithmic  $k$ -forms, *Osaka J. Math.* 35 (1998) 873–893.
- [8] K. Ohara and N. Takayama, Pfaffian Systems of A-Hypergeometric Systems II — Holonomic Gradient Method, preprint. arXiv:1505.02947.
- [9] M. Saito, B. Sturmfels, and N. Takayama, Hypergeometric polynomials and integer programming, *Compositio Math.*, 115 (1999), no. 2, 185–204.
- [10] N. Takayama, Gröbner basis and the problem of contiguous relations, *Japan J. Appl. Math.*, 6 (1989), no. 1, 147–160.

<sup>11</sup> ねじれコホモロジー群の次元, あるいは  $F(\alpha; x)$  が満たす微分方程式系のランク。

<sup>12</sup> 現状は  $7 \times 7$  ((7, 14) 型) あたりが限界のようである。

<sup>13</sup> 例えば, Example 7 の周辺和 10 倍の場合,  $S(\alpha; x)$  は  $(1773 \text{ 桁}) / (6432 \text{ 桁})$  の有理数になる。

# 定常輸送方程式の解の正則性と その拡散光トモグラフィへの応用

川越 大輔

Kawagoe Daisuke \*

京都大学大学院情報学研究科

## 1 研究の背景

非侵襲的な医用生体イメージング技術として、拡散光トモグラフィが注目されている。拡散光トモグラフィでは、約 650nm～約 900nm の波長をもった近赤外光が用いられる。この波長範囲の近赤外光は、酸素と結びついたヘモグロビン (以下、酸素化ヘモグロビンと呼ぶ) に吸収されやすく、それ以外の生体組織には吸収されにくい、という光学特性を持つ。この波長範囲は分光学的窓と呼ばれる。拡散光トモグラフィとは、近赤外光のもつこの光学特性を利用して、生体に照射する光と生体を透過する光を観測することで、生体内部の酸素化ヘモグロビンの濃度分布を測定する技術である。「生体内で活発に活動している部位ほど酸素化ヘモグロビンの濃度が高い」という仮定に立てば、脳に拡散光トモグラフィを適用することで、脳の機能を解明することができると考えられる。

我々は X 線 CT や MRI 等の生体イメージング技術を獲得しており、これらの技術を脳の活動観測に使うこともできるが、長時間にわたる X 線や強磁場の照射は、脳への悪影響が懸念されるため、積極的にこれらの技術を用いることはできない。一方、これらの技術と比較して、拡散光トモグラフィはより安全に長期的な観測を行うことができる。この安全性の利点から、拡散光トモグラフィの実現が期待されている。

本研究の最終目的は、数学解析および数値解析の立場から、拡散光トモグラフィのより高精度で信頼できるアルゴリズムを提案することである。

ここでまず、生体内の光の伝播の数理モデルを考える。光には粒子の性質と波動の性質を持つことが知られているが、ここでは粒子の性質に着目する。生体内の光子の伝播は、生体による光子の吸収と散乱によって特徴づけられる。これらの特徴を記述したのが、以下の微分積分方程式である。

$$-\xi \cdot \nabla I(x, \xi) - (\mu_a(x) + \mu_s(x))I(x, \xi) + \mu_s(x) \int_{S^{n-1}} p(x, \xi, \xi') I(x, \xi') d\sigma_{\xi'} = 0, \quad (x, \xi) \in \Omega \times S^{n-1}. \quad (1)$$

この方程式を定常輸送方程式 (stationary transport equation) と呼ぶ。

以下、この方程式に現れる記号の意味を解説する。 $\Omega$  は  $\mathbb{R}^n$  内の凸開集合で、 $\partial\Omega$  は  $C^1$  級の滑らかさを持つものとする。また、 $S^{n-1}$  は  $\mathbb{R}^n$  の単位球面を表す。 $I(x, \xi)$  は進行方向が  $\xi$  の光子の、位置  $x$  における密度を表す。 $\mu_a(x)$  は位置  $x$  において光子が媒質に吸収される割合を表しており、

---

\*d.kawagoe@acs.i.kyoto-u.ac.jp

吸収係数 (absorption coefficient) と呼ばれる.  $\mu_s(x)$  は位置  $x$  において光子が媒質により散乱する割合を表しており, 散乱係数 (scattering coefficient) と呼ばれる.  $p(x, \xi, \xi')$  は位置  $x$  において進行方向  $\xi'$  をもつ光子がその進行方向を  $\xi$  に変える確率を表し, 散乱位相関数 (scattering phase function) と呼ばれる. 最後に,  $\cdot$  は  $\mathbb{R}^n$  の標準内積を,  $d\sigma_{\xi'}$  は  $S^{n-1}$  上の体積要素をそれぞれ表す. 物理的な要請から,  $\mu_a, \mu_s, p$  に対して次が仮定される.

- $0 \leq \mu_a(x) < \infty, 0 \leq \mu_s(x) < \infty, \quad x \in \Omega.$
- $p(x, \xi, \xi') = p(x, \xi', \xi), \quad x \in \Omega, \quad \xi, \xi' \in S^{n-1}.$
- $p(x, \xi, \xi') > 0, \quad \int_{S^{n-1}} p(x, \xi, \xi') d\sigma_{\xi'} = 1, \quad x \in \Omega, \quad \xi \in S^{n-1}.$

拡散光トモグラフィは, “観測できるデータ” から定常輸送方程式の吸収係数  $\mu_a$  を決定する逆問題と考えることができる. “観測できるデータ” を数学的に定義するため, 定常輸送方程式に付帯される境界条件について述べる. 領域  $\Omega$  の境界  $\partial\Omega$  と進行方向  $S^{n-1}$  の直積空間  $\partial\Omega \times S^{n-1}$  を次の3つに分解する.

$$\begin{aligned}\Gamma_+ &:= \{(x, \xi) \in \partial\Omega \times S^{n-1} | n(x) \cdot \xi > 0\}, \\ \Gamma_- &:= \{(x, \xi) \in \partial\Omega \times S^{n-1} | n(x) \cdot \xi < 0\}, \\ \Gamma_0 &:= \{(x, \xi) \in \partial\Omega \times S^{n-1} | n(x) \cdot \xi = 0\}.\end{aligned}$$

ただし,  $n(x)$  は点  $x$  における  $\partial\Omega$  の外向き単位法線ベクトルである. 物理的に言えば,  $\Gamma_+$  の元は領域内で進行方向  $\xi$  をもつ光子が透過して外に出る位置  $x$  を,  $\Gamma_-$  の元は進行方向  $\xi$  をもつ光子を照射したときに光子が領域内に入る位置  $x$  を, それぞれ表す. そこで, 次の境界条件を課す:

$$I(x, \xi) = I_0(x, \xi), \quad (x, \xi) \in \Gamma_-. \quad (2)$$

我々は領域に入射する光と領域を透過する光の2つのみ観測することができる. そこで, 上で述べた “観測できるデータ” とは, 解  $I$  の  $\Gamma_{\pm}$  上の値とする. まとめると, 拡散光トモグラフィは, 定常輸送方程式の解の  $\Gamma_{\pm}$  上の値から係数  $\mu_a$  を決定する逆問題であると考えることができる.

Choulli and Stefanov は係数の数学的再構成法を [2] で提案しているが, この方法を現実に行うには無限回の観測が必要なので, ほとんど不可能である. そこでこの逆問題は, 数値計算を用いて次のように解かれるのが慣例的である.

1.  $\mu_a, \mu_s, p$  を推定する.
2. 定常輸送方程式を数値的に解く.
3. 数値計算結果を実験データと比較する.
4. 数値計算結果と実験データとの差が小さくなるように,  $\mu_a, \mu_s, p$  を再構成する.

以下この手順を, 実験データとの差が十分小さくなるまで繰り返す. この方法で係数  $\mu_a$  を求める場合, 重要になってくるのは数値計算の “信頼性” である.

A. D. Klöse et al. は, 有限差分を利用した数値計算法を [3] で提案している. この数値計算法の “正当性” (数値解は一意的に存在するか, 数値解は差分パラメータを0に近づけたときに厳密解に収束するか, 境界値に近い2つの数値解は, その差が小さいか) は,  $\Omega$  が長方形の場合 ( $n = 2$ ) については藤原 [4] によって数学的に証明されている. 藤原はその証明の中で厳密解が  $x$  と  $\xi$  について  $C^2$  級であることを要請しているが, 実際に厳密解が  $C^2$  級であるかどうかは数学的に非自明である. そこで, 「どのような仮定の下で  $C^2$  級の厳密解が存在するか」という問いに答えることを目的として研究に取り組んでいる. 本稿では, 現段階で得られている結果について紹介する.

## 2 問題設定

長方形領域は角をもつため、解の正則性を議論するのは困難である。そこで、本研究ではまず2次元の帯領域で解の正則性を議論することとする。すなわち、 $\Omega = \mathbb{R} \times (0, 1)$ ,

$$\Gamma_- := \{(x_1, 0, \xi) | x_1 \in \mathbb{R}, \theta \in (0, \pi)\} \cup \{(x_1, 1, \xi) | x_1 \in \mathbb{R}, \theta \in (-\pi, 0)\}$$

である。ただし、 $\theta$  は  $\xi = (\cos \theta, \sin \theta)$  を満たす  $(-\pi, \pi]$  の元であり、以下この関係により  $S^1$  と  $(-\pi, \pi]$  を同一視する。

簡単のため、 $\mu_a$  および  $\mu_s$  は非負の定数、 $p$  は  $S^1 \times S^1$  上の連続関数で、 $x$  に依存しないと仮定する。

主結果を述べるために、記号をいくつか導入する。 $C_b((\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-)$  を  $(\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-$  上の有界連続関数全体からなるベクトル空間とする。このとき、 $C_b((\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-)$  は

$$\|I\|_\infty := \sup_{(x, \xi) \in (\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-} |I(x, \xi)|$$

で定義されるノルム  $\|\cdot\|_\infty$  により Banach 空間となる。同様に、 $C_b(\Gamma_-)$  で  $\Gamma_-$  上の有界連続関数全体からなるベクトル空間を表すことにする。

## 3 主結果

以上の設定の下、次の定理が証明できる。

**定理 1**  $I_0 \in C_b(\Gamma_-)$ ,  $\frac{\partial I_0}{\partial x_1} \in C_b(\Gamma_-)$  かつ  $\mu_a > 0$  と仮定する。このとき、境界値問題 (1) - (2) はただ1つの古典解  $I$  をもつ。

## 4 準備

ここで、定常輸送方程式の解析に必要な考え方を紹介する。

まず、次の常微分方程式を考える。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t)), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ここで、 $T > 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  であり、 $x$  は区間  $[0, T]$  上の実数値  $C^1$  級関数、 $f$  は  $[0, T] \times \mathbb{R}$  上の実数値連続関数とする。この常微分方程式の解の存在と一意性を議論する時、通常次の積分方程式を導入する。

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds, \quad t \in [0, T].$$

この積分方程式は、先の常微分方程式を 0 から  $t$  まで積分することで得られる。この積分方程式を満たす連続関数  $x(t)$  が元の常微分方程式を満たすことは、積分方程式の右辺を  $t$  について微分することで確かめられる。よって、今考えている常微分方程式と、そこから得られる積分方程式は同値であると考えることができる。



この考えを応用するため、定常輸送方程式を次のように書き換える。

$$-\frac{d}{dt}I(x+t\xi, \xi) - (\mu_a + \mu_s)I(x+t\xi, \xi) + \mu_s \int_{S^{n-1}} p(\xi, \xi')I(x+t\xi, \xi') d\sigma_{\xi'} = 0, \quad (x, \xi) \in \Omega \times S^{n-1}.$$

ここで、 $t$  は実数で、 $x+t\xi \in \Omega$  が成り立つものとする。これをパラメータ  $t$  に関する常微分方程式だと思い、境界条件に注意して積分して整理すると、次の積分方程式が得られる。この積分方程式の解を定常輸送方程式の解と呼ぶことにする。なお、以下の議論では、 $x = (x_1, x_2)$  と  $x \in \Omega$  の成分を表示し、 $I(x, \xi)$  を  $I(x_1, x_2, \xi)$  と表記することもある。

**定義 1**  $I \in C_b((\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-)$  が次の積分方程式を満たすとき、 $I$  は定常輸送方程式の境界値問題 (1)-(2) の解であるという。

$\theta \in (0, \pi)$  のとき、

$$I(x, \xi) = \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} x_2\right) I_0(x_1 - x_2 \cot \theta, 0, \xi) + \frac{\mu_s}{\sin \theta} \int_0^{x_2} \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} (x_2 - t)\right) \int_{S^1} p(\xi, \xi') I(x_1 - (x_2 - t) \cot \theta, t, \xi') d\sigma_{\xi'} dt. \quad (3)$$

$\theta \in (-\pi, 0)$  のとき、

$$I(x, \xi) = \exp\left(\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} (1 - x_2)\right) I_0(x_1 + (1 - x_2) \cot \theta, 1, \xi) - \frac{\mu_s}{\sin \theta} \int_{x_2}^1 \exp\left(\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} (t - x_2)\right) \int_{S^1} p(\xi, \xi') I(x_1 + (t - x_2) \cot \theta, t, \xi') d\sigma_{\xi'} dt. \quad (4)$$

先行研究では、この意味での解の存在と一意性について議論されてきた。しかし、常微分方程式の場合とは違い、 $\theta = 0, \pi$  では積分方程式が定義されていないため、この積分方程式から直ちに古典解の存在が言えるわけではない。この差を埋めたのが本研究の新しい結果である。以後の節では、この積分方程式の解が適当な条件の下で古典解になっていることを証明する。

## 5 積分方程式の解の存在と一意性

まずは一意性を示す。 $I_1, I_2$  を解とし、 $I := I_1 - I_2$  とおく。このとき、解の定義から  $I$  は  $C_b((\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-)$  に属し、次の積分方程式を満たすことが分かる：

$x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in [0, 1], \theta \in (0, \pi)$  のとき、

$$I(x, \xi) = \frac{\mu_s}{\sin \theta} \int_0^{x_2} \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} (x_2 - t)\right) \int_{S^1} p(\xi, \xi') I(x_1 - (x_2 - t) \cot \theta, t, \xi') d\sigma_{\xi'} dt. \quad (5)$$

$x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in (0, 1], \theta \in (-\pi, 0)$  のとき、

$$I(x, \xi) = -\frac{\mu_s}{\sin \theta} \int_{x_2}^1 \exp\left(\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} (t - x_2)\right) \int_{S^1} p(\xi, \xi') I(x_1 + (t - x_2) \cot \theta, t, \xi') d\sigma_{\xi'} dt. \quad (6)$$

(5), (6) を評価することで、不等式  $\|I\|_\infty \leq \frac{\mu_s}{\mu_a + \mu_s} \|I\|_\infty$  を得る。この不等式からただちに、 $I = 0$  すなわち  $I_1 = I_2$  がしたがう。

次に、解の存在を構成によって示す。 $(\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-$  上の関数列  $\{I^{(n)}\}_{n \geq 0}$  を次のように帰納的に定義する。 $I^{(0)}$  を

- $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in [0, 1], \theta \in (0, \pi)$  のとき,

$$I^{(0)}(x, \xi) := \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} x_2\right) I_0(x_1 - x_2 \cot \theta, 0, \xi).$$

- $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in (0, 1], \theta \in (-\pi, 0)$  のとき,

$$I^{(0)}(x, \xi) := \exp\left(\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} (1 - x_2)\right) I_0(x_1 + (1 - x_2) \cot \theta, 1, \xi).$$

- $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in (0, 1), \theta \in \{0, \pi\}$  のとき,

$$I^{(0)}(x, \xi) := 0.$$

で定義する. また,  $I^{(n)}$  まで定義できたとして,  $I^{(n+1)}$  を

- $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in [0, 1], \theta \in (0, \pi)$  のとき,

$$I^{(n+1)}(x, \xi) := \frac{\mu_s}{\sin \theta} \int_0^{x_2} \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} (x_2 - t)\right) \int_{S^1} p(\xi, \xi') I^n(x_1 - (x_2 - t) \cot \theta, t, \xi') d\sigma_{\xi'} dt.$$

- $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in (0, 1], \theta \in (-\pi, 0)$  のとき,

$$I^{(n+1)}(x, \xi) := -\frac{\mu_s}{\sin \theta} \int_{x_2}^1 \exp\left(\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} (t - x_2)\right) \int_{S^1} p(\xi, \xi') I^n(x_1 + (t - x_2) \cot \theta, t, \xi') d\sigma_{\xi'} dt.$$

- $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in (0, 1), \theta = 0$  のとき,

$$I^{(n+1)}(x, \xi) := \mu_s \int_0^\infty \exp(-(\mu_a + \mu_s) s) \int_{S^1} p(\xi, \xi') I^n(x_1 - s, x_2, \xi') d\sigma_{\xi'}.$$

- $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in (0, 1), \theta = \pi$  のとき,

$$I^{(n+1)}(x, \xi) := \mu_s \int_0^\infty \exp(-(\mu_a + \mu_s) s) \int_{S^1} p(\xi, \xi') I^n(x_1 + s, x_2, \xi') d\sigma_{\xi'}.$$

で定義する. このとき, 次の2つが簡単な計算により分かる.

**補題 1**  $I^{(n)} \in C_b((\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-)$  と仮定する. このとき, 次の評価が成り立つ.

$$\|I^{(n+1)}\|_\infty \leq \frac{\mu_s}{\mu_a + \mu_s} \|I^{(n)}\|_\infty.$$

**命題 1**  $I_0 \in C_b(\Gamma_-)$  ならば, すべての  $n \geq 0$  に対して,  $I^{(n)} \in C_b((\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-)$  が成り立つ.

補題 1 と命題 1 から,  $I(x, \xi) := \sum_{n=0}^{\infty} I^{(n)}(x, \xi)$  が  $(\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-$  上絶対一様収束し,  $C_b((\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-)$  に属することが分かる. また, この  $I(x, \xi)$  が解となっていることも級数の計算により確認できる. 以上より, 解の存在が示された.

## 6 積分方程式の解の微分可能性

発見的考察ではあるが、先に導入した積分方程式の両辺を  $x_1$  について偏微分する。  
 $\theta \in (0, \pi)$  のとき、

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial x_1}(x, \xi) &= \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} x_2\right) \frac{\partial I_0}{\partial x_1}(x_1 - x_2 \cot \theta, 0, \xi) \\ &\quad + \frac{\mu_s}{\sin \theta} \int_0^{x_2} \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} (x_2 - t)\right) \int_{S^1} p(\xi, \xi') \frac{\partial I}{\partial x_1}(x_1 - (x_2 - t) \cot \theta, t, \xi') d\sigma_{\xi'} dt. \end{aligned} \quad (7)$$

$\theta \in (-\pi, 0)$  のとき、

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial x_1}(x, \xi) &= \exp\left(\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} (1 - x_2)\right) \frac{\partial I_0}{\partial x_1}(x_1 + (1 - x_2) \cot \theta, 1, \xi) \\ &\quad - \frac{\mu_s}{\sin \theta} \int_{x_2}^1 \exp\left(\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} (t - x_2)\right) \int_{S^1} p(\xi, \xi') \frac{\partial I}{\partial x_1}(x_1 + (t - x_2) \cot \theta, t, \xi') d\sigma_{\xi'} dt. \end{aligned} \quad (8)$$

これは元の積分方程式と同じ形をしているので、前節と同じ議論で  $\frac{\partial I}{\partial x_1}$  が  $C_b((\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-)$  に属することが分かる。もう少し詳しく述べると、この議論は級数解  $I(x, \xi) := \sum_{n=0}^{\infty} I^{(n)}(x, \xi)$  が  $x_1$  について項別微分可能であることを主張している。

ところが  $x_2$  偏導関数については、このような事情になっていない。というのも、 $I^{(n)}$  の  $x_2$  偏導関数が  $\Omega \times S^1$  上有界でも、 $I^{n+1}$  の  $x_2$  偏導関数が  $\Omega \times S^1$  上有界になるかどうかは非自明だからである。一般に、定常輸送方程式の解の1階導関数は境界近傍で非有界になることが知られている[1]。そこで、本節では  $I$  が  $\Omega$  の内部で  $x_2$  について項別微分可能であることを示す。

**命題 2**  $K$  を区間  $(0, 1)$  内のコンパクト部分集合とする。このとき、任意の  $n \geq 0$  に対して、 $\frac{\partial I^{(n)}}{\partial x}$  は  $\mathbb{R} \times K \times S^1$  上連続かつ有界である。

**命題 3**  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_2}(x, \xi)$  は  $\mathbb{R} \times K \times S^1$  上絶対一様収束する。

ここで、 $K$  として閉区間  $[\delta, 1 - \delta]$ ,  $0 < \delta < 1/2$  のみを考える。この場合のみ議論すれば十分である。このようにとった  $K$  に対して、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n = \delta$$

を満たす正数列  $\{\delta_n\}_{n \geq 0}$  をとる。さらに、 $\{\delta_n\}_{n \geq 0}$  に対応する閉区間の列  $\{K_n\}_{n \geq 0}$  を

$$K_n := \left[ \sum_{m=0}^n \delta_m, 1 - \sum_{m=0}^n \delta_m \right]$$

で定義する。  $\mathbb{R} \times K \times S^1$ ,  $\mathbb{R} \times K_n \times S^1$  上の連続関数の最大値ノルムをそれぞれ  $\|\cdot\|_K$ ,  $\|\cdot\|_{K_n}$  で表すことにする。このとき、次の補題が成立する。

**補題 2**  $\frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_2}$  が  $\mathbb{R} \times K_n \times S^1$  上連続ならば、 $\frac{\partial I^{(n+1)}}{\partial x_2}$  は  $\mathbb{R} \times K_{n+1} \times S^1$  上連続でかつ次の不等式を満たす。

$$\left\| \frac{\partial I^{(n+1)}}{\partial x_2} \right\|_{K_{n+1}} \leq \frac{2\mu_s}{e\delta_{n+1}(\mu_a + \mu_s)} \|I^{(n)}\|_{\infty} + \frac{\mu_s}{e\delta_{n+1}(\mu_a + \mu_s)^2} \left\| \frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_1} \right\|_{\infty} + \frac{\mu_s}{\mu_a + \mu_s} \left\| \frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_2} \right\|_{K_n}.$$

定義より任意の  $n \geq 0$  に対して  $K \subset K_n$  が成り立つから、補題 2 から命題 2 が成立することが分かる。また、特に  $\tilde{\mu}_a := \frac{\mu_a}{2}$ ,  $\delta_0 := \frac{\tilde{\mu}_a}{\tilde{\mu}_a + \mu_s} \delta$ ,  $\delta_{n+1} := \frac{\mu_s}{\tilde{\mu}_a + \mu_s} \delta_n$  ととれば、次の評価が成り立つことが分かる。

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial I}{\partial x_2} \right\|_K &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_2} \right\|_{K_n} \\ &\leq \left\| \frac{\partial I^{(0)}}{\partial x_2} \right\|_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\mu_s}{\mu_a + \mu_s} \right)^n + \frac{1}{e\delta(\mu_a + \mu_s)} \left( \frac{\tilde{\mu}_a + \mu_s}{\tilde{\mu}_a} \right)^2 \left\| \frac{\partial I_0}{\partial x_1} \right\| \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\tilde{\mu}_a + \mu_s}{\mu_a + \mu_s} \right)^n \\ &\quad + \frac{2\|I_0\|_{\Gamma_-}}{e\delta} \left( \frac{\tilde{\mu}_a + \mu_s}{\tilde{\mu}_a} \right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\tilde{\mu}_a + \mu_s}{\mu_a + \mu_s} \right)^n. \end{aligned}$$

右辺は有限確定するから、命題 3 が示された。

## 参考文献

- [1] D. S. Anikonov, A. E. Kovtanyuk and I. V. Prokhorov, *Transport Equation and Tomography* (2002), VSP, The Netherlands.
- [2] M. Choulli and P. Stefanov, AN INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE STATIONARY TRANSPORT EQUATION, *Osaka J. Math.* **36** (1)(1998), pp. 87–104
- [3] A. D. Klose, U. Nets, J. Beuthan and A. H. Hielscher, Optical Tomography Using the Time-Independent Equation of Radiative Transfer — Part 1 : Forward Model, *J. Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, **72** (2002), pp. 691–713.
- [4] 藤原 宏志, 多重格子法による輸送方程式の定常問題に対する差分法の高速解法, 計算数理工学論文集, **11** (2011), 論文 pp. 13–18.

# Holonomic gradient method for the probability content of a simplex region with a multivariate normal distribution

小山 民雄<sup>1</sup> ( Tamio Koyama · 東京大学 · 日本学術振興会特別研究員 PD )

## Abstract

ホロノミック勾配法 (HGM) とは、微分方程式系を利用した数値計算の手法である。本公演では、多変量正規分布による単体内の確率の数値計算に HGM を応用する。そのために、多変量正規分布による凸多面体の確率が定める関数の理論的性質を調べ、この関数の特殊値や、関数が満たす微分方程式系の明示的表示を与える。その際に、凸多面体の組み合わせ論や佐藤超関数、D 加群の理論など、様々な数学の道具が役に立つことを述べる。

2010 Mathematics Subject Classification: 33E20, 16S32, 62H10.

キーワード: holonomic gradient method, the probability content of a polyheron

## 1 ホロノミック勾配法とは？

常微分方程式の初期値問題とは、与えられた関数  $f(y)$  によって定義される常微分方程式  $dy/dt = f(y(t))$  と、 $t = t_0$  の初期条件  $y(t_0) = y_0$  を満たす関数  $y(t)$  を求める問題である。この問題の数値的解法は、物理学などへの応用上の重要性から広く研究されている。最も基本的なオイラー法では、近似式

$$y(t + \Delta t) \approx y(t) + \frac{dy}{dt} \Delta t$$

を繰り返し適用することで近似解を数値的に計算する。常微分方程式の初期値問題に関して様々な数値計算の手法が開発・実装されており、GNU scientific library [3] などのパッケージで利用することが出来る。

ホロノミック勾配法 (Holonomic Gradient Method, HGM) とは、このような常微分方程式の数値計算法を利用して、多次元領域上の積分を数値計算する手法である。HGM は、[6] に置いて提唱され、現在では統計学に現れる様々な積分への応用が研究されている [1]。

簡単な例を用いて HGM のアイデアを説明する。定積分

$$\varphi(b_1, b_2) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{b_1}^{b_2} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx \quad (b_1 < b_2) \quad (1)$$

の数値計算について考える。新たに

$$\begin{aligned} g_0(b_1, b_2) &:= \varphi(b_1, b_2), \\ g_1(b_1, b_2) &:= \frac{\partial \varphi}{\partial b_1} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}b_1^2\right), \\ g_2(b_1, b_2) &:= \frac{\partial \varphi}{\partial b_2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}b_2^2\right) \end{aligned}$$

<sup>1</sup>本研究は JSPS 科研費 263125 の助成を受けたものです。

と置く。ここで、函数  $g_0$  は区間  $[b_1, b_2]$  に対応し、 $g_1, g_2$  はそれぞれ点  $\{b_1\}, \{b_2\}$  に対応していることに注意する。すると、ベクトル  $g := (g_0, g_1, g_2)^\top$  は微分方程式系

$$\frac{\partial g}{\partial b_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} g, \quad \frac{\partial g}{\partial b_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \end{pmatrix} g \quad (2)$$

を満たすことが直ちに分かる。したがって、 $\gamma(t) = (b_1 t, b_2 t)^\top$  ( $t \in \mathbf{R}$ ) と置くと、函数  $g(\gamma(t))$  は常微分方程式

$$\frac{d}{dt} g(\gamma(t)) = \left( b_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & t b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t b_2 \end{pmatrix} \right) g(\gamma(t)) \quad (3)$$

を満たす。更に、 $t = 0$  で

$$g(\gamma(0)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。よって、この初期条件の下で、常微分方程式 (3) を解けば、積分  $\varphi(b_1, b_2)$  の値が得られる。以上が基本的な HGM の道筋である。

同様のアプローチは、広くホロノミック函数と呼ばれるクラスに対して適用が可能である。HGM の適用するためには、常微分方程式の明示的表示の導出や初期値の数値計算が必要となる。そのため、それぞれの問題に対する個別の理論的考察が必要となり、HGM は新たな研究の方向性を切り開いている。より詳しい HGM の解説については、[7] を参照されたい。

## 2 多面体の組み合わせ論

式 (1) では、区間  $[b_1, b_2]$  上の積分を考えたが、その一般化として、領域

$$P := \left\{ x \in \mathbf{R}^d : \sum_{i=1}^d \tilde{a}_{ij} x_i + \tilde{b}_j \geq 0, 1 \leq j \leq n \right\} \quad (4)$$

上の積分

$$\int_P \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^d x_i^2\right) dx \quad (5)$$

を数値計算することを考える。ここで、 $\tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_j$  ( $1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq n$ ) は実数とする。また、 $\tilde{a}$  で  $\tilde{a}_{ij}$  を  $(i, j)$  成分とする  $d \times n$  行列、 $\tilde{b}$  で長さ  $n$  のベクトル  $(\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n)^\top$  を表すことにする。

積分 (5) の数値計算に HGM を応用するため、函数

$$\varphi(a, b) := \int_{\mathbf{R}^d} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^d x_i^2\right) \prod_{j=1}^n H\left(\sum_{i=1}^d a_{ij} x_i + b_j\right) dx \quad (6)$$

について考える。ここで、 $a_{ij}, b_j$  ( $1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq n$ ) は変数で、 $a$  は  $a_{ij}$  を  $(i, j)$  成分とする  $d \times n$  行列、 $b$  は長さ  $n$  のベクトル  $(b_1, \dots, b_n)^\top$  を表す。積分 (1) の例では変数  $b_1, b_2$  による微分を計算していたが、函数  $\varphi(a, b)$  の変数  $b_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) による微分は

どのようになるだろうか？これを計算するためには、多面体の組み合わせ論に関する結果が必要になる。

簡単のため、多面体  $P$  は一般の位置<sup>2</sup>にあり、多面体  $P$  を定義する不等式には冗長なものがないとする。多面体  $P$  を定義する各不等式が表す半空間を

$$H_j := \left\{ x \in \mathbf{R}^d : \sum_{i=1}^d \tilde{a}_{ij}x_i + \tilde{b}_j \geq 0 \right\} \quad (1 \leq j \leq n).$$

と置く。多面体  $P$  に付随する抽象単体複体 (abstract simplicial complex) とは、

$$\mathcal{F} := \left\{ J \subset \{1, 2, \dots, n\} \mid \bigcap_{j \in J} H_j \neq \emptyset \right\}$$

で定義される有限集合のことを言う。

多面体  $P$  に付随する抽象単体複体は、Edelsbrunner [2] によって与えられた包除等式 (inclusion-exclusion identity)

$$\prod_{j=1}^n H \left( \sum_{i=1}^d \tilde{a}_{ij}x_i + \tilde{b}_j \right) = \sum_{J \in \mathcal{F}} \prod_{j \in J} \left( H \left( \sum_{i=1}^d \tilde{a}_{ij}x_i + \tilde{b}_j \right) - 1 \right) \quad (x \in \mathbf{R}^d). \quad (7)$$

の中に現れる。ここで、 $H(x)$  は Heaviside 関数を表している、すなわち、

$$H(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

である。包除等式 (7) の左辺は多面体  $P$  の定義関数であり、右辺の各項は凸多面錐の定義関数を表していることに注意する。

包除等式 (7) では、パラメータ  $\tilde{a}, \tilde{b}$  は固定されているが、多面体  $P$  が一般の位置にある場合は、パラメータ  $\tilde{a}, \tilde{b}$  に摂動を加えても等式が成り立つ。すなわち、次の定理が成立する [4]:

**定理 1 (K).** 多面体  $P$  が一般の位置にあるとする。このとき、パラメータ  $(\tilde{a}, \tilde{b}) \in \mathbf{R}^{d \times n} \times \mathbf{R}^n$  の近傍  $U$  が存在して、任意の  $(a, b, x) \in U \times \mathbf{R}^d$  に対して、等式

$$\prod_{j=1}^n H \left( \sum_{i=1}^d a_{ij}x_i + b_j \right) = \sum_{J \in \mathcal{F}} \prod_{j \in J} \left( H \left( \sum_{i=1}^d a_{ij}x_i + b_j \right) - 1 \right)$$

が成り立つ。

さらに、多面体  $P$  が一般の位置にある場合は、各面の定義関数に対しても同様の公式が得られる。その場合、多面体  $P$  に付随する抽象単体複体  $\mathcal{F}$  に相当する役割を果たすのは

$$\mathcal{F}_J := \{ F \in \mathcal{F} \mid J \subset F \} \quad (J \in \mathcal{F})$$

によって定義される抽象単体複体である。 $J \in \mathcal{F}$  に対応する面のアフィン包をパラメータ  $(a, b) \in \mathbf{R}^{d \times n} \times \mathbf{R}^n$  と  $J \in \mathcal{F}$  に対して、超平面を

$$V(J, a, b) = \left\{ x \in \mathbf{R}^d \mid \sum_{i=1}^d a_{ij}x_i + b_j = 0 (j \in J) \right\}.$$

として定める。次が成り立つ [5]:

<sup>2</sup>大まかに言うと、多面体  $P$  が一般の位置にあるとは、無限遠で交わるようなファセットが存在せず、 $k$  個のファセットの交わりが空集合か  $d - k$  次元の面になることを言う。正確な定義は [4] を参照。

命題 1 (K). 多面体  $P$  は一般の位置にあるものとする。多面体  $P$  に付随する抽象単体複体の元  $J \in \mathcal{F}$  に対して、等式

$$\prod_{j \in [n] \setminus J} H \left( \sum_{i=1}^d \tilde{a}_{ij} x_i + \tilde{b}_j \right) = \sum_{F \in \mathcal{F}_J} \prod_{j \in F \setminus J} \left( H \left( \sum_{i=1}^d \tilde{a}_{ij} x_i + \tilde{b}_j \right) - 1 \right) \quad (8)$$

が任意の  $x \in V(J, \tilde{a}, \tilde{b})$  について成り立つ。

多面体  $P$  が一般の位置にあるとき、抽象単体複体  $\mathcal{F}$  の元と  $P$  の面には一対一対応がある。等式 (8) の左辺は、(超平面  $V(J, a, b)$  上に制限すれば) 抽象単体複体の元  $J$  に対応する面の定義関数である。

パラメータ  $(\tilde{a}, \tilde{b})$  に摂動を加えた場合も同様の等式が成り立つ [5] :

定理 2 (K). 多面体  $P$  は一般の位置にあるものとし、 $J \in \mathcal{F}$  とする。パラメータ  $(\tilde{a}, \tilde{b}) \in \mathbf{R}^{d \times n} \times \mathbf{R}^n$  のある近傍  $U$  上の任意の点  $(a, b) \in U$  と  $x \in V(J, a, b)$  に対して、等式

$$\prod_{j \in [n] \setminus J} H \left( \sum_{i=1}^d a_{ij} x_i + b_j \right) = \sum_{F \in \mathcal{F}_J} \prod_{j \in F \setminus J} \left( H \left( \sum_{i=1}^d a_{ij} x_i + b_j \right) - 1 \right)$$

が成立する。

### 3 正規確率の微分

前節で述べた包除等式を用いて、函数  $\varphi(a, b)$  の変数  $b_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) による微分を求める。但し、式 (6) ではパラメータ  $(a, b)$  は任意の値を取ることができるが、ここでは式 (4) のパラメータ  $(\tilde{a}, \tilde{b})$  の近傍にしか注目しない。定理 1 により、パラメータ  $(\tilde{a}, \tilde{b})$  のある近傍  $U$  上で

$$\varphi(a, b) = \int_{\mathbf{R}^d} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^d x_i^2 \right) \sum_{F \in \mathcal{F}} \prod_{j \in F} (H(f_j(a, b, x)) - 1) dx \quad (9)$$

が成り立つ。但し、 $f_j(a, b, x) = \sum_{i=1}^d a_{ij} x_i + b_j$  と置いた。

抽象単体複体の元  $J \in \mathcal{F}$  に対して、

$$g^J(a, b) := \partial_b^J \bullet \varphi(a, b) \quad \left( \partial_b^J := \left( \prod_{j \in J} \partial_{b_j} \right), \partial_{b_j} := \frac{\partial}{\partial b_j} \right) \quad (10)$$

と置く。近傍  $U$  上での  $g^J(a, b)$  の値について議論する。式 (9) の右辺の各項の微分を計算すると次を得る:

補題 1.  $F \in \mathcal{F}$  とし、行列  $\left( \sum_{k=1}^d a_{ki} a_{kj} \right)_{i, j \in F}$  は正則とする。この時、

$$\begin{aligned} & \partial_b^J \bullet \int_{\mathbf{R}^d} \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^d x_i^2 \right) \prod_{j \in F} H(-f_j(a, b, x)) dx \\ &= \begin{cases} \frac{(-1)^{|J|}}{\sqrt{|\alpha_J(a)|}} \int_{V(J, a, b)} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^d x_i^2} \prod_{j \in F \setminus J} H(-f_j(a, b, x)) \mu(dx) & (J \subset F), \\ 0 & (J \not\subset F) \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つ。



定理 3. 多面体  $P$  は一般の位置にあるとし、 $J \in \mathcal{F}$  とする。この時、パラメータ  $(\tilde{a}, \tilde{b}) \in \mathbf{R}^{d \times n} \times \mathbf{R}^n$  のある近傍  $U$  が存在して、

$$g^J(a, b) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{|\alpha_J(a)|}} \int_{V(J, a, b)} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^d x_i^2} \prod_{j \in [n] \setminus J} H(f_j(a, b, x)) \mu(dx) \quad (11)$$

が任意の  $(a, b) \in U$  で成り立つ。

*Proof.* 式 (9) より、

$$(2\pi)^{d/2} g^J(a, b) = \sum_{F \in \mathcal{F}} \partial_b^J \bullet (-1)^{|F|} \int_{\mathbf{R}^d} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^d x_i^2} \prod_{j \in F} H(-f_j(a, b, x)) dx$$

となるが、補題 1 よりこれは

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{|\alpha_J(a)|}} \int_{V(J, a, b)} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^d x_i^2} \sum_{F \in \mathcal{F}_J} (-1)^{|F \setminus J|} \prod_{j \in F \setminus J} H(-f_j(a, b, x)) \mu(dx) \\ &= \frac{1}{\sqrt{|\alpha_J(a)|}} \int_{V(J, a, b)} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^d x_i^2} \sum_{F \in \mathcal{F}_J} \prod_{j \in F \setminus J} H(f_j(a, b, x) - 1) \mu(dx) \end{aligned}$$

に等しい。さらに、定理 2 を用いれば、これは (11) に等しいことが分かる。  $\square$

## 4 佐藤超関数

この節では、佐藤超関数の理論を用いて、積分 (5) を HGM で計算するために必要な微分方程式系を導出する。その際、多面体に関する包除等式 (定理 1) が再び活躍する。

次の様な段階的なアプローチにより、関数  $\varphi(a, b)$  の満たす微分方程式系を求める。

$\sum_{F \in \mathcal{F}} \prod_{j \in F} (H(f_j(a, b, x)) - 1)$ の満たす微分方程式を求める
$\downarrow$
$\exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^d x_i^2\right) \sum_{F \in \mathcal{F}} \prod_{j \in F} (H(f_j(a, b, x)) - 1)$ の満たす微分方程式を求める
$\downarrow$
$\varphi(a, b)$ の満たす微分方程式を求める

このとき、連続でない関数の満たす微分方程式系を考察していることに注意する。初等的な微分積分の理論では、不連続関数の微分は定義されていない。そのため、佐藤超関数の理論が必要となる。連続関数でない場合でも、超関数と見なす事によって導関数を考えることが可能になるためである。なお、Schwartz 超関数ではなく、佐藤超関数を利用するのは、超関数同士の積や合成関数の微分公式を用いるためである。

簡単のため、式 (1) の積分を用いて、計算の概要を説明する。式 (1) の積分は Heaviside 関数を用いると

$$\varphi(b_1, b_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \exp\left(-\frac{1}{2} x^2\right) H(x - b_1) H(b_2 - x) dx$$

と書ける。これは計算が上手くいかない表示であるため、

$$\varphi(b_1, b_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \exp\left(-\frac{1}{2} x^2\right) (H(x - b_1) - H(x - b_2)) dx$$

という表示を考える。函数  $\chi(x, b_1, b_2) := H(x - b_1) - H(x - b_2)$  が超函数として満たす微分方程式系を考える。新たに超函数を

$$\begin{aligned}\chi_0(b_1, b_2) &:= \chi(x, b_1, b_2), \\ \chi_1(b_1, b_2) &:= \frac{\partial \chi}{\partial b_1} = -\delta(x - b_1), \\ \chi_2(b_1, b_2) &:= \frac{\partial \chi}{\partial b_2} = \delta(x - b_2)\end{aligned}$$

と置く。ここで  $\delta(x)$  はデルタ函数を表し、Heaviside 函数  $H(x)$  とデルタ函数  $\delta(x)$  に関する公式  $\frac{\partial H}{\partial x} = \delta(x)$  を用いた。公式  $x\delta(x) = 0$  より、

$$\begin{aligned}\frac{\partial \chi_0}{\partial x} &= -\chi_1 - \chi_2, & \frac{\partial \chi_0}{\partial b_1} &= \chi_1, & \frac{\partial \chi_0}{\partial b_2} &= \chi_2, \\ \frac{\partial \chi_1}{\partial x} - \frac{\partial \chi_1}{\partial b_1} &= 0, & (x - b_1)\chi_1 &= 0, & \frac{\partial \chi_1}{\partial b_2} &= 0, \\ \frac{\partial \chi_2}{\partial x} - \frac{\partial \chi_2}{\partial b_2} &= 0, & \frac{\partial \chi_2}{\partial b_1} &= 0, & (x - b_2)\chi_2 &= 0\end{aligned}$$

を得る。ここから、 $q_j(b_1, b_2) := \exp(-x^2/2) \chi_j(b_1, b_2)$  ( $j = 0, 1, 2$ ) と置くと、

$$\begin{aligned}\frac{\partial q_0}{\partial x} + xq_0 &= -q_1 - q_2, & \frac{\partial q_0}{\partial b_1} &= q_1, & \frac{\partial q_0}{\partial b_2} &= q_2, \\ \frac{\partial q_1}{\partial x} + xq_1 - \frac{\partial q_1}{\partial b_1} &= 0, & (x - b_1)q_1 &= 0, & \frac{\partial q_1}{\partial b_2} &= 0, \\ \frac{\partial q_2}{\partial x} + xq_2 - \frac{\partial q_2}{\partial b_2} &= 0, & \frac{\partial q_2}{\partial b_1} &= 0, & (x - b_2)q_2 &= 0\end{aligned}$$

が得られるが、整理すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial q_0}{\partial x} + xq_0 &= -q_1 - q_2, & \frac{\partial q_0}{\partial b_1} &= q_1, & \frac{\partial q_0}{\partial b_2} &= q_2, \\ (x - b_1)q_1 &= 0, & \frac{\partial q_1}{\partial b_1} &= \frac{\partial q_1}{\partial x} + b_1q_1, & \frac{\partial q_1}{\partial b_2} &= 0, \\ (x - b_2)q_2 &= 0, & \frac{\partial q_2}{\partial b_1} &= 0, & \frac{\partial q_2}{\partial b_2} &= \frac{\partial q_2}{\partial x} + b_2q_2,\end{aligned}$$

となる。  $g_j(b_1, b_2) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbf{R}} q_j(b_1, b_2) dx$  ( $j = 0, 1, 2$ ) なので、

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_0}{\partial b_1} &= g_1, & \frac{\partial g_0}{\partial b_2} &= g_2, \\ \frac{\partial g_1}{\partial b_1} &= b_1g_1, & \frac{\partial g_1}{\partial b_2} &= 0, \\ \frac{\partial g_2}{\partial b_1} &= 0, & \frac{\partial g_2}{\partial b_2} &= b_2g_2,\end{aligned}$$

が得られるが、これは式 (2) に他ならない。

同様の計算を式 (9) の右辺に施して、次の定理を得る [4]。

定理 4 (K). 函数  $g^J(a, b)$  ( $J \in \mathcal{F}$ ) を式 (10) で定めると、これらの函数は、次の微分方程式系を満たす。

$$\partial_{a_{ij}} g^J = \sum_{k=1}^n a_{ik} \partial_{b_k} \partial_{b_j} g^J \quad (1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq n, J \in \mathcal{F}), \quad (12)$$

$$\partial_{b_j} g^J = g^{J \cup \{j\}} \quad (j \in J^c, J \in \mathcal{F}), \quad (13)$$

$$\partial_{b_j} g^J = - \sum_{k \in J} \alpha_J^{jk}(a) \left( b_k g^J + \sum_{\ell \in J^c} \alpha_{k\ell}(a) g^{J \cup \ell} \right) \quad (j \in J, J \in \mathcal{F}). \quad (14)$$

ここで、 $(\alpha_F^{ij}(a))_{i,j \in F}$  は、 $\alpha_F(a) = \left( \sum_{k=1}^d a_{ki} a_{kj} \right)_{i,j \in F}$  の逆行列である。

注意 1. 式 (12) の右辺は、式 (13), (14) よって簡約されて、微分を含まない形に書けることに注意する。

函数  $\chi_j(x, b_1, b_2)$  の満たす微分方程式系から函数  $g_j(b_1, b_2)$  の満たす微分方程式系を求める計算は、 $D$  加群の計算として捉えることが出来る。特に、 $q_j(x, b_1, b_2)$  の満たす微分方程式系から函数  $g_j(b_1, b_2)$  の満たす微分方程式系を求める議論は、対応する  $D$  加群の変数  $x$  に関する積分加群の議論に精密化される。このような観点の議論から次の定理がされる [4]:

定理 5 (K).  $D_{ab}$  で  $a_{ij}, b_j$  ( $i = 1, \dots, d, j = 1, \dots, n$ ) を変数とする多項式係数の微分作用素の成す環を表す。不定元  $g^J$  ( $J \in \mathcal{F}$ ) によって生成される  $D_{ab}$  加群を  $(D_{ab})^{|\mathcal{F}|}$  で表す。次の元で生成される  $(D_{ab})^{|\mathcal{F}|}$  の部分加群を  $N$  と置く:

$$\begin{aligned} & \left( \partial_{a_{ij}} - \sum_{k=1}^n a_{ik} \partial_{b_k} \partial_{b_j} \right) g^J \quad (1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq n, J \in \mathcal{F}), \\ & \partial_{b_j} g^J - g^{J \cup \{j\}} \quad (j \in J^c, J \in \mathcal{F}), \\ & (b_j + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^d a_{ij} a_{ik} \partial_{b_k}) g^J \quad (j \in J, J \in \mathcal{F}). \end{aligned}$$

このとき、商加群  $M = (D_{ab})^{|\mathcal{F}|} / N$  はホロノミックである。さらに、 $M$  のホロノミックランクは  $\mathcal{F}$  の元の個数に等しい。

## 5 計算実験

ここまでの理論的な結果を用いて、多面体  $P$  が単体である場合、すなわち  $n = d + 1$  で  $\mathcal{F} = \{J \subset [d + 1] \mid J \neq [d + 1]\}$  となる場合に、 $P$  の正規確率の数値計算に HGM を適用してみる。

パラメータ  $(\tilde{a}, \tilde{b})$  に対して、 $\gamma(t) = (a(t), b(t))$  を

$$a(t) = \tilde{a}, \quad b(t) = \tilde{t}b \quad (0 \leq t \leq 1).$$

によって定めると、 $t = 0$  のとき、 $g^J(a(t), b(t))$  は

$$g^J(a(0), b(0)) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|\alpha_J(\tilde{a})|}} & (|J| = d) \\ 0 & (else) \end{cases}$$

となる。函数  $g(t) = (g^J(a(t), b(t)))_{J \in \mathcal{F}}$  の満たす常微分方程式は、定理 4 より直ちに求められるため HGM が適用可能である。

単体  $P_d, Q_d$  を

$$P_d = \left\{ x \in \mathbf{R}^d \mid \begin{array}{l} x_i + \frac{\sqrt{d}}{2} \geq 0 \ (1 \leq i \leq d), \\ -x_1 - \cdots - x_d + \frac{\sqrt{d}}{2} \geq 0 \end{array} \right\},$$

$$Q_d = \left\{ x \in \mathbf{R}^d \mid \begin{array}{l} x_i - \frac{\sqrt{d}}{2} \geq 0 \ (1 \leq i \leq d), \\ -x_1 - \cdots - x_d + \frac{(2d+1)\sqrt{d}}{2} \geq 0 \end{array} \right\}$$

で定める。これらの単体の正規確率を HGM で計算した値と計算時間を表 1, 2 に示す。参考のため、表 1, 2 には、モンテカルロ法で求めた正規確率の値も示す。モンテカルロ法では、多変量標準正規分布に従う 1,000,000 個のサンプルが単体内に落ちた割合を求めた。

表 1 では、HGM とモンテカルロ法のどちらの方法も、正規確率を計算することに成功している。しかし、確率の値が非常に小さくなる表 2 では、HGM は正規確率の値の計算に成功しているのに対して、モンテカルロ法の方は失敗している。

$d$	HGM	time of HGM(s)	MC
2	0.285205	0.00	0.2849
3	0.251995	0.00	0.2493
4	0.241744	0.01	0.2429
5	0.242724	0.02	0.2428
6	0.250219	0.09	0.2394
7	0.261920	0.32	0.2572
8	0.276510	1.04	0.2787
9	0.293138	3.15	0.2859
10	0.311198	9.51	0.3072

Table 1: The probability content of  $P_d$

$d$	HGM	time of HGM(s)	MC
2	5.1758e-02	0.00	5.1917e-02
3	7.0235e-03	0.00	7.0850e-03
4	6.3101e-04	0.00	6.0400e-04
5	3.9722e-05	0.02	5.5000e-05
6	1.8042e-06	0.10	3.0000e-06
7	5.9878e-08	0.30	0.0000e+00
8	1.4799e-09	0.85	0.0000e+00
9	1.1393e-11	2.25	0.0000e+00
10	1.2861e-11	5.74	0.0000e+00

Table 2: The probability content of  $Q_d$

## References

- [1] References for hgm. <http://www.math.kobe-u.ac.jp/OpenXM/Math/hgm/ref-hgm.html>. Accessed: 2015-12-25.

- [2] H. Edelsbrunner. The union of balls and its dual shape. *Discrete & Computational Geometry*, 13:415–440, 1995.
- [3] GSL. GNU scientific library. <http://www.gnu.org/software/gsl/>, 2012.
- [4] T. Koyama. Holonomic modules associated with multivariate normal probabilities of polyhedra. <http://arxiv.org/abs/1311.6905>, 2013.
- [5] T. Koyama. Holonomic gradient method for the probability content of a simplex region with a multivariate normal distribution. <http://arxiv.org/abs/1512.06564>, 2015.
- [6] H. Nakayama, K. Nishiyama, M. Noro, K. Ohara, T. Sei, N. Takayama, and A. Takemura. Holonomic gradient descent and its application to the Fisher-Bingham integral. *Advances in Applied Mathematics*, 47:639–658, 2011.
- [7] JST CREST 日比チーム. グレブナー道場. 共立出版, 2011.

# ゼータ関数と結び目不変量

九州大学大学院数理学府数理学専攻  
博士後期課程1年  
岡本 健太郎\*  
Kentaro Okamoto

## 1 Introduction

有限集合  $X := \{1, 2, \dots, n\}$  とその上の自己同型  $\sigma \in \text{Aut}(X) \simeq S_n$  から、力学系のゼータ関数が次のように定義できる。

$$\zeta_\sigma(s) := \exp \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\#\text{Fix}(\sigma^m)}{m} s^m \right\},$$

ここで、 $\text{Fix}(\sigma^m) := \{x \in X \mid \sigma^m x = x\}$  は不動点集合である。このゼータ関数は次のような性質を持っていることが知られている ([9])。

**命題 1.1.** (1)  $\text{Cycle}(\sigma)$  と書いて  $\sigma \in S_n$  中の互いに素なサイクル全体の集合を表し、 $P \in \text{Cycle}(\sigma)$  に対して  $l(P)$  でそのサイクルの長さを表すことにする。このとき  $\zeta_\sigma(s)$  は次のようなオイラー積表示をもつ:

$$\zeta_\sigma(s) = \prod_{P \in \text{Cycle}(\sigma)} \frac{1}{1 - s^{l(P)}}.$$

(2)  $p_n : S_n \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{Z})$  を対称群の置換表現とする。このとき  $\zeta_\sigma(s)$  は次のような行列式表示をもつ:

$$\zeta_\sigma(s) = \det(I_n - p_n(\sigma)s)^{-1}.$$

(3)  $\zeta_\sigma(s)$  は次のような関数等式を満たす:

$$\zeta_\sigma(s) = \text{sgn}(\sigma)(-s)^{-n} \zeta_\sigma(1/s),$$

ここで、 $\text{sgn} : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$  は  $\sigma$  の符号を表す。

(4)  $\zeta_\sigma(e^{-s})$  は、リーマン予想の類似を満たす。つまり、 $\zeta_\sigma(e^{-s})$  のすべての極について

$$\text{Re}(s) = 0.$$

が成り立つ。

このように、力学系ゼータ関数  $\zeta_\sigma(s)$  は代数体に対して定義される **デデキント・ゼータ関数** と非常に類似した性質をもっている。しかし、デデキント・ゼータ関数は、 $s = 1$  における留数にその代数体の不変量（類数や判別式、レギュレーターなど）が現れるという性質をもつが、一方でこの力学系ゼータ関数  $\zeta_\sigma(s)$  においては、これに類似した性質はない。本研究では、対称群の元によって定まる力学系ゼータ関数を、組み紐群のゼータ関数へと一般化し、類似の性質が成り立つかを検証する。そして組み紐の位相幾何学的な不変量の抽出を目指す。

\*Kyushu University, e-mail:k-okamoto@math.kyushu-u.ac.jp

## 2 組み紐群とゼータ関数

まずは組み紐群について簡単にまとめる（詳細は [3],[8],[12] を参照）。

**定義 2.1.** 組み紐群を次のように定める。

$$B_n := \langle \sigma_i (i = 1, 2, \dots, n-1) \mid \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i (|i-j| \geq 2), \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} (i = 1, 2, \dots, n-2) \rangle.$$

これを  $n$  次組み紐群 という。

生成元  $\sigma_i$  は、Figure 1 のように  $i$  番目と  $i+1$  番目の紐の交差であるとする ([3])。また、紐を下につなげることを積とする。さらに、Figure 2 のように組み紐の上と下をつなぎ合わせることによってできる絡み目を組み紐の閉包といい、 $\sigma$  の閉包を  $\hat{\sigma}$  と書くことにする。

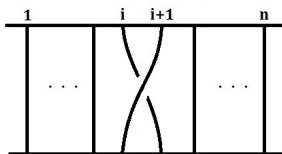


Figure 1: 生成元  $\sigma_i$

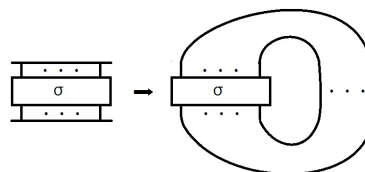


Figure 2:  $\sigma$  の閉包

以下、組み紐群に関する基本事項をいくつか述べる。

(1) 自然な全射  $\pi_n : B_n \rightarrow S_n$  を次のように定める。

$$\pi_n(\sigma_i) := (i, i+1).$$

(2)  $\sigma \in B_n$  に対し、 $\pi_n(\sigma) \in S_n$  が長さ  $n$  のサイクルであるとき、 $\hat{\sigma}$  は結び目になる。

(3) 組み紐  $\sigma \in B_n$  が生成元を用いて  $\sigma = \sigma_{i_1}^{e_1} \sigma_{i_2}^{e_2} \cdots \sigma_{i_r}^{e_r}$  と表されるとき、準同型写像  $\varepsilon : B_n \rightarrow \mathbb{Z}$  を次で定める。

$$\varepsilon(\sigma) := e_1 + e_2 + \cdots + e_r.$$

このとき、 $\varepsilon(\sigma)$  を、組み紐  $\sigma$  の指数和という。

次に本研究で扱うゼータ関数について簡単に説明する。

**定義 2.2.** 群の表現  $(G, \rho, V)$  が与えられているとき、元  $g \in G$  に対し、次の関数を考える。

$$\zeta(s, g; \rho) := \det(I - \rho(g)s)^{-1}.$$

これを  $g \in G$  の、表現  $\rho$  に付随するゼータ関数と呼ぶ。

これにより、第 1 章で定義した力学系ゼータ関数  $\zeta_\sigma(s)$  は対称群  $S_n$  の置換表現  $p_n$  に付随するゼータ関数であると考えられる。つまり、 $\sigma \in S_n$  に対し

$$\zeta_\sigma(s) = \zeta(s, \sigma; p_n)$$

と表すことができる。この点に着目して、組み紐群の表現からゼータ関数を構成する。

まずは組み紐群の古典的かつ自然な表現である Burau 表現を紹介する。

**定義 2.3.** 組み紐群  $B_n$  の生成元  $\sigma_i$  に関して写像  $\beta_{n,q}$  を次のように定義する。

$$\beta_{n,q}(\sigma_i) := I_{i-1} \oplus \begin{pmatrix} 1-q & 1 \\ q & 0 \end{pmatrix} \oplus I_{n-i-1} \in \mathrm{GL}_n(\Lambda). \quad (2.1)$$

ここで  $\Lambda := \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$  ( $\mathbb{Z}$  係数の一変数 Laurent 多項式環) とする。 $\beta_{n,q}$  を、組み紐群の **Burau 表現** と呼ぶ。

この Burau 表現を用いて、組み紐  $\sigma \in B_n$  に関するゼータ関数を次のように定義する。

$$\zeta(s, \sigma; \beta_{n,q}) = \det(I_n - \beta_{n,q}(\sigma)s)^{-1}. \quad (2.2)$$

これが、本研究の中心となる、組み紐のゼータ関数（正確には組み紐  $\sigma \in B_n$  の Burau 表現に付随するゼータ関数）である。また、Burau 表現において、 $q$  に 1 を代入すると置換表現になることから、組み紐群の Burau 表現と対称群の置換表現との間には次のような関係が成り立っている。

$$\begin{array}{ccc} B_n & \xrightarrow{\beta_{n,q}} & \mathrm{GL}_n(\Lambda) \\ \pi_n \downarrow & & \downarrow q \rightarrow 1 \\ S_n & \xrightarrow{p_n} & \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \end{array} \quad (2.3)$$

この可換図式から、極限公式

$$\lim_{q \rightarrow 1} \zeta(s, \sigma, \beta_{n,q}) = \zeta(s, \pi_n(\sigma), p_n) = \zeta_{\pi_n(\sigma)}(s). \quad (2.4)$$

が成り立ち、組み紐  $\sigma \in B_n$  のゼータ関数は、力学系ゼータ関数の  $q$ -変形であると思える。

### 3 組み紐のゼータ関数の諸性質

組み紐のゼータ関数は次の性質をもつ。

**定理 3.1.** (1) 組み紐  $\sigma \in B_n$  に対して、次のような関数等式が成り立つ。

$$\zeta(s, \sigma; \beta_{n,q}) = \mathrm{sgn}_q(\sigma)^{-1} (-s)^{-n} \zeta(1/s, \sigma^{-1}; \beta_{n,q}).$$

ここで、 $\mathrm{sgn}_q(\sigma) := \det(\beta_{n,q}(\sigma))$  とする。

(2) 組み紐の閉包  $\hat{\sigma}$  が結び目である（つまり  $\pi_n(\sigma) \in S_n$  が長さ  $n$  のサイクルである）とき、 $\zeta(s, \sigma; \beta_{n,q})$  の  $s = 1$  における留数は次で与えられる。

$$\mathrm{Res}_{s=1} \zeta(s, \sigma; \beta_{n,q}) = -\frac{1}{[n]_q} \Delta_{\hat{\sigma}}(q)^{-1}.$$

ここで  $\Delta_{\hat{\sigma}}(q)$  は結び目  $\hat{\sigma}$  に関する Alexander 多項式であり、 $[n]_q$  は  $q$ -整数で、次のように定める。

$$[n]_q := \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

(3)  $q$  は複素平面上の単位円周上の点（このとき  $q$  は  $e^{i\theta}$  ( $\theta \in \mathbb{R}$ ) と表される）であり、 $q$  の偏角が不等式  $|\theta| < 2\pi/n$  を満たしていると仮定する。このとき任意の組み紐  $\sigma \in B_n$  に関するゼータ関数はリーマン予想の類似を満たす。つまり、 $\zeta(e^{-s}, \sigma; \beta_{n,q})$  のすべての極に関して次が成り立つ。

$$\mathrm{Re}(s) = 0.$$

極限公式 (2.4) と定理 3.1 からわかるように、(2.2) で定義された組み紐のゼータ関数は力学系ゼータ関数  $\zeta_{\sigma}(s)$  の  $q$ -変形であり、多くの類似した性質をもつ。さらに、力学系ゼータ関数にはなかった性質として、組み紐のゼータ関数は  $s = 1$  における留数に（結び目の）不変量が現れた。これは第 1 章で述べたように、代数体に対して定義されるデデキントゼータ関数の  $s = 1$  における留数に、代数体の不変量が現れる性質に対応するものと考えられる。



以下、力学系ゼータ関数と Burau 表現に付随する組み紐のゼータ関数の比較表を与える。

ゼータ関数	力学系ゼータ関数	組み紐のゼータ関数
元	$\sigma \in \text{Aut}(X) \simeq S_n$	$\sigma \in B_n$
母関数表示	$\zeta_\sigma(s) = \exp\left\{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\#\text{Fix}(\sigma^m)}{m} s^m\right\}$	$\zeta(s, \sigma; \beta_{n,q}) = \exp\left\{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{tr}\beta_{n,q}(\sigma^m)}{m} s^m\right\}$
行列式表示	$\zeta_\sigma(s) = \det(I_n - p_n(\sigma)s)^{-1}$	$\zeta(s, \sigma; \beta_{n,q}) = \det(I_n - \beta_{n,q}(\sigma)s)^{-1}$
関数等式	$\zeta_\sigma(s) = \text{sgn}(\sigma)(-s)^{-n}\zeta_\sigma(1/s)$	$\zeta(s, \sigma; \beta_{n,q}) = \text{sgn}_q(\sigma)^{-1}(-s)^{-n}\zeta(1/s, \sigma^{-1}; \beta_{n,q})$
$s = 1$ における留数	$\text{Res}_{s=1} \zeta_\sigma(s) = -\frac{1}{n}$	$\text{Res}_{s=1} \zeta(s, \sigma; \beta_{n,q}) = -\frac{1}{[n]_q} \Delta_{\hat{\sigma}}(q)^{-1}$
リーマン予想の類似	成立する	$q = e^{i\theta}$ ( $ \theta  < \frac{2\pi}{n}$ ) の場合に成立する。

## 4 Jones 多項式とゼータ関数

第3章では、ゼータ関数と Alexander 多項式のつながりを見てきた。この章では結び目の強力な多項式不変量である、Jones 多項式とゼータ関数のつながりを考えてみる。

**定義 4.1.**  $V$  を 2次元  $\Lambda$ -加群とする。写像  $\mathfrak{J}_{n,q} : B_n \rightarrow \text{GL}(V^{\otimes n})$  を、生成元  $\sigma_i \in B_n$  に対して、

$$\mathfrak{J}_{n,q}(\sigma_i) := I_2^{\otimes(i-1)} \otimes \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & q & \\ & 1 & 1-q & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \otimes I_2^{\otimes(n-i-1)}$$

で定める。これを **組み紐群の Jones 表現** という。このとき、

$$\mu := \begin{pmatrix} 1 & \\ & q \end{pmatrix}$$

として、

$$J_\sigma(q) = \frac{q^{-\frac{1}{2}(n-\varepsilon(\sigma)-1)}}{1+q} \text{tr}(\mathfrak{J}_{n,q}(\sigma) \cdot \mu^{\otimes n})$$

という多項式を定める (これは多項式になる)。これは組み紐の閉包  $\hat{\sigma}$  の不変量になり、**Jones 多項式** という。

次に、この Jones 表現を使ってゼータ関数を定義し、Jones 多項式や、Alexander 多項式との関係を考えていく。まずは表現のゼータ関数の定義に従い、組み紐  $\sigma \in B_n$  の Jones 表現に付随するゼータ関数を次のように定める。

$$\zeta(s, \sigma; \mathfrak{J}_{n,q}) := \det(I_{2^n} - \mathfrak{J}_{n,q}(\sigma)s)^{-1}$$

さらに、このゼータ関数の“変形版”として、次の関数を定める。

$$\zeta_t(s, \sigma; \mathfrak{J}_{n,q}) := \det(I_{2^n} - \mathfrak{J}_{n,q}(\sigma) \cdot \mu_t^{\otimes n} s)^{-1}.$$

ここで、 $\mu_t$  は

$$\mu_t := \begin{pmatrix} 1 & \\ & t \end{pmatrix}$$

とする。このとき、Jones 多項式はこのゼータ関数を用いて次のように表すことができる。

$$\left. \frac{d}{ds} \log \zeta_q(s, \sigma; \mathfrak{J}_{n,q}) \right|_{s=0} = \text{tr}(\mathfrak{J}_{n,q}(\sigma) \cdot \mu_q^{\otimes n}) = q^{\frac{1}{2}(n-\varepsilon(\sigma)-1)}(1+q)J_\sigma(q).$$

続いて、具体的に Jones 表現に付随するゼータ関数と Burau 表現に付随するゼータ関数の関係を紹介する。Jones や Birman らによって、本質的に次の関係式が示されている ([4])。

命題 4.1. 3 次の組み紐  $\sigma \in B_3$  に対して、次が成り立つ。

$$\zeta_t(s, \sigma; \mathfrak{J}_{3,q}) = \frac{\zeta(ts, \sigma; \beta_{3,q})\zeta(t^2s, \sigma; \beta_{3,q})}{(1-s)(1-t^3s)}.$$

このことから、3 次の組み紐に関しては、Jones 表現に付随するゼータ関数が Burau 表現由来のゼータ関数を使って表せることがわかる。一般の組み紐  $\sigma \in B_n$  に関するこのような関係式は複雑でありよくわかっていなかった。本研究では、“ $q$ -外積代数” というものを用いることで簡明な関係式を与えることができた ([10])。

定義 4.2.  $W_n$  を  $\Lambda$ -加群とし、その基底を  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  とする。 $W_n$  に関するテンソル代数を

$$T(W_n) := \bigoplus_{m=0}^{\infty} W_n^{\otimes m}$$

とする。このとき  $q$ -外積代数を

$$\bigwedge_q(W_n) := T(W_n) / \langle f_i \otimes f_j + qf_j \otimes f_i (1 \leq i < j \leq n), f_i \otimes f_i (1 \leq i \leq n) \rangle$$

で定める。

$q$ -外積代数は

$$\bigwedge_q(W_n) = \bigoplus_{k=0}^n \bigwedge_q^k(W_n)$$

と表すことができる。ただし、

$$\bigwedge_q^k(W_n) := \langle f_{i_1} \wedge \dots \wedge f_{i_k} (1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n) \mid f_i \wedge f_j = qf_j \wedge f_i (i < j), f_i \wedge f_i = 0 \rangle$$

である。さらに、 $q$  に  $-q$  を代入したものを

$$\widetilde{\bigwedge}_q(W_n) := \bigwedge_{-q}(W_n)$$

と書くことにする。いま、Burau 表現を

$$\beta_{n,q} : B_n \longrightarrow \text{GL}(W_n)$$

とすると、次が成り立つ。

定理 4.1.  $\Lambda$ -加群の準同型写像  $\mathfrak{H}_n : V^{\otimes n} \longrightarrow \widetilde{\bigwedge}_q(W_n)$  が存在し、任意の  $\sigma \in B_n$  に対し、次の図式

$$\begin{array}{ccc} V^{\otimes n} & \xrightarrow{\mathfrak{H}_n} & \widetilde{\bigwedge}_q(W_n) \\ \mathfrak{J}_{n,q}(\sigma) \downarrow & & \downarrow \widetilde{\bigwedge}_q \beta_{n,q}(\sigma) \\ V^{\otimes n} & \xrightarrow{\mathfrak{H}_n} & \widetilde{\bigwedge}_q(W_n) \end{array}$$

は可換になる。ここで、 $\widetilde{\bigwedge}_q \beta_{n,q}$  は Burau 表現から自然に定まる表現である。

さらに、各  $k (0 \leq k \leq n)$  に関しても Burau 表現から次の表現が自然に定まる。

$$\widetilde{\bigwedge}_q^k \beta_{n,q} : B_n \longrightarrow \text{GL}(\bigwedge_q^k(W_n)).$$

このような考察から、変形版のゼータ関数に関する次の公式が得られた。

定理 4.2. 任意の組み紐  $\sigma \in B_n$  に関して次が成り立つ。

$$\zeta_t(s, \sigma; \mathfrak{J}_{n,q}) = \prod_{k=0}^n \zeta(t^k s, \sigma; \tilde{\lambda}_q^k \beta_{n,q}).$$

左辺からは Jones 多項式が計算でき、また右辺は Alexander 多項式に由来する Burau 表現のみで表されている。Jones 表現と Burau 表現の関係をゼータ関数を通して理解できる非常に興味深い公式である。

なお、簡単な考察から、

$$\begin{aligned} \zeta(s, \sigma; \tilde{\lambda}_q^0 \beta_{n,q}) &= \zeta(s, \sigma; \tilde{\lambda}_q^n \beta_{n,q}) = \frac{1}{1-s}, \\ \zeta(s, \sigma; \tilde{\lambda}_q^1 \beta_{n,q}) &= \zeta(s, \sigma; \tilde{\lambda}_q^{n-1} \beta_{n,q}) = \zeta(s, \sigma; \beta_{n,q}) \end{aligned}$$

となることがわかる。 $n = 3$  の場合、定理 4.2 は命題 4.1 の公式に一致する。

## 5 展望

表現のゼータ関数  $\zeta(s, \sigma; \tilde{\lambda}_q^k \beta_{n,q})$  の有用な公式はまだ得られていない。この公式を得ることが第一の課題である。さらに、色付き Jones 多項式との関連や、Melvin-Morton 予想 ([13]) のゼータ関数を用いた別証明、トーラス結び目の Jones 多項式の初等的な証明もこのゼータ関数を使ってできるのではないかと期待している。また、極限  $q \rightarrow 1$  をとった場合のゼータ関数と力学系ゼータ関数との関連も明らかにしていきたい。

## References

- [1] J. W. Alexander. Topological invariants of knots and links. Trans. Amer. Math. Soc. 20 (1928) 275–306.
- [2] E. Artin. Theory of braids, Ann. of Math. (2) 48 (1947) 101–126.
- [3] J. S. Birman. Braids, links, and mapping class groups. Ann. Math. Studies 82. Princeton University. Press, 1974.
- [4] J. S. Birman, On the Jones polynomial of closed 3-braids. Inventiones mathematicae 81 (1985) 287–294.
- [5] C. Blanchet and I. Marin. Cabling Burau representation. preprint, (2006) arXiv :math/0701189.
- [6] A. Deitmar and S. Koyama and N. Kurokawa. Absolute zeta functions, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 84 (2008) no. 8, 138–142.
- [7] Serkan Karacuha, Christian Lomp. Integral Calculus on Quantum Exterior Algebras, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics Vol. 11 (2014) 1450026 (20 pages).
- [8] C. Kassel and V. Turaev. Braid Groups. Springer, 2008.
- [9] S. Kim and S. Koyama and N. Kurokawa. The Riemann hypothesis and functional equations for zeta functions over  $\mathbf{F}_1$ , Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 85, (2009) no. 6, 75–80.

- [10] S. Koyama and S. Nakajima. Zeta functions of generalized permutations with application to their factorization formulas, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* Volume 88, (2012) no. 8, 115–120.
- [11] B. I. Kurpita and K. Murasugi. *A study of braids . Mathematics and its Applications*, 484. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.
- [12] T. Ohtsuki. *Quantum invariants, — A study of knots, 3-manifolds, and their sets*, Series on Knots and Everything, 29. World Scientific Publishing Co., Inc., 2002.
- [13] L. Rozansky. The universal R-matrix, Burau representation, and the Melvin-Morton expansion of the colored Jones polynomial, *Adv. Math.* 134 (1998) 1–31.
- [14] C. C. Squier. The Burau representation is unitary. *Proceedings of the Amer. Math. Soc.* 90(2) (1984)199–202. MR 85b:20056.
- [15] T. Yamamoto. Inversion formulas for tridiagonal matrices with applications to boundary value problems, *Numerical Functional Analysis and Optimization* 22, (2001) 357–385.

# 平面的な曲率線をもつ極小曲面の分類と その変形について\*

神戸大学大学院理学研究科数学専攻  
緒方 勇太 (Yuta Ogata)

## 1 Introduction

「平均曲率一定曲面 (CMC 曲面)」はシャボン玉の数学的モデルであり、CMC 曲面の構成方法の研究は古くから行われてきた。1866 年に、K. T. Weierstrass により  $\mathbb{R}^3$  内の平均曲率一定零曲面 (極小曲面) に対して、積分型の公式 (Proposition 2.1) が与えられた。また、 $\mathbb{R}^3$  内の平均曲率がゼロでない一定曲面に関しては、J. Dorfmeister と F. Pedit、H. Wu によって、行列分解などを用いた構成理論 (DPW 法 [3]) が考案された。現在、CMC 曲面の構成方法はユークリッド空間だけでなく、リーマン空間形やセミリーマン空間形などでも研究が進んでいる。

一方、「平面的な曲率線をもつ CMC 曲面」は、有名な例を多く含んでいることが知られており、H. Wente ([10]) によって発見されたコンパクト CMC 曲面の非自明な例 (Wente トーラス Fig.2) もこのクラスに含まれている。また、今回のテーマである「平面的な曲率線をもつ極小曲面」は A. Enneper や L. P. Eisenhart、J. C. C. Nitsche などの先行研究 ([4], [5], [7]) により、すでに分類定理が存在し、平面、Catenoid、Enneper 曲面、Bonnet 曲面に限ることが知られている。本講演では、Liouville 方程式に注目しながら、「平面的な曲率線をもつ極小曲面」の分類の別証明と、それらの曲面の変形について考察する。([2])

## 2 Preliminaries

$\Sigma$  を  $\mathbb{R}^2$  内の単連結領域とし、 $X \ni (u, v) \mapsto X(u, v) \in \mathbb{R}^3$  を共形構造をもつ極小曲面とする：

$$I = e^{2\omega}(du^2 + dv^2) \quad \text{for } \omega : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}.$$

このとき、以下の「Weierstrass の表現公式」が知られている。

**Proposition 2.1** (Weierstrass の表現公式 [9]). 任意の単連結な極小曲面は、以下の積分型の公式で与えられる：

$$X(u, v) = \operatorname{Re} \left[ \int (1 - h^2, i(1 + h^2), 2h)\eta dz \right] \quad (2.1)$$

ただし、 $z = u + iv$ ,  $h$ :有理型関数,  $\eta dz$ :正則 1 次微分形式。また、その計量と法ベクトル  $N(u, v)$  は、Weierstrass データ  $(h, \eta)$  を用いて、

$$I = e^{2\omega}(du^2 + dv^2) = (1 + |h|^2)^2 |\eta|^2 (du^2 + dv^2), \quad (2.2)$$

$$N = \left( \frac{h + \bar{h}}{1 + |h|^2}, \frac{i(\bar{h} - h)}{1 + |h|^2}, \frac{|h|^2 - 1}{1 + |h|^2} \right) \quad (2.3)$$

と記述される。

---

\*この研究は、Joseph Cho 氏 (神戸大学) との共同研究 ([2]) によるものである。

**Remark 2.1.** 一つの極小曲面を構成する際、Weierstrass データ  $(h, \eta)$  は一意に決まるわけではない。例えば、Catenoid を構成するための Weierstrass データとして、 $(e^z, e^{-z})$  が一般的だが、 $(\tanh(\frac{z}{2}), \cosh^2(\frac{z}{2}))$  などでもよい。

また、全臍点的でない (i.e. 平面でない) 極小曲面は、「双等温座標」と呼ばれる共形かつ曲率線座標に座標変換できることが知られている。

**Fact 2.1.** 双等温座標のとき、Weierstrass データ  $(h, \eta)$  には以下の関係が成り立つ：

$$\eta = \frac{a}{h_z} \quad \text{for constant } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

本講演では、パラメータ  $u, v$  のスケール変換で  $a = \frac{1}{2}$  とする：

$$\eta = \frac{1}{2h_z}. \tag{2.4}$$

このとき、双等温座標をもつ極小曲面 (ただし「平面」を除く) の可積分方程式 (Gauss 方程式) が Liouville 方程式となる。

$$\Delta \omega - e^{-2\omega} = 0. \tag{2.5}$$

以後、 $(u, v)$  を双等温座標とし、自明な例である「平面」を除いて議論を進める。

### 3 Abresch's method for Liouville equation

ここから「平面的な曲率線をもつ極小曲面」を考察していく。まず、先行研究で知られている結果を述べておく：

**Proposition 3.1** ([4], [5], [7]). 平面的な曲率線をもつ極小曲面は、平面、Catenoid、Enneper 曲面、Bonnet 曲面に限る。

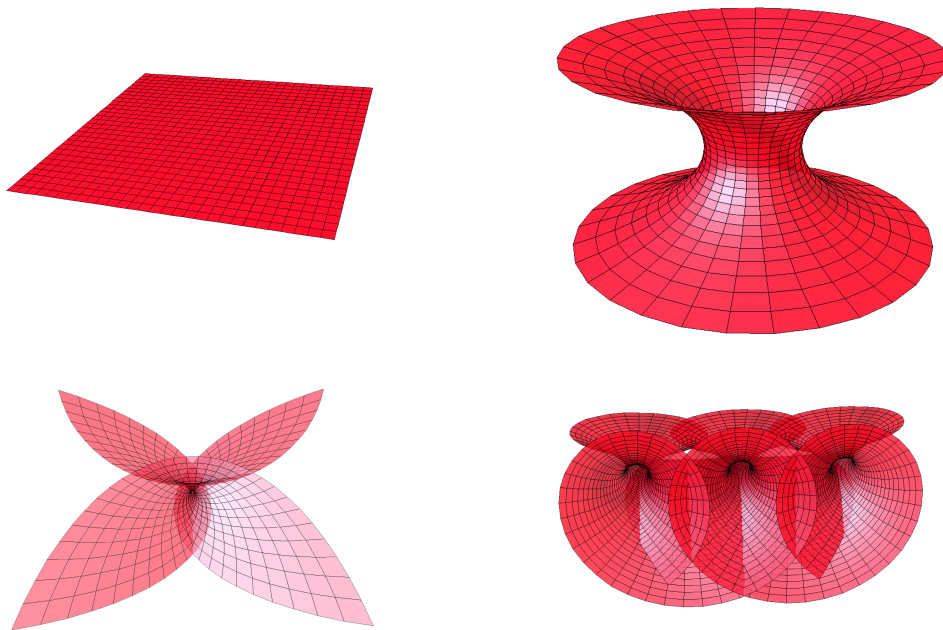


Fig. 1: 平面、Catenoid、Enneper 曲面、Bonnet 曲面 (left to right)

Proposition 3.1 の証明に関し、先行研究 [4], [5], [7] で使われている手法は「Orthogonal systems of cycles」と呼ばれるもので以下の事実に基づくものである。

**Fact 3.1** ([4], [5], [7]).

極小曲面が平面的な曲率線をもつ

$\iff$  曲率線に沿った法ベクトル場は、2次元球面  $S^2$  内の平面的なベクトル場になる。

(*i.e.* 一つの円周上を動く。)

この手法は、すでに M. L. Leite によって 3次元 Lorentz 空間内の極大曲面の場合にも応用されている ([6])。しかし、M. L. Leite の研究でも述べられているように、Lorentz 空間内の極大曲面の場合、法ベクトル場は 2次元双曲面  $\mathbb{H}^2$  内のベクトル場になり、非常に煩雑な分類が必要になっている(「円」の定義が変わるため)。

一方、 $\mathbb{R}^3$  内の「平面的な曲率線をもつ平均曲率が零でない一定曲面」の分類は、U. Abresch によって研究され、完全な分類が存在する ([1])。彼の研究の少し前に発見された「Wente トーラス」もこの分類に入っており、さらに Delaunay 曲面 (CMC 回転面) や柱面的バブルトン (柱面の Bäcklund 変換) などの曲面も彼の分類に含まれている (Fig.2)。U. Abresch は偏微分方程式の専門家であり、彼はその技術を用いて「平面的な曲率線をもつ平均曲率が零でない一定曲面」が楕円関数を用いて構成できることを示し、解析的分類を行った。

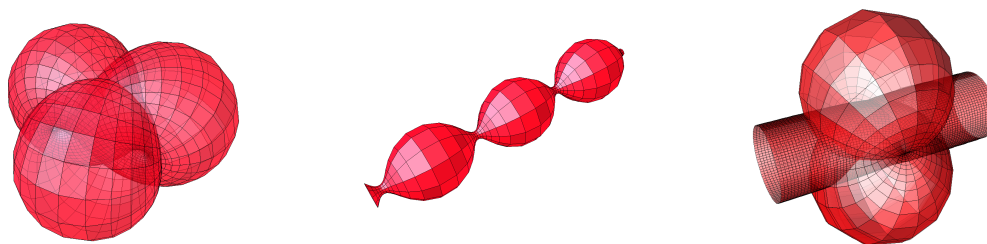


Fig. 2: Wente トーラス、Delaunay 曲面 (Unduloid)、柱面的バブルトン (left to right)

この章では、平面的な曲率線をもつ極小曲面に対し、U. Abresch の解析的分類法を用いる。まず始めに、極小曲面が平面的な曲率線をもつための条件を  $\omega(u, v)$  を使って記述すると以下のようになる。

**Lemma 3.1** ([2]).  $X(u, v)$  を双等温座標をもつ極小曲面とし、計量を  $I = e^{2\omega}(du^2 + dv^2)$  とする。そのとき、以下が成立する。

$$\begin{aligned}
 & u \text{ 方向の曲率線が平面的} \\
 \iff & v \text{ 方向の曲率線が平面的} \\
 \iff & \omega_{uv} + \omega_u \omega_v = 0.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

よって、平面的な曲率線をもつ極小曲面の構成や分類は、式 (2.5) と (3.1) を満たす  $\omega(u, v)$  を見つければよい：

$$\begin{cases} \Delta\omega - e^{-2\omega} = 0 \\ \omega_{uv} + \omega_u \omega_v = 0 \end{cases}. \tag{3.2}$$

**Lemma 3.2** ([2]).  $X(u, v)$  を双等温座標をもつ極小曲面とし、計量を  $I = e^{2\omega}(du^2 + dv^2)$  とする。そのとき、以下が成立する。

$X(u, v)$  が平面的な曲率線をもつ極小曲面

$\iff$

$$\omega(u, v) = \log \left( \frac{1 + f(u)^2 + g(v)^2}{f_u(u) + g_v(v)} \right),$$

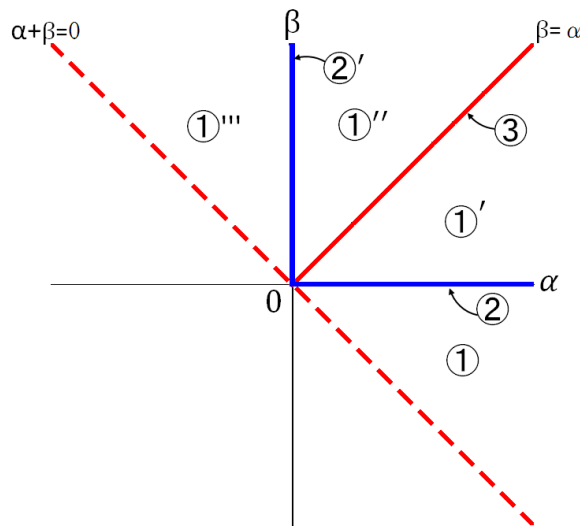
where

$$f(u) := \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \sinh(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}u), \quad g(v) := \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \sinh(\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}v)$$

for constants  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  such that  $\alpha + \beta > 0$ .

この Lemma 3.2 により、解析的分類が得られる。

**Theorem 3.1** (平面的な曲率線をもつ極小曲面の解析的分類 [2]). 平面的な曲率線をもつ極小曲面は自明な例である「平面」または、Lemma 3.2 で与えられる計量の関数  $\omega(u, v)$  をもつ曲面になる。また、後者の曲面族は定数  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha + \beta > 0$  の選び方により、以下の分類表によって細分化される：



- ①, ①' :  $\omega(u, v)$  は  $v$  方向に周期的だが  $u$  方向に周期的でない。Bonnet 曲面。
- ② :  $\omega(u, v)$  は  $v$  方向に一定で  $u$  方向に周期的でない。Catenoid。
- ③ :  $\omega(u, v)$  は  $u, v$  方向に周期的でない。Enneper 曲面。
- ①'', ①''' :  $\omega(u, v)$  は  $u$  方向に周期的だが  $v$  方向に周期的でない。Bonnet 曲面。
- ②' :  $\omega(u, v)$  は  $u$  方向に一定で  $v$  方向に周期的でない。Catenoid。



## 4 Explicit Weierstrass data and Walter's method

前章では U. Abresch の方法で解析的分類を行ったが、極小曲面の研究において重要になるのが、Weierstrass データ  $(h, \eta)$  である。このデータを見つめることができれば、表現公式で曲面の具体的なパラメータ表示が得られる (Proposition 2.1)。前章では、「平面的な曲率線をもつ平均曲率が零でない一定曲面」の研究を参考にしたので、この章でも「Wente トーラスの具体的なパラメータ表示」を求めた R. Walter の手法 ([8]) を、平面的な曲率線をもつ極小曲面に対し応用する。R. Walter は、回転面でない Wente トーラスにも「軸」と呼べるものが存在し、その軸の位置を正規化してパラメータ表示を求めた。この手法を応用することで、平面でない場合に平面的な曲率線をもつ極小曲面に対しても「軸」が存在することを示した：

**Lemma 4.1** ([2]).  $X(u, v)$  を双等温座標をもつ極小曲面とし、計量を  $I = e^{2\omega}(du^2 + dv^2)$  とする。

$$\begin{aligned} & \omega_u \neq 0 \quad (\text{resp. } \omega_v \neq 0) \\ \implies & \text{以下を満たす定ベクトル } \mathbf{v}_1 (\text{resp. } \mathbf{v}_2) \text{ がただ一つ存在する：} \\ & \langle \mathbf{m}(u, v), \mathbf{v}_1 \rangle = \langle \mathbf{m}_v(u, v), \mathbf{v}_1 \rangle = 0 \quad (\text{resp. } \langle \mathbf{n}(u, v), \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{n}_u(u, v), \mathbf{v}_2 \rangle = 0) \end{aligned}$$

ただし、 $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3$  内の内積、 $\mathbf{m}(u, v) := X_u \times X_{uu}$  (resp.  $\mathbf{n}(u, v) := X_v \times X_{vv}$ )。この  $\mathbf{v}_1$  (resp.  $\mathbf{v}_2$ ) を「軸」と呼ぶ。

この Lemma 4.1 を適用して以下の Weierstrass データが得られる。

**Theorem 4.1** (平面的な曲率線をもつ極小曲面の Weierstrass データ (平面を除く) [2]). 平面的な曲率線をもつ極小曲面の Weierstrass データ  $(h, \eta)$  は以下で与えられる：

$$h(u, v) = \frac{(\alpha + \beta) \tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}(u + iv)\right)}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}, \quad \eta(u, v) = \frac{1}{h_u(u, v) - ih_v(u, v)}. \quad (4.1)$$

ただし、 $\alpha, \beta$  は、 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha + \beta > 0$  となる定数。

**Corollary 4.1** (平面的な曲率線をもつ極小曲面の変形族). 式 (4.1) は、 $u, v$  のパラメータ変換で  $\alpha = \cos(\theta), \beta = \sin(\theta)$  ( $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$ ) と正規化できる。このとき、

$$h(u, v) = \frac{(\cos(\theta) + \sin(\theta)) \tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\cos(2\theta)}(u + iv)\right)}{\sqrt{\cos(2\theta)}}, \quad \eta(u, v) = \frac{1}{h_u(u, v) - ih_v(u, v)}. \quad (4.2)$$

この Weierstrass データは  $\theta$  に関し、連続であり、このデータを用いて曲面の変形族が得られる。

## 5 Summary

先行研究の結果である Proposition 3.1 から、Corollary 4.1 にあるような曲面の変形族の存在はなかなか見つけづらい。実際、よく知られている Catenoid の Weierstrass データ  $(h, \eta) = (e^z, e^{-z})$  と、Enneper 曲面の  $(h, \eta) = (z, 1)$  の間のデータの連続変形も見つけるのは困難に思う。しかし、今回の結果により、Catenoid と Enneper 曲面、Bonnet 曲面は「曲率線が平面的である」という性質を保ったまま変形できることが証明できた。講演の際は、どのようにこれらの曲面が移りあうかアニメーションを見せながら議論できればと考えている。

## Bibliography

- [1] U. Abresch, *Constant mean curvature tori in terms of elliptic functions*, J. Reine Angew. Math. **374** (1987).
- [2] J. Cho and Y. Ogata, *Classification and deformation of minimal and maximal surfaces with planar curvature lines*, preprint.
- [3] J. Dorfmeister, F. Pedit and H. Wu, *Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric spaces*, Comm. Anal. Geom. **6**(4), 633-668 (1998).
- [4] L. P. Eisenhart, *A treatise on differential geometry on curves and surfaces*, Dover Reprint (1960).
- [5] A. Enneper, *Untersuchungen über die Flächen mit plannen und sphärischen Krümmungslinien*. Abh. Königl. Ges. Wissensch. Göttingen **23** (1878) and **24** (1880).
- [6] M. L. Leite, *Surfaces with planar lines of curvature and orthogonal systems of cycles*, J. Math. Anal. Appl. **421**, no. 2, 1254-1273, (2015).
- [7] J. C. C. Nitsche, *Lectures on minimal surfaces*, Cambridge University Press., vol. 1, (1989).
- [8] R. Walter, *Explicit examples of the H-problem of Heinz Hopf*, Geom. Dedicata **23**, 187-213 (1987).
- [9] K. T. Weierstrass, *Untersuchungen über die Flächen, deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist*, Monatsber. Berliner Akad., 612-625 (1866).
- [10] H. C. Wente, *Counterexample to a conjecture of a H. Hopf*, Pacific J. Math., **121**, no. 1, 193-243 (1986)

# Compact Stein surfaces as branched coverings of $D^4$ with same branch sets

大場 貴裕 (Takahiro Oba) (東京工業大学)\*

## 概 要

Loi と Piergallini によって、4次元多様体がコンパクト Stein 曲面であることと、正ブレイド状曲面と呼ばれる曲面で分岐する4次元円盤  $D^4$  の単純分岐被覆であることは同値であることが示された。しかし、Stein 構造の正ブレイド状曲面に対する振る舞いは未だ解明されていないことが多い。本稿では、正ブレイド状曲面とその曲面上分岐する被覆の微分同相類は同じであるが、Stein 構造は異なるという構成例を紹介する。

## 1. 背景

Stein 多様体とは  $\mathbb{C}^N$  にプロパーかつ正則に埋め込みができる複素多様体  $(W, J)$  のことである。任意の Stein 多様体は下に有界でかつプロパーな狭義多重劣調和関数と呼ばれる実数値関数  $f: W \rightarrow \mathbb{R}$  を持つ。コンパクト Stein 曲面は、複素2次元の Stein 多様体  $(W, J)$  中のコンパクトな境界付き部分多様体であり、かつ上のような  $W$  上の狭義多重劣調和関数  $f$  のあるサブレベル集合  $f^{-1}([-\infty, c])$  として実現できる4次元多様体のことである。複素構造の制約から、コンパクト Stein 曲面の位相幾何学的手法を用いた研究は難しく思われる。しかし、Eliashberg[El] と Gompf[Go] による、コンパクト Stein 曲面のハンドル分解の条件や、そのハンドル分解を図示する Kirby 図式の描き方など、知られていることは少なくない。中でも、Loi と Piergallini[LP], Akbulut と Ozbagci[AO] による、コンパクト Stein 曲面と Lefschetz ファイバー空間の間の対応関係を示した結果は近年のコンパクト Stein 曲面の研究に盛んに用いられてきた。ここで、Lefschetz ファイバー空間とは、曲面をファイバーとする2次元円盤  $D^2$  上のファイバー空間で、ノード付き曲面を特異ファイバーとして含む。Loi と Piergallini らはさらに、コンパクト Stein 曲面とブレイド状曲面の対応関係についても [LP] において示している。彼らは、4次元多様体がコンパクト Stein 曲面の構造を持つことと、正ブレイド状曲面上分岐する単純被覆の全空間であることは同値であることを示した。ブレイド状曲面は、ブレイドモノドロミーやチャート表示などという位相幾何学的手法で扱う一方で、ブレイド状曲面を用いたコンパクト Stein 曲面の研究は著者の知る限りほとんどなされていない。

そこで、次のような問題を考える：正ブレイド状曲面について、その上で分岐する被覆を2つ以上考えたときに、それらの全空間が互いに微分同相であり、かつ Stein 構造が相異なるものを与える正ブレイド状曲面は存在するか。本稿では、この問いの肯定的な答えとして実際に構成したブレイド状曲面の例を紹介する。なお、多様体とその間の写像はすべて滑らかと仮定する。

本研究は科研費 (課題番号: 15J05214) の助成を受けたものである。

\* 〒152-8551 東京都目黒区大岡山2-1-2-1

e-mail: oba.t.ac@m.titech.ac.jp

## 2. 分岐被覆とブレイド状曲面

$\mathbb{D}$  を  $\mathbb{C}$  内の単位円盤とする. 写像  $q_2, p_2$  を次のように定める:

$$q_2 : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} : z \mapsto z^2,$$

$$p_2 := q_2 \times id : \mathbb{D} \times D^n \rightarrow \mathbb{D} \times D^n$$

$M^n, \tilde{M}^n$  をコンパクト  $n$  次元多様体とし, さらに  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  をその間の全射とする.

$$S_p := \{x \in \tilde{M} | \text{rank}(T_x p) < n\}, N := p(S_p), \tilde{N} := p^{-1}(N),$$

としたとき, 単純分岐被覆を次のように定める:

**定義 2.1.** 写像  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  が  $N$  上分岐する次数  $d$  の単純分岐被覆 (*simple branched covering*) であるとは,  $p$  が以下の条件を満たすときである:

1.  $p|_{\tilde{M} - \tilde{N}} : \tilde{M} - \tilde{N} \rightarrow M - N$  は通常の数  $d$  の被覆である;
2.  $N$  は余次元 2 の部分多様体である;
3. 任意の  $x \in \tilde{N}$  と  $p(x) \in N$  の周りで, 次の条件を満たす:

- $x \notin S_p$  のとき,  $p$  は局所微分同相写像である;
- $x \in S_p$  のとき, 座標近傍  $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$  と  $(U, \varphi)$  が存在して, 次の図式を可換にする:

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{U}, \tilde{U} \cap \tilde{N}) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & (\mathbb{D} \times D^{n-2}, 0 \times D^{n-2}) \\ p \downarrow & & \downarrow p_2 \\ (U, U \cap N) & \xrightarrow{\varphi} & (\mathbb{D} \times D^{n-2}, 0 \times D^{n-2}). \end{array}$$

上の  $N$  のことを分岐値集合 (**branch value set**) とよぶ.

次にブレイド状曲面についての復習をする. より詳しい説明は [Ru], [Ka2, Chapter 16, 17], [APZ, Section 3] にあるので参照して頂きたい.  $D_1^2, D_2^2$  を標準的な向きを持つ有向円盤とする.

**定義 2.2.**  $D_1^2 \times D_2^2$  にプロパー, すなわち  $S \cap \partial(D_1^2 \times D_2^2) = \partial S$  を満たすように埋め込まれた曲面  $S$ , が次数  $m$  のブレイド状曲面 (**braided surface**) であるとは, 第 1 射影  $pr_1 : D_1^2 \times D_2^2 \rightarrow D_1^2$  の  $S$  への制限が次数  $m$  の単純分岐被覆であるものをいう.

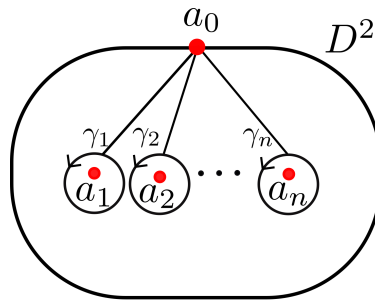


図 1: Hurwitz 生成システム

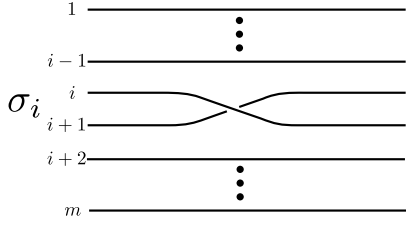


図 2: 標準的生成元  $\sigma_i \in B_m$

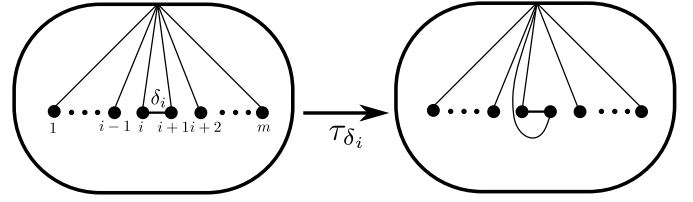


図 3: 弧  $\delta_i$  に沿う右手ハーフツイスト  $\tau_{\delta_i}$

$a_0$  を境界  $\partial D_1^2$  の点とし,  $Q_S := \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  を  $p_S := pr_1|_S$  の分岐値集合とする.  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)$  を次を満たす  $a_0$  を基点とするループたちの順序付き組とする:  $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k\}$  は  $\pi_1(D_1^2 \setminus Q_S, a_0)$  の生成系で, 各  $\gamma_i$  は  $a_i$  のみを囲み, 積  $\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_k$  が  $\partial D_1^2$  に向きを含めてホモトピックである. このような  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)$  を  $\pi_1(D_1^2 \setminus Q_S, a_0)$  の Hurwitz 生成システム (Hurwitz generating system) という (図 1).  $m$  次ブレイド群 (braid group)  $B_m$  を  $m$  個の点付き円盤  $D_m$  の写像類群 (mapping class group)  $\mathcal{M}_m$  と同一視して考える. ここで写像類群  $\mathcal{M}_m$  とは,  $D_m$  の自己微分同相写像のアイソトピー類全体が成す群のことである (ただし, アイソトピーは  $m$  個の点からなる集合を保つものとする). 実際,  $B_m$  の標準的生成元  $\sigma_i$  (図 2) に対し,  $\mathcal{M}_m$  の弧  $\delta_i$  に沿う右手ハーフツイスト (right-handed half-twist) (図 3) を対応させることでこれらの同一視が得られる.  $D_2^2(a) := pr_1^{-1}(a)$  とおくと, このとき, 任意の点  $a \in D_1^2 \setminus Q_S$  について,  $D_2^2(a) \cap S = p_S^{-1}(a) = \{m \text{ 点}\}$  である. このことから, 各  $\gamma_i$  に沿って一周すると,  $m$  個の点の“軌跡”として  $\mathcal{M}_m \cong B_m$  の元  $\beta_i$  が得られる. このようにして定まる準同型  $\rho_S : \pi_1(D_1^2 \setminus Q_S, a_0) \rightarrow B_m$  を  $S$  のブレイドモノドロミー (braid monodromy) と呼ぶ. また, 組  $(\rho_S(\gamma_1), \rho_S(\gamma_2), \dots, \rho_S(\gamma_k)) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$  のことも  $S$  のブレイドモノドロミーと呼ぶことにする. いま,  $p_S$  が単純分岐被覆であることから, 各  $i$  について, ある  $w_i \in B_m$ ,  $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$  が存在して,  $\rho_S(\gamma_i) = w_i^{-1} \sigma_1^{\varepsilon_i} w_i$  と書けることが知られている. ブレイド状曲面  $S$  が正 (positive) であるとは, すべての  $i$  に対し,  $\varepsilon_i = +1$  であるときをいう. ここではブレイド状曲面からブレイドモノドロミーを構成したが, 逆に上のような組を与えたときにそれをブレイドモノドロミーとするブレイド状曲面が構成できることに注意しておく (例えば, [Ka1, LEMMA 3] を見よ).

$p : X \rightarrow D_1^2 \times D_2^2 \approx D^4$  を正ブレイド状曲面  $S$  上分岐する単純分岐被覆とする. このとき,  $f := pr_1 \circ p : X \rightarrow D^2$  は Lefschetz ファイバー空間 (Lefschetz fibration) という写像になる (Lefschetz ファイバー空間については, 例えば [Go, Chapter 8] を参照せよ).  $f$  の特異値集合と  $Q_S$  は一致し,  $f$  のファイバーは  $f^{-1}(a_0) = p^{-1}(D_2^2(a_0))$  である (図 4).  $p|_{p^{-1}(D_2^2(a_0))} : p^{-1}(D_2^2(a_0)) \rightarrow D_2^2(a_0)$  が  $S \cap D_2^2(a_0)$  上分岐する分岐被覆であることにも注意しておく. また,  $f$  のモノドロミーは  $S$  のブレイドモノドロミーの持ち上げである. 実際, 右手ハーフツイストの持ち上げは右手 Dehn ツイストであることが確認できる. 詳しくは [LP, Proposition 1] を参照して頂きたい.

### 3. 主結果

$D_1^2 \times D_2^2$  の単純分岐被覆を構成するにあたり補題を 1 つ与える.  $q : \Sigma \rightarrow D^2$  を次数  $d$  の単純分岐被覆とする. 分岐値集合  $Q_q$  の濃度を  $m$  とする. 上のようにブレイド群  $B_m$  を写像類群  $\mathcal{M}_m$  と同一視し,  $\beta \in B_m$  に対し定まる元を  $h_\beta \in \mathcal{M}_m$  と書く.

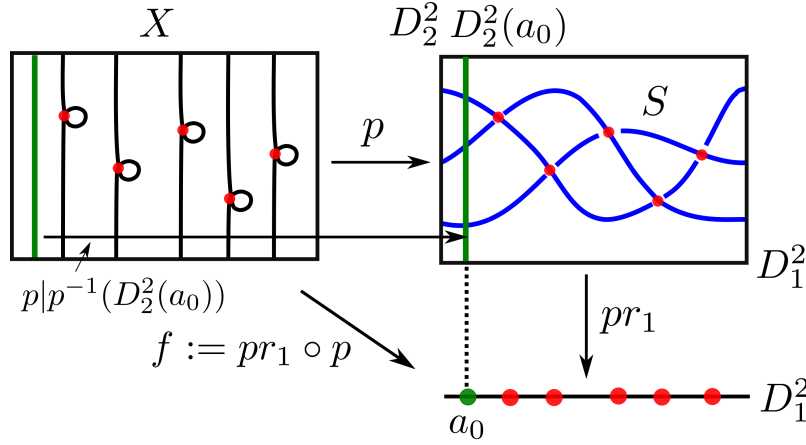


図 4: 左右の長方形は各々  $X, D_1^2 \times D_2^2$  を表し, その中の点は  $f, p_S$  の特異点を表す.

$h_\beta \in \mathcal{M}_m$  または  $\beta \in B_m$  が  $q$  に関し持ち上げ可能 (liftable) であるとは, 微分同相写像  $H: \Sigma \rightarrow \Sigma$  と,  $[h] = h_\beta$  なる微分同相写像  $h: D^2 \rightarrow D^2$  が存在し,  $q \circ H = h \circ q$  を満たすときをいう. ただし, ここでの  $\mathcal{M}_m \cong B_m$  は,  $D_1^2$  の  $m$  点から成る  $Q_q$  を固定する写像類群として考えている.

**補題 3.1.**  $S \subset D_1^2 \times D_2^2$  を正ブレイド状曲面とし, そのブレイドモノドロミーを  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$  とする.  $a_0$  を  $\partial D_1^2$  の点とし,  $q: \Sigma \rightarrow D_2^2(a_0) \subset D_1^2 \times D_2^2$  を  $S \cap D_2^2(a_0)$  上分岐する次数  $d$  の単純分岐被覆とする. もし, 各  $\beta_i$  が  $q$  に関し持ち上げ可能ならば,  $S$  上分岐する  $D_1^2 \times D_2^2 \approx D^4$  の次数  $d$  の単純分岐被覆  $p: X \rightarrow D^4$  が存在し,  $p|_{p^{-1}(D_2^2(a_0))} = q$  である.

**証明の概略.**  $b_0 \in \partial D_2^2(a_0)$  をとり,  $\pi_1(D_2^2(a_0) \setminus S, (a_0, b_0))$  に対し, Hurwitz 生成システム  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  を取る. 補題を示すには, 表現  $\rho: \pi_1(D^4 \setminus S, (a_0, b_0)) \rightarrow \mathfrak{S}_d$  が  $q$  の被覆モノドロミー  $\rho_q: \pi_1(D_2^2(a_0) \setminus S, (a_0, b_0)) \rightarrow \mathfrak{S}_d$  から定まることを示せばよい. すると,  $\rho$  を被覆モノドロミーとする  $D^4$  上の分岐被覆が構成できる. ただし,  $\mathfrak{S}_d$  は  $d$  次対称群である.  $\pi_1(D^4 \setminus S, (a_0, b_0))$  は,  $\iota: (D_2^2(a_0) \setminus S, (a_0, b_0)) \hookrightarrow (D^4 \setminus S, (a_0, b_0))$  を包含写像としたとき,  $\iota_*(x_1), \iota_*(x_2), \dots, \iota_*(x_m)$  で生成され, 表示に関しても  $S$  のブレイドモノドロミーから計算できることが知られている ([Fo, p. 133], [Ru, Proposition 4.1]). 後は, ブレイドモノドロミーの各成分が  $q$  に関して持ち上げ可能であることを用いて,  $\rho$  が構成できることを示せばよい.  $\square$

**定理 3.2** ([Ob]).  $N$  を 2 以上の任意の自然数とする. このとき, 正ブレイド状曲面  $S \subset D_1^2 \times D_2^2$  が存在し,  $S$  を分岐値集合とする単純分岐被覆  $p_i: X_i \rightarrow D^4$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) で次を満たすものが存在する:

1. 分岐被覆  $p_i$  の次数は全て同じである;
2.  $X_1, X_2, \dots, X_N$  は互いに微分同相である;
3. 単純分岐被覆  $p_i$  に付随する  $X_i$  上の Stein 構造を  $J_i$  とすると,  $i \neq j$  のとき  $J_i$  と  $J_j$  はホモトピックでない.

**証明の概略** ( $N = 2$  のとき). 8 次ブレイド群  $B_8$  の元,  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$  を図 5 のように定義する. ただし, 図 5 の単純弧たちは,  $B_8$  と  $\mathcal{M}_8$  を同一視したとき, 各  $\beta_i \in B_8$

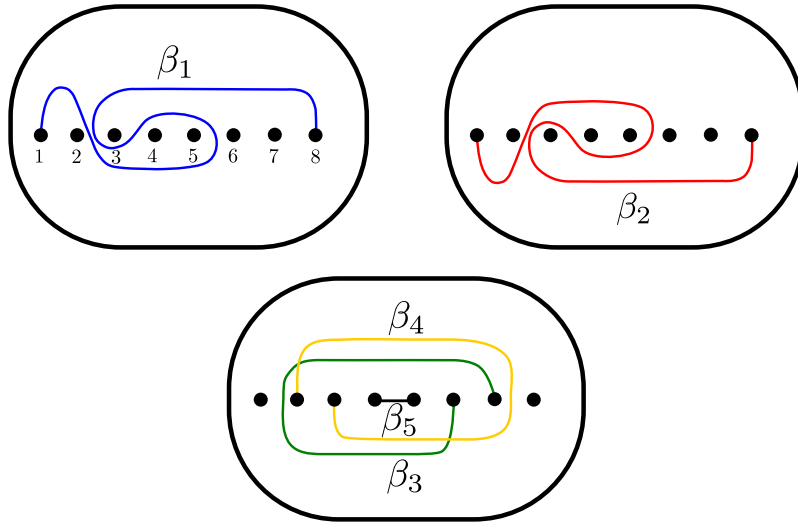


図 5:  $h_{\beta_1}, \dots, h_{\beta_5} \in \mathcal{M}_8$  を生成する弧たち.

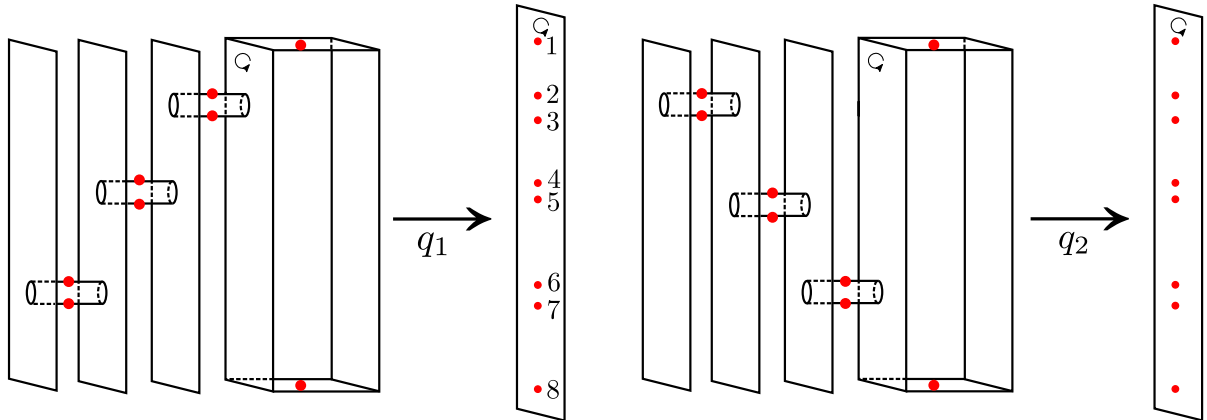


図 6: 単純分岐被覆  $q_1, q_2$ .

に対応する  $\mathcal{M}_8$  の元, 右手ハーフツイストを生成する弧を表してる. 正ブレイド状曲面  $S$  を, ブレイドモノドロミーが組  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5)$  であるものとして定義する.  $q_1, q_2 : \Sigma \rightarrow D_2^2(a_0)$  を, 図 6 で表される次数 5 の単純分岐被覆とする. (ブレイド  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$  の具体的な表示や, 単純分岐被覆  $q_1, q_2$  の被覆モノドロミー等は [Ob, Theorem 1.1] の証明を参照せよ.)  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$  は  $q_1, q_2$  に関し持ち上げ可能であることが簡単に確かめることができる. したがって補題 3.1 より, 各  $q_i$  に対し単純分岐被覆  $p_i : X_i \rightarrow D^4$  が定まる.

$X_1$  と  $X_2$  が微分同相であることを示す. これには各  $p_i$  から定まる  $X_i$  上の Lefschetz ファイバー空間  $pr_1 \circ p_i$ , およびその境界として得られる  $\partial X_i$  のオープンブック分解の情報を用いて示すことができる.

$p_1, p_2$  から定まる Stein 構造  $J_1, J_2$  が異なることは, 第 1 Chern 類を計算することで分かる.  $X_i$  上の Lefschetz ファイバー空間の情報から Kirby 図式を描くことができ, その図式から Chern 類を計算することができる. 実際,  $c_1(X_1, J_1) \neq 0, c_1(X_2, J_2) = 0$  となる.  $J_1, J_2$  がホモトピックであれば Chern 類は一致する. よって,  $J_1, J_2$  はホモト

ピックでない。

□

最後に系を1つ紹介する。定理3.2において境界  $\partial(D_1^2 \times D_2^2)$  に目を向けてみる。まず、有向3次元多様体  $M$  上の平面場  $\xi$  が接触構造 (contact structure) であるとは、 $M$  上の1次微分形式  $\alpha$  が存在し、 $\xi = \text{Ker}(\alpha)$  かつ  $M$  の向きに関し  $\alpha \wedge d\alpha > 0$  となるときをいう。このとき、組  $(M, \xi)$  を接触多様体 (contact manifold) という。接触多様体  $(M, \xi)$  の中の有向絡み目  $L$  が横断的絡み目 (transverse link) であるとは、各点  $x \in L$  において、 $T_x L$  が  $\xi_x$  に横断的である絡み目である。接触多様体、横断的絡み目についてより詳しいことは、例えば [OS, Section 4], [Ge] を参照して頂きたい。

$\partial(D_1^2 \times D_2^2) \approx S^3$  の標準的接触構造  $\xi_{std}$  について、ブレイド状曲面の境界は横断的絡み目になっている。さらに、定理3.2の証明において構成されたコンパクト Stein 曲面たち  $(X_1, J_1), \dots, (X_2, J_2)$  は、境界に現われる接触構造が互いにアイソトピックでないように構成されている。ゆえに以下の系が得られる。

**系 3.3.**  $N$  を2以上の任意の自然数とする。このとき、標準的接触構造を持つ3次元球面  $S^3$  の中の横断的絡み目  $L$  が存在し、 $L$  を分岐集合とする単純分岐被覆  $p_i : M_i \rightarrow S^3$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) で次を満たすものが存在する：

1. 分岐被覆  $p_i$  の次数は全て同じである；
2.  $M_1, M_2, \dots, M_N$  は互いに微分同相である；
3. 単純分岐被覆  $p_i$  に付随する  $M_i$  上の接触構造を  $\xi_i$  とすると、 $i \neq j$  ならば  $\xi_i$  と  $\xi_j$  はアイソトピックでない。

謝辞 第12回数学総合若手研究集会での講演の機会、また本稿の執筆の機会を与えていただきました、北海道大学の世話人の方々に感謝申し上げます。

## 参考文献

- [APZ] N. Apostolakis, R. Piergallini, and D. Zuddas, *Lefschetz fibrations over the disc*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **107** (2013), no. 2, 340–390.
- [AO] S. Akbulut and B. Ozbagci, *Lefschetz fibrations on compact Stein surfaces*, Geom. Topol. **5** (2001), 939–945.
- [El] Y. Eliashberg, *Topological characterization of Stein manifolds of dimension  $> 2$* , Internat. J. Math. **1** (1990), no. 1, 29–46.
- [Fo] R. H. Fox, *A quick trip through knot theory*, Topology of 3-manifolds and related topics (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962), pp. 120–167.
- [Ge] H. Geiges, *An introduction to contact topology*, Cambridge Stud. Adv. Math. **109**, Cambridge Univ. Press, 2008.
- [Go] R. Gompf, *Handlebody construction of Stein surfaces*, Ann. of Math. (2) **148** (1998), no. 2, 619–693.
- [Ka1] S. Kamada, *On braid monodromies of non-simple braided surfaces*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **120** (1996), no. 2, 237–245.
- [Ka2] S. Kamada, *Braid and knot theory in dimension four*, Mathematical Surveys and Monographs, **95**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [LP] A. Loi and R. Piergallini, *Compact Stein surfaces with boundary as branched covers of  $B^4$* , Invent. Math. **143** (2001), no. 2, 325–348.
- [Ob] T. Oba, *Compact Stein surfaces as branched covers with same branch sets*, arXiv:1508.01020.



- [OS] B. Ozbagci and A. Stipsicz, *Surgery on contact 3-manifolds and Stein surfaces*, Bolyai Soc. Math. Stud. **13**, Springer-Verlag, 2004.
- [Ru] L. Rudolph, *Braided surfaces and Seifert ribbons for closed braids*, Comment. Math. Helv. **58** (1983), no. 1, 1–37.

# 不変周期点代数多様体の“成分”と 再帰方程式の“基本領域”の双対性

弓林 司\*(Tsukasa YUMIBAYASHI)  
首都大学東京理工学研究科物理学専攻

## 概要

本講演では、不変周期点代数多様体の“周期的に振る舞う部分集合による分解”と、再帰方程式が定義する“空間の対称性の基本領域による分解”の間の双対性について与える。本講演は arXiv:1504.07548[1] に基づく。

## 1 序論

### 1.1 不変周期点代数多様体 (IVPP)

まず本発表の1つ目の主題である不変周期点代数多様体について紹介する。

$d$ 次元写像  $F : \mathbf{x}^t \mapsto \mathbf{x}^{t+1}$ ,  $\mathbf{x}^t, \mathbf{x}^{t+1} \in \mathbb{C}^d$  が  $p$  個不変量  $\mathbf{r} : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{r}(\mathbf{x})$  s.t.  $\mathbf{r}(\mathbf{x}^{t+1}) = \mathbf{r}(\mathbf{x}^t) \in \mathbb{C}^p$  を持つとする。 $F$  の  $n$  周期不変周期点代数多様体 (IVPP)[2][3][4] とは、 $n$  周期周期点代数多様体、

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{C}^d \mid F^{(n)}(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = 0, F^{(m)}(\mathbf{x}) - \mathbf{x} \neq 0, m \leq n \right\} \quad (1)$$

であって、これが不変量のみからなるものをいう。

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{C}^d \mid \gamma^{(n)}(\mathbf{r}(\mathbf{x})) = 0 \right\}, \quad \gamma^{(n)} \circ \mathbf{r} : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^{d-p} \quad (2)$$

IVPP は IVPP 定理と呼ばれる以下の重要な性質を持つ [2][3][4]。

*IVPP* 定理： $d$ 次元有理写像  $F$  が  $p$  個不変量を持つとする。 $p \geq d/2$  を満たすとき、ある  $n \geq 2$  に対して  $n$  周期点代数多様体が *IVPP*/離散周期点集合<sup>\*1</sup> となれば、任意の  $m \geq 2$  に対して  $m$  周期点代数多様体は離散周期点代数多様体/*IVPP* とはならない。

\* E-mail: t.yumibayashi@kiso.phys.se.tmu.ac.jp

\*1 以降、連続点集合、或いは、離散点集合といったときは、不変量一定面 (レベルセット)  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^d \mid \mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}\}$ ,  $\mathbf{h} \in \mathbb{C}^p$  上で考えているものとする。

IVPP 定理は写像の可積分性に対し重要な情報を持っている。即ち、非可積分系を特徴付ける Julia 集合 [6] は離散周期点集合 (の部分集合) によって特徴付けられるので、IVPP 定理より IVPP/Julia 集合の存在は Julia 集合/IVPP の存在とは相容れない。故に次の“予想”が導かれる。

予想：写像が IVPP/Julia 集合を持つとき写像は可積分/非可積分である。

即ち IVPP を研究することで“可積分性とは何か?”と云う大きな問いの答えに近づけると考えられる。以上が IVPP を研究する動機である。

IVPP が上記の様な興味深い性質を持つのは IVPP が“連続点集合”を成すからである。しかしながら、これまでの研究では、IVPP の“内訳”、即ちその“成分”は調べられてこなかった。本発表では IVPP の成分の構造について報告する。

## 1.2 再帰方程式 (RE)

次に、本発表の2つ目の主題である、再帰方程式について紹介する。

$n$  周期再帰方程式 (RE) とは、写像であって、任意の初期点について  $n$  周期点となるものをいう [7][8]。以下の様な例が知られている [7]。

- 2 周期 RE :

$$X = \frac{1}{x}, \quad x, X \in \mathbb{C} \quad (3)$$

- 5 周期 RE :

$$X = \frac{1+x}{y}, \quad Y = x, \quad x, y, X, Y \in \mathbb{C} \quad (4)$$

$n$  周期 RE は空間に作用し、空間を  $n$  個の“基本領域”に分解する。

特に、IVPP を持つ写像は、写像を  $n$  周期 IVPP に制限する事で  $n$  周期 RE となる [9]。即ち、IVPP の成分は、RE の基本領域として与えられると考えられる。

### IVPP の成分 ~ RE の基本領域

この関係から IVPP の成分についての重要な性質が分かる。即ち、以下に見るケースにおいて、RE は円分多項式 [5] の構造を持ち、IVPP の成分はこの構造を反映しているのである。

加えて本発表では IVPP の成分を与えるアルゴリズムについても紹介する。

## 2 2次元 Möbius 写像

本発表では2次元 Möbius 写像を用いて議論を行う [10]。

### 2.1 写像

$$F_{2d} : (x, y) \mapsto (X, Y) := \left( x \frac{1-y}{1-x}, y \frac{1-x}{1-y} \right), \quad x, y \in \mathbb{C} \quad (5)$$

### 2.2 不変量

$$r := r(x, y) = xy \quad (6)$$

### 2.3 IVPP

(5) の IVPP の一般式は以下の様にと与えられる [10]。

$$\gamma^{(n)}(r) = r + \tan^2\left(\frac{\pi m}{n}\right), \quad m = 1, 2, \dots, n-1, \quad n = 3, 4, \dots \quad (7)$$

いくつか具体的に書くと以下の様になる。

$$\gamma^{(2)}(r) = \text{none}, \quad \gamma^{(3)}(r) = 3 + r, \quad \gamma^{(4)}(r) = 1 + r, \quad \text{etc...} \quad (8)$$

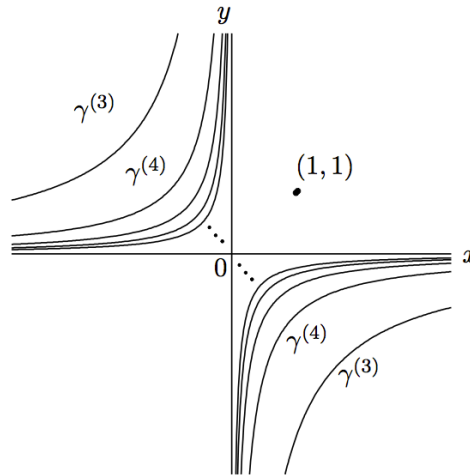


図1 2次元 Möbius 写像 (5) の IVPP

## 2.4 IVPP の成分

(5) の 3 周期 IVPP ( $xy + 3 = 0$ ) 上の点の運動を  $x$  で径数付けたものは以下の様に与えられる。

$$\left(x, -\frac{3}{x}\right) \rightarrow \left(\frac{3+x}{1-x}, 3\frac{1-x}{3+x}\right) \rightarrow \left(\frac{x-3}{1+x}, 3\frac{1+x}{x-3}\right) \rightarrow \left(x, -\frac{3}{x}\right) \quad (9)$$

確かに全ての IVPP 上の点が 3 周期である事が分かる。

この IVPP の ( $x$  方向の) 成分は列 (9) に  $x = -\infty$  を代入する事で得る事が出来る。即ち、(5) の 3 周期 IVPP の ( $x$  方向の) 成分  $(C_{3i})_x, i = 1, 2, 3$  は、以下の様に与えられる。

$$(C_{31})_x = (-\infty, -1), \quad (C_{32})_x = [-1, 1), \quad (C_{33})_x = [1, \infty) \quad (10)$$

$$C_{31} \xrightarrow{F} C_{32} \xrightarrow{F} C_{33} \xrightarrow{F} C_{31} \quad (11)$$

上で得た成分を使って (5) の 3 周期 IVPP を “タイリング” する事が出来る。それは以下の様に与えられる。

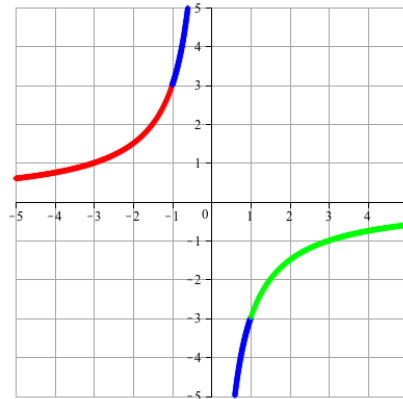


図 2 (5) の 3 周期 IVPP の成分,  $C_{31}$  : 赤,  $C_{32}$  : 青,  $C_{33}$  : 緑.

## 2.5 (5) の IVPP の成分の性質について

本節では (5) の IVPP の成分が持つ構造について議論する。まず、(5) をレベルセットに制限すると、以下の写像を得る。

$$x \mapsto X = \frac{x-r}{1-x}, \quad x, X \in \mathbb{C}$$

特に、この写像は以下の様な線型写像、即ち、Möbius 写像として書く事が出来る。

$$\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & -r \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{CP}^2 \quad (12)$$

更に、 $M$  を対角化する座標変換は、

$$\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{r} & \sqrt{r} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{CP}^2 \quad (13)$$

であり、故に (12) は以下の様に対角化される。

$$\begin{pmatrix} Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{\pm} := 1 \pm \sqrt{r}, \quad \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Z \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{CP}^2 \quad (14)$$

従って、新しい不変量、

$$s = \frac{\lambda_+}{\lambda_-}, \quad \lambda_{\pm} \in \mathbb{C} \quad (15)$$

を選ぶ事で、写像 (5) 或いは (14) はただのスケール変換となる。

$$z \mapsto Z = sz, \quad z, Z \in \mathbb{C} \quad (16)$$

この事実は (14) の (全ての) IVPP が円分多項式 [5] によって与えられる事を意味している。

$$\Phi_n(s) \sim s^n - 1 = 0 \quad (17)$$

結果、(5) 或いは (14) の  $n$  周期 IVPP の成分は、 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_n$  と等価である事が分かる。

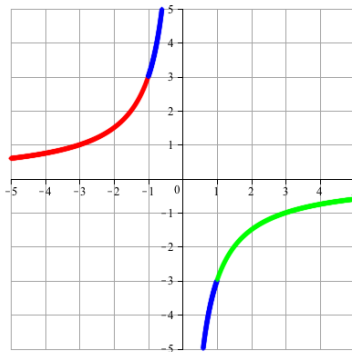


図3 3周期 IVPP

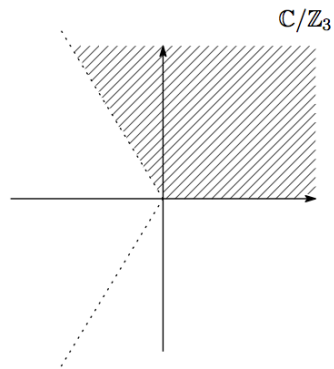


図4  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_3$

以上の議論より、 $n$  周期 IVPP の各成分の  $x$  方向の境界  $c_m$  は、以下で与えられる。

$$c_m := \frac{(1 - s_n)(1 + s_n^m)}{(1 + s_n)(1 - s_n^m)}, \quad m = 0, 1, \dots, n \quad (18)$$

ここで  $s_n$  は  $n$  次円分多項式の解である。

更に、 $z$  変数における境界  $d_m$  は、以下で与えられる。

$$d_m := -\sqrt{r} \frac{\sqrt{r}(\lambda_+^m + \lambda_-^m) + (\lambda_+^m - \lambda_-^m)}{\sqrt{r}(\lambda_+^m + \lambda_-^m) - (\lambda_+^m - \lambda_-^m)}, \quad m = 0, 1, \dots, n \quad (19)$$

これらの公式は、以下の様に、写像 (14) を  $m$  回繰り返した結果を、(12) へ引き戻す事で得る事が出来る。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -r \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^m &= O \begin{pmatrix} \lambda_+^m & 0 \\ 0 & \lambda_-^m \end{pmatrix} O^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_+^m + \lambda_-^m & -\sqrt{r}(\lambda_+^m - \lambda_-^m) \\ -\frac{1}{\sqrt{r}}(\lambda_+^m - \lambda_-^m) & \lambda_+^m + \lambda_-^m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで  $O$  は  $M$  の対角化行列とおいた。 $x$  方向の成分の境界は  $x$  に  $-\infty$  を代入する事で得られる。これが (18) を得る方法である。

本節の最後に、IVPP の成分の境界について、もう 1 つの視点を紹介したい。我々は、IVPP の成分の境界を与える際、 $x$  に  $-\infty$  を代入した。これは“点  $x$  が発散する様な初期点から出発した”と解釈する事も出来る。即ち、写像の  $x$  成分の分母が 0 となる様な点の集まり ( $\sim$  特異点集合) と IVPP の交点が、IVPP の成分の境界となるのである。(5) の  $m$  回写像の特異点集合は、以下の様に与えられる。

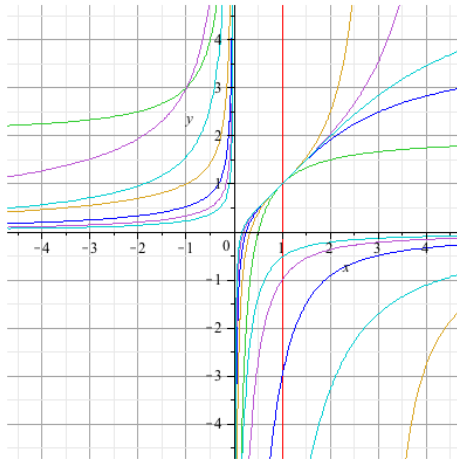


図5 (5) の特異点集合,  $F$  : 赤,  $F^{(2)}$  : 緑,  $F^{(3)}$  : 黄色,  $F^{(4)}$  : 青,  $F^{(5)}$  : 紫,  $F^{(6)}$  : 水色

### 3 結論

以上の議論から任意の写像に対し以下の様な方法で IVPP の成分を導く事が出来る\*2 : アルゴリズム

- 1  $n$  周期 IVPP の上に初期点  $\mathbf{x}^0$  をとる。(もし IVPP が多価であるならば全ての部分に対し以下のアルゴリズムを実行する)
- 2  $n$  周期 IVPP の上の点の運動を計算する。

$$\mathbf{x}^0 \rightarrow \mathbf{x}^1(\mathbf{x}^0) \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{x}^{n-1}(\mathbf{x}^0) \rightarrow \mathbf{x}^n(\mathbf{x}^0) = \mathbf{x}^0 \quad (20)$$

- 3 (20) に  $\mathbf{x}^0$  の定義域の中で最小のものを代入する。

以上の議論により、始めに述べた “IVPP の成分  $\sim$  RE の基本領域” という関係は、より正確に

$$n \text{ 周期 IVPP} \sim \mathbb{C}/n\mathbb{Z}$$

と理解される事が分かった。

### 参考文献

- [1] T. Yumibayashi, arXiv:1504.07548, 2015(submitted).
- [2] S. Saito and N. Saitoh, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **76** No.2 p.024006, 2007.
- [3] S. Saito and N. Saitoh *J. Math. Phys.*, **51** 063501, 2010.
- [4] S. Saito and N. Saitoh, “Invariant varieties of periodic points” in Mathematical Physics Research Developments, 2008 Nova Science Publishers, Inc., Capt.3 pp 85-139, 2008.
- [5] Wolfram Mathworld, mathworld.wolfram.com/CyclotomicPolynomial.html.
- [6] R. L. Devaney, “An Introduction to Chaotic Dynamical Systems”, Westview Press, 2003.
- [7] R. L. Graham, D. E. Knuth and O. Patashnik, *Concrete Mathematics* (Addison-Wesley), 1994.
- [8] R. Hirota and H. Yahagi, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **71**, 2867, 2002.
- [9] S. Saito and N. Saitoh, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **40**, 12775-12787, 2007.
- [10] S. Saito, N. Saitoh, H. Harada, T. Yumibayashi and Y. Wakimoto, AIP Advances, AIP ID: 003306ADV, 2013.

---

\*2 注意:  $p$  個不変量を持つ  $d$  次元写像はレベルセットへ制限すると  $p$  個パラメータを持つ。IVPP は  $d-p$  個の式からパラメータを制限するから、 $p-(d-p)=2p-d$  個、自由なパラメータが存在する事が分かる。2次元 Möbius 写像の場合、この値は 0 となる為、面倒なことは起こらないが、一般にはパラメータについても議論が必要となる。詳しくは [1] を参照の事。





# パラレルセッション 会場A



# On the Riemann-Hilbert correspondence for unit $F$ -crystals

大川幸男 (Sachio OHKAWA)

東大数理 博士課程3年

## 1 導入

古典的に Riemann-Hilbert 対応とは、基本群の表現に対してその表現をモノドロミー表現に持つ線形微分方程式の存在を問う。1980 年代に柏原と Mebkhout は、複素多様体  $X$  に対し、Riemann-Hilbert 対応をコホモロジー層が正則ホロノミックな  $\mathcal{D}_X$ -加群の複体が定める導来圏  $D_{\text{rh}}^b(\mathcal{D}_X)$  とコホモロジー層が構成可能な  $\mathbb{C}$ -線形空間に値を持つ層の複体が定める導来圏  $D_c^b(X, \mathbb{C})$  との三角圏同値

$$D_{\text{rh}}^b(\mathcal{D}_X) \xrightarrow{\cong} D_c^b(X, \mathbb{C})$$

として (独立に) 定式化した。ここに  $\mathcal{D}_X$  は  $X$  上の微分作用素のなす環の層であり、前者の圏の対象は  $X$  上の線形偏微分方程式系を起源を持つ。一方で構成可能層とは局所系の一般化であり、後者の圏の対象は位相幾何学的である。この圏同値はコホモロジー理論の観点から重要な意味をもつ。 $D_{\text{rh}}^b(\mathcal{D}_X)$  には Grothendieck の 6 つの演算  $f_*$ ,  $f^*$ ,  $f_!$ ,  $f^!$ ,  $\otimes^{\mathbb{L}}$ ,  $\underline{\text{Hom}}$  が定義され、ドラムコホモロジー論を含むような相対コホモロジー論を与える。ここに  $f$  は複素多様体の射である。一方  $D_c^b(X, \mathbb{C})$  は特異コホモロジー論を含む相対コホモロジー論の枠組みを与える。柏原-Mebkhout による Riemann-Hilbert 対応の著しい性質は、両者の圏に独立に定義される Grothendieck の 6 つの演算と整合的となることである。

数論幾何においても様々なコホモロジー理論とそれらの間の比較同型が研究されてきた。Emerton-Kisin は [EK2] において柏原-Mebkhout による Riemann-Hilbert 対応の正標数における類似を構成した。筆者の研究は Emerton-Kisin の仕事の一部を一般化したものである。以下、2 節において筆者の研究の出発点となった Emerton-Kisin の結果を簡単に紹介し、また筆者の研究の動機について述べる。3 節において筆者の [O3] における結果を紹介する。

## 2 unit $F$ -crystal に対する Riemann-Hilbert 対応

まず Emerton-Kisin による結果 [EK2] を復習する。論文 [EK2] は大部であるが、彼ら自身による解説論文 [EK1] もあることをあげておく。

$k$  を標数  $p > 0$  の完全体、 $W$  をその Witt 環とする。 $W_n$  を商環  $W/p^n W$  とする。 $X$  を滑らかな  $W_n$ -スキーム、 $\mathcal{D}_X$  を  $X$  上の微分作用素のなす環の層とする。Emerton-Kisin は構造層

$\mathcal{O}_X$  に  $X$  上の微分作用素と “ $X \otimes_{W_n} k$  の絶対フロベニウスの  $X$  への局所的な持ち上げ  $F$ ” を付け加えた環の層  $\mathcal{D}_{F,X}$  を導入した.  $\mathcal{D}_{F,X}$  は一般には非可換な  $\mathcal{O}_X$ -代数をなし, また自然な環の係数拡大  $\mathcal{D}_X \rightarrow \mathcal{D}_{F,X}$  が存在する. Berthelot による数論的  $\mathcal{D}$ -加群の理論 (とくにフロベニウス降下の理論) を応用すると, フロベニウスによる引き戻し関手

$$F^* : (\text{left } \mathcal{D}_X\text{-modules}) \rightarrow (\text{left } \mathcal{D}_{F,X}\text{-modules})$$

を  $X$  上大域的に定義することができる.

**Remark 2.1.** この関手の構成に絶対フロベニウス  $F_{X \otimes_{W_n} k}$  の  $X$  への持ち上げの存在を必ず必要はない. 局所的に取ったフロベニウス持ち上げで引き戻した  $\mathcal{D}_X$ -加群が張り合うというのが構成の鍵である.

この関手  $F^*$  を用いると, 左  $\mathcal{D}_{F,X}$ -加群  $\mathcal{M}$  を次のように特徴づけることが出来る. 即ち, 左  $\mathcal{D}_{F,X}$ -加群  $\mathcal{M}$  与えることは  $\mathcal{D}_X$ -加群  $\mathcal{M}$  と  $\mathcal{D}_X$ -線形な射 (構造射と呼ぶ)  $\psi_{\mathcal{M}} : F^* \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  の組を与えることと同値である.

**Definition 2.2.** 左  $\mathcal{D}_{F,X}$ -加群  $\mathcal{M}$  が *locally finitely generated unit* とは,  $\mathcal{M}$  の構造射  $\psi_{\mathcal{M}}$  が同型であり, さらに局所的に  $\mathcal{M}$  の連接  $\mathcal{O}_X$ -部分加群  $M \subset \mathcal{M}$  で自然な射  $\mathcal{D}_{F,X} \otimes_{\mathcal{O}_X} M \rightarrow M$  が全射となるものが存在することをいう. *locally finitely generated unit*  $\mathcal{D}_{F,X}$ -加群全体は, 左  $\mathcal{D}_{F,X}$ -加群のなす圏の *thick* 部分圏をなす.

$X/W_n$  に対する  $\mathcal{D}$ -加群の圏の類似を定義する. 三角圏  $D_{\text{lfgu}}^b(\mathcal{D}_{F,X})^\circ$  を, コホモロジー層が全て *locally finitely generated unit* であり, かつ  $\mathcal{O}_X$ -加群の複体として Tor 次元が有限となるもののなす  $D^b(\mathcal{D}_{F,X})$  充満部分圏として定義する. ここに  $D^b(\mathcal{D}_{F,X})$  は左  $\mathcal{D}_{F,X}$ -加群の複体が定める導来圏である.

$f : X \rightarrow Y$  を滑らかな  $W_n$ -スキームの間の射とする. Emerton-Kisin は複素数体上の  $\mathcal{D}$ -加群の理論に類似した方法で, 順像関手

$$f_+ : D_{\text{lfgu}}^b(\mathcal{D}_{F,X})^\circ \rightarrow D_{\text{lfgu}}^b(\mathcal{D}_{F,Y})^\circ$$

逆像関手

$$f^! : D_{\text{lfgu}}^b(\mathcal{D}_{F,Y})^\circ \rightarrow D_{\text{lfgu}}^b(\mathcal{D}_{F,X})^\circ$$

およびテンソル積

$$\otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbb{L}} : D_{\text{lfgu}}^b(\mathcal{D}_{F,X})^\circ \times D_{\text{lfgu}}^b(\mathcal{D}_{F,X})^\circ \rightarrow D_{\text{lfgu}}^b(\mathcal{D}_{F,X})^\circ$$

を構成した.

Emerton-Kisin の研究では  $D_{\text{lfgu}}^b(\mathcal{D}_{F,Y})^\circ$  と  $X$  のエタールサイト上の三角圏を比較する.  $D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$  を  $X_{\text{ét}}$  上の  $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ -加群の有限複体でそのコホモロジー層が構成可能でかつ  $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ -加群として Tor 次元が有限となるもののなす  $D^b(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$  の充満部分圏とする. よく知られているように, 射  $f : X \rightarrow Y$  に対して固有な台付き順像関手

$$f_! : D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \rightarrow D_{\text{ctf}}^b(Y_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}),$$

逆像関手

$$f^{-1} : D_{\text{ctf}}^b(Y_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \rightarrow D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

およびテンソル積

$$\otimes_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} : D_{\text{ctf}}^b(Y_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \times D_{\text{ctf}}^b(Y_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \rightarrow D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

が定義される.

$X$  を滑らかな  $W_n$ -スキームとする.  $\pi_X : X_{\text{ét}} \rightarrow X$  を自然なサイトの射とする. ここに  $X$  は Zariski サイトを表す. この時  $\mathcal{D}_{F, X_{\text{ét}}} := \pi_X^* \mathcal{D}_{F, X}$  は自然に  $X_{\text{ét}}$  上の  $\mathcal{O}_{X_{\text{ét}}}$ -代数をなす. エタール降下により, 三角圏の同値

$$\pi_X^* : D_{\text{qc}}^b(\mathcal{D}_{F, X}) \rightarrow D_{\text{qc}}^b(\mathcal{D}_{F, X_{\text{ét}}})$$

を得る.  $\mathcal{M} \in D_{\text{lfgu}}^b(\mathcal{D}_{F, X})^\circ$  に対して

$$\text{Sol}_X(\mathcal{M}) = \mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{D}_{F, X_{\text{ét}}}}(\pi_X^*(\mathcal{M}), \mathcal{O}_{X_{\text{ét}}})[d_X].$$

とおく. この対応は反変関手

$$\text{Sol}_X : D_{\text{lfgu}}^b(\mathcal{D}_{F, X})^\circ \rightarrow D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

を定める [EK2, Proposition 16.1.7]. 一方逆に,  $\mathcal{L} \in D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$  に対して

$$\text{M}_X(\mathcal{L}) = \pi_{X*} \mathbb{R}\text{Hom}_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_{X_{\text{ét}}})[d_X].$$

とおく. この対応は反変関手

$$\text{M}_X : D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \rightarrow D_{\text{lfgu}}^b(\mathcal{D}_{F, X}).$$

を定める. 以上の記号の準備の下で, [EK2] の主結果 [EK2, Corollary 16.2.6] は次のようにまとめることができる.

**Theorem 2.3.**  $X$  を滑らかな  $W_n$ -スキームとする. この時関手  $\text{Sol}_X$  は  $\text{M}_X$  を準逆に持つ三角圏の同値

$$D_{\text{lfgu}}^b(\mathcal{D}_{F, X})^\circ \rightarrow D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

を定める. さらに  $\text{Sol}_X$  は以下の性質を満たす. ( $\text{M}_X$  についても対応した主張が成り立つが省略する.)

(1) 関手的な同型  $\text{Sol}_X(- \otimes_{\mathcal{O}_X}^{\mathbb{L}} -) \cong \text{Sol}_X(-) \otimes_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} \text{Sol}_X(-)[d_X]$  が存在する. ここに  $d_X$  は  $X$  の  $W_n$  上の相対次元を表す.

(2)  $f : X \rightarrow Y$  を滑らかな  $W_n$ -スキームの間の射とする. この時, 関手的な同型  $f^{-1} \circ \text{Sol}_Y \cong \text{Sol}_X \circ f^!$  が存在する.

(3)  $f : X \rightarrow Y$  を滑らかな  $W_n$ -スキームの間の *allowable* 射とする. この時, 関手的な同型  $f_! \circ \text{Sol}_X \cong \text{Sol}_Y \circ f_+$  が存在する. ここにスキームの射が *allowable* とは, 埋め込みと固有滑らかな射の合成で書けることをいう.

筆者の研究の動機を述べる.  $X$  を  $k$  上の代数多様体とする. Emerton-Kisin の理論は  $W_n$  上の滑らかな持ち上げ  $P/W_n$  を持つ代数多様体  $X/k$  にしか適用出来ず, 十分に研究がなされているとは言えない. またさらに, 三角圏の同値

$$D_{\text{lfgu}}^b(\mathcal{D}_{F,P})^\circ \rightarrow D_{\text{ctf}}^b(P_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

に置ける右辺は  $P$  の標数  $p$  への還元  $X$  から完全に決定される. このことから左辺の理論も代数多様体  $X/k$  にのみよる形で定まるべきである (Grothendieck のクリスタルの思想). そこで筆者は Emerton-Kisin の理論を  $W_n$  上埋め込み可能な  $k$ -スキームに拡張した. ここで分離的有限な  $k$ -スキーム  $X$  が  $W_n$  上埋め込み可能とは, 滑らかな  $W_n$ -スキーム  $P$  と埋め込み  $X \hookrightarrow P$  で以下の図式を可換にするものが存在することをいう.

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & P \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec}k & \longrightarrow & \text{Spec}W_n. \end{array} \quad (2.1)$$

明らかのように,  $k$  上の準射影的代数多様体は  $W_n$  上埋め込み可能である. 従って, ある意味で,  $W_n$  上埋め込み可能な代数多様体は十分に広いクラスをなす.

### 3 主結果

研究の最初の困難は  $W_n$  上埋め込み可能な代数多様体  $X/k$  に対して, その  $\mathcal{D}$ -加群の圏を定義することである. 筆者は柏原の定理の基づく自然な方法によりこの困難を克服した. ここに柏原の定理とは, 複素多様体の閉埋め込み  $X \hookrightarrow P$  に対し,  $X$  上の  $\mathcal{D}$ -加群の圏と  $P$  上の  $\mathcal{D}$ -加群でその台が  $X$  に含まれるもののなす圏は自然に圏同値であることを主張する.

$X$  を  $W_n$  上埋め込み可能な  $k$ -スキームとし, 滑らかな  $W_n$ -スキーム  $P$  と埋め込み  $X \hookrightarrow P$  をとる. この時三角圏  $\mathcal{C}_{P,X}$  を “台が  $X$  に含まれる”  $D_{\text{lfgu}}^b(\mathcal{D}_{F,P})^\circ$  の対象からなる充満部分圏として定義する.

**Remark 3.1.** 今  $X$  は  $P$  における閉集合とは限らないことを注意する. 条件 “台が  $X$  に含まれる” は正確には局所コホモロジーを用いて定式化する必要があるが, ここでは割愛する.

次の定理が  $\mathcal{D}$ -加群の圏を定義する鍵である.

**Theorem 3.2.**  $f : P \rightarrow Q$  を滑らかな  $W_n$ -スキームの間の固有滑らかな射. 埋め込み  $i_1 : X \hookrightarrow P$  と  $i_2 : X \hookrightarrow Q$  で  $f \circ i_1 = i_2$  を満たすものが与えられたとする. この時, 順像関手  $f_+$  は三角圏の同値

$$f_+ : \mathcal{C}_{P,X} \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}_{Q,X} \quad (3.1)$$

を定める.

この定理によって  $X$  を  $W_n$  上埋め込み可能な  $k$ -スキームに対する  $\mathcal{D}$ -加群の圏は以下のよう定義すれば良いとわかる.

**Definition 3.3.**  $X$  を  $W_n$  上埋め込み可能な  $k$ -スキームとする. 固有滑らかな  $W_n$ -スキーム  $P$  への埋め込み  $X \hookrightarrow P$  を一つとり, 三角圏  $D_{\text{lfgu}}^b(X/W_n)^\circ$  を  $\mathcal{C}_{P,X}$  で定義する. この定義は定理 3.2 によって埋め込み  $X \hookrightarrow P$  の取り方に *up to natural isomorphism* でよらない.

$X$  を  $W_n$  上埋め込み可能な  $k$ -スキームとし, 固有滑らかな  $W_n$ -スキーム  $P$  への埋め込み  $i: X \hookrightarrow P$  を一つとる. 関手  $\text{Sol}_X: D_{\text{lfgu}}^b(X/W_n)^\circ \rightarrow D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$  を合成

$$\mathcal{C}_{P,X} = D_{\text{lfgu}}^b(X/W_n)^\circ \subset D_{\text{lfgu}}^b(\mathcal{D}_{F,P})^\circ \xrightarrow{\text{Sol}_P} D_{\text{ctf}}^b(P_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \xrightarrow{i^{-1}} D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

で定義する. この定義は埋め込み  $i: X \hookrightarrow P$  の取り方によらないことが示せる.

一方逆に, 関手の合成

$$D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \xrightarrow{i_*} D_{\text{ctf}}^b(P_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \xrightarrow{M_P} D_{\text{lfgu}}^b(\mathcal{D}_{F,P})^\circ$$

を考えると, この本質的像は  $\mathcal{C}_{P,X}$  に含まれることが示せ, 我々は関手  $M_X: D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \rightarrow D_{\text{lfgu}}^b(X/W_n)^\circ = \mathcal{C}_{P,X}$  を得る. この定義も埋め込み  $i: X \hookrightarrow P$  の取り方によらないことが示せる. 以上の記号の準備の下で, 主結果は以下のように述べる事が出来る.

**Theorem 3.4.**  $X$  を  $W_n$  上埋め込み可能な  $k$ -スキームとする. この時  $\text{Sol}_X$  は  $M_X$  を準逆にもつ三角圏の同値

$$\text{Sol}_X: D_{\text{lfgu}}^b(X/W_n)^\circ \xrightarrow{\cong} D_{\text{ctf}}^b(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \quad (3.2)$$

を定める.

$f: X \rightarrow Y$  を  $W_n$  上埋め込み可能な  $k$ -スキームの間の射とする. 我々も自然な方法で,  $D_{\text{lfgu}}^b(X/W_n)^\circ$  に対して順像関手  $f_+$ , 逆像関手  $f^!$ , テンソル積  $\otimes^{\mathbb{L}}$  を埋め込みによらない形で定式化することが出来る.

**Theorem 3.5.**  $f: X \rightarrow Y$  を  $W_n$  上埋め込み可能な  $k$ -スキームの間の射とする.

- (1) 関手的な同型  $\text{Sol}_X(- \otimes^{\mathbb{L}} -) \cong \text{Sol}_X(-) \otimes_{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}^{\mathbb{L}} \text{Sol}_X(-)$  が存在する.
- (2) 関手的な同型  $f^{-1} \circ \text{Sol}_Y \cong \text{Sol}_X \circ f^!$  が存在する.
- (3) 関手的な同型  $f_+ \circ \text{Sol}_Y \cong \text{Sol}_X \circ f_!$  が存在する.

## 参考文献

- [EK1] M. Emerton and M. Kisin, An introduction to the Riemann-Hilbert correspondence for unit  $F$ -crystals, *Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II*, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, (2004), 677-700.
- [EK2] M. Emerton and M. Kisin, The Riemann-Hilbert correspondence for unit  $F$ -crystals, *Astérisque* No. **293** (2004).
- [O3] Sachio Ohkawa, Riemann-Hilbert correspondence for unit  $F$ -crystals on embeddable algebraic varieties.



# $\psi$ グラフ配置の自由性の頂点重み付きグラフの性質 による特徴づけ

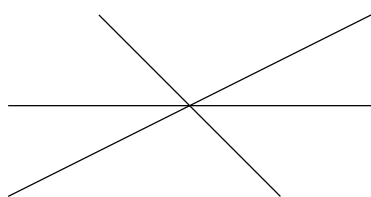
辻栄 周平\* (Shuhe TSUJIE)  
北海道大学大学院理学研究院数学部門

## 概要

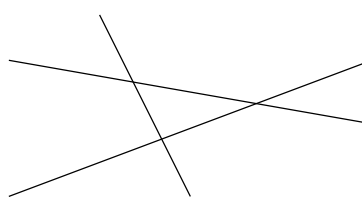
ベクトル空間の有限個の超平面の集まりを超平面配置という。Stanley はある種の頂点重み付きグラフ  $(G, \psi)$  に対して超平面配置  $\mathcal{A}_{G, \psi}$  を導入し、超可解性を特徴づけ、自由性と同値であると予想した。本講演では  $\mathcal{A}_{G, \psi}$  の自由性の特徴づけについて説明する。本研究は北海道大学の陶山大輔との共同研究である。

## 1 超平面配置

超平面配置 (hyperplane arrangement) とは、 $\ell$  次元 Euclid 空間  $\mathbb{R}^\ell$  の超平面の有限個の集まりのことである。本稿では、超平面配置はすべて中心的 (central) なもの、つまり原点を通る超平面 (余次元 1 の部分空間) の有限個の集まりのみを考える。



中心的超平面配置



中心的でない超平面配置

$\{x_1, \dots, x_\ell\}$  を  $(\mathbb{R}^\ell)^*$  の基底とし、 $S = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_\ell]$  とする。  $S$  は  $\mathbb{R}^\ell$  上の多項式関数全体からなる環である。  $\text{Der}(S)$  で  $\mathbb{R}^\ell$  上の多項式ベクトル場全体のなす  $S$  加群を表す。

$$\text{Der}(S) = \{ \theta : S \rightarrow S : \mathbb{R}\text{線形} \mid \theta(fg) = f\theta(g) + \theta(f)g \ (\forall f, g \in S) \}.$$

---

\* E-mail: tsujie@math.sci.hokudai.ac.jp

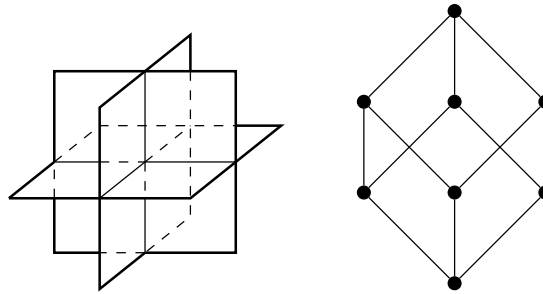
原点を通る超平面  $H$  はある斉次 1 次式  $\alpha_H \in E^*$  の零点集合である.  $\alpha_H$  は定数倍を除いて一意に定まる. 超平面配置  $\mathcal{A}$  に対し, 対数的ベクトル場全体からなる  $S$  加群 (logarithmic derivation module)  $D(\mathcal{A})$  を以下で定める.

$$D(\mathcal{A}) := \{\theta \in \text{Der}(S) \mid \theta(\alpha_H) \in \alpha_H S \ (\forall H \in \mathcal{A})\}.$$

これは,  $\mathcal{A}$  に属する各超平面に沿った多項式ベクトル場全体のなす加群である.  $D(\mathcal{A})$  が自由  $S$  加群であるとき,  $\mathcal{A}$  は自由 (free) であるという.  $\mathcal{A}$  が自由であれば,  $D(\mathcal{A})$  は斉次元からなる基底  $(\theta_1, \dots, \theta_\ell)$  をもつ.  $(\deg \theta_1, \dots, \deg \theta_\ell)$  を  $\mathcal{A}$  の指数 (exponents) という.

超平面配置  $\mathcal{A}$  に属するいくつかの超平面の交わり全体のなす集合は束をなす. これを  $\mathcal{A}$  の交叉束 (intersection lattice) といい,  $L(\mathcal{A})$  で表す.

$$L(\mathcal{A}) := \left\{ \bigcap_{H \in \mathcal{B}} H \mid \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \right\}, \quad X \leq Y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} X \supseteq Y.$$



超平面配置とその交叉束の例

交叉束  $L(\mathcal{A})$  の最大元  $\bigcap_{H \in \mathcal{A}} H$  の余次元を  $\mathcal{A}$  の階数 (rank) といい,  $\text{rank } \mathcal{A}$  で表す. 超平面配置  $\mathcal{A}$  が超可解 (supersolvable) であるとは, 交叉束  $L(\mathcal{A})$  が超可解であるときにいう. 超可解束の定義はここでは述べないが, 超平面配置の超可解性については以下の特徴づけがある.

**Theorem 1.1** (Björner-Edelman-Ziegler [1, Theorem 4.3]). 超平面配置  $\mathcal{A}$  が超可解であることと, 部分配置の列

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_r \supseteq \mathcal{A}_{r-1} \supseteq \dots \supseteq \mathcal{A}_1$$

が存在して, 以下の条件を満たすことは同値である.

- (1)  $\text{rank } \mathcal{A}_i = i \quad (1 \leq i \leq r)$ .
- (2) 任意の  $H, H' \in \mathcal{A}_i \ (H \neq H')$  に対して,  $H'' \in \mathcal{A}_{i-1}$  が存在して,  $H \cap H' \subseteq H''$ .

さらに、一般に以下の定理が成り立つ。

**Theorem 1.2** (Jambu-Terao [4, Theorem 4.2]). 超平面配置  $\mathcal{A}$  が超可解であれば自由である。

この定理の逆は一般には成立しない。すなわち、自由だが超可解でない超平面配置が存在する。

## 2 グラフ配置

$G = (V_G, E_G)$  を  $\ell$  個の頂点からなる単純グラフ、つまり

$$\begin{aligned} V_G &= \{1, \dots, \ell\}, \\ E_G &\subseteq \{\{i, j\} \mid i, j \in V_G, i \neq j\}, \end{aligned}$$

とする。グラフ  $G$  に対し、グラフ配置 (graphical arrangement)  $\mathcal{A}_G$  を以下で定める。

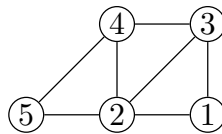
$$\mathcal{A}_G := \{\{x_i - x_j = 0\} \mid \{i, j\} \in E_G\}.$$

ただし、 $\alpha \in (\mathbb{R}^\ell)^*$  に対し、 $\{\alpha = 0\} := \{v \in \mathbb{R}^\ell \mid \alpha(v) = 0\}$  としている。グラフ配置  $\mathcal{A}_G$  の超可解性と自由性の特徴づけについて述べるために、いくつかの概念を定義する。

**Definition 2.1.**  $G$  の  $\ell$  個の頂点の順序付け  $(v_1, \dots, v_\ell)$  が **perfect elimination ordering** であるとは、任意の三つ組  $i, j < k$  ( $i \neq j$ ) に対して、

$$\{i, k\}, \{j, k\} \in E_G \Rightarrow \{i, j\} \in E_G$$

が成り立つときにいう。



perfect elimination ordering の例

**Definition 2.2.**  $G$  が **chordal** であるとは、 $G$  の任意の長さ 4 以上のサイクルが弦 (chord) をもつときにいう。



chordal graph と chordless cycle の例

$G$  の部分グラフ  $S = (V_S, E_S)$  が誘導部分グラフ (induced subgraph) であるとは,

$$E_S = \{\{i, j\} \in E_G \mid i, j \in V_S\}$$

が成り立つときにいう. 定義から明らかではあるが, chordal graph は長さ 4 以上のサイクルを誘導部分グラフとしてもたないという禁止誘導部分グラフ (forbidden induced subgraph) による特徴づけをもつ.

**Theorem 2.3** (Fulkerson-Gross [3, Section 7], Stanley [6, Corollary 4.10], Edelman-Reiner [2, Theorem 3.3]). 以下は同値.

- (1)  $G$  は perfect elimination ordering をもつ.
- (2)  $G$  は chordal である.
- (3)  $\mathcal{A}_G$  は超可解である.
- (4)  $\mathcal{A}_G$  は自由である.

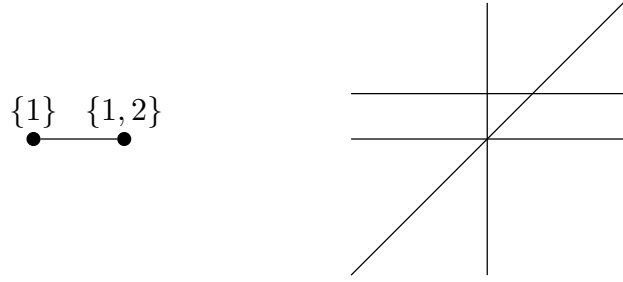
この定理から分かる通り, グラフ配置のクラスにおいては超可解性と自由性は同値になっている.

### 3 $\psi$ グラフ配置

$G = (V_G, E_G)$  を  $\ell$  個の頂点からなる単純グラフとし, 写像  $\psi: V_G \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$  で各  $i$  について  $|\psi(i)| < \infty$  を満たすものをとる. 組  $(G, \psi)$  に対して,  $\psi$  グラフ配置 ( $\psi$ -graphical arrangement)  $\mathcal{A}_{G, \psi}$  を以下で定める.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{G, \psi} := & \{\{z = 0\}\} \cup \{\{x_i - x_j = 0\} \mid \{i, j\} \in E_G\} \\ & \cup \{\{x_i = az\} \mid 1 \leq i \leq \ell, a \in \psi(i)\}. \end{aligned}$$

ここで,  $\{z, x_1, \dots, x_\ell\}$  は  $(\mathbb{R}^{\ell+1})^*$  の基底である.  $\psi$  グラフ配置  $\mathcal{A}_{G, \psi}$  は, グラフ  $G$  の各頂点に実数の有限集合 (重みとみなす) をあてがい, それら各実数に対応する超平面をグラフ配置  $\mathcal{A}_G$  に付け加えたものである (ただし, 本稿では自由性に焦点があるため, 錐化し, 無限遠超平面  $\{z = 0\}$  を付け加えている).



$\psi$  グラフ配置の例 ( $z = 1$  への制限)

**Definition 3.1.**  $(G, \psi)$  に対し,  $G$  の  $\ell$  個の頂点の順序付け  $(v_1, \dots, v_\ell)$  が **weighted elimination ordering** であるとは, 以下を満たすときという.

- (1)  $(v_1, \dots, v_\ell)$  は perfect elimination ordering.
- (2)  $i < j, \{i, j\} \in E_G \Rightarrow \psi(i) \supseteq \psi(j)$ .

**Theorem 3.2** (Stanley [7, Theorem 6] Mu-Stanley [5, Theorem 1, 2]). 以下は同値.

- (1)  $(G, \psi)$  は weighted elimination ordering をもつ.
- (2)  $\mathcal{A}_{G, \psi}$  は超可解である.

一般に超可解な配置は自由なので,  $(G, \psi)$  が weighted elimination ordering をもてば,  $\mathcal{A}_{G, \psi}$  は自由であることが分かる. Stanley はグラフ配置のときと同様に,  $\psi$  グラフ配置のクラスにおいても超可解性と自由性は同値になっているのではないかと予想した.

## 4 主結果

主結果は以下の通りである.

**Theorem 4.1** (Suyama-T [8]). 以下は同値.

- (1)  $(G, \psi)$  は weighted elimination ordering をもつ.
- (2)  $\mathcal{A}_{G, \psi}$  は超可解.
- (3)  $\mathcal{A}_{G, \psi}$  は自由.

証明は,  $(G, \psi)$  が weighted elimination ordering をもつことの禁止誘導部分グラフによる特徴づけを用いて行った. 以下に概略を述べる.

$P$  を半順序集合とする. 写像  $\psi: V_G \rightarrow P$  により,  $G$  の各頂点に重みを付け,  $P$  上の頂点重み付きグラフ  $(G, \psi)$  を得る. 半順序集合  $P$  として  $\mathbb{R}$  の有限部分集合全体からなる半

順序集合をとれば,  $(G, \psi)$  は  $\psi$  グラフ配置の定義に用いていたものと同一のものである.  $P$  上の頂点重み付きグラフ  $(G, \psi)$  に対しても, weighted elimination ordering を同様に定義する.  $G$  の道  $v_1 \cdots v_k$  が単峰的 (unimodal) であるとは, ある  $i \in \{1, \dots, k\}$  が存在して,  $\psi(v_1) \leq \cdots \leq \psi(v_i) \geq \cdots \geq \psi(v_k)$  となるときにいう.  $P$  は全順序とは限らないので, 比較不可能な元が存在するかもしれない. したがって,  $G$  の辺  $\{u, v\}$  が単峰的であるとは,  $\psi(u)$  と  $\psi(v)$  が比較可能であることを意味する.

**Theorem 4.2** (Suyama-T [8]). 以下は同値.

- (1)  $(G, \psi)$  は weighted elimination ordering をもつ.
- (2)  $G$  は chordal, かつ  $G$  の任意の道は単峰的である.

したがって, 禁止誘導部分グラフは長さ 4 以上のサイクルと非単峰的な道といえる. 実際にはもっと絞ることができる.

**Proposition 4.3** (Suyama-T [8]). 非単峰的な道は以下の道のどちらかを含む.

- (1)  $\bullet \text{---} \bullet$   $\psi(u)$  と  $\psi(v)$  は比較不能.
- (2)  $\bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \cdots \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet$   
 $v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad \quad \quad v_{k-2} \quad v_{k-1} \quad v_k$   
 $k \geq 3$  かつ  $\psi(v_1) > \psi(v_2) = \cdots = \psi(v_{k-1}) < \psi(v_k)$ .

超平面配置の加除定理により, これらの道に対応する  $\psi$  グラフ配置は自由でないことが従う. よって, もし  $\mathcal{A}_{G, \psi}$  が自由であれば  $G$  は chordal で, かつ  $G$  の任意の道は単峰的であることが分かる. したがって,  $(G, \psi)$  は weighted elimination ordering をもつので主結果が従う.

また, 自由  $\psi$  グラフ配置  $\mathcal{A}_{G, \psi}$  に対し,  $D(\mathcal{A}_{G, \psi})$  の基底を具体的に構成した.

**Theorem 4.4** (Suyama-T [8]).  $\psi$  グラフ配置  $\mathcal{A}_{G, \psi}$  は weighted elimination ordering  $(v_1, \dots, v_\ell)$  をもつとする.  $x_i$  を頂点  $v_i$  に対応する座標とする. このとき,

$$\theta_E = \sum_{i=1}^{\ell} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + z \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\theta_k = \sum_{i \in C_{\geq k}} \left( \prod_{j \in E_{< k}} (x_j - x_i) \prod_{a \in \psi(v_k)} (x_i - az) \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (1 \leq k \leq \ell)$$

は  $D(\mathcal{A}_{G,\psi})$  基底をなす。ただし、

$$C_{\geq k} := \{i \mid k < i \leq \ell, \text{ かつ } G \text{ の道 } v_k v_{j_1} v_{j_2} \cdots v_{j_m} v_i \\ \text{が存在して } k < j_1, j_2, \dots, j_m \leq \ell\} \cup \{k\}$$

$$E_{< k} := \{j \mid 1 \leq j < k, \{v_j, v_k\} \in E_G\}.$$

## 参考文献

- [1] A. Björner, P. H. Edelman, and G. M. Ziegler, Hyperplane arrangements with a lattice of regions, *Discrete & computational geometry* **5** (1990), no. 1, 263–288.
- [2] P. H. Edelman and V. Reiner, Free hyperplane arrangements between  $A_{n-1}$  and  $B_n$ , *Math. Z.* **215** (1994), no. 3, 347–365.
- [3] D. R. Fulkerson and O. A. Gross, Incidence matrices and interval graphs, *Pacific J. Math.* **15** (1965), 835–855.
- [4] M. Jambu and H. Terao, Free arrangements of hyperplanes and supersolvable lattices, *Adv. in Math.* **52** (1984), no. 3, 248–258.
- [5] L. Mu and R. P. Stanley, Supersolvability and freeness for  $\psi$ -graphical arrangements, *Discrete Comput. Geom.* **53** (2015), no. 4, 965–970.
- [6] R. P. Stanley, An introduction to hyperplane arrangements, in *Geometric combinatorics*, IAS/Park City Math. Ser., vol. 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, pp. 389–496.
- [7] R. P. Stanley, Valid orderings of real hyperplane arrangements, *Discrete Comput. Geom.* **53** (2015), no. 4, 951–964.
- [8] D. Suyama and S. Tsujie, Freeness of  $\psi$ -graphical arrangements and chordality of vertex-weighted graphs, (2015), arXiv:1511.04853.

# ある型の混合 Hodge 構造の分類空間のコンパクト化について

黒田 匡迪 (Kuroda Masamichi) \* 北海道大学大学院 理学研究院 数学部門

## 概要

加藤和也氏, 中山能力氏, 白井三平氏により, 混合 Hodge 構造の分類空間  $D$  のその自己同型群  $\text{Aut}(D)$  の離散部分群  $\Gamma$  による商空間  $\Gamma \backslash D$  のトロイダル部分コンパクト化が構成された. それは  $\Gamma$  に対して, 適切な弱ファン  $\Sigma$  を与え, 冪零軌道の空間  $D_\Sigma$  の  $\Gamma$  による商空間  $\Gamma \backslash D_\Sigma$  として与えられた. 本講演では, ある型の混合 Hodge 構造の分類空間について, そのコンパクト化の構造を具体的に紹介する. また, このコンパクト化と, 平面三次曲線と直線からなる半安定な組の GIT モジュライ  $\overline{P}_{1,3}$  あるいは, Alexeev 氏による完備なモジュライ  $\overline{AP}_{1,3}$  との関係についての結果も紹介する.

## 1 はじめに

講演者は平面三次曲線  $C$  と直線  $L$  からなる半安定な組  $(C, L)$  の GIT モジュライ  $\overline{P}_{1,3}$  について研究を行ってきた. [Ku] では主に次の三つの結果が得られた. 一つ目は, 組  $(C, L)$  の安定性の完全な分類を与え, GIT モジュライ  $\overline{P}_{1,3}$  にあらわれる組の幾何学的な条件を決定した. 二つ目は, このモジュライ  $\overline{P}_{1,3}$  と Alexeev 氏により構成された完備なモジュライ  $\overline{AP}_{1,3}$  との間にある双有理写像  $f: \overline{P}_{1,3} \rightarrow \overline{AP}_{1,3}$  を与え, その性質を調べた. ここで,  $\overline{AP}_{1,3}$  は高々, 結節点を持つ三次曲線  $C$  と  $C$  の特異点を通らない直線  $L$  からなる組  $(C, L)$  のモジュライである. 三つ目は, これら二つのモジュライの粗い構造を見るために,  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$  のあるブローアップから  $\overline{AP}_{1,3}, \overline{P}_{1,3}$  への自然な写像を構成した. さらにこれら二つの写像と上の双有理写像  $f$  の関係を与えた.

最近では, このモジュライ  $\overline{P}_{1,3}$  とある型の混合 Hodge 構造の分類空間のコンパクト化との比較の研究を行ってきた. 非特異三次曲線  $E$  と,  $E$  と横断的に交わる直線  $L$  からなる組  $(E, L)$  全体のなす開部分集合  $P_{1,3} \subset \overline{P}_{1,3}$  の各組に対して, 一次コホモロジー  $H^1(E \setminus (E \cap L), \mathbb{Z})$  の混合 Hodge 構造を考えることで  $P_{1,3}$  から, ある型の混合 Hodge 構造の分類空間  $D$  をモノドロミー群  $\Gamma$  で割った空間  $\Gamma \backslash D$  への周期写像  $P_{1,3} \rightarrow \Gamma \backslash D$  が定まる.  $P_{1,3}$  のコンパクト化として  $\overline{P}_{1,3}$  があり,  $\Gamma \backslash D$  のコンパクト化として加藤和也氏, 中山能力氏, 白井三平氏により構成されたトロイダル部分コンパクト化  $\Gamma \backslash D_\Sigma$  が知られているので, 周期写像のこれらのコンパクト化の境界への拡張を具体的に構成することで,  $\overline{P}_{1,3}$  と  $\Gamma \backslash D_\Sigma$  との比較を与えるというのが研究の手法である. 残念ながら, この周期写像の境界への拡張は煩雑なので, 上と同様にして  $\overline{AP}_{1,3}$  の開部分集合  $AP_{1,3}$  から  $\Gamma \backslash D$  への写像  $\phi: AP_{1,3} \rightarrow \Gamma \backslash D$  を構成して, この写像の境界への拡張を考える. 実際, 双有理写像  $\bar{\phi}: \overline{AP}_{1,3} \rightarrow \Gamma \backslash D_\Sigma$  に拡張することができる (定理 3.1). この双有理写像と [Ku] で構成した双有理写像  $f: \overline{P}_{1,3} \rightarrow \overline{AP}_{1,3}$  を合わせることで,  $\overline{P}_{1,3}$  と  $\Gamma \backslash D_\Sigma$  の比較を与えることができる (定理 4.1).

第二章では, 分類空間  $\Gamma \backslash D$  とそのコンパクト化  $\Gamma \backslash D_\Sigma$  を具体的に与える. 第三章では, 写像  $\phi: AP_{1,3} \rightarrow \Gamma \backslash D$  を具体的に与え,  $\phi$  を双有理写像  $\bar{\phi}: \overline{AP}_{1,3} \rightarrow \Gamma \backslash D_\Sigma$  に拡張する. 第四章では, [Ku] の結果と合わせて,  $\overline{P}_{1,3}$  と  $\overline{AP}_{1,3}$  と  $\Gamma \backslash D_\Sigma$  の関係を与える.

\* E-mail: m-kuroda@math.sci.hokudai.ac.jp



## 2 分類空間 $\Gamma \backslash D$ とそのコンパクト化 $\Gamma \backslash D_\Sigma$

複素数体  $\mathbb{C}$  上で考える. 混合 Hodge 構造の型  $\Lambda = (H_0, W, (\langle \cdot, \cdot \rangle_w)_{w \in \mathbb{Z}}, (h^{p,q})_{p,q \in \mathbb{Z}})$  を次で固定する:

- $H_0 = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2 + \mathbb{Z}e_3 + \mathbb{Z}e_4$ .
- $W$  は  $H_{0,\mathbb{R}} := \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} H_0$  上の増大フィルトレーションで次で定まるもの:

$$W_0 = 0 \subset W_1 = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2 \subset W_2 = H_{0,\mathbb{R}}.$$

- $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$  は非退化  $\mathbb{R}$  値双線形式  $\text{gr}_w^W \times \text{gr}_w^W \rightarrow \mathbb{R}$  で, 各  $w \in \mathbb{Z}$  に対して,  $w$  が偶数なら対称となり,  $w$  が奇数なら歪対称となるもので, 次を満たすものとする:

$$\langle e'_2, e'_1 \rangle_1 = 1, \langle e'_3, e'_3 \rangle_2 = \langle e'_4, e'_4 \rangle_2 = 1, \langle e'_3, e'_4 \rangle_2 = -\frac{1}{2}.$$

- $h^{1,1} = 2, h^{0,1} = h^{1,0} = 1$  であり, これら以外の組  $(p, q)$  に対して,  $h^{p,q} = 0$  とする.

但し, 各  $w \in \mathbb{Z}$  に対して,  $\text{gr}_w^W = W_w/W_{w-1}$  とし,  $e'_1, e'_2$  (resp.  $e'_3, e'_4$ ) を  $e_1, e_2$  (resp.  $e_3, e_4$ ) の  $\text{gr}_1^W$  (resp.  $\text{gr}_2^W$ ) における像とする. ここで, 型  $\Lambda$  の混合 Hodge 構造の分類空間  $D$  とは以下の三つの条件を満たす  $H_{0,\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} H_0$  上の減少フィルトレーション  $F$  全体のなす集合である:

- (1) 任意の  $p, q \in \mathbb{Z}$  に対して,  $\dim(F^p(\text{gr}_{p+q}^W)/F^{p+1}(\text{gr}_{p+q}^W)) = h^{p,q}$ .
- (2) 任意の  $p, q, w \in \mathbb{Z}$  で  $p+q > w$  を満たすものに対して,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$  を  $F^p(\text{gr}_w^W) \times F^q(\text{gr}_w^W)$  に制限すると零写像になる.
- (3) 任意の  $p, q, w \in \mathbb{Z}$  で  $p+q = w$  を満たすものと任意の 0 でない  $x \in F^p(\text{gr}_w^W) \cap \overline{F^q(\text{gr}_w^W)}$  に対して,  $i^{p-q}\langle x, \bar{x} \rangle_w > 0$ .

但し,  $F(\text{gr}_w^W)$  は  $F$  によって誘導された  $\text{gr}_{w,\mathbb{C}}^W := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \text{gr}_w^W$  上の減少フィルトレーションである. 上の条件 (1) と (2) 満たす  $H_{0,\mathbb{C}}$  上の減少フィルトレーション  $F$  全体のなす集合を  $\check{D}$  とかく.

以下,  $\mathcal{H}$  を上半平面とする. 各  $\tau \in \mathcal{H}$  と  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  に対し,  $H_{0,\mathbb{C}}$  上の減少フィルトレーション  $F = F(\tau, z_1, z_2)$  を次で定める:

$$0 = F^2 \subset F^1 = \mathbb{C}(\tau e_1 + e_2) + \mathbb{C}(z_1 e_1 + e_3) + \mathbb{C}(z_2 e_1 + e_4) \subset F_0 = H_{0,\mathbb{C}}.$$

このとき, 簡単な計算により,  $D = \{F(\tau, z_1, z_2) \mid \tau \in \mathcal{H}, z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$  が得られ, 複素解析多様体としての同型  $D \simeq \mathcal{H} \times \mathbb{C}^2$  が得られる. 以下, この同型で同一視する.

次にモノドロミー群  $\Gamma$  を  $W$  と整合する  $H_0$  の  $\mathbb{Z}$  上の自己同型  $g$  で, すべての  $w \in \mathbb{Z}$  に対して  $\text{gr}_w^W(g) : \text{gr}_w^W \rightarrow \text{gr}_w^W$  が  $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$  と整合するもの全体のなす群  $G_{\mathbb{Z}}$  とする.  $G_{\mathbb{Z},u} := \{g \in G_{\mathbb{Z}} \mid \text{gr}_w^W = 1 \ (\forall w \in \mathbb{Z})\}$  とし, 各  $w \in \mathbb{Z}$  に対して,  $G_{\mathbb{Z}}(\text{gr}_w^W)$  を組  $((H_0 \cap W_w)/(H_0 \cap W_{w-1}), \langle \cdot, \cdot \rangle_w)$  に関する  $G_{\mathbb{Z}}$  とする. このとき

$$G_{\mathbb{Z},u} = \left\{ \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & a_1 & a_3 \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 \\ \hline & O & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{array} \right] \middle| a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{Z} \right\} \simeq \mathbb{Z}^4, \quad (1)$$

$$\Gamma = G_{\mathbb{Z}} = \left\{ \left[ \begin{array}{cc|cc} A_1 & a_1 & a_3 \\ & a_2 & a_4 \\ \hline O & & A_2 \end{array} \right] \middle| \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{Z}, \\ A_1 \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}), A_2 \in G_{\mathbb{Z}}(\text{gr}_2^W) \end{array} \right\}$$

が得られる。(1)の同型は群同型である。また,

$$G_{\mathbb{Z}}(\mathrm{gr}_2^W) = \left\langle \left[ \begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{cc} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right] \right\rangle \simeq \mathfrak{S}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

となることもわかる。 $G_{\mathbb{Z},u}$ を含む $\Gamma$ の部分群 $\Gamma_1, \Gamma_2$ を次で定める:

$$G_{\mathbb{Z},u} \subset \Gamma_1 = \left\{ \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & a & a_1 & a_3 \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 \\ \hline & O & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{array} \right] \mid a, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\subset \Gamma_2 = \left\{ \left[ \begin{array}{cc|cc} A_1 & a_1 & a_3 \\ & a_2 & a_4 \\ \hline & O & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{array} \right] \mid A_1 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{Z} \right\} \subset \Gamma.$$

ここで, $\Gamma = G_{\mathbb{Z}}$ は $D$ に自然に作用するが,それは次で与えられる:

$$\Gamma \times D \longrightarrow D, (g, F(\tau, z_1, z_2)) \longmapsto g \cdot F(\tau, z_1, z_2) = F(\tau', z'_1, z'_2),$$

$$\tau' = A_1 \cdot \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d},$$

$$\begin{bmatrix} z'_1 & z'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z_1}{c\tau + d} + a_1 - a_2\tau' & \frac{z_2}{c\tau + d} + a_3 - a_4\tau' \end{bmatrix} A_2^{-1},$$

但し, $g = \begin{bmatrix} A_1 & a_1 & a_3 \\ & a_2 & a_4 \\ O & A_2 & \end{bmatrix} \in \Gamma$ とし, $A_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ とする。この作用による商空間を考えると,次の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccccccc} G_{\mathbb{Z},u} \backslash D & \longrightarrow & \Gamma_1 \backslash D & \longrightarrow & \Gamma_2 \backslash D & \longrightarrow & \Gamma \backslash D \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ D(\mathrm{gr}_1^W) & \longrightarrow & \Gamma'_1 \backslash D(\mathrm{gr}_1^W) & \longrightarrow & \Gamma'_2 \backslash D(\mathrm{gr}_1^W) & \longrightarrow & \Gamma' \backslash D(\mathrm{gr}_1^W) \end{array} \quad (2)$$

ここで, $D(\mathrm{gr}_1^W)$ は型 $\left( (H_0 \cap W_1) / (H_0 \cap W_0), \langle \cdot, \cdot \rangle_1, (h^{p,q})_{p+q=1} \right)$ のHodge構造の分類空間であり,縦の写像は標準的全射である。また, $\Gamma'_1$ (resp.  $\Gamma'_2, \Gamma'$ )は $\mathrm{Aut}(H_0) \rightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{gr}_1^W)$ による $\Gamma_1$ (resp.  $\Gamma_2, \Gamma$ )の像である。このとき,簡単な計算により,次が得られる:

$$D(\mathrm{gr}_1^W) = \mathcal{H}, \Gamma'_1 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbb{Z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \simeq \mathbb{Z}, \Gamma'_2 = \Gamma' = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

さらに,上の作用により,

$$\Gamma'_1 \backslash D(\mathrm{gr}_1^W) = \mathbb{Z} \backslash \mathcal{H} \xrightarrow{\sim} \Delta^\times = \{q \in \mathbb{C} \mid |q| < 1\},$$

$$\tau \bmod \mathbb{Z} \longmapsto \exp(2\pi i\tau),$$

$$\Gamma'_2 \backslash D(\mathrm{gr}_1^W) = \Gamma' \backslash D(\mathrm{gr}_1^W) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathcal{H} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C},$$

$$\tau \bmod \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \longmapsto j(\tau)$$

が従う。但し, $j(\tau)$ は $j$ -不変量である。さらに,次が得られる:

$$G_{\mathbb{Z},u} \backslash D = \mathbb{Z}^4 \backslash (\mathcal{H} \times \mathbb{C}^2) = \bigcup_{\tau \in \mathcal{H}} (E_\tau \times E_\tau), \quad E_\tau := \mathbb{C} / (\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}),$$

$$\Gamma_1 \backslash D = \Gamma_1 \backslash (\mathcal{H} \times \mathbb{C}^2) = \bigcup_{q \in \Delta^\times} (\mathbb{C}/q^\mathbb{Z} \times \mathbb{C}/q^\mathbb{Z}),$$

$$\Gamma_2 \backslash D = \Gamma_2 \backslash (\mathcal{H} \times \mathbb{C}^2) = \bigcup_{j \in \mathbb{C}} (\mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}}), \quad j = j \left( \frac{1}{2\pi i} \log q \right),$$

$$\Gamma \backslash D = \Gamma \backslash (\mathcal{H} \times \mathbb{C}^2) = \bigcup_{j \in \mathbb{C}} G_2 \backslash (\mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}}), \quad j = j \left( \frac{1}{2\pi i} \log q \right), \quad G_2 := G_{\mathbb{Z}}(\mathrm{gr}_2^W).$$

ここで,  $\bigcup_{\tau \in \mathcal{H}} (E_{\tau} \times E_{\tau}) \rightarrow \mathcal{H}$  のファイバー  $E_{\tau} \times E_{\tau}$  と  $\bigcup_{q \in \Delta^{\times}} (\mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}}) \rightarrow \Delta^{\times}$  のファイバー  $\mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}}$  は同型

$$E_{\tau} \times E_{\tau} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}}, \\ (z_1 \bmod \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}, z_2 \bmod \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}) \mapsto (\exp(2\pi i z_1) \bmod q^{\mathbb{Z}}, \exp(2\pi i z_2) \bmod q^{\mathbb{Z}})$$

で同一視される. この同一視の下で,  $G_2$  の  $\mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}}$  への作用が誘導される:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot ([w_1], [w_2]) = ([w_1^{-1} w_2^{-1}], [w_2]), \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot ([w_1], [w_2]) = ([w_2^{-1}], [w_1^{-1}]), \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot ([w_1], [w_2]) = ([w_1^{-1}], [w_2^{-1}]). \quad (5)$$

以上より, (2) は次の可換図式になる:

$$\begin{array}{ccccccc} \bigcup_{\tau \in \mathcal{H}} (E_{\tau} \times E_{\tau}) & \longrightarrow & \bigcup_{q \in \Delta^{\times}} (\mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}}) & \longrightarrow & \bigcup_{j \in \mathbb{C}} (\mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}}) & \longrightarrow & \bigcup_{j \in \mathbb{C}} G_2 \backslash (\mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H} & \longrightarrow & \Delta^{\times} & \longrightarrow & \mathbb{C} & \xlongequal{\quad} & \mathbb{C} \end{array}$$

以下, 商空間  $\Gamma \backslash D = \bigcup_{j \in \mathbb{C}} G_2 \backslash (\mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{C}/q^{\mathbb{Z}})$  のコンパクト化を構成する.

加藤和也氏, 中山能力氏, 白井三平氏により, 分類空間  $\Gamma \backslash D$  のトロイダル部分コンパクト化が構成された ([KNU09], [KNU11], [KNU13]). それは  $\Gamma$  に対して, 適切な弱ファン  $\Sigma$  を与え, 冪零軌道の空間  $D_{\Sigma}$  の  $\Gamma$  による商空間  $\Gamma \backslash D_{\Sigma}$  として与えられた.  $D_{\Sigma}$  は  $D$  と  $\Sigma$  から簡単な計算で求められるので, 適切な  $\Sigma$  を構成することが本質的な問題である. ここでは, 次の手順で構成していく:

手順 1  $\Gamma_1$  に対して, 適切な  $\Sigma_1$  を構成する.

手順 2  $\Sigma := \{ \mathrm{Ad}(\gamma)\sigma := \gamma\sigma\gamma^{-1} \mid \gamma \in \Gamma_1, \sigma \in \Sigma_1 \}$  として,  $\Gamma \backslash D_{\Sigma}$  を計算する.

いくつかの用語の定義から始める.  $A = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  に対して,  $\mathfrak{g}_A := \mathrm{Lie}(G_A)$  とする. これは

$$\left\{ X \in \mathrm{End}_A(H_{0,A}) \mid \begin{array}{l} \text{全ての } w \text{ に対して, } X(W_w) \subset W_w \text{ であり,} \\ \text{全ての } w, x, y \text{ に対して, } \langle \mathrm{gr}_w^W(X)(x), y \rangle_w + \langle x, \mathrm{gr}_w^W(X)(y) \rangle_w = 0 \end{array} \right\}$$

と同一視される.  $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$  の部分集合  $\sigma$  が冪零錐であるとは, 次の二つの条件を満たすことをいう:

- (1)  $\sigma$  の全ての元は冪零であり, 任意の  $N, N' \in \sigma$  に対し,  $H_{0,\mathbb{R}}$  の線形変換として  $NN' = N'N$  となる.
- (2)  $\sigma$  は有限生成である. すなわち, 有限個の  $\sigma$  の元  $N_1, \dots, N_n$  が存在して,  $\sigma = \sum_{j=1}^n \mathbb{R}_{\geq 0} N_j$  となる.

上の条件 (2) の  $N_j$  が  $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$  の元でとれるとき,  $\sigma$  を有理冪零錐という. 冪零錐  $\sigma$  の  $H_{0,\mathbb{R}}$  への作用が  $W$  に関して admissible であるとき,  $\sigma$  は admissible であるという (詳細は [KNU11], 1.1.2 を見よ).

$N_1, \dots, N_n \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$  を互いに可換な冪零元とし,  $F$  を  $\check{D}$  の元とする. 次の三つの条件を満たすとき,  $(N_1, \dots, N_n, F)$  は冪零軌道を生成するという:

1. 錐  $\sum_{j=1}^n \mathbb{R}_{\geq 0} N_j$  の  $H_{0, \mathbb{R}}$  への作用が  $W$  に関して admissible である.
2. 各  $j$  と任意の  $p \in \mathbb{Z}$  に対して,  $N_j F^p \subset F^{p-1}$  を満たす.
3.  $y_j \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  が十分大きいとき,  $\exp\left(\sum_{j=1}^n i y_j N_j\right) F \in D$  を満たす.

これらの条件は錐  $\sigma := \sum_{j=1}^n \mathbb{R}_{\geq 0} N_j$  とフィルトレーション  $F$  にのみ依存するので, これらの条件を満たすとき, 組  $(\sigma, F)$  は冪零軌道を生成するともいう.

$\sigma$  を冪零錐とする.  $\check{D}$  の部分集合  $Z$  は, ある  $F \in Z$  に対して次の条件 4. と 5. が成り立つとき,  $\sigma$ -冪零軌道であるという:

4.  $Z = \exp(\sigma_{\mathbb{C}}) F$  である. 但し,  $\sigma_{\mathbb{C}}$  は  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  における  $\sigma$  の  $\mathbb{C}$ -線形な延長である.
5.  $(\sigma, F)$  は冪零軌道を生成する.

このような組  $(\sigma, Z)$  を冪零軌道と呼ぶ. 条件 4. と 5. は一つの  $F \in Z$  で成り立てば, 全ての  $F \in Z$  で成り立つことに注意せよ.

弱ファン  $\Sigma$  とは, 以下の条件 (1) と (2) を満たすシャープな有理冪零錐からなる空でない集合である. ここで, 冪零錐  $\sigma$  がシャープであるとは  $\sigma \cap (-\sigma) = 0$  を満たすことをいう:

- (1)  $\sigma \in \Sigma$  ならば,  $\sigma$  のフェイスも  $\Sigma$  に含まれる.
- (2)  $\sigma, \sigma' \in \Sigma$  は共通の内点を持つと仮定する. ある  $F \in \check{D}$  が存在して,  $(\sigma, F)$  と  $(\sigma', F)$  は冪零軌道を生成するならば  $\sigma = \sigma'$  である.

弱ファン  $\Sigma$  に対して,

$$D_{\Sigma} := \{(\sigma, Z) : \text{冪零軌道} \mid \sigma \in \Sigma\}$$

とする. このとき, 自然な埋め込み  $D \subset D_{\Sigma}$ ,  $F \mapsto (\{0\}, F)$  が存在する.

弱ファン  $\Sigma$  と  $G_{\mathbb{Z}}$  の部分群  $\Gamma$  が整合するとは, 次の条件 1. を満たすことをいう:

1. 任意の  $\gamma \in \Gamma$  と任意の  $\sigma \in \Sigma$  に対して,  $\text{Ad}(\gamma)\sigma := \gamma\sigma\gamma^{-1} \in \Sigma$  を満たす.

$\Sigma$  と  $\Gamma$  が整合するならば,  $\Gamma$  は  $D_{\Sigma}$  に次で作用する:

$$\Gamma \times D_{\Sigma} \rightarrow D_{\Sigma}, (\gamma, (\sigma, Z)) \mapsto \gamma \cdot (\sigma, Z) := (\text{Ad}(\gamma)\sigma, \gamma Z).$$

上の条件 1. に加えて, 次の条件 2. を満たすとき,  $\Sigma$  と  $\Gamma$  は強く整合するという:

2.  $\sigma \in \Sigma$  ならば, 任意の  $\sigma$  の元は  $aN$  の和でかける. 但し,  $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  であり,  $N$  は  $\exp(N) \in \Gamma$  を満たす  $\sigma$  の元である.

このとき, 次が成り立つ.

**定理 2.1** (Thm. 2.5.5, [KNU11]).  $\Sigma$  を弱ファンとし,  $\Gamma$  を  $\Sigma$  と強く整合する  $G_{\mathbb{Z}}$  の部分群とする. このとき, 位相空間  $\Gamma \backslash D_{\Sigma}$  は Hausdorff である.

## 2.1 手順 1 : $\Sigma_1$ の構成

$\Gamma_1$  と強く整合する弱ファン  $\Sigma_1$  を次で定める :

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &:= \{ \{0\}, \sigma_{n,m}^j \ (n, m \in \mathbb{Z}, j = 1, 2, 3, 4) \}, \\ \sigma_{n,m}^1 &:= \mathbb{R}_{\geq 0} N_{n,m}, \quad \sigma_{n,m}^2 := \mathbb{R}_{\geq 0} N_{n,m} + \mathbb{R}_{\geq 0} N_{n+1,m}, \quad \sigma_{n,m}^3 := \mathbb{R}_{\geq 0} N_{n,m} + \mathbb{R}_{\geq 0} N_{n,m+1}, \\ \sigma_{n,m}^4 &:= \mathbb{R}_{\geq 0} N_{n,m} + \mathbb{R}_{\geq 0} N_{n+1,m} + \mathbb{R}_{\geq 0} N_{n,m+1} + \mathbb{R}_{\geq 0} N_{n+1,m+1}, \\ N_{n,m} &:= \begin{bmatrix} 0 & 1 & n & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

このとき, 次の可換図式が得られる :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_1 \backslash D = \bigcup_{q \in \Delta^\times} (\mathbb{C}/q^\mathbb{Z} \times \mathbb{C}/q^\mathbb{Z}) & \hookrightarrow & \Gamma_1 \backslash D_{\Sigma_1} = \Gamma_1 \backslash D \cup (\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1/(0 \sim \infty) \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1/(0 \sim \infty)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^\times & \hookrightarrow & \Delta \end{array}$$

ここで, 右側の縦の写像の  $0 \in \Delta$  のファイバーは  $0$  と  $\infty$  を同一視して得られる  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  の商  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1/(0 \sim \infty)$  のファイバー積である. また,  $0 \in \Delta$  のファイバー  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1/(0 \sim \infty) \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1/(0 \sim \infty)$  の元  $(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$  (resp.  $(0 = \infty, w_2) \in (0 = \infty) \times \mathbb{C}^\times$ ,  $(w_1, 0 = \infty) \in \mathbb{C}^\times \times (0 = \infty)$ ,  $(0 = \infty, 0 = \infty)$ ) は幕零軌道  $(\sigma_{0,0}^1, F(\mathbb{C}, z_1, z_2))$  (resp.  $(\sigma_{0,0}^2, F(\mathbb{C}, \mathbb{C}, z_2))$ ,  $(\sigma_{0,0}^3, F(\mathbb{C}, z_1, \mathbb{C}))$ ,  $(\sigma_{0,0}^4, F(\mathbb{C}, \mathbb{C}, \mathbb{C}))$ ) の類に対応している. 但し,  $\exp(2\pi i z_j) = w_j$  ( $j = 1, 2$ ) である.

## 2.2 手順 2 : $\Sigma$ の定義と $\Gamma \backslash D_\Sigma$ の計算

$\Sigma = \{ \text{Ad}(\gamma)\sigma = \gamma\sigma\gamma^{-1} \mid \gamma \in \Gamma_1, \sigma \in \Sigma_1 \}$  とすると,  $\Sigma$  は  $\Gamma$  と強く整合する弱ファンであり, 次の可換図式が得られる :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \backslash D = \bigcup_{j \in \mathbb{C}} G_2 \backslash (\mathbb{C}/q^\mathbb{Z} \times \mathbb{C}/q^\mathbb{Z}) & \hookrightarrow & \Gamma \backslash D_\Sigma = \Gamma \backslash D \cup (\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1/(0 \sim \infty) \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1/(0 \sim \infty)) / \sim \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C} & \hookrightarrow & \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \end{array}$$

ここで, 右側の縦の写像の  $j = \infty \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  におけるファイバー  $(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1/(0 \sim \infty) \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1/(0 \sim \infty)) / \sim$  は,

$$\begin{aligned} (\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1/(0 \sim \infty) \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1/(0 \sim \infty)) / \sim &= G_2 \backslash (\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times) \\ &\cup ((0 = \infty) \times \mathbb{C}^\times \cup \mathbb{C}^\times \times (0 = \infty)) / \sim \\ &\cup (0 = \infty) \times (0 = \infty) \end{aligned}$$

と分解できる. このとき  $G_2$  は  $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$  に (3), (4), (5) と同様に作用し,  $(0 = \infty) \times \mathbb{C}^\times \cup \mathbb{C}^\times \times (0 = \infty)$  における同値関係は  $(w_2, 0 = \infty) \sim (0 = \infty, w_2) \sim (0 = \infty, w_2^{-1})$  で定める. ここで  $W := ((0 = \infty) \times \mathbb{C}^\times \cup \mathbb{C}^\times \times (0 = \infty)) / \sim \cup (0 = \infty) \times (0 = \infty)$  とし,  $W$  を同型

$$W = \mathbb{C}^\times / (z \sim z^{-1}) \cup (0 = \infty) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1, [z] \mapsto z + z^{-1}$$

で  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  と同一視する.

### 3 Alexeev のモジュライ $\overline{AP}_{1,3}$ との比較

上で構成した  $\Gamma \backslash D_\Sigma$  と V. Alexeev 氏により [A02] において構成された完備モジュライ空間  $\overline{AP}_{1,3}$  との比較を与える.  $\overline{AP}_{1,3}$  は高々、結節点を持つ三次曲線  $C$  と  $C$  の特異点を通らない直線  $L$  からなる組  $(C, L)$  のモジュライである. 特に、各点  $(C, L) \in \overline{AP}_{1,3}$  にあらわれる  $C$  は非特異三次曲線、三角形、横断的に交わる直線と二次曲線、あるいは結節三次曲線のいずれかである.  $AP_{1,3}$  を非特異三次曲線  $C$  とそれに横断的に交わる直線  $L$  の組からなる  $\overline{AP}_{1,3}$  の開部分集合とする.  $AP_{1,3}$  の各点  $(C, L)$  に、その混合 Hodge 構造  $(H^1(C \setminus (C \cap L)), W, F)$  を対応させることで、分類空間  $\Gamma \backslash D$  への写像が定まる. 具体的には、次のように定式化できる. 任意の点  $(C, L) \in AP_{1,3}$  に対して、 $C$  は非特異三次曲線であり、 $C \cap L$  は相異なる三点なので、ある  $\tau \in \mathcal{H}$  が存在して、 $C \simeq E_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$  となり、 $C \cap L \simeq \{[z_1], [z_2], [-z_1 - z_2]\} \subset E_\tau$  とかける. このとき、 $AP_{1,3}$  から  $\Gamma \backslash D$  への写像を次で定める：

$$\phi: AP_{1,3} \longrightarrow \Gamma \backslash D, \quad (C, L) \longmapsto [F(\tau, z_1, z_2)].$$

この写像の境界への拡張を考える.  $\overline{AP}_{1,3}$  の点  $(C, L)$  で、 $C$  が結節三次曲線である場合、適当な座標  $(y_0 : y_1 : y_2)$  を用いて

$$C : y_0^3 - y_1^3 = 3y_0y_1y_2$$

とかける. 各  $w \in \mathbb{P}_\mathbb{C}^1$  に対し、 $C$  の点を  $p_w := (-3w : -3w^2 : w^3 - 1)$  で定めると、 $p_0 = p_\infty = (0 : 0 : 1)$  が結節点であり、 $C = \{p_w \mid w \in \mathbb{C}^\times\} \cup \{p_0 = p_\infty\}$  となる. 任意の  $p_{w_1}, p_{w_2} \in C \setminus \{\text{結節点}\}$  に対して、

$$\begin{aligned} p_{w_1} \circ p_{w_2} &:= p_{w_1} \text{ と } p_{w_2} \text{ を通る直線と } C \text{ との第三交点} = p_{(w_1w_2)^{-1}}, \\ p_{w_1} \cdot p_{w_2} &:= p_1 \circ (p_{w_1} \circ p_{w_2}) = p_1 \circ p_{(w_1w_2)^{-1}} = p_{w_1w_2} \end{aligned} \quad (6)$$

とすると、(6) により  $C \setminus \{\text{結節点}\}$  に群構造が定まり、群同型  $\mathbb{C}^\times \xrightarrow{\sim} C \setminus \{\text{結節点}\}$ ,  $w \mapsto p_w$  が得られる.  $L$  は  $C$  の結節点を通らないので、 $C \cap L = \{p_{w_1}, p_{w_2}, p_{(w_1w_2)^{-1}}\}$  とかける. このとき、

$$\bar{\phi}: (C, L) \longmapsto (w_1, w_2) \bmod G_2 \in G_2 \backslash (\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times) \subset (\mathbb{P}_\mathbb{C}^1/(0 \sim \infty) \times \mathbb{P}_\mathbb{C}^1/(0 \sim \infty)) / \sim$$

とする. これは定義可能であり、自然な逆写像も定義可能である. さらに次が成り立つ：

**定理 3.1.**  $\phi$  は双有理写像  $\bar{\phi}: \overline{AP}_{1,3} \longrightarrow \Gamma \backslash D_\Sigma$  に拡張できる. このとき、 $\bar{\phi}$  の基点集合は  $W_{\text{red}} := \{(C, L) \in \overline{AP}_{1,3} \mid C \text{ は可約}\} \simeq \mathbb{P}_\mathbb{C}^1$  であり、 $\bar{\phi}^{-1}$  の基点集合は  $W \simeq \mathbb{P}_\mathbb{C}^1$  である.

### 4 GIT モジュライ $\overline{P}_{1,3}$ との比較

講演者は [Ku] において、射影平面内の三次曲線と直線からなる半安定な組の GIT モジュライ  $\overline{P}_{1,3}$  の研究を行った. この章では [Ku] における結果と今回の結果の関係について述べる. まず、[Ku] における結果を簡単に述べる. 但し、[Ku] では標数が 2, 3 でない代数閉体  $k$  上で考えていた.

$\mathbb{P}_\mathbb{C}^2 = \text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2])$  上の一次斉次多項式全体  $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_1$  の双対空間を  $V$  とし、 $\mathbb{P}(V) := \text{Proj}(\text{Sym}(V))$ ,  $\mathbb{P}(S^3V) := \text{Proj}(\text{Sym}(S^3V))$  とする. それぞれ、 $\mathbb{P}_\mathbb{C}^2$  内の全ての直線と、全ての三次曲線から

なる空間を表している.  $\mathrm{PGL}(3)$  の  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  への自然な作用から, ファイバー積  $\mathbb{P}(S^3V) \times \mathbb{P}(V)$  への作用が誘導される. この作用による半安定な組全体  $(\mathbb{P}(S^3V) \times \mathbb{P}(V))^{ss}$  の GIT-商を  $\overline{P}_{1,3}$  とする:

$$(\mathbb{P}(S^3V) \times \mathbb{P}(V))^{ss} \longrightarrow (\mathbb{P}(S^3V) \times \mathbb{P}(V))^{ss} // \mathrm{PGL}(3) =: \overline{P}_{1,3}.$$

半安定な組は次の全てを満たす組である:  $C$  は被約かつ三重点をもたず,  $L$  は  $C$  に含まれず,  $L$  は  $C$  の特異点を通らず,  $L$  は  $C$  に三重で接しない. 特に,  $C$  は非特異三次曲線, 三角形, 直線と二次曲線 (接してもよい), 結節三次曲線, 尖点三次曲線のいずれかである (詳細は [Ku] の第三章を参照せよ).

$\overline{P}_{1,3}$  の部分集合で  $C$  が尖点三次曲線となるものを  $W_{\mathrm{Cusp}}$  とし,  $\overline{AP}_{1,3}$  の部分集合で  $L$  が  $C$  に三重で接するものを  $W_{\mathrm{T}}$  とすると, いずれも  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  と同型であることがわかり, 双有理写像  $f: \overline{P}_{1,3} \rightarrow \overline{AP}_{1,3}$  で  $f$  の基点集合が  $W_{\mathrm{Cusp}}$ ,  $f^{-1}$  の基点集合が  $W_{\mathrm{T}}$  となるものが得られる (詳細は [Ku] の第四章を参照せよ).

二つのモジュライ  $\overline{AP}_{1,3}$  と  $\overline{P}_{1,3}$  の構造を調べる為に,  $X := SQ_{1,3} \times \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  のあるブローアップから  $\overline{AP}_{1,3}$ ,  $\overline{P}_{1,3}$  への自然な写像を構成した. ここで,  $SQ_{1,3}$  は中村郁氏により [Na99] において構成された Hesse の三次曲線のモジュライである.  $X$  の各点は Hesse の三次曲線  $C$  と直線  $L$  からなる組

$$C: \mu_0(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3) = 3\mu_1x_0x_1x_2, \quad L: b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0 \quad (7)$$

に対応するので,  $X$  の一般の点から  $\overline{AP}_{1,3}$  あるいは  $\overline{P}_{1,3}$  への写像が定まるが,  $C$  が三角形をなし, かつ  $L$  が  $C$  の特異点を通るときに  $\overline{AP}_{1,3}$ ,  $\overline{P}_{1,3}$  への写像が定義できず,  $L$  が  $C$  に三重で接するときに  $\overline{P}_{1,3}$  への写像が定義できない. これらの写像が定義できない部分集合に含まれる点への適切な近づけ方を考えると, 対応する点列は  $\overline{AP}_{1,3}$  あるいは  $\overline{P}_{1,3}$  の点に収束することがわかる. 従って, 写像が定義できない部分集合を中心に適当なブローアップを行うことで, 例外集合からこれらの極限への写像を構成することが出来る. 実際, 前者の定義できない部分集合を中心に三回ブローアップを行うことで得られるスキーム  $\tilde{X}$  から  $\overline{AP}_{1,3}$  への写像  $\varphi: \tilde{X} \rightarrow \overline{AP}_{1,3}$  が構成でき, さらに,  $\tilde{X}$  における後者の定義できない部分集合の強変換を中心に三回ブローアップを行うことで得られるスキーム  $\hat{X}$  から  $\overline{P}_{1,3}$  への写像  $\psi: \hat{X} \rightarrow \overline{P}_{1,3}$  が構成できる. 特に, これらの写像の構成の仕方から  $\overline{AP}_{1,3}$  と  $\overline{P}_{1,3}$  の (粗い) 構造が得られる. 加えて, これらの写像と上で構成した双有理写像との間には次の関係がある.  $\pi$  を前者の,  $p$  を後者の三回ブローアップとすると, 次の可換図式が存在する:

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & \xrightarrow{\psi} & \overline{P}_{1,3} \\ p \downarrow & & \downarrow f \\ \tilde{X} & \xrightarrow{\varphi} & \overline{AP}_{1,3} \\ \pi \downarrow & & \\ X & & \end{array}$$

このとき,  $\varphi^{-1}(W_{\mathrm{T}})$  と  $\psi^{-1}(W_{\mathrm{Cusp}})$  は各々  $p$  の中心と例外集合である (詳細は [Ku] の第五章を参照せよ).

同様に,  $X$  のあるブローアップから  $\Gamma \backslash D_{\Sigma}$  への自然な写像を構成することができる. 上で与えた  $X$  の一般の点から  $\overline{AP}_{1,3}$  への写像と, さらに  $\bar{\phi}$  とを合成することで  $\Gamma \backslash D_{\Sigma}$  への写像が定まるが,  $C$  が三角形のとき,  $\Gamma \backslash D_{\Sigma}$  への写像が定義できない. この写像が定義できない部分集合に含まれる点への適切な近づけ方を考えると, 対応する点列は  $\Gamma \backslash D_{\Sigma}$  の点に収束することがわかる.

以下, 具体的な構成方法を与える ( $\overline{AP}_{1,3}$  への写像については, [Ku] とまったく同じ構成である). 簡単のため,  $X$  のアフィン開集合  $U = \mathrm{Spec} \left( \mathbb{C} \left[ s, t, u, \frac{1}{u^3-1} \right] \right)$ ,  $s = b_0/b_2$ ,  $t = b_1/b_2$ ,  $u = \mu_0/\mu_1$  で考える. 他のアフィン開集合でも同様に構成できる.  $\overline{AP}_{1,3}$  への写像は  $(s=0, u=0) \cup (t=0, u=0)$  でのみ定義で

まず,  $\Gamma \setminus D_\Sigma$  への写像は ( $u = 0$ ) で定義できない. まず,  $\Gamma \setminus D_\Sigma$  への写像を  $U \setminus (0, 0, 0)$  に拡張する.  $U$  の点  $(s, t, u)$  に対応する組

$$C : u(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3) = 3x_0x_1x_2, \quad L : sx_0 + tx_1 + x_2 = 0 \quad (8)$$

において,  $y_0 = x_0, y_1 = -x_1, y_2 = -ux_2$  とすると,  $C : y_0^3 - y_1^3 - u^3y_2^3 = 3y_0y_1y_2, L : sy_0 - ty_1 - uy_2 = 0$  となる. ここで  $u \rightarrow 0$  として得られる極限の組を  $(C_0, L_0)$  とすると,

$$C_0 : y_0^3 - y_1^3 = 3y_0y_1y_2, \quad L_0 : sy_0 - ty_1 = 0$$

となる.  $C_0$  は結節三次曲線であり,  $L_0$  は  $C_0$  の結節点  $p_0 = p_\infty = (0 : 0 : 1)$  を通るので,  $\overline{AP}_{1,3}$  には含まれない. 一方,  $C_0 \cap L_0 = \{p_{t/s}, p_0, p_\infty\}$  なので,  $st \neq 0$  のとき,

$$U \ni (s, t, 0) \mapsto \left[ \left( 0 = \infty, \frac{t}{s} \right) \right] \in W \subset (\mathbb{P}_\mathbb{C}^1 / (0 \sim \infty) \times \mathbb{P}_\mathbb{C}^1 / (0 \sim \infty)) / \sim$$

が定まる. 以上より, 二つの有理写像

$$\begin{aligned} \varphi : U &\longrightarrow \overline{AP}_{1,3}, & \varphi \text{ の基点集合} &= (s = u = 0) \cup (t = u = 0), \\ g : U &\longrightarrow \Gamma \setminus D_\Sigma, & g \text{ の基点集合} &= \{(0, 0, 0)\} = (s = u = 0) \cap (t = u = 0) \end{aligned}$$

で,  $u \neq 0$  において  $g = \bar{\phi} \circ \varphi$  となるものが得られた.

次に,  $U$  を原点でブローアップし, それを  $\pi_1 : U' \rightarrow U$  とかく.  $U'$  への  $\varphi$  と  $g$  の拡張を構成する.  $U'$  は三つのアファイン開集合  $U'_1, U'_2, U'_3$  からなるアファイン開被覆を持ち, 各々の局所座標系は  $(s/u, t/u, u), (s, t/s, u/s), (s/t, t, u/t)$  である.  $U'_1$  上で,  $\varphi$  を

$$\varphi : (s/u, t/u, u) \mapsto \begin{cases} C : y_0^3 + y_1^3 + u^3y_2^3 = 3y_0y_1y_2, \\ L : (s/u)y_0 + (t/u)y_1 + y_2 = 0 \end{cases} \in \overline{AP}_{1,3}$$

で定義する. この像は (8) において  $x_0 = y_0, x_1 = y_1, x_2 = uy_2$  としたものである. このとき  $C$  は非特異三次曲線あるいは結節三次曲線なので,  $U'_1$  上で  $g$  を  $g := \bar{\phi} \circ \varphi$  で定めることができる. 同様に,  $U'_2$  上では, (8) において  $x_0 = y_0, x_1 = y_1, x_2 = sy_2$  としたものの  $\varphi$  の像として定義する:

$$\varphi : (s, t/s, u/s) \mapsto \begin{cases} C : (u/s)(y_0^3 + y_1^3 + s^3y_2^3) = 3y_0y_1y_2, \\ L : y_0 + (t/s)y_1 + y_2 = 0. \end{cases} \quad (9)$$

これは  $U$  における基点集合 (の一部) ( $t = u = 0$ ) の強変換 ( $t/s = u/s = 0$ ) でのみ定義できない有理写像になっている. 一方,  $u/s \neq 0$  のとき,  $C$  は非特異三次曲線なので,  $(u/s \neq 0)$  上で  $g$  を  $g = \bar{\phi} \circ \varphi$  で定めることができるが,  $u/s = 0$ , すなわち,  $u = 0$  の強変換において,  $g$  は定義できないので, 上と同様に適切な極限を考える. つまり, (9) において  $y_0 = z_0, y_1 = -z_1, y_2 = -(u/s)z_2$  とし,  $u/s \rightarrow 0$  とすると極限

$$C'_0 : z_0^3 - z_1^3 = 3z_0z_1z_2, \quad L'_0 : z_0 - (t/s)z_1 = 0$$

が得られる. 従って,

$$U'_2 \ni (s, t/s, 0) \mapsto \left[ \left( 0 = \infty, \frac{t}{s} \right) \right] \in W \subset (\mathbb{P}_\mathbb{C}^1 / (0 \sim \infty) \times \mathbb{P}_\mathbb{C}^1 / (0 \sim \infty)) / \sim$$

が定まり,  $g : U'_2 \rightarrow \Gamma \setminus D_\Sigma$  を定義することができる.  $U'_3$  においても同様に定義することで,  $U$  における基点集合 (の一部) ( $s = u = 0$ ) の強変換 ( $s/t = u/t = 0$ ) でのみ定義できない有理写像  $\varphi$  と  $U'_3$  上の写像  $g$  を構成することができる. 特に,  $g$  に関しては不定点解消ができています.



以下, 同様に  $\varphi$  の  $U'$  における基点集合  $(t/s = u/s = 0) \cup (s/t = u/t = 0)$  を中心にブローアップを行って, 不定点解消を行うことで,  $X$  のブローアップから  $\overline{AP}_{1,3}$  への写像を具体的に構成することができる (実際, あと二回のブローアップで  $\varphi$  の不定点解消ができる. 詳細は [Ku] を見よ).

$X$  の他のアフィン開集合でも同様の操作で不定点解消ができるので, 一斉にブローアップすることで,  $X$  の一回ブローアップ  $X'$  から  $\Gamma \backslash D_\Sigma$  への写像  $g: X' \rightarrow \Gamma \backslash D_\Sigma$  と  $X'$  の二回ブローアップ  $\tilde{X}$  から  $\overline{AP}_{1,3}$  への写像  $\varphi: \tilde{X} \rightarrow \overline{AP}_{1,3}$  を具体的に構成することができる.

以上の結果をまとめると次が得られる:

**定理 4.1.** 次の可換図式が存在する:

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{X} & \xrightarrow{\psi} & \overline{P}_{1,3} \\
 p \downarrow & & \downarrow f \\
 \tilde{X} & \xrightarrow{\varphi} & \overline{AP}_{1,3} \\
 \pi_2 \circ \pi_3 \downarrow & & \downarrow \bar{\phi} \\
 X' & \xrightarrow{g} & \Gamma \backslash D_\Sigma \\
 \pi_1 \downarrow & & \\
 X & & 
 \end{array}$$

このとき,

- $f$  の基点集合は  $W_{\text{Cusp}} \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ ,  $f^{-1}$  の基点集合は  $W_{\text{T}} \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  であり,
- $\bar{\phi}$  の基点集合は  $W_{\text{red}} \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ ,  $\bar{\phi}^{-1}$  の基点集合は  $W \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  であり,
- $\varphi^{-1}(W_{\text{T}})$  と  $\psi^{-1}(W_{\text{Cusp}})$  はそれぞれ三回ブローアップ  $p$  の中心と例外集合であり,
- $\pi_2 \circ \pi_3(\varphi^{-1}(W_{\text{red}})) = g^{-1}(W)$  である.

## 参考文献

- [A02] V. Alexeev, *Complete moduli in the presence of semiabelian group action*, Ann. of Math. **155** (2002), 611–708.
- [KNU09] K. Kato, C. Nakayama and S. Usui, *Classifying spaces of degenerating mixed Hodge structures, I: Borel-Serre spaces*, Advanced Studies in Pure Math. **54**: Algebraic Analysis and Around, 2009, 187–222. MR2499557 (2010g:14010)
- [KNU11] K. Kato, C. Nakayama and S. Usui, *Classifying spaces of degenerating mixed Hodge structures, II: Spaces of  $\text{SL}(2)$ -orbits*, Kyoto J. Math. **51** (1): Nagata Memorial Issue (2011), 149–261, MR2784750 (2012f:14012)
- [KNU13] K. Kato, C. Nakayama and S. Usui, *Classifying spaces of degenerating mixed Hodge structures, III: Spaces of nilpotent orbits*, J. Algebraic Geom. **22**, (2013), 671–772,
- [Ku] M. Kuroda, *On the GIT moduli of semistable pairs consisting of a plane cubic curve and a line*, doctoral thesis.
- [Na99] I. Nakamura, *Stability of degenerate abelian varieties*, Invent. Math. **136** (1999), 659–715.

# Orthogonal decompositions of integral trace forms of certain algebraic number fields via Bezoutians

大竹 秀一 (Shuichi OTAKE) · 早稲田大学基幹理工学部

## 概要

有限次代数体  $K$  やその整数環上には, 有理数体  $\mathbb{Q}$  上の trace 写像が定める二次形式が付随しており,  $K$  の trace form 或いは integral trace form と呼ばれる. 本稿では,  $K$  が円分体や, ある種の trinomial から定まる場合に, その integral trace form の 有理整数環  $\mathbb{Z}$  上の直交分解や,  $p$  進整数環  $\mathbb{Z}_p$  上の標準形に関する結果を紹介する.

## 1 Introduction

$K$  を有限次代数体とし,  $K$  の  $\mathbb{Q}$  上の最小多項式を  $f(x)$  とする;  $K \simeq \mathbb{Q}[x]/(f(x))$ . このとき, 写像

$$\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}} : K \times K \rightarrow \mathbb{Q}; (\alpha, \beta) \rightarrow \mathrm{trace}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha\beta)$$

は  $K$  上の symmetric  $\mathbb{Q}$ -bilinear form を定めるが, これを  $K$  あるいは  $f$  の trace form と呼び, symmetric  $\mathbb{Q}$ -bilinear form space  $(K, \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}})$  を  $\mathrm{Tr}_K$  または  $\mathrm{Tr}_f$  と表すことにする. また,  $\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}$  を  $K$  の整数環  $O_K$  に制限すると, トレースの性質から値は有理整数環  $\mathbb{Z}$  に取ることが分かり,  $O_K$  上の symmetric  $\mathbb{Z}$ -bilinear form  $\mathrm{tr}_{K/\mathbb{Q}}$  が定まる. これを  $K$  あるいは  $f$  の integral trace form と呼び, symmetric  $\mathbb{Z}$ -bilinear form module  $(O_K, \mathrm{tr}_{K/\mathbb{Q}})$  を  $\mathrm{tr}_K$  または  $\mathrm{tr}_f$  と表す. 以下,  $\mathrm{tr}_f$  の  $\mathbb{Z}_p$  への係数拡大を  $\mathrm{tr}_{K,p}$  または  $\mathrm{tr}_{f,p}$  と表す.

一般に, trace form あるいは integral trace form の本格的な研究は, O. Taussky [?] から始まったとされており, その後 Conner-Perlis [?] や Serre [?] 等により, 興味深い問題の提出や, Galois cohomology との関連から Galois の逆問題への応用等がなされ, 現在までの研究の道筋がつけられた. 数多くある (integral) trace form に関連する話題のうち, 本稿で扱う問題は次のものである.

**Problem 1.1** symmetric  $\mathbb{Q}$  ( $\mathbb{Z}$ )-bilinear form のうち, (integral) trace form から定まるものを全て決定せよ. または, 全ての (integral) trace form を具体的に計算せよ.

本稿の目的は, [?], [?] に基づき, 円分体の integral trace form と, ある種の trinomial から定まる integral trace form に関し, その  $\mathbb{Z}$  上の直交分解と,  $p$  進整数環  $\mathbb{Z}_p$  上の標準形の具体的な明示式を紹介をすることである.

最後に記号の準備をしておく ([?] 参照).  $R$  を単位的可換環とし,  $(X_1, \beta_1), (X_2, \beta_2)$  を symmetric  $R$ -bilinear form module とする.  $(X_1, \beta_1)$  と  $(X_2, \beta_2)$  が symmetric  $R$ -bilinear form module として同型となる時,  $(X_1, \beta_1) \simeq_R (X_2, \beta_2)$  (または単に  $X_1 \simeq_R X_2$ ) と表し,  $(X_1, \beta_1)$  と  $(X_2, \beta_2)$  の (symmetric  $R$ -bilinear form module としての) 直和を  $(X_1, \beta_1) \oplus (X_2, \beta_2)$  (または単に  $X_1 \oplus X_2$ ) と表す. 特に, 0 以上の整数  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対し,  $m \times (X_1, \beta_1)$  (または単に  $m \times X_1$ ) で,  $(X_1, \beta_1)$  の  $m$  個の直和を表す;

$$m \times (X_1, \beta_1) = m \times X_1 := \begin{cases} \underbrace{X_1 \oplus \cdots \oplus X_1}_m & m \geq 1, \\ (0) & m = 0. \end{cases}$$

次に,  $(X_1, \beta_1)$  と  $(X_2, \beta_2)$  のテンソル積を  $(X_1, \beta_1) \otimes (X_2, \beta_2)$  (または単に  $X_1 \otimes X_2$ ) と表す. また,  $R$  係数の  $n \times n$  対称行列  $M$  に対し,  $M$  が定める  $R^n$  上の symmetric  $R$ -bilinear form module を  $\langle M \rangle_R$  と表すものとし, 記号の簡単のため,  $\langle a \rangle X_1 := \langle [a] \rangle \otimes X_1$  ( $\forall a \in R$ ) とおく. 特に,  $G, H$  で以下の空間を表す;

$$G = \left\langle \left[ \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{array} \right] \right\rangle_R, \quad H = \left\langle \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right] \right\rangle_R.$$

## 2 Relationships between (integral) trace forms and Bezoutian forms

$f_1(x), f_2(x) \in R[x]$  を  $R$  上の多項式とし,  $n \geq \max\{\deg f_1, \deg f_2\}$  を満たす整数  $n$  に対し,

$$B_n(f_1, f_2) := \frac{f_1(x)f_2(y) - f_1(y)f_2(x)}{x - y} = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} x^{i-1} y^{j-1} \in R[x, y],$$

$$M_n(f_1, f_2) := [\alpha_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$$

とおく. このとき,  $M_n(f_1, f_2)$  は  $R$  係数の対称行列となり,  $R^n$  上の symmetric  $R$ -bilinear form を定める. この symmetric  $R$ -bilinear form を  $f_1$  と  $f_2$  の Bezoutian form (Bezout の二次形式) と呼ぶ. 以後,  $M_n(f_1) := M_n(f_1, f_1')$  ( $f_1'$  は  $f_1$  の形式的な微分) と表す. Bezoutian form (Bezout の二次形式) に関しては, 高木 [?], Krein-Naimark [?] に優れた解説がある. 本稿で述べる結果は全て, 次の定理により (integral) trace form を Bezoutian form と見ることにより得られる結果であることを注意しておく.

**Theorem 2.1**  $K = \mathbb{Q}(\theta)$  を  $n$  次の代数体とし,  $\theta$  の  $\mathbb{Q}$  上の最小多項式を  $f(x)$  とおく. このとき,  $\mathrm{Tr}_K \simeq_{\mathbb{Q}} \langle M_n(f) \rangle_{\mathbb{Q}}$ . ここで,  $\theta$  を適当に整数倍して  $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$  としておくと,  $\mathrm{tr}_K \simeq_{\mathbb{Z}} \langle M_n(f) \rangle_{\mathbb{Z}}$  となるための必要十分条件は,  $1, \theta, \dots, \theta^{n-1}$  が  $K$  の整基底をなすことである. 特に, この条件が成り立つときは,  $\mathrm{tr}_{K,p} \simeq_{\mathbb{Z}_p} \langle M_n(f) \rangle_{\mathbb{Z}_p}$  である.

## 3 Main results for cyclotomic fields

以後,  $1$  の原始  $n$  乗根  $\zeta_n$  に対し,  $\mathrm{tr}_n := \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}$  とおく. 一般性を失うことなく,  $n$  が偶数ならば  $4$  で割れていると仮定する. また,  $I^{(r)}$  で集合  $\{0, 1\}$  の  $r$  個の直積を,  $\mathbf{i}^{(r)} = (i_1, i_2, \dots, i_r)$  で  $I^{(r)}$  の任意の元を表すものとする.

**Theorem 3.1**  $n$  を  $3$  以上の整数とし, その素因数分解を  $n = 2^e p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$  とし,  $n' = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$  とおく.

(i)  $e = 0$  のとき,

$$\mathrm{tr}_n \simeq_{\mathbb{Z}} \bigoplus_{\mathbf{i}^{(r)} \in I^{(r)}} \langle (-1)^{\sum_{m=1}^r i_m} n \prod_{m=1}^r p_m^{i_m} \rangle X_n^{(\mathbf{i}^{(r)})}.$$

ここで,

$$X_n^{(\mathbf{i}^{(r)})} = \langle 1 \rangle \oplus \left( \prod_{m=1}^r p_m^{e_m-1} (p_m - 2)^{i_m+1} - 1 \right) / 2 \times H.$$

(ii)  $e \geq 2$  のとき,

$$\mathrm{tr}_n \simeq_{\mathbb{Z}} \begin{cases} \langle 2^{e-1} \rangle \langle \langle 1 \rangle \oplus \langle -1 \rangle \oplus (2^{e-2} - 1) \times H \rangle, & n' = 1, \\ \bigoplus_{\mathbf{i}^{(r)} \in I^{(r)}} \langle (-1)^{\sum_{m=1}^r i_m} (n/2) \prod_{m=1}^r p_m^{i_m} \rangle Y_n^{(\mathbf{i}^{(r)})}, & n' > 1. \end{cases}$$

ここで,

$$Y_n^{(\mathbf{i}^{(r)})} = \langle 1 \rangle \oplus \langle -1 \rangle \oplus (2^{e-2} \prod_{m=1}^r p_m^{e_m-1} (p_m - 2)^{i_m+1} - 1) \times H.$$

次に,  $\mathrm{tr}_{n,p} := \mathrm{tr}_{\mathbb{Q}(\zeta_n), p}$  の標準形に関する結果を述べる. そのため, 以下では  $\varphi(*)$  で Euler's totient function を,  $D_n$  で円分体  $\mathbb{Q}(\zeta_n)$  の判別式をそれぞれ表すものとする. また,  $p$  を奇素数とする時, 任意の  $p$  進単数  $a \in \mathbb{Z}_p^\times$  に対し,

$$u_{a,p} := \begin{cases} 1, & a \in (\mathbb{Z}_p^\times)^2, \\ u_p, & a \notin (\mathbb{Z}_p^\times)^2 \end{cases}$$

とおく. ここで,  $u_p$  は  $p$  を法として平方非剰余となる正の整数のうち, 最小のものを表す. 他方,  $p = 2$  の時は,  $u_{a,2}$  ( $a \in \mathbb{Z}_2^\times$ ) を次のように定義する;

$$u_{a,2} = \begin{cases} 1 & a \in (\mathbb{Z}_2^\times)^2, \\ 3 & a \in 3(\mathbb{Z}_2^\times)^2, \\ 5 & a \in 5(\mathbb{Z}_2^\times)^2, \\ 7 & a \in 7(\mathbb{Z}_2^\times)^2. \end{cases}$$

Theorem 3.2  $p$  を奇素数とする. また,  $n$  を 3 以上の整数とし,  $n = p^e n'$  ( $e \geq 0, p \nmid n'$ ) と表す.

(1)  $e = 0$  のとき,

$$\mathrm{tr}_{n,p} \simeq_{\mathbb{Z}_p} (\varphi(n) - 1) \times \langle 1 \rangle \oplus \langle u_{D_n,p} \rangle.$$

(2)  $e \geq 1$  のとき,

$$\mathrm{tr}_{n,p} \simeq_{\mathbb{Z}_p} \langle p^{e-1} \rangle ((n_1 \times \langle 1 \rangle) \oplus \langle u_{a_1,p} \rangle) \oplus \langle p^e \rangle ((n_2 \times \langle 1 \rangle) \oplus \langle u_{a_2,p} \rangle).$$

ここで,

$$a_1 = \begin{cases} (-1)^{1+(p^{e-1}-1)/2}, & n' = 1, \\ D_{n'}, & n' > 1, \end{cases} \quad a_2 = \begin{cases} (-1)^{(p^{e-1}(p-2)-1)/2}, & n' = 1, \\ D_{n'}, & n' > 1 \end{cases}$$

かつ

$$n_1 = \varphi(n')p^{e-1} - 1, \quad n_2 = \varphi(n')p^{e-1}(p-2) - 1.$$

Theorem 3.3  $n$  を 3 以上の整数とし, その素因数分解を  $n = 2^e p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$  とし,  $n' = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$  とおく.

(1)  $e = 0$  のとき,

$$\mathrm{tr}_{n,2} \simeq_{\mathbb{Z}_2} \left( \bigoplus_{\mathbf{i}^{(r)} \in I^{(r)}} \langle (-1)^{\sum_{m=1}^r i_m} n \prod_{m=1}^r p_m^{i_m} \rangle \right) \oplus ((\varphi(n) - 2^r)/2 \times H).$$

(2)  $e \geq 2$  のとき,

$$\mathrm{tr}_{n,2} \simeq_{\mathbb{Z}_2} \begin{cases} \langle 2^{e-1} \rangle (\langle 1 \rangle \oplus \langle -1 \rangle \oplus (2^{e-2} - 1) \times H), & n' = 1, \\ \langle 2^{e-1} \rangle (Z_n \oplus \langle -1 \rangle Z_n \oplus (\varphi(n) - 2^{r+1})/2 \times H), & n' > 1. \end{cases}$$

ここで,

$$Z_n = \bigoplus_{\mathbf{i}^{(r)} \in I^{(r)}} \langle (-1)^{\sum_{m=1}^r i_m} n' \prod_{m=1}^r p_m^{i_m} \rangle.$$

## 4 Main results for certain trinomial extensions

$P_n(x) := x^n + nklx^s + l$  を以下の性質 (P.1), (P.2), (P.3) を満たす trinomial とする;

(P.1)  $1 \leq s < n$  かつ  $\mathrm{gcd}(n, s) = 1$ .

(P.2)  $k, l \in \mathbb{Z}$  かつ  $n$  の素因数は  $l$  の素因数でもある.

(P.3)  $l$  と  $d := 1 + (-1)^{n-1}(n-s)^{n-s}k^n(ls)^s$  は平方因子を持たない.

また,  $n(s) := 2s + 1$  とおき,  $s'$  を次のように定義する;

$$s' := \begin{cases} s & n(s) \leq n, \\ n - s & n(s) > n. \end{cases}$$

ここで,  $s' \geq 2$  ならば, ユークリッドの互除法から

$$\begin{aligned} r_0 &= n, \quad r_1 = s', \\ r_{m-1} &= q_{m-1}r_m + r_{m+1} \quad (0 < r_{m+1} < r_m, \quad 1 \leq m \leq \omega), \quad r_\omega = q_\omega r_{\omega+1} \quad (r_{\omega+1} = 1) \end{aligned}$$

を満たす正整数  $q_m$  と  $r_m$  が取れる.  $s' = 1$  のときは,  $q_0 = n - 1, r_2 = 1$  とおくこととする.

Theorem 4.1  $n$  を上記の条件を満たす任意の整数とし,  $n$  が奇数ならば,

$$\begin{aligned} a_0 &= \begin{cases} s\{-(n-s)k\}^{q_0-1}kl & n(s) \leq n, \\ s'\{-(n-s')k\}^{q_0-1}k & n(s) > n, \end{cases} \quad b_0 = \begin{cases} (n-s)k & n(s) \leq n, \\ (n-s')kl & n(s) > n, \end{cases} \\ a_m &= (-a_{m-1})^{q_m} b_{m-1}, \quad b_m = a_{m-1} \quad (1 \leq m \leq \omega - 1), \\ d_0 &= \begin{cases} a_0 & s' = 1, \\ -a_{\omega-2} b_{\omega-2} & s' \geq 2, \quad r_{\omega-1} = r_\omega + 1, \quad r_\omega : \text{odd}, \\ a_{\omega-1} & \text{それ以外} \end{cases} \end{aligned}$$

とおく. このとき,

$$\mathrm{tr}_{P_n} \simeq_{\mathbb{Z}} \langle n \rangle \oplus \langle -nl \rangle (X_0 \oplus n_0 \times H).$$

ここで,

$$X_0 = \begin{cases} \left\langle \left[ \begin{array}{cc} d_0 & 1 \\ 1 & (1-d)/d_0 \end{array} \right] \right\rangle & n : \text{odd}, \\ \langle d \rangle & n : \text{even}, \end{cases} \quad n_0 = \begin{cases} (n-3)/2 & n : \text{odd}, \\ (n-2)/2 & n : \text{even}. \end{cases}$$

次に,  $\mathrm{tr}_{P_n}$  を  $\mathbb{Z}_p$  まで係数拡大して得られる  $\mathrm{tr}_{P_{n,p}}$  の標準形に関する結果を述べる. 以下, 任意の  $r \in \mathbb{Z}_p$  に対し,  $v_p(r)$  で  $r$  の  $p$  進付値を表すものとする. また, 多項式  $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$  に対し,  $d(f)$  で  $f$  の判別式を表すものとする.

**Theorem 4.2**  $p$  を奇素数とし,  $n = p^{\varepsilon_n} n_p$ ,  $d = p^{\varepsilon_d} d_p$ ,  $l = p^{\varepsilon_l} l_p$  ( $\varepsilon_n = v_p(n)$ ,  $\varepsilon_d = v_p(d)$ ,  $\varepsilon_l = v_p(l)$ ) と表す.

(1)  $p \nmid l$  かつ  $p \nmid d$  のとき,

$$\mathrm{tr}_{P_{n,p}} \simeq_{\mathbb{Z}_p} (n-1) \times \langle 1 \rangle \oplus \langle u_{d(P_n),p} \rangle.$$

(2)  $p \nmid l$  かつ  $p \mid d$  のとき,

$$\mathrm{tr}_{P_{n,p}} \simeq_{\mathbb{Z}_p} \langle p \rangle \langle u_{d'_0,p} \rangle \oplus ((n-2) \times \langle 1 \rangle \oplus \langle u_{d'_1,p} \rangle).$$

ここで,

$$d'_0 = \begin{cases} nd_p l / d_0 & n : \text{odd}, \\ -nd_p l & n : \text{even}, \end{cases} \quad d'_1 = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} n^{n-1} d_0 l^{n-2} & n : \text{odd}, \\ (-1)^{(n-2)/2} n^{n-1} l^{n-2} & n : \text{even}. \end{cases}$$

(3)  $p \mid l$  のとき,

$$\mathrm{tr}_{P_{n,p}} \simeq_{\mathbb{Z}_p} \langle p^{\varepsilon_n} \rangle \langle u_{n_p,p} \rangle \oplus \langle p^{\varepsilon_n+1} \rangle ((n-2) \times \langle 1 \rangle \oplus \langle u_{d'_2,p} \rangle).$$

ここで,

$$d'_2 = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} n_p^{n-1} d l_p^{n-1} & n : \text{odd}, \\ (-1)^{n/2} n_p^{n-1} d l_p^{n-1} & n : \text{even}. \end{cases}$$

**Theorem 4.3**  $n = 2^{\varepsilon_n} n_2$ ,  $l = 2^{\varepsilon_l} l_2$  ( $\varepsilon_n = v_2(n)$ ,  $\varepsilon_l = v_2(l)$ ) とおく.

(1)  $2 \nmid n$  のとき,

$$\mathrm{tr}_{P_{n,2}} \simeq_{\mathbb{Z}_2} \begin{cases} \langle u_{n,2} \rangle \oplus G \oplus (n-3)/2 \times H & 2 \nmid kl, n=3 \text{ or } 2 \nmid kl, s'=2, \\ \langle u_{n,2} \rangle \oplus \langle 2^{\varepsilon_l} \rangle ((n-1)/2 \times H) & \text{それ以外.} \end{cases}$$

(2)  $2 \mid n$  のとき,

$$\mathrm{tr}_{P_{n,2}} \simeq_{\mathbb{Z}_2} \langle 2^{\varepsilon_n} \rangle \langle u_{n_2,2} \rangle \oplus \langle 2^{\varepsilon_n+1} \rangle (\langle u_{-n_2 d l_2, 2} \rangle \oplus (n-2)/2 \times H).$$

## 参考文献

- [1] P. E. Conner; R. Perlis. A survey of trace forms of algebraic number fields. Series in Pure Mathematics, 2. World Scientific Publishing Co., Singapore, 1984.
- [2] M. G. Krein; M. A. Naimark. The method of symmetric and Hermitian forms in the theory of the separation of the roots of algebraic equations. Linear and Multilinear Algebra 10 (1981), no. 4, 265-308.
- [3] J. Milnor; D. Husemoller. Symmetric bilinear forms. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 73. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.
- [4] S. Otake. Orthogonal decompositions of integral trace forms of cyclotomic fields and their canonical forms over the ring of  $p$ -adic integers. J. Number Theory 134 (2014), 258-279.
- [5] S. Otake. A Bezoutian approach to orthogonal decompositions of trace forms or integral trace forms of some classical polynomials. Linear Algebra Appl. 471 (2015), 291-319.
- [6] T. Takagi, *daisuugakukougi kaiteishimban*. (Japanese) Kyouritsushuppan (1965).
- [7] O. Taussky. The discriminant matrices of an algebraic number field. J. London Math. Soc. 43 (1968), 152-154.
- [8] J. P. Serre. L'invariant de Witt de la forme  $\mathrm{Tr}(x^2)$ . Comment. Math. Helv. 59 (1984), no. 4, 651-676.

# 円分体の最大実部分体の整数環について

山縣 幸司 (Koji Yamagata)\*

## 概要

$\zeta_n$  を 1 の原始  $n$  乗根とする. 円分体  $\mathbb{Q}(\zeta_n)$  の最大実部分体の整数環が  $\mathbb{Z}[\zeta_n + \zeta_n^{-1}]$  であることはよく知られている. 本稿では実円分多項式の終結式を用いたこの結果の別証明を紹介する. さらに, 円分体の最大実部分体の判別式の計算も紹介する.

## 1. 導入

### 1.1. 代数体の整数環

まず基本的な言葉の定義を復習する.  $K$  を代数体とする.  $K$  の元  $\alpha$  がある  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Z}$  により  $\alpha^m + a_1\alpha^{m-1} + \dots + a_{m-1}\alpha + a_m = 0$  となるとき,  $\alpha$  を代数的整数という.  $K$  に属する代数的整数全体の集合は可換環をなし, これを  $K$  の整数環という.

$K$  の元  $\alpha$  の  $\mathbb{Q}$  上の共役元を  $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}$  ( $\alpha^{(1)} = \alpha$ ,  $n = [K : \mathbb{Q}]$ ) と表し,  $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  を  $K$  の整数環の  $\mathbb{Z}$  上の基底とする. このとき,  $K$  の判別式  $d(K)$  を  $d(K) = \Delta(\omega_1, \dots, \omega_n)^2$  で定義する. ただし,  $\Delta(\omega_1, \dots, \omega_n) := \det((\omega_j^{(i)})_{i,j})$  である.

### 1.2. 円分体の整数環

円分体の整数環に関しては基本的な以下の定理が知られている.

**定理 1**  $\zeta_n \in \bar{\mathbb{Q}}$  を 1 の原始  $n$  乗根とすると, 円分体  $\mathbb{Q}(\zeta_n)$  の整数環は  $\mathbb{Z}[\zeta_n]$  である.

定理 1 は従来, 体の判別式の議論を用いて,  $n$  が素数べきの場合に帰着することにより証明されている (例えば [Wa]). 一方で, Lüneburg は素数べき分体の議論を介さずに,  $\mathbb{Z}[\zeta_n]$  がデデキント環であることを直接示すことにより定理 1 の別証明を与えた [Lü].

### 1.3. 円分体の最大実部分体の整数環

本稿における主結果は [Lü] における Lüneburg の方法を円分体の最大実部分体  $\mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})$  に適用することである [YY].

**定理 2** 円分体の最大実部分体  $\mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})$  の整数環は  $\mathbb{Z}[\zeta_n + \zeta_n^{-1}]$  である.

定理 2 の従来の証明としては円分体の整数環に帰着する証明 [Wa] や, 体の判別式と分岐群の議論を用いる証明 [Li] がある.

## 2. Lüneburg の方法の円分体の最大実部分体への適用

### 2.1. 準備

定理 2 の別証明に必要な Chebyshev 多項式や実円分多項式の性質や, それらの判別式及び終結式について述べる.

\* 〒466-8555 愛知県名古屋市中昭和区御器所町 名古屋工業大学 大学院工学研究科  
e-mail: 26417625@stn.nitech.ac.jp

### 2.1.1. 実円分多項式と Chebyshev 多項式

**定義 3**  $\Phi_n(x)$  を  $n$  円分多項式とする. また,  $n \leq 3$  に対し,  $\zeta_n + \zeta_n^{-1}$  の  $\mathbb{Q}$  上最小多項式を  $\Psi_n(x)$  とし, 実円分多項式と呼ぶ.

**定義 4** 正規化された第1種, 第2種, 第3種, 第4種 Chebyshev 多項式  $C_n, S_n, V_n, W_n \in \mathbb{Z}[x]$  を次を満たすように定義する:

$$C_n(2 \cos \theta) = 2 \cos n\theta, \quad S_n(2 \cos \theta) = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta},$$

奇数  $n$  に対し,

$$V_n(2 \cos \theta) = \frac{\cos n\theta/2}{\cos \theta/2}, \quad W_n(2 \cos \theta) = \frac{\sin n\theta/2}{\sin \theta/2}.$$

**補題 5 (Chebyshev 多項式の微分)**

$$C'_n(x) = nS_n(x),$$

$$V'_n(x) = \frac{nW_n(x) - V_n(x)}{2(x+2)}, \quad W'_n(x) = \frac{nV_n(x) - W_n(x)}{2(x-2)}.$$

**補題 6** 多項式  $x^n - 1$  の  $\mathbb{Q}$  上既約因子分解は次のようになる.

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_n(x).$$

Lüneburg の方法が円分体の最大実部分体に適用できるのは, 実円分多項式についても補題6と同様な以下の補題が成り立つためである.

**補題 7** [Y13] Chebyshev 多項式の  $\mathbb{Q}$  上既約因子分解は次のようになる.

$$C_n(x) = \prod_{d|n, n/d:\text{odd}} \Psi_{4d}(x), \quad S_n(x) = \prod_{2 < d|2n} \Psi_d(x),$$

$$V_n(x) = \prod_{1 < d|n} \Psi_{2d}(x), \quad W_n(x) = \prod_{1 < d|n} \Psi_d(x).$$

### 2.1.2. 終結式と判別式

**定義 8** 多項式  $f(x) = a_0(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$ ,  $g(x) = b_0(x - \beta_1) \cdots (x - \beta_m)$  に対し,  $f, g$  の終結式  $\text{Res}(f, g)$  を  $\text{Res}(f, g) = a_0^m b_0^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j)$  で定義する.

**定義 9** モニックな多項式  $f(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$  の判別式  $\text{Disc}(f)$  を  $\text{Disc}(f) = \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$  で定義する.

Chebyshev 多項式の終結式と補題7を用いると, 実円分多項式の終結式  $\text{Res}(\Psi_n, \Psi_m)$  の計算ができる [Y15].  $\phi$  をオイラー関数とする.

**命題 10 (実円分多項式の終結式)**  $n, m \geq 3$  に対し,

$$|\text{Res}(\Psi_n, \Psi_m)| = \begin{cases} p^{\frac{\phi(m)}{2}} & (m | n \text{ かつ } \frac{n}{m} \text{ が素数 } p \text{ のべきになっているとき);} \\ 1 & (\text{その他}). \end{cases}$$

円分多項式の終結式の計算も [Tm, Fe, GD, Le, Lo, Lü] においてなされている。

**命題 11**

$$\text{Res}(\Phi_n, \Phi_m) = \begin{cases} p^{\frac{\phi(m)}{2}} & (m \mid n \text{ かつ } n/m \text{ が } p \text{ べきになっているとき } (p \text{ は素数})); \\ 1 & (\text{その他}). \end{cases}$$

また,  $\text{Disc}(f) = (-1)^{n(n-1)/2} \text{Res}(f, f')$  であるから, 補題5と補題7を使えば, 実円分多項式の判別式が計算できる。

**命題 12 (実円分多項式の判別式)**

$$\text{Disc}(\Psi_n(x)) = \begin{cases} 2^{(m-1)2^{m-2}-1} & (n = 2^m, m > 2 \text{ のとき}); \\ p^{\frac{mp^m - (m+1)p^{m-1} - 1}{2}} & (n = p^m \text{ かつ } n = 2p^m (p \text{ は奇素数}) \text{ のとき}); \\ \frac{n^{\frac{\phi(n)}{2}}}{\prod_{i=1}^t p_i^{\frac{\phi(n)}{2(p_i-1)}}} & (\text{その他}). \end{cases}$$

実円分多項式の判別式は Lehmer によって組合せ論的な方法でも計算されている [Le].  
 なお, 円分多項式の判別式は次のようになる (例えば [Wa]).

$$\text{Disc}(\Phi_n) = (-1)^{\phi(n)/2} \frac{n^{\phi(n)}}{\prod_{p \mid n} p^{\phi(n)/(p-1)}}.$$

**2.2. 定理2の別証明の概略**

まず,  $\theta = \zeta_n + \zeta_n^{-1}$ ,  $K = \mathbb{Q}(\theta)$ ,  $R = \mathbb{Z}[\theta]$  とする.  $R$  が整閉であることを示すために,  $R$  がデデキント環であることを示す.  $R$  がデデキント環であることは任意の極大イデアル  $P \subset R$  に対し, その局所化  $R_P := (R \setminus P)^{-1}R$  が離散付値環であることと同値である.  $p\mathbb{Z} = P \cap \mathbb{Z}$  により素数  $p$  を定める.

(i)  $p \nmid n$  のとき 命題12より, このとき実円分多項式  $\Psi_n$  の判別式は  $p$  で割り切れない. よって,  $\Psi_n$  は  $\mathbb{F}_p$  上で分離多項式であるので, 以下の補題が適用できる.

**補題 13** [Lü]  $\theta$  を代数的整数とし,  $f(x)$  を  $\theta$  の  $\mathbb{Q}$  上の最小多項式とする.  $p$  を素数とし,  $P \subset \mathbb{Z}[\theta]$  を極大イデアルで  $P \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$  を満たすものとする.  $\mu(\theta) \in P$  で次数が最小であるモニックな  $\mathbb{Z}$  係数多項式を  $\mu(x)$  とおく. このとき,  $f = \mu h + pg$  をみたす多項式  $g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$  が存在する. さらに,  $\mu, g, h$  が  $\mathbb{F}_p$  上で共通因子をもたなければ,  $\mathbb{Z}[\theta]$  の極大イデアル  $P$  による局所化は離散付値環である.

(ii)  $p \mid n$  のとき  $n = mp^e$  ( $p \nmid m, e > 0$ ) とする.  $R_P$  の極大イデアル  $PR_P$  が単項イデアルであることを示せばよい. 補題7と命題10の実分多項式の終結式の値を用いることで,  $\Psi_n(x) = \Psi_m(x)^{\phi(p^e)} + pg(x)$  を満たす  $\mathbb{Z}$  係数の多項式  $g(x)$  が存在し,  $g(\theta)$  が  $R$  の単元であることが示される.  $\varepsilon = -g(\theta)^{-1} \in R$  とおくと,

$$p = \Psi_m(\theta)^{\phi(p^e)} \varepsilon \in R \tag{1}$$

である.  $\nu(x)$  を  $\theta + P$  の  $(\mathbb{Z} + P)/P \cong \mathbb{F}_p$  上の最小多項式とすると,  $\nu(x)$  は  $\Psi_n(x)$  を  $\mathbb{F}_p$  上の多項式として割り切る. よって,  $\nu(x)$  は  $\Psi_m(x)$  を割り切るので,

$$\Psi_m(x) = \nu(x)H(x) + pG(x) \tag{2}$$



を満たす  $\mathbb{Z}$  係数多項式  $H(x), G(x)$  が存在する. (1) に (2) を代入し展開することで,  $p = \nu(\theta)\alpha_1 + p^{\phi(p^e)}\beta_1$  を満たす  $R$  の元  $\alpha_1, \beta_1$  がとれる. (2) の右辺の  $p$  に同式左辺の  $p$  を代入することを繰り返せば, 任意の正整数  $i$  に対して

$$p = \nu(\theta)\alpha_i + p^{\phi(p^e)^i}\beta_i$$

を満たす  $\alpha_i, \beta_i$  の存在がわかる. ベキ零根基はすべての素イデアルの共通部分に等しいので, 剰余環  $R_P/\nu(\theta)R_P$  のただ一つの素イデアル  $PR_P/\nu(\theta)R_P$  は  $R_P/\nu(\theta)R_P$  のベキ零根基である. よって,  $p^N \in \nu(\theta)L$  をみたす正の整数  $N$  が存在する.  $\phi(p^e) \geq 2$  であったので  $\phi(p^e)^i \geq N$  となる  $i$  がある. よって,  $p = \nu(\theta)\alpha_i + p^{\phi(p^e)^i}\beta_i \in \nu(\theta)L$  であるから,

$$PR_P = pR_P + \nu(\theta)R_P = \nu(\theta)R_P$$

である.

注 14 (円分体の最大実部分体の判別式) 定理 2 より,  $\{1, \dots, \zeta_n^{\phi(n)/2-1}\}$  は  $\mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})$  の整数環の  $\mathbb{Z}$  上の基底であるから,  $d(\mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})) = \text{Disc}(\Psi_n)$  である.

## 参考文献

- [Tm] Apostol, Tom M. Resultants of cyclotomic polynomials. Proc. Amer. Math. Soc. 24 (1970) 457–462.
- [Fe] Diederichsen, Fritz-Erdmann. Über die Ausreduktion ganzzahliger Gruppendarstellungen bei arithmetischer Äquivalenz. (German) Abh. Math. Sem. Hansischen Univ. 13, (1940). 357–412.
- [GD] Dresden, Gregory. Resultants of cyclotomic polynomials. Rocky Mountain J. Math. 42 (2012), no. 5, 1461–1469.
- [Sa] Jeong, Sangtae. Resultants of cyclotomic polynomials over  $\mathbb{F}_q[T]$  and applications. Commun. Korean Math. Soc. 28 (2013), no. 1, 25–38.
- [Le] Lehmer, D. H. An extended theory of Lucas’ functions. Ann. of Math. (2) 31 (1930), no. 3, 419–448.
- [Li] Liang, Joseph J. On the integral basis of the maximal real subfield of a cyclotomic field. J. Reine Angew. Math. 286/287 (1976), 223–226.
- [Lo] Louboutin, Stéphane. Resultants of cyclotomic polynomials. Publ. Math. Debrecen 50 (1997), no. 1-2, 75–77.
- [Lü] Lüneburg, Heinz. Resultanten von Kreisteilungspolynomen. (German) Arch. Math. (Basel) 42 (1984), no. 2, 139–144.
- [Wa] Washington, Lawrence C. Introduction to cyclotomic fields. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 83. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [YY] Yamagata, Koji and Yamagishi, Masakazu. On the ring of integers of real cyclotomic fields. (投稿中).
- [Y13] Yamagishi, Masakazu. A note on Chebyshev polynomials, cyclotomic polynomials and twin primes, Journal of Number Theory 133 (2013) 2455–2463.
- [Y15] Yamagishi, Masakazu. Resultants of Chebyshev Polynomials: The First, Second, Third, and Fourth Kinds. Canad. Math. Bull. 58 (2015), no. 2, 423–431.

# 行列戸田積と三角圏

百瀬 康弘\*

Yasuhiro Momose

信州大学大学院 総合工学系研究科

本研究は新海健一郎氏 (信州大学) との共同研究に基づく結果である.

戸田積は本来, 代数的位相幾何学の分野においてホモトピー集合の計算をする為に用いられてきた. 行列戸田積は Barratt によって戸田積が一般化されたものである. そして, Hardie–Kamps–Marcum [2] は行列戸田積を基点付き位相空間の圏上から 0-対象を持つ 2-圏上へ以下のような 2-射の集合として拡張した.

**定義 1.**  $\mathcal{C}$  が 2-圏とは以下を満たすものをいう.

1.  $\mathcal{C}$  は圏である.
2.  $\mathcal{C}$  の対象  $x, y$  に対して,  $\text{Ob}(\mathcal{C}(x, y)) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$  である圏  $\mathcal{C}(x, y)$  をもつ.
3.  $\mathcal{C}$  の対象  $x, y, z$  に対して, 射の合成が関手  $\circ : \mathcal{C}(y, z) \times \mathcal{C}(x, y) \rightarrow \mathcal{C}(x, z)$  となり,  $1_{1_y} \circ - = 1_{\text{Mor}(\mathcal{C}(x, y))}$  かつ  $- \circ 1_{1_y} = 1_{\text{Mor}(\mathcal{C}(y, z))}$  を満たす.

$\mathcal{C}(x, y)$  の射を 2-射と呼ぶ.

**定義 2.** 2-圏  $\mathcal{C}$  が 0-対象をもつとは,  $\mathcal{C}$  の任意の対象  $x$  に対して,  $\mathcal{C}(0, x)$  と  $\mathcal{C}(x, 0)$  がそれぞれ 1 つの対象かつ 1 つの射から成る圏であるような対象  $0$  が存在するときをいう.

**定義 3.**  $\mathcal{C}$  を 0-対象をもつ 2-圏とし,  $\mathcal{C}$  上の次の図式を与える.

$$\begin{array}{ccc}
 W & \xrightarrow{f_2} & X_2 \\
 f_1 \downarrow & & \downarrow g_2 \\
 X_1 & \xrightarrow{g_1} & Y \xrightarrow{h} Z \\
 & \searrow & \nearrow \\
 & & 0
 \end{array} \tag{1}$$

また,  $\mathcal{C}$  の射  $u$  に対して  $\mathcal{A}(u) = \{ F : u \rightarrow u \mid F \text{ は可逆な 2-射} \}$  と定義するとき  $\mathcal{A}(0 : W \rightarrow Z)$  はアーベル群とする. さらに,  $U : 0 \Rightarrow h \circ g_1$  と  $S : g_1 \circ f_1 \Rightarrow g_2 \circ f_2$  と  $V : 0 \Rightarrow h \circ g_2$  を可逆な 2-射とし  $\phi = -V f_2 + h S + U f_1$  とする. このとき, 行列戸田積を以下で定義する.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} h, & g_2, & f_2 \\ g_1, & f_1 & \end{array} \right\} = \phi + \mathcal{A}(0 : X_2 \rightarrow Z) \circ f_2 + h \circ \mathcal{A}(0 : W \rightarrow Y) + \mathcal{A}(0 : X_1 \rightarrow Z) \circ f_1.$$

本研究は, (一財) 長野県科学振興会の助成を受け実施したものです.  
\*e-mail: momose@math.shinshu-u.ac.jp

一方, 基点付き位相空間の圏のホモトピー圏は三角圏であり, Muro [4] は戸田積を三角圏上へ以下のような射の集合として拡張した.

**定義 4.**  $(\mathcal{J}, \Sigma)$  を三角圏とし,  $W \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} Z$  を  $g \circ f = 0$  かつ  $h \circ g = 0$  を満たす  $\mathcal{J}$  上の図式とする. また,  $W \xrightarrow{f} X \xrightarrow{i} C_f \xrightarrow{q} \Sigma W$  を  $f$  を含む完全三角系列とし,  $a: C_f \rightarrow Y$  を  $g = a \circ i$  を満たす射,  $b: \Sigma W \rightarrow Z$  を  $h \circ a = b \circ q$  を満たす射とする. このとき, 戸田積を以下で定義する.

$$\{h, g, f\} = b + h \circ \mathcal{J}(\Sigma W, Y) + \mathcal{J}(\Sigma X, Z) \circ (\Sigma f).$$

但し,  $\mathcal{J}(A, B)$  は  $A$  から  $B$  への射全体の集合である.

$\mathcal{A}$  を加法圏とする. 2-圏の例として鎖複体の圏  $Ch(\mathcal{A})$  が挙げられるが, 基点付き位相空間の圏と同様にそのホモトピー圏  $K(\mathcal{A})$  はシフト関手と完全三角系列の類を適切に定めることにより三角圏  $(K(\mathcal{A}), \Sigma)$  となる. ([1].) 主定理では, 鎖複体の 2-圏上の行列戸田積を鎖複体のなす三角圏上のある戸田積として記述した.

**定理 5.**  $Ch(\mathcal{A})$  上で (1) の図式を与える. また, 鎖複体  $X_1$  と  $X_2$  の直和 (直積) を  $X_1 \vee X_2$  と表し,  $(-f_1 \vee f_2)\Delta: W \rightarrow X_1 \vee X_2$  を直積の普遍性により  $-f_1$  と  $f_2$  から得られた射とする. 同様に,  $\nabla(g_1 \vee g_2): X_1 \vee X_2 \rightarrow Y$  を直和の普遍性により  $g_1$  と  $g_2$  から得られた射とする. このとき,  $\mathcal{A}$  のホモトピー圏  $K(\mathcal{A})$  上の図式

$$W \xrightarrow{(-f_1 \vee f_2)\Delta} X_1 \vee X_2 \xrightarrow{\nabla(g_1 \vee g_2)} Y \xrightarrow{h} Z$$

に対して  $\nabla(g_1 \vee g_2) \circ (-f_1 \vee f_2)\Delta = 0$  かつ  $h \circ \nabla(g_1 \vee g_2) = 0$  となり, 以下が成り立つ.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} h, & g_2, & f_2 \\ & g_1, & f_1 \end{array} \right\} = \{h, \nabla(g_1 \vee g_2), (-f_1 \vee f_2)\Delta\}.$$

行列戸田積は加法圏を調べる道具となるが, 今後どのような加法圏を調べるかが重要となる. 去年の講演で扱った擬スキームイドに対して [3] で単体的複体との関係が示された. それらからスキームイド代数や Stanley-Reisner 環が構成されるが, その上の加群の圏に対して行列戸田積を適用し組合せ論的性質を研究するのが今後の課題である.

## 参考文献

- [1] M. Banagl. *Topological invariants of stratified spaces*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin, 2007.
- [2] K. A. Hardie, K. H. Kamps, and H. J. Marcum. A categorical approach to matrix Toda brackets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347(12):4625–4649, 1995.
- [3] Katsuhiko Kuribayashi and Yasuhiro Momose. On Mitchell’s embedding theorem for a quasi-schemoid. arXiv:1507.01745v2 math. CT.
- [4] Fernando Muro. A triangulated category without models. arXiv:0703311v1 math. KT.

# Deformation of algebraic cycle classes

Ryomei Iwasa

ryomei@ms.u-tokyo.ac.jp

December 27, 2015

## Contents

1	Grothendieck's variational Hodge conjecture	1
2	The generalized variational Hodge conjecture	2
3	Infinitesimal deformation	2
4	Formal deformation	4

## 1 Grothendieck's variational Hodge conjecture

Let  $S$  be a smooth quasi-projective scheme over a field  $k$  of characteristic zero, and  $\pi: X \rightarrow S$  a smooth projective morphism. Fix a point  $s \in S$ , and set  $X_s := X \times_S \{s\}$ .

In his thought-provoking paper [8] in 1966, Grothendieck formulated a conjecture now we call the Variational Hodge Conjecture (VHC), that predicts when an algebraic cycle class on  $X_s$  lifts to a one on  $X$  in terms of the cycle map

$$\mathrm{cl}: \mathrm{CH}^p(X_s) \rightarrow H_{\mathrm{dR}}^{2p}(X_s/\kappa(s)) = (R^{2p}\pi_*\Omega_{X/S}^\bullet)_s \otimes \kappa(s). \quad (1.1)$$

**Variational Hodge Conjecture.** For  $\xi_s \in \mathrm{CH}^p(X_s)_{\mathbb{Q}}$ , the following are equivalent:

- (i)  $\mathrm{cl}(\xi_s)$  lifts to a flat section of  $R^{2p}\pi_*\Omega_{X/S}^\bullet$ , i.e. a global section killed by the Gauss-Manin connection  $\nabla$ .
- (ii) There exists a rational cycle class  $\xi \in \mathrm{CH}^p(X)_{\mathbb{Q}}$  such that  $\mathrm{cl}(\xi|_{X_s}) = \mathrm{cl}(\xi_s)$ .

This conjecture is so powerful that, for example, the VHC for abelian schemes  $X/S$  implies the Hodge Conjecture for abelian varieties [1].

However, it is probably not possible to deduce the Hodge Conjecture in general from the VHC. The problem is that we can hardly find such a variety in a smooth family that algebraic cycles on it can be controlled. If we can describe

a condition when cycle classes on a degenerate fiber lift, this must be helpful, because sometimes it is easier to construct cycles on a degenerate fiber.

In the next section, we propose such a condition, following Grothendieck's VHC.

## 2 The generalized variational Hodge conjecture

Let  $X$  be a smooth quasi-projective scheme over a field  $k$  of characteristic zero, and  $Y$  a projective scheme over  $k$  with a closed immersion  $Y \rightarrow X$ .

We want to describe a condition when cycle classes on  $Y$  lift to ones on  $X$ .

Since the cycle map (1.1) does not work for singular varieties, we replace it by the *Chern character*

$$\text{ch}: K_0(Y) \rightarrow \bigoplus_p H_{\text{dR}}^{2p}(Y/k). \quad (2.1)$$

The target of (2.1) is the de Rham cohomology of  $Y$  [9] defined to be

$$H_{\text{dR}}^q(Y/k) := H^q(\hat{X}, \hat{\Omega}_{X/k}^\bullet), \quad (2.2)$$

where each  $\hat{\phantom{x}}$  is the formal completion along  $Y$ . This does not depend on the embedding  $Y \hookrightarrow X$  [9, Ch. II, Theorem 1.4].

The Chern character ([?]) is defined by the composite

$$K_r(Y) \longrightarrow \text{HN}_r(Y) \longrightarrow \text{HP}_r(Y) \simeq \bigoplus_p H_{\text{dR}}^{2p-r}(Y/k). \quad (2.3)$$

Here HN (resp. HP) is the negative (resp. periodic) cyclic homology. The first map is the Goodwillie's Chern character (for the definition see [3, 13]), the second map is the canonical one, and the last isomorphism is by the Feigin-Tsygan Theorem [5].

We conjecture:

**Conjecture A.** *For  $\xi_s \in K_0(Y)_{\mathbb{Q}}$ , the following are equivalent:*

- (i)  $\text{ch}(\xi_s) \in \bigoplus_p H_{\text{dR}}^{2p}(Y/k)$  lifts to  $\bigoplus_p H_{\text{dR}}^{2p}(X/k)$ .
- (ii) There exists  $\xi \in K_0(X)_{\mathbb{Q}}$  such that  $\text{ch}(\xi|_Y) = \text{ch}(\xi_s)$ .

In case  $Y$  is a fiber of a smooth family  $X \rightarrow S$  as in §1, we can show that the VHC is equivalent to Conjecture A, by Deligne's théorème de la partie fixe [4, §4.1].

## 3 Infinitesimal deformation

We formulate an infinitesimal version of Conjecture A.

Let  $k$  be a field of characteristic zero,  $S := \text{Spec } k[[t]]$ ,  $X$  a finite dimensional quasi-compact regular scheme over  $k$ , and  $Y$  a proper scheme over  $k$  with a

closed immersion  $Y \rightarrow X$ . Set  $Y_n := \text{Spec } \mathcal{O}_X/I^{n+1}$ , where  $I$  is the  $\mathcal{O}_X$ -ideal defining  $Y$ .

We define the *de Rham cohomology of  $Y$*  by

$$H_{\text{dR}}^q(Y/k) := H^q(\hat{X}, \hat{\Omega}_{X/k}^\bullet), \quad (3.1)$$

where each  $\hat{\phantom{x}}$  is the formal completion along  $Y$ . Again, the definition does not depend on the embedding  $Y \hookrightarrow X$ . This is a consequence of the generalized version of the Feigin-Tsygan theorem [11].

We can also define the Chern character

$$\text{ch}: K_r(Y) \rightarrow \bigoplus_p H_{\text{dR}}^{2p-r}(Y/k) \quad (3.2)$$

as above, thanks to the generalized Feigin-Tsygan theorem.

Set

$$H_{\text{dR}}^q(\hat{X}/k) := H^q(\hat{X}, \hat{\Omega}_{X/k}^\bullet), \quad (3.3)$$

$$F^r H_{\text{dR}}^q(\hat{X}/k) := \text{image}(H^q(\hat{X}, \hat{\Omega}_{X/k}^{\geq r}) \rightarrow H^q(\hat{X}, \hat{\Omega}_{X/k}^\bullet)). \quad (3.4)$$

Consider the diagram

$$\begin{array}{ccccc} K_r(X) & \longrightarrow & \varprojlim_n K_r(Y_n) & \longrightarrow & K_r(Y) \\ & & & & \downarrow \text{ch} \\ \bigoplus_p H_{\text{dR}}^{2p-r}(\hat{X}/k) & \xrightarrow[\simeq]{\Phi} & & \longrightarrow & \bigoplus_p H_{\text{dR}}^{2p-r}(Y/k). \end{array} \quad (3.5)$$

We conjecture:

**Conjecture B.** *Assume  $Y \rightarrow X$  is the special fiber of a projective family  $X \rightarrow S := \text{Spec } k[[t_1, \dots, t_m]]$ , i.e.  $Y = X \times_S \text{Spec } k$ . Then, for  $\xi_0 \in K_0(Y)_\mathbb{Q}$ , the following are equivalent:*

- (i)  $\Phi^{-1}(\text{ch}(\xi_0))$  is in  $\bigoplus_p F^p H_{\text{dR}}^{2p}(\hat{X}/k)$ .
- (ii) There exists  $\tilde{\xi} \in (\varprojlim_n K_0(Y_n))_\mathbb{Q}$  such that  $\text{ch}(\tilde{\xi}|_Y) = \text{ch}(\xi_0)$ .
- (iii) There exists  $\xi \in K_0(X)_\mathbb{Q}$  such that  $\text{ch}(\xi|_Y) = \text{ch}(\xi_0)$ .

In case  $X \rightarrow S$  is smooth, Conjecture B is equivalent to the VHC [2, Appendix A].

In the general case (at least in the case of semistable degeneration), we still have strong relations between Conjecture A and Conjecture B [10, Proposition 3.2.1].

## 4 Formal deformation

We use the notation in §3.

**Theorem 4.1.** *Suppose that  $k$  is algebraic over  $\mathbb{Q}$ . Then, for  $\xi_0 \in K_r(Y)$ , the following are equivalent:*

(i)  $\Phi^{-1}(\text{ch}(\xi_0))$  is in  $\bigoplus_p F^p H_{\text{dR}}^{2p-r}(\hat{X}/k)$ .

(ii) There exists  $\tilde{\xi} \in \varprojlim K_r(Y_n)$  such that  $\text{ch}(\tilde{\xi}|_Y) = \text{ch}(\xi_0)$ .

In particular, (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) of Conjecture B holds under the assumption that  $k$  is algebraic over  $\mathbb{Q}$ .

**Remark 4.2.** *In case  $Y \rightarrow X$  is the special fiber of a smooth projective family  $X \rightarrow S := \text{Spec } k[[t_1, \dots, t_m]]$ , Griffith-Green [7] and Morrow [12] proved the theorem, and Bloch-Esnault-Kerz [2] did for general fields  $k$  under the Chow-Künneth assumption. The general case was proved in [10].*

*Proof.* Consider the commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc} K_r(Y_n) & \longrightarrow & K_r(Y) & \longrightarrow & K_{r-1}(Y_n, Y) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \text{HN}_r(Y_n) & \longrightarrow & \text{HN}_r(Y) & \longrightarrow & \text{HN}_{r-1}(Y_n, Y) \end{array} \quad (4.1)$$

with exact rows, where the vertical maps are the Chern characters (3.2). The right vertical map is an isomorphism by the theorem of Goodwillie [6]. By the pro HKR theorem proved by Morrow in [11], we have a pro-isomorphism

$$\varprojlim_n \text{HN}_r(Y_n) \simeq \bigoplus_p H^{2p-r}(\hat{X}, \hat{\Omega}_{X/k}^{\geq p}). \quad (4.2)$$

By taking limits of (4.1) and using (4.2), we have a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc} \varprojlim_n K_r(Y_n) & \longrightarrow & K_r(Y) & \longrightarrow & \varprojlim_n K_{r-1}(Y_n, Y) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \varprojlim_n \text{HN}_r(Y_n) & \longrightarrow & \text{HN}_r(Y) & \longrightarrow & \varprojlim_n \text{HN}_{r-1}(Y_n, Y) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow & \nearrow \text{ch} & \\ \bigoplus_p H^{2p-r}(\hat{X}, \hat{\Omega}_{X/k}^{\geq p}) & \longrightarrow & \bigoplus_p H_{\text{dR}}^{2p-r}(Y/k) & & \end{array} \quad (4.3)$$

By our assumption that  $Y$  is proper, we can verify some Mittag-Leffer conditions and show that the upper and middle rows are exact.

Recall that we have an isomorphism

$$\text{HP}_r(Y) \simeq \bigoplus_p H_{\text{dR}}^{2p-r}(Y/k) \quad (4.4)$$



by the generalized Feigin-Tsygan theorem. By a simple diagram chase, it remains to show the following:

**Lemma 4.3.** *Every  $c \in \ker(\mathrm{HN}_r(Y) \rightarrow \mathrm{HP}_r(Y))$  lifts to  $K_r(Y)$ .*

This is proved by using the fact that  $K^{\mathrm{inf}} := \mathrm{hofib}(K \rightarrow \mathrm{HN})$  satisfies cdh-descent ([3]). For the detail of the proof, see [10]  $\square$

## References

- [1] S. Abdulali, *Algebraic cycles in families of abelian varieties*, Canad. J. Math. 46 (1994), no. 6, 1121-1134.
- [2] S. Bloch, H. Esnault, M. Kerz, *Deformation of algebraic cycle classes in characteristic zero*, Algebr. Geom. 1 (2014), no. 3, 290-310.
- [3] G. Cortiñas, C. Haesemeyer, M. Schlichting, C. Weibel, *Cyclic homology, cdh-cohomology and negative K-theory*, Ann. of Math. (2) 167 (2008), no. 2, 549-573.
- [4] P. Deligne, *Théorie de Hodge II*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 40 (1971), 5-57.
- [5] B. Feigin, B. Tsygan, *Additive K-theory*, Lecture Notes in Math., vol. 1289, Springer-Verlag, (1987), 97-209.
- [6] T. Goodwillie, *Relative algebraic K-theory and cyclic homology*, Ann. of Math. (2) 124 (1986), no. 2, 347-402.
- [7] M. Green, P. Griffiths, *Formal deformation of Chow groups*, The legacy of Niels Henrik Abel, 467-509, Springer, Berlin (2004).
- [8] A. Grothendieck, *On the de Rham cohomology of algebraic varieties*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 29 (1966), 95-103.
- [9] R. Hartshorne, *On the de Rham cohomology of algebraic varieties*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 45 (1975), 5-99.
- [10] R. Iwasa, *Deformation of algebraic cycle classes on a degenerate fiber*, Preprint.
- [11] M. Morrow, *Pro unitality and pro excision in algebraic K-theory and cyclic homology*, to appear.
- [12] M. Morrow, *A case of the deformational Hodge conjecture via a pro Hochschild-Kostant-Rosenberg theorem*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 352 (2014), no. 3, 173-177.
- [13] C. Weibel, *Nil K-theory maps to cyclic homology*, Trans. Amer. Math. Soc. 303 (1987), no. 2, 541-558.

# 有限群の整数値指標と necklace ring の 有限の台を持つ元に関する考察\*

九州大学大学院数理学府  
田村 朋之 (Tomoyuki Tamura)

## 概要

有限群の複素数体上の有限次元表現は、その交代テンソル積表現の指標の母関数を通じ N.Metropolis(1983) が導入した necklace ring の元を一つ定める。本講演では表現の指標が整数値であることと、対応した元が有限の台をもつことと同値性を述べ、特に交代テンソル積表現の指標の母関数が有限積で記述出来ることを説明する。またこのような特徴を持つ necklace ring の元の乗法について述べる。

## 1 導入

### 1.1 交代テンソル積表現の指標の母関数の計算

$G$  を有限群とする。  $G$  の  $\mathbb{C}$  上有限次元表現  $\rho: G \rightarrow GL(V)$  が与えられた時、任意の非負整数  $i = 0, 1, 2, \dots$  に対し交代テンソル積表現  $\Lambda^i \rho: G \rightarrow GL(\Lambda^i(V))$  が任意の  $g \in G$  と  $v_1, \dots, v_i \in V$  に対し次で定まる。

$$\Lambda^i \rho(g)(v_1 \wedge \dots \wedge v_i) := (\rho(g)v_1) \wedge \dots \wedge (\rho(g)v_i).$$

この交代テンソル積表現の指標の計算方法として、Grothendieck が 1956 年に考案した  $\lambda$ -ring と呼ばれる可換環の構造を用いる手法が存在する。  $G$  の類関数全体の集合を  $CF(G)$  とすると、  $CF(G)$  には値による加法・乗法・スカラーにより  $\mathbb{Q}$ -algebra の構造を持ち、さらに次の Adams operation を持つような  $\lambda$ -ring の構造が一意に定義される。

$$\psi^n(f)(g) := f(g^n) \tag{1.1}$$

但し  $f: G \rightarrow \mathbb{C}, g \in G, n$  は自然数とする。そして  $\chi$  を  $G$  の表現  $V$  の指標とすると、交代テンソル積表現  $\Lambda^i(V)$  の指標は  $\chi$  を  $\lambda$ -ring としての  $\lambda$ -operation によって移した像  $\lambda^i(\chi)$  であることが知られている ([Knu] p.84)。

有限群の表現論において表現の指標を知ることはその既約分解、つまり表現の構造を知ることと同値である。さらに交代テンソル積表現の構造を知ることは、群の表現環  $R(G)$  の  $\lambda$ -ring としての構造を知る上でも重要であると思われる。

交代テンソル積表現の指標をどのようにして計算するか、という問題は Knutson が [Knu] にて提起した。 Boorman[Bo] が 1975 年に対称群で、 Bryden[Bry] が 1999 年にワイル群  $W(B_n), W(D_n)$  で、それぞれ  $\lambda$ -ring

---

本稿は北海道大学における第 12 回数学総合若手研究会のテクニカルレポートである。

Keyword: finite group; representation theory; character theory;  $\lambda$ -ring; exterior powers representations; necklace ring

としての生成元を述べている. また, 1995 年に Osse [Os] がコンパクト連結リー群の場合における表現間の  $\lambda$ -ring としての特徴づけを行っている. しかし Yau は [Yau] p.171 にて, Osse のコンパクト連結リー群における特徴づけの有限群の場合が未解決であると述べている. このように, 交代テンソル積表現の指標を求める統一的な解法は未だ全容が明かされていないのではないかと考えられる.

## 1.2 母関数と necklace ring を用いた手段

講演者はこの指標を調べる為に, その母関数

$$\lambda_t(\chi) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i(\chi)t^i, \quad \lambda_t(\chi)(g) := \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i(\chi)(g)t^i \quad (g \in G)$$

に注目した. この母関数について交代テンソル積表現の性質から次の表記が知られている.  $m = \dim_{\mathbb{C}} V$  とすると,

$$\lambda_t(\chi)(g) = \det(I_m + \rho(g)t) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} -\frac{\chi(g^i)}{i}(-t)^i\right) \quad (g \in G)$$

が成り立つ. 但し, 行列  $I_m$  はサイズ  $m$  の単位行列である. これは定数項が 1 である冪級数の一つである.

**Example 1.1.** 有限群  $G$  が有限集合  $X$  に作用しているとする. これによって定義される置換表現の指標を  $\chi$  とおくと, 任意の  $g \in G$  に対し

$$\chi(g) = |\text{Fix}(g)|, \quad \text{Fix}(g) := \{x \in X \mid gx = x \text{ for any } g \in G\}$$

となることが知られているので,

$$\lambda_t(\chi)(g) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} -\frac{|\text{Fix}(g^i)|}{i}(-t)^i\right)$$

となる.

講演者はこれまで交代テンソル積表現の指標を, Knutson の結果を下地とし, 1983 年に N.Metropolis と Rota によって定義された necklace ring を用いて研究してきた.

1983 年, N.Metropolis と Rota は [Met] において, Witt ring の解析を目的とし necklace ring の概念を導入した.  $R$  を可換環としたとき,  $R$  上 necklace ring  $Nr(R)$  は次のように定義される. 集合としては  $R^{\mathbb{N}}$  であり, これは  $R$  の元の無限列の全体である. 但し本稿では便宜上,  $\mathbb{N}$  から  $R$  への写像全体の集合とする. そして  $\alpha, \beta \in Nr(R)$  としたとき, 加法 “ $+_{Nr}$ ” と乗法 “ $\cdot_{Nr}$ ” は次のように定義される.

$$\alpha +_{Nr} \beta(n) := \alpha(n) + \beta(n), \quad \alpha \cdot_{Nr} \beta(n) := \sum_{[i,j]=n} (i,j)\alpha(i)\beta(j). \quad (1.2)$$

但し  $n$  は自然数とする. さらに任意の自然数  $i, j$  に対し  $[i, j]$  はその最小公倍数を,  $(i, j)$  はその最大公約数を表すとする.

この necklace ring と有限群の表現の指標を次のように結びつける. まず, 任意の可換環  $R$  に対し universal  $\lambda$ -ring を  $\Lambda(R)$  とする. この集合は加法 “ $+_{\Lambda}$ ” と乗法 “ $\cdot_{\Lambda}$ ” が定義された  $\lambda$ -ring の一つで, Grothendieck によって導入された. さらに  $R$  が binomial ring (Adams operations が全て恒等写像となるような  $\lambda$ -ring の構

造を持つもの) であるとき, 任意の  $f \in \Lambda(R)$  に対し,  $\alpha \in Nr(R)$  が唯一つ存在し,

$$f(t) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - (-t)^i)^{\alpha(i)} \quad (1.3)$$

と書くことができる ([Yau] Section 5.6). この全単射の対応を  $E_{Nr} : \Lambda(R) \rightarrow Nr(R)$  と記す.

この  $f(t)$  として交代テンソル積表現の指標の母関数  $\lambda_t(\chi) \in \Lambda(\text{Map}(G, \mathbb{C}))$  とすると, 交代テンソル積表現の指標を求める問題は  $E_{Nr}(\lambda_t(\chi)) \in Nr(\text{Map}(G, \mathbb{C}))$  を求める問題へと変わる.

講演者はこの指標  $\chi$  が整数値指標, つまり任意の  $g \in G$  に対し  $\chi(g)$  が整数であるような指標に対し 2 種類の結果を得た. 本稿の構成は次の第 2 章で本稿の主結果及び証明の概略を述べるための準備を行う. そして第 3 章と第 4 章にて, 次の結果を述べる.

- $G$  を有限群,  $e$  を  $G$  の exponent (全ての元の位数の最小公倍数),  $\chi$  を仮想指標 (既約指標の整数和で記述される指標),  $\alpha = E_{Nr}(\lambda_t(\chi))$  とする. 第 3 章では  $\chi$  が整数値であること,  $\lambda^i(\chi)$  も全て整数値であること,  $\alpha(n)(g)$  が全て整数であることを示す. さらに,  $n \nmid e$  ならば  $\alpha(n) = 0$  となることと同値であることを示す (Theorem 3.2). 特に  $\alpha$  が有限の台を持つ ( $|\{n \mid \alpha(n) \neq 0\}| < \infty$ ) ことが示され, 母関数  $\lambda_t(\chi)$  が有限積の形で記述出来ることを示す.

さらに,  $g \in G$  に関する母関数  $\lambda_t(\chi)(g)$  がより少ない数の積で記述できる場合があることを示す (Theorem 3.3).

- 第 4 章では, 有限群  $G_1 \times G_2$  の場合について考える. まず,  $G_1$  の仮想指標  $\chi_1$  と  $G_2$  の仮想指標  $\chi_2$  から定義される  $G_1 \times G_2$  の仮想指標  $\chi_1 \chi_2 (\chi_1 \chi_2((g_1, g_2)) := \chi_1(g_1) \chi_2(g_2))$  において  $\lambda_t(\chi_1 \chi_2)((g_1, g_2)) = \lambda_t(\chi_1)(g_1) \cdot \lambda_t(\chi_2)(g_2)$  と分解されることを示す (Proposition 4.1). さらにこのとき  $\chi_1, \chi_2$  が整数値指標であるとする, 両辺を写像  $E_{Nr}$  で移すことで, 左辺を求めるために有限の台を持つ necklace ring の元の積がどのように表されるかという問題に移る. これの表し方の一つとして, 講演者は Frobenius operation ([Met]) を用いる新たな形を  $\mathbb{Q}$ -algebra である可換環  $R$  の視点より導いた (Proposition 4.5).

なお, 本稿においては扱う有限群の表現は全て複素数体上の有限次元表現とし, 可換環については単位元の存在を仮定する.

## 2 準備

この章では, 主結果を述べるに必要な記号等を定義する. 但し, 本稿では necklace ring と ghost ring やその operation のみに焦点を絞る. 有限群の表現や  $\lambda$ -ring については [Knu], [Yau] を参照されたい.

### 2.1 necklace ring と ghost ring

この節では necklace ring や ghost ring の定義を行う. 詳しくは [Yau] Section 2, もしくは Section 5.6 等を参照されたい.  $R$  を単位元を持つ可換環とする.

$\Lambda(R)$  を定数項が単位元であるような  $R$  の元を係数とする 1 変数巾級数の全体と定義する.  $\Lambda(R)$  は巾級数の乗法を加法とするような  $\lambda$ -ring の構造が定義される. また,  $R$  が  $\lambda$ -ring ならば写像  $\lambda_t : R \rightarrow \Lambda(R)$  が  $\lambda$ -homomorphism (環準同型であり  $\lambda$ -operation を交換する写像) であることに注意したい.

$R$  上の necklace ring  $Nr(R)$  は §1.2 で述べたように, 写像  $\mathbb{N} \rightarrow R$  の全体に (1.2) のような演算を以て可換環とみなしたものである.  $R$  上の ghost ring  $Gh(R)$  は集合として  $Nr(R)$  に等しく, component wise による

演算で可換環とみなしたものである.

写像  $\phi : Nr(R) \rightarrow Gh(R)$  を,  $\phi(\alpha)(n) = \sum_{d|n} d\alpha(d)$  と定義する. 但し,  $\alpha \in Nr(R)$ ,  $n$  を自然数とする. このとき  $R$  が  $\mathbb{Q}$ -algebra ならば, メビウスの反転公式を用いると任意の自然数  $n$  に対し

$$\alpha(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \phi(\alpha)(d)$$

を得る. 但し, 写像  $\mu$  はメビウス関数である. 写像  $z : \Lambda(R) \rightarrow Gh(R)$  を,  $\sum_{i=1}^{\infty} z(f)(i)(-t)^i = -tf'f^{-1}$  を満たすように定義する ( $f \in \Lambda(R)$ ).  $R$  が  $\lambda$ -ring であるとき, Adams operation の定義から任意の  $r \in R$  に対し

$$z \circ \lambda_t(r)(n) = \psi^n(r)$$

が成り立つ. 写像  $z, \phi$  は共に環準同型写像であり,  $\mathbb{Q}$ -algebra ならば全単射である.

$R$  が binomial ring であるとは  $\mathbb{Z}$ -torsion-free であって, Adams operation  $\psi^n$  が全て恒等写像となるような  $\lambda$ -ring の構造を持つものと定義する. このとき, 任意の  $r \in R$  に対し, 巾級数  $(1+t)^r = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{r}{i} t^i$  が定義可能となる. 整数全体の集合  $\mathbb{Z}$  や  $\mathbb{Q}$ -algebra は binomial ring である. またこのとき, 任意の  $f \in \Lambda(R)$  に対し (1.3) を満たす  $\alpha \in Nr(R)$  がただ一つ存在する. この対応を写像  $E_{Nr} : \Lambda(R) \rightarrow Nr(R)$  と定義する. これは全単射であり,  $z = \phi \circ E_{Nr}$  が成り立つ. 加え, 環同型写像である.

## 2.2 Truncated operations と Frobenius operations

次に, necklace ring と ghost ring に定義される Truncated operations と Frobenius operations について述べる.

**Definition 2.1.** 任意の自然数  $r$  に対し,  $r$ -th Truncated operation

$$T_r : Nr(R) \rightarrow Nr(R), \quad T_r : Gh(R) \rightarrow Gh(R)$$

を次のように定義する. 任意の  $\alpha \in Nr(R), \beta \in Gh(R)$ , 自然数  $n$  に対し,

$$T_r(\alpha)(n) := \begin{cases} \alpha(n) & (\text{if } r \mid n) \\ 0 & (\text{if } r \nmid n) \end{cases}, \quad T_r(\beta)(n) := \beta((n, r)).$$

Truncated operation は環準同型写像であるほか,  $T_r \circ T_s = T_{(r,s)}$ ,  $T_r \circ \phi = \phi \circ T_r$  が成り立つ. 本稿における有限の台をもつ necklace ring の元とは  $\bigcup_{r=1}^{\infty} \text{Im}(T_r)$  の元として実現されることを特に注意したい.

次に Frobenius operation について述べる.

**Definition 2.2.** 任意の自然数  $r$  に対し,  $r$ -th Frobenius operation

$$F_r : Nr(R) \rightarrow Nr(R), \quad F_r : Gh(R) \rightarrow Gh(R)$$

を次のように定義する. 任意の  $\alpha \in Nr(R), \beta \in Gh(R)$ , 自然数  $n$  に対し,

$$F_r(\alpha)(n) := \sum_{[j,r]=nr} \frac{j}{n} \alpha(j), \quad F_r(\beta)(n) := \alpha(nr).$$

necklace ring における Frobenius operation は N.Metropolis [Met] によって, necklace ring と合わせて紹介されている. 他方, ghost ring における Frobenius operation は  $\lambda$ -ring の理論における, 集合  $R^{\mathbb{N}}$  に標準的に備わる  $\psi$ -ring の operator と同じで, Adams operation から  $\lambda$ -ring の構造を定める為に用いられる. Frobenius operation も同様に環準同型写像であり,  $F_r \circ F_s = F_{rs}, \phi \circ F_r = F_r \circ \phi$  が成り立つ. 証明は [Var] を参照されたい.

### 3 主結果その 1 : 整数値指標と necklace ring

$G$  を有限群,  $CF(G)$  を  $G$  の類関数全体とする. §1.1 でも述べたが,  $CF(G)$  には値による加法・乗法・スカラーにより  $\mathbb{Q}$ -algebra の構造を持ち, さらに (1.1) を満たす Adams operation を持つような  $\lambda$ -ring の構造が一意に定義される. そして  $\chi$  を  $G$  の表現  $V$  の指標とすると, 交代テンソル積表現の指標は  $\lambda^i(\chi)$  である.

この章ではこれまでの準備を用いて, 本稿の主結果を述べる. まず, 主結果の主となる整数値指標について定義する.

**Definition 3.1.**  $\chi \in CF(G)$  は  $G$  の既約指標の整数係数和であるとき, 仮想指標 (virtual character) であるという. 仮想指標  $\chi$  が整数値指標であるとは, 任意の  $g \in G$  に対し  $\chi(g)$  が整数であるとする.

以下,  $e$  を  $G$  の exponent (全ての元の位数の最小公倍数),  $\chi$  を  $G$  の仮想指標,  $\alpha = E_{Nr}(\lambda_t(\chi))$  とする.

**Theorem 3.2** ([Ta]). 次の 3 条件は同値である.

- (1)  $\chi$  は整数値指標である.
- (2) 任意の自然数  $i$  に対し  $\lambda^i(\chi)$  は整数値指標である.
- (3) 任意の自然数  $n$  と  $g \in G$  に対し  $\alpha(n)(g)$  は整数である.

ここで,  $\alpha(n) \in CF(G)$  は必ずしも仮想指標ではないことに注意したい. さらに次の 2 条件は同値である.

- (1)  $\chi$  は整数値指標である.
- (4)  $\alpha \in \text{Im}(T_e)$  が成り立つ.

特に  $\chi$  が整数値指標ならば  $n \nmid e$  なる自然数  $n$  に対し  $\alpha(n) = 0$  となるので, 次が成り立つ.

$$\lambda_t(\chi) = \prod_{d|e} (1 - (-t)^d)^{\alpha(d)}$$

これにより, 整数値の指標が交代テンソル積表現の指標を通じて有限の台を持つ necklace ring の元と対応されることがわかった.

証明の概略は, 整数値指標の Adams operation による特徴づけである. つまり,  $\chi$  が整数値指標であることと  $\psi^k(\chi) = \psi^{(k,e)}(\chi)$  が任意の自然数  $k$  に対し成り立つことが同値であることを用いる ([Ta]). (1), (2), (3) は  $\lambda$ -ring の Adams operation が  $\lambda$ -homomorphism であることと  $\mathbb{Z}$  が binomial ring である事実を活用する. (4) については整数値指標の特徴づけから  $\phi(\alpha) = z \circ \lambda_t(\chi) \in \text{Im}(T_e)$  であることを用いれば, Truncated operations が写像  $\phi$  で保存されること ( $T_r \circ \phi = \phi \circ T_r$ ) より示すことができる.

$g \in G$  に関する母関数  $\lambda_t(\chi)(g)$  については定義域を部分群  $H$  に制限する写像  $\text{Res}_H^G : CF(G) \rightarrow CF(H)$  が  $\lambda$ -homomorphism であることを用いると次が成り立つ.

**Theorem 3.3** ([Ta]). 仮想指標  $\chi$  がある  $g \in G$  より生成される巡回群  $\langle g \rangle$  上で整数値であるとする、任意の自然数  $n$  に対し  $\alpha(n)(g) \in \mathbb{Z}$  が成り立ち、 $E_{Nr}(\lambda_t(\chi)(g)) \in \text{Im}(T_{O(g)})$  が成り立つ。但し  $O(g) \geq 1$  は  $g \in G$  の位数である。特に次の式を得る。

$$\lambda_t(\chi)(g) = \prod_{d|O(g)} (1 - (-t)^d)^{\alpha(d)(g)}.$$

証明の方針は  $G = \langle g \rangle, \text{Res}_{\langle g \rangle}^G(\chi)$  として Theorem 3.2 を用いる。巡回群  $\langle g \rangle$  の exponent は  $O(g)$  である。

**Example 3.4.**  $n$  次対称群が集合  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  に自然に作用している場合を考える。この置換表現の指標を  $\chi$  とおくと、

$$\lambda_t(\chi)(\sigma) = \prod_i (1 - (-t)^{|\sigma_i|})$$

を得る。但し、 $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_j$  と、互いに素な巡回置換の積に分解しているものとする。そして  $|\sigma_i|$  は巡回置換としての長さとする。

## 4 主結果その 2 : 直積群について

最後に直積群の整数値指標と necklace ring の乗法の計算方法について考察する。まず、直積群の指標において、母関数の分解式を述べる。

**Proposition 4.1.**  $G_1, G_2$  を有限群、 $\chi_1, \chi_2$  をそれぞれ  $G_1, G_2$  の仮想指標とする。 $G_1 \times G_2$  の仮想指標  $\chi_1 \chi_2$  を  $\chi_1 \chi_2((g_1, g_2)) := \chi_1(g_1) \chi_2(g_2) (g_1 \in G_1, g_2 \in G_2)$  と定義すると、

$$\lambda_t(\chi_1 \chi_2)((g_1, g_2)) = \lambda_t(\chi_1)(g_1) \cdot \lambda_t(\chi_2)(g_2) \quad (4.1)$$

が成り立つ。

特に  $\chi_1$  が  $G_1$  の表現  $\rho_1$  の指標、 $\chi_2$  が  $G_2$  の表現  $\rho_2$  の指標とすると、 $\chi_1 \chi_2$  は直積表現  $G_1 \times G_2$  の表現  $\rho_1 \otimes \rho_2$  の指標である。

証明の方針は両辺を全単射写像  $\phi \circ E_{Nr}$  で移し、Adams operation を比較する。

直積群の交代テンソル積表現の指標の母関数はこのような形で表すことができる。ここで、式 (4.1) の両辺を写像  $E_{Nr}$  で写すと、次の式を得る。

$$E_{Nr}(\lambda_t(\chi_1 \chi_2)((g_1, g_2))) = E_{Nr}(\lambda_t(\chi_1)(g_1)) \cdot E_{Nr}(\lambda_t(\chi_2)(g_2)) \quad (4.2)$$

ここで、仮想指標  $\chi_1, \chi_2$  が整数値指標であると仮定し、(4.2) の左辺を計算したいとする。これが計算できれば、直積群  $G_1 \times G_2$  の整数値指標  $\chi_1 \chi_2$  について、交代テンソル積表現の指標の母関数を知ることができる。

このとき、(4.2) の右辺にある二つの母関数は Theorem 3.3 よりそれぞれ  $\text{Im}(T_{O(g_1)}), \text{Im}(T_{O(g_2)})$  の元の積である。この左辺の計算は necklace ring の乗法の定義に基づいて計算することができる。ここでは、Truncation operations の像に属する二つの元の積のメビウスの反転公式と Frobenius operation を用いた別の表記方法を紹介する。

この表記方法は  $CF(G)$  や  $\mathbb{C}$  のみならず  $\mathbb{Q}$ -algebra であればどのような可換環であっても成り立つ。即ち、 $R$  を  $\mathbb{Q}$ -algebra、 $\alpha, \beta \in Nr(R)$  とし、 $a, b, r$  を自然数とする。ここで、 $T_a(\alpha) \cdot_{Nr} T_b(\beta)(r)$  に対し表示を得られれば、 $R = \mathbb{C}, \alpha = E_{Nr}(\lambda_t(\chi))(g_1), \beta = E_{Nr}(\lambda_t(\chi_2))(g_2), a = O(g_1), b = O(g_2)$  とおけばよい。

まず、この計算が  $r = [a, b]$  の場合に帰着出来ることを述べる。

**Lemma 4.2.**  $T_a(\alpha) \cdot_{Nr} T_b(\beta) \in \text{Im}(T_{[a,b]})$  が成り立つ。即ち  $r \nmid [a, b]$  ならば  $T_a(\alpha) \cdot_{Nr} T_b(\beta)(r) = 0$  である。

証明は Truncated operations の性質から導くことができる。このことから、 $r \mid [a, b]$  の場合に目を向ければよいことがわかる。

**Lemma 4.3.**  $r \mid [a, b]$  とする。このとき、 $T_a(\alpha) \cdot_{Nr} T_b(\beta)(r) = T_{(a,r)}(\alpha) \cdot_{Nr} T_{(b,r)}(\beta)(r)$  が成り立つ。

証明は左辺を  $T_r$  で移せばよい。このとき特に  $[(a, r), (b, r)] = r$  が成り立つので、 $r = [a, b]$  の場合に目を向ければよいことがわかる。

**Remark 4.4.** Lemma 4.2 と Lemma 4.3 は、その証明に  $R$  が  $\mathbb{Q}$ -algebra であることを要請しないことを注意しておく。この二つはどの可換環であっても成り立つ。

ここで、 $T_a(\alpha) \cdot_{Nr} T_b(\beta)([a, b])$  に注目する。

**Proposition 4.5.**  $R$  を  $\mathbb{Q}$ -algebra とする。  $\alpha, \beta \in Nr(R)$  とし、 $a, b$  を自然数とする。  $a, b$  の素因数分解を  $a = p_1^{s_1} \dots p_k^{s_k}, b = p_1^{t_1} \dots p_k^{t_k} (s_i, t_i \geq 0)$  としたとき、

$$\begin{aligned} a_1 &= \prod_{i; s_i > t_i} p_i^{s_i}, & a_2 &= \prod_{i; s_i = t_i} p_i^{s_i}, & a_3 &= \prod_{i; s_i < t_i} p_i^{s_i}, \\ b_1 &= \prod_{i; s_i > t_i} p_i^{t_i}, & b_2 &= \prod_{i; s_i = t_i} p_i^{t_i}, & b_3 &= \prod_{i; s_i < t_i} p_i^{t_i} \end{aligned}$$

とおく。特に  $a = a_1 a_2 a_3, b = b_1 b_2 b_3$  である。このとき次が成り立つ。

$$T_a(\alpha) \cdot_{Nr} T_b(\beta)([a, b]) = \frac{1}{a_2} \sum_{d_2 | a_2} \mu\left(\frac{a_2}{d_2}\right) F_{a_1 d_2}(\alpha)(a_3) F_{d_2 b_3}(\beta)(b_1).$$

特に  $a_2 = b_2 = 1$  の時は、

$$T_a(\alpha) \cdot_{Nr} T_b(\beta)([a, b]) = F_{a_1}(\alpha)(a_3) F_{b_3}(\beta)(b_1)$$

が成り立つ。

証明の概略は、左辺を

$$\begin{aligned} \phi^{-1} \circ \phi(T_a(\alpha) \cdot_{Nr} T_b(\beta)([a, b])) &= \frac{1}{[a, b]} \sum_{d | [a, b]} \mu\left(\frac{[a, b]}{d}\right) \phi \circ T_a(\alpha)(d) \phi \circ T_b(\beta)(d) \\ &= \frac{1}{[a, b]} \sum_{d | [a, b]} \mu\left(\frac{[a, b]}{d}\right) \phi(\alpha)((a, d)) \phi(\beta)((b, d)) \end{aligned}$$

と変形し、ghost ring における Truncated operation, Frobenius operation を用いて計算することで導くことができる。

$F_r(\alpha), F_r(\beta)$  の値を事前に把握し、かつ  $a_2 = b_2 = 1$  であれば、 $T_a(\alpha) \cdot_{Nr} T_b(\beta)([a, b])$  について Frobenius operation を用いた因数分解がなされていることになる。

この結果を (4.2) で用いるには necklace ring の元  $E_{Nr}(\lambda_t(\chi_1)(g_1)), E_{Nr}(\lambda_t(\chi_2)(g_2))$  を Frobenius operation で移した像を知る必要があるが、これについては次の命題が成り立つ。

**Proposition 4.6.**  $G$  を有限群、 $\chi$  を  $G$  の仮想指標とすると、任意の自然数  $k$  に対し  $E_{Nr}(\lambda_t(\chi)(g^k)) = F_k \circ E_{Nr}(\lambda_t(\chi)(g))$  が成り立つ。



証明は Frobenius operation と写像  $\phi$  の可換性から示せる. この命題においては  $\chi$  が整数値指標であることを必要とはしない.

## 参考文献

- [Bo] E. H. Boorman, S-operations in representation theory, *Trans. Amer. Math. Soc.* **205**(1975), 127–149
- [Bry] J. M. Bryden, exterior power operations in the representation theory of the classical Weyl groups, *Communications in Algebra* **27**(12), 6273–6296(1999)
- [Knu] D. Knutson,  $\lambda$ -Rings and the Representation Theory of the Symmetric Group, Springer-Verlag, 1973
- [Ku] 黒川 信重, 小山 信也, リーマン予想のこれまでとこれから, 日本評論社, 2009
- [Met] N. Metropolis and Gian-Carlo Rota, Witt vectors and the Algebra of necklaces, *Advances in mathematics* **50**, 95–125 (1983)
- [Os] A. Osse,  $\lambda$ -structure and representation rings of compact connect Lie groups, *Journal of Pure and Applied Algebra* 121(1997) 69–93
- [Ta] 田村 朋之, 有限群の整数値指標である表現の交代テンソル積表現, 2014 年度表現論シンポジウム 講演集, 7–16
- [Var] K. Varadarajan, K. Wehrhahn, Aperiodic Rings, Necklace Rings, and Witt Vectors, *Advances in mathematics* **81**, 1–29 (1990)
- [Yau] D. Yau, *Lambda-rings*, World Scientific, 2010

Tomoyuki Tamura

Graduate School of Mathematics, Kyushu-University,

Nishi-ku Fukuoka, 819-0395, Japan.

E-mail: t-tamura@math.kyushu-u.ac.jp

# プロジェクトネットワークの最短完了時間として実現できる トロピカル多項式の特徴づけ

伊藤 孝明 (Ito Takaaki)

首都大学東京 理工学研究科 数理情報科学専攻 博士後期課程 2 年

## 概要

プロジェクトネットワークの最短完了時間は、各作業時間についてのトロピカル多項式で表される。逆に、与えられたトロピカル多項式がプロジェクトネットワークの最短完了時間として実現できる (realizable という) ためには、まず term extendability と呼ばれる条件を満たすことが必要である。term extendability を持つトロピカル多項式には単純グラフを対応付けることができ、グラフの言葉を用いて、トロピカル多項式が realizable であるための必要十分条件が述べられる。

## 1 定義

### 1.1 トロピカル演算

$\mathbb{R}$  を実数全体の集合とする。 $\mathbb{R}$  上の 2 つの演算  $\oplus, \otimes$  を、次のように定義する。

$$a \oplus b = \max\{a, b\}, \quad a \otimes b = a + b.$$

これらをトロピカル演算と呼ぶ。トロピカル演算は  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  に自然に拡張され、 $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$  は半環を成す。和の単位元は  $-\infty$ 、積の単位元は  $0$  である。

トロピカル演算で表される多項式をトロピカル多項式という。

### 1.2 プロジェクトネットワーク

プロジェクトネットワークとは、前後関係を持ったいくつかの作業の集まりのことである。各作業は、それより前の作業をすべて終えてからでないと開始できないものとする。プロジェクトネットワークは、サイクルもショートカットも持たない有向グラフとして表すことができる。ここで、有向グラフがショートカットを持たないとは、 $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_k$  ( $k \geq 2$ ) なる任意の path に対し、 $v_0 \rightarrow v_k$  なる arrow が存在しないこととする。

以下、プロジェクトネットワークの作業の集合を  $\{1, \dots, n\}$  とする。各作業  $i$  には非負実数  $t_i$  が定まっているとする。 $t_i$  を *time cost* と呼ぶ。全ての作業を終えるまでにかかる最小の時間を最短完了時間と呼ぶ。最短完了時間は、 $t_1, \dots, t_n$  についてのトロピカル多項式で表せることが知られている。

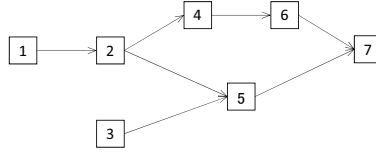


図 1: プロジェクトネットワーク

**Example 1.1.** 図 1 で表されるプロジェクトネットワークの最短完了時間は,

$$\begin{aligned}
 f(t_1, \dots, t_7) &= \max\{t_1 + t_2 + t_4 + t_6 + t_7, t_1 + t_2 + t_5 + t_7, t_3 + t_5 + t_7\} \\
 &= (t_1 \otimes t_2 \otimes t_4 \otimes t_6 \otimes t_7) \oplus (t_1 \otimes t_2 \otimes t_5 \otimes t_7) \oplus (t_3 \otimes t_5 \otimes t_7)
 \end{aligned}$$

となる.

### 1.3 $R$ 多項式

プロジェクトネットワークの最短完了時間として実現できるトロピカル多項式を  $R$  多項式 (realizable polynomial) という. 次の性質は, 定義からすぐに導かれる.

**Proposition 1.2.**  $R$  多項式は, 以下の (1)-(3) を満たす:

- (1) 各項の係数は 0 (i.e. 積の単位元),
- (2) 各変数について 1 次式,
- (3) どの項も他の項を割り切らない.

しかし, あるトロピカル多項式が (1)-(3) を満たしていても, それが  $R$  多項式であるとは限らない. (1)-(3) を満たすトロピカル多項式を,  $P$  多項式 (prerealizable polynomial) と呼ぶ. 例えば,  $(t_1 \otimes t_2) \oplus (t_2 \otimes t_3) \oplus (t_3 \otimes t_1)$  は  $P$  多項式であるが  $R$  多項式でないことが示される.

## 2 結果

この説では, 通常の演算記号でトロピカル演算を表す.

本研究では, 与えられた  $P$  多項式が  $R$  多項式となるための条件について調べ, まず以下の必要条件を得た.

**Proposition 2.1.**  $R$  多項式  $f(t) = f(t_1, \dots, t_n)$  は, *term extendability* と呼ばれる以下の性質を持つ:  $\{1, \dots, n\}$  の任意の部分集合  $I = \{i_1, \dots, i_{|I|}\}$  に対し, 「どの  $i_k, i_l \in I$  についても, ある  $f(t)$  の項が存在して  $t_{i_k} t_{i_l}$  で割り切れるならば,  $t_{i_1} \cdots t_{i_{|I|}}$  で割り切れる  $f(t)$  の項が存在する。」が成り立つ.

そこで, *term extendability* を持つトロピカル多項式に絞って  $R$  多項式の特徴づけを調べ, 以下の定理を証明した.

**Theorem 2.2.**  $t_1, \dots, t_n$  を変数とする  $P$  多項式で, *term extendability* を持つもの全体の集合と,  $\{1, \dots, n\}$  を頂点集合とする無向単純グラフ全体の集合との間には, 全単射が存在する.

2つの単純グラフが同型であることと, 対応する2つのトロピカル多項式が変数の入れ替えを除いて一致す

ることは同値である。

対応の仕方は以下の通りである：

$P$  多項式  $\rightarrow$  単純グラフ：  $P$  多項式  $f(t_1, \dots, t_n)$  に対し、頂点集合を  $\{1, \dots, n\}$  とし、ある項が  $t_i t_j$  で割り切れるとき  $i$  と  $j$  を辺で結んだグラフを対応させる。

単純グラフ  $\rightarrow P$  多項式：  $\{1, \dots, n\}$  を頂点集合とする単純グラフに対し、 $P$  多項式

$$\sum_{I: \text{極大クリーク}} t_I \quad \left( \text{ただし, } t_I = \prod_{i \in I} t_i \right)$$

を対応させる。

ここで、一般に無向グラフのクリークとは、いくつかの頂点からなる集合であって、どの2頂点間にも辺が存在するもののことである。

**Theorem 2.3.** *term extendability* を持つ  $d$  次トロピカル多項式がプロジェクトネットワークの最短完了時間として得られるための必要十分条件は、対応する単純グラフにある頂点彩色が存在して、次の条件を満たすことである：

- (0) 隣接する2頂点は、色が異なる、
- (1) 使用する色は  $c_1, \dots, c_d$  の  $d$  色で、 $c_1 < \dots < c_d$  なる順序を持つ、
- (2) 3頂点  $v_1, v_2, v_3$  の色が  $c_i, c_j, c_k$  のとき、 $v_1$  と  $v_2$ 、 $v_2$  と  $v_3$  が隣接し、 $c_i < c_j < c_k$  ならば、 $v_1$  と  $v_3$  は隣接する。

**Example 2.4.** トロピカル多項式  $f(t) = t_1 t_2 t_3 + t_2 t_3 t_4 + t_4 t_5 t_6 + t_5 t_7$  は *term extendability* を持つ。  $f(t)$  に対応する単純グラフは図2のようになる。これに対し図3のような彩色を与えると、定理2.3の条件を満たし、 $f(t)$  は  $R$  多項式であることが分かる。実際、 $f(t)$  は図4で表されるプロジェクトネットワークの最短完了時間として実現できる。

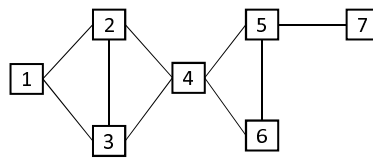


図 2

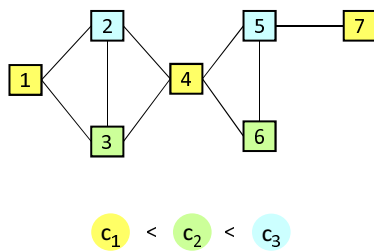


図 3

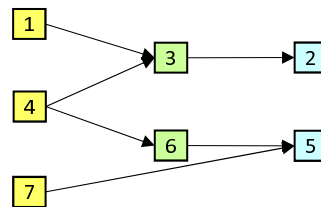


図 4

## 参考文献

- [1] eidergott, B., Olsder, G. J., and van der Woude, J. ,Max Plus at Work: Modeling and Analysis of Synchronized Systems: a Course on Max-plus Algebra and its Applications, Princeton Series in Applied Mathematics, Princeton University Press, 2005.
- [2] obayashi, M. and Odagiri, S., Tropical geometry of PERT, Journal of Math-for-Industry, Vol. 5 (2013B-8), pp. 145-149.. and Odagiri, S., Tropical geometry of PERT, Journal of Math-for-Industry, Vol. 5 (2013B-8), pp. 145-149.
- [3] ometa, E., Tanaka, A. and Takahashi, H., The worst-case time complexity for generating all maximal cliques and computational experiments (An invited paper in the Special Issue on COCOON 2004). Theoretical Computer Science 363, 2842 (2006).

# 新しい格子不変量

早坂亮太 (Ryota Hayasaka) \*

山形大学

## 概要

正方格子  $\mathbb{Z}^2$  において、任意の正整数  $n$  に対して丁度  $n$  個の格子点を通るような円が存在する (cf. [1])。今回、 $n=3,4,5,\dots,10$  に対して丁度  $n$  個の格子点を通る円の最小半径を求めるプログラムを作成した。さらに六角格子においても同様な考察を行った。発表では、それぞれの格子が持つこの不変量 (最小円の半径の 2 乗) の値やそれらから得られた定理、今後の課題などについて紹介する予定である。

## 1 導入

以下では、 $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$  を 2 次元格子とする。

**定義 1.1** 正整数  $n$  に対し、 $\Lambda$  上で丁度  $n$  個の格子点を通るような円が存在するとき、 $\Lambda$  を *universally concyclic* という。

**定義 1.2** 正整数  $n$  に対し、 $uc(\Lambda, n)$  を  $\Lambda$  上で  $n$  個の格子点を通るような円の中で半径が最小である円の半径の 2 乗の値とする。

**定理 1.1** (cf. [1]) 素数  $p$  が  $p \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $p^k \equiv 1 \pmod{8}$  を満たすとき、円  $(4x-1)^2 + (4y)^2 = p^k$  の周上には丁度  $k+1$  個の格子点が存在する。

**系 1.1** (cf. [1]) 任意の正整数  $n$  に対して、丁度  $n$  個の格子点を通る平面上の円が存在する。つまり  $\mathbb{Z}^2$  は *universally concyclic* である。

**問題 1.1** (cf. [1])  $n = 3, 4, 5, \dots, 10$  に対して、ちょうど  $n$  個の格子点を通る円の最小半径の 2 乗を決定せよ。

今回、問題 1.1 を受けて正整数  $n$  に対して、 $n$  個の格子点を通るような円の最小半径の 2 乗を決定するためのプログラムを作成した。

---

\*email: e128021@st.yamagata-u.ac.jp

## 2 主結果

以下の表がそれらの値を示したものである。

	uc( $\Lambda$ , 3)	uc( $\Lambda$ , 4)	uc( $\Lambda$ , 5)	uc( $\Lambda$ , 6)	uc( $\Lambda$ , 7)	uc( $\Lambda$ , 8)
$\mathbb{Z}^2$	$5^2/2 * 3^2$	$1/2$	$5^4/2 * 3^2$	$5^2/2^2$	$5^4 * 13 * 17/2 * 11^2$	$5/2$

uc( $\Lambda$ , 9)	uc( $\Lambda$ , 10)	...	uc( $\Lambda$ , 16)	...	uc( $\Lambda$ , 32)	...
$5^2 * 13^2/2 * 3^2$	$5^4/2^2$	...	$5 * 13/2$	...	$5 * 13 * 17/2$	...

**予想 2.1**  $\ell$  を非負の整数とする。この時、 $\mathbb{Z}^2$  上で  $2^{\ell+2}$  個の格子点を通るような円の一般化が存在するのではないか。

**定理 2.1** 素数  $p \equiv 1 \pmod{4}$  に対し、 $p = a^2 + b^2$  を満たすような整数  $a, b$  が存在。

定理 2.1 は、フェルマーの 2 平方和定理と呼ばれる整数論における有名な定理である。

ここで、 $p_i$  を 4 を法として 1 と合同である  $i$  番目に小さい素数とする (ただし、 $p_0 := 1$ )。

**補題 2.1**  $\omega\bar{\omega} = 2 \prod_{k=0}^{\ell} p_k$  を満たすような  $\omega \in \mathbb{Z}[i]$  の個数は  $2^{\ell+2}$  個存在する。

**証明** 定理 2.1 フェルマーの 2 平方和定理より、任意の  $p_j$  に対して  $p_j = a_j^2 + b_j^2$  を満たすような  $a_j, b_j \in \mathbb{Z}$  が存在する。よって、

$$p_j = (a_j + ib_j)(a_j - ib_j).$$

ここで、 $a_j + ib_j$  と  $a_j - ib_j$  は  $\mathbb{Z}[i]$  上で既約元であることに注意。  $2 = 1^2 + 1^2$  より  $2 = (1+i)(1-i)$ 。従って、

$$\omega\bar{\omega} = 2 \prod_{k=0}^{\ell} p_k = (1+i)(1-i) \prod_{k=0}^{\ell} (a_k + ib_k)(a_k - ib_k).$$

次に  $\omega$  の起こりうる場合の数を考える。 $\omega$  は以下のように表すことができる：

$$\omega = u(1+i)^{\epsilon_0}(1-i)^{1-\epsilon_0}(a_1+ib_1)^{\epsilon_1}(a_1-ib_1)^{1-\epsilon_1} \dots (a_{\ell}+ib_{\ell})^{\epsilon_{\ell}}(a_{\ell}-ib_{\ell})^{1-\epsilon_{\ell}}.$$

$$(u = \pm 1, \pm i, \epsilon_n = 0, 1 \ (n = 0, 1, \dots, \ell))$$

$(1+i)$  と  $(1-i)$  は実部と虚部の絶対値の値が同じなので、 $\omega$  の起こりうる場合の数に  $(1+i)$  と  $(1-i)$  は依存していないことに注意。従って、 $\omega$  の起こりうる場合の数  $\mathbb{Z}^2$  上で  $\frac{4 \cdot 2^{\ell+1}}{2} = 2^{\ell+2}$  個存在する。

□

**定理 2.2** 円  $(2x - 1)^2 + (2y - 1)^2 = 2 \prod_{k=0}^{\ell} p_k$  の周上には、丁度  $2^{\ell+2}$  の格子点がある。

**証明** 補題 2.1 より、 $X^2 + Y^2 = 2 \prod_{k=0}^{\ell} p_k$  を満たす  $(X, Y) \in \mathbb{Z}^2$  は  $2^{\ell+2}$  個存在することが分かる。

$X^2, Y^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$  かつ  $2 \prod_{k=0}^{\ell} p_k \equiv 2 \pmod{4}$  であるので、 $X^2 + Y^2 = \prod_{k=0}^{\ell} p_k$  ならば、 $X^2 \equiv 1$  かつ  $Y^2 \equiv 1 \pmod{4}$  である。さらにこれは、 $X \equiv 1$  かつ  $Y \equiv 1 \pmod{2}$  であることを意味している。従って、 $(2x - 1)^2 + (2y - 1)^2 = 2 \prod_{k=0}^{\ell} p_k$  を満たす  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  の数は、

$$\begin{aligned} \cdot X^2 + Y^2 &= 2 \prod_{k=0}^{\ell} p_k, \\ \cdot 2x - 1 &\equiv -1 \equiv 1 \pmod{2}, \\ \cdot 2y - 1 &\equiv -1 \equiv 1 \pmod{2} \end{aligned}$$

を満たす  $(X, Y) \in \mathbb{Z}^2$  の数と等しい。従って、 $(2x - 1)^2 + (2y - 1)^2 = 2 \prod_{k=0}^{\ell} p_k$  を満たす格子点  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  の数は丁度  $2^{\ell+2}$  個存在する。

□

**系 2.1**  $\ell$  を非負の整数とする。この時、 $\mathbb{Z}^2$  上で丁度  $2^{\ell+2}$  個の格子点を通るような円は、 $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2} \prod_{k=0}^{\ell} p_k$  として表すことができる。

他にも、六角格子  $A_2$  に対し同様な考察を行った。

**定義 2.1**  $(1, 0), (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \in \mathbb{R}^2$  で生成される格子  $\Lambda$  を六角格子と呼ぶ。 $A_2$  として表す。

**命題 2.1** (cf. [2]) 六角格子  $A_2$  は universally concyclic である。

六角格子  $A_2$  に対しても、問題 1.1 と同様な問題を考えた。以下の表がそれらの値を示したものである。

	$\text{uc}(\Lambda, 3)$	$\text{uc}(\Lambda, 4)$	$\text{uc}(\Lambda, 5)$	$\text{uc}(\Lambda, 6)$	$\text{uc}(\Lambda, 7)$
$A_2$	$1/3$	$7/2^2$	$7^2 * 13^2/11^2$	$1$	$7^2 * 13 * 19 * 43/3 * 11^2$

$\text{uc}(\Lambda, 8)$	$\text{uc}(\Lambda, 9)$	$\text{uc}(\Lambda, 10)$	$\dots$	$\text{uc}(\Lambda, 12)$	$\dots$	$\text{uc}(\Lambda, 24)$	$\dots$
$7 * 13/2^2$	$7^2/3$	$7^4/2^2$	$\dots$	$7$	$\dots$	$7 * 13$	$\dots$



予想 2.2  $m$  を非負の整数とする。この時、 $A_2$  上で  $6 \cdot 2^m$  個の格子点を通るような円的一般化が存在するのではないか。

$q_j$  を 3 を法として 1 と合同である  $j$  番目に小さい素数とする ( $q_0 := 1$ )。

補題 2.2  $\tau\bar{\tau} = \prod_{k=0}^m q_k$  を満たすような  $\tau \in \mathbb{Z}[\zeta]$  の個数は、 $6 \cdot 2^m$  個存在する ( $\zeta = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ )。

定理 2.3  $A_2$  上で円  $x^2 + y^2 = \prod_{k=0}^m q_k$  の周上には丁度  $6 \cdot 2^m$  の格子点がある。

### 3 課題

課題 1 (cf. [3], [4]) ある 2 つの格子  $\Lambda_1$  と  $\Lambda_2$  が同型であるならば、任意の  $n$  に対して  $\text{uc}(\Lambda_1, n)$  と  $\text{uc}(\Lambda_2, n)$  の値は全て等しくなる。よって、 $\text{uc}(\Lambda, n)$  は格子  $\Lambda$  の不変量とみなすことができるので、その不変量を用いて格子を区別できることが分かる。さらに 2 次元平面において、 $\mathbb{Z}^2$  や  $A_2$  の他に universal concyclic な 2 次元格子が存在する。従って、それらの格子の不変量 (最小円の半径の 2 乗) を計算することで各々が非同型であることを示していきたい。

課題 2 (cf. [1]) 3 次元  $\mathbb{R}^3$  の球面上で任意の正整数  $n$  に対し、 $n$  個の格子点を通る球が存在する。例えば、球  $(4x-1)^2 + (4y)^2 + (4z-\sqrt{2})^2 = 17^k + 2$  は、丁度  $k+1$  個の格子点を通る。つまり、この命題に対して  $z = 0$  とおくと、方程式は  $(4x-1)^2 + (4y)^2 = 17^k$  となる。これは、定理 1.1 に帰着していることを意味し、 $\mathbb{Z}^3$  は universally concyclic であることを示唆しているのと同時に、任意の正整数  $n$  に対して  $\text{uc}(\mathbb{Z}^3, n)$  の上界を決定している。よって、2 次元平面と同様な最小問題を考えることができる。今後の課題は、3 次元空間  $\mathbb{Z}^3$  におけるプログラムを作成し、ある規則を見つけ、定理として導くことである。予想としては、 $\mathbb{Z}^2$  と同様に  $n$  の値が 2 冪のとき、ある規則性が見つかるのではないかと考えている。

課題 3 (cf. [5]) 4 次元において、 $m$  を任意の非負の整数とする。このとき、ノルムが  $m$  である格子ベクトルの数が全て同じになる 2 つの格子  $L_1$  と  $L_2$  がするが、この 2 つの格子  $L_1$  と  $L_2$  は非同型だということが分かっている。このことを  $\text{uc}(L_1, n)$  と  $\text{uc}(L_2, n)$  を計算することで非同型であることを示したい。

### 参考文献

- [1] 前原潤 著, 「整数格子の初等幾何」,  
< <http://infoshako.sk.tsukuba.ac.jp/hachi/COS/combin.jp/maebara08.pdf> >,  
アクセス日 2015/12/25

- [2] 坂内英一 三枝崎剛 著, 「On a property of 2-dimensional integral Euclidean lattice」, Journal of Number Theory 132 (2012), no.3,371-378.
- [3] 坂内英一 三枝崎剛 著, 「Toy models for D.H. Lehmer's conjecture II」, Journal of the Mathematical Society of Japan (Impact Factor: 0.62). 01/2009; 62(3).
- [4] 三枝崎剛 早坂亮太 著, 「New invariants for integral lattice」
- [5] J.H. Conway and N.J.A. Sloane, 「Four-dimensional lattices with the same theta series」, International Mathematics Research Notices (Impact Factor: 1.1). 01/1992, no. 4, 93–96.

# On the Mazur-Tate refined conjecture of BSD type

おおた かずと  
太田 和惟 (Kazuto Ota)\*

慶應義塾大学

## 概 要

本稿は、第12回数学総合若手研究集会(2016年2月29日~3月3日, 北海道大学)における著者の講演のテクニカルレポートである。楕円曲線の基本事項と弱BSD予想の主張を簡単に復習した後で、BSD予想の群環版と見なせる、Mazur-Tateが定式化したBSD型精密化予想を紹介する。主結果は、この予想の階数に関する部分を比較的弱い仮定のもとで証明したというものである。

## 1. BSD 予想

### 1.1. 楕円曲線 (参考文献 [7])

体  $K$  上の楕円曲線  $E$  とは、方程式

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 \quad (a_i \in K) \quad (1.1)$$

に無限遠点  $\infty$  を付け加えて定義される射影的な非特異代数曲線である。特徴的なのは、これが群構造をもつ曲線だということである。つまり、 $K$ -有理点全体の集合

$$E(K) := \{(x, y) \in K^2; y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6\} \cup \{\infty\}$$

がアーベル群の構造をもつ(無限遠点  $\infty$  が単位元となる)。例えば  $K$  が複素数体  $\mathbb{C}$  の場合、 $E(\mathbb{C})$  にはコンパクトリーマン面の構造が入り、複素トーラス  $\mathbb{C}/\Lambda$  ( $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$  は格子) に群構造込みで同型となることが知られている。

さて、整数論的に興味深いのは、 $K$  が有理数体  $\mathbb{Q}$ 、あるいはその有限次拡大体の場合である。このとき、次の定理が知られている:

**定理 1.1** (cf. [7]).  $K$  が  $\mathbb{Q}$  の有限次拡大体のとき、 $E(K)$  は有限生成アーベル群、つまり、

$$E(K) \cong \mathbb{Z}^{\oplus r(E)} \oplus E(K)_{\text{tors}}.$$

ここで、 $r(E) = \text{rank}(E(K)) \geq 0$  は整数、 $E(K)_{\text{tors}}$  は  $E(K)$  のトーション元全体がなす有限アーベル群である。

以下では、 $K = \mathbb{Q}$  上の楕円曲線  $E$  を固定する。このとき、上の定理より、 $E(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}^{\oplus r(E)} \oplus E(\mathbb{Q})_{\text{tors}}$  と書ける。有限アーベル群  $E(\mathbb{Q})_{\text{tors}}$  の方は Mazur によって完全に分類されている(cf. [7, VIII, Theorem 7.5])。一方、階数  $r(E)$  の方はまだまだわからないことが多く、例えば、 $\mathbb{Q}$  上の楕円曲線を動かしたとき、 $r(E)$  がどれくらい大きくなるかもわかっていない。この代数的な量である  $r(E)$  が驚くべきことに、解析的な  $L$  関数  $L(E, s)$  の振る舞いと結びつくと予想しているのが次に述べる(弱)BSD予想である。

\* e-mail: kazutoota@math.keio.ac.jp

## 1.2. BSD 予想

まず,  $L$  関数の定義に必要な Hasse 不変量  $a_\ell(E) \in \mathbb{Z}$  について復習する.  $E$  が  $\mathbb{Q}$  上の楕円曲線であるということから, 適当な変数変換により方程式 (1.1) の係数が  $a_i \in \mathbb{Z}$  となるようにできる. そのような方程式で, *discriminant*  $\Delta \in \mathbb{Z}$  (の絶対値) が最小のものを固定する (cf. [7, VIII.8]). (以下,  $\mathbb{Q}$  上の楕円曲線を考えるときは常にこのような  $\mathbb{Z}$  係数の方程式を固定することとする.) このとき, 方程式 (1.1) を素数  $\ell$  に対し modulo  $\ell$  することにより  $\mathbb{F}_\ell$  上の代数曲線を得る. さらに  $\ell \nmid \Delta$  のとき, この代数曲線は非特異となり  $\mathbb{F}_\ell$  上の楕円曲線  $E \otimes \mathbb{F}_\ell$  を定める. これの  $\mathbb{F}_\ell$ -有理点全体の集合を  $E(\mathbb{F}_\ell)$  とも書く.  $\ell \nmid \Delta$  のときの  $a_\ell(E) \in \mathbb{Z}$  を  $a_\ell(E) = \ell + 1 - \#E(\mathbb{F}_\ell)$  で定義する.  $E$  の Hasse-Weil  $L$  関数  $L(E, s)$  は次の形の無限積で定義される:

$$L(E, s) = \prod_{\ell: \text{素数}} (1 - a_\ell(E)\ell^{-s} + \epsilon(\ell)\ell^{1-2s})^{-1} =: \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}. \quad (1.2)$$

ここで,  $\ell \nmid \Delta$  なら,  $\epsilon(\ell) = 1$  である ( $\ell \mid \Delta$  については [7, Appendix C.16] 参照). Hasse の定理  $|a_\ell(E)| \leq 2\sqrt{\ell}$  より, (1.2) は  $\text{Re}(s) > 3/2$  なる  $s \in \mathbb{C}$  に対し収束することがわかる. さらに, Wiles, Taylor-Wiles らによって解決された志村谷山予想により,  $L(E, s)$  は  $\mathbb{C}$  全体に解析接続される. 特に,  $s = 1$  での零点の位数  $\text{ord}_{s=1}(L(E, s))$  が定義される. 弱 BSD 予想とは次の予想である:

**予想 1.2** (Birch, Swinnerton-Dyer). 等式

$$r(E) = \text{ord}_{s=1}(L(E, s))$$

が成り立つ.

さらに,  $s = 1$  での Taylor 展開の主要項  $\lim_{s \rightarrow 1} (L(E, s)/(s-1)^{r(E)})$  を  $\#E(\mathbb{Q})_{\text{tors}}$  や Tate-Shafarevich 群  $\text{III}(E/\mathbb{Q})$  の位数といった数論的不変量で記述する公式 (full BSD 予想) も予想されているがここでは詳しく述べない (cf. [7, Appendix C.16]).

## 2. BSD 型精密化予想

Mazur-Tate [4] によって定式化された BSD 型精密化予想は,  $\mathbb{Q}$  上の楕円曲線  $E$  に対する  $L(E, s)$  を Mazur-Tate 元という群環の元で置き換え,  $E$  の数論的不変量と結びつける予想である.

### 2.1. Mazur-Tate 元 (cf. [4])

非負整数  $S$  に対し,  $G_S = (\mathbb{Z}/S\mathbb{Z})^\times$  とおく. このとき, Mazur-Tate 元  $(\theta_S)_S \in \prod_S \mathbb{Q}[G_S]$  は次を満たす (記号の説明はすぐ下):

1. 導手  $S$  の Dirichlet 指標  $\chi : G_S \rightarrow \mathbb{C}^\times$  に対し,  $\chi$  を  $\mathbb{Q}$  線形に  $\mathbb{Q}[G_S] \rightarrow \mathbb{C}$  に延長すると,

$$\chi(\theta_S) = \tau_S(\chi) \frac{L(E, \chi^{-1}, 1)}{\Omega^\pm},$$

2. 素数  $\ell$  に対し,  $\pi_{S\ell/S} : \mathbb{Q}[G_{S\ell}] \rightarrow \mathbb{Q}[G_S]$  を自然な射影とすると,  $\pi_{S\ell/S}(\theta_{S\ell})$  と  $\theta_S$  の間には明示的な関係式がある.
3. ある正の整数  $M$  が存在して, 任意の非負整数  $S$  に対し  $M\theta_S \in \mathbb{Z}[G_S]$ .

ここで,  $\zeta_S := \exp(2\pi i/S)$  で, Dirichlet 指標  $\chi : G_S \rightarrow \mathbb{C}^\times$  に対し,

- $\tau_S(\chi) := \sum_{a \in G_S} \chi(a) \zeta_S^a$ ,
- $L(E, \chi, s) := \prod_{\ell: \text{素数}} (1 - a_\ell(E) \chi(\ell) \ell^{-s} + \epsilon(\ell) \chi(\ell)^2 \ell^{1-2s})^{-1} = \sum_{(n,S)=1} \frac{a_n \chi(n)}{n^s}$ .

また,  $\Omega^+, \Omega^-$  (定義は [4, Chapter 1] 参照のこと) は周期と呼ばれる複素数で次を満たす: 任意の Dirichlet 指標  $\chi$  に対し,  $\frac{L(E, \chi, 1)}{\Omega^\pm} \in \mathbb{Q}(\text{Im}(\chi))$ . ここで, 符号  $\pm$  は  $\chi(-1)$  の符号と同じものをとる.

**注意 2.1.** Mazur-Tate 元は  $p$  進  $L$  関数の精密化である.  $p$  進  $L$  関数は, 導手が  $p$  べきの Dirichlet 指標  $\chi$  による捻りの特殊値  $L(E, \chi^{-1}, 1)/\Omega^\pm$  を全て“補間”するような  $p$  進解析的関数として定義されるが (例えば,  $p \nmid a_p(E)$  なら  $\left( \varprojlim_{\pi_{p^n}/p^{n-1}} \mathbb{Z}_p[G_{p^n}] \right) \otimes \mathbb{Q}_p \cong \mathbb{Z}_p[[T]]^{\oplus p-1} \otimes \mathbb{Q}_p$  の元になる), 構成の一つは  $\{\theta_{p^n}\}_n$  を適当に modify して (逆) 極限をとるというものである.  $p$  進  $L$  関数を巡る大きな予想は, BSD 予想の素朴な類似である  $p$  進 BSD 予想と,  $p$  進  $L$  関数と  $\bigcup_{n \geq 1} E(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}))$  をガロワ作用込みで結びつける岩澤主予想がある. [4] では, これらの予想の部分的な精密化として, ( $\theta_{p^n}$  だけでなく) 一般の  $\theta_S$  に対して予想が定式化された. 本稿で扱うのは, このうち  $p$  進 BSD 予想の精密化に当たる BSD 型精密化予想である. 次の小節では, 本講演における主定理に関係深い, 弱 BSD 予想の類似に関して説明する.

## 2.2. BSD 型精密化予想の (階数に関する部分の) 主張

$S$  を非負整数とし,  $\mathbb{Q}$  の部分環  $R$  を  $\theta_S \in R[G_S]$  となるようにとる.  $I_S$  を  $R[G_S]$  の augmentation イデアルとする. つまり  $I_S = \ker(R[G_S] \rightarrow R; \sum_{\sigma \in G_S} a_\sigma \sigma \mapsto \sum_{\sigma \in G_S} a_\sigma)$ . このとき, Mazur-Tate [4] は  $\theta_S$  の自明指標での零点の位数が  $r(E)$  以上であると予想した:

**予想 2.2** (Mazur-Tate [4]).  $\theta_S \in I_S^{r(E)}$ .

**注意 2.3.** 予想 1.2 とは異なり, 零点の位数が  $r(E)$  より大きくなることがある, つまり  $\theta_S \in I_S^{r(E)+1}$  が起こりうる. 例えば,  $\#G_S \in R^\times$  なら,  $I_S = I_S^2 = \dots$ .

## 3. 主結果

$E$  を  $\mathbb{Q}$  上の楕円曲線とし, CM をもたないとする (i.e.  $\text{End}(E) = \mathbb{Z}$ , cf. [7]). 以下の3つの条件全てを満たす素数  $p$  を **許容素数** と呼ぶ:

1.  $p \nmid 6(a_p(E) - 1) \Delta \prod_{\ell | \Delta} c_\ell$  ( $c_\ell$  については [7, Appendix C.16] 参照),
2. Tate 加群  $T_p(E) := \varprojlim_n E[p^n]$  からくるガロワ表現  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Z}_p}(T_p(E))$  が全射 ( $\overline{\mathbb{Q}}$  は  $\mathbb{Q}$  の代数閉包),
3.  $p \geq r(E)$ .

**注意 3.1.** Serre の結果を用いると, 許容素数の密度が 1 であることがわかる.

以下, 部分環  $R \subseteq \mathbb{Q}$  を, 非許容素数が  $R$  で全て可逆 になるようにとる. 主結果は次である:

**定理 3.2** ([5]).  $S$  を次の (\*) を満たす素数  $\ell \nmid \Delta$  の *square-free* な積とする.

$$(*) \text{ 任意の許容素数 } p \text{ に対し, } E(\mathbb{F}_\ell)[p] \cong \{0\}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

このとき,

$$\theta_S \in I_S^{r(E)}.$$

**注意 3.3.** 1. (\*) を満たす  $\ell$  の密度は 0.997 以上であることが Chebotarev 密度定理を用いることでわかる.

2. 抽象的に部分環  $R$  を取ったが,  $E(\mathbb{Q})_{\text{tors}} \neq \{0\}$  のときには, 非許容素数の個数は有限となり, (数値的に) 明示的に  $R$  をとることができる (cf. [5, Corollary 1.4]).

3. 定理 3.2 以前に予想 2.2 について既に知られていた結果を簡単に述べる. 簡単のため,  $p$  を許容素数とする.  $\theta_{p^n} \in I_{p^n}^{r(E)} \otimes \mathbb{Z}_p$  が,  $p \nmid a_p(E)$  のときは Kato[1] の結果から,  $p|a_p(E)$  の場合は, Kato[1], Kobayashi[2], Pollack[6] の結果から導ける. Kurihara[3] は  $p \nmid a_p(E)$  のとき, “ $\mu = 0$  予想” を仮定したうえで,  $(S, \Delta) = 1$  なる  $S$  に対し,  $\theta_S \in I_S^{r(E)} \otimes \mathbb{Z}_p$  を (含む定理を) 証明している. Tan[8] は full BSD 予想を仮定したうえで, 特別な  $S$  に対し,  $\theta_S \in I_S^{r(E)}$  を示している.

予想 2.2 は弱 BSD 予想 (予想 1.2) の類似だったが, full BSD 予想の類似も定式化されている. これに関して得られた結果を紹介する.

Mazur-Tate [4] は, Mazur-Tate 元の主要項  $\tilde{\theta}_S$  を  $\theta_S$  の  $I_S^{r(E)}/I_S^{r(E)+1}$  への像として定義し, これを, full BSD 予想のように  $\text{III}(E/\mathbb{Q})$  や高さ関数,  $J_S$  で記述する予想を定式化した. ここで,  $J_S$  は次で定義される有限群である:

$$J_S = \text{coker} \left( E(\mathbb{Q}) \rightarrow \left( \bigoplus_{\ell|S} E(\mathbb{F}_\ell) \right) \oplus \left( \bigoplus_{\ell|\Delta} E(\mathbb{Q}_\ell)/E_0(\mathbb{Q}_\ell) \right) \right).$$

**定理 3.4** ([5]).  $p$  を許容素数とし,  $S$  を  $\ell \equiv 1 \pmod{p}$  かつ (\*) を満たす  $\ell$  の *square-free* な積とする. もし,  $\tilde{\theta}_S \not\equiv 0 \pmod{p(I_S^{r(E)}/I_S^{r(E)+1})}$  なら,

$$\text{III}(E/\mathbb{Q})[p] = J_S[p] = 0.$$

## 参考文献

- [1] K. KATO,  $p$ -adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms, *Cohomologies  $p$ -adiques et applications, arithmétiques. III*, *Astérisque* **295** (2004), ix, 117–290.
- [2] S. KOBAYASHI, Iwasawa theory for elliptic curves at supersingular primes, *Invent. Math.* **152** (2003), 1–36.
- [3] M. KURIHARA, The structure of Selmer groups for elliptic curves and modular symbols, *Iwasawa theory 2012, Contrib. Math. Comput. Sci.* **7**, 317–356, Springer, Heidelberg, 2014.
- [4] B. MAZUR AND J. TATE, Refined conjectures of the “Birch and Swinnerton-Dyer type”, *Duke Math. J.* **54** (1987), 711–750.
- [5] K. OTA, Kato’s Euler system and the Mazur-Tate refined conjecture of BSD type, *arXiv:1509.00682v1*, submitted.
- [6] R. POLLACK, On the  $p$ -adic  $L$ -function of a modular form at a supersingular prime, *Duke Math. J.* **118** (2003), 523–558.
- [7] J. H. SILVERMAN, *The arithmetic of elliptic curves*, Second edition, *Graduate Texts in Mathematics* **106**, Springer, Dordrecht, 2009.
- [8] K.-S. TAN, Refined theorems of the Birch and Swinnerton-Dyer type, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **45** (1995), 317–374.



# パラレルセッション 会場B





# 双一次形式を用いて Lie 代数とその表現を 次数つき Lie 代数に埋め込む方法

佐々野 詠淑 (Nagatoshi SASANO)  
九州大学マス・フォア・インダストリ研究所<sup>1</sup>

## Abstract

有限次元簡約可能 Lie 代数及びその完全可約表現が与えられたとき, Lie 代数上の双一次形式を使って, これらを部分構造として含むような大きな次数つき Lie 代数を構成することができる. この理論を応用して概均質ベクトル空間と次数つき Lie 代数の関係について考察する.

## 1 序文

$\mathfrak{g} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_n$  を次数付けられた複素数体  $\mathbb{C}$  上の有限次元半単純 Lie 代数としよう. すると,  $\mathfrak{g}$  の部分 Lie 代数  $\mathfrak{g}_0$  及びその表現  $(\mathfrak{g}_0, \text{ad}, \mathfrak{g}_1)$  が得られる. このとき,  $\mathfrak{g}_0$  は有限次元簡約可能 Lie 代数であり,  $(\text{ad}, \mathfrak{g}_1)$  は完全可約な表現である. さらに, この表現は概均質ベクトル空間を誘導することが知られており, これから得られる概均質ベクトル空間は放物型概均質ベクトル空間と呼ばれている (PV of parabolic type, [2] 参照). 大雑把な言い方をすれば, 次数付けられた有限次元半単純 Lie 代数に「埋め込む」ことが出来る表現が放物型概均質ベクトル空間である. 放物型概均質ベクトル空間は Lie 代数の性質と関連しているので分析しやすく, また, H. Rubenthaler によって Dynkin 図形を用いた完全な分類が報告されている ([2, pp.137–140] 参照).

一方で, 殆どの概均質ベクトル空間は「放物型でない」ことが知られている. では, 放物型概均質ベクトル空間理論の「逆」として, 任意に有限次元簡約可能 Lie とその完全可約表現が与えられたとき, これらを「埋め込む」ことができるような大きな次数つき Lie 代数は存在するのだろうか. 本稿ではこの問いに対し, 肯定的な解答を与える. すなわち, 与えられた有限次元簡約可能 Lie 代数上の双一次形式を媒介として, これらの構造をその部分構造として含むような次数つき Lie 代数が存在することを示す (本稿 Theorem 2.3 参照).

## 2 標準的な四つ組とそれに付随する次数つき Lie 代数

本節の内容の詳細については, [4] を参照されたい. また, 本節では有限次元簡約可能 Lie 代数及びその完全可約表現を扱うが, これらについて概均質性に関する仮定は置かれていないことを強調しておく. 天下一的ではあるが, まず, 次の写像を定義することからはじめる.

**Definition 2.1** ( $\Phi$ -写像).  $\mathfrak{g}$  を有限次元簡約可能 Lie 代数,  $(\rho, V)$  を  $\mathfrak{g}$  の有限次元表現,  $B_0$  を  $\mathfrak{g}$  上の非退化対称不変双一次形式<sup>2</sup>とする. 四つ組  $(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0)$  に対し, 線形写像  $\Phi_\rho : V \otimes \text{Hom}(V, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{g}$

<sup>1</sup>e-mail: n-sasano@imi.kyushu-u.ac.jp

本研究は JST CREST 研究課題「デジタル映像数学の構築と表現技術の革新」の助成を受けたものである.

<sup>2</sup>不変とは, 等式  $B_0([a, b], c) = B_0(a, [b, c])$  が任意の  $a, b, c \in \mathfrak{g}$  に対して成立することを言う. 有限次元簡約可能 Lie 代数は必ず非退化対称不変双一次形式を持つことが知られている ([1, Chapter 1. §6.4. Proposition 5] 参照).

を次の等式によって定義する：

$$B_0(a, \Phi_\rho(v \otimes \phi)) = \langle \rho(a)v, \phi \rangle. \quad (2.1)$$

ただし,  $a \in \mathfrak{g}$ ,  $v \in V$ ,  $\phi \in \text{Hom}(V, \mathbb{C})$  であって,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $V$  と  $\text{Hom}(V, \mathbb{C})$  の間の自然な pairing を表す. この写像  $\Phi_\rho$  を四つ組  $(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0)$  の  $\Phi$ -写像と呼ぶ.  $\Phi$ -写像は  $\mathfrak{g}$ -加群の準同型写像でもある.

少々分かりにくい定義であるが,  $\Phi$ -写像は well-defined である. 実際, Lie 代数  $\mathfrak{g}$  が有限次元であることと双一次形式  $B_0$  が非退化であるという条件から  $\mathfrak{g}$  と  $\text{Hom}(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$  は  $b \mapsto (a \mapsto B_0(b, a))$  という対応で同一視できるが,  $v \in V$ ,  $\phi \in \text{Hom}(V, \mathbb{C})$  から定まる写像  $(a \mapsto \langle \rho(a)v, \phi \rangle) \in \text{Hom}(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$  に対応する元として  $\Phi_\rho(v \otimes \phi) \in \mathfrak{g}$  が定義できる. また,  $B_0$  が不変であるという仮定は  $\Phi$ -写像が  $\mathfrak{g}$ -加群の準同型であることを証明するのに用いられる. 勿論, 一般に, 双一次形式  $B_0$  の取り方を変えれば  $\Phi$ -写像も変化する. しかし, 双一次形式を媒介とすることで任意の有限次元簡約可能 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  及びその表現  $V$  に対し,  $\mathfrak{g}$  と  $V \otimes \text{Hom}(V, \mathbb{C})$  の間に  $\mathfrak{g}$ -加群の準同型が存在することが分かった.

**Definition 2.2** (標準的な四つ組). 記号は Definition 2.1 のものをそのまま使う.  $\rho$  が忠実かつ完全可約で,  $V$  が 0 でない不変元を持たないとき, 四つ組  $(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0)$  は標準的な四つ組 (standard quadruplet) と言う.

この定義は考察する Lie 代数及びその表現における「無駄な部分」を排除するためのものである. 有限次元簡約可能 Lie 代数及びその完全可約表現を次数つき Lie 代数に埋め込む, と言う問題を考察するとき, これに忠実性及び 0 でない不変元が存在しないことを仮定しても一般性は失われない. そして, 標準的な四つ組に対する次の主張が本稿の主定理の一つである.

**Theorem 2.3** (四つ組に付随する Lie 代数). 標準的な四つ組  $(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0)$  に対し, (一般には無限次元の) 次数つき Lie 代数  $L(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$  で, 条件

$$V_{-1} \simeq \text{Hom}(V, \mathbb{C}), \quad V_0 \simeq \mathfrak{g}, \quad V_1 \simeq V, \quad (\mathfrak{g}\text{-加群として})$$

を満たすものが存在する. これを四つ組  $(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0)$  に付随する Lie 代数と呼ぶ. 上の  $\mathfrak{g}$ -加群の同型の下で, 制限された  $L(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$  の bracket 積  $[\cdot, \cdot] : V_{-1} \times V_1 \rightarrow V_0$  は  $\Phi_\rho : V \otimes \text{Hom}(V, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{g}$  と同一視できる.

論文 [4, Theorem 2.11] では四つ組に付随する Lie 代数を具体的に構成することでこの証明としている. また, [3] では H. Rubenthaler によって同様の結果が発表されている. 彼の証明は V. Kac による先行研究を応用したものである. 繰り返すが, ここでは概均質性の仮定は置かれていないことに注意していただきたい. つまり, Theorem 2.3 によって任意の簡約可能 Lie 代数及びその完全可約表現が次数つき Lie 代数に埋め込まれることが分かったが, 埋め込みが可能であることと表現の概均質性は無関係である. 標準的な四つ組とそれに付随する Lie 代数の例で代表的なものを以下に二つ挙げる.

**Example 2.4** (ループ代数). 任意の有限次元単純 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  及びその Killing 形式  $K_{\mathfrak{g}}$  に対し, 四つ組  $(\mathfrak{g}, \text{ad}, \mathfrak{g}, K_{\mathfrak{g}})$  は標準的な四つ組である. これに対応する次数つき Lie 代数  $L(\mathfrak{g}, \text{ad}, \mathfrak{g}, K_{\mathfrak{g}})$  はループ代数  $\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathfrak{g}$  に同型である.

**Example 2.5** (有限次元半単純 Lie 代数).  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_n$  を次数付けられた半単純 Lie 代数とし,  $K_{\mathfrak{g}}$  を  $\mathfrak{g}$  上の Killing 形式とする. ここで,  $\mathfrak{g}$  の部分 Lie 代数及びその表現  $(\mathfrak{g}_0, \text{ad}, \mathfrak{g}_1)$  は放物型概均

質ベクトル空間を誘導することに注意されたい。さて、今登場した表現と、 $K_{\mathfrak{g}}$  の  $\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0$  への制限からなる四つ組  $(\mathfrak{g}_0, \text{ad}, \mathfrak{g}_1, K_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0})$  は標準的な四つ組であり、これに対応する次数つき Lie 代数  $L(\mathfrak{g}_0, \text{ad}, \mathfrak{g}_1, K_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0})$  は  $\mathfrak{g}$  に同型である。

逆に、ある標準的な四つ組  $(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0)$  に対応する Lie 代数が有限次元であるとき、この四つ組は上記の方法で放物型概均質ベクトル空間から構成される。すなわち、放物型概均質ベクトル空間とは簡約可能 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  及びその表現  $(\rho, V)$  であって、 $L(\mathfrak{g}, \rho, V, B_0)$  を有限次元にするような  $B_0$  が存在するものである、という言い方も出来る。

### 3 概均質ベクトル空間と次数つき Lie 代数

前節の結果を概均質ベクトル空間論へ応用することを考えよう。概均質ベクトル空間論の一般論については [6] などを、本節の内容の詳細については [5] を参照されたい。定理 2.3 によって簡約可能 Lie 代数及びその完全可約表現が (概均質性に関係なく) 次数つき Lie 代数に埋め込まれることが分かったが、特に概均質ベクトル空間の微分表現を次数つき Lie 代数に埋め込んだとき、受け皿の Lie 代数にはどのような性質が見られるのだろうか。この問いに対する答が次の定理であり、本稿のもう一つの主結果である。

**Theorem 3.1.**  $G$  を連結な簡約可能代数群、 $(\rho, V)$  を  $G$  の完全可約表現とする。Lie( $G$ ) を  $G$  の Lie 代数、 $(d\rho, V)$  を  $(\rho, V)$  の微分表現とする。このとき、 $(G, \rho, V)$  が概均質ベクトル空間であるための必要十分条件は、次が成立するような Lie( $G$ ) 上の非退化対称不変双一次形式  $B_0$  が存在することである：

- 四つ組  $(\text{Lie}(G), d\rho, V, B_0)$  は標準的であり、これに対応する Lie 代数  $L(\text{Lie}(G), d\rho, V, B_0) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$  は、 $\text{ad } v : V_{-1} \rightarrow V_0$  を単射にするような  $v \in V_1$  を持つ。

すなわち、簡約可能代数群の表現の概均質性は次数つき Lie 代数の代数的性質で表すことができる。そして、これを応用すれば  $(G \times GL_n, \rho \otimes \Lambda_1, V \otimes \mathbb{C}^n)$  の形の三つ組の概均質性を  $(G, \rho, V)$  の言葉で記述できる。

**Lemma 3.2.**  $GL_n$  の  $n$  次元列ベクトル空間  $\mathbb{C}^n$  への自然な表現を  $\Lambda_1$  で表す。Theorem 3.1 の記号の下、三つ組  $(G \times GL_n, \rho \otimes \Lambda_1, V \otimes \mathbb{C}^n)$  が概均質ベクトル空間であるための必要十分条件は、次で定義されるベクトル空間

$$S_{(v_1, \dots, v_n)} := \{(\phi_1, \dots, \phi_n) \in (\text{Hom}(V, \mathbb{C}))^n \mid \langle v_i, \phi_j \rangle = 0 \ (1 \leq i, j \leq n), \sum_{k=1}^n \Phi_\rho(v_k \otimes \phi_k) = 0\}$$

が  $\{0\}$  となるような  $v_1, \dots, v_n \in V$  が存在することである。ただし、 $\Phi_\rho$  は四つ組  $(\text{Lie}(G), d\rho, V, B_0)$  の  $\Phi$ -写像を表す。

この補題の直接の応用が次に挙げる「裏返し変換の別証明」である。

**Theorem 3.3 (裏返し変換).**  $m := \dim V > n$  とする。Theorem 3.1 の記号の下、 $(G \times GL_n, \rho \otimes \Lambda_1, V \otimes \mathbb{C}^n)$  が概均質ベクトル空間であるための必要十分条件は、 $(G \times GL_{m-n}, \rho^* \otimes \Lambda_1, \text{Hom}(V, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}^{m-n})$  が概均質ベクトル空間になることである。

証明は Lemma 3.2 から得られるが, ここでは概略を述べるにとどめる. まず,  $(G \times GL_n, \rho \otimes \Lambda_1, V \otimes \mathbb{C}^n)$  が概均質であると仮定し, Lemma 3.2 を使って  $S_{(v_1, \dots, v_n)} = \{0\}$  であるような  $v_1, \dots, v_n \in V$  をとる. そして,  $V$  の部分ベクトル空間  $\mathbb{C}v_1 + \dots + \mathbb{C}v_n \subset V$  と直交する  $\text{Hom}(V, \mathbb{C})$  の  $(m-n)$  次元部分ベクトル空間をとり, さらにその基底  $\psi_1, \dots, \psi_{m-n}$  をとれば,  $S_{(\psi_1, \dots, \psi_{m-n})} = \{0\}$  となる.

この証明は残念ながら作用する群が簡約可能である場合にしか適用できない. 裏返し変換 (castling transformation) は  $G$  が一般の線形代数群の場合に成立するが, その詳細や証明については [6, p.37, Proposition 7] を参照されたい. 特に, [6] では裏返し変換を用いて表現が既約であるような概均質ベクトル空間の分類が与えられている.

## 4 今後の課題

放物型に限らず, 任意の概均質ベクトル空間が次数つき Lie 代数と関係があることが分かった. 本稿で紹介した理論は放物型概均質ベクトル空間理論の拡張になるわけだが, 最大の違いは最後に述べた裏返し変換が出来るかどうかである. 裏返し変換では正則性などの重要な性質が保存されるが, 放物型の裏返し変換がまた放物型になるとは限らない. 一方, 受け皿の次数つき Lie 代数を無限次元まで許容すれば裏返し変換は無有限次元 Lie 代数論の枠内で証明できるため, 概均質ベクトル空間のいくつかの性質は Lie 代数論で記述できると期待している. 特に, 概均質ベクトル空間の正則性を Lie 代数の言葉で記述できるかどうかは, 興味深い研究課題である.

また, Example 2.5 によって標準的な四つ組に付随する Lie 代数が有限次元半単純 Lie 代数のクラスを含んでいることが分かる. では, アフィン Lie 代数や一般の Kac-Moody Lie 代数を含んでいるだろうか. この問題に対する答はまだ得られていないが, 講演では最近の進捗状況についてお話したいと考えている.

## References

- [1] N. Bourbaki. Lie groups and Lie algebra. Springer, Berlin, 1989.
- [2] H. Rubenthaler. Algèbres de Lie et espaces préhomogènes (Travaux en cours). Hermann, Paris, (1992).
- [3] H. Rubenthaler. Graded Lie algebras associated to a representation of a quadratic algebra. arXiv:1410.0031v3 (2015).
- [4] N. Sasano. Lie algebras generated by Lie modules. Kyushu Journal of Mathematics. vol. 68, No. 2 (2014), 377–403.
- [5] N. Sasano. Lie algebras associated with a standard quadruplets and prehomogeneous vector spaces. Tsukuba Journal of Mathematics. vol. 39, No. 1 (2015), 1–14.
- [6] M. Sato and T. Kimura. A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants. Nagoya Mathematical Journal. vol. 65 (1977), 1–155.

# On Transcendence Theory with little history, new results and open problems

Hyun Seok, Lee

December 27, 2015

## Abstract

This talk will be dealt to a survey of transcendence theory, including little history, the state of the art and some of the main conjectures, the limits of the current methods and the obstacles which are preventing from going further.

## 1 Introudction

**Definition 1.1.** *An algebraic number is a complex number which is a root of a polynomial with rational coefficients.*

- For example  $\sqrt{2}$ ,  $i = \sqrt{-1}$ , the Golden Ration  $(1 + \sqrt{5})/2$ , the roots of unity  $e^{2\pi ia/b}$ , the roots of the polynomial  $x^5 - 6x + 3 = 0$  are algebraic numbers.

**Definition 1.2.** *A transcendental number is a complex number which is not algebraic.*

**Definition 1.3.** *Complex numbers  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  are **algebraically dependent** if there exists a non-zero polynomial  $P(x_1, \dots, x_n)$  in  $n$  variables with rational coefficients such that  $P(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$ . Otherwise, they are called **algebraically independent**.*

The existence of transcendental numbers was proved in 1844 by J. Liouville who gave explicit ad-hoc examples. The transcendence of constants from analysis is harder; the first result was achieved in 1873 by Ch. Hermite who proved the transcendence of  $e$ . In 1882, the proof by F. Lindemann of the transcendence of  $\pi$  gave the final (and negative) answer to the Greek problem of squaring the circle. The transcendence of  $2^{\sqrt{2}}$  and  $e^\pi$ , which was included in Hilbert's seventh problem in 1900, was proved by Gel'fond and Schneider in 1934. During the last century, this theory has been extensively developed, and these developments gave rise to a number of deep applications. In spite of that, most questions are still open. In this article we survey the state of the art on known results and open problems.

## 2 Irrationality

**Definition 2.1.** *Given a basis of  $b \geq 2$ , a real number  $x$  is rational if and only if its expansion in basis  $b$  is ultimately periodic.*

Let  $b \geq 2$  be an integer.

- É. Borel (1909 and 1950) : the  $b$ -ary expansion of an algebraic irrational numbers should satisfy some of the laws shared by almost all numbers (with respect to Lebesgue's measure).
- **Remark.** No number satisfies all the laws which are shared by all numbers outside of a set of measure zero, because the intersection of all these sets of full measure is empty!

$$\bigcap_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{R} \setminus \{x\} = \emptyset.$$

- More precise statement by B. Adamczewski and Y. Bugeaud.

**Conjecture 2.1.** (*É. Borel*). *Let  $x$  be an irrational algebraic real number,  $b \geq 3$  a positive integer and  $a$  an integer in the range  $0 \leq a \leq b - 1$ . Then the digit  $a$  occurs at least once in the  $b$ -ary expansion of  $x$ .*

**Corollary 2.1.** *Each given sequence of digits should occur infinitely often in the  $b$ -ary expansion of any real irrational algebraic number. (consider powers of  $b$ ).*

- An irrational algebraic number with a regular expansion in some basis  $b$  should be transcendental.
- There is no explicitly known example of a triple  $(b, a, x)$ , where  $b \geq 3$  is an integer,  $a$  is a digit in  $\{0, \dots, b - 1\}$  and  $x$  is an algebraic irrational number, for which one claim that the digit  $a$  occurs infinitely often in the  $b$ -ary expansion of  $x$ .

**Conjecture 2.2** (The state of the art statement). *A stronger conjecture is due to Borel, is that algebraic irrational real numbers are normal, i.e., each sequence of  $n$  digits in basis  $b$  should occur with the frequency  $1/b^n$ , for all  $b$  and all  $n$ .*

**Theorem 2.1** (B. Adamczewski, Y. Bugeaud 2005 ; conjecture of A. Cobham 1968). *If the sequence of digits of a real number  $x$  is produced by a finite automaton, then  $x$  is either rational or else transcendental.*

## 3 Irrationality of transcendental numbers

We will first give known and unknown transcendence results

- Known:

$$e, \pi, \log 2, e^{\sqrt{2}}, e^{\pi}, 2^{\sqrt{2}}, \Gamma(1/4)$$

- Not known :

$e + \pi$ ,  $e\pi$ ,  $\log \pi$ ,  $\pi^e$ ,  $\Gamma(1/5)$ ,  $\zeta(3)$ , Euler-Mascheroni constant

**Conjecture 3.1.** *Is Catalan's constant*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = 0.9159655941772190150 \dots$$

*an irrational number?*

- Catalan's constant is the value at  $s = 2$  of the Dirichlet  $L$ -function  $L(s, \chi_{-4})$  associated with the Kronecker character

$$\chi_{-4}(n) = \left(\frac{n}{4}\right) = \begin{cases} 0 & \text{if } n \text{ is even,} \\ 1 & \text{if } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ -1 & \text{if } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

- The Dirichlet  $L$ -function  $L(s, \chi_{-4})$  associated with the Kronecker character  $\chi_{-4}$  is the quotient of the Dedekind zeta function of  $\mathbb{Q}(i)$  and the Riemann zeta function:

$$\zeta_{\mathbb{Q}(i)}(s) = L(s, \chi_{-4})\zeta(s)$$

**Theorem 3.1** (Basel Problem, Euler 1735). *For any even integer value of  $s \geq 2$ , the number  $\zeta(s)$  is a rational multiple of  $\pi^s$ .*

- $\zeta(2) = \pi^2/6$ ,  $\zeta(4) = \pi^4/90$ ,  $\zeta(6) = \pi^6/945$ ,  $\zeta(8) = \pi^8/9450 \dots$

**Theorem 3.2** (Apéry 1978). *The number*

$$\zeta(3) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3} = 1.202056903159594285399738161511 \dots$$

*is irrational.*

**Conjecture 3.2.** *Is the number  $\zeta(3)/\pi^3$  irrational?*

**Conjecture 3.3.** *Is the number*

$$\zeta(5) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^5} = 1.036927755143369926331365486457 \dots$$

*irrational.*

**Theorem 3.3** (Tanguy Rivoal, 2000). *Let  $\epsilon > 0$ . For any sufficiently large odd integer  $a$ , the dimension of the  $\mathbb{Q}$ -vector space spanned by the numbers  $1, \zeta(3), \zeta(5), \dots, \zeta(a)$  is at least*

$$\frac{1 - \epsilon}{1 + \log 2} \log a.$$



**Definition 3.1.** *Euler-Mascheroni constant defined by*

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \right)$$

**Conjecture 3.4.** *Is it a rational number?*

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \log \left( 1 + \frac{1}{k} \right) \right) = \int_1^{\infty} \left( \frac{1}{[x]} - \frac{1}{x} \right) dx = - \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-x)dxdy}{(1-xy)\log(xy)}.$$

**Theorem 3.4** (S.D. Adihikari, N. Saradha, T.N. Shorey and R. Tijdemann 2001). *Let  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}} \pmod q$  and such that*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n} \tag{1}$$

*converges. Then  $S = 0$  or  $S \notin \overline{\mathbb{Q}}$ . In the latter case we have*

$$\log |S - \alpha| \geq -c^q q^{3q} (d_\alpha d_f)^{q+3} \max(h_\alpha, h_f)$$

*for any algebraic number  $\alpha$ , where  $c$  is some computable absolute constant.*

**Corollary 3.1.** *Let  $q \geq 2$  be an integer and  $\chi$  non-principal Dirichlet character mod  $q$ . Then  $L(1, \chi)$  is transcendental.*

**Theorem 3.5** ((N. Saradha, R. Tijdeman, 2003)). *Let*

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\alpha n + \beta)}{(qn + s_1)(qn + s_2)}$$

*with  $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$ ,  $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$  and  $|\alpha| + |\beta| > 0$ . Let  $\Phi_{2q}$  be irreducible over  $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$  and  $s_1, s_2$  distinct integers such that  $qn_1 + s_1, qn_2 + s_2$  do not vanish for  $n \geq 0$ . Assume that  $\alpha \neq 0$  if  $s_1 \equiv s_2 \pmod q$ . Then  $T$  is transcendental.*

- For example,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{n^2+n+1} = \frac{32\pi}{e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{3}} + e^{-\frac{1}{2}\pi\sqrt{3}}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} = \frac{\pi}{e^{2\pi}-1} + \frac{\pi+1}{2}.$$

**Definition 3.2.** *The Fibonacci sequence  $(F_n)_{n \geq 0}$  is defined by*

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

We note that the following series involving Fibonacci numbers

- The number

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n F_{n+2}} = 1$$

is rational.

- While

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2^n}} = \frac{7 - \sqrt{5}}{2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{F_n F_{n+1}} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2^{n-1}} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

are irrational algebraic numbers.

- The numbers

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n^{2i}}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n-1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{F_n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{F_{2n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2^{n+1}}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2^{n-1}} + F_{2^{n+1}}}$$

are all transcendentals.

- Each of the numbers

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n + F_{n+2}}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{F_1 F_2 \cdots F_n}$$

is irrational, but it is not known whether they are algebraic or transcendental.

The first challenge here is to formulate a conjectural statement which would give a satisfactory description of the situation.

**Theorem 3.6** (Iekata Shiokawa, Carsten Elsner and Shun Shimomura, 2006). For  $\Re(s) > 0$ ,

$$\zeta_F(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{F_n^s}$$

$\zeta_F(2), \zeta_F(4), \zeta_F(6)$  are algebraically independent.

## 4 Transcendental Numbers

**Theorem 4.1** (Liouville, 1844). If  $\alpha$  is real and algebraic of degree  $d$ , then there is a positive constant  $C(\alpha)$ , i.e. depending only on  $\alpha$ , such that for every rational  $\frac{q}{p}$ ,

$$\left| \alpha - \frac{q}{p} \right| > \frac{C(\alpha)}{p^d}.$$

J. Liouville gave the first example of transcendental numbers.

**Corollary 4.1.**  $\alpha := \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$  is transcendental.

- Charles Hermite(1873): Transcendence of  $e$
- Ferdinand Lindemann(1882): Transcendence of  $\pi$

**Theorem 4.2** (Hermite-Lindemann, 1882). For any non-zero complex number  $z$ , one at least of the two numbers  $z$  and  $e^z$  is transcendental.

**Corollary 4.2.** *Transcendence of  $\log \alpha$  and of  $e^\beta$  for  $\alpha$  and  $\beta$  non-zero algebraic complex numbers, provided  $\log \alpha \neq 0$*

**Definition 4.1.** *A complex function is called transcendental if it is transcendental over the field  $\mathbb{C}(z)$ , which means that the function  $z$  and  $f(z)$  are algebraically independent: if  $P \in \mathbb{C}[X, Y]$  is a non-zero polynomial, then the function  $P(z, f(z))$  is not 0.*

**Definition 4.2.** *A **exceptional set** defined by the transcendental function  $f$  given, that is the set*

$$\mathcal{E}(f) = \{\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} : f(\alpha) \in \overline{\mathbb{Q}}\}$$

**Question 4.1** (Weierstrass). *Is it true that a transcendental entire function  $f$  takes usually transcendental values at algebraic point.*

**Example 4.1.** 1. *For  $f(z) = e^z$ , there is a single exceptional point  $\alpha$  algebraic with  $e^\alpha$  also algebraic, namely  $\alpha = 0$ .*

2. *For  $f(z) = e^{P(z)}$  where  $P \in \mathbb{Z}[z]$  is a non-constant polynomial, there are finitely many exceptional points  $\alpha$ , namely the roots of  $P$ .*

3. *The exceptional set of  $e^z + e^{1+z}$  is empty.*

4. *The exceptional set of functions like  $e^z + e^{1+z}$  is empty (Lindemann-Weierstrass).*

5. *The exceptional set of functions like  $2^z$  or  $e^{i\pi z}$  is  $\mathbb{Q}$ , (Gel'fond and Schneider)*

Answers by Weierstrass (letter to Strauss in 1886), Strauss, Stäckel, Faber, van der Poorten, Gramain,

**Theorem 4.3.** *If  $S$  is a countable subset of  $\mathbb{C}$  and  $T$  is a dense subset of  $\mathbb{C}$ , there exist transcendental entire functions  $f$  mapping  $S$  into  $T$ , as well as its derivative.*

**Theorem 4.4** (van der Poorten). *There are transcendental entire functions  $f$  such that  $D^k f(\alpha) \in \mathbb{Q}(\alpha)$  for all  $k \geq 0$  and all algebraic  $\alpha$ .*

**Definition 4.3.** *An **integer valued entire function** is a function  $f$ , which is analytic in  $\mathbb{C}$ , and maps  $\mathbb{N}$  into  $\mathbb{Z}$ , e.g.  $2^z$  is an integer valued entire function, not a polynomial.*

**Question 4.2.** *Are there integer valued entire function growing slower than  $2^z$  without being a polynomial?*

**Definition 4.4.** *Let  $f$  be a transcendental entire function in  $\mathbb{C}$ . For  $R > 0$  set*

$$|f|_R = \sup_{|z|=R} |f(z)|.$$

**Theorem 4.5** (G. Pólya, 1914). *If  $f$  is not a polynomial and  $f(n) \in \mathbb{Z}$  for  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , then*

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} 2^{-R} |f|_R \geq 1.$$

**Theorem 4.6** (A.O. Gel'fond 1929). *Growth of entire functions mapping the Gaussian integers into themselves. Newton interpolation series at the points in  $\mathbb{Z}[i]$ .*

**Theorem 4.7.** *An entire function  $f$  which is not a polynomial and satisfies  $f(a + bi) \in \mathbb{Z}[i]$  for all  $a + bi \in \mathbb{Z}[i]$  satisfies*

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R^2} \log |f|_R \geq \delta.$$

**Theorem 4.8** (F. Gramin, 1981).  $\delta = \frac{\pi}{2e} = 0.5888636748 \dots$

- This is best possible proved by D.W. Masser (1980).

**Theorem 4.9** (A.O. Gel'fond, 1929). *If  $e^\pi$  is rational, then the function  $e^{\pi z}$  takes values  $\mathbb{Q}(i)$  when the argument  $z$  is in  $\mathbb{Z}[i]$ .*

**Theorem 4.10** (A.O. Gel'fond and Th. Schneider, 1934). *Transcendence of  $\alpha^\beta$  and of  $(\log \alpha_1)/(\log \alpha_2)$  for algebraic  $\alpha, \beta, \alpha_1$  and  $\alpha_2$ .*

**Theorem 4.11** (A.O. Gel'fond, 1948). *The two number  $2^{\sqrt[3]{2}}$  and  $2^{\sqrt[3]{4}}$  are algebraically independent. More generally, if  $\alpha$  is an algebraic number,  $\alpha \neq 0$ ,  $\alpha \neq 1$  and if  $\beta$  is an algebraic number of degree  $d \geq 3$ , then two at least of the number*

$$\alpha^\beta, \alpha^{\beta^2}, \dots, \alpha^{\beta^{d-1}}$$

*are algebraically independent.*

**Theorem 4.12** (Six Exponentials). *Let  $x_1, \dots, x_d$  be complex numbers which are linearly independent over  $\mathbb{Q}$  and let  $y_1, \dots, y_l$  also be complex numbers which are linearly independent over  $\mathbb{Q}$ . Assume  $dl > d + l$ . Then one at least of the  $dl$  numbers*

$$\exp(x_i y_j), \quad (1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq l)$$

*is transcendental.*

- The theorem was first explicitly stated and proved in its complete form independently by Serge Lang and Kanakanahalli Ramachandra in the 1960s.
- It is clear that the interesting case is  $d = 3, l = 2$  (or  $d = 2, l = 3$ ), and this explains the name of result.
- One conjectures that the conclusion is still valid under the weaker hypothesis  $dl \geq d + l$  ( $d = 2, l = 2$ ).

**Theorem 4.13** (A. Baker, 1966). *Let  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  be non-zero algebraic numbers for which  $\log \alpha_1, \dots, \log \alpha_n, 2\pi i$  are linearly independent over  $\mathbb{Q}$ . Then*

$$\beta_1 \log \alpha_1 + \dots + \beta_n \log \alpha_n \neq 0$$

for any algebraic numbers  $\beta_1, \dots, \beta_n$  that are not all zero.

**Corollary 4.3.** *Transcendence of numbers like*

$$\beta_1 \log \alpha_1 + \dots + \beta_n \log \alpha_n \text{ or } e^{\beta_0} \alpha_1^{\beta_1} \dots \alpha_n^{\beta_n}$$

for algebraics  $\alpha_i$ 's and  $\beta_j$ 's, e.g.  $2^{\sqrt{2}} \cdot 3^{\sqrt{5}} \cdot 5^{\sqrt{7}}$ .

**Theorem 4.14** (G.V. Chudnovsky, 1976). *Algebraic independence of the numbers  $\pi$  and  $\Gamma(1/4)$ , also algebraic independence of the numbers  $\pi$  and  $\Gamma(1/3)$ .*

**Corollary 4.4.** *Transcendence of  $\Gamma(1/4)$  and  $\Gamma(1/3)$ .*

**Theorem 4.15** (Yu. V. Nesterenko, 1996). *Algebraic independence of  $\Gamma(1/4), \pi$  and  $e^\pi$ , also algebraic independence of  $\Gamma(1/3), \pi$  and  $e^{\pi\sqrt{3}}$ .*

**Corollary 4.5.** *The numbers  $\pi$  and  $e^\pi$  are algebraically independent.*

**Definition 4.5.** *Let  $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$  be a lattice in  $\mathbb{C}$ . The canonical product attached to  $\Omega$  is the Weierstraßsigma function*

$$\sigma(z) = \sigma_\Omega(z) = z \prod_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) e^{(z/\omega) + (z^2/2\omega^2)}.$$

- The number

$$\sigma_{\mathbb{Z}[i]}(1/2) = 2^{5/4} \pi^{1/2} e^{\pi/8} \Gamma(1/4)^{-2}$$

is transcendental.

## 5 Conjectures

**Conjecture 5.1** (Four Exponentials Conjecture). *Let  $x_1, x_2$  be two  $\mathbb{Q}$ -linearly independent complex numbers and  $y_1, y_2$  also two  $\mathbb{Q}$ -linearly independent complex numbers. Then one at least of the four numbers*

$$e^{x_1 y_1}, e^{x_1 y_2}, e^{x_2 y_1}, e^{x_2 y_2}$$

is transcendental.

**Definition 5.1.** *A **period** is a complex number whose real and imaginary parts are values of absolutely convergent integrals of rational function with rational coefficients, over domains in  $\mathbb{R}^n$  given by polynomial inequalities with rational coefficients.*

**Example 5.1.** *Basic example of a period:*

$$e^{z+2\pi i} = e^z, \quad 2i\pi = \int_{|z|=1} \frac{dz}{z}$$

$$\pi = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1-x^2}$$

*Further examples*

$$\sqrt{2} = \int_{2x^2 \geq 1} dx \quad \text{and all algebraic numbers.}$$

$$\log 2 = \int_{1 < x < 2} \frac{dx}{x} \quad \text{and all logarithms of algebraic numbers.}$$

*A product of periods is a period (subalgebra of  $\mathbb{C}$ ), but  $1/\pi$  is expected not to be a period.*

A widely-held belief, based on a judicious combination of experience, analogy, and wishful thinking, is the following

**Conjecture 5.2** (Kontsevich-Zagier). *If a period has two integral representations, then one can pass from one formula to another in which all functions and domains of integration are algebraic with algebraic coefficients.*

In other words, we do not expect any miraculous coincidences of two integrals of algebraic functions which will not be possible to prove using three simple rules. This conjecture, which is similar in spirit to the Hodge conjecture, is one of the central conjectures about algebraic independence and transcendental numbers, and is related to many of the results and ideas of modern arithmetic algebraic geometry and the theory of motives.

**Conjecture 5.3** (Schnuel). *If  $x_1, \dots, x_n$  are  $\mathbb{Q}$ -linearly independent complex numbers, then  $n$  at least of the  $2n$  numbers  $x_1, \dots, x_n, e^{x_1}, \dots, e^{x_n}$  are algebraically independent.*

A simple geometric construction on the moduli spaces  $\mathcal{M}_{0,n}$  of curves of genus 0 with  $n$  ordered marked points is described which gives a common framework for many irrationality proofs for zeta values. This construction yields Apéry's approximations to  $\zeta(2)$  and  $\zeta(3)$ , and for larger  $n$ , an infinite family of small linear forms in multiple zeta values with an interesting algebraic structure. It also contains a generalization of the linear forms used by Ball and Rivoal to prove that infinitely many odd zeta values are irrational.

**Theorem 5.1** (Francis Brown, 19 Dec 2014). *For  $k, s_1, \dots, s_k$  positive integers with  $s_1 \geq 2$ , we set  $\underline{s} = (s_1, \dots, s_k)$  and*

$$\zeta(\underline{s}) = \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_k \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_k^{s_k}}.$$

The  $\mathbb{Q}$ -vector space  $\mathcal{E}$  spanned by the number  $\zeta(\underline{s})$  is also a  $\mathbb{Q}$ -algebra. For  $n \geq 2$ , denote by  $\mathcal{E}_n$  the  $\mathbb{Q}$ -subspace of  $\mathcal{E}$  spanned by the real numbers  $\zeta(\underline{s})$  where  $\underline{s}$  has weight  $s_1 + \cdots + s_k = n$ .  
The number  $\zeta(s_1, \dots, s_k)$   $s_1 + \cdots + s_k = n$ , where each  $s_i$  is 2 or 3, span  $\mathcal{E}_n$  over  $\mathbb{Q}$ .

## References

- [1] Lang, Serge. *Introduction to transcendental numbers*. Reading, Mass (1966).
- [2] Chudnovsky, Gregory. *Contributions to the theory of transcendental numbers*. No. 19. American Mathematical Soc., 1984.
- [3] Baker, Alan. *Transcendental number theory*. Cambridge University Press, 1990.
- [4] Rivoal, Tanguy. *La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs*. arXiv preprint math/0008051 (2000).
- [5] Waldschmidt, Michel. *Diophantine approximation on linear algebraic groups: transcendence properties of the exponential function in several variables. Vol. 326*. Springer Science & Business Media, 2000.
- [6] Adhikari, S. D., et al. *Transcendental infinite sums*. *Indagationes Mathematicae* 12.1 (2001): 1-14.
- [7] Saradha, N., and R. Tijdeman. *On the transcendence of infinite sums of values of rational functions*. *Journal of the London Mathematical Society* 67.3 (2003): 580-592.
- [8] Adamczewski, Boris, and Yann Bugeaud. *On the complexity of algebraic numbers, II. Continued fractions*. *Acta Mathematica* 195.1 (2005): 1-20.
- [9] Tijdeman, R. *On irrationality and transcendency of infinite sums of rational numbers*. *Shorey Proc.*, to appear.
- [10] M. Ram Murty, P. Rath, *Transcendental Numbers*. Springer, 2014
- [11] Brown, Francis. *Irrationality proofs for zeta values, moduli spaces and dinner parties*. arXiv preprint arXiv:1412.6508 (2014).
- [12] Gelfond, Aleksandr Osipovich. *Transcendental and algebraic numbers*. Courier Dover Publications, 2015.

# Ohno-type relation for finite multiple zeta values

小山 宏次郎 (Kojiro OYAMA)  
九州大学大学院数理学府数理学専攻

## 1 序文

多重ゼータ値 (Multiple Zeta Value, MZV) とは,  $k_i \in \mathbb{N}, k_1 \geq 2$  に対して

$$\zeta(\mathbf{k}) = \zeta(k_1, \dots, k_r) := \sum_{m_1 > \dots > m_r > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}} \in \mathbb{R}$$

で定義される実数である. 今回はその類似物として, 素数  $p$  を固定して, MZV の和を  $p$  の手前で打ち切った有限和

$$\zeta_p(\mathbf{k}) = \zeta_p(k_1, \dots, k_r) := \sum_{p > m_1 > \dots > m_r > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}} \pmod{p}$$

について考える. (有限和であるので,  $k_1 \geq 1$  で良い.) これは “mod  $p$  multiple harmonic sum” と呼ばれ, Hoffman や Zhao 等によって研究されていた対象である. そして, 近年 Zagier が固定された素数  $p$  でなく, 全ての素数  $p$  に対してこの和を同時に考える枠組みを提唱した. 本稿では, Zagier の提唱した枠組によって与えられる有限多重ゼータ値 (Finite Multiple Zeta Value, FMZV) について, その定義と次元予想について紹介したうえで, 主結果について説明をする.

### 1.1 定義, 次元予想

集合  $\mathcal{A}$  を次で定義する.

$$\mathcal{A} := \left( \prod_{p:\text{素数}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right) / \left( \bigoplus_{p:\text{素数}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right) = \{(a_p)_p \mid a_p \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\} / \sim,$$

ここで  $(a_p)_p \sim (b_p)_p$  は, 高々有限個を除く全ての素数  $p$  に対して  $a_p = b_p$  が成立することを意味する.  $\mathcal{A}$  は成分ごとの演算によって和と積を入れることにより, 自然に環になる. また,  $\mathcal{A}$  の元は  $(a_p)_p$  のように書かれるが, 有限個の  $a_p$  に対しては定義されていない場合がある. その場合は適当に有限個の  $a_p$  に対して値を定めてやることで, 値の定め方に依らずに  $(a_p)_p$  は定義される. さらに, 対角線写像

$$\mathbb{Q} \ni r \mapsto (r \pmod{p})_p \in \mathcal{A}$$

を考えると,  $r$  の分子を割り切る素数は有限個しかないことから, この写像は単射準同型であることが従い,  $\mathcal{A}$  は  $\mathbb{Q}$  代数になることがわかる.

このとき  $\mathcal{A}$  の元として, 有限多重ゼータ値は次のように定義される.



**定義 1.1.** 任意のインデックス  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{N}^r$  に対して, 有限多重ゼータ値を

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = \zeta_{\mathcal{A}}(k_1, \dots, k_r) := (\zeta_p(k_1, \dots, k_r))_p \in \mathcal{A}$$

で定義する.

インデックス  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$  に対して,  $\text{wt}(\mathbf{k}) := k_1 + \dots + k_r$ ,  $\text{dep}(\mathbf{k}) := r$  をそれぞれ重さ, 深さと呼ぶ. また,  $\mathbf{k}^\vee$  を  $\mathbf{k}$  の Hoffman's dual といい, 各  $k_i$  をすべて  $1 + \dots + 1$  の形で書いたときに, カンマ「,」をプラス「+」に, プラス「+」をカンマ「,」に取り換えたときに得られるインデックスを表している. 例えば,

$$(k)^\vee = (1, \dots, 1), \quad (2, 3, 1, 2)^\vee = (1, 2, 1, 3, 1)$$

等である. Hoffman's dual と元のインデックスは,

$$\text{wt}(\mathbf{k}) = \text{wt}(\mathbf{k}^\vee), \quad \text{dep}(\mathbf{k}) + \text{dep}(\mathbf{k}^\vee) = \text{wt}(\mathbf{k}) + 1$$

の関係にある.

有限多重ゼータ値の張る  $\mathbb{Q}$  ベクトル空間を次のように定義する.

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{A},0} := \mathbb{Q}, \quad \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k} := \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_r = k \\ r \geq 1, k_i \geq 1}} \mathbb{Q} \cdot \zeta_{\mathcal{A}}(k_1, \dots, k_r)$$

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{A}} := \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}.$$

特に,  $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$  は  $\mathbb{Q}$  代数となっている. このとき, Zagier によって次の次元予想が予想された.

**予想 1.2** (Zagier [6]). 数列  $\{d_k\}_{k \geq 0}$  を

$$\begin{aligned} d_0 &= 1, d_1 = 0, d_2 = 1, \\ d_k &= d_{k-2} + d_{k-3} \quad (k \geq 3) \end{aligned}$$

で定めたとき,

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k} = d_k - d_{k-2}.$$

この予想に関する著しい結果として次の定理が挙げられる:

**定理 1.3** (Akagi-Hirose-Yasuda, Jarossay).

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k} \leq d_k - d_{k-2}.$$

この定理により, FMZV には多くの線形関係式が存在することがわかる. (重さ  $k$  のインデックスが  $2^{k-1}$  だけあることに注意すると, 重さ  $k$  ごとに, 少なくとも  $2^{k-1} - (d_k - d_{k-2})$  個の線形関係式が存在することが言える.) そこで, FMZV の関係式を具体的に記述するという素朴だが重要な問題が考えられる.

## 2 代数的定式化

この節では, Hoffman[3] により導入された MZV の代数的定式化にならって, FMZV の代数的定式化を行う.

2変数非可換多項式環  $\mathfrak{H} := \mathbb{Q}\langle x, y \rangle$  の部分環  $\mathfrak{H}^1$  を

$$\mathfrak{H} \supset \mathfrak{H}^1 := \mathbb{Q} + \mathfrak{H}y$$

とおく. また, 任意の word  $w \in \mathfrak{H}$  に対して,  $w$  の次数を  $w$  の重さと呼ぶ ( $|w|$  と書く). 自然数  $k$  に対して  $z_k := x^{k-1}y$  とおき,  $\mathbb{Q}$ -線形写像  $Z_{\mathcal{A}} : \mathfrak{H}^1 \rightarrow \mathcal{A}$  を,

$$Z_{\mathcal{A}}(1) = (1)_p, \quad Z_{\mathcal{A}}(z_{k_1} \cdots z_{k_r}) = \zeta_{\mathcal{A}}(k_1, \dots, k_r)$$

を  $\mathbb{Q}$ -線形に拡張したものとする.

$\mathfrak{H}^1$  上の積  $*$  (調和積) を次の規則と双線形性により定義する:

- (i) 任意の word  $w \in \mathfrak{H}^1$  対し,  $w * 1 = 1 * w = w$ .
- (ii) 任意の words  $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1$  と  $m, n \in \mathbb{N}$  対し

$$z_m w_1 * z_n w_2 = z_m (w_1 * z_n w_2) + z_n (z_m w_1 * w_2) + z_{m+n} (w_1 * w_2).$$

調和積と同様に,  $\mathfrak{H}$  上の積  $\text{III}$  (シャッフル積) を次の規則と双線形性により定義する:

- (i) 任意の word  $w \in \mathfrak{H}$  対し,  $w \text{III} 1 = 1 \text{III} w = w$ .
- (ii)  $u_1, u_2 \in \{x, y\}$  と任意の words  $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}$  対し

$$(u_1 w_1) \text{III} (u_2 w_2) = u_1 (w_1 \text{III} u_2 w_2) + u_2 (u_1 w_1 \text{III} w_2).$$

今定義したこれらの積は, 結合的で可換な積であることが知られている. (cf: [3, 8]). また, これらの積は次の性質を満たす:

**命題 2.1** ([3, 5, 6]). 任意の words  $w = z_{k_1} \cdots z_{k_r}, w' = z_{k'_1} \cdots z_{k'_s} \in \mathfrak{H}^1$  に対して,

- (i)  $Z_{\mathcal{A}}(w * w') = Z_{\mathcal{A}}(w)Z_{\mathcal{A}}(w')$
- (ii)  $Z_{\mathcal{A}}(w \text{III} w') = (-1)^{|w|} Z_{\mathcal{A}}(z_{k_r} \cdots z_{k_1} z_{k'_1} \cdots z_{k'_s})$ .

が成立する.

## 3 主結果

### 3.1 Ohno-type relation

本稿の主結果は次の関係式である.

**定理 3.1** (O. [7]). 任意のインデックス  $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^r$  と任意の  $n \in \mathbb{N}_0$  に対して,

$$\sum_{\substack{\mathbf{e} \in \mathbb{N}_0^s \\ \text{wt}(\mathbf{e})=n}} \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k} + \mathbf{e}) = \sum_{\substack{\mathbf{e}' \in \mathbb{N}_0^s \\ \text{wt}(\mathbf{e}')=n}} \zeta_{\mathcal{A}}((\mathbf{k}^{\vee} + \mathbf{e}')^{\vee})$$

が成立する. ここで,  $s = \text{dep}(\mathbf{k}^{\vee})$  である.

この関係式は, Ohno's relation と呼ばれる MZV の関係式の FMZV 版として, Kaneko によって予想されたものである. また,  $n = 1$  の場合は Ihara が直接計算により示している.

主結果の証明 (詳しくは [7] を参照されたい.) は  $n$  に関する帰納法を用いるのだが, そのためには次の補題が必要になる.

**補題 3.2.** 任意のインデックス  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_r) \in \mathbb{N}^r$  と任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して,

$$\sum_{i=0}^{\min\{n,r\}} \left( (-1)^i \sum_{\substack{\lambda \in \{0,1\}^r \\ \text{wt}(\lambda)=i}} \sum_{\substack{\mathbf{e} \in \mathbb{N}_0^{s+i} \\ \text{wt}(\mathbf{e})=n-i}} \zeta_{\mathcal{A}}(((\mathbf{k} + \boldsymbol{\lambda})^\vee + \mathbf{e})^\vee) \right) = 0$$

が成立する. ここで,  $s = \text{dep}(\mathbf{k}^\vee)$  である.

この補題自体は, 命題 2.1 を用いることによって, 次の命題から得られる.

**命題 3.3** (Ihara-Kaneko-Zagier [4]). 任意の word  $w \in \mathfrak{H}^1$  に対して,

$$\frac{1}{1-yu} * w = \frac{1}{1-yu} \text{III} \Delta_u(w)$$

が成立する. ここで  $\Delta_u$  は  $\widehat{\mathfrak{H}}$  ( $\mathfrak{H}$  の完備化) の自己同型で,

$$\Delta_u(x) = x(1+yu)^{-1}, \quad \Delta_u(y) = y + x(1+yu)^{-1}yu$$

で与えられる. また,  $u$  は形式的パラメータである.

## 3.2 Sum formula

主結果の特殊化として次の関係式が得られる.

**定理 3.4** (Saito-Wakabayashi [9]).  $1 \leq i \leq r \leq k-1$  を満たす任意の  $k, r, i \in \mathbb{N}$  に対して,

$$\sum_{\substack{k_1+\dots+k_r=k \\ \forall k_j \geq 1, k_i \geq 2}} \zeta_{\mathcal{A}}(k_1, \dots, k_r) = (-1)^{i-1} \left( \binom{k-1}{i-1} + (-1)^r \binom{k-1}{r-i} \right) \mathfrak{Z}(k)$$

が成立する.

この定理は, Sum formula と呼ばれる MZV の有名な関係式の FMZV 版として,  $i = 1$  の場合が Kaneko に予想されていたもので, Saito と Wakabayashi によって一般の場合が証明された. 導出方法について, ここでは詳しいことを述べないが,

$$\mathbf{k} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{i-1}, 2, \underbrace{1, \dots, 1}_{r-i}), \quad \mathbf{k}^\vee = (i, r+1-i)$$

というインデックスに対して, 主結果を計算すれば良い.

Sum formula 以外にも, 主結果の特殊化として関係式が何か得られるだろうか.

## 参考文献

- [1] M. E. Hoffman, Multiple harmonic series, *Pacific J. Math.* **152** (1992), 275–290.
- [2] M. E. Hoffman, Quasi-symmetric functions and mod  $p$  multiple harmonic sums, *Kyushu J. Math.*, to appear.
- [3] M. E. Hoffman, The algebra of multiple harmonic series, *J. Algebra* **194** (1997), 477–495.
- [4] K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier, Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values, *Compositio Math.* **142** (2006), 307–338.
- [5] M. Kaneko, Finite multiple zeta values. (in Japanese), *RIMS Kokyuroku Bessatsu*, to appear.
- [6] M. Kaneko and D. Zagier, Finite multiple zeta values, in preparation.
- [7] K. Oyama, Ohno’s relation for finite multiple zeta values, preprint, arXiv:1506.00833
- [8] C. Reutenauer, *Free Lie Algebras*, Oxford Science Publications, 1993.
- [9] S. Saito and N. Wakabayashi, Sum formula for finite multiple zeta values, *J. Math. Soc. Japan*, to appear.

## マトロイドの組合せにおけるトーリックイデアルについて

柴田 和樹 (KAZUKI SHIBATA) (立教大学理学部)

集合  $E = \{1, \dots, d\}$  と  $(\emptyset \neq) \mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_n\} \subset 2^E$  ( $\#B_i = r$ ) に対し, 以下の条件を満たすとき,  $M = (E, \mathcal{B})$  をマトロイドという.

- 任意の  $x \in B_i \setminus B_j$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ) に対し,  $(B_i \cup \{y\}) \setminus \{x\}$ ,  $(B_j \cup \{x\}) \setminus \{y\} \in \mathcal{B}$  となる  $y \in B_j \setminus B_i$  が存在する.

集合  $\mathcal{B}$  の元のことをマトロイドの *basis* と呼び,  $r$  を *rank* という. 以下, マトロイド  $M$  の bases の集合を  $\mathcal{B}(M)$  と表す. 次にマトロイドに付随するトーリックイデアルを定義する.  $K$  を体とし,  $K[X] = K[x_1, \dots, x_n]$  を  $n$  変数多項式環とする. 配置  $\mathcal{D}_M = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\} \subset \mathbb{Z}^d$  を

$$\mathbf{b}_j = \sum_{l \in B_j} \mathbf{e}_l \quad (1 \leq j \leq n)$$

と定める. ここで,  $\mathbf{e}_j$  は  $\mathbb{R}^d$  の単位座標ベクトルとする. また, 配置  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  と  $d \times n$  整数行列  $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  を同一視する. このとき  $M$  のトーリックイデアル  $J_M$  を

$$J_M = \left\langle \prod_{l=1}^u x_{j_l} - \prod_{l=1}^u x_{k_l} \mid \sum_{l=1}^u (\mathbf{b}_{j_l} - \mathbf{b}_{k_l}) = \mathbf{0} \right\rangle$$

と定義する. また半群環  $R_M = K[X]/J_M$  を  $M$  の *bases monomial ring* [12] と呼ぶ. この半群環に対し, 以下のことが知られている.

**Proposition 0.1.** 任意のマトロイド  $M$  に対し, bases monomial ring  $R_M$  は normal である. 特に,  $R_M$  は Cohen-Macaulay である. ここで,  $R_M$  が normal であるとは

$$\mathbb{Z}_{\geq 0} \mathcal{D}_M = \mathbb{Q}_{\geq 0} \mathcal{D}_M \cap \mathbb{Z} \mathcal{D}_M$$

をみたすときにいう. ( $\mathbb{Z}_{\geq 0} \mathcal{D}_M = \{\sum_{i=1}^n r_i \mathbf{b}_i \mid r_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ ,  $\mathbb{Z} \mathcal{D}_M, \mathbb{Q}_{\geq 0} \mathcal{D}_M$  も同様.)

集合  $\mathcal{G}_M$  を

$$\mathcal{G}_M = \left\{ x_i x_j - x_k x_l \mid \begin{array}{l} \alpha \in B_i \setminus B_j \\ \beta \in B_j \setminus B_i \\ B_k = (B_i \cup \{\beta\}) \setminus \{\alpha\} \\ B_l = (B_j \cup \{\alpha\}) \setminus \{\beta\} \end{array} \right\} \subset J_M$$

と定義する. マトロイドのトーリックイデアルに関し, 以下の予想が存在する.

**Conjecture 0.2.** 任意のマトロイド  $M$  に対し,

- $\mathcal{G}_M$  は  $J_M$  の生成系である; [13, 11]
- $\mathcal{G}_M$  が  $J_M$  のグレブナー基底となる単項式順序が存在する.

Conjecture 0.2(a) は graphic matroid [1], rank  $\leq 3$  のマトロイド [5], sparse paving matroid [3], strongly base orderable matroid [6] のとき成り立ち, Conjecture 0.2(b) は uniform matroid [10], rank  $\leq 2$  のマトロイド [7, 2],  $M(K_4)$ -minor をもたない graphic matroid [2], lattice path matroid [8] のとき成り立つことがわかっている. また, 以下の予想は Conjecture 0.2 を弱めたものとなっているが, まだ未解決である.

**Conjecture 0.3.** 任意のマトロイド  $M$  に対し,

- (a)  $J_M$  は 2 次生成である;
- (b)  $J_M$  は 2 次グレブナー基底をもつ.

Conca [4] は transversal matroid に対し, Conjecture 0.3(a) が成り立つことを示した.

本講演では, 2 つのマトロイドを組み合わせたときにトーリックイデアルの生成系やグレブナー基底がどのようになるのかについて講演し, その結果, 以下の定理が成り立つことを紹介する.

**Theorem 0.4** ([9]). マトロイド  $M$  が  $P_6$ ,  $Q_6$ ,  $M(K_4)$ ,  $\mathcal{W}^3$ -minor をもたないならば,  $J_M$  は 2 次グレブナー基底をもつ.

#### REFERENCES

- [1] J. Blasiak, The toric ideal of a graphic matroid is generated by quadrics, *Combinatorica*, **28** (3) (2008), 283-297.
- [2] S. Blum, Base-sortable matroids and Koszulness of semigroup rings, *Europ. J. Combin.*, **22** (2001), 937-951.
- [3] J. Bonin, Basis-exchange properties of sparse paving matroids, *Adv. in Appl. Math.*, **50** (2013), 6-15.
- [4] A. Conca, Linear spaces, transversal polymatroids and ASL domain, *J. Algebraic Comb.*, **25** (2007), 25-41.
- [5] K. Kashiwabara, The toric ideal of a matroid of rank 3 is generated by quadrics, *Electron. J. Combin.*, **17** (2010), # R28.
- [6] M. Lasoń and M. Michałek, On the toric ideal of a matroid, *Adv. Math.*, **259** (2014), 1-12.
- [7] H. Ohsugi and T. Hibi, Compressed polytopes, initial ideals and complete multipartite graphs, *Illinois J. Math.*, **44** (2000), no. 2, 141-146.
- [8] J. Schweig, Toric ideals of lattice path matroids and polymatroids, *J. Pure Appl. Algebra*, **215** (2011), no. 11, 2660-2665.
- [9] K. Shibata, Toric ideals of series and parallel connections of matroids, *J. Algebra Appl.*, in press.
- [10] B. Sturmfels, "Gröbner bases and convex polytopes," Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [11] B. Sturmfels, Equations defining toric varieties, *Proc. Sympos. Pure Math.* **62** (1997), 437-449.
- [12] N. White, The basis monomial ring of a matroid, *Adv. Math.* **24** (1977), 292-297.
- [13] N. White, A unique exchange property for bases, *Linear Algebra Appl.* **31** (1980), 81-91.

KAZUKI SHIBATA, DEPARTMENT OF MATHEMATICS, COLLEGE OF SCIENCE, RIKKYO UNIVERSITY, TOSHIMA-KU, TOKYO 171-8501, JAPAN.

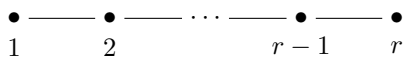
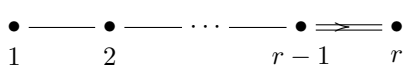
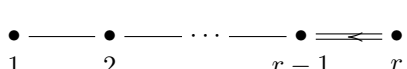
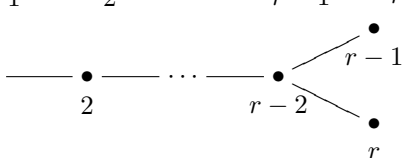
*E-mail address:* k-shibata@rikkyo.ac.jp

# 古典群の double Bruhat cell 上の クラスター変数と結晶基底

上智大学理工学研究科 博士後期課程二年 金久保 有輝 (Yuki Kanakubo)

## 記号

$G$  をランク  $r$  の  $\mathbb{C}$  上の古典的代数群,  $B, B^- \subset G$  をそれぞれ, 上三角, 下三角行列全体とする.  $B, B^-$  は, ボレル 部分群と呼ばれる.  $H := B \cap B^-$  とし,  $N, N^-$  を unipotent radicals,  $W = \text{Norm}(H)/H$  を ワイル 群とする. ワイル群  $W$  は, 単純鏡映  $\{s_i\}_{1 \leq i \leq r}$  によって生成される.  $\Lambda_i$  を  $i$  番目の基本ウエイト,  $I = \{1, 2, \dots, r\}$  を添字集合とする. 古典的な代数群は, 以下の 4 種類である:

型	G	ディンキン図形
A	$\text{SL}_{r+1}(\mathbb{C}) = \{x \in \text{Mat}_{r+1}(\mathbb{C}) \mid \det(x) = 1\}$	
B	$\text{SO}_{2r+1}(\mathbb{C}) = \{x \in \text{SL}_{2r+1}(\mathbb{C}) \mid {}^t x \cdot J_{2r+1} \cdot x = J_{2r+1}\}$	
C	$\text{Sp}_{2r}(\mathbb{C}) = \{x \in \text{SL}_{2r}(\mathbb{C}) \mid {}^t x \cdot J_{2r}^- \cdot x = J_{2r}^-\}$	
D	$\text{SO}_{2r}(\mathbb{C}) = \{x \in \text{SL}_{2r}(\mathbb{C}) \mid {}^t x \cdot J_{2r} \cdot x = J_{2r}\}$	

ここに,

$$J_N := \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \cdot & \\ & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}, \quad J_{2r}^- = \begin{pmatrix} & & & J_r \\ -J_r & & & \end{pmatrix}.$$

各型のディンキン図形に対し, カルタン行列  $A = (a_{i,j})_{i,j \in I}$  を

$$a_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{if } i = j, \\ -1 & \text{if } \begin{matrix} \bullet & \text{---} & \bullet \\ i & & j \end{matrix}, \begin{matrix} \bullet & \rightleftharpoons & \bullet \\ i & & j \end{matrix} \\ -2 & \text{if } \begin{matrix} \bullet & \rightleftharpoons & \bullet \\ i & & j \end{matrix}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定める. また,  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_r)$  を,  $DA$  が対称行列となるような正整数対角行列とする.

# 1 Introduction

代数群は、群構造の入った variety である。古典的なものとして、上記の A, B, C, D 型の 4 種類がある。代数群の unipotent radical  $N$  上の座標環  $\mathbb{C}[N]$  は、クラスター代数という代数構造を持つ。これは、クラスター変数と呼ばれる特別な生成元を持つ代数であり、その生成元に注目することによって組合せ論的に代数構造を調べることができる。小行列式 (またはそれを一般化した generalized minors) は、 $\mathbb{C}[N]$  のクラスター変数の一部であり、これらから他のクラスター変数を、一定の規則で次々と構成していくことができるのである。

一方、代数群が与えられると、そのリー環を考えることもできる。リー環の普遍包絡環  $U(\mathfrak{g})$  を考えると、その部分環  $U(\mathfrak{n})$  ( $\mathfrak{n} := \text{Lie}(N)$ ) に、Lusztig-半標準基底という基底が幾何的に構成される [1]。座標環  $\mathbb{C}[N]$  と  $U(\mathfrak{n})$  は互いに双対関係にあり、半標準基底の双対底が、先に述べた  $\mathbb{C}[N]$  のクラスター変数に一致する。このようにクラスター代数は、座標環における小行列式や、包絡環の半標準基底の双対底の性質を包括的に研究するために、Fomin, Zelevinsky 両氏によって導入された [3]。Geiss, Leclerc, Schrer の三氏による論文 [12] では、双対半標準基底の性質が、クラスター代数の観点から研究されている。

本講演では、double Bruhat cell  $G^{u,v} := BuB \cap B^-vB^-$  ( $u, v \in W$ ) と呼ばれるセル上の座標環  $\mathbb{C}[G^{u,v}]$  を考える。[3] の続編の論文 [5] では、 $\mathbb{C}[G^{u,v}]$  のクラスター構造が明らかにされている。最近の我々の研究で、 $\mathbb{C}[G^{u,v}]$  におけるクラスター変数である小行列式 (あるいは generalized minors) と、結晶基底との関係がわかった。結晶基底は、量子群の表現を組み合わせ論的に扱うために柏原氏によって導入された [8] もので、ヤング盤やローラン単項式を用いて表示される。[13] では、A 型代数群上の小行列式を座標変換して得られたローラン多項式が、結晶基底をローラン単項式で表示したものの和になることを示した。座標環におけるクラスター変数と、結晶基底の関係が発見されたということである。本講演では、この結果を B, C, D 型に拡張する。

このレポートでは、2 節で代数群とそのリー環、3 節で普遍包絡環の定義を復習し、クラスター代数を例で説明する。4 節で座標環のクラスター代数構造に関する事実を紹介する。5 節で量子群とその表現論、そして結晶基底についての定義を復習し、6 節で主結果を記述し、7 節でその結果から期待される応用について述べる。なお、本研究は上智大学の中島俊樹教授との共同研究である。

## 2 代数群とリー環

まず、古典的代数群とそのリー環について思い出そう。リー環の代数的性質から、代数群の代数的性質、幾何的性質が分かるのであった。古典的代数群  $G$  に対し、そのリー環  $\text{Lie}(G)$  は、

$$\text{Lie}(G) := \{X \in \text{Mat}_N(\mathbb{C}) \mid \exp(tX) \in G, (t \in \mathbb{R})\}$$

で定められる。これはベクトル空間の構造を持ち、更に括弧積  $[x, y] := xy - yx$  という演算で閉じている。代数群とそのリー環は、車輪の両輪のように研究される。例えば、 $\text{SL}_{r+1}(\mathbb{C}) := \{x \in \text{Mat}_{r+1}(\mathbb{C}) \mid \det(x) = 1\}$  のリー環は、 $\mathfrak{sl}_{r+1}(\mathbb{C}) = \{x \in \text{Mat}_{r+1}(\mathbb{C}) \mid \text{trace}(x) = 0\}$  であるが、これは  $\{e_i = E_{i,i+1}, f_i = E_{i+1,i}, h_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1} \mid i \in I\}$  という (リー環としての) 生成元を持ち、以下の関係式を満たす:

- (1)  $[h_i, h_j] = 0,$
- (2)  $[h_i, e_j] = a_{ij}e_j,$
- (3)  $[h_i, f_j] = -a_{ij}f_j,$
- (4)  $[e_i, f_j] = \delta_{ij}h_j,$



$$(5) \ i \neq j \text{ のとき, } \text{ad}(e_i)^{1-a_{ij}}(e_j) = 0,$$

$$(6) \ i \neq j \text{ のとき, } \text{ad}(f_i)^{1-a_{ij}}(f_j) = 0,$$

ここに,  $E_{ij}$  は  $i$  行  $j$  列のみ 1 で, 他は 0 の正方行列,  $\text{ad}(x)(y) := [x, y]$  である. すると, 代数群  $\text{SL}_{r+1}(\mathbb{C})$  の (群としての) 生成元を,  $\{\exp(te_i), \exp(tf_i), t^{h_i} \mid i \in I, t \in \mathbb{C}_{\neq 0}\}$  と構成できる:

$$\exp(te_i) = {}^{i\text{th}} \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & 1 & t & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad \exp(tf_i) = {}^{i\text{th}} \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & 1 & 0 & & & \\ & t & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$t^{h_i} = \text{diag}(1, \dots, 1, \underset{\vee}{t}, \underset{\vee}{t^{-1}}, 1, \dots, 1).$$

一般の単純な代数群  $G$  に対しても同様で, そのリー環  $\mathfrak{g} := \text{Lie}(G)$  は, 先の (1)-(6) の関係式を満たす生成元  $\{e_i, f_i, h_i \mid i \in I\}$  を持ち,  $\{\exp(te_i), \exp(tf_i), t^{h_i} \mid i \in I, t \in \mathbb{C}_{\neq 0}\}$  が  $G$  の群としての生成元となる. このように, リー環の生成元から,  $G$  の代数的な性質を導くことができるのである. 更に,  $G$  の幾何学的な性質も導くことができる. まず, 以下のように  $G$  を非交和に分解する:

$$G = \coprod_{u,v \in W} G^{u,v}, \quad G^{u,v} := BuB \cup B^-vB^-.$$

$G^{u,v}$  は double Bruhat cell と呼ばれるセルである. 単純鏡映  $\{s_i\}$  を用いて,  $u = s_{i_1} \cdots s_{i_n}$ ,  $v = s_{j_1} \cdots s_{j_m}$  と最短表示する.  $x_i(t) := \exp(te_i)$ ,  $y_i(t) := \exp(tf_i)$  とおき, 写像  $\mathbf{x}_i : H \times (\mathbb{C}_{\neq 0})^{n+m} \rightarrow G^{u,v}$  を,  $\mathbf{x}_i(a; t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+m}) = a \cdot y_{i_1}(t_1) y_{i_2}(t_2) \cdots y_{i_n}(t_n) x_{j_1}(t_{n+1}) x_{j_2}(t_{n+2}) \cdots x_{j_m}(t_{n+m})$  で定める.

**命題 2.1.** [2]  $\mathbf{x}_i$  は,  $H \times (\mathbb{C}_{\neq 0})^{n+m}$  と  $G^{u,v}$  のある Zariski 開集合の間の双正則同型を与える.

これにより,  $G$  は  $H \times (\mathbb{C}_{\neq 0})^{n+m}$  を貼り合わせたような幾何構造を持っていることがわかる.

### 3 座標環とリー環の普遍包絡環, クラスター代数

前節では, 代数群とそのリー環の関係について述べた. 次は, 代数群の座標環と, リー環の普遍包絡環の関係について述べよう. リー環  $\mathfrak{g}$  は, 括弧積という結合則を満たさない積を持つベクトル空間であった. リー環の表現を考えると,  $\mathfrak{g}$  が結合則の成り立つ積を持たないのは何かと不便である. そのため, リー環の表現を考えると, 代わりに普遍包絡環  $U(\mathfrak{g})$  を考えることが多い. これは, 次の関係式を満たす生成元  $\{e_i, f_i, h_i \mid i \in I\}$  を持つ  $\mathbb{C}$  上の結合代数である:

$$(1)' \ h_i h_j = h_j h_i,$$

$$(2)' \ h_i e_j - e_j h_i = a_{ij} e_j,$$

$$(3)' \ h_i f_j - f_j h_i = -a_{ij} f_j,$$

$$(4)' \ e_i f_j - f_j e_i = \delta_{ij} h_j,$$

$$(5)' \ i \neq j \text{ のとき, } \sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \binom{1-a_{ij}}{k} e_i^{1-a_{ij}-k} e_j e_i^k = 0,$$

$$(6)' \ i \neq j \text{ のとき, } \sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \binom{1-a_{ij}}{k} f_i^{1-a_{ij}-k} f_j f_i^k = 0.$$

これらは、先の  $\mathfrak{g}$  の生成元の間関係式 (1)-(6) において、 $[x, y]$  ( $x, y \in \mathfrak{g}$ ) を、 $xy - yx$  で置き換えたものである。このように定義すると、リー環の表現を考えると、普遍包絡環の表現を考えると同値になる。 $U(\mathfrak{n})$  (resp.  $U(\mathfrak{h}), U^-(\mathfrak{n})$ ) を、 $\{e_i\}_{i \in I}$  (resp.  $\{h_i\}_{i \in I}, \{f_i\}_{i \in I}$ ) で生成される  $U(\mathfrak{g})$  の部分代数とすると、 $U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{n})U(\mathfrak{h})U^-(\mathfrak{n})$  と分解される。座標環  $\mathbb{C}[N]$  と包絡環  $U(\mathfrak{n})$  は双対関係にある。

$\mathbb{C}[N] \cong U_{gr}^*(\mathfrak{n})$  や  $\mathbb{C}[G^{u,v}]$  は、クラスター代数という代数構造を持つ。これは初期クラスター変数と呼ばれるいくつかの生成元から、他の生成元が次々と構成されていく、という代数構造である。座標環においては、次節で定める generalized minors が初期クラスター変数となる [5]。  $G$  が A 型代数群の場合、generalized minors は通常の小行列式に一致する。ここではクラスター代数の詳しい定義はせず、例で説明することにする。

**例 3.1.**  $D_{i_1 i_2 \dots i_s, j_1 j_2 \dots j_s}$  を、行が  $\{i_1, \dots, i_s\}$ 、列が  $\{j_1, \dots, j_s\}$  で添字付けられる小行列式とする。  $G = \mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$  とする。  $u = s_1 s_2 s_3 s_1 s_2 s_1$  に対し、座標環  $\mathbb{C}[G^{u,e}]$  の  $\mathbb{C}[D_{123,123}, D_{12,12}, D_{1,1}, D_{234,123}, D_{34,12}, D_{4,1}]$  上の生成元を、三つの生成元  $D_{2,1}, D_{23,12}, D_{3,1}$  から次々と構成していくことができる。例えば、

$$D_{13,12} = \frac{D_{3,1}D_{12,12} + D_{23,12}D_{1,1}}{D_{2,1}}, \quad D_{24,12} = \frac{D_{23,12}D_{4,1} + D_{34,12}D_{2,1}}{D_{3,1}},$$

$$D_{1,1}D_{2,2}D_{34,13} = \frac{D_{34,12}D_{2,1}D_{123,123} + D_{234,123}D_{3,1}D_{12,12}}{D_{23,12}}$$

というように、新しい生成元を三つ作ることができる。つまり、 $x_1 = D_{2,1}, x_2 = D_{23,12}, x_3 = D_{3,1}$  とするとき、 $((x_j)_{j \neq i}$  と係数の二項和) $/(x_i)$  という形の新たな生成元  $x'_i$  が構成できるのである。  $x'_1 = D_{13,12}, x'_2 = D_{24,12}, x'_3 = D_{24,12}$  である。組  $(x_1, x_2, x_3)$  をクラスター、 $x_1, x_2, x_3, x'_1, x'_2, x'_3$  をクラスター変数と呼ぶ。各変数  $x_i$  を  $x'_i$  に置き換えることで、新たにクラスター  $(x'_1, x_2, x_3), (x_1, x'_2, x_3), (x_1, x_2, x'_3)$  を構成できる。これらから、それぞれ三つずつ、また新たなクラスター変数が構成される。このようにして、 $(x_1, x_2, x_3)$  から次々と新たなクラスター変数が構成されていき、そのようにして作られた全てのクラスター変数が、 $\mathbb{C}[G^{u,e}]$  の生成元となる。このような生成元を持つ代数のことをクラスター代数と呼ぶのである。特に、組  $(x_1, x_2, x_3)$  を初期クラスターと呼ぶ。

例えば  $G$  が A 型代数群の場合、 $N$  は対角成分が全て 1 の上三角行列全体のなす群となるが、 $\mathbb{C}[N]$  は  $N$  上の正則関数の集合なので、「小行列式」を含む。これは  $U(\mathfrak{n})$  における「半標準基底」の双対底となる。半標準基底は、 $U(\mathfrak{n})$  において幾何的に構成される基底であるが、その双対底である小行列式は、クラスター変数という組合せ論的な性質を持つ生成元なのである。  $G$  が他の型の場合は、次節で定める generalized minors が  $\mathbb{C}[N]$  の双対半標準基底となる。このようにクラスター代数は、minors や半標準基底の双対底の性質を統一的に扱うために導入された。以下では上の例のように、セル  $G^{u,v}$  上のクラスター変数を扱う。

## 4 座標環と generalized minor

前節でも少し触れた、座標環におけるクラスター変数である generalized minors を復習する。これについては、[5] が詳しい。  $G_0 = N^-HN$  とおき、 $x = [x]_-[x]_0[x]_+$ 、 $[x]_- \in N^-$ 、 $[x]_0 \in H$ 、 $[x]_+ \in N$  と記す。

**定義 4.1.**  $u, v \in W, i \in \{1, \dots, r\}$  に対し、generalized minor  $\Delta_{u\Lambda_i, v\Lambda_i}$  は、開部分集合  $uG_0v^{-1}$  への制限が、 $\Delta_{u\Lambda_i, v\Lambda_i}(x) = ([u^{-1}xv]_0)^{\Lambda_i}$  で与えられる  $G$  上の正則関数である。

特に  $G = \mathrm{SL}_{r+1}(\mathbb{C})$  (A 型代数群) のとき、これは通常の小行列式に一致する。A 型のワイル群は、対称群

$\mathfrak{S}_{r+1}$  に同型になり、各単純鏡映  $s_i$  は、互換  $(i, i+1)$  と見なすことができる。この場合、 $\Delta_{u\Lambda_i, v\Lambda_i}$  は、行が  $u\{1, 2, \dots, i\}$ 、列が  $v\{1, 2, \dots, i\}$  でラベル付される小行列式に等しい。

**例 4.2.**  $G = \mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$ ,  $u = s_1s_2$ ,  $v = e$  のとき、 $u\{1, 2\} = \{2, 3\}$ ,  $v\{1, 2\} = \{1, 2\}$  であるから、 $x = (x_{i,j}) \in G$  に対し、

$$\Delta_{u\Lambda_i, \Lambda_i}(x) = \det \begin{bmatrix} x_{2,1} & x_{2,2} \\ x_{3,1} & x_{3,2} \end{bmatrix} = x_{2,1}x_{3,2} - x_{2,2}x_{3,1}.$$

前節において、座標環  $\mathbb{C}[G^{u,v}]$  はクラスター代数構造を持ち、上記の generalized minor がクラスター変数となると述べた。今回は、 $v = e$  の場合を中心に考える。 $u = s_{i_1} \cdots s_{i_n}$  に対し、 $\mathbf{i} := (i_1, \dots, i_n)$  を  $u$  の reduced word という。 $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  に対し、 $u_{\leq k} := s_{i_1} \cdots s_{i_k}$  とおく。このとき、

$$\Delta(k; \mathbf{i})(x) := \Delta_{u_{\leq k}\Lambda_{i_k}, \Lambda_{i_k}}(x) \quad (1 \leq k \leq n)$$

とおくと、これらが座標環  $\mathbb{C}[G^{u,e}]$  の初期クラスター変数となり、他のクラスター変数も、これらから次々と生成されるのである (例 3.1)。 $\mathbf{i}$  を  $u$  の reduced word とするとき、命題 2.1 の写像  $\mathbf{x}_i$  は、 $H \times (\mathbb{C}^\times)^{l(u)}$  と、double Bruhat cell  $G^{u,e}$  の Zariski 開集合との間の双正則同型なのであった。実は、写像  $\mathbf{x}_i$  の定義に出てくる  $y_i(t)$  を、 $x_{-i}(t) := y_i(t)\alpha_i^\vee(t^{-1})$  に変えた写像

$$\bar{\mathbf{x}}_i(a; t_1, \dots, t_n) = a \cdot x_{-i_1}(t_1)x_{-i_2}(t_2) \cdots x_{-i_n}(t_n)$$

も、 $H \times (\mathbb{C}^\times)^{l(u)}$  と、 $G^{u,e}$  の Zariski 開集合との間の双正則同型を与える。これを用いて次のように定める：

$$\Delta^G(k; \mathbf{i}) := \Delta(k; \mathbf{i}) \circ \bar{\mathbf{x}}_i \quad (2)$$

**例 4.3.**  $G = \mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$  とし、 $w := s_1s_2s_3s_1s_2$  を A 型ワイル群の元、 $\mathbf{i} = (1, 2, 3, 1, 2)$  をその reduced word とする。 $w_{\leq 2} = s_1s_2$  である。このとき、例 4.2 で確かめたとおり、

$$\Delta(2; \mathbf{i}) = \Delta_{w_{\leq 2}\Lambda_i, \Lambda_i}(x) = \Delta_{s_1s_2\Lambda_i, \Lambda_i}(x) = x_{2,1}x_{3,2} - x_{2,2}x_{3,1}$$

であった。一方、(1) により、

$$x_{-i}(t) = i^{\mathrm{th}} \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & t^{-1} & 0 & & \\ & 1 & t & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

であるから、 $a = \mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3, a_4) \in H$  とすると、

$$\bar{\mathbf{x}}_i(a; Y_{1,1}, Y_{1,2}, Y_{1,3}, Y_{2,1}, Y_{2,2}) = \begin{pmatrix} a_1 \frac{1}{Y_{1,1}Y_{2,1}} & 0 & 0 & 0 \\ a_2 \left( \frac{Y_{1,1}}{Y_{1,2}} + \frac{1}{Y_{2,1}} \right) & a_2 \frac{Y_{1,1}Y_{2,1}}{Y_{1,2}Y_{2,2}} & 0 & 0 \\ a_3 & a_3 \left( \frac{Y_{1,2}}{Y_{1,3}} + \frac{Y_{2,1}}{Y_{2,2}} \right) & a_3 \left( \frac{Y_{1,2}Y_{2,2}}{Y_{1,3}} \right) & 0 \\ 0 & a_4 & a_4 Y_{2,2} & a_4 Y_{1,3} \end{pmatrix}$$

よって、

$$\Delta^G(k; \mathbf{i})(a; Y_{1,1}, Y_{1,2}, Y_{1,3}, Y_{2,1}, Y_{2,2}) = a_2 a_3 \left( \frac{Y_{1,1}}{Y_{1,3}} + \frac{Y_{1,2}}{Y_{1,3}Y_{2,1}} + \frac{1}{Y_{2,2}} \right). \quad (3)$$

**例 4.4.**  $G = \mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$  ( $C_2$  型代数群)、 $u = s_1s_2s_1s_2 \in W$ ,  $\mathbf{i} = (1, 2, 1, 2)$  に対し、

$$\Delta^G(2; \mathbf{i})(a; Y_{1,1}, Y_{1,2}, Y_{2,1}, Y_{2,2}) = a^{(s_1s_2\Lambda_2)} \left( \frac{Y_{1,1}^2}{Y_{1,2}} + 2 \frac{Y_{1,1}}{Y_{2,1}} + \frac{Y_{1,2}}{Y_{2,1}^2} + \frac{1}{Y_{2,2}} \right). \quad (4)$$

## 5 量子群の表現論-結晶基底と単項式表示

我々の主定理は、前節で定めた generalized minors と、結晶基底の単項式表示の関係を論じるものである。結晶基底は量子群の表現論から生まれた概念である。これらについて復習する [8],[9].

### 5.1 量子群

$\mathfrak{g} := \text{Lie}(G)$  を  $G$  の Lie 環,  $q$  を不定元とする.  $[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$ ,  $[n]_q! = [n]_q [n-1]_q \cdots [1]_q$  とおき,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[n-k]_q! [k]_q!}$$

とおく. 量子群  $U_q(\mathfrak{g})$  とは, 次の関係式を満たす生成元  $\{e_i, f_i, q^{h_i} | i \in I\}$  を持つ  $\mathbb{C}(q)$  上の結合代数である:

- (1)"  $q^{h_i} q^{h_j} = q^{h_i+h_j} = q^{h_j} q^{h_i}$ ,
- (2)"  $q^{h_i} e_j q^{-h_i} = q^{a_{ij}} e_j$ ,
- (3)"  $q^{h_i} f_j q^{-h_i} = q^{-a_{ij}} f_j$ ,
- (4)"  $e_i f_j - f_j e_i = \delta_{ij} \frac{q^{a_i h_i} - q^{-a_i h_i}}{q^{a_i} - q^{-a_i}}$ ,
- (5)"  $i \neq j$  のとき,  $\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q^{a_i}} e_i^{1-a_{ij}-k} e_j e_i^k = 0$ ,
- (6)"  $i \neq j$  のとき,  $\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q^{a_i}} f_i^{1-a_{ij}-k} f_j f_i^k = 0$ .

各関係式 (1)"-(6)" において,  $(q^h$  をべき級数に展開してから)  $q \rightarrow 1$  とすると, Sect.3 で述べた普遍包絡環の関係式 (1)'-(6)' に一致する. 量子群は, Yang-Baxter 方程式

$$R_i(u) R_{i+1}(u+v) R_i(v) = R_{i+1}(v) R_i(u+v) R_{i+1}(u), \quad R_i(u) = 1 \otimes \cdots \otimes \overbrace{R(u)}^{i, i+1} \otimes \cdots \otimes 1 \quad (i = 1, \dots, N)$$

の解を構成するために導入された. ベクトル空間  $V$  に対し, これは  $V^{\otimes N+1}$  上のパラメーター付きの線形写像 (あるいは行列) の間の方程式であり, この方程式の解  $R(u) : V \rightarrow V$  のことを  $R$  行列と呼ぶ.  $R$  行列が一つ構成されると, それから統計力学における可解格子模型や, 結び目, 絡み目の不変量を構成することができる.

量子群  $U_q(\mathfrak{g})$  とその表現  $V$  から, 普遍  $R$  行列と呼ばれる Y-B 方程式の解が一つ構成される. つまり, 量子群の表現を構成し, その構造を調べることによって, 可解格子模型や結び目の不変量を作り出すことができるのである. 例えば,  $U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$  の自然表現という簡単な表現から, 結び目の不変量であるジョーンズ多項式が得られる. また, 表現  $V$  に対し, テンソル積表現  $V \otimes V$  を作ると, そこから 2 重結び目の不変量が得られるのである. このようなモチベーションのもと, 量子群とその表現論は研究されていくことになった.

量子群の表現は, リー環の表現と同様に考えることができる部分がある. 例えば, 有限次元単純リー環  $\mathfrak{g}$  の有限次元既約表現  $V$  は, ある  $\lambda \in P^+ := \bigoplus_i \mathbb{Z}_{\geq 0} \Lambda_i$  を用いて,

$$V = \bigoplus_{\mu \leq \lambda, \mu \in P} V_\mu, \quad V_\mu := \{v \in V | h_i v = \mu(h_i) v \ (i \in I)\},$$

と分解される.  $V_\mu \neq 0$  のとき,  $\mu$  をウエイト,  $V_\mu$  をウエイト空間と言う. このとき,  $V_\lambda$  は一次元であり,  $\lambda$  を最高ウエイトという. 同じ最高ウエイトを持つ既約表現は互いに同型になる. つまり, リー環  $\mathfrak{g}$  の有限次元既

約表現は,  $P^+$  で分類されるのである.

これは量子群においても同様で,  $U_q(\mathfrak{g})$  の有限次元既約表現  $V$  は,

$$V = \bigoplus_{\mu \leq \lambda, \mu \in P} V_\mu, \quad V_\mu := \{v \in V | q^{h_i} v = q^{\mu(h_i)} v \ (i \in I)\},$$

と分解され,  $P^+$  で分類される. やはり  $V_\lambda$  は一次元で,  $V_\lambda = \mathbb{C}(q)v_\lambda$  と書ける.  $v_\lambda \in V$  を最高ウエイトベクトルという. そこで, 最高ウエイト  $\lambda$  を持つ  $U_q(\mathfrak{g})$  の表現を  $V(\lambda)$  と記す. 先に述べたように,  $V(\lambda)$  の構造や, テンソル積の構造を調べたい. そこで用いられるのが, 次節で述べる結晶基底である.

## 5.2 量子群の表現論, 結晶基底

最高ウエイト  $\lambda \in P^+$  を持つ最高ウエイト表現  $V(\lambda)$  は, 結晶基底  $B(\lambda)$  を用いることで, 構造が明らかにされる.  $i$  ( $1 \leq i \leq r$ ),  $v \in V(\lambda)_\mu$  に対し,

$$v = v_0 + f_i v_1 + \frac{f_i^2}{[2]!} v_2 + \frac{f_i^3}{[3]!} v_3 + \cdots + \frac{f_i^N}{[N]!} v_N, \quad v_j \in \ker e_i \cap V(\lambda)_{\mu+j\alpha_i}$$

と一意に書ける. そこで,  $V(\lambda)$  上の作用素  $\tilde{f}_i, \tilde{e}_i$  を,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i v &= f_i v_0 + \frac{f_i^2}{[2]!} v_1 + \frac{f_i^3}{[3]!} v_2 + \frac{f_i^4}{[4]!} v_3 + \cdots + \frac{f_i^{N+1}}{[N+1]!} v_N, \\ \tilde{e}_i v &= v_1 + f_i v_2 + \frac{f_i^2}{[2]!} v_3 + \frac{f_i^3}{[3]!} v_4 + \cdots + \frac{f_i^{N-1}}{[N-1]!} v_N \end{aligned}$$

で定める. これらを **Kashiwara operators** と呼ぶ. 今,  $A_0 := \{\frac{q}{h}|g, h \in \mathbb{C}[q], h(0) \neq 0\} \subset \mathbb{C}(q)$  とおき,  $L(\lambda)$  を,  $\{\tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_s} v_\lambda | s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, 1 \leq i_1, \dots, i_s \leq r\}$  で定められる,  $V(\lambda)$  の部分  $A_0$  代数とする. そこで,  $L(\lambda)/qL(\lambda)$  の  $\mathbb{C}$  上の基底を

$$B(\lambda) := \{\tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_s} v_\lambda + qL(\lambda) | s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, 1 \leq i_1, \dots, i_s \leq r\}$$

で定義する. ベクトル空間  $L(\lambda)/qL(\lambda)$  は,  $V(\lambda)$  で  $q$  を 0 にしたような空間となっており,  $q$  を温度に見立てて,  $B(\lambda)$  を結晶基底と呼ぶ. 結晶基底の元は, ヤング盤や道 などの様々な表示方法を持ち, それらによって表現の構造やテンソル積の計算を, 組合せ論的に扱うことができるようになる. そのような表示方法のうち, 単項式表示と呼ばれるものがある. これは,  $B(\lambda)$  の元を変数  $\{Y_{s,i} | s \in \mathbb{Z}, i \in I\}$  のローラン単項式で表示する方法で,  $C_i := (\text{分子の } Y_{*,i} \text{ の個数}) - (\text{分母の } Y_{*,i} \text{ の個数})$  とおくと,  $\sum_i C_i \Lambda_i$  がその元のウエイトを表している. また, Kashiwara operator の作用は, ローラン単項式の掛け算で表される. 単項式表示の詳しい定義の仕方は, 柏原氏の論文 [9] を参照していただきたい. ここでは例を述べる.

**例 5.1.**  $G = \text{SL}_4(\mathbb{C})$  ( $A_3$  型代数群) とする.

図 1 は, 結晶基底  $B(\Lambda_2)$  のヤング盤表示 (左) と単項式表示 (右) であり, 表現  $V(\Lambda_2)$  が 6 次元で, ウエイト  $\Lambda_2, \Lambda_1 + \Lambda_3 - \Lambda_2, \Lambda_3 - \Lambda_1, \Lambda_1 - \Lambda_3, \Lambda_2 - \Lambda_3 - \Lambda_1, -\Lambda_2$  のウエイト空間に分解されることを示している.

例 4.3 の  $\Delta^G(k; \mathbf{i})$  の式 (3) に現れる項の集合  $\{\frac{Y_{1,1}}{Y_{1,3}}, \frac{Y_{1,2}}{Y_{1,3}Y_{2,1}}, \frac{1}{Y_{2,2}}\}$  は, 上記の結晶基底  $B(\Lambda_2)$  の単項式表示の一部と一致していることに注意する. この部分は lower Demazure crystal  $B_{s_1 s_2 s_3 s_1 s_2}^-(\Lambda_2)$  と呼ばれる. つまり, **generalized minor** に座標変換を施したものの項に, 結晶基底を単項式表示したものが現れた, ということである. これが我々の主結果である. 次節で詳細を述べる.

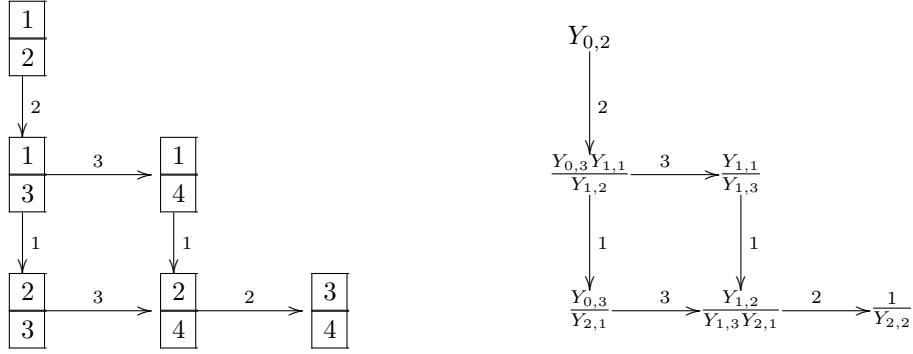


図 1

例 5.2. 他の型においても, A 型代数群の例 5.1 と同様の現象が起こる.  $G = \mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$  ( $C_2$  型代数群) とする.

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{2} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{2} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}. \quad (5)$$

$$Y_{0,2} \xrightarrow{2} \frac{Y_{1,1}^2}{Y_{1,2}} \xrightarrow{1} \frac{Y_{1,1}}{Y_{2,1}} \xrightarrow{1} \frac{Y_{1,2}}{Y_{2,1}^2} \xrightarrow{2} \frac{1}{Y_{2,2}}. \quad (6)$$

Diagram (5), (6) はそれぞれ, 結晶基底  $B(\Lambda_2)$  のヤング盤表示, 単項式表示で, 表現  $V(\Lambda_2)$  がウエイト  $\Lambda_2, 2\Lambda_1 - \Lambda_2, 0, \Lambda_2 - 2\Lambda_1, -\Lambda_2$  のウエイト空間に分解される 5 次元表現であることを表している. 例 4.4 における (4) に現れる項の集合  $\{\frac{Y_{1,1}^2}{Y_{1,2}}, \frac{Y_{1,1}}{Y_{2,1}}, \frac{Y_{1,2}}{Y_{2,1}^2}, \frac{1}{Y_{2,2}}\}$  は, 上記の結晶基底  $B(\Lambda_2)$  の単項式表示の一部と一致している. この部分は lower Demazure crystal  $B_{s_1 s_2}^-(\Lambda_2)$  である. 項の係数に, 2 が現れることを除くと, generalized minor  $\Delta^G(k; \mathbf{i})$  は, 結晶基底を単項式表示したものの和で書くことができる, というのである.

主結果を述べる前に, Demazure crystal の定義を紹介する.

定義 5.3.  $v_\lambda$  (resp.  $v_{\bar{\lambda}}$ ) を,  $B(\lambda)$  の最高 (resp. 最低) ウエイトベクトルとする. まず,  $B_e(\lambda) := \{v_\lambda\}$  (resp.  $B_e^-(\lambda) := \{v_{\bar{\lambda}}\}$ ) とおく. また,  $w \in W$  に対し,  $s_i w < w$  のとき,

$$\begin{aligned} B_w(\lambda) &:= \{\tilde{f}_i^k b \mid k \geq 0, b \in B_{s_i w}(\lambda), \tilde{e}_i b = 0\} \setminus \{0\}, \\ B_w^-(\lambda) &:= \{\tilde{e}_i^k b \mid k \geq 0, b \in B_{s_i w}^-(\lambda), \tilde{f}_i b = 0\} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

と定める.  $B_w(\lambda)$  を Demazure crystal,  $B_w^-(\lambda)$  を lower Demazure crystal と呼ぶ.

## 6 Generalized minors と結晶基底

主定理を述べよう. 各 A, B, C, D 型古典群において, 最長元の reduced word は次で与えられる:

$$\mathbf{i}_0 = \begin{cases} \underbrace{(1, 2, \dots, r)}_{1 \text{ st cycle}}, \underbrace{1, 2, \dots, r-1, \dots, 1, 2, 3}_{2 \text{ nd cycle}}, \dots, \underbrace{1, 2, 3}_{(r-2) \text{ th cycle}}, 1, 2, 1) & \text{for } A_r, \\ \underbrace{(1, 2, \dots, r)}_{1 \text{ st cycle}}, \underbrace{1, 2, \dots, r}_{2 \text{ nd cycle}}, \dots, \underbrace{1, 2, \dots, r}_{r \text{ th cycle}} & \text{for } B_r, C_r, \\ \underbrace{(1, 2, \dots, r)}_{1 \text{ st cycle}}, \underbrace{1, 2, \dots, r}_{2 \text{ nd cycle}}, \dots, \underbrace{1, 2, \dots, r}_{r-1 \text{ th cycle}} & \text{for } D_r. \end{cases} \quad (7)$$

$u \in W$  を, その reduced word  $\mathbf{i}$  が, (7) の  $\mathbf{i}_0$  の left factor で表わされるものとする. A 型なら,

$$\mathbf{i} = (\underbrace{1, \dots, r}_{1 \text{ st cycle}}, \underbrace{1, \dots, r-1}_{2 \text{ nd cycle}}, \dots, \underbrace{1, \dots, r-m+2}_{m-1 \text{ th cycle}}, \underbrace{1, \dots, d}_{m \text{ th cycle}}) \quad (8)$$

という形, B, C, D 型なら,  $\mathbf{i} = (1, \dots, r)^{m-1}(1, \dots, d)$  という形である. まずは A 型に関する結果を述べよう. 変数  $\mathbf{Y}$  を次のようにおく:

$$\mathbf{Y} = (a; Y_{1,1}, \dots, Y_{1,r}, \dots, Y_{m-1,1}, \dots, Y_{m-1,r-m+2}, Y_{m,1}, \dots, Y_{m,d}).$$

**定理 6.1.** [13]  $i_k$  を, (8) の  $\mathbf{i}$  の左から  $k$  番目の数字とする.  $i_k$  は,  $m'$  th cycle に属するとする. このとき,

$$\Delta^G(k; \mathbf{i})(\mathbf{Y}) = a^{(u_{\leq k} \Lambda_d)} \left( \sum_{b \in B_{u_{\leq k}}^-((m-m')\Lambda_d)} \mu(b) \right), \quad (9)$$

となる. ここに,  $B_{u_{\leq k}}^-((m-m')\Lambda_d)$  は  $B((m-m')\Lambda_d)$  の lower Demazure crystal,  $\mu$  は  $B((m-m')\Lambda_d)$  のある単項式表示である.

例 5.1 で述べた通り, generalized minors を座標変換したものが,  $(k, \mathbf{i}$  から決まる) 結晶基底の一部を単項式表示したものの和になる, ということである. 他の型になると, この性質は  $m-m'=1$  の場合は (係数を無視すれば) 成り立つ, というのが次の定理である. B, C, D 型に関する結果を述べるために,  $\mathbf{Y} = (a; Y_{1,1}, \dots, Y_{1,r}, \dots, Y_{m-1,1}, \dots, Y_{m-1,r}, Y_{m,1}, \dots, Y_{m,d}) \in H \times (\mathbb{C}^\times)^n$  とおく.

**定理 6.2.**  $i_k$  は,  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_n)$  の  $(m-1)$ th cycle に属するとする. このとき,

$$\Delta^G(k; \mathbf{i})(\mathbf{Y}) = a^{(u_{\leq k} \Lambda_d)} \left( \sum_{b \in B_{u_{\leq k}}^-(\Lambda_d)} c_b \mu(b) \right), \quad (10)$$

となる. ここに,  $B_{u_{\leq k}}^-(\Lambda_d)$  は  $B(\Lambda_d)$  の lower Demazure crystal,  $c_b$  はある正整数,  $\mu$  は  $B(\Lambda_d)$  のある単項式表示である.

## 7 今後の展望

前節で述べた結果は, 座標環  $\mathbb{C}[G^{u,e}]$  の生成元を, 結晶基底と関係づけるものであった. 座標環の理論が, クラスタ代数やリー環論などと密接に関わっていることは既に述べた. 座標環理論を結晶基底の言葉で理解し, 関連分野に応用していくことが最終目標である.

5 節で紹介した単項式表示は, アファイン量子群の表現の指標である **q-character** の研究の中で生まれた. この指標は, その表現がどのようなウエイト空間に分解されるのか, そして各ウエイト空間の次元はいくつなのか, という情報を持っているものである. つまり, 与えられた表現の q-character の explicit formula が分かれば, その表現空間の構造が明らかになるのである. Fundamental modules, KR-modules という既約表現のクラスがあるが, それらの q-character の公式は, [10],[11] などで調べられている. 特に A, D, E 型の fundamental modules の q-characters は, ある結晶基底を単項式表示したものの和になることが知られている [10]. これは, 定理 6.2 で述べた  $\Delta^G(k; \mathbf{i})$  の性質と類似している. また, generalized minors  $\Delta^G(k; \mathbf{i})$  が, 簡単な添字の変換を行うことで, q-characters の部分和 と一致する例が見つかっている. 例えば A 型代数群の

上の minor  $\Delta^G(k; \mathbf{i})$  は, 添字変換をすることで, ある A 型 KR-module の q-character の部分和と一致する. より詳しく言うと, A 型の KR-module の q-character は, ある結晶基底を単項式表示したものの和になる. 対して  $\Delta^G(k; \mathbf{i})$  は, その内の Demazure crystal の部分のみを足し上げたものになっているのである. このように結晶基底の観点に立つと, minors と q-character の関連が見えてくる. [6] では, アファイン量子群の表現の同型類がなすグロタンディーク群を用いて, 有限型クラスター代数の圏化を行っている. その中で, 既約表現がクラスター変数の役割を担っている. 有限型とは, クラスター変数が有限個しか現れないクラスター代数のことである. 例えば, 座標環  $\mathbb{C}[(\mathrm{SL}_4(\mathbb{C}))^{e, w_0}]$  ( $w_0$  はワイル群の最長元) は有限型である.  $\mathbb{C}[(\mathrm{SL}_4(\mathbb{C}))^{e, w_0}]$  では初期クラスターだけでなく, 全てのクラスター変数が, Demazure crystal を単項式表示したものの和で書ける. そしてその変数たちは, 圏化の中で現れた既約表現の q-characters と類似している事が確認できている.

このように,  $G^{u, e}$ , あるいは  $G^{e, v}$  上の座標環は研究がしやすく, アファイン量子群の既約表現との繋がりが徐々に見つかり始めている. 有限型クラスター代数の分類は [4] でなされており, 多くの性質が明らかにされているが, 無限型については未解明な部分が多い. 最近では, 圏化を用いて, クラスター代数の中に”標準基底”を構成しようという研究がなされている [7]. 一般に, 座標環  $\mathbb{C}[G^{u, e}]$  は無限型となる. 初期クラスター以外のクラスター変数も結晶基底と関連付け, クラスター理論, アファイン量子群の表現論への応用を目指したい.

## 参考文献

- [1] G. Lusztig, Semicanonical bases arising from enveloping algebras, *Adv. Math.* vol.151 (2000).
- [2] A.Berenstein, A.Zelevinsky, Tensor product multiplicities, canonical bases and totally positive varieties, *Invent. Math.* vol.143, No.1 (2001).
- [3] S.Fomin, A.Zelevinsky, Cluster algebras 1 : Foundations, *Journal of the Amer. Math. Soc.* vol.15, No.2 (2002).
- [4] S.Fomin, A.Zelevinsky, Cluster algebras 2 : Finite type classification, *Invent. Math.* vol.154, No1 (2003).
- [5] A.Berenstein, S.Fomin, A.Zelevinsky, Cluster algebras 3 : Upper bounds and double bruhat cells, *Duke Math. Journal* vol.126, No.1 (2005).
- [6] D.Hernandez, B.Leclerc, Cluster algebras and quantum affine algebras, *Duke Math. Journal.* vol.154, No.2 (2010).
- [7] S.Fomin, P. Pylyavskyy, Tensor diagrams and cluster algebras, arXiv:1210.1888 preprint (2012).
- [8] M.Kashiwara, On crystal bases of the Q-analogue of universal enveloping algebras, *Duke Math. Journal.* vol.63, No.2 (1991).
- [9] M.Kashiwara, Realizations of crystals, in *Combinatorial and Geometric Representation Theory*, *Contemp. Math.* vol.325, Amer. Math. Soc. Providence, RI (2003).
- [10] H.Nakajima, t—analogs of q—characters of quantum affine algebras of type  $A_n, D_n$ , *Contemp. Math.* vol.325, Amer. Math. Soc. RI (2003).
- [11] A.Kuniba, T.Nakanishi, J.Suzuki, T-systems and Y-systems in integrable systems, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* (2010).
- [12] C.Geiss, B.Leclerc, J.Schrer, Kac-Moody groups and cluster algebras, *Adv. Math.* 228 (2011).
- [13] Y.Kanakubo, T.Nakashima, Cluster Variables on Certain Double Bruhat Cells of Type (u,e) and Monomial Realizations of Crystal Bases of Type A, *SIGMA* vol.11 (2015).



# 有限体係数のローラン級数におけるディオファントス近似

大音 智弘 (Tomohiro Ooto)\*

筑波大学 数理物質科学研究科数学専攻<sup>†</sup> 博士後期課程二年

## 概要

ディオファントス近似は、実数を有理数でどのくらい良く近似できるかを基本的な問題とし、その問題の拡張や類似について主に調べる分野である。この近似理論は、超越数論やディオファントス方程式への応用があり古くから研究の対象となってきた。本テクニカルレポートでは、実数に関するディオファントス近似の先行研究とその応用について述べる。その後、実数の類似として有限体係数のローラン級数でのディオファントス近似について得られた結果を紹介する。

## 1 導入

ディオファントス近似は、

与えられた実数  $\xi$  を有理数でどのくらい良く近似できるか

を基本的な問題とし、その問題の拡張や類似について主に調べる分野である。もちろん有理数の稠密性から、いくらでも  $\xi$  との差が小さい有理数は存在する。しかし、この差の測り方(ものさし)をうまく変えることで面白いことがわかってくる。そこで、この節ではそのものさしについて簡単な場合を通してイメージを掴んでもらいたい。

まず、一つ記号を導入する。実数  $x$  に対して、 $[x] := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$  と定める。この関数  $[\cdot]$  はガウス記号とよばれており、実数の整数部分を取り出す関数である。例えば、 $[3] = 3$ ,  $[5.3] = 5$ ,  $[-6.25] = -7$ 。整数  $q \neq 0$  に対して、 $|q\xi - [q\xi]| \leq 1$  なので両辺を  $|q|$  で割ると、

$$\left| \xi - \frac{[q\xi]}{q} \right| \leq \frac{1}{|q|}$$

が成り立つ。従って、実数は近似有理数の分母で近似できる。次に、 $\xi$  が有理数  $a/b$  のときについて考える。このとき、 $a/b$  と異なる有理数  $p/q$  に対して、

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{|aq - bp|}{|bq|} \geq \frac{1}{|bq|}$$

が成り立つ。上記と合わせると、有理数は近似有理数の分母がある意味最良の近似となる。

次に考えるべきことは、 $\xi$  が無理数のときの近似であろう。無理数については次の古典的な結果がある。

---

\*e-mail: ooto@math.tsukuba.ac.jp

<sup>†</sup>〒 305-8577 茨城県つくば市天王台 1-1-1 筑波大学数理物質系数域

**定理 1.1** (Dirichlet, 1842). 実数  $\xi$  を無理数とする. このとき, 次を満たす有理数  $p/q$  が無数に存在する:

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{|q|^2}.$$

定理 1.1 の証明は, 鳩ノ巣原理 ( $n+1$  羽の鳩を  $n$  個の箱に入れると, 少なくとも 1 個の箱には 2 羽以上の鳩がいる) を用いて初等的に証明できる. 証明は, [15, 第 1 章] に書いてある. 定理 1.1 から, 無理数は近似有理数の分母の 2 乗で近似できる.

以上のことから, 近似有理数の分母の 2 乗で近似できれば無理数, そうでない数は有理数となる. つまり, 有理数か無理数かを判定するのに方程式 (等式) でなく不等式が使えるところが非常に面白い点である.

2 節では, 先ほど未定義で使った最良近似の概念を定式化し, それに関する先行研究を紹介する. 次の 3 節では, 超越数やディオファントス方程式への最良近似の応用について述べる. 4 節は, 有理数での近似を一般化した代数的数や整数係数多項式での近似について述べる. 5 節では, 実数でなく別の体 (有限体係数のローラン級数体) の近似について簡単な紹介を行い, 今回の主結果を報告する.

## 2 実数の有理数近似

まずは, 前節で未定義だった実数の最良近似を定義する. 実数  $\xi$  に対して,

$$0 < \left| \xi - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{|q|^w}$$

となる有理数  $p/q$  が無数に存在するような実数  $w$  の上限を  $\mu(\xi)$  とし, これを  $\xi$  の無理数度とよぶ. これで, 有理数の分母というものさしを使った最良近似を定式化することができた. 無理数度の言い換えとして次が成立することが知られている. 以下を満たす実数  $w$  の下限は  $\mu(\xi)$  となる: ある正の実数  $C$  が存在して,  $\xi$  と異なるすべての有理数  $p/q$  に対して,

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{|q|^w}$$

を満たす. 従って, 前節から実数  $\xi$  に対して  $\mu(\xi) \geq 1$ , 有理数  $a/b$  に対して  $\mu(a/b) = 1$  が成立する. また, 定理 1.1 を言い換えると次のようになる:

**定理 2.1** (Dirichlet, 1842). 無理数  $\xi \in \mathbb{R}$  に対して,  $\mu(\xi) \geq 2$ .

従って, 前節の最後の方に述べた有理数か無理数の判定法は,

$$\mu(\xi) > 1 \text{ ならば } \xi \text{ は無理数で, そうでないとき } (\mu(\xi) = 1), \xi \text{ は有理数}$$

となる.

複素数  $\xi$  は,  $P(\xi) = 0$  となる整数係数多項式  $P(X) \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$  が存在するとき代数的数という. 複素数で代数的数となる数全体の集合を  $\overline{\mathbb{Q}}$  と表す.  $\xi$  が代数的数のとき,  $P(\xi) = 0$  となる  $P(X) \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$  のうち最小の次数を  $\xi$  の次数とよび,  $\deg \xi$  で表す. また, 代数的数でない複素数を超越数とよぶ. ここで, いくつか代数的数と超越数の例を挙げる.

例. 有理数は次数 1 の代数的数.  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$  は次数 2 の代数的数. ネイピア数  $e$  と円周率  $\pi$  は超越数.

Liouville は代数的数の無理数度の上限を与えた.

**定理 2.2** (Liouville [7, 8]). 次数  $d$  の代数的数  $\xi \in \mathbb{R}$  に対して,  $\mu(\xi) \leq d$ .

*Proof.* 他のディオファントス近似の定理でもそうだが, この定理の証明のポイントは 0 でない整数の絶対値は 1 以上ということである.

$p/q$  を  $\xi$  と異なる有理数とする.  $|\xi - p/q| > 1$  のときは,

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| > 1 \geq \frac{1}{|q|^d}$$

となる. 次に,  $|\xi - p/q| \leq 1$  のときを考える.  $P(X) = \sum_{n=0}^d a_n X^n \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$  で  $P(\xi) = 0$  なるものをとってくる. この多項式を  $X = \xi$  まわりでテーラー展開すると,

$$P(X) = \sum_{n=0}^d \frac{P^{(n)}(\xi)}{n!} (X - \xi)^n$$

となる.  $P^{(0)}(\xi) = 0$  に注意すると,

$$\begin{aligned} \left| P\left(\frac{p}{q}\right) \right| &= \left| \sum_{n=1}^d \frac{P^{(n)}(\xi)}{n!} \left(\frac{p}{q} - \xi\right)^n \right| \leq \left| \xi - \frac{p}{q} \right| \sum_{n=1}^d \frac{|P^{(n)}(\xi)|}{n!} \left| \frac{p}{q} - \xi \right|^{n-1} \\ &\leq \left| \xi - \frac{p}{q} \right| \sum_{n=1}^d \frac{|P^{(n)}(\xi)|}{n!}. \end{aligned}$$

また, 0 でない整数の絶対値は 1 以上なので

$$\left| P\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| \frac{\sum_{n=0}^d a_n p^n q^{d-n}}{q^d} \right| \geq \frac{1}{|q|^d}.$$

ここで,  $C := \min\{1, (\sum_{n=1}^d |P^{(n)}(\xi)|/n!)^{-1}\}$  とおく. すると,  $\xi$  と異なる任意の有理数  $p/q$  に対して,

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{|q|^d}$$

となるので,  $\mu(\xi) \leq d$  が得られる. □

Liouville によって得られた  $d$  という上界は, その後  $d/2 + 1$  (Thue [18]),  $2\sqrt{d}$  (Siegel [16]),  $\sqrt{2d}$  (Dyson [6]) と更新され, 最終的に Roth の手によって決着がついた.

**定理 2.3** (Roth [12]). 実数  $\xi$  が 2 次以上の代数的数とする. このとき,  $\mu(\xi) \leq 2$ . 従って, 定理 2.1 と合わせると,

$$\mu(\xi) = 2.$$

定理 2.3 の証明が書いてある和書としては, [15, 第 3 章] が挙げられる. 定理 2.3 の対偶を考えることで, 次の超越数判定が得られる.

**系 2.4.** 実数  $\xi$  に対して,  $\mu(\xi) > 2$  ならば  $\xi$  は超越数.

### 3 実数の有理数近似の応用

この節では、第2節で述べた定理の応用について幾つか紹介する。まずは、超越数論への応用を紹介したい。

**定理 3.1** (Mahler [9]).  $b$  を 2 以上の整数とし、 $k$  を 3 以上の整数とする。このとき、次の実数は超越数:

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b^{k^n}}.$$

**注意.** Mahler は Roth の定理を用いない方法で示したが、ここでは Roth の定理を使った証明を与える。

*Proof.* 系 2.4 より、 $\mu(\xi) > 2$  を示せば良い。そのため、 $\xi$  に良い近似を与える有理数を構成する。整数  $m \geq 0$  に対して、

$$\xi_m := \sum_{n=0}^m \frac{1}{b^{k^n}} = \frac{1 + b^{k^m - k^{m-1}} + b^{k^m - k^{m-2}} + \dots + b^{k^m - 1}}{b^{k^m}}$$

と有理数を定める。このとき、

$$|\xi - \xi_m| = \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{b^{k^n}} \right| \leq \frac{2}{(b^{k^m})^k}.$$

従って、 $\mu(\xi) \geq k > 2$  となるため  $\xi$  は超越数となる。 □

**定理 3.2** (Danilov [5]).  $\alpha > 1$  を無理数とする。このとき、次の実数は超越数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^{[\alpha n]}}.$$

この定理の証明も、定理 3.1 の証明と同じく良い有理数近似を構成して系 2.4 から超越性を示すという方針である。次に、ディオファントス方程式への応用を一つ述べる。

**定理 3.3** (Thue [18]).  $d$  を 3 以上の整数とし、 $F(X, Y) \in \mathbb{Z}[X, Y]$  を既約な  $d$  次齊次多項式とする。また、 $k$  を整数とする。このとき、不定方程式

$$F(X, Y) = k \tag{1}$$

の整数解  $(X, Y) \in \mathbb{Z}^2$  は有限個しか存在しない。

**注意.** この定理は、前節で紹介した Roth の定理より弱い Thue の定理 ( $\mu(\xi) \leq d/2 + 1$ ) を用いて Thue 自身が証明した。

**例.**  $2X^3 - Y^3 = 1$  の整数解  $(X, Y) \in \mathbb{Z}^2$  は有限個のみ。

## 4 有理数近似の一般化

この節では、無理数度の概念を一般化しそれについて知られていることを紹介する。一般化をするために、まずは多項式および代数的数の高さを定義する。整数係数多項式  $P(X) = \sum_{n=0}^d a_n X^n \in \mathbb{Z}[X]$  に対して、 $H(P) := \max_{0 \leq n \leq d} |a_n|$  を  $P$  の高さおよび  $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}$  に対して、 $\xi$  の最小多項式を  $Q(X)$  とおく。つまり、既約かつ原始的で最高次係数が正となる  $Q(X) \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$  で  $Q(\xi) = 0$  となるものをもって来る。代数的数に対して、最小多項式は唯一つ存在することに注意する。このとき、 $H(\xi) := H(Q)$  を  $\xi$  の高さおよび  $\xi$  の高さの簡単な例を紹介する。

例.  $p, q$  を互いに素な正の整数とする。このとき、有理数  $p/q$  の最小多項式は  $qX - p$  であり、その高さは  $H(p/q) = \max\{p, q\}$  となる。また、 $\sqrt{2}$  の最小多項式は  $X^2 - 2$  であり、その高さは  $H(\sqrt{2}) = 2$  となる。

無理数度は、有理数の分母というものさしで最良近似を定義していた。今度は、先ほど定義した高さをものさしにして最良近似を次のように2つ定義する。正の整数  $n$  および実数  $\xi$  に対して、

$$0 < |P(\xi)| \leq \frac{1}{H(P)^w}, \quad \deg P \leq n$$

となる  $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$  が無数に存在するような実数  $w$  の上限を  $w_n(\xi)$  とおく。また、

$$0 < |\xi - \alpha| \leq \frac{1}{H(\alpha)^{w^*+1}}, \quad \deg \alpha \leq n$$

となる  $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$  が無数に存在するような実数  $w^*$  の上限を  $w_n^*(\xi)$  とおく。これら二つの関数  $w_n, w_n^*$  は Diophantine exponent とよばれている。任意の実数  $\xi$  に対して、 $w_1(\xi) = w_1^*(\xi) = \mu(\xi) + 1$  であることが知られている。従って、Diophantine exponent  $w_n, w_n^*$  は無理数度  $\mu$  の概念を一般化したものである。このとき、次の2つの問題について考えることは自然なことだろう。

**問題 4.1.**  $\xi$  を実数、 $n$  を正の整数とする。

- (1)  $\xi$  が代数的数のとき、 $w_n(\xi)$  と  $w_n^*(\xi)$  の値を決定せよ。
- (2) Diophantine exponent  $w_n$  と  $w_n^*$  は異なる関数か。もしそうならば、どのくらい異なるかを調べよ。

問題(1)について、 $w_n(\xi), w_n^*(\xi)$  の値は、 $\xi$  の次数と  $n$  を用いて表せることが知られている。

**定理 4.2.** 正の整数  $n$  と  $d$  次の代数的数  $\xi \in \mathbb{R}$  に対して、

$$w_n(\xi) = w_n^*(\xi) = \min\{n, d - 1\}.$$

証明には、Roth の定理 (定理 2.3) の高次元版である部分空間定理が用いられる。部分空間定理の主張及び証明に関しては [13, Section VI] に書かれている。定理 4.2 のその他の部分の証明に関しては [2, Section 3.2, 3.4] に書いてある。従って、問題(1)は解決されている。

次は問題(2)について知られている結果を述べていきたい。関数  $w_n$  と  $w_n^*$  の差の上界と下界については次が知られている。

定理 4.3 (Wirsing [19]).  $n$  を正の整数とし,  $\xi$  を実数とする. このとき,

$$0 \leq w_n(\xi) - w_n^*(\xi) \leq n - 1.$$

差の上限と下限については上記の定理からわかるが, 実際にどのくらい異なるかを調べるには,  $\delta \in [0, n - 1]$  に対して  $w_n(\xi) - w_n^*(\xi) = \delta$  となる  $\xi \in \mathbb{R}$  の存在性を調べる必要がある.  $n = 2$  のときは, 連分数

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots}}}, \quad (a_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ for } i \geq 1)$$

という通常の 10 進展開とは異なった実数の表記法及びその理論を用いることで, 関数  $w_2 - w_2^*$  の値域は決定されている.

定理 4.4 (Bugeaud [4]). 関数  $w_2 - w_2^*$  の値域は閉区間  $[0, 1]$  である.

$n \geq 3$  に対しては, 関数  $w_n - w_n^*$  の値域は完全に決定されていないが次の部分的な結果が知られている.

定理 4.5 (Bugeaud [1]). 関数  $w_3 - w_3^*$  の値域は区間  $[0, 2)$  を含む.

定理 4.6 (Bugeaud, Dujella [3]).  $n$  を 4 以上の整数とする. このとき, 関数  $w_n - w_n^*$  の値域は次の区間を含む:

$$\left[0, \frac{n}{2} + \frac{n-2}{4(n-1)}\right)$$

## 5 主結果

この節では, 有限体係数のローラン級数体でのディオファントス近似について実数と比較しながら近似の概念や先行研究について述べる. その後, 主結果を紹介する. まずは議論を展開するのに必要な記号を導入する.  $p$  を素数とし, 正の整数  $s$  に対して  $q = p^s$  とおく. 元の個数が  $q$  個の体を  $\mathbb{F}_q$  で表し,  $\mathbb{F}_q$  係数の多項式環を  $\mathbb{F}_q[T]$  で表す. そして,  $\mathbb{F}_q[T]$  の商体を  $\mathbb{F}_q(T)$  で表す. つまり,

$$\mathbb{F}_q(T) = \left\{ \frac{P(T)}{Q(T)} \mid P(T), Q(T) \in \mathbb{F}_q[T], Q(T) \neq 0 \right\}$$

とする. また,  $\mathbb{F}_q$  係数のローラン級数体を

$$\mathbb{F}_q((T^{-1})) = \left\{ \sum_{n=N}^{\infty} a_n T^{-n} \mid a_n \in \mathbb{F}_q, N \in \mathbb{Z}, a_N \neq 0 \right\} \cup \{0\}$$

で表す. ここで,  $\mathbb{F}_q \subset \mathbb{F}_q[T] \subset \mathbb{F}_q(T) \subset \mathbb{F}_q((T^{-1}))$  という包含関係が成り立つ.

数論ではしばしば次の類似の対応を使った研究が行われている:

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} &\longleftrightarrow \mathbb{F}_q[T] \\ \mathbb{Q} &\longleftrightarrow \mathbb{F}_q(T) \\ \mathbb{R} &\longleftrightarrow \mathbb{F}_q((T^{-1}))\end{aligned}$$

今回の主結果もそういった  $\mathbb{R}$  で成り立つことが  $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$  でも成り立つかどうかを調べた研究となっている.

次に, 4 節で定義した 2 つの Diophantine exponent の類似を定義したい. そのために, まずは  $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$  上に絶対値を定め多項式や代数的数の高さを定義する.  $\xi = \sum_{n=N}^{\infty} a_n T^{-n} \in \mathbb{F}_q((T^{-1})) \setminus \{0\}$  に対して,  $|\xi| := q^{-N}$ , また 0 に対して,  $|0| := 0$  で  $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$  上に絶対値を定める. この絶対値は,  $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$  の代数閉包  $\overline{\mathbb{F}_q((T^{-1}))}$  まで一意的に延長できることが知られており, それをまた  $|\cdot|$  で表す. 多項式  $P(X) = \sum_{n=0}^d a_n X^n \in (\mathbb{F}_q[T])[X]$  に対して,  $H(P) := \max_{0 \leq n \leq d} |a_n|$  を  $P$  の高さおよび. 代数的数  $\xi \in \overline{\mathbb{F}_q(T)}$  に対して,  $\xi$  の最小多項式を  $Q(X)$  とおく. つまり,  $X$  に関して既約かつ原始的な多項式  $Q(X) = \sum_{n=0}^d a_n X^n \in (\mathbb{F}_q[T])[X] \setminus \{0\}$  で,  $Q(\xi) = 0$  かつ  $a_d$  が  $T$  に関してモニック多項式となるものをとってくる. 代数的数に対して, 最小多項式は唯一つ存在することに注意する. このとき,  $H(\xi) := H(Q)$  を  $\xi$  の高さ,  $\deg \xi := \deg_X Q$  を  $\xi$  の次数とよぶ.

正の整数  $n$  と  $\xi \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$  に対して,

$$0 < |P(\xi)| \leq H(P)^{-w}, \quad \deg_X P \leq n$$

となる  $P(X) \in (\mathbb{F}_q[T])[X]$  が無数に存在するような実数  $w$  の上限を  $w_n(\xi)$  とおく. また,

$$0 < |\xi - \alpha| \leq H(\alpha)^{-w^*-1}, \quad \deg \alpha \leq n$$

となる代数的数  $\alpha \in \overline{\mathbb{F}_q(T)}$  が無数に存在するような実数  $w^*$  の上限を  $w_n^*(\xi)$  とおく. このとき, 任意の  $\xi \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$  に対して  $w_1(\xi) = w_1^*(\xi)$  となることが知られている. そこで, 実数と同じように次の問題について考えたい:

**問題 5.1.**  $n$  を正の整数とし,  $\xi \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$  とする.

- (1)  $\xi$  が代数的数のとき,  $w_n(\xi)$  と  $w_n^*(\xi)$  の値を決定せよ.
- (2) Diophantine exponent  $w_n$  と  $w_n^*$  は異なる関数か. もしそうならば, どのくらい異なるかを調べよ.

問題 (1) に関して, Liouville の定理 (定理 2.2) の類似が成り立つ.

**定理 5.2** (Mahler [10]). 次数  $d$  の代数的数  $\xi \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$  に対して,  $w_1(\xi) \leq d - 1$ .

しかし, Roth の定理 (定理 2.3) の類似は成立しないことが知られている. つまり,  $w_1(\xi) > 1$  となる代数的数  $\xi \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$  が存在する. 例えば,  $t$  を正の整数,  $r = p^t$  とし,  $\xi := \sum_{n=0}^{\infty} T^{-r^n} \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$  とおく. このとき,  $\xi$  は  $r$  次の代数的数で  $w_1(\xi) = r - 1$  となることが知られている ([10]).

このことから, 実数に比べ問題 (1) を解決するのは難しいことがわかる. 問題 (1) の部分的な結果として,  $w_1$  の代数的数での値域については次のことが知られている.

**定理 5.3** (Thakur [17], Schmidt [14]). 有理数  $w > 1$  に対して,  $w_1(\xi) = w$  を満たす代数的数  $\xi \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$  が無数に存在する.

今回, この結果を拡張することができたので報告する.

**定理 5.4.**  $n$  を正整数とし,  $w > 2n - 1$  を有理数とする. このとき, 次の等式を満たす代数的数  $\xi \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$  が無数に存在する:

$$w_1(\xi) = w_1^*(\xi) = \cdots = w_n(\xi) = w_n^*(\xi) = w.$$

次に問題 (2) を考える. 関数  $w_n$  と  $w_n^*$  の差の上界と下界について次を示すことができた.

**定理 5.5** ([11]).  $n$  を正整数とし,  $\xi \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$  とする.  $k$  を  $p^k \leq n < p^{k+1}$  を満たす非負整数とする. このとき, 次が成り立つ:

$$0 \leq w_n(\xi) - w_n^*(\xi) \leq (p^k - 1)w_n^*(\xi) + (n + 1)p^k - 2.$$

さらに  $1 \leq n < 2p$  ならば, 次の不等式が成り立つ:

$$0 \leq w_n(\xi) - w_n^*(\xi) \leq n - 1.$$

$\mathbb{R}$  と  $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$  では標数が 0 と  $p$  で異なっており, その影響で一般の  $n$  について定理 4.3 の類似を示すことができなかった. しかし, 小さい  $n$  に対しては, 標数  $p$  特有の議論を用いて定理 4.3 の類似を示すことができた.

関数  $w_n - w_n^*$  の値域について次を示すことができた.

**定理 5.6.**  $n$  を 2 以上の整数とする. 関数  $w_n - w_n^*$  の値域は閉区間  $[0, 1]$  を含む.

定理 5.5, 5.6 から,  $n = 2$  のとき関数  $w_2 - w_2^*$  の値域が閉区間  $[0, 1]$  と決定できたので, 定理 4.4 の類似が成立する. また, 任意の整数  $n \geq 2$  に対して,  $w_n(\xi) \neq w_n^*(\xi)$  なる  $\xi \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$  の存在性がわかるため,  $w_n$  と  $w_n^*$  は異なる関数となり, 問題 (2) の前半部分は解決できた.

## 参考文献

- [1] Y. Bugeaud, *Mahler's classification of numbers compared with Koksma's. III*, Publ. Math. Debrecen 65 (2004), no. 3-4, 305-316.
- [2] Y. Bugeaud, *Approximation by algebraic numbers*, Cambridge Tracts in Mathematics, 160 Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [3] Y. Bugeaud, A. Dujella, *Root separation for irreducible integer polynomials*, Bull. Lond. Math. Soc. 43 (2011), no. 6, 1239-1244.
- [4] Y. Bugeaud, *Continued fractions with low complexity: transcendence measures and quadratic approximation*, Compos. Math. 148 (2012), no. 3, 718-750.
- [5] L. V. Danilov, *Some classes of transcendental numbers*, (Russian) Mat. Zametki 12 (1972), 149-154. English translation Math. Notes 12 (1972), 524-527.
- [6] F. J. Dyson, *The approximation to algebraic numbers by rationals*, Acta Math. 79, (1947), 225-240.



- [7] J. Liouville, *Remarques relatives 1° à des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni rationnelle ni même réductible à des irrationnelles algébriques; 2° à un passage du livre des Principes où Newton calcule l'action exercée par une sphère sur un point extérieur*, (French), C. R. Acad. Sci. Paris 18 (1844), 883-885.
- [8] J. Liouville, *Nouvelle démonstration d'un théorème sur les irrationnelles algébriques*, (French), C. R. Acad. Sci. Paris 18 (1844), 910-911.
- [9] K. Mahler, *Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen*, (German), Math. Ann. 101 (1929), 342-366.
- [10] K. Mahler, *On a theorem of Liouville in fields of positive characteristic*, Canadian J. Math. 1, (1949), 397-400.
- [11] T. Ooto, *Quadratic approximation in  $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$* , Preprint arXiv:1512.04041.
- [12] K. F. Roth, *Rational approximations to algebraic numbers*, Mathematika 2 (1955), 1-20.
- [13] W. M. Schmidt, *Diophantine Approximation*, Lecture Note in Math. 785, Springer, 1980.
- [14] W. M. Schmidt, *On continued fractions and Diophantine approximation in power series fields*, Acta Arith. 95 (2000), no. 2, 139-166.
- [15] 塩川 宇賢, 無理数と超越数, 森北出版 (1999).
- [16] C. L. Siegel, *Approximation algebraischer Zahlen*, Math. Z. 10 (1921), 173-213.
- [17] D. S. Thakur, *Diophantine approximation exponents and continued fractions for algebraic power series*, J. Number Theory 79 (1999), no. 2, 284-291.
- [18] A. Thue, *Über Annäherungswerte Algebraischer Zahlen*, (German), J. Reine Angew. Math. 135 (1909), 284-305.
- [19] E. Wirsing, *Approximation mit algebraischen Zahlen beschränkten Grades*, (German) J. Reine Angew. Math. 206 (1960), 67-77.

# Gorenstein Fano polytope arising from order polytopes and chain polytopes

土谷 昭善 (Akiyoshi TSUCHIYA) (大阪大学大学院情報科学研究科)\*

本原稿は大阪大学の日比孝之氏と松田一徳氏との共同研究 [3] に基づく.

## 1. 準備

### 1.1. 整凸多面体と Ehrhart 多項式

$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$  を  $d$ 次元整凸多面体, つまり各頂点の座標が全て整数であるような  $d$ 次元の凸多面体とする. 整凸多面体  $\mathcal{P}$  が正規であるとは, 任意の整数  $N > 0$  および任意の  $\mathbf{a} \in N\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d$  に対し,  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{a}_N$  を満たす  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N \in \mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d$  が存在するときをいう. ここで  $N\mathcal{P} = \{N\alpha \mid \alpha \in \mathcal{P}\}$  である.

また, 整凸多面体  $\mathcal{P}$  が **Fano** であるとは, その内部に含まれる整数点が  $\mathbb{R}^d$  の原点のみであるときをいう. さらに, Fano な整凸多面体  $\mathcal{P}$  が **Gorenstein Fano** であるとは, その双対多面体

$$\mathcal{P}^\vee := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq 1 \text{ for all } \mathbf{y} \in \mathcal{P}\}$$

も整であるときをいう. ここで,  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  は  $\mathbb{R}^d$  の通常の内積である.

任意の正整数  $n$  について関数  $i(\mathcal{P}, n)$  を

$$i(\mathcal{P}, n) := |n\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d|$$

で定義する. この時, 以下が知られている.

- $i(\mathcal{P}, n)$  は,  $n$  に関する  $d$  次多項式であり, 定数項は常に 1 である.
- $i(\mathcal{P}, n)$  の最高次の係数は  $\mathcal{P}$  の通常 の体積と一致する.

この多項式  $i(\mathcal{P}, n)$  を  $\mathcal{P}$  の **Ehrhart 多項式** と呼ぶ.

### 1.2. 順序凸多面体と鎖凸多面体

$P = \{p_1, \dots, p_d\}$  を  $d$  元からなる半順序集合とする.  $I \subset P$  がポセットイデアルとは, 条件 “ $a \in I, b \in P, b < a$  ならば  $b \in I$ ” を満たすものをいう.  $P$  のポセットイデアル全体の集合を  $\mathcal{J}(P)$  で表す. また,  $A \subset P$  が反鎖とは,  $A$  の全ての元が  $P$  で比較不可能なものをいう.  $P$  の反鎖全体の集合を  $\mathcal{A}(P)$  で表す. 空集合  $\emptyset$  はポセットイデアルおよび反鎖とみなす.

各  $I \subset P$  に対し,  $\rho(I) := \sum_{p_i \in I} \mathbf{e}_i$  と定める (ここで  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$  は  $\mathbb{R}^d$  の単位座標ベクトル). 半順序集合  $P$  から次の 2 種類の整凸多面体が構成できる.

$$\mathcal{O}(P) := \text{conv}(\{\rho(I) \mid I \in \mathcal{J}(P)\})$$

\*e-mail: a-tsuchiya@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

$$\mathcal{C}(P) := \text{conv}(\{\rho(A) | I \in \mathcal{A}(P)\})$$

$\mathcal{O}(P)$  を順序凸多面体,  $\mathcal{C}(P)$  を鎖凸多面体という. この2種類の整凸多面体の Ehrhart 多項式が一致する, つまり

$$i(\mathcal{O}(P), n) = i(\mathcal{C}(P), n)$$

が成り立つことが知られている ([5]). 特に,  $\mathcal{O}(P)$  と  $\mathcal{C}(P)$  の体積は一致する.

### 1.3. トーリック環とトーリックイデアル

$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$  を  $d$ 次元整凸多面体とする. このとき

$$K[\mathcal{P}] := K[x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d} t : (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathcal{P}] \subset K[x_1, \dots, x_d, t]$$

は  $\mathcal{P}$  に付随するトーリック環という. またこのトーリック環の定義イデアル  $I_{\mathcal{P}}$  を  $\mathcal{P}$  に付随するトーリックイデアルという.  $\mathcal{P}$  が正規の時,  $K[\mathcal{P}]$  の Hilbert 関数と,  $\mathcal{P}$  の Ehrhart 多項式  $i(\mathcal{P}, n)$  が一致することが知られている.

## 2. 順序凸多面体と鎖凸多面体に付随する正規 Gorenstein Fano 凸多面体

$P = \{p_1, \dots, p_d\}$ ,  $Q = \{q_1, \dots, q_d\}$  を, とともに  $d$ 元からなる半順序集合とする.  $P$  と  $Q$  に付随する順序凸多面体と鎖凸多面体を組み合わせ, 次の3種類の整凸多面体を構成する.

$$\Gamma(\mathcal{O}(P), -\mathcal{O}(Q)) := \text{conv}\{\mathcal{O}(P) \cup -(\mathcal{O}(Q))\}$$

$$\Gamma(\mathcal{O}(P), -\mathcal{C}(Q)) := \text{conv}\{\mathcal{O}(P) \cup -(\mathcal{C}(Q))\}$$

$$\Gamma(\mathcal{C}(P), -\mathcal{C}(Q)) := \text{conv}\{\mathcal{C}(P) \cup -(\mathcal{C}(Q))\}$$

ここで整凸多面体  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$  に対して  $-\mathcal{P} := \{-\alpha \in \mathbb{R}^d | \alpha \in \mathcal{P}\}$  である.

$[d] = \{1, \dots, d\}$  の置換  $\sigma = i_1 i_2 \cdots i_d$  が  $P$  の線形拡張であるとは,  $p_{i_a} < p_{i_b}$  であれば  $i_a < i_b$  を満たすものをいう.  $P$  と  $Q$  が共通の線形拡張を持つことと,  $\Gamma(\mathcal{O}(P), -\mathcal{O}(Q))$  が正規 Gorenstein Fano 凸多面体となることは同値であることが知られている ([1]). また,  $\Gamma(\mathcal{O}(P), -\mathcal{C}(Q))$  と  $\Gamma(\mathcal{C}(P), -\mathcal{C}(Q))$  が常に正規 Gorenstein Fano 凸多面体であることも [2] と [4] で知られている. この結果はこれら3種類の整凸多面体に付随するトーリックイデアルのグレブナー基底を計算することで, 示すことができる.

### 3. 3種類の正規 Gorenstein Fano 凸多面体の Ehrhart 多項式

グレブナー基底の形から以下の定理が得られる.

**定理 1**  $P$  と  $Q$  を  $|P| = |Q| = d$  となる半順序集合とする. このとき,

$$i(\Gamma(\mathcal{O}(P), -\mathcal{C}(Q)), n) = i(\Gamma(\mathcal{C}(P), -\mathcal{C}(Q)), n)$$

が成り立つ. 特に,  $\Gamma(\mathcal{O}(P), -\mathcal{C}(Q))$  と  $\Gamma(\mathcal{C}(P), -\mathcal{C}(Q))$  の体積は一致する.

さらに  $P$  と  $Q$  が共通の線形拡張を持つとき,

$$i(\Gamma(\mathcal{O}(P), -\mathcal{O}(Q)), n) = i(\Gamma(\mathcal{O}(P), -\mathcal{C}(Q)), n) = i(\Gamma(\mathcal{C}(P), -\mathcal{C}(Q)), n)$$

が成り立つ. 特に,  $\Gamma(\mathcal{O}(P), -\mathcal{O}(Q)), \Gamma(\mathcal{O}(P), -\mathcal{C}(Q))$  と  $\Gamma(\mathcal{C}(P), -\mathcal{C}(Q))$  の体積は一致する.

#### 4. 3種類の正規 Gorenstein Fano 凸多面体の smooth 性

$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$  を  $d$ 次元 Fano 凸多面体とする.  $\mathcal{P}$  が  $\mathbb{Q}$ -factorial であるとは,  $\mathcal{P}$  が単体的, つまり各ファセットが単体となっているときにいう.  $\mathcal{P}$  が smooth であるとは, 各ファセットの頂点の集合が  $\mathbb{Z}^d$  の  $\mathbb{Z}$  基底となっているときにいう.  $\mathcal{P}$  が smooth Fano ならば,  $\mathbb{Q}$ -factorial かつ Gorenstein である.

3種類の正規 Gorenstein Fano 凸多面体が, いつ smooth になるかを特徴付けることができた.

**定理 2**  $d \geq 2$  に対して,  $P$  と  $Q$  を  $|P| = |Q| = d$  となる半順序集合とする.  $P$  と  $Q$  は共通の線形拡張を持つと仮定する. このとき, 次は同値となる:

- (i)  $\Gamma(\mathcal{O}(P), -\mathcal{O}(Q))$  は  $\mathbb{Q}$ -factorial である;
- (ii)  $\Gamma(\mathcal{O}(P), -\mathcal{O}(Q))$  は smooth である;
- (iii)  $\mathcal{J}(P) = \{\{p_{i_1}\}, \{p_{i_1}, p_{i_2}\}, \dots, \{p_{i_1}, \dots, p_{i_d}\}\}$  または  
 $\mathcal{J}(P) = \{\{p_{i_1}\}, \{p_{i_2}\}, \{p_{i_1}, p_{i_2}\}, \dots, \{p_{i_1}, \dots, p_{i_d}\}\}$ , かつ  
 $\mathcal{J}(Q) = \{\{q_{i_1}\}, \{q_{i_1}, q_{i_2}\}, \dots, \{q_{i_1}, \dots, q_{i_d}\}\}$  または  
 $\mathcal{J}(Q) = \{\{q_{i_1}\}, \{q_{i_2}\}, \{q_{i_1}, q_{i_2}\}, \dots, \{q_{i_1}, \dots, q_{i_d}\}\}$ .

**定理 3**  $d \geq 2$  に対して,  $P$  と  $Q$  を  $|P| = |Q| = d$  となる半順序集合とする. このとき, 次は同値となる:

- (i)  $\Gamma(\mathcal{O}(P), -\mathcal{C}(Q))$  は  $\mathbb{Q}$ -factorial である;
- (ii)  $\Gamma(\mathcal{O}(P), -\mathcal{C}(Q))$  は smooth である;
- (iii)  $\mathcal{J}(P) = \{\{p_{i_1}\}, \{p_{i_1}, p_{i_2}\}, \dots, \{p_{i_1}, \dots, p_{i_d}\}\}$  または  
 $\mathcal{J}(P) = \{\{p_{i_1}\}, \{p_{i_2}\}, \{p_{i_1}, p_{i_2}\}, \dots, \{p_{i_1}, \dots, p_{i_d}\}\}$ , かつ  
 $\mathcal{A}(Q) = \{\{q_{i_1}\}, \{q_{i_2}\}, \dots, \{q_{i_d}\}\}$  または  
 $\mathcal{A}(Q) = \{\{q_{i_1}\}, \{q_{i_2}\}, \dots, \{q_{i_d}\}, \{q_{i_1}, q_{i_2}\}\}$ ;

**定理 4**  $d \geq 2$  に対して,  $P$  と  $Q$  を  $|P| = |Q| = d$  となる半順序集合とする. このとき, 次は同値となる:

- (i)  $\Gamma(\mathcal{C}(P), -\mathcal{C}(Q))$  は  $\mathbb{Q}$ -factorial である;
- (ii)  $\Gamma(\mathcal{C}(P), -\mathcal{C}(Q))$  は smooth である;

(iii) 任意の  $I_1, I_2 \in \mathcal{A}_2(P) (I_1 \neq I_2)$  に関して  $I_1 \cap I_2 = \emptyset$  であり, 任意の  $J_1, J_2 \in \mathcal{A}_2(Q) (J_1 \neq J_2)$  に関して  $J_1 \cap J_2 = \emptyset$  であり, 任意の  $I \in \mathcal{A}_2(P)$  と任意の  $J \in \mathcal{A}_2(Q)$  に関して  $|I \cap J| \neq 1$  となる.

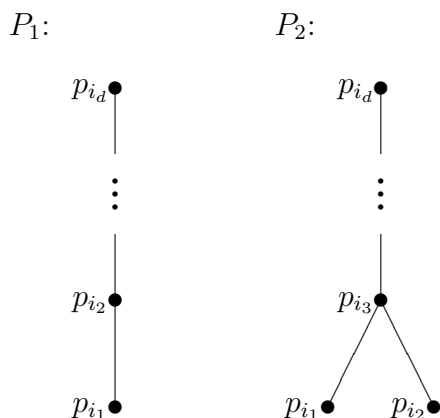
### 5. 3種類の smooth Fano 凸多面体と unimodular 同値

$d$ 次元整凸多面体  $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^d$  について,  $\mathcal{P}$  と  $\mathcal{Q}$  が unimodular 同値であるとは, unimodular 行列  $U \in \mathbb{Z}^{d \times d}$  と整数ベクトル  $w \in \mathbb{Z}^d$  が存在して,  $U$  により定義される線形写像  $f_U : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  を用いて  $\mathcal{Q} = f_U(\mathcal{P}) + w$  とできる時に言う. ここで  $v \in \mathbb{R}^d$  に対し,  $f_U(v) = vU$  と定める. unimodular 同値は整凸多面体の分類に使われており, Gorenstein Fano 凸多面体および smooth Fano 凸多面体は, unimodular 同値なものを除けば, 各次元に有限個しか存在しないことが知られている.

半順序集合  $P$  と  $Q$  を固定して, 3種類の Gorenstein Fano 凸多面体がすべて smooth となる時, お互いが unimodular 同値となるか調べた. 以下がその結果である.

**定理 5**  $d \geq 3$  に対して,  $P$  と  $Q$  を  $|P| = |Q| = d$  となる半順序集合とする.  $\Gamma(\mathcal{O}(P), -\mathcal{O}(Q)), \Gamma(\mathcal{O}(P), -\mathcal{C}(Q))$  と  $\Gamma(\mathcal{C}(P), -\mathcal{C}(Q))$  がすべて smooth であると仮定する. このとき,  $\Gamma(\mathcal{O}(P), -\mathcal{O}(Q))$  と  $\Gamma(\mathcal{C}(P), -\mathcal{C}(Q))$  は unimodular 同値である. しかし,  $\Gamma(\mathcal{O}(P), -\mathcal{C}(Q))$  はこれらと unimodular 同値とならない. さらに,  $P \neq Q$  であれば,  $\Gamma(\mathcal{O}(Q), -\mathcal{C}(P))$  もまた smooth であり,  $\Gamma(\mathcal{O}(P), -\mathcal{C}(Q))$  とは unimodular 同値とならない.

**Remark 6**  $d = 2$  のときは, 3種類の smooth Fano 凸多面体はお互い unimodular 同値となる. さらに3種類の Gorenstein Fano 凸多面体がすべて smooth となるのは,  $P$  と  $Q$  が以下の  $P_1$  か  $P_2$  のいずれかになるときである.



最後に, これらの結果から, 次の系が得られる.

**Corollary 7** 任意の  $d \geq 3$  に対して, smooth Fano 凸多面体  $\mathcal{P}$  と  $\mathcal{Q}$  で次の条件を満たすものが存在する:

- $\mathcal{P}$  と  $\mathcal{Q}$  は同じ Ehrhart 多項式を持つ.

- $\mathcal{P}$  と  $\mathcal{Q}$  は unimodular 同値ではない.

## 参考文献

- [1] T. Hibi and K. Matsuda, Quadratic Gröbner bases of twinned order polytopes, arXiv:1505.04289.
- [2] T. Hibi, K. Matsuda and A. Tsuchiya, Quadratic Gröbner bases arising from partially ordered sets, *Math. Scand.*, to appear.
- [3] T. Hibi, K. Matsuda and A. Tsuchiya, Gorenstein Fano polytopes arising from order polytopes and chain polytopes, arXiv:1507.03221.
- [4] H. Ohsugi and T. Hibi, Reverse lexicographic squarefree initial ideals and Gorenstein Fano polytopes, arXiv:1410.4786.
- [5] R. P. Stanley, Two poset polytopes, *Disc. Comput. Geom.* **1** (1986), 9–23.

# Euler の二重ゼータ値の公式について

原田 遼太郎 Ryotaro HARADA  
名古屋大学大学院多元数理科学研究科

$k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}_{>0}$  であり,  $k_n > 1$  である指数  $(k_1, \dots, k_n)$  に対し, 以下に定義される実数を多重ゼータ値 (multiple zeta value) という.

$$\zeta(k_1, \dots, k_n) := \sum_{0 < m_1 < \dots < m_n} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_n^{k_n}}.$$

また,  $k_n > 1$  となる指数  $(k_1, \dots, k_n)$  を収束指数 (admissible index) とよぶ.

多重ゼータ値は, 整数論, 結び目理論, 数理論理学などの数学の様々な分野と関連していることが知られている. 多重ゼータ値の研究は 18 世紀の Euler による二重ゼータ値 ( $n = 2$  の多重ゼータ値) の研究 ([E]) にまで遡るとされる. Euler の実際の研究内容については, (この論文 [E] がラテン語で書かれているためか) 詳しく知られていないようであるが, Euler は二重ゼータ値についての関係式を導く *prima methodus*, *secunda methodus*, *tertia methodus* の三手法を編み出しており, それぞれより以下の興味深い関係式を見出している;

**Prima methodus:**

$$\zeta(a)\zeta(b) = \zeta(a+b) + \zeta(a,b) + \zeta(b,a). \quad (1)$$

**Secunda methodus:**

$$\begin{aligned} \zeta(a)\zeta(b) - \zeta(a+b) &= \sum_{i=0}^{a-1} (-1)^i \binom{b+i-1}{i} \zeta(b+i)\zeta^*(a-i) \\ &\quad + (-1)^a \sum_{j=0}^{b-1} \binom{a+j-1}{j} \zeta^*(a+j, b-j) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{b-1} (-1)^i \binom{a+i-1}{i} \zeta(a+i)\zeta^*(b-i) \\ &\quad + (-1)^b \sum_{j=0}^{a-1} \binom{b+j-1}{j} \zeta^*(b+j, a-j). \quad (2) \end{aligned}$$

**Tertia methodus:**

$$\zeta(a, b) = \sum_{i=0}^{a-1} (-1)^i \binom{b+i-1}{i} \left\{ \zeta^*(b+i, a-i) + \zeta(a-i, b+i) + \zeta(a+b) \right\} \\ + (-1)^a \sum_{j=0}^{b-1} \zeta^*(a+j, b-j). \quad (3)$$

以上の関係式において、 $\zeta^*(a, b)$  とは収束指数でない指数  $(a, b)$  (すなわち  $b = 1$  のケース) において、 $\zeta(a, b)$  に調和積を用いて正規化 ([IKZ]) を施した  $\mathbb{R}[T]$  ( $T$  は変数) の元のことである。

Euler が関係式 (1) に与えた証明は正しい一方で、関係式 (2), (3) の証明は厳密な数学の観点から完全とは言えず、議論の余地を残している。今回得られた結果は、(2), (3) についての Euler の証明を数学的に正当化したことである。

**Theorem ([H]).** 整数  $a, b \in \mathbb{Z}_{>1}$  に対し、実際に関係式 (2), (3) が成り立つ。

さらに [H] ではこの二式が複シャッフル関係式から導かれることが示されている。

## 参考文献

- [E] Leonhard Euler, *Meditationes circa singulare serierum genus*, Novi Comm. Acad. Sci. Petropol **20** (1776), 140–186, reprinted in *Opera Omnia ser. I*, vol. **15**, B. G. Teubner, Berlin (1927) 217–267.
- [H] Ryotaro Harada, *On Euler's formulae among double zeta values*, in preparation.
- [IKZ] Kentaro Ihara, Masanobu Kaneko, and Don Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, *Compos. Math.*, **142** (2) (2006), 307–338.



# 素数と素数の $k$ 乗の和について

鈴木雄太 (名古屋大学大学院多元数理科学研究科)\*1  
Yuta Suzuki (Nagoya University)

## 1. Binary additive problems with prime numbers

1742年, Goldbach は次の予想を提出しました:

「4以上の偶数はすべて素数2つの和で書けるであろう。」

これは今日 **Goldbach 予想** として知られている数論の古典的未解決問題のひとつです。20世紀初頭までこの Goldbach 予想に関して本質的な進展はありませんでしたが, 1923年に Hardy-Littlewood [5] は次のような漸近式を導出する heuristics を発表しました: 偶数  $n$  に対して  $n \rightarrow \infty$  のとき,

$$R(n) \sim \mathfrak{S}(n)n. \quad (1)$$

ただしここで,

$$R(n) := \sum_{l+m=n} \Lambda(l)\Lambda(m), \quad \mathfrak{S}(n) := \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) \prod_{p \nmid n} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)$$

とし, 以後  $p$  は素数を表すこととしましょう. 無限積  $\mathfrak{S}(n)$  は **特異級数** と呼ばれます. この  $R(n)$  は偶数  $n$  を素数2つの和で書き表す表し方の個数を von Mangoldt 関数

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log p & (n \text{ が素数 } p \text{ のべきの時}), \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

で重み付けしたものとみなせます. 明らかに  $\mathfrak{S}(n) \gg 1$  なので, この漸近式は Goldbach 予想に非常に強い情報を与えることとなります. この Hardy-Littlewood [5] のアイデアを使うことで Chudakov [2], van der Corput [3], Estermann [4] は独立に次を得ました:

**Theorem 1** ( Chudakov [2], van der Corput [3], Estermann [4] ).  $X, A \geq 2$  を実数とする. すると, 高々  $\ll XL^{-A}$  個の例外を除きすべての偶数  $n \in (1, X]$  に対して

$$R(n) = \mathfrak{S}(n)n(1 + O(L^{-A})) \quad (2)$$

が成立する. ただしここで  $L := \log X$ .

すなわち, 「ほとんどすべての」偶数に対して Hardy-Littlewood の漸近公式が成立するということが分かったわけです.

Hardy-Littlewood [5] は上記結果を導くようなアイデアだけでなく, 素数の加法的性質に関する新しい予想をいくつか提出しました. その中の1つを見てみます. 以下,  $k \geq 2$  を固定された自然数としましょう. 自然数の集合

$$\mathbf{Irr}_k := \{ n \in \mathbb{N} \mid X^k - n : \text{irreducible over } \mathbb{Z} \}$$

を考えます. すると, Hardy-Littlewood [5, Conjecture H, L] は次を予想しました<sup>1</sup>:

「十分大きい自然数  $n \in \mathbf{Irr}_k$  は素数と  $k$  乗数の和で書けるであろう。」

\*1 e-mail: m14021y@math.nagoya-u.ac.jp

<sup>1</sup> Hardy-Littlewood [5] は  $k = 2, 3$  の場合しか述べていませんが, ここでは後年の拡張を述べました.

本講演では **Hardy-Littlewood 予想** と言ったらこの素数と  $k$  乗数の和に関する予想のことを指すとします. 特に漸近式 (1) の類似として

$$R_k(n) \sim \mathfrak{S}_k(n)n^{1/k} \quad (n \in \mathbf{Irr}_k, n \rightarrow \infty)$$

を Hardy-Littlewood の方法に従って予想することができます. ただしここで,

$$R_k(n) = \sum_{l+m^k=n} \Lambda(l), \quad \mathfrak{S}_k(n) := \prod_p \left(1 - \frac{\rho_k(n, p) - 1}{p-1}\right),$$

$$\rho_k(n, p) := \#\{x \pmod{p} \mid x^k \equiv n \pmod{p}\}$$

としました. 尚, 条件  $n \in \mathbf{Irr}_k$  は条件  $\mathfrak{S}_k(n) \neq 0$  と同値であることに注意します. この問題に対しても, Theorem 1 に対応する結果が Miech [9] ( $k=2$  の場合) と川田 [7] ( $k$  が一般の場合) によって得られています:

**Theorem 2** (Miech [9], 川田 [7, Theorem 5]).  $k \geq 2$  を自然数,  $X, A \geq 2$  を実数とする. 高々  $\ll XL^{-A}$  個の例外を除きすべての  $n \in (1, X] \cap \mathbf{Irr}_k$  に対して

$$R_k(n) = \mathfrak{S}_k(n)n^{1/k}(1 + O(L^{-A})) \quad (3)$$

が成立する.

実はこの Hardy-Littlewood 予想の特異級数  $\mathfrak{S}_k(n)$  の収束性は Goldbach 予想の場合と比べて非常に取り扱いが難しくなります. 実際, 特異級数  $\mathfrak{S}_k(n)$  の収束性は代数体  $\mathbb{Q}(n^{1/k})$  の Dedekind zeta 関数の零点分布と深く関係しています.

一方 Hua [6] は素数と素数の  $k$  乗の和について研究を始めました. 自然数の集合

$$\mathbb{H}_k^{\text{local}} := \{n \in \mathbb{N} \mid \forall p, (p-1) \mid k \Rightarrow n \not\equiv 1 \pmod{p}\}$$

を導入し,  $\mathbb{H}_k := \mathbb{H}_k^{\text{local}} \cap \mathbf{Irr}_k$  とおきましょう. すると次が予想されます:

「十分大きい自然数  $n \in \mathbb{H}_k$  は素数と素数の  $k$  乗の和で書けるであろう。」

この **Hua 予想** に対する Hardy-Littlewood 型漸近公式は次のようになります:

$$R_{1,k}(n) \sim \mathfrak{S}_{1,k}(n)n^{1/k} \quad (n \in \mathbb{H}_k, n \rightarrow \infty),$$

ただしここで

$$R_{1,k}(n) = \sum_{l+m^k=n} \Lambda(l)\Lambda(m),$$

$$\mathfrak{S}_{1,k}(n) := \prod_{p \mid n} \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) \prod_{p \nmid n} \left(1 - \frac{p(\rho_k(n, p) - 1) + 1}{(p-1)^2}\right)$$

としました. この場合も条件  $n \in \mathbb{H}_k$  は条件  $\mathfrak{S}_{1,k}(n) \neq 0$  と同値になることが分かります. この場合の Theorem 1 の類似は Schwarz [16] の結果に川田 [7] の結果を組み合わせれば得られます:

**Theorem 3** (Schwarz [16], 川田 [7]).  $k \geq 2$  を自然数,  $X, A \geq 2$  を実数とする. 高々  $\ll XL^{-A}$  個の例外を除き, すべての  $n \in (1, X] \cap \mathbb{H}_k$  に対して

$$R_{1,k}(n) = \mathfrak{S}_{1,k}(n)n^{1/k}(1 + O(L^{-A})) \quad (4)$$

が成立する.

本講演では, この Hua 予想の Hardy-Littlewood 型漸近公式を短区間中で考察します.

## 2. Hardy-Littlewood asymptotic formula in short intervals

前節の Theorem 1, 2, 3 の「短区間版」を考えます. すなわち, 「どのくらい短い区間  $(X, X + H]$  においても, ほとんどすべての自然数が Hardy-Littlewood 型漸近公式を満たすと言えるか?」という問題を考えます. 以下の様な結果が得られています:

**Theorem 4** (三河 [10], Perelli-Pintz [13]).  $X, H, A \geq 2, \varepsilon > 0$  を実数とすると, 条件

$$X^{1/3+\varepsilon} \leq H \leq X$$

の下, 高々  $\ll HL^{-A}$  個の例外を除きすべての偶数  $n \in (X, X + H]$  に対して漸近式 (2) が成立する.

**Theorem 5** (三河 [11], Perelli-Pintz [14], Perelli-Zaccagnini [15]).

$k \geq 2$  を自然数とし,  $X, H, A \geq 2, \varepsilon > 0$  を実数とする. すると条件

$$X^{1-1/k+\varepsilon} \leq H \leq X$$

の下, 高々  $\ll HL^{-A}$  個の例外を除き, すべての  $n \in (X, X + H] \cap \mathbf{Irr}_k$  に対して漸近式 (3) が成立する.

**Theorem 6** (Liu-Zhan [8], Bauer [1]).

$k \geq 2$  を自然数とし,  $X, H, A \geq 2, \varepsilon > 0$  を実数とする. すると条件

$$X^{1-1/2k+\varepsilon} \leq H \leq X$$

の下, 高々  $\ll HL^{-A}$  個の例外を除き, すべての  $n \in (X, X + H] \cap \mathbb{I}_k$  に対して漸近式 (4) が成立する.

**Remark 1.** ここではどの結果も“制限なし”の表現関数<sup>2</sup>を考えましたが, 実はパラメータ  $Y$  を導入して, 制限付きの表現関数, 例えば

$$R^*(n) := \sum_{\substack{l+m=n \\ X-Y < l \leq X \\ m \leq Y}} \Lambda(l)\Lambda(m)$$

などを考えると  $H$  の範囲を広げることができます. しかし, 制限付きの表現関数からは制限なしの表現関数の情報を完全に復元することはできないので, ここでは制限なしの表現関数に限って話をすることにします.

## 3. Main result

今回, 前節で述べた Bauer による Theorem 6 の以下の様な改善を得ました:

**Main Theorem.**  $k \geq 2$  を自然数とし,  $X, H, A \geq 2, \varepsilon > 0$  を実数とする. すると条件

$$X^{1-1/k+\varepsilon} \leq H \leq X$$

の下, 高々  $\ll HL^{-A}$  個の例外を除き, すべての  $n \in (X, X + H] \cap \mathbb{I}_k$  に対して漸近式 (4) が成立する.

**Remark 2.** 前節で制限付きの表現関数を考えるトリックについて述べました. 先行研究のどの方法もこのトリックを組み合わせることが可能ですが, 本講演の方法は制限付きの表現関数には適用不可能です. 従って, この改善はあくまで 制限なし の表現関数と考えた場合のみの改善です.

<sup>2</sup>  $R(n), R_k(n), R_{1,k}(n)$  のような“表し方の個数”を数える関数のこと.

**Remark 3.** ちょっと驚いたことに, Main Theorem での  $H$  の動ける範囲は Hardy-Littlewood 予想における Theorem 5 の範囲と同じになっています.

本講演ではこの改善の方法について報告したいと思います.

#### 4. Hardy-Littlewood method

考えている漸近式の誤差の2乗平均

$$\sum_{\substack{X < n \leq X+H \\ n \in \mathbb{H}_k}} |R_{1,k}(n) - \mathfrak{S}_{1,k}(n)n^{1/k}|^2 \quad (5)$$

の評価<sup>3</sup>を試みます. 自明な評価

$$R_{1,k}(n) \ll X^{1/k}L$$

ないしは Hardy-Littlewood 型漸近公式 (4) と比較して見れば, 目標となるのは

$$\sum_{\substack{X < n \leq X+H \\ n \in \mathbb{H}_k}} |R_{1,k}(n) - \mathfrak{S}_{1,k}(n)n^{1/k}|^2 \ll HX^{2/k}L^{-A}$$

というような形の評価ということになります. Main Theorem はこの形の評価に Chebyshev 不等式を用いれば直ちに得られます. 自然数  $k$  に対して, 三角多項式たち

$$S_k(\alpha) := \sum_{n^k \leq 2X} \Lambda(n)e(n^k \alpha)$$

を導入します<sup>4</sup>. すると加法的指標の直交性より

$$R_{1,k}(n) = \int_0^1 S_1(\alpha)S_k(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha$$

を得ます. そこで積分範囲を major arcs  $\mathfrak{M}$  および minor arcs  $\mathfrak{m}$  に分割し<sup>5</sup>, 誤差の2乗平均 (5) を

$$\begin{aligned} &\ll \sum_{\substack{X < n \leq X+H \\ n \in \mathbb{H}_k}} \left| \int_{\mathfrak{M}} S_1(\alpha)S_k(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha - \mathfrak{S}_{1,k}(n)n^{1/k} \right|^2 \\ &\quad + \sum_{X < n \leq X+H} \left| \int_{\mathfrak{m}} S_1(\alpha)S_k(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha \right|^2 \end{aligned}$$

と評価します. 前者の major arcs  $\mathfrak{M}$  に関する部分は標準的な方法で計算できてしまうので, ここでは詳細を述べません. 後者の minor arcs  $\mathfrak{m}$  に関する部分を考えましょう. 準備として  $S_k(\alpha)$  を定義する和を dyadic に分割して

$$S_k(\alpha) = \sum_{X < n^k \leq 2X} \Lambda(n)e(n^k \alpha)$$

と思えるようにしておきます.

<sup>3</sup> 本当はここで特異級数は一旦部分和で置き換えて考えて, 後に川田 [7] の方法によって完全な特異級数に直す作業が必要ですが, ここでは省略します.

<sup>4</sup> 本当は major arc 上の計算のために, 和の範囲を適当な定数  $B$  を用いて  $XL^{-kB} < n^k \leq X$  というように制限しなければいけません. しかしここでは簡単のために和を取る変数を単に上から抑えただけにとどめました.

<sup>5</sup> ここで major arcs  $\mathfrak{M}$  とは三角多項式の近似がしやすい部分であり,  $\mathfrak{M}$  の寄与のみから主要項が見えてきます. また minor arcs  $\mathfrak{m}$  とは単位区間の major arcs 以外の部分であり, 主要項への寄与は小さいと期待されます.

## 5. The minor arcs

この minor arcs 上の積分の取り扱い方が Liu-Zhan [8] や Bauer [1] の先行研究と大きく違う部分です. 全体としては, 三河-Peneva [12] の手法をより高次の多項式に拡張して, そこに Perelli-Pintz [13] による双子素数予想ないしは Goldbach 予想の場合の minor arc 評価を持ち込むことで Main Theorem に必要な minor arc 評価が得られます.

まず, 三河-Peneva [12] に従い Cesàro weight を利用して 2 乗を開いて評価すると,

$$\sum_{X < n \leq X+H} \left| \int_{\mathfrak{m}} S_1(\alpha) S_k(\alpha) e(-n\alpha) d\alpha \right|^2 \ll \int_0^1 \int_{\mathfrak{m}} |S_1(\alpha)|^2 |S_k(\alpha + \beta)|^2 F_H(\beta) d\alpha d\beta$$

とできます. ただしここで  $F_H(\alpha)$  は Fejér 核<sup>6</sup>

$$F_H(\alpha) := \sum_h w(h) e(h\alpha), \quad w(h) := \max\left(1 - \frac{|h|}{2H}, 0\right)$$

です. ここで  $|S_k(\alpha + \beta)|^2$  の 2 乗を開いて,  $S_k(\alpha + \beta)$  の定義を思い出し, 和を積分の外に出します. すると, von Mangoldt 関数  $\Lambda(n)$  をただの  $\log n$  で抑えてしまうことで

$$\ll L^2 \sum_{X < m_1^k, m_2^k \leq 2X} w(m_1^k - m_2^k) \left| \int_{\mathfrak{m}} |S_1(\alpha)|^2 e(-(m_1^k - m_2^k)\alpha) d\alpha \right| \quad (6)$$

を得ます. もしこのまま評価がうまく行けば, 最後に行った操作は「素数の  $k$  乗に渡る和をただの  $k$  乗数に渡る和に置き換えた」ということを意味しています. 和 (6) は双子素数予想ないしは Goldbach 予想の場合の minor arc 上の積分の平均

$$\sum_{X < n \leq X+H} \left| \int_{\mathfrak{m}} |S_1(\alpha)|^2 e(-n\alpha) d\alpha \right|^2$$

の類似物と思えます. ただし, 積分の中にある加法的指標に  $k - 1$  次多項式が入れられているので, このままでは Goldbach 予想の場合の結果をそのまま用いることは出来ません. そこでなんとか Weyl 差分を用いられる形にして, 多項式の次数を下げることを目標にします. さて, 和 (6) に Cauchy-Schwarz 不等式を使って 2 乗の形を作った後に再度 2 乗を開きます. すると本質的に

$$\int_{\mathfrak{m}} \int_{\mathfrak{m}} |S_1(\alpha)|^2 |S_1(\beta)|^2 \Phi_k(\alpha - \beta) d\alpha d\beta, \\ \Phi_k(\alpha) := \sum_{X < m_1^k, m_2^k \leq 2X} w(m_1^k - m_2^k) e((m_1^k - m_2^k)\alpha)$$

というような量を評価すれば良いということになります. そうしたら後は Hölder 不等式を使って三角多項式  $\Phi_k(\alpha)$  の次数を上げた後に Weyl 差分を用いれば, 加法的指標の中にある多項式の次数を 1 次までに落とすことができます. そうして minor arcs 上の積分の評価は

$$\sum_{1 \leq h \ll H} \left| \int_{\mathfrak{m}} |S_1(\alpha)|^2 e(-h\alpha) d\alpha \right|^2$$

という和の評価に帰着でき, Perelli-Pintz [13] の方法を用いることで Main Theorem に必要な minor arc 評価を得ます.

<sup>6</sup> 本当は  $H$  が自然数でないといけません,  $H$  を自然数としても一般性を失わないことが容易に分かります.  $X$  に関しても同様です.

**Remark 4.** Main Theorem の  $H$  の範囲

$$X^{1-1/k+\varepsilon} \leq H \leq X$$

がどの部分から決まってしまうのかを見てみます。実は和(6)の時点で、この  $H$  への制限が必要になっていることが分かります。実際、和(6)の中で  $m_1 = m_2$  なる項たちの寄与を考えてみると

$$\left( \sum_{X < m^k \leq 2X} 1 \right) \cdot \left( \int_m |S_1(\alpha)|^2 d\alpha \right) \quad (7)$$

となります。ここで、区間  $(X, 2X]$  内の  $k$  乗数の個数は  $\asymp X^{1/k}$  で、積分の方はある正の定数  $C$  によって  $\ll XL^{-C}$  くらいの評価までしか期待できないので、(7) は結局  $X^{1+1/k}$  くらいの量を寄与することになります。これが  $HX^{2/k}$  程度で抑えられる必要がありますが、(7) の寄与と比べると

$$X^{1+1/k} \ll HX^{2/k} \implies X^{1-1/k} \ll H$$

くらいの制限は(6)の時点でつかざるをえなくなってしまうわけです。

## 参考文献

- [1] C. Bauer, *On the sum of a prime and the  $k$ -th power of a prime*, Acta Arith. **85** (1998), 99–118.
- [2] N. G. Chudakov, *On the density of the set of even numbers which are not representable as a sum of two primes*, Izv. Akad. Nauk. SSSR **2** (1938), 25–40.
- [3] J. G. van der Corput, *Sur l'hypothèse de Goldbach pour presque tous les nombres pairs*, Acta Arith. **2** (1937), 266–290.
- [4] T. Estermann, *On Goldbach's problem: Proof that almost all even positive integers are sums of two primes*, Proc. London Math. Soc., (2) **44** (1938), 307–314.
- [5] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Some problems of 'Partitio Numerorum'; III: On the expression of a number as a sum of primes*, Acta Math. **44** (1923), 1–70.
- [6] L. K. Hua, *Some results in additive prime number theory*, Quart. J. Math. **9** (1938), 68–80.
- [7] K. Kawada, *Contributions to Additive Theory of Numbers*, PhD Thesis, Univ. of Tsukuba, 1993.
- [8] J. Y. Liu and T. Zhan, *On a theorem of Hua*, Arch. Math. **69** (1997), 375–390.
- [9] R. J. Miech, *On the equation  $n = p + x^2$* , Trans. Amer. Math. Soc. **130** (1968), 494–512.
- [10] H. Mikawa, *On prime twins*, Tsukuba J. Math. **15** (1991), 19–29.
- [11] H. Mikawa, *On the sum of a prime and a square*, Tsukuba J. Math. **17** (1993), 299–310.
- [12] H. Mikawa and T. Peneva, *Sums of five cubes of primes*, Studia Sci. Math. Hungar. (3) **46** (2009), 345–354.
- [13] A. Perelli and J. Pintz, *On the exceptional set for Goldbach's problem in short intervals*, J. London Math. Soc. (2) **47** (1993), 41–49.
- [14] A. Perelli and J. Pintz, *Hardy-Littlewood numbers in short intervals*, J. Number Theory **54** (1995), 297–308.
- [15] A. Perelli and A. Zaccagnini, *On the sum of a prime and a  $k$ -th power*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Math. **59** (1995), 185–200.
- [16] W. Schwarz, *Zur Darstellung von Zahlen durch Summen von Primzahlpotenzen II*, J. Reine Angew Math. **206** (1961), 78–112.

# リーマンゼータ関数の導関数の $a$ 点

小野塚 友一 (Tomokazu ONOZUKA)  
名古屋大学大学院多元数理科学研究科

## 1 Introduction

リーマンゼータ関数  $\zeta(s)$  は次の式で定義される関数で、数論における重要な関数の 1 つである。

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (\Re s > 1)$$

この関数が重要である理由としては、 $\zeta(s)$  と素数分布の関係が挙げられる。素数分布の問題は整数論の中でも主要な研究対象としてこれまでずっと取り上げられてきた。この問題にアタックするための道具としてリーマンゼータ関数が使われる。そしてその中でもリーマンゼータ関数の零点は重要な役割を果たす。リーマンゼータ関数の零点については様々な予想があるが、中でも一番大きな予想としてリーマン予想が挙げられる。リーマン予想とは「リーマンゼータ関数の非自明な零点は全て臨界線  $\Re s = 1/2$  の上にある」という主張であり、1859年にリーマンにより予想されたが未だに解決に至っていない問題である。そのため現在でも非自明な零点は研究され続けており、これまでに様々な結果が多くの数学者によって得られている。その中でも有名な結果として 1905 年に von Mangoldt によって示された次の Riemann-von Mangoldt の公式がある。

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T)$$

ここで  $N(T)$  とはリーマンゼータ関数  $\zeta(s)$  の非自明な零点で  $0 < \Im s < T$  を満たすものの個数である。この公式は 1913 年に Landau[3] により零点から  $a$  点に一般化された。ここで関数  $f(s)$  の  $a$  点とは  $f(s) = a$  の解で定義される点のことである。特に  $\rho_a = \beta_a + i\gamma_a$  で  $\zeta(s)$  の  $a$  点を表すこととする。この記号を使うと Landau の結果は次のように書かれる；

任意の  $a \in \mathbb{C}$  に対して次式が成り立つ。

$$N(a; 1, T) := \sum_{1 < \gamma_a < T} 1 = \begin{cases} \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T) & (a \neq 1) \\ \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{4\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T) & (a = 1) \end{cases} \quad (1.1)$$

更に Landau[4] は別の一般化も行った。その一般化とは  $x > 1$  に対して次の式が成り立つというものである。

$$\sum_{0 < \gamma_0 < T} x^{\rho_0} = -\Lambda(x) \frac{T}{2\pi} + O(\log T) \quad (1.2)$$

ただし  $\Lambda(x)$  は  $x$  が整数のとき von Mangoldt の  $\Lambda$  関数で、そうでなければ 0 となる関数とする。この式で  $x = 1$  とすると左辺は  $N(T)$  と一致するため、ある種の一般化とみなせる。(ただし Landau の結果は  $x > 1$  のときにしか成り立たない。) この結果は更に Steuding[7] により  $a$  点に一般化されている。Steuding が示したのは次の主張である；

正数  $x \neq 1$  に対して次式が成り立つ。

$$\sum_{0 < \gamma_a < T} x^{\rho_a} = \left( \alpha(x) - x\Lambda\left(\frac{1}{x}\right) \right) \frac{T}{2\pi} + O(T^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \quad (1.3)$$

ただし  $\alpha(x)$  は次の Dirichlet 級数の係数である。

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s) - a} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha(n)}{n^s}$$

リーマンゼータ関数の零点に関する別の有名な結果としては 1914 年の Bohr と Landau[2] の結果がある。彼らはリーマンゼータ関数の非自明な零点はほとんど全て臨界線付近にあることを示した。Landau[3] はこの結果を  $a$  点にまで拡張し、リーマン予想を仮定すればリーマンゼータ関数の  $a$  点はほとんど全て臨界線付近にあることを示した。この結果は後に Levinson[5] によりリーマン予想の仮定なしでも成り立つことが示された。彼が最終的に得た結果は次である；

十分大きい  $T$  と  $T^{1/2} \leq U \leq T$  と  $a \in \mathbb{C}$  に対して次式が成り立つ。

$$N^{(1)}(a; T, T+U) := \sum_{\substack{T < \gamma_a < T+U \\ \beta_a > 1/2 + (\log \log T)^2 / \log T}} 1 = O\left(\frac{U \log T}{\log \log T}\right) \quad (1.4)$$

$$N^{(2)}(a; T, T+U) := \sum_{\substack{T < \gamma_a < T+U \\ \beta_a < 1/2 - (\log \log T)^2 / \log T}} 1 = O\left(\frac{U \log T}{\log \log T}\right) \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} N^{(3)}(a; T, T+U) &:= \sum_{\substack{T < \gamma_a < T+U \\ 1/2 - (\log \log T)^2 / \log T < \beta_a < 1/2 + (\log \log T)^2 / \log T}} 1 \\ &= \frac{U}{2\pi} \log T + O\left(\frac{U \log T}{\log \log T}\right) \end{aligned} \quad (1.6)$$

ここまでで紹介してきた結果のいくつかはリーマンゼータ関数の導関数にまで一般化されている。これから  $\zeta^{(k)}(s)$  によりリーマンゼータ関数の  $k$  回微分を表すこととし  $\rho_a^{(k)} = \beta_a^{(k)} + i\gamma_a^{(k)}$  により  $\zeta^{(k)}(s)$  の  $a$  点を表すこととする。1970 年に Berndt[1] は Riemann-von Mangoldt の公式を  $\zeta^{(k)}(s)$  に拡張し次式を得た ( $k \geq 1$ )；

$$N_k(0; 0, T) := \sum_{0 < \gamma_0^{(k)} < T} 1 = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{4\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T) \quad (1.7)$$

また式 (1.4)-(1.6) も Levinson と Montgomery[6, Theorem 2] により  $\zeta^{(k)}(s)$  に一般化されている；

$$N_k^{(1)}(0; 0, T) + N_k^{(2)}(0; 0, T) := \sum_{\substack{0 < \gamma_0^{(k)} < T \\ |\beta_a^{(k)} - 1/2| \geq \delta}} 1 \ll \delta^{-1} T \log \log T$$



## 2 主結果

今回紹介する主結果はここまでで紹介してきた結果を  $\zeta^{(k)}(s)$  の  $a$  点に一般化して得られたものである。最初の主結果は Landau の結果 (1.1) と Berndt の結果 (1.7) の一般化に当たるものである。

**Theorem 2.1.** 正の整数  $k$  と複素数  $a \neq 0$  に対して次式が成り立つ。

$$N_k(a; 1, T) := \sum_{1 < \gamma_a^{(k)} < T} 1 = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T)$$

2 番目の主結果は Landau の結果 (1.2) と Steuding の結果 (1.3) の一般化となっている (ただし Steuding の結果については  $x > 1$  の場合のみ一般化している)

**Theorem 2.2.**  $x > 1$  とする。正の整数  $k$  と複素数  $a$  に対して次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \sum_{1 < \gamma_a^{(k)} < T} x^{\rho_a^{(k)}} \\ &= \begin{cases} \frac{T}{2\pi} \sum_{\substack{l \geq 0 \\ n_0, \dots, n_l \geq 2 \\ x = n_0 \cdots n_l}} \frac{(-1)^{k(l+1)}}{a^{l+1}} (\log n_0)^{k+1} (\log n_1 \cdots \log n_l)^k + O(\log T) & (a \neq 0), \\ \frac{T}{2\pi} \sum_{\substack{l \geq 0 \\ n_0 \geq 2 \\ n_1, \dots, n_l \geq 3 \\ x = n_0 \cdots n_l / 2^{l+1}}} \left( \frac{-1}{(\log 2)^k} \right)^{l+1} (\log n_0)^{k+1} (\log n_1 \cdots \log n_l)^k + O(\log T) & (a = 0) \end{cases} \end{aligned}$$

最後の主結果は Levinson の結果 (1.4)-(1.6) の一般化である。

**Theorem 2.3.**  $k$  を正の整数、 $\alpha > 1/2$  を実数、 $a$  を複素数とする。十分大きい  $T$  と  $T^\alpha \leq U \leq T$  に対して次式が成り立つ。

$$N_k^{(1)}(a; T, T+U) := \sum_{\substack{T < \gamma_a^{(k)} < T+U \\ \beta_a^{(k)} > 1/2 + (\log \log T)^2 / \log T}} 1 = O\left(\frac{U \log T}{\log \log T}\right)$$

$$N_k^{(2)}(a; T, T+U) := \sum_{\substack{T < \gamma_a^{(k)} < T+U \\ \beta_a^{(k)} < 1/2 - (\log \log T)^2 / \log T}} 1 = O\left(\frac{U \log T}{\log \log T}\right)$$

$$\begin{aligned} N_k^{(3)}(a; T, T+U) &:= \sum_{\substack{T < \gamma_a^{(k)} < T+U \\ 1/2 - (\log \log T)^2 / \log T \leq \beta_a^{(k)} \leq 1/2 + (\log \log T)^2 / \log T}} 1 \\ &= \frac{U}{2\pi} \log T + O\left(\frac{U \log T}{\log \log T}\right) \end{aligned}$$

## 参考文献

- [1] B. C. Berndt, *The number of zeros for  $\zeta^{(k)}(s)$* , J. Lond. Math. Soc. (2) **2** (1970), 577–580.
- [2] H. Bohr and E. Landau, *Ein Satz über Dirichletsche Reihen mit Anwendung auf die  $\zeta$ -Funktion und die L-Funktion*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **37** (1914), 269–272.
- [3] H. Bohr, E. Landau, J. E. Littlewood, *Sur la fonction  $\zeta(s)$  dans le voisinage de la droite  $\sigma = \frac{1}{2}$* , Bull. de l'Acad. royale de Belgique (1913), 3–35.
- [4] E. Landau, *Über die Nullstellen der Zetafunktion*, Math. Ann. **71**, 1912, 548–564.
- [5] N. Levinson, *Almost all roots of  $\zeta(s) = a$  are arbitrarily close to  $\sigma = 1/2$* , Proc. Nat. Acad. Sci. USA **72** No. 4, 1975, 1322–1324.
- [6] N. Levinson and H. L. Montgomery, *Zeros of the derivatives of the Riemann zeta-function*, Acta Math. **133**, 1974, 49–65.
- [7] J. Steuding, *One hundred years uniform distribution modulo one and recent applications to Riemann's zeta function*, Topics in Math. Analysis and Applications **94**, 2014, pp. 659–698.

# 多重ゼータスター値の $q$ -類似の積分表示について

川崎菜穂 \*

(KAWASAKI Naho)

## 概要

多重ゼータ値 (multiple zeta value, MZV) には Drinfel'd 積分を用いた反復積分表示がよく知られているが, 最近, それとは別の積分表示が山本氏によって導入された. この山本氏による積分表示は MZV の  $q$ -類似である  $q$ -MZV への拡張可能であることがわかったので, そのことについて紹介する. それは従来から知られている Jackson  $q$ -積分を用いた積分表示とは形が異なるものになっている.

## 1 $q$ -多重ゼータ値

### 1.1 MZSV とその積分表示

MZV には Drinfel'd 積分表示がよく知られているが, 最近, それを拡張した積分表示が山本氏によって導入された ([3]). まずそれを紹介する.

**Definition 1.1.** 正の整数  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , ただし  $k_1 \geq 2$ , に対して, 多重ゼータスター値 (MZSV) を収束級数

$$\zeta^*(k_1, k_2, \dots, k_n) = \sum_{m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \dots m_n^{k_n}}$$

で定義する. そして, MZV と同様に, 引数の和  $k_1 + k_2 + \dots + k_n =: k$  を weight, 引数の個数  $n$  を depth と呼ぶ.

**Theorem 1.1** (山本 [3]). インデックス  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$  に対し,

$$J(\mathbf{k}) = \{0, k_1, k_1 + k_2, \dots, k_1 + \dots + k_{n-1}\},$$
$$D^*(\mathbf{k}) = \left\{ (t_1, t_2, \dots, t_k) \in [0, 1]^k \left| \begin{array}{l} t_j < t_{j+1} \ (j \notin J(\mathbf{k}), 1 \leq j < k), \\ t_j > t_{j+1} \ (j \in J(\mathbf{k}), 1 \leq j < k) \end{array} \right. \right\}$$

\*京都産業大学大学院理学研究科修士課程 2 年

とする. このとき,

$$\zeta^*(\mathbf{k}) = \int_{D^*(\mathbf{k})} \omega_{\delta(1)}(t_1) \omega_{\delta(2)}(t_2) \cdots \omega_{\delta(k)}(t_k) \quad (k_1 \geq 2)$$

が成り立つ. ただし,

$$\omega_0(t) = \frac{dt}{t}, \quad \omega_1(t) = \frac{dt}{1-t},$$

そして,

$$\delta(j) = \begin{cases} 0 & (j-1 \notin J(\mathbf{k}), 1 \leq j \leq k), \\ 1 & (j-1 \in J(\mathbf{k}), 1 \leq j \leq k) \end{cases}$$

とする.

**Example 1.1.**  $\mathbf{k} = (2, 1, 2)$  のとき,

$$\zeta^*(2, 1, 2) = \int_{t_1 < t_2 > t_3 > t_4 < t_5} \frac{dt_1}{1-t_1} \frac{dt_2}{t_2} \frac{dt_3}{1-t_3} \frac{dt_4}{1-t_4} \frac{dt_5}{t_5}$$

となる. 実際に右辺を計算すると,

$$\begin{aligned} \int_0^{t_2} \frac{dt_1}{1-t_1} &= \sum_{m \geq 1} \int_0^{t_2} t_1^{m-1} dt_1 = \sum_{m \geq 1} \frac{t_2^m}{m}, \\ \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m} \int_{t_3}^1 t_2^{m-1} dt_2 &= \sum_{m \geq 1} \frac{1-t_3^m}{m^2}, \\ \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m^2} \int_{t_4}^1 \frac{1-t_3^m}{1-t_3} dt_3 &= \sum_{m \geq n \geq 1} \frac{1-t_4^n}{m^2 n}, \\ \sum_{m \geq n \geq 1} \frac{1}{m^2 n} \int_0^{t_5} \frac{1-t_4^n}{1-t_4} dt_4 &= \sum_{m \geq n \geq l \geq 1} \frac{t_5^l}{m^2 n l}, \\ \sum_{m \geq n \geq l \geq 1} \frac{1}{m^2 n l} \int_0^1 t_5^{l-1} dt_5 &= \sum_{m \geq n \geq l \geq 1} \frac{1}{m^2 n l^2} = \zeta^*(2, 1, 2) \end{aligned}$$

を得る.

## 1.2 $q$ -MZSV とその積分表示

今回, この山本氏による積分表示の  $q$ -MZV への拡張を得た. これは従来から知られている Jackson  $q$ -積分を用いた積分表示とは形が異なるものになっている.

自然数  $n$  に対して,  $q$ -integer  $[n]$  を

$$[n] = \frac{1-q^n}{1-q} \quad (|q| < 1)$$

と定義する.

**Definition 1.2.** 正の整数  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , ただし  $k_1 \geq 2$ ,  $|q| < 1$ , に対して,  $q$ -多重ゼータスター値 ( $q$ -MZSV) を収束級数

$$\zeta_q^*(k_1, k_2, \dots, k_n) = \sum_{m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n > 0} \frac{q^{(k_1-1)m_1 + (k_2-1)m_2 + \dots + (k_n-1)m_n}}{[m_1]^{k_1} [m_2]^{k_2} \dots [m_n]^{k_n}}$$

で定義する.

$q$ -MZSV において,  $q \rightarrow 1$  とすると, MZSV を得ることができる.

**Definition 1.3.** Jackson  $q$ -積分を

$$\int_0^a f(t) d_q t = (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} a q^n f(a q^n) \quad (a \geq 0)$$

と定義する. そして, 任意の正の数  $a, b (b \geq a \geq 0)$  に対して,

$$\int_a^b f(t) d_q t = \left( \int_0^b - \int_0^a \right) f(t) d_q t$$

と定義する.

今回, 山本氏の結果である定理 1.1 ([3]) を  $q$ -類似に拡張したものを得ることができたので, それを紹介する.

**Theorem 1.2.** インデックス  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$  に対し,

$$J(\mathbf{k}) = \{0, k_1, k_1 + k_2, \dots, k_1 + \dots + k_{n-1}\},$$

$$D_q^*(\mathbf{k}) = \left\{ (t_1, t_2, \dots, t_k) \in [0, 1]^k \left| \begin{array}{l} t_j < q t_{j+1} \quad (j \notin J(\mathbf{k}), 1 \leq j < k), \\ t_j > t_{j+1} \quad (j \in J(\mathbf{k}), 1 \leq j < k) \end{array} \right. \right\}$$

とする. このとき,

$$\zeta_q^*(\mathbf{k}) = \int_{D_q^*(\mathbf{k})} \omega_{q,\delta(1)}(t_1) \omega_{q,\delta(2)}(t_2) \dots \omega_{q,\delta(k)}(t_k) \quad (k_1 \geq 2)$$

が成り立つ. ただし,

$$\omega_{q,0}(t) = \frac{d_q t}{t}, \quad \omega_{q,1}(t) = \frac{d_q t}{1-t},$$

そして,

$$\delta(j) = \begin{cases} 0 & (j-1 \notin J(\mathbf{k}), 1 \leq j \leq k), \\ 1 & (j-1 \in J(\mathbf{k}), 1 \leq j \leq k) \end{cases}$$

とする.

**Example 1.2.**  $\mathbf{k} = (2, 1, 3)$  のとき,  $J(2, 1, 3) = \{0, 2, 3\}$  より,

$$D_q^*(2, 1, 3) = \left\{ (t_1, t_2, \dots, t_6) \in [0, 1]^k \left| \begin{array}{l} t_1 < qt_2, t_2 > t_3, t_3 > t_4, \\ t_4 < qt_5, t_5 < qt_6 \end{array} \right. \right\},$$

$$\delta(1) = 1, \delta(2) = 0, \delta(3) = 1, \delta(4) = 1, \delta(5) = 0, \delta(6) = 0$$

となる. したがって,

$$\zeta_q^*(2, 1, 3) = \int_0^1 \frac{d_q t_6}{t_6} \int_0^{qt_6} \frac{d_q t_5}{t_5} \int_0^{qt_5} \frac{d_q t_4}{1-t_4} \int_{t_4}^1 \frac{d_q t_3}{1-t_3} \int_{t_3}^1 \frac{d_q t_2}{t_2} \int_0^{qt_2} \frac{d_q t_1}{1-t_1}$$

となる. 実際に右辺を計算すると,

$$\int_0^{qt_2} \frac{d_q t_1}{1-t_1} = \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{qt_2} t_1^{m-1} d_q t_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(qt_2)^m}{[m]}$$

となる. 次に,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{[m]} \int_{t_3}^1 t_2^{m-1} d_q t_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{[m]} \left( \int_0^1 t_2^{m-1} d_q t_2 - \int_0^{t_3} t_2^{m-1} d_q t_2 \right)$$

であるので,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{[m]} \int_{t_3}^1 t_2^{m-1} d_q t_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{[m]^2} (1 - t_3^m)$$

となる. 同様に計算していくと,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{[m]^2} \int_{t_4}^1 \frac{1-t_3^m}{1-t_3} d_q t_3 &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{[m]^2} \int_{t_4}^1 \sum_{n=1}^m t_3^{n-1} d_q t_3 \\ &= \sum_{m \geq n \geq 1} \frac{q^m}{[m]^2} \left( \frac{1}{[n]} - \frac{t_4^n}{[n]} \right), \\ \sum_{m \geq n \geq 1} \frac{q^m}{[m]^2 [n]} \int_0^{qt_5} \frac{1-t_4^n}{1-t_4} d_q t_4 &= \sum_{m \geq n \geq 1} \frac{q^m}{[m]^2 [n]} \int_0^{qt_5} \sum_{l=1}^n t_4^{l-1} d_q t_4 \\ &= \sum_{m \geq n \geq l \geq 1} \frac{q^m (qt_5)^l}{[m]^2 [n] [l]}, \\ \sum_{m \geq n \geq l \geq 1} \frac{q^m q^l}{[m]^2 [n] [l]} \int_0^{qt_6} t_5^{l-1} d_q t_5 &= \sum_{m \geq n \geq l \geq 1} \frac{q^m q^l (qt_6)^l}{[m]^2 [n] [l]^2}, \\ \sum_{m \geq n \geq l \geq 1} \frac{q^m q^{2l}}{[m]^2 [n] [l]^2} \int_0^1 t_6^{l-1} d_q t_6 &= \sum_{m \geq n \geq l \geq 1} \frac{q^m q^{2l}}{[m]^2 [n] [l]^3} = \zeta_q^*(2, 1, 3) \end{aligned}$$

を得る.

### 1.3 $q$ -MZV とその積分表示

前節と同様の手法により,  $q$ -MZV の積分表示を得ることができる.

**Definition 1.4.** 正の整数  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , ただし  $k_1 \geq 2$ ,  $|q| < 1$  に対して,  $q$ -多重ゼータ値 ( $q$ -MZV) を収束級数

$$\zeta_q(k_1, k_2, \dots, k_n) = \sum_{m_1 > m_2 > \dots > m_n > 0} \frac{q^{(k_1-1)m_1 + (k_2-1)m_2 + \dots + (k_n-1)m_n}}{[m_1]^{k_1} [m_2]^{k_2} \dots [m_n]^{k_n}}$$

で定義する.

$q$ -MZSV の場合と同様に,  $q$ -MZV において,  $q \rightarrow 1$  とすると, MZV を得ることができる. 定理 1.2 において,  $D_q^*(\mathbf{k})$  を

$$D_q(\mathbf{k}) = \left\{ (t_1, t_2, \dots, t_k) \in [0, 1]^k \left| \begin{array}{l} t_j < qt_{j+1} \ (j \notin J(\mathbf{k}), 1 \leq j < k), \\ t_j < t_{j+1} \ (j \in J(\mathbf{k}), 1 \leq j < k) \end{array} \right. \right\}$$

に置き換えると, 次の定理が得られる.

**Theorem 1.3.** インデックス  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$  に対し,  $\tilde{\mathbf{k}} = (k_n, k_{n-1}, \dots, k_1)$  とおくと,  $q$ -MZV の積分表示

$$\zeta_q(\mathbf{k}) = \int_{D_q(\tilde{\mathbf{k}})} \omega_{q,\delta(1)}(t_1) \omega_{q,\delta(2)}(t_2) \dots \omega_{q,\delta(k)}(t_k) \quad (k_1 \geq 2)$$

が成り立つ.

この積分表示は Bradley [1] での  $q$ -MZV の積分表示と関係がつくと思われるが, 現時点では未解決である.

**Example 1.3.**  $\mathbf{k} = (2, 1)$  のとき,

$$\zeta_q(2, 1) = \int_{t_1 < t_2 < qt_3} \frac{d_q t_1}{1-t_1} \frac{d_q t_2}{1-t_2} \frac{d_q t_3}{t_3}$$

となる. 実際に右辺を計算すると,

$$\begin{aligned} \int_0^{t_2} \frac{d_q t_1}{1-t_1} &= \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{t_2} t_1^{m-1} d_q t_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{[m]} t_2^m, \\ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{[m]} \int_0^{qt_3} \frac{t_2^m}{1-t_2} d_q t_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{[m]} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{qt_3} t_2^{m+n-1} d_q t_2 \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{[m]} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{m+n}}{[m+n]} t_3^{m+n}, \\ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{[m]} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{m+n}}{[m+n]} \int_0^1 t_3^{m+n-1} d_q t_3 &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{[m]} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{m+n}}{[m+n]^2} = \zeta_q(2, 1) \end{aligned}$$

を得る.

## 参考文献

- [1] David M. Bradley, Multiple  $q$ -zeta values, *J. Algebra*, 283(2)752-798, 2005.
- [2] J. Okuda and Y. Takeyama, On relations for the  $q$ -multiple zeta values, preprint, 2005, arXiv:math.QA/0402152.
- [3] S. Yamamoto, Multiple zeta-star values and multiple integrals, preprint, 2014, arXiv:math.NT/1405.6499.





# パラレルセッション 会場C



# Self-avoiding walk on random conductors

Yuki Chino\*

Department of Mathematics  
Hokkaido University

Joint work with Akira Sakai (Hokkaido University)<sup>†</sup>

Self-avoiding walk (SAW) is a statistical-mechanical model that the chemist P. J. Flory first introduced for studying the behavior of linear polymers [4, 5]. Now we have many rigorous results on SAW, especially in  $d > 4$  due to the lace expansion [1, 7]. However in two or three dimensions, there still remain open problems [8]. In 1981, B. K. Chakrabarti and J. Kertész first introduced the random environment to SAW [2]. Our interest is to understand how the random environment affects the behavior of the observables concerning SAW around the critical point. In this talk, we will show the quenched critical point is almost surely a constant and estimate upper and lower bounds.

## Model and the results

Let  $\mathbb{B}^d$  denote the set of nearest-neighbor bonds in  $\mathbb{Z}^d$ , let  $\Omega(x)$  be the set of nearest-neighbor self-avoiding paths on  $\mathbb{Z}^d$  from  $x$ . The self-avoiding walk is the set of the trajectories of the walk that can not return the point once it visited. We call this property self-avoidance constraint. By this property, we can regard SAW paths as the statistical-mechanical model for linear polymers. Denoting the length of  $\omega$  by  $|\omega|$  (i.e.,  $|\omega| = n$  for  $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_n)$ ) and the energy cost of a bond between consecutive monomers by  $h \in \mathbb{R}$ , we define the susceptibility as

$$\chi_h = \sum_{\omega \in \Omega(x)} e^{-h|\omega|},$$

which is independent of the location of the reference point  $x \in \mathbb{Z}^d$ . Two other key observables are the two-point function and the number of SAWs

---

\*chino@math.sci.hokudai.ac.jp

†sakai@math.sci.hokudai.ac.jp

of length  $n$ :

$$G_h(x) = \sum_{\omega \in \Omega(o,x)} e^{-h|\omega|}, \quad c(n) = \sum_{\omega \in \Omega(x)} \mathbf{1}_{\{|\omega|=n\}},$$

where  $o$  is the origin of  $\mathbb{Z}^d$ ,  $\mathbf{1}_{\{\dots\}}$  is the indicator function, and  $\Omega(o, x)$  is the set of nearest-neighbor self-avoiding paths on  $\mathbb{Z}^d$  from  $o$  to  $x$ . Obviously,

$$\chi_h = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} G_h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-hn} c(n).$$

Due to subadditivity of  $c(n)$ , we can show that  $\chi_h < \infty$  if and only if  $h > \log \mu$ , where  $\mu$  is the connective constant for SAW [7]:

$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} c(n)^{1/n} = \inf_n c(n)^{1/n}.$$

Therefore,  $h = \log \mu$  is the critical point of the susceptibility. Many rigorous results on the behavior of these observables around the critical point  $h = \log \mu$  have been proven. However, there still remain many challenging open problems in two and three dimensions. See [8] and the references therein.

Let  $\mathbf{X} = \{X_b\}_{b \in \mathbb{B}^d}$  be a collection of i.i.d. bounded random variables whose law and expectation are denoted by  $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}$  and  $\mathbb{E}_{\mathbf{X}}$ , respectively. Similarly to the homogeneous case, we define the quenched susceptibility at  $x \in \mathbb{Z}^d$ :

$$\hat{\chi}_{h,\beta,\mathbf{X}}(x) = \sum_{\omega \in \Omega(x)} e^{-\sum_{j=1}^{|\omega|} (h + \beta X_{b_j})},$$

where  $b_j$  is the  $j$ -th bond of  $\omega$ . Because of the inhomogeneity of  $\mathbf{X}$ , the quenched susceptibility is not translation invariant and does depend on the location of the reference point  $x$ . We also define the random media version counterpart of the number of SAWs  $c(n)$  in random environment:

$$\hat{c}_{\beta,\mathbf{X}}(x; n) = \sum_{\omega \in \Omega(x)} e^{-\beta \sum_{j=1}^{|\omega|} X_{b_j}} \mathbf{1}_{\{|\omega|=n\}}.$$

Therefore, we have

$$\hat{\chi}_{h,\beta,\mathbf{X}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-hn} \hat{c}_{\beta,\mathbf{X}}(x; n).$$

Since  $\hat{\chi}_{h,\beta,\mathbf{X}}(x)$  is monotonic in  $h$ , we can define the quenched critical point:

$$\hat{h}_{\beta,\mathbf{X}}^q(x) = \inf\{h \in \mathbb{R} : \hat{\chi}_{h,\beta,\mathbf{X}}(x) < \infty\}.$$

We denote  $c(n)$  be the number of the homogeneous SAWs. By virtue of the self-avoidance constraint on  $\omega$  and the i.i.d. property of  $\mathbf{X}$ , we can directly compute the annealed susceptibility  $\mathbb{E}_{\mathbf{X}}[\hat{\chi}_{h,\beta,\mathbf{X}}(x)]$

$$\mathbb{E}_{\mathbf{X}}[\hat{\chi}_{h,\beta,\mathbf{X}}(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(h-\log \lambda_{\beta})n} c(n),$$

where  $\lambda_{\beta} = \mathbb{E}_{\mathbf{X}}[e^{-\beta X_b}]$ . Then the annealed critical point must be defined:

$$h_{\beta}^a = \log \mu + \log \lambda_{\beta},$$

so that  $\mathbb{E}_{\mathbf{X}}[\hat{\chi}_{h,\beta,\mathbf{X}}(x)] < \infty$  if and only if  $h > h_{\beta}^a$ . By Jensen's inequality,

$$h_{\beta}^a \geq \log \mu - \beta \mathbb{E}_{\mathbf{X}}[X_b].$$

The following theorem is the main result of this talk.

**Theorem 1.** *Let  $d \geq 1$  and  $\beta \geq 0$ . The quenched critical point  $\hat{h}_{\beta,\mathbf{X}}^q(x)$  is  $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}$ -almost surely a constant that does not depend on the location of the reference point  $x \in \mathbb{Z}^d$ . Moreover, by abbreviating  $\hat{h}_{\beta,\mathbf{X}}^q(x)$  as  $\hat{h}_{\beta}^q$ , we have*

$$\log \mu - \beta \mathbb{E}_{\mathbf{X}}[X_b] \leq \hat{h}_{\beta}^q \leq h_{\beta}^a, \quad \mathbb{P}_{\mathbf{X}}\text{-almost surely.}$$

For  $d = 1$ , in particular, the lower bound is an equality.

The key elements for the proof are the following:

- To prove that the quenched critical point is  $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}$ -a.s. a constant we show translation invariance and ergodicity by following similar analysis to that in H. Lacoïn [6].
- The upper bound (generally called the annealed bound) is trivial. On the other hand, the lower bound is derived from the second moment estimate by using the Paley-Zygmund inequality.

In our main theorem, for  $d = 1$ , the lower bound is an equality. We want to discuss what happens in  $d \geq 2$ :

- In two dimension, H. Lacoïn improve the upper bound by using fractional moment method [6].
- In high dimensions, can we estimate the upper and lower bound more sharply??

## References

- [1] D. Brydges and T. Spencer. Self-avoiding walk in 5 or more dimensions. *Commun. Math. Phys.* **97** (1985): 125–148.
- [2] B. K. Chakrabarti and J. Kartész. The statistics of self-avoiding walk on a disordered lattice. *Z. Phys. B Cond. Mat.* **44** (1981): 221–223
- [3] Y. Chino and A. Sakai. The quenched critical point for self-avoiding walk on random conductors. arXiv:1508.01262
- [4] P. J. Flory. The configuration of a real polymer chain. *J. Chem. Phys.* **17** (1949): 303–310.
- [5] P. J. Flory. *Principles of Polymer Chemistry* (Cornell Univ. Press, 1953).
- [6] H. Lacoin. Non-coincidence of quenched and annealed connective constants on the supercritical planar percolation cluster. *Probab. Theory Relat. Fields* **159** (2014): 777–808.
- [7] N. Madras and G. Slade. *The Self-Avoiding Walk* (Birkhäuser, 2013).
- [8] G. Slade. The self-avoiding walk: A brief survey. *Surveys in Stochastic Processes* (J. Blath et al. eds., European Mathematical Society, 2011): 181–199.

# $q$ -PAINLEVÉ EQUATION OF TYPE $E_6^{(1)}$ ARISING FROM PADÉ APPROXIMATION

長尾秀人 HIDEHITO NAGAO (明石工業高等専門学校)

ABSTRACT. Padé 近似と呼ばれる有理関数による近似を応用して, 2 階線形微分方程式を構成すると, 超幾何微分方程式になることが古くから知られている. さらに, その非線形化として, Painlevé 方程式と呼ばれる 2 階非線形微分方程式を構成できることが知られている. 最近になって, その  $q$  差分的離散化として,  $E_6^{(1)}$  型 affine Weyl 群対称性を持つ  $q$  差分的離散 Painlevé 方程式を構成することができた. 本講演では, この結果について報告する.

## 1. INTRODUCTION

### 1.1. The background of (differential) Painlevé equations.

19 世紀末から 20 世紀初頭にかけて, Paul Painlevé によって発見され, 「動く特異点は極に限る」という Painlevé 性を備えた 2 階非線形常微分方程式として研究されてきた. 「動く特異点」とは, 微分方程式の初期値問題の解に現れる特異点の位置が初期値に依存する特異点をいう. Painlevé 方程式は  $P_I$  から  $P_{VI}$  までの 6 種類に分類される.

$$\begin{aligned} P_I &: \lambda'' = 6\lambda^2 + t, \\ P_{II} &: \lambda'' = 2\lambda^3 + t\lambda + \alpha, \\ P_{III} &: \lambda'' = \frac{1}{\lambda}(\lambda')^2 - \frac{1}{t}\lambda' + \frac{1}{t}(\alpha\lambda^2 + \beta) + \gamma\lambda^3 + \frac{\delta}{\lambda}, \\ P_{IV} &: \lambda'' = \frac{1}{2\lambda}(\lambda')^2 + \frac{3}{2}\lambda^3 + 4t\lambda^2 + 2(t^2 - \alpha)\lambda + \frac{\beta}{\lambda}, \\ P_V &: \lambda'' = \left(\frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{\lambda-1}\right)(\lambda')^2 - \frac{1}{t}\lambda' + \frac{(\lambda-1)^2}{t^2}\left(\alpha\lambda + \frac{\beta}{\lambda}\right) + \frac{\gamma}{t}\lambda + \delta\frac{\lambda(\lambda+1)}{\lambda-1}, \\ P_{VI} &: \lambda'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda-t}\right)(\lambda')^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{\lambda-t}\right)\lambda' \\ &\quad + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t^2(t-1)^2}\left(\alpha + \beta\frac{1}{\lambda^2} + \gamma\frac{t-1}{(\lambda-1)^2} + \delta\frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2}\right). \end{aligned}$$

ここで,  $\alpha, \beta, \dots$  は複素数パラメーターである.

これら 6 種類の Painlevé 方程式に関する退化図式を次のようになる.

$$\begin{array}{c} P_{VI} \rightarrow P_V \rightarrow P_{III} \\ \searrow \quad \swarrow \\ P_{IV} \rightarrow P_{II} \rightarrow P_I. \end{array}$$

これら 6 種類の Painlevé 方程式は一般的に初等関数の範囲では解くことができないが, パラメータが特殊な値をとる時に超幾何型の特殊関数で表される解が存在する. 他にも代数関数, 有理関数で表される解などを持つ.

Painlevé 方程式は, ハミルトン力学系として表現でき, 線形作用素 (ラックス・ペア) の両立条件として表現でき, Bäcklund 変換として affine Weyl 群対称性を持つなど, 可積分系としての多くの良い性質を持つ.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 33D15, 34M55, 39A13, 41A21.

*Key words and phrases.* Padé method, Padé interpolation,  $q$ -Painlevé equation.



**Remark 1.** ラックス・ペアとは、可積分系の理論における用語であり、2種類の線形方程式（線形方程式とその変形方程式）の両立条件として、時間発展型非線形方程式が得られる組である。

### 1.2. The background of discrete Painlevé equations.

離散 Painlevé 方程式は、微分 Painlevé 方程式の良い性質を保存したまま離散化したものである。例えば、離散 Painlevé 性 (特異点閉じ込め)、特殊解、Bäcklund 変換、ラックス・ペアなど。それらは拡大 affine Weyl 群対称性に関連した有理曲面に基づいて分類され [9]、差分タイプは楕円差分 ( $e$ -)、乗法差分 ( $q$ -)、加法差分 ( $d$ -) の3種類がある。 $q$  差分 Painlevé 方程式は Bäcklund 変換としての affine Weyl 群対称性により、 $E_8^{(1)}$  型から  $\mathcal{D}_6$  型まで分類され、退化図式は次のようになる。

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & & & \mathbb{Z} & & \\
 & & & & & & & & \nearrow & & \searrow \\
 E_8^{(1)} & \rightarrow & E_7^{(1)} & \rightarrow & E_6^{(1)} & \rightarrow & D_5^{(1)} & \rightarrow & A_4^{(1)} & \rightarrow & (A_2 + A_1)^{(1)} & \rightarrow & (A_1 + A_1')^{(1)} & \rightarrow & A_1^{(1)} & \rightarrow & \mathcal{D}_6 \\
 & & & & & & (q-P_{VI}) & & (q-P_V) & & (q-P_{IV}, q-P_{III}) & & (q-P_{II}) & & (q-P_I) & & 
 \end{array}$$

### 1.3. The background of Padé method.

Padé 近似を応用して Painlevé および Garnier 方程式を研究する簡単な方法 [12] がある。その方法では、適当な Padé 近似の問題を設定すれば、Painlevé (Garnier) 方程式に対する時間発展方程式、ラックス・ペア、超幾何型特殊解の3つが同時に得られる。この方法は Padé 法と呼ばれている。Padé 法はこれまで様々な離散 Painlevé 方程式 [5] に適用されている [3, 6, 7, 8, 14]。本報告は [7] に基づく。

## 2. PADÉ APPROXIMATION METHOD TO CASE $q$ - $E_6^{(1)}$

本章では、Padé 近似を応用して、 $q$  差分 Painlevé 方程式  $E_6^{(1)}$  型の時間発展方程式、ラックス・ペア、超幾何型特殊解を導く。

**2.1. Padé approximation problem.** パラメーター  $q, a_i, b_i \in \mathbb{C}, 0 < |q| < 1, m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  のとき、適当な関数

$$(2.1) \quad Y(x) := \frac{(a_1 x, a_2 x, a_3 x)_\infty}{(b_1 x, b_2 x, b_3 x, q)_\infty}, \quad \frac{a_1 a_2 a_3 q^m}{b_1 b_2 b_3 q^n} = 1.$$

を与え、Padé 近似の問題

$$(2.2) \quad Y(x) \equiv \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \pmod{x^{m+n+1}}.$$

を考える。ここで、関数  $P_m(x), Q_n(x)$  はそれぞれ  $m, n$  次多項式とし、 $q$  ポツホハンマーは

$$(2.3) \quad (a_1, a_2, \dots, a_i)_j := \prod_{k=0}^{j-1} (1 - a_1 q^k)(1 - a_2 q^k) \cdots (1 - a_i q^k).$$

とする。

## 2.2. Time evolution.

パラメーター  $a_i, b_i, m, n$  をシフトさせる作用素  $T$  を

$$(2.4) \quad T : (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, m, n) \rightarrow (qa_1, a_2, a_3, qb_1, b_2, b_3, m, n).$$

をする。また、この作用素  $T$  は  $q$  差分 Painlevé 方程式の時間発展の方向を決定するので、時間発展と呼ぶ。

未知関数  $y(x)$  に対して、 $y(x) = P_m(x), Y(x)Q_n(x)$  を解に持つ、3 項間  $y(x), y(qx), \bar{y}(x)$  線形  $q$  差分方程式を  $L_2(x)$  とし、3 項間  $y(x), \bar{y}(x), \bar{y}(x/q)$  線形  $q$  差分方程式を  $L_3(x)$  とする。このとき、

**Lemma 1.** 線形  $q$  差分方程式  $L_2, L_3$  は次のように表示される。

$$(2.5) \quad L_2(x) : (1 - xf)\bar{y}(x) - (1 - a_2x)(1 - a_3x)y(qx) + \frac{a_2a_3q^m g}{b_1}(1 - b_1x)(1 - x/g)y(x) = 0,$$

$$(2.6) \quad L_3(x) : w(1 - x\bar{f}/q)y(x) + \frac{a_2a_3q^m g}{b_1}(1 - a_1x)(1 - x/qg)\bar{y}(x) - q^{m+n+1}(1 - b_2x/q)(1 - b_3x/q)\bar{y}(x/q) = 0,$$

ここで、 $f, g, \bar{f}, w$  は  $x$  に依らない変数であり、記号  $\bar{F} := T(F), \underline{F} := T^{-1}(F)$  とする。

*Proof.*  $L_2, L_3$  の定義より、次の  $x$  の恒等式が成り立つ。

$$(2.7) \quad L_2(x) : \begin{vmatrix} y(x) & y(qx) & \bar{y}(x) \\ P_m(x) & P_m(qx) & \bar{P}_m(x) \\ Y(x)Q_n(x) & Y(qx)Q_n(qx) & \bar{Y}(x)\bar{Q}_n(x) \end{vmatrix} = 0,$$

$$(2.8) \quad L_3(x) : \begin{vmatrix} y(x) & \bar{y}(x) & \bar{y}(x/q) \\ P_m(x) & \bar{P}_m(x) & \bar{P}_m(x/q) \\ Y(x)Q_n(x) & \bar{Y}(x)\bar{Q}_n(x) & \bar{Y}(x/q)\bar{Q}_n(x/q) \end{vmatrix} = 0.$$

カソラチ行列式を計算すれば、 $q$  差分方程式  $L_2$  (2.5),  $L_3$  (2.6) が得られる。□

以下では、 $L_2, L_3$  (2.5), (2.6) に基づいて、 $q$  差分 Painlevé 方程式  $E_6^{(1)}$  型に対する時間発展方程式、ラックス・ペア、超幾何型特殊解が導出される。

## 2.3. The $q$ -Painlevé equation.

**Proposition 1.** 2 変数  $f, g$  の連立 1 階非線形  $q$  差分方程式 (1 変数の 2 階非線形  $q$  差分方程式)

$$(2.9) \quad (fg - 1)(\underline{fg} - 1) = \frac{b_1^2}{a_2^2 a_3^2 q^{m-n}} \frac{(f - a_2)(f - a_3)(f - b_2)(f - b_3)}{(f - a_1)(f - b_1)},$$

$$(2.10) \quad (fg - 1)(\bar{fg} - 1) = qa_1 b_1 \frac{(g - 1/a_2)(g - 1/a_3)(g - 1/b_2)(g - 1/b_3)}{(g - b_1/a_2 a_3 q^m)(g - b_1 q^{n+1}/a_2 a_3)}.$$

得られる。これは  $q$  差分 Painlevé 方程式  $E_6^{(1)}$  型の時間発展方程式 [5] である。

*Proof.*  $q$  差分線形方程式  $L_2, L_3$  (2.5), (2.6) の両立条件として、変数  $w$  を含まない 2 変数  $f, g$  の方程式 (2.9), (2.10) が得られる。□

## 2.4. The Lax pair.

未知関数  $y(x)$  に対して,  $y(x) = P_m(x), Y(x)Q_n(x)$  を解に持つ 3 項間  $y(qx), y(x), y(x/q)$  の線形  $q$  差分方程式を  $L_1(x)$  とする. このとき,

**Proposition 2.** 線形  $q$  差分方程式  $L_1$  は次のように表示される.

$$(2.11) \quad L_1(x) : \frac{(q - b_1x)(q - b_2x)(q - b_3x)q^{m+n-1}}{q - fx} \left[ y(x/q) - \frac{a_1(q - a_2x)(q - a_3x)}{b_2b_3q^n(q - b_1x)(gq - x)} y(x) \right] \\ + \frac{(1 - a_1x)(1 - a_2x)(1 - a_3x)}{1 - fx} \left[ y(qx) - \frac{b_2b_3q^n(1 - b_1x)(g - x)}{a_1(1 - a_2x)(1 - a_3x)} y(x) \right] \\ + \frac{a_1q^{m+1}}{b_2b_3g} \left[ \left( 1 - \frac{b_2b_3g}{a_1q^{m+1}} \right) \left( 1 - \frac{b_2b_3gq^n}{a_1} \right) + \frac{x(1 - a_2g)(1 - a_3g)(1 - b_2g)(1 - b_3g)}{(1 - fg)(gq - x)} \right] y(x) = 0,$$

2つの線形  $q$  差分方程式  $L_1, L_2$  (2.11), (2.5) はラックス・ペアであり,  $2 \times 2$  行列型ラック形式 [10] およびスカラー型ラックス・ペア [3, 13] と等価である.

*Proof.*  $q$  差分方程式  $L_2(x), L_2(x/q), L_3(x)$  (2.5), (2.6) から 2 項  $\bar{y}(x), \bar{y}(x/q)$  を消去すれば,  $q$  差分方程式  $L_1$  (2.11) が得られる.  $\square$

## 2.5. Special solutions.

**Lemma 2** (Schur 関数による公式 [12]). 与えられた関数  $Y(x)$  に対して,  $x = 0$  のまわりで Taylor 展開

$$(2.12) \quad Y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k, \quad p_0 = 1, \quad p_i = 0 \quad (i < 0),$$

を考える. このとき, Padé 近似問題 (2.2) を満たす  $m, n$  次多項式  $P_m(x), Q_n(x)$  は行列式

$$(2.13) \quad P_m(x) = \sum_{i=0}^m s_{(m^n, i)} x^i, \quad Q_n(x) = \sum_{i=0}^n s_{((m+1)^i, m^n - i)} (-x)^i,$$

で表示される. ここで,  $s_\lambda$  は Jacobi-Trudi 公式  $s_{(\lambda_1, \dots, \lambda_l)} = \det(p_{\lambda_i - i + j})_{i, j=1}^l$  で定義される Schur 関数である.

**Corollary 1** (Schur 関数による公式 2 [12]). 多項式  $P_m(x), Q_n(x)$  (2.13) は, 1 つの行列式に次のように表示される.

$$(2.14) \quad P_m(x) = x^m s_{(m^{n+1})} |_{p_i \rightarrow \sum_{j=0}^i x^{-j} p_{i-j}}, \quad Q_n(x) = (-x)^n s_{((m+1)^n)} |_{p_i \rightarrow p_i - x^{-1} p_{i-1}}.$$

**Proposition 3.**  $q$  差分 Painlevé 方程式  $E_6^{(1)}$  型の時間発展方程式 (2.9), (2.10) の超幾何型特殊解  $f, g$  として, 次のものが得られる.

$$(2.15) \quad \frac{1 - f/a_1}{1 - f/a_2} = \frac{a_1 \prod_{i=1}^3 (1 - b_i/a_1) T_{a_1}(\tau_{m, n+1}) T_{a_1}^{-1}(\tau_{m+1, n})}{a_2 \prod_{i=1}^3 (1 - b_i/a_2) T_{a_2}(\tau_{m, n+1}) T_{a_2}^{-1}(\tau_{m+1, n})}, \\ \frac{1 - 1/b_2g}{1 - 1/b_3g} = \frac{b_2 \prod_{i=2}^3 (1 - a_i/b_2) T_{b_2}^{-1}(\tau_{m, n+1}) T_{b_2}(\bar{\tau}_{m+1, n})}{b_3 \prod_{i=2}^3 (1 - a_i/b_3) T_{b_3}^{-1}(\tau_{m, n+1}) T_{b_3}(\bar{\tau}_{m+1, n})},$$

ここで、行列式  $\tau_{m,n} = s_{(m^n)}$  の要素  $p_k$  は次で与えられる.

$$(2.16) \quad p_k = \frac{b_3^k \left(\frac{a_3}{b_3}\right)_k}{(q)_k} \sum_{k_i \geq 0} \frac{(q^{-k})_{k_1+k_2} \left(\frac{a_1}{b_1}\right)_{k_1} \left(\frac{a_2}{b_2}\right)_{k_2}}{\left(\frac{q^{-k+1}b_3}{a_3}\right)_{k_1+k_2} (q)_{k_1} (q)_{k_2}} \left(\frac{b_1}{a_3}q\right)^{k_1} \left(\frac{b_2}{a_3}q\right)^{k_2}.$$

ここで、パラメーター  $a_i, b_i$  に依るすべての量である  $F$  に対して、 $T_{a_i}(F) = F|_{a_i \rightarrow qa_i}$ ,  $T_{a_i}^{-1}(F) = F|_{a_i \rightarrow a_i/q}$  とする. この特殊解は [3] と等価である.

*Proof.*  $q$  差分線形方程式  $L_2, L_3$  (2.7), (2.8) の  $y$  のカソラチ行列式において、 $P_m(x), Q_n(x)$  によって定義される  $f, g$  の値は、Schur 関数による公式 2 (2.14) を用いれば得られる.  $\square$

**Remark 2.** 一般の (2.1)(2.16) に関して [11] で述べられている.

$$(2.17) \quad \prod_{i=1}^{N+1} \frac{(a_i x)_\infty}{(b_i x)_\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{N+1} \frac{b_s^k - a_s^k}{k(1-q^k)} x^k\right).$$

**Remark 3.** 要素  $p_k$  は 2 変数  $q$ -Appel Lauricella 級数の有限和であるが<sup>s</sup>, 変換  $b_3 = q^{k-1}a_1a_2$ ,  $a_3 = b_1b_2$  の下で、big  $q$ -Jacobi 多項式と呼ばれる  $q$ -超幾何級数  ${}_3\phi_2$  の有限和に書き換えられる.

**Remark 4.** [4] によれば、Andrews は変換公式  $q$ -Appell Lauricella 関数  $\phi_D^l$  と  $q$ -超幾何関数  ${}_k\phi_l$  の間の変換公式 ( $l = 2$  の場合 [1], 正の整数  $l$  の場合 [2]) が導いた.

$$(2.18) \quad {}_{l+1}\phi_l \left( \begin{matrix} a, & b_1, \dots, & b_l \\ & c_1, \dots, & c_l \end{matrix} ; u \right) = \frac{(au)_\infty}{(u)_\infty} \prod_{k=1}^l \frac{(b_k)_\infty}{(c_k)_\infty} \phi_D^l(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_l, \gamma; z_1, \dots, z_l)$$

$$(2.19) \quad {}_k\phi_l \left( \begin{matrix} \alpha_1, & \dots, & \alpha_k \\ \beta_1, & \dots, & \beta_l \end{matrix} ; x \right) := \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)_s}{(\beta_1, \dots, \beta_l)_s} [(-1)^s q^{\binom{s}{2}}]^{1+l-k} x^s,$$

ここで  $\binom{s}{2} := s(s-1)/2$ .

$$(2.20) \quad \phi_D^l(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_l, \gamma; z_1, \dots, z_l) := \sum_{m_i \geq 0} \frac{(\alpha)_{|m|} (\beta_1)_{m_1} \dots (\beta_l)_{m_l}}{(\gamma)_{|m|} (q)_{m_1} \dots (q)_{m_l}} z_1^{m_1} \dots z_l^{m_l},$$

ここで  $|m| := m_1 + \dots + m_l$ .

この変換公式の有限の場合が 3 に相当する.

## 2.6. Main theorem.

**Theorem 2.1.** 適当な Padé 近似問題 (2.1), (2.2) の設定により、 $q$  差分 Painlevé 方程式  $E_6^{(1)}$  型に対する時間発展方程式 (Proposition 1), ラックス・ペア (Proposition 2), 超幾何型特殊解 (Proposition 3) が 3 つ同時に得られる.

### ACKNOWLEDGMENT

本研究を行う上で、山田泰彦氏の限りない議論と価値ある助言に感謝する.

## REFERENCES

- [1] Andrews G.E., *Summation and transformation for basic Appell series*, J. London Math. Soc. **4** (2) (1972), 618–622.
- [2] Andrews G.E., *Problems and prospectives for basic hypergeometric functions*, in: *Theory and application of special functions*, Proc. Advanced Sem. Math. Res. Center, University of Wisconsin, Madison, WI, (1975), 19–224.
- [3] Ikawa Y., *Hypergeometric Solutions for the  $q$ -Painlevé Equation of Type  $E_6^{(1)}$  by the Padé method*, Lett. Math. Phys., Volume **103**, Issue 7 (2013), 743–763.
- [4] Kajihara Y., *Euler transformation formula for multiple basic hypergeometric series of type A and some applications*, Advances in Mathematics **187** Issue 1 (2004), 53–97.
- [5] Kajiwara K., Noumi M., and Yamada Y., *Geometric aspects of Painlevé equations*, arXiv 1509.08186 [nlin.SI].
- [6] Nagao, Hidehito *The Padé interpolation method applied to  $q$ -Painlevé equations*. Lett. Math. Phys. **105** (2015), no. 4, 503–521.
- [7] Nagao, H., *The Padé interpolation method applied to  $q$ -Painlevé equations II (differential grid version)*, arXiv:1509.05892 [math.CA].
- [8] Noumi M., Tsujimoto S., Yamada Y., *Padé interpolation for elliptic Painlevé equation*, Symmetries, integrable systems and representations, Springer Proc. Math. Stat., Volume **40** (2013), 463–482.
- [9] Sakai H., *Rational surfaces with affine root systems and geometry of the Painlevé equations*, Commun. Math. Phys., **220** (2001), 165–221.
- [10] Sakai H., *Lax form of the  $q$ -Painlevé equation associated with the  $A_2^{(1)}$  surface*, J. Phys. A: Math. Gen., **39** (2006), 12203–12210.
- [11] Tsuda T., *On an integrable system of  $q$ -difference equations satisfied by the universal characters: its Lax formalism and an application to  $q$ -Painlevé equations*, Comm. Math. Phys. **293** (2010), 347–359.
- [12] Yamada Y., *Padé method to Painlevé equations*, Funkcial. Ekvac., **52** (2009), 83–92.
- [13] Yamada Y., *Lax formalism for  $q$ -Painlevé equations with affine Weyl group symmetry of type  $E_n^{(1)}$* , IMRN, **17** (2011), 3823–3838.
- [14] Yamada Y., *A simple expression for discrete Painlevé equations*, RIMS Kokyuroku Bessatsu, **B47** (2014), 087–095.

DEPARTMENT OF ARTS AND SCIENCE, NATIONAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY, AKASHI COLLEGE, HYOGO 674-8501, JAPAN  
*E-mail address:* nagao@akashi.ac.jp

# ON THE STOKES MATRICES OF THE $tt^*$ -TODA EQUATION

STEFAN HOROCHOLYN (TOKYO METROPOLITAN UNIVERSITY)

ABSTRACT. We derive a formula for the signature of the symmetrized Stokes matrix  $\mathcal{S} + \mathcal{S}^T$  for the  $tt^*$ -Toda equation. As a corollary, we verify a conjecture of Cecotti-Vafa regarding when  $\mathcal{S} + \mathcal{S}^T$  is positive definite, reminiscent of a formula of Beukers and Heckmann for the generalized hypergeometric equation. The condition  $\mathcal{S} + \mathcal{S}^T > 0$  is prominent in the work of Cecotti and Vafa on the  $tt^*$  equation; we show that the Stokes matrices  $\mathcal{S}$  satisfying this condition are parameterized by a convex polytope.

## 1. INTRODUCTION

The  $tt^*$  equation is a system of nonlinear PDEs which appeared in the work of Cecotti and Vafa [2] on the classification of supersymmetric field theories in physics. Dubrovin [3] showed that it admits an isomonodromic deformation interpretation, as well as the standard zero-curvature formulation of harmonic map theory. This leads to a Riemann-Hilbert correspondence between (local) solutions and monodromy data of a meromorphic ODE. Clarifying this correspondence is a subject of current research activity relating several fields of mathematics, including Hodge theory and algebraic geometry.

There are very few examples where solutions can be found. A special case of the  $tt^*$  equation, introduced by Cecotti and Vafa, and studied mathematically by Guest-Its-Lin [4, 5] and Mochizuki [7], is the  $tt^*$ -Toda equation. This is, essentially, the well-known Toda field equation (2-dimensional Toda lattice), although even in this case the existence of the solutions predicted by Cecotti and Vafa was proved only recently (in the aforementioned references).

This article was motivated by the conjectures of Cecotti and Vafa regarding the symmetrized Stokes matrix  $\mathcal{S} + \mathcal{S}^T$ , in the case of the  $tt^*$ -Toda equation. We shall give a necessary and sufficient condition for  $\mathcal{S} + \mathcal{S}^T$  to be positive definite, and a simple formula for the signature of  $\mathcal{S} + \mathcal{S}^T$ , reminiscent of a formula of Beukers and Heckmann for the generalized hypergeometric equation [1].

Let us now state the  $tt^*$ -Toda equations and explain the relevant Stokes matrix. The equations are:

$$(1.1) \quad 2(w_i)_{z\bar{z}} = -e^{2(w_{i+1}-w_i)} + e^{2(w_i-w_{i-1})}, \quad w_i : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

subject to two further conditions:

- (1) the “anti-symmetry” condition:  $w_i + w_{n-i} = 0$ ; and
- (2) the radial condition:  $w_i = w_i(|z|)$ .

We use the convention that  $w_i = w_{i+n+1}$  for all  $i \in \mathbb{Z}$ . This system is the compatibility condition for the linear system:

$$\begin{cases} \Psi_z &= (w_z + \frac{1}{\lambda}W)\Psi, \\ \Psi_{\bar{z}} &= (-w_{\bar{z}} + \lambda W^T)\Psi, \end{cases}$$

where:

$$w = \text{diag}(w_0, \dots, w_n), \quad W = \begin{bmatrix} & e^{w_1-w_0} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{w_n-w_{n-1}} \\ e^{w_0-w_n} & & & \end{bmatrix}.$$

If we write  $x = |z|$ , then the radial version of (1.1) is the compatibility condition for a linear system, which may then be transformed to (see Equation 1.4 of [5]):

$$(1.2) \quad \begin{cases} \Psi_\zeta &= \left( -\frac{1}{\zeta^2} W - \frac{1}{\zeta} x w_x + x^2 W^T \right) \Psi, \\ \Psi_x &= \left( \frac{1}{x\zeta} W + x\zeta W^T \right) \Psi, \end{cases}$$

where  $\zeta = \frac{\lambda}{z}$ .

The  $\zeta$ -system (1.2) is a meromorphic linear ODE in the complex variable  $\zeta$ , with poles of order two at both  $\zeta = 0$  and  $\zeta = \infty$ . The Stokes matrices at these two poles are equivalent, so we shall only consider the Stokes matrix at  $\zeta = \infty$ , and denote it by  $\mathcal{S}$ . By the general theory of isomonodromic deformations, Stokes matrices  $\mathcal{S}$  correspond to local solutions near 0 (i.e. defined on intervals of the form  $(0, \varepsilon)$ ) of the  $tt^*$ -Toda equation. Further details and explanation may be found in [4, 5], where  $\mathcal{S}$  is computed in terms of the asymptotic behaviour of the functions  $w_i$ .

It was conjectured by Cecotti and Vafa, and confirmed in [4, 5, 6, 7], that the condition  $\mathcal{S} + \mathcal{S}^T > 0$  implies that the corresponding local solution of the  $tt^*$ -Toda equation is globally defined on  $\mathbb{C}^*$  (i.e. such that  $\varepsilon = \infty$ ). It is, therefore, of interest to describe the set of such Stokes matrices explicitly, and this is our first main result.

We show that they form a convex polytope described by simple explicit equations. It follows from the previous references that a necessary and sufficient condition for the local solution of the  $tt^*$ -Toda equation to be globally defined on  $\mathbb{C}^*$  is that the eigenvalues of the monodromy  $\mathcal{S}\mathcal{S}^{-T}$  are unimodular. (Here,  $\mathcal{S}^{-T}$  denotes the transpose of  $\mathcal{S}^{-1}$ .) For such Stokes matrices, we prove the following explicit characterization of the signature of  $\mathcal{S} + \mathcal{S}^T$ , which we expect to be of use in future investigations of the  $tt^*$ -Toda equation:

**Theorem:** *Let  $\sigma = (N_+, N_-, N_0)$  denote the signature triple of  $\mathcal{S} + \mathcal{S}^T$ , where  $N_+$ ,  $N_-$ , and  $N_0$  are the number of positive, negative, and zero eigenvalues of  $\mathcal{S} + \mathcal{S}^T$ , respectively. Then  $\sigma$  is equal to the signature triple of the diagonal matrix:*

$$\text{diag}((-1)^{n+1}p(\pi_0), \dots, (-1)^{n+1}p(\pi_n)).$$

Here,  $\pi_0, \dots, \pi_n$  are the  $n+1$  roots of  $x^{n+1} - (-1)^{n+1}$ , and the real polynomial  $p(x)$  is the characteristic polynomial of a certain matrix  $\mathcal{R}$  satisfying  $(-1)^n \mathcal{R}^{n+1} = \mathcal{S}\mathcal{S}^{-T}$ .

**Corollary:**  $\mathcal{S} + \mathcal{S}^T > 0$  iff  $(-1)^{n+1}p(\pi_k) > 0$  for all  $k$ .

Let us explain what this means in terms of solutions to the  $tt^*$ -Toda equation. (For ease of notation, we only describe the case  $n+1 = 2m$ .) It was shown in [4, 5, 6, 7] that solutions  $w_i : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}$  are in one-to-one correspondence with real numbers  $\gamma_i$  satisfying  $\gamma_i - \gamma_{i-1} \geq -2$  for all  $i$ , where  $2w_i(z) \sim \gamma_i \log |z|$  as  $|z| \rightarrow 0$ . The corresponding eigenvalues of  $\mathcal{R}$  are  $\exp(\pm \frac{i\pi}{n+1}(\gamma_j + 2j + 1))$ ,  $0 \leq j \leq m-1$ , with

$$0 \leq \frac{\pi}{2m}(\gamma_0 + 1) \leq \frac{\pi}{2m}(\gamma_1 + 3) \leq \dots \leq \frac{\pi}{2m}(\gamma_{m-1} + 2m - 1) \leq \pi.$$

The condition  $\mathcal{S} + \mathcal{S}^T > 0$  means that these points must interlace with the  $(n+1)^{\text{th}}$  roots of unity, implying that:

$$0 < \gamma_0 + 1 < 2 < \gamma_1 + 3 < 4 < \cdots < 2m - 2 < \gamma_{m-1} + 2m - 1 < 2m ,$$

and this means that  $0 < \gamma_j < 1$  for all  $j = 0, \dots, m-1$ .

Our second main result is a formula for the sign of  $p(\pi_k)$  when the eigenvalues of  $\mathcal{S}\mathcal{S}^{-T}$  are unimodular and  $N_0 = 0$  (in the notation of the Theorem). If  $n+1 = 2m$  or  $n+1 = 2m+1$ , then this gives a characterization of the open subsets of  $\mathbb{R}^m$  corresponding to each possible signature pair  $(N_+, N_-)$  in terms of configurations of points on the unit circle which interlace with the roots  $\pi_k$  of  $x^{n+1} - (-1)^{n+1}$ . To prove this, we show that  $p(x)$  satisfies the signed-palindromicity condition  $p(x) = (-x)^n p(\frac{1}{x})$ , and hence, it may be uniquely factored as:

$$p(x) = \begin{cases} x^m \tilde{p}(x + \frac{1}{x}) , & n+1 = 2m , \\ (x-1)x^m \tilde{p}(x + \frac{1}{x}) , & n+1 = 2m+1 . \end{cases}$$

Defining the sequence  $\{\tilde{p}^{[k]}(x)\}_k$  of shifted polynomials by  $\tilde{p}^{[0]}(x) := \tilde{p}(x+2)$  and:

$$\tilde{p}^{[k]}(x) := \begin{cases} \tilde{p}(x + 2 \cos \frac{k\pi}{m}) , & 1 \leq k \leq m , n+1 = 2m , \\ \tilde{p}(x + 2 \cos \frac{(2k-1)\pi}{2m+1}) , & 1 \leq k \leq m+1 , n+1 = 2m+1 , \end{cases}$$

we prove the following, which amounts to a special case of Theorem 4.5 of [1]:

**Proposition:** *If  $\nu_k$  is the number of sign changes in the sequence of non-zero coefficients of  $\tilde{p}^{[k]}(x)$ , then:*

$$\text{sgn}(p(\pi_k)) = \begin{cases} (-1)^{\nu_k - k} , & n+1 = 2m , \\ (-1)^{\nu_{k+1} - (k+1)} , & n+1 = 2m+1 . \end{cases}$$

Since  $p(x)$  is the characteristic polynomial of  $\mathcal{R}$ , and the entries of  $\mathcal{R}$  satisfy an explicit relation with the entries of the Stokes matrix  $\mathcal{S}$ , the proposition gives a simple way to check positivity of  $\mathcal{S} + \mathcal{S}^T$ .

All of the above results are first proved for a conveniently defined, ‘‘abstract Stokes matrix’’  $S$ . We then explain the precise relation between this ‘‘abstract Stokes matrix’’, and the Stokes matrix  $\mathcal{S}$  of (1.2).

#### REFERENCES

- [1] F. Beukers and G. Heckman, *Monodromy for the hypergeometric function  ${}_nF_{n-1}$* , Invent. Math. **95** (1989), 325–354.
- [2] S. Cecotti and C. Vafa, *Topological–anti-topological fusion*, Nucl. Phys. B **367** (1991), 359–461.
- [3] B. Dubrovin, *Geometry and integrability of topological-antitopological fusion*, Comm. Math. Phys. **152** (1993), 539–564.
- [4] M. A. Guest, A. R. Its, and C.-S. Lin, *Isomonodromy aspects of the  $tt^*$  equations of Cecotti and Vafa I. Stokes data*, Int. Math. Res. Notices **2015** (2015) 11745–11784.
- [5] M. A. Guest, A. R. Its, and C.-S. Lin, *Isomonodromy aspects of the  $tt^*$  equations of Cecotti and Vafa II. Riemann–Hilbert problem*, Commun. Math. Phys. **336** (2015) 337–380.
- [6] M. A. Guest and C.-S. Lin, *Nonlinear PDE aspects of the  $tt^*$  equations of Cecotti and Vafa*, J. reine angew. Math. **689** (2014) 1–32.
- [7] T. Mochizuki, *Harmonic bundles and Toda lattices with opposite sign*, preprint (arXiv: 1301.1718).



# 隣接サイトの状態に依存する吸脱着機構を持つ完全非対称単純排他過程

一木 信吾 (Shingo Ichiki)\*; 佐藤 純 (Jun Sato)†; 西成 活裕 (Katsuhiko Nishinari)†

## 概要

吸脱着機構を持つ完全非対称単純排他過程 (Totally asymmetric simple exclusion process with Langmuir kinetics; TASEP-LK) について考察する. 特に, 隣接サイトの状態に依存して吸脱着レートが異なる TASEP-LK を考える. そして, この模型の非平衡定常状態について平均場近似を用いて解析する.

## 1 はじめに

非対称単純排他過程 (Asymmetric simple exclusion process; ASEP) とは, 一次元格子を排除体積効果を持った多数の粒子が非対称にランダムウォークする確率過程模型である. 特に, 粒子が一方にのみ動く模型は, 完全非対称単純排他過程 (Totally asymmetric simple exclusion process; TASEP) と呼ばれている. これらの模型は, 非平衡統計力学を始めとする幅広い分野で研究が行われている. 特に, 車や生物などの自己駆動粒子系に見られる現象を表現する模型として広く用いられている [1].

また, 図 1 のように, Langmuir kinetics と呼ばれる格子上の任意の場所で吸脱着が可能なメカニズムを持つ模型も提案されている. この模型では, 粒子は前方のサイトが空いているとき, レート  $p$  (時間  $dt$  の間に確率  $pdt$ ) で前方へホップする. また, 粒子は左端からレート  $\alpha$  で流入し, 右端からレート  $\beta$  で流出する. なお, サイトが空いていれば, レート  $\omega_A$  で粒子がサイトに吸着し, サイト上の粒子はレート  $\omega_D$  で脱離する. 吸脱着機構を持つ完全非対称単純排他過程 (TASEP-LK) は, 境界の流入レートを変化させることで, 高密度相と低密度相を分離する衝撃波の存在など興味深い現象が知られている [2, 3].

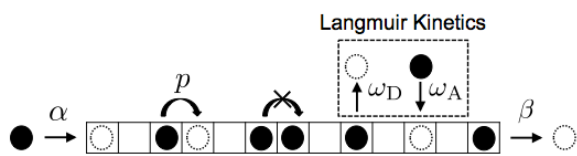


図 1 TASEP-LK の模式図.

最近, 隣接サイトの状態に依存するある吸脱着機構を持つ模型が研究されている [4]. 本稿では, この模型を, 隣接サイトの状態ごとに吸着レートと脱離レートが等しい場合について, 各吸脱着レートが任意かつ独立に値を取ることができるように拡張する. なお, 本稿において “吸脱着レート” とは, 隣接サイトの状態ごとに吸着レートと脱離レートが等しい場合に用いるものとする.

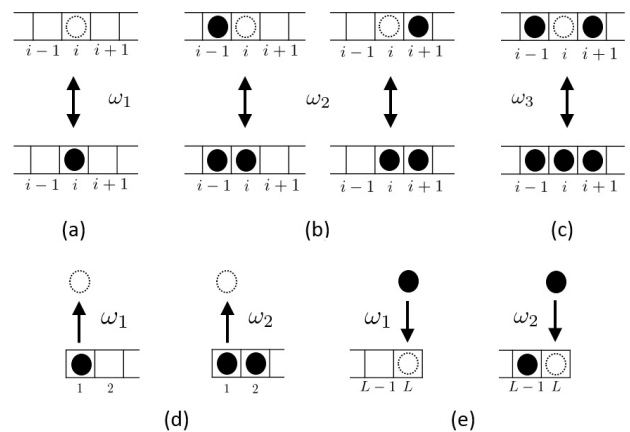
## 2 拡張 TASEP-LK

隣接サイトの状態に依存して吸脱着レートが異なる TASEP-LK について説明する. そして, 平均場近似を用いることで, 密度プロファイルが満たす偏微分方程式を導く.

### 2.1 模型

サイト数  $L$  ( $L \geq 3$ ) の一次元格子を考える. サイト  $i$  では, 粒子がある状態 ( $\tau_i = 1$ ), またはない状態 ( $\tau_i = 0$ ) のいずれかを取る. ここでは, 粒子は前方のサイトが空いているとき, レート  $1$  で前方へホップする. そして, 粒子は左端からレート  $\alpha$  で流入し, 右端からレート  $\beta$  で流出する.

次に, 吸脱着機構について説明する. 隣接する両サイトに粒子がない場合, 図 2 (a) のとおり, 粒子はレート  $\omega_1$  で吸脱着する. 隣接するサイトのどちらか一方に粒子がある場合, 図 2 (b) のとおり, 粒子はレート  $\omega_2$  で吸脱着する. 隣接する両サイトに粒子がある場合, 図 2 (c) のとおり, 粒子はレート  $\omega_3$  で吸脱着する. 左端のサイトでは, 図 2 (d) のとおり, 左端から 2 番目のサイトに粒子がない場合はレート  $\omega_1$ , 粒子がある場合はレート  $\omega_2$  で脱離する. また, 右端のサイトでは, 図 2 (e) のとおり, 右端から 2 番目のサイトに粒子がない場合はレート  $\omega_1$ , 粒子がある場合はレート  $\omega_2$  で吸着する.



\* 東京大学大学院 工学系研究科

† 東京大学 先端科学技術研究センター

図2 (a) 隣接する両サイトに粒子がない場合. (b) 隣接するサイトのどちらか一方に粒子がある場合. (c) 隣接する両サイトに粒子がある場合. (d) 左境界. (e) 右境界.

## 2.2 平均場近似

このモデルの密度プロファイルに関する偏微分方程式を導出する. サイト  $i$  ( $1 < i < L$ ) の粒子密度の期待値変化は次のように表現できる.

$$\begin{aligned} \frac{d\langle\tau_i\rangle}{dt} = & \langle\tau_{i-1}(1-\tau_i)\rangle - \langle\tau_i(1-\tau_{i+1})\rangle \\ & + \omega_1\langle(1-\tau_{i-1})(1-\tau_i)(1-\tau_{i+1})\rangle \\ & + \omega_2\langle(1-\tau_{i-1})(1-\tau_i)\tau_{i+1}\rangle \\ & + \omega_2\langle\tau_{i-1}(1-\tau_i)(1-\tau_{i+1})\rangle \\ & + \omega_3\langle\tau_{i-1}(1-\tau_i)\tau_{i+1}\rangle \\ & - \omega_1\langle(1-\tau_{i-1})\tau_i(1-\tau_{i+1})\rangle \\ & - \omega_2\langle(1-\tau_{i-1})\tau_i\tau_{i+1}\rangle \\ & - \omega_2\langle\tau_{i-1}\tau_i(1-\tau_{i+1})\rangle - \omega_3\langle\tau_{i-1}\tau_i\tau_{i+1}\rangle, \quad (1) \end{aligned}$$

ただし,  $\langle\cdot\rangle$  は期待値を表している. また, 両端のサイト ( $i = 1, L$ ) は次のように表現できる.

$$\begin{aligned} \frac{d\langle\tau_1\rangle}{dt} = & \alpha\langle 1-\tau_1\rangle - \langle\tau_1(1-\tau_2)\rangle \\ & - \omega_1\langle\tau_1(1-\tau_2)\rangle - \omega_2\langle\tau_1\tau_2\rangle. \\ \frac{d\langle\tau_L\rangle}{dt} = & \langle\tau_{L-1}(1-\tau_L)\rangle - \beta\langle\tau_L\rangle \\ & + \omega_1\langle(1-\tau_{L-1})(1-\tau_L)\rangle + \omega_2\langle\tau_{L-1}(1-\tau_L)\rangle. \end{aligned}$$

次に, 式 (1) に対して, 平均場近似及び流体力学極限を取ることで次の偏微分方程式が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho}{\partial t} + (1-2\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x} = & (1-2\rho) \\ & \times \left[ \Omega_1(1-\rho)^2 + 2\Omega_2\rho(1-\rho) + \Omega_3\rho^2 \right], \quad (2) \end{aligned}$$

ただし,  $\Omega_j = \omega_j L$  ( $j = 1, 2, 3$ ),  $t = L\bar{t}$  及び  $x = \frac{i}{L}$  ( $i = 1, 2, \dots, L$ ) とする.

## 3 解析

拡張 TAESP-LK の定常状態について考察する.

### 3.1 定常解

式 (2) から定常解を導く. 定常状態では  $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$  と置くことができる. このことから直ちに, 自明な解  $\rho(x) = \frac{1}{2}$  を持つことがわかる. また, 次の微分方程式を解くことで, その他の解を得ることができる.

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dx} = & \Omega_1(1-\rho)^2 + 2\Omega_2\rho(1-\rho) + \Omega_3\rho^2 \\ = & (\Omega_1 - 2\Omega_2 + \Omega_3)\rho^2 - 2(\Omega_1 - \Omega_2)\rho + \Omega_1. \quad (3) \end{aligned}$$

ここでは,  $\Omega_1 - 2\Omega_2 + \Omega_3 \neq 0$  の場合を考える. 式 (3) の微分方程式は, 定数係数であることから次の特殊解を持つことが

わかる.

$$\xi_{\pm} = \frac{\Omega_1 - \Omega_2 \pm \sqrt{\Omega_2^2 - \Omega_1\Omega_3}}{\Omega_1 - 2\Omega_2 + \Omega_3}.$$

そして,  $\Omega_2^2 - \Omega_1\Omega_3 > 0$  のとき, 特殊解  $\xi := \xi_+$ , 左境界条件  $\rho(0) = \alpha$  及び右境界条件  $\rho(1) = 1 - \beta$  を用いることで, 定常状態における左近傍解  $\rho_L(x)$  及び右近傍解  $\rho_R(x)$  が次のとおり得られる.

$$\begin{aligned} \rho_L(x) = & \frac{[a(\alpha + \xi) + b]\xi e^{-(2a\xi+b)x} + (a\xi + b)(\alpha - \xi)}{[a(\alpha + \xi) + b]e^{-(2a\xi+b)x} - a(\alpha - \xi)}, \\ \rho_R(x) = & \frac{[a(1 - \beta + \xi) + b]\xi e^{(2a\xi+b)(1-x)} + (a\xi + b)(1 - \beta - \xi)}{[a(1 - \beta + \xi) + b]e^{(2a\xi+b)(1-x)} - a(1 - \beta - \xi)}, \end{aligned}$$

ただし,  $a = \Omega_1 - 2\Omega_2 + \Omega_3$  及び  $b = -2(\Omega_1 - \Omega_2)$  とする. なお,  $\Omega_2^2 - \Omega_1\Omega_3 = 0$  のとき, 先行研究のモデルと一致する [4].

次に, 密度プロファイルに見られる衝撃波の位置について考察する. 衝撃波の速さ  $v_S$  は, 次の式で表現できることが知られている [5, 6].

$$v_S = \frac{\rho_R(1 - \rho_R) - \rho_L(1 - \rho_L)}{\rho_R - \rho_L} = 1 - \rho_L - \rho_R.$$

また, 定常状態を考えていることから, 衝撃波が安定していると仮定する. つまり, 衝撃波の速さ  $v_S$  を 0 とすることで, 衝撃波の位置において左近傍解と右近傍解の関係は次のように得られる.

$$\rho_R(x_S) = 1 - \rho_L(x_S), \quad (4)$$

ただし,  $x_S$  は衝撃波の位置とする. 衝撃波の位置は,  $\rho_L(x)$ ,  $\rho_R(x)$  及び式 (4) から求めることができる. そして  $\Delta = \rho_R(x_S) - \rho_L(x_S) > 0$  及び  $0 < x_S < 1$  となるとき, 衝撃波は存在する.

以上から, 定常状態における密度プロファイルが得られる. 衝撃波が存在するとき, 密度プロファイルは次のように与えられる.

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_L(x) & (0 < x < x_S) \\ \rho_R(x) & (x_S < x < 1) \end{cases}$$

また, その他の場合は次のように表現される.

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_L(x) & (0 < x < x_1) \\ \frac{1}{2} & (x_1 < x < x_2) \\ \rho_R(x) & (x_2 < x < 1) \end{cases}$$

$x_1$  及び  $x_2$  はそれぞれ  $\rho_L(x_1) = \frac{1}{2}$  及び  $\rho_R(x_2) = \frac{1}{2}$  となる位置である. ただし,  $x_1 < 0$  ( $x_2 > 1$ ) のときは,  $\rho_L(x)$  ( $\rho_R(x)$ ) がいないとする. なお, 両境界ではそれぞれ,  $\rho(0) = \alpha$  及び  $\rho(1) = 1 - \beta$  となる.

### 3.2 相図と密度プロファイル

具体例として,  $\Omega_1 = 0.3$ ,  $\Omega_2 = 0.4$  及び  $\Omega_3 = 0.2$  のときの相図及び各相における密度プロファイルを示す.

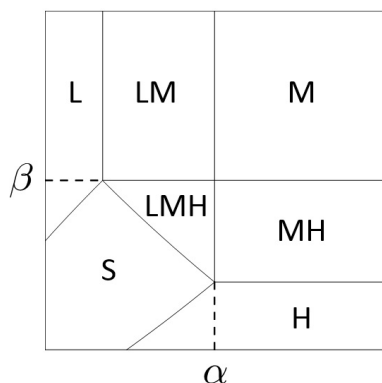


図3  $\Omega_1 = 0.3$ ,  $\Omega_2 = 0.4$  及び  $\Omega_3 = 0.2$  のときの相図.

図3は、 $\Omega_1 = 0.3$ ,  $\Omega_2 = 0.4$  及び  $\Omega_3 = 0.2$  のときの相図である。この場合、7つの相に区別することができる。まず、3つの基本相（高密度相（H）・低密度相（L）・最大流量相（M））が見られる。“H”（“L”）では、密度が $\frac{1}{2}$ より高く（低く）なる。そして、密度プロファイルは、 $\rho_R$ （ $\rho_L$ ）で表現される。また、“M”では、密度は $\frac{1}{2}$ となる。密度が $\frac{1}{2}$ のとき流量が最大となることから、最大流量相と呼ぶ。次に、“S”は、衝撃波が観測される相を示している。最後に、混合相（最大流量相及び高密度相（MH）・低密度相及び最大流量相（LM）・低密度相、最大流量相及び高密度相（LMH））が見られる。“MH”（“LM”）の密度プロファイルは、 $\frac{1}{2}$  及び  $\rho_R$ （ $\rho_L$  及び  $\frac{1}{2}$ ）で構成される。また、“LMH”の密度プロファイルは、 $\rho_L$ ,  $\frac{1}{2}$  及び  $\rho_R$  で表現される。なお、衝撃波相の境界は、衝撃波の存在と位置を考慮することで導くことができる。

さらに、図4では、平均場近似及びモンテカルロシミュレーションによって得られた各相における密度プロファイルを示している。実線は平均場近似から、また、点線はモンテカルロシミュレーションからそれぞれ得られた密度プロファイルである。この図から、平均場近似によって得られた密度プロファイルがモンテカルロシミュレーションの結果と精度良く一致していることがわかる。

## 4 まとめ

本稿では、隣接サイトの状態に依存して吸脱着レートが異なるTASEP-LKについて考察した。特に、各吸脱着レートが任意かつ独立に値を取ることができるようにモデルを拡張した。そして、平均場近似を用いることで、相図及び定常状態の密度プロファイルを得ることに成功した。隣接サイトの状態ごとに吸着レート及び脱離レートそれぞれが任意かつ独立に値が取れるよ

うな場合や実際の現象への応用などについては、今後の課題である。

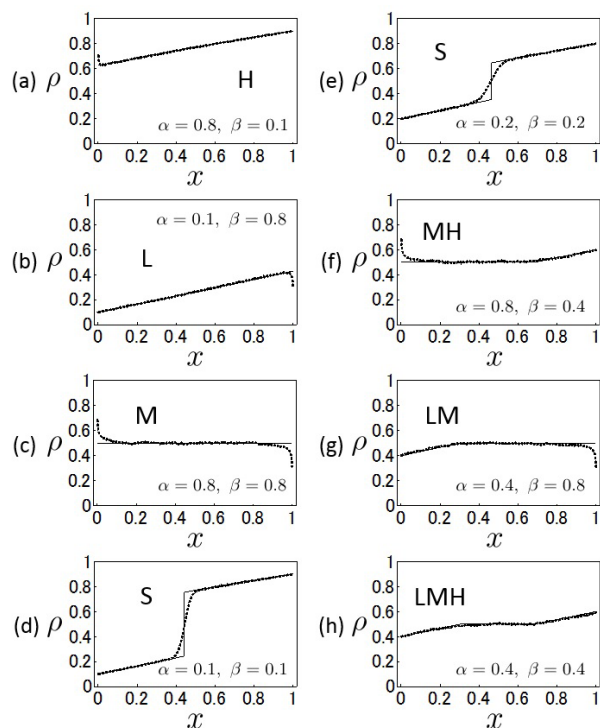


図4  $\Omega_1 = 0.3$ ,  $\Omega_2 = 0.4$  及び  $\Omega_3 = 0.2$  の場合における各相の密度プロファイル.

## 参考文献

- [1] A. Schadschneider, D. Chowdhury, and K. Nishinari, *Stochastic Transport in Complex Systems: From Molecules to Vehicles* (Elsevier Science, 2010).
- [2] A. Parmeggiani, T. Franosch, and E. Frey, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 086601 (2003).
- [3] M. R. Evans, R. Juhász and L. Santen, *Phys. Rev. E* **68**, 026117 (2003).
- [4] H. D. Vuijk, R. Rens, M. Vahabi, F. C. MacKintosh, and A. Sharma, *Phys. Rev. E* **91**, 032143 (2015).
- [5] M. J. Lighthill and G. B. Whitham, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **229**, 317 (1955).
- [6] R. A. Blythe and M. R. Evans, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40**, R333 (2007).

# ロジスティック成長する個体群に対して 空間非一様性が与える影響

永原 健太郎 (KENTARO NAGAHARA)

東京工業大学大学院 理工学研究科 数学専攻

e-mail: nagahara.k.ac@m.titech.ac.jp

## 1 Introduction

環境資源の配置が、ある種の生物の個体数にどのように影響するかという問題は、保全生物学において重要な問題として残されている [3]. 本講演では、総資源量が一定という制約条件の下で、生物の個体数が最大となる資源配置は具体的にどのような形で与えられるのか、という問題について論ずることを目的とする。

始めに、本研究の背景に触れるため、Verhulst [6] が提唱した次の方程式を見てみよう。

$$\frac{d}{dt}w(t) = w(t)\{k - w(t)\}$$

これはロジスティック方程式と呼ばれる生物の増殖を表す数理モデルで、人口の無制限な成長は不可能で、増加率はやがて鈍化し、最終的には定常的になるという考え方を反映させている。ここで、 $t \in \mathbb{R}_+$  は時間、 $w(t) \in \mathbb{R}$  は生物種の個体数、 $k \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$  は内的自然増加率と呼ばれる定数で、その生物が潜在的に持っている最大の繁殖増加率を表している。

初期値が  $w(0) > 0$  を満たしているとする。この方程式は変数分離系であり具体的に解くことができ、

$$w(t) = \frac{k}{1 + \left(\frac{k}{w(0)} - 1\right) e^{-kt}} \quad \text{if } (0 < k \leq 1),$$

$$w(t) = \frac{1}{t + \frac{1}{w(0)}} \quad \text{if } (k = 0)$$

と表される。  $0 < k \leq 1$  のとき、解は  $w(t) \rightarrow k$  ( $t \rightarrow \infty$ ) となり、個体数は  $k$  まで増殖するが、 $k = 0$  のとき、解は  $w(t) \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow \infty$ ) となり、生物群は絶滅してしまう。(  $k$  は一般に  $k \in \mathbb{R}$  としても同様の議論ができるが、今回は簡単のために  $0 \leq k \leq 1$  として扱った。 )

次に、生物が生息域である有界領域内をランダムに移動することを考慮に入れる。ただし、この生息域は環境が一様ではなく、内的自然増加率が空

間変数  $x$  に依存する関数  $k = m(x)$  によって表されるものとする. 言い換えれば,  $m(x)$  は場所  $x$  に生物が増殖するのに適した資源がどの程度置かれているかを表しており, この関数  $m(x)$  を環境容量と呼ぶ. この  $m(x)$  は非負値 Lebesgue 可測関数であり, 次の条件を満たすものとする.

$$(M1) \quad 0 \leq m(x) \leq 1 \quad \mathcal{L}\text{-a.e.}$$

$$(M2) \quad \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} m(x) dx = \delta.$$

ここで,  $m(x)$  が 0 に近い場所は生物にとって住みにくい環境であり,  $m(x)$  が 1 に近いところは生物が住みやすい環境であることを表している. また,  $\delta$  は総資源量を表す定数で,  $0 < \delta < 1$  を満たす. すなわち,  $m \equiv 0$  in  $\Omega$  という資源が全くない状況, または  $m \equiv 1$  in  $\Omega$  という資源がすべての領域で豊富にある状況は考えないものとする. 以降この  $\delta$  を固定した状況を考える.

以上の状況の下, 場所  $x$ , 時刻  $t$  における生物種の個体密度分布  $v_{m,\varepsilon}(x, t)$  は, 次の空間非一様性のある反応拡散ロジスティック方程式 (あるいは Fisher-KPP 方程式) と呼ばれる数理モデルを用いて表される [5].

$$\begin{cases} \frac{\partial v_{m,\varepsilon}}{\partial t} = \varepsilon^2 \Delta v_{m,\varepsilon} + m(x)v_{m,\varepsilon} - v_{m,\varepsilon}^2 & ((x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+), \\ \frac{\partial v_{m,\varepsilon}}{\partial n} = 0 & ((x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+), \\ v_{m,\varepsilon}(x, 0) \geq 0, \quad v_{m,\varepsilon}(x, 0) \neq 0 & (x \in \bar{\Omega}), \end{cases} \quad (1)$$

$$m \in X := \left\{ m \in L^\infty(\Omega) \mid 0 \leq m(x) \leq 1, \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} m(x) dx = \delta \right\}.$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$  は生物の生息域に対応し, 滑らかな境界  $\partial\Omega$  を持つ. (1) の第 2 式にある Neumann 境界条件は, 生物が  $\partial\Omega$  を超えて生息域  $\Omega$  の外に出ないことを意味する.  $n$  は  $\partial\Omega$  上の外向き単位法線ベクトルである. また,  $\varepsilon > 0$  は正の定数で, 拡散係数と呼ばれる生息域内を生物が移動する速さを表すパラメータである.  $\varepsilon$  が大きければ, 生息域内を生物が速いスピードで移動し,  $\varepsilon$  が小さければ生物は遅いスピードで移動することに対応している. 初期条件  $v_{m,\varepsilon}(x, 0) \in C(\bar{\Omega})$  は観測を開始した時点での生物の生息域内での分布を表す. また,  $X \subset L^\infty(\Omega)$  は, 条件 (M1), (M2) を満たしている関数  $m(x)$  全体を表している. なお,  $m(x)$  が定数ならば, 冒頭で紹介したロジスティック方程式と同様の計算ができる.

ここで, (1) の数理モデルで記述される生物個体群が絶滅 ( $\|v_{m,\varepsilon}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow \infty$ )) せず増殖できるかどうか問題となるが, これに対しては, Cantrell-Cosner ([1], [2]) による結果が知られている. 彼らの一連の研究結果により,  $m \in X$  のとき, (1) には非自明な正值定常解  $u_{m,\varepsilon} \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$  ( $\forall p > 1$ ) が一意的に存在し, 初期値  $v_{m,\varepsilon}(x, 0)$  に依存せず  $t \rightarrow \infty$  ですべての解が  $u_{m,\varepsilon}(x)$  に一様収束することが示されている.

この結果を用いて、十分に時間  $t$  が経過した後の生物の個体数を調べるため、(1) の定常解が満たす半線形楕円型偏微分方程式を確認しておこう。

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u_{m,\varepsilon} = m(x)u_{m,\varepsilon} - u_{m,\varepsilon}^2 & (x \in \Omega), \\ \frac{\partial u_{m,\varepsilon}}{\partial n} = 0 & (x \in \partial\Omega) \end{cases} \quad (2)$$

ここで、解  $u_{m,\varepsilon}(x)$  は環境容量  $m(x)$ 、拡散係数  $\varepsilon$  に依存することに注意しておく。

これを受け、W.Ding ら 5 名 [3] の研究によって Net-Benefit と呼ばれる次の量が導入された。

$$J(m, \varepsilon) := \int_{\Omega} [u_{m,\varepsilon}(x) - Bm(x)^2] dx$$

ただし  $B$  は非負の定数とする。  $J(m, \varepsilon)$  は、生息数  $\int_{\Omega} u_{m,\varepsilon}(x) dx$  から資源配置にかかるコスト  $\int_{\Omega} Bm(x)^2 dx$  を引いた値を表している。すなわち、  $J(m, \varepsilon)$  の値が大きい資源配置は、生物の生息数が多くなり、かつコストの少ない資源配置となっていると言える。

では、資源の総量  $\delta$  が一定の下で、  $J(m, \varepsilon)$  が最も大きくなる資源配置  $m(x)$  とは具体的にどのような資源配置なのだろうか。これは、  $J(m, \varepsilon)$  の大域的最大化解となる  $m^*(x) \in U$  を具体的に求める問題となる。

問題に入る前に、大域的最大化解 (global maximizer) と局所的最大化解 (local maximizer) について述べる。環境容量  $m(x)$  の集合  $X$  内の  $J(m, \varepsilon)$  の上限

$$J_{\text{sup}} := \sup_{m \in X} J(m, \varepsilon)$$

に対し、  $J(m^*, \varepsilon) = J_{\text{sup}}$  を満たす  $m^* \in X$  のことを大域的最大化解という。ここで、拡散係数  $\varepsilon$  は生物種の生態によって決まる値であり、ここでは固定されている。また、  $\tilde{m}(x) \in X$  に対し、ある  $\mu > 0$  が存在し、

$$\int_{\Omega} |m(x) - \tilde{m}(x)| dx < \mu$$

を満たすすべての  $m \in X$  に対して、

$$J(m, \varepsilon) \leq J(\tilde{m}, \varepsilon)$$

が成り立つとき、  $\tilde{m}(x)$  を局所的最大化解という。ここで、大域的最大化解は局所的最大化解の条件も満たしていることに注意する。W.Ding ら [3] によっ

て、すべての  $B \geq 0$ ,  $\varepsilon > 0$  で大域的最大化解  $m^*(x) \in X$  が存在することが示されている。

具体的形状についても W.Ding ら [3] によって部分的に解答が得られており、 $B \geq 0$  が十分大きい場合には、 $m(x) \equiv \delta$  が  $J(m, \varepsilon)$  の大域的最大化解であることが証明されている。しかし  $B$  が小さいときは、 $J(m, \varepsilon)$  の値が (1) の定常解の空間変数  $x$  に対する積分  $\int_{\Omega} u_{m, \varepsilon}(x) dx$  に大きく依存するため解析が難しく、具体的な形状はわかっておらず、研究の及んでいない部分が多い。

そこで Ding らは [3] において数値解析を行い、 $B = 0$  のとき、すなわち  $J(m, \varepsilon) = \int_{\Omega} u_{m, \varepsilon}(x) dx$  のとき、 $J(m, \varepsilon)$  の大域的最大化解は bang-bang 性と呼ばれる性質を持つという予想を立てた。ここで、環境容量  $m(x)$  が bang-bang 性を持つとは、 $m(x)$  が Lebesgue 可測集合  $E \subset \Omega$  上で  $m(x) = 1$  を満たし、 $\Omega \setminus E \subset \Omega$  上で  $m(x) = 0$  を満たすことをいう。

本講演では、 $B = 0$ ,  $\varepsilon$  を固定したとき、環境容量  $m(x)$  を摂動させ、 $m(x)$  が  $J(m)$  の停留点となる条件を調べた結果を報告し、そこから明らかになった  $J(m)$  の大域的最大化解が持つ条件について述べる。次に、 $\Omega = (0, 1)$  とし、これまでとは逆に環境容量  $m(x)$  を固定し、 $\varepsilon$  を動かすことを考える。考える環境容量  $m(x)$  が bang-bang 性を持つ場合に、特異極限問題の解と比較することにより  $\int_{\Omega} u(x) dx$  の拡散係数  $\varepsilon = 0$  での漸近展開が得られたことを説明し、これらを用いた発展的な議論を加えて発表したいと思う。

## 2 大域的最大化解の性質

定理 2.1.  $m^*(x) \in X$  を大域的最大化解とする。このとき、

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} m^*(x) = 1,$$

or

$$\operatorname{ess\,inf}_{x \in \Omega} m^*(x) = 0.$$

が成り立つ。

証明. 概略を説明する。まず、 $X_0 \subset X$  を次のように定義する。

$$X_0 := \left\{ m \in L^\infty(\Omega) \mid 0 < m(x) < 1, \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} m(x) dx = \delta \right\}.$$

$\forall m_0(x) \in X_0$  に対し、 $\mu > 0$ ,  $g \in L^\infty(\Omega)$ ;  $\int_{\Omega} g dx = 0$  を、 $m := m_0 + \mu g \in X_0$  となるようにとる。この  $m$  に対して定まる (2) の解  $u(x)$  は、

$$\int_{\Omega} u(x) dx = \int_{\Omega} u_0(x) dx + \mu \int_{\Omega} u_1(x) dx + o(\mu)$$

の形に漸近展開することができる。ここで、 $u_0(x)$  及び  $u_1(x)$  は、それぞれ次の方程式の解である。

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u_0 = m(x)u_0 - u_0^2 & (x \in \Omega), \\ \frac{\partial u_0}{\partial n} = 0 & (x \in \partial\Omega) \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u_1 = (m(x) - 2u_0)u_1 + gu_0 & (x \in \Omega), \\ \frac{\partial u_1}{\partial n} = 0 & (x \in \partial\Omega) \end{cases} \quad (4)$$

ここで、第一変分  $\int_{\Omega} u_1(x) dx$  に注目すると、

$$\int_{\Omega} u_1(x) dx = 0 \Leftrightarrow m_0 \equiv \delta$$

を示すことができる。更に、 $m_0 \equiv \delta$  は  $\int_{\Omega} u dx$  の大域的最小化解であることも示され、したがって定理の結論が導かれる。□

### 3 $J(m, \varepsilon)$ の $\varepsilon$ に対する漸近展開

方程式 (2) から、次の結果が導かれる。

$$\varepsilon^2 \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^2}{u^2} dx = \int_{\Omega} m dx - \int_{\Omega} u dx.$$

定理 2.1 よりも詳しい大域的最大化解  $m^*(x)$  の形状を調べるためには、この左辺が最大となるような  $m^* \in X$  を探すことが重要となるが、その解析は容易ではない。しかし、 $m$  が  $C^1$  級と仮定した場合、

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx < \int_{\Omega} |\nabla m|^2 dx$$

となることが知られている [4]。したがって  $m(x)$  の勾配の平均と  $u(x)$  の勾配の平均は重要な関係を持っていることが伺える。そこで、Ding ら [3] の予想をもとに、環境容量  $m(x)$  が不連続ではあるが最も変化が激しい bang-bang 性を持つときの  $J(m, \varepsilon)$  について詳しく調べようと考えた。以降、次の状況を考える。

$\Omega = (0, a)$  とし、環境容量  $m_1(x)$  を次のように定義する。

$$m_1(x) = \begin{cases} 0 & (x \in (0, x_0)), \\ 1 & (x \in (x_0, a)), \end{cases}$$

この時、 $J(m_1, \varepsilon)$  の  $\varepsilon$  に関する漸近展開を調べた結果、次の式を得た。



定理 3.1.

$$J(m_1, \varepsilon) = \delta + C_1\varepsilon + C_2K^6(\sin \frac{\pi}{12})\frac{1}{x_0^6}\varepsilon^7 + o(\varepsilon^7), \quad (5)$$

$$C_1 := \sqrt{2\sqrt{3}} - \left(3 - \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}\right),$$

$$C_2 := 12\sqrt{2\sqrt{3}} \left(\sqrt{3\sqrt{3}} + \sqrt{3} - \left(\sqrt[4]{3} + \frac{9}{5}\right)\right)$$

ここで,  $\delta$  は  $m_1(x)$  の定義から  $\delta = a - x_0$  である.

証明. 概略を説明する.  $m_1(x)$  の定義から, 方程式 (2) の解  $u$  は次を満たす.

$$-\varepsilon^2 u_{xx} = -u^2, \quad 0 < x < x_0, \quad u_x(0) = 0,$$

$$-\varepsilon^2 u_{xx} = u - u^2, \quad x_0 < x < a, \quad u_x(a) = 0.$$

また, 原点で  $C^1$  級に接続する条件により,

$$u(x_0+) = u(x_0-), \quad u_x(x_0+) = u_x(x_0-),$$

となる. ここで, 変数変換と原点で接続する条件により, 方程式を  $(0, x_0)$ ,  $(x_0, a)$  で分けて考えると, 方程式 (2) の解  $u$  を解くことは次の連立微分方程式を解くことに帰着される.

$$\begin{cases} -u_{xx}^A = -(u^A)^2, & x \in \left(-\frac{x_0}{\varepsilon}, 0\right), \\ u_x^A\left(-\frac{x_0}{\varepsilon}\right) = 0, & u_x^A(0) = \sqrt{\frac{2}{3}}(\gamma^3 - \alpha^3), \\ u^A\left(-\frac{x_0}{\varepsilon}\right) = \alpha, & u^A(0) = \gamma, \quad u_x^A(x) \geq 0. \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} -u_{xx}^B = (u^B) - (u^B)^2, & x \in \left(0, \frac{1-x_0}{\varepsilon}\right), \\ u_x^B\left(\frac{1-x_0}{\varepsilon}\right) = 0, & u_x^B(0) = \sqrt{\frac{2}{3}}(\gamma^3 - \alpha^3), \\ u^B\left(\frac{1-x_0}{\varepsilon}\right) = \beta, & u^B(0) = \gamma, \quad u_x^B(x) \geq 0. \end{cases} \quad (7)$$

ここで,  $u^A(x)$  は  $(0, x_0)$  上での解  $u(x)$ ,  $u^B(x)$  は  $(x_0, a)$  上での解  $u(x)$  を表す. さらに,  $\alpha := u(0)$ ,  $\beta := u(a)$ ,  $\gamma := u(x_0+) = u(x_0-)$  と約束する.

方程式から,  $(0, a)$  上で  $u_x > 0$  が示される. さらに, (6), (7) の第1式の両辺にそれぞれ  $u_x^A$ ,  $u_x^B$  を掛けて両辺を積分すると, 次の保存量が得られる.

$$\frac{du^A}{dx} = \sqrt{\frac{2}{3} ((u^A)^3 - \alpha^3)} \quad \left( x \in \left[ -\frac{x_0}{\varepsilon}, 0 \right] \right), \quad (8)$$

$$\frac{du^B}{dx} = \sqrt{\frac{2}{3} \left( (u^B)^3 - \frac{3}{2}(u^B)^2 - \beta^3 + \frac{3}{2}\beta^2 \right)} \quad \left( x \in \left[ 0, \frac{1-x_0}{\varepsilon} \right] \right) \quad (9)$$

また, Liang-Lou[4] の結果から,

$$\alpha \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0), \quad (10)$$

$$\beta \rightarrow 1 \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \quad (11)$$

が従う. したがって,  $\varepsilon \rightarrow 0$  としたとき, 保存量は

$$\frac{d\bar{u}^A}{dx} = \sqrt{\frac{2}{3} ((\bar{u}^A)^3)} \quad (x \in (-\infty, 0]), \quad (12)$$

$$\frac{d\bar{u}^B}{dx} = \sqrt{\frac{2}{3} \left( (\bar{u}^B)^3 - \frac{3}{2}(\bar{u}^B)^2 + \frac{1}{2} \right)} \quad (x \in [0, \infty)) \quad (13)$$

となる. この保存量から得られる解  $\bar{u}^A, \bar{u}^B$  が極限問題の解に相当し, 具体的に解くことができる.

次に, 極限問題の解と拡散係数  $\varepsilon$  がとても小さいときの解とを比較することにより,  $J(m_1, \varepsilon)$  の漸近展開を得ることを考える. 保存量 (8), (9) を用いて, 次に述べる関係式を得ることができる.

$$\sqrt{\frac{2\alpha}{\sqrt{3}}} \frac{x_0}{\varepsilon} = 2K(\sin \frac{\pi}{12}) - \operatorname{sn}^{-1} \left( \sqrt{1 - \left( \frac{\frac{\gamma}{\alpha} - (1 + \sqrt{3})}{\frac{\gamma}{\alpha} - 1 + \sqrt{3}} \right)^2}, \sin \frac{\pi}{12} \right) \quad (14)$$

$$\tanh \left( \frac{1-x_0}{2\varepsilon} \right) < 1 - \frac{1}{4}(1-\beta) < 1 \quad (15)$$

ここで,

$$K(k) := \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} d\xi \quad (0 \leq k < 1)$$

は, 第一種完全楕円積分と呼ばれる母数  $k$  に関する関数であり,  $k \rightarrow 1$  のとき,  $K(k) \rightarrow \infty$  となる. また,

$$\operatorname{sn}^{-1}(y, k) := \int_0^y \frac{1}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} d\xi \quad (-1 \leq y \leq 1)$$

は、Jacobi の楕円関数のうち、sn 関数と呼ばれる関数の逆関数である。  
この (14), (15), および  $\alpha, \beta$  の 0 次オーダー (10), (11) から、次のように  $\alpha$  の漸近展開、及び  $\beta$  の評価を出すことができる。

$$\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{x_0^2} K^2\left(\sin \frac{\pi}{12}\right) \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2), \quad (16)$$

$$1 - 16 \frac{e^{-\frac{1-x_0}{\varepsilon}}}{1 + e^{-\frac{1-x_0}{\varepsilon}}} < \beta < 1. \quad (17)$$

この評価を用いて、スケール変換後の方程式の解の積分との間に、

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 u(x) dx = \int_{-x_0/\varepsilon}^0 u^A(x) dx + \int_0^{(1-x_0)/\varepsilon} u^B(x) dx =: I_A + I_B \quad (18)$$

が成り立つことに注目し、 $I_A, I_B$  について計算する。  
これらの積分を具体的にを行うのは通常困難であるが、例えば  $I_A$  について、変数変換

$$\frac{d}{dx} u^A(x) = \frac{d}{dy} \bar{u}^A(y)$$

を施すと、非積分関数が極限方程式の解で、積分区間に  $\varepsilon$  の影響が現れるようにできる。従って保存量 (12),  $\bar{u}^A(y)$  の具体表示、及び  $\alpha$  の漸近展開 (16) も合わせて考慮すると、

$$I_A = \sqrt{6}\varepsilon \int_{\varepsilon(\gamma^3 - \alpha^3)^{-1/6}}^{\infty} \frac{1}{t^2} \left( 1 + \left( \frac{24\sqrt{3}}{x_0^6} K^6\left(\sin \frac{\pi}{12}\right) + o(1) \right) t^6 \right)^{-1/3} dt \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

と書くことができる。ここから  $\beta$  の評価 (17) を使いつつ、更に計算を進めることにより、

$$I_A = \sqrt{2\sqrt{3}} - C_{A,6} \frac{1}{x_0^6} \varepsilon^6 + o(\varepsilon^6) \quad (\varepsilon \rightarrow 0), \quad (19)$$

$$C_{A,6} := 12\sqrt{2\sqrt{3}} \left( \frac{9}{5} - \sqrt{3} \right) K^6\left(\sin \frac{\pi}{12}\right)$$

を得ることができる。 $I_B$  についても、変数変換

$$\frac{d}{dx} u^B(x) = \frac{d}{dy} \bar{u}^B(y)$$

を施し、保存量 (13), 及び  $\beta$  の評価 (17) を用いることで、

$$I_B = \frac{1-x_0}{\varepsilon} - \left( 3 - \sqrt{3+2\sqrt{3}} \right) + C_{B,6} \frac{1}{x_0^6} \varepsilon^6 + o(\varepsilon^6) \quad (\varepsilon \rightarrow 0), \quad (20)$$

$$C_{B,6} := 12\sqrt{2}(3 - \sqrt{3})K^6\left(\sin \frac{\pi}{12}\right)$$

を示すことができる。よって、各項の展開 (19), (20) を足し合わせ, (18) に注意すると, (5) を得ることができる。□

## 4 数値解析

本講演では,  $J(m, \varepsilon)$  を最大にする環境容量  $m^*$  を具体的に調べるため, 射影勾配法を実装してその解析を試みたことを発表する。射影勾配法とは,  $J(m, \varepsilon)$  の  $m$  に関する第一変分を調べ,  $J(m, \varepsilon)$  が増加する方向に  $m$  を修正する技法である。この時, 修正した  $m$  が  $X$  に入るように調整をしないでならない。しかし, 残念ながら射影勾配法を実装しても数値解析で分かることは停留点の形状のみで, 最適制御をいきなり調べることは不可能である。理論的な発展と並行して研究を進めたい。

本講演では, 以下に述べる  $X_\delta$  のどのような環境容量からスタートしても,  $J(m, \varepsilon)$  が増加する方向に環境容量を修正するアルゴリズムを実装することを考え, これに成功したことを発表する。  $X$  内での処理についても, 講演で触れたい。

注: このセクションでは, 拡散係数  $\varepsilon$  は動かさないため,  $J(m, \varepsilon)$  を  $J(m)$  と表記する。

**命題 4.1.**

$$X_\delta := \left\{ m \in L^\infty(\Omega) \mid \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega m(x) dx = \delta \right\}$$

とする。任意の初期条件  $m_0 \in X_\delta$  に対し, 修正量  $m_n \in X_\delta$  を次のように定めると,  $J(m)$  の増大列になる。

$$m_n = m_{n-1} + \mu l_{n-1} \quad (\forall n \in \mathbf{N})$$

ただし,

$\mu$  : sufficiently small,

$$l_{n-1} \in L^\infty(\Omega) = u_{n-1} p_{1,n-1} + p_{2,n-1} \quad (\forall n \in \mathbf{N})$$

である。ここで,

$$u_{n-1} = u(m_{n-1}),$$

$p_{1,n-1}$  は次の方程式の解

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta p_{1,n-1} - (m_{n-1} - 2u_{n-1}) p_{1,n-1} = 1 & x \in \Omega \\ \frac{\partial p_{1,n-1}}{\partial n} = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (21)$$

$p_{2,n-1}$  は次で与えられる定数である.

$$p_{2,n-1} = \frac{-1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (u_{n-1} p_{1,n-1} - 2m_{n-1} B) dx.$$

#### 参考文献

- [1] R. S. Cantrell and C. Cosner, *Diffusive logistic equations with indefinite weights: population models in a disrupted environments*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **112A** (1989), 293–318.
- [2] R. S. Cantrell and C. Cosner, *Spatial Ecology via Reaction-Diffusion Equations*, Series in Mathematical and Computational Biology, John Wiley and Sons, Chichester, UK, 2003,
- [3] W. Ding, H. Finotti, S. Lenhart, Y. Lou, Q. Ye, *Optimal control of growth coefficient on a steady-state population model*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, **11** (2010), 688–704.
- [4] S. Liang, Y. Lou, *On the dependence of population size upon random dispersal rate*, Special issue on "PDE Models from Biological Processes," Disc. Cont. Dynam. Sys. Series B, **17** (2012), 2771–2788.
- [5] J. G. Skellam, *Random dispersal in theoretical populations*, Biometrika, **38** (1951), 196–218.
- [6] P. F. Verhulst, *Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement*, Correspondance Mathématique et Physique Publiée par A. Quételet, **10** (1838), 113–121.

# Regular multiplicity ergodic actions of compact quantum groups

北川 めぐみ (Megumi KITAGAWA)

お茶の水女子大学大学院 人間文化創成科学研究科 理学専攻

## 1 コンパクト量子群

Woronowicz によるコンパクト量子群とは、単位的  $C^*$  環  $A$  と、余積と呼ばれる  $A$  から  $A$  同士の minimal テンソル積への単位的\*準同型写像  $\Delta: A \rightarrow A \otimes A$  の組  $(A, \Delta)$  で

- (1)  $(\Delta \otimes \iota)\Delta = (\iota \otimes \Delta)\Delta$
- (2)  $(A \otimes 1)\Delta(A) = \text{span}\{(a \otimes 1)\Delta(b): a, b \in A\}$ ,  $(1 \otimes A)\Delta(A) = \text{span}\{(1 \otimes a)\Delta(b): a, b \in A\}$  はそれぞれ  $A \otimes A$  で稠密

をみたすもののことである。 $A$  をコンパクト量子群  $G$  上の関数環とみなして  $C(G)$  とも書く。 $A$  が可換  $C^*$  環のときは実際にコンパクト量子群は、普通の意味でのコンパクト群  $G$  に関して  $(C(G), \Delta)$  の形をしている。

コンパクト量子群には、Haar 状態と呼ばれる状態  $h: C(G) \rightarrow \mathbb{C}$  がただひとつ存在する。この  $h$  は、 $a \in C(G)$  に対し

$$(\iota \otimes h)\Delta(a) = (h \otimes \iota)\Delta(a) = h(a) \cdot 1$$

をみたす。

コンパクト量子群  $G$  の、Hilbert 空間  $H$  上のユニタリ表現とは、multiplier 環  $M(K(H) \otimes C(G))$  のユニタリ  $U$  で、 $(\iota \otimes \Delta)(U) = U_{12}U_{13}$  を満たすもののことである。 $L^2(G)$  で、Haar 状態  $h$  から定まる  $C(G)$  の GNS 表現を表す。 $a \in C(G)$  に対して  $\Lambda(a)$  と書いて  $L^2(G)$  のベクトルとみなす。 $C(G) \subset B(H_0)$  となっているとき、 $a \in C(G), \xi \in H_0$  に対して  $W(\Lambda(a) \otimes \xi) = \Delta(a)(\Lambda(1) \otimes \xi)$  によって定まる  $G$  の  $L^2(G)$  上の右正則表現  $W$  がただひとつある。

## 2 Regular multiplicity ergodic actions

コンパクト量子群  $G$  の離散双対量子群を  $\hat{G}$  と書く。 $G$  の、von Neumann 環  $M$  へのエルゴード作用とは、不動点環がスカラーのみからなるようなもののことである。 $\alpha$  をエルゴード作用とするとき、次の条件は同値である。

- $G$  の既約表現  $\pi \in \hat{G}$  に対して、スペクトル部分空間  $M_\pi$  の重複度は  $\dim \pi$  となる。
- 任意の既約表現  $\pi \in \hat{G}$  は  $M$  内にユニタリ固有行列をもつ。
- $W^*$  crossed product は (I 型) 因子である。
- $C^*$  crossed product は Hilbert 空間上のコンパクト作用素からなる  $C^*$  環と同型である。

このことから、 $G$  の regular multiplicity ergodic action の分類を  $\hat{G}$  のコサイクルの言葉で行うことができる。

### 3 $\hat{G}$ のコサイクル

$\rho$  を  $G$  の右正則表現として、 $R(G)$  を  $\rho(G)$  で生成される von Neumann 環とする。 $G$  が普通のコンパクト群の場合には  $R(G)$  上の余積  $\delta_G: R(G) \rightarrow R(G) \otimes R(G)$  は  $\delta_G(\rho(g)) = \rho(g) \otimes \rho(g)$  を拡張して得られる。 $(R(G) \otimes R(G))$  は  $R(G)$  同士の von Neumann 環のテンソル積を表す。) ユニタリ  $\omega \in R(G) \otimes R(G)$  で、コサイクル条件式

$$(\delta_G \otimes \iota(\omega))(\omega \otimes 1) = (\iota \otimes \delta_G(\omega))(1 \otimes \omega)$$

をみたすものを  $\hat{G}$  のコサイクルという。ふたつのコサイクル  $\omega, \omega'$  が cohomologous とは、ユニタリ  $\nu \in R(G)$  が存在して、 $\omega' = \delta_G(\nu^*)\omega(\nu \otimes \nu)$  となることであり、この同値関係による同値類の集合を  $H^2(\hat{G})$  と書く。

$\hat{G}$  のコサイクル  $\omega$  に対して、 $\alpha_g = Ad\lambda(g)$  とおく。 $\lambda$  は  $G$  の  $L^2(G)$  上の左正則表現を表す。するとこれは、 $\hat{G}$  の正則  $\omega$  表現の bicommutant への、 $G$  の full multiplicity ergodic action を定める。更に、 $G$  のすべての full multiplicity ergodic action はこのようにして引き起こされ、そのときのコサイクルは一意的に定まる。したがって、full multiplicity ergodic action の同値類と  $H^2(\hat{G})$  との間に自然な対応を考えられる。

### 4 コサイクル表現に対する $L^1$ 環と $C^*$ 環

$C_\omega^*(\hat{G})$  を、 $L^1$  環の enveloping  $C^*$  環として定める。

まず  $L_\omega^1(\hat{G})$  を  $R(G)_*$  つまり  $R(G)$  の predual で、通常の Banach 空間の構造を持つが積は  $\langle \phi \circ \psi, x \rangle = \langle \phi \otimes \psi, \delta_G(x)\omega \rangle$  ( $\phi, \psi \in R(G)_*, x \in R(G)$ ) で与えられ、対合は  $\phi^\dagger = \alpha\phi^*$  で与えられるものとする。すると、 $L_\omega^1(\hat{G})$  は単位的 Banach  $*$  環となる。

$L_\omega^1(\hat{G})$  の  $*$  表現と、 $\hat{G}$  の  $\omega$  表現との関係について、次の結果が得られる。 $\omega$  を  $\hat{G}$  の正規化されたコサイクルとすると、 $\phi \in L_\omega^1(\hat{G}), \xi \in B(H)_*$  に対して

$$\langle \pi(\phi), \xi \rangle = \langle W, \xi \otimes \phi \rangle$$

という関係によって、 $L_\omega^1(\hat{G})$  の unital  $*$  表現と、 $\hat{G}$  の  $H$  への  $\omega$  表現との 1 対 1 対応ができる。このことの証明で肝心なのは、 $\hat{G}$  の正則  $\omega$  表現と  $L_\omega^1(\hat{G})$  上の canonical trace との関係を GNS 構

成を使って調べることである。 $G$  の  $L_\omega^1(\hat{G})$  への作用についての一般的な事実から、 $L_\omega^1(\hat{G})$  上の忠実な trace  $Tr$  が定義されることがわかる。

$\pi_\omega$  を  $Tr$  に対して GNS 構成を適用することで得られる  $L_\omega^1(\hat{G})$  の表現とする。この  $\pi_\omega$  は自然に Hilbert 空間  $L^2(G)$  上に実現できる。すると、 $\hat{G}$  の  $L^2(G)$  上の正則  $\omega$  表現と、 $\langle \pi_\omega(\phi), \xi \rangle = \langle W, \xi \otimes \phi \rangle$  によって対応する  $L_\omega^1(\hat{G})$  の  $L^2(G)$  への表現  $\pi_\omega$  は、 $G$  の  $B(L^2(G))$  への作用  $Ad\lambda(g)$  に対して同変な表現であり、さらに  $Tr$  は  $L^2(G)$  における定数関数 1 から定まる行列係数であることから、 $\pi_\omega$  は  $L_\omega^1(\hat{G})$  の忠実な表現となる。

$G$  が通常のコンパクト群の場合、このようにして得られた  $L_\omega^1(\hat{G})$  の情報から、コサイクル  $\omega$  と  $\sigma\omega$  との関係について、以下のことがわかる。コサイクル  $\omega$  に関する次の条件は同値である。

- $\omega$  は対称的、つまり  $\sigma\omega = \omega$
- $\omega$  は自明
- $L_\omega^1(\hat{G})$  は可換
- $\pi_\omega(\hat{G})''$  は可換

そして、 $\pi_\omega(\hat{G})''$  と  $\pi_{\sigma\omega}(\hat{G})''$  は  $B(L^2(G))$  において互いに commutant になっている。

最後に  $L_\omega^1(\hat{G})$  の enveloping  $C^*$  環  $C_\omega^*(\hat{G})$  の性質をまとめる。

- $G$  の  $L_\omega^1(\hat{G})$  への作用は、 $C_\omega^*(\hat{G})$  上の強連続な作用に拡張される。
- 正則表現  $\pi_\omega$  は  $C_\omega^*(\hat{G})$  上で忠実であり、 $C_\omega^*(\hat{G})$  は  $\pi_\omega(\hat{G})''$  のノルムについて連続な  $C^*$  環となる。
- $C_\omega^*(\hat{G}) \rtimes G = \mathbb{K}$  ( $\mathbb{K}$  はコンパクト作用素のなす環を表す。)
- $C_\omega^*(\hat{G})$  は核型な  $C^*$  環である。一般の量子群  $G$  の場合には  $G$  が余従順性をみたすとき  $C_\omega^*(\hat{G})$  は核型となる。

## 5 例

$G = SU(2)$  の場合、 $\alpha: SU(2) \rightarrow Aut(M)$  を、 $SU(2)$  の既約表現  $\pi$  のコピーが少なくとも 1 つ含まれるようなエルゴード作用とすると、 $M \simeq L^\infty(G)$  がわかる。つまり  $SU(2)$  は非自明な full multiplicity ergodic action をもたない。このことは、 $\pi$  に対して  $\alpha_g(M) = M\pi(g)$  となるユニタリ固有行列  $M$  が、 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$  となることから議論できる。

$G = SU(3)$  や  $G = SU(2) \times SU(2)$  の場合、そのすべての full multiplicity ergodic action は、極大トーラスから誘導される。



## 参考文献

- [NT11] Sergey Neshveyev and Lars Tuset, *On second cohomology of duals of compact groups*, Internat. J. Math. **22** (2011), no. 9, 1231–1260.
- [NT13] Sergey Neshveyev and Lars Tuset, *Compact quantum groups and their representation categories*, Cours Spécialisés [Specialized Courses], vol. 20, Société Mathématique de France, Paris, 2013.
- [Tom08] Reiji Tomatsu, *Compact quantum ergodic systems*, J. Funct. Anal. **254** (2008), no. 1, 1–83.
- [Was88a] Antony Wassermann, *Ergodic actions of compact groups on operator algebras. II. Classification of full multiplicity ergodic actions*, Canad. J. Math. **40** (1988), no. 6, 1482–1527.
- [Was88b] Antony Wassermann, *Coactions and Yang-Baxter equations for ergodic actions and subfactors*, Operator algebras and applications, Vol. 2, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 136, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988, pp. 203–236.

# $\mathbb{Z}^d$ サブシフトにおける Brudno の定理

布田 徹\* (北海道大学)

## 概要

Brudno の定理とは、位相力学系のエルゴード的測度において、その Kolmogorov-Sinai エントロピー (KS エントロピー) と、Kolmogorov 複雑度の概念に基づいて定義される「軌道複雑度」がほとんどいたるところ一致することを主張する定理である。本稿では位相力学系として特に記号力学系の場合を考え、 $\mathbb{Z}^d$ -action の Brudno の定理を紹介する。また、その応用として、Kolmogorov 複雑度を用いて  $d$  次元 Ising モデルの圧力関数を表せることをみる。本研究は戸ノ崎美穂氏 (北海道大学) との共同研究に基づく。

**Keywords.** Brudno's theorem, Kolmogorov-Sinai entropy, Kolmogorov complexity, subshifts,  $\mathbb{Z}^d$ -action, pressure.

## 1 はじめに

A. A. Brudno は、位相力学系の点が描く「軌道複雑度」を Kolmogorov 複雑度の考えを用いて定義し、その「軌道複雑度」と KS エントロピーの同等性を明らかにした [2, THEOREM 3.1]。本稿では、一般の位相力学系ではなく、より扱いやすい記号力学系のサブシフトを考え、その場合の Brudno の定理を考える。以下、単に Brudno の定理といった場合、記号力学系のサブシフトにおける Brudno の定理を指すことにする。また、[2] においてシフトの作用は 1 次元であったが、本稿では  $d$  次元のシフト作用を扱う。 $\mathbb{Z}^d$ -action に Brudno の定理を拡張しようという部分的な試みとして [8] がある。S. G. Simpson は  $\mathbb{Z}^d$ -action の記号力学系において、「軌道複雑度」と位相エントロピーが一致する特別な点の存在を示した [8]。我々は、[3] において、エルゴード的測度に対して、ほとんどいたるところ「軌道複雑度」と KS エントロピーが等しいことを示し、Brudno の定理を  $\mathbb{Z}^d$ -action へと拡張した。 $\mathbb{Z}^d$ -action に拡張したことにより、物理的に興味のある  $d$  次元 Ising モデルの圧力関数を Brudno の定理を用いて表現することができる。

以下、Section 2 で、エルゴード理論、アルゴリズム的情報理論、記号力学系から主定理に必要な最小限の準備をし、Section 3 で主定理とその応用を述べる。

---

\* E-mail: t-fuda@math.sci.hokudai.ac.jp

## 2 準備

本稿を通して  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ ,  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ,  $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$  とし、 $d \in \mathbb{N}$  を任意に固定する。さらに、 $G := \mathbb{Z}^d$  or  $G := \mathbb{Z}_+^d$  とし、任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$\Lambda_n := \{g = (g_i)_{i=1}^d \in G : \forall i \in \{1, \dots, d\}, |g_i| < n\}$$

と定義する。 $|\cdot|$  によって集合の濃度を表すことにすると、明らかに

$$|\Lambda_n| = \begin{cases} (2n-1)^d & (G = \mathbb{Z}^d), \\ n^d & (G = \mathbb{Z}_+^d), \end{cases}$$

である。

### 2.1 エルゴード理論

**定義 2.1** (保測力学系)  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  を確率空間とする。 $X$  上の写像の族  $\mathcal{T} = (T^g)_{g \in G}$  が次の条件を満たすとする：

1.  $\mathcal{T}$  は群  $G$  の  $X$  上の可測な作用。(i.e. 任意の  $g \in G$  に対して  $T^g : X \rightarrow X$  は可測であり、 $T^0 = I_X$  かつ  $\forall g, g' \in G, T^{g+g'} = T^g \circ T^{g'}$ )
2.  $\mu$  は  $\mathcal{T}$ -不変。(i.e.  $\forall g \in G, \forall A \in \mathfrak{B}, \mu(T^{-g}A) = \mu(A)$ )

このとき、四つ組  $(X, \mathfrak{B}, \mu, \mathcal{T})$  を保測力学系という。

保測力学系  $(X, \mathfrak{B}, \mu, \mathcal{T})$  に対して、 $\mathcal{I}_\mu(\mathcal{T}) := \{A \in \mathfrak{B} : \forall g \in G, \mu(T^{-g}A \Delta A) = 0\}$  とする。 $\mathcal{I}_\mu(\mathcal{T})$  の元を  $\mathcal{T}$ -不変 (mod  $\mu$ ) 集合という。

**定義 2.2** (エルゴード性)  $(X, \mathfrak{B}, \mu, \mathcal{T})$  を保測力学系とする。このとき、任意の  $A \in \mathcal{I}_\mu(\mathcal{T})$  に対して、 $\mu(A) = 0$  または  $\mu(A) = 1$  が成り立つとき、 $(X, \mathfrak{B}, \mu, \mathcal{T})$  はエルゴード的であるという。

**定義 2.3** ( $\mu$ -分割)  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  を確率空間とする。可測な集合族  $\alpha = \{A_i : i \in I\} \subset \mathfrak{B}$  は次の条件を満たすとき  $X$  の  $\mu$ -分割であるという：

$$\mu(A_i \cap A_j) = 0 \ (i \neq j), \ \mu\left(X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i\right) = 0 \ \text{and} \ \mu(A_i) > 0 \ (\forall i \in I).$$

したがって、 $X$  の  $\mu$ -分割  $\alpha$  は高々可算である。特に、 $|I| < \infty$  であるとき、 $\alpha$  は有限  $\mu$ -分割であるという。 $\alpha, \beta$  を  $X$  の  $\mu$ -分割であるとする。このとき、 $\alpha$  と  $\beta$  の細分を

$$\alpha \vee \beta := \{A \cap B : A \in \alpha, B \in \beta, \mu(A \cap B) > 0\}.$$

と定義する。 $\alpha \vee \beta$  も  $\mu$ -分割である。

**定義 2.4** ( $\mu$ -分割の情報量とエントロピー)  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  を確率空間とし、 $\alpha$  を  $X$  の  $\mu$ -分割であるとする。このとき、 $\alpha$  の情報量とは次式で定義される可測関数のことである：

$$I_\alpha(x) := - \sum_{A \in \alpha} \log_2 \mu(A) \cdot 1_A(x).$$

$\alpha$  のエントロピーとは次式で定義される平均情報量のことである：

$$H(\alpha) := \int_X I_\alpha d\mu = \sum_{A \in \alpha} \varphi(\mu(A)).$$

ここで  $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  は次式で定義される関数である：

$$\varphi(t) := \begin{cases} -t \log_2 t & (t > 0), \\ 0 & (t = 0). \end{cases}$$

ここでは Kolmogorov 複雑性の理論との整合性を考慮し、対数の底を 2 にしている。

**定義 2.5** (分割に関する保測力学系のエントロピー)  $(X, \mathfrak{B}, \mu, \mathcal{T})$  を保測力学系とし、 $\alpha$  を  $X$  の  $\mu$ -分割とする。各  $g \in G$  に対して、 $T^{-g}\alpha := \{T^{-g}A : A \in \alpha\}$  とし、有限部分集合  $\Lambda \subset G$  に対して、 $\alpha^\Lambda := \bigvee_{g \in G} T^{-g}\alpha$  と定義する。保測力学系  $(X, \mathfrak{B}, \mu, \mathcal{T})$  の分割  $\alpha$  に関するエントロピー  $h(\mu, \alpha, \mathcal{T})$  を次式で定義する\*：

$$h(\mu, \alpha, \mathcal{T}) := \inf_{n > 0} \frac{1}{|\Lambda_n|} H(\alpha^{\Lambda_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} H(\alpha^{\Lambda_n}).$$

**定義 2.6** (Kolmogorov-Sinai エントロピー) 保測力学系  $(X, \mathfrak{B}, \mu, \mathcal{T})$  の Kolmogorov-Sinai entropy エントロピー (KS エントロピー) を次式で定義する：

$$h_{\mathcal{T}}(\mu) := \sup\{h(\mu, \alpha, \mathcal{T}) : \alpha \text{ is a } \mu\text{-partition with } H(\alpha) < \infty\}.$$

**定義 2.7** ( $\mu$ -生成分割)  $(X, \mathfrak{B}, \mu, \mathcal{T})$  を保測力学系とする。 $\alpha^G = \mathfrak{B} \pmod{\mu}$  が成り立つとき、 $\mu$ -分割  $\alpha$  を  $\mu$ -生成分割であるという。

**定理 2.8** (Kolmogorov-Sinai)  $(X, \mathfrak{B}, \mu, \mathcal{T})$  を保測力学系とし、 $\alpha$  を  $\mu$ -生成分割とする。このとき、 $H(\alpha) < \infty$  ならば  $h_{\mathcal{T}}(\mu) = h(\mu, \alpha, \mathcal{T})$  が成り立つ。

*Proof.* See [4]. ■

**定義 2.9** (位相力学系) 組  $(X, \mathcal{T})$  は次の条件を満たすとき、位相力学系であるという：

1.  $X$  はコンパクト距離化可能空間である。
2.  $\mathcal{T} = (T^g)_{g \in G}$  は  $X$  上の  $G$  の連続な作用である。(i.e. 任意の  $g \in G$  に対して  $T^g : X \rightarrow X$  は連続であり、 $T^0 = I_X$  かつ  $\forall g, g' \in G, T^{g+g'} = T^g \circ T^{g'}$ )

---

\* 二つ目の等号は定理として導き出される。詳しくは [4] を参照せよ。

位相力学系  $(X, \mathcal{T})$  に対して、 $\mathfrak{B}(X)$  を  $X$  の Borel  $\sigma$ -代数とする。 $\mathcal{T}$  は  $X$  上の  $G$  の可測な作用でもあることに注意。さらに、Borel-可測空間  $(X, \mathfrak{B}(X))$  に対して、 $M(X)$  を  $(X, \mathfrak{B}(X))$  上のすべての確率測度からなる集合、 $M(X, \mathcal{T})$  を  $(X, \mathfrak{B}(X))$  上のすべての  $\mathcal{T}$ -不変な確率測度からなる集合、 $EM(X, \mathcal{T})$  を  $(X, \mathfrak{B}(X))$  上のすべてのエルゴード的確率測度からなる集合とする。 $\mathcal{T}$ -不変な確率測度の存在は次の定理により保障される。

**定理 2.10 (Krylov-Bogolubov)**  $(X, \mathcal{T})$  を位相力学系とする。このとき、 $X \neq \emptyset$  ならば  $M(X, \mathcal{T}) \neq \emptyset$  である。

*Proof.* See [4]. ■

$\mu \in M(X, \mathcal{T})$  ならば  $(X, \mathfrak{B}(X), \mu, \mathcal{T})$  は明らかに保測力学系である。

**定義 2.11 (上半連続関数)**  $Y$  を位相空間とするとき、

$$USC(Y) := \{f : Y \rightarrow [-\infty, \infty) : \forall c \in \mathbb{R}, \{y \in Y : f(y) < c\} \text{ is open}\},$$

と定義し、 $USC(Y)$  の元を上半連続関数という。

**定義 2.12 (圧力、位相エントロピー、平衡状態)**  $(X, \mathcal{T})$  を位相力学系とし、 $\psi \in USC(X)$ ,  $\inf \psi > -\infty$  とする。このとき、 $\psi$  の圧力を次式で定義する：

$$p(\psi) := \sup_{\mu \in M(X, \mathcal{T})} (h_{\mathcal{T}}(\mu) + \mu(\psi))$$

ただし、 $\mu(\psi) := \int_X \psi(x) d\mu(x)$  である。測度  $\nu \in M(X, \mathcal{T})$  は、次式を満たすとき  $\psi \in USC(X)$  に関する平衡状態であるという：

$$p(\psi) = h_{\mathcal{T}}(\nu) + \nu(\psi).$$

特に  $p(0) = \sup_{M(X, \mathcal{T})} h_{\mathcal{T}}(\mu)$  を位相力学系  $(X, \mathcal{T})$  の位相エントロピーと呼ぶ。

**定理 2.13 (エルゴード分解)**  $(X, \mathcal{T})$  を位相力学系とする。各  $\mu \in M(X, \mathcal{T})$  に対して、 $M(X, \mathcal{T})$  上の測度  $\rho$  が唯一つ存在し、

1. 任意の有界可測関数  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  に対して、

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_{EM(X, \mathcal{T})} \left\{ \int_X f(x) d\nu(x) \right\} d\rho(\nu),$$

2.  $\rho(EM(X, \mathcal{T})) = 1$ .

任意の可測集合  $A \in \mathfrak{B}(X)$  に対して  $\mu(A) = \int_{EM(X, \mathcal{T})} \nu(A) d\rho(\nu)$  であるから、 $\mu = \int_{EM(X, \mathcal{T})} \nu d\rho(\nu)$  と表し、これを  $\mu$  のエルゴード分解と呼ぶ。

*Proof.* See [4, 7, 9].

定理 2.14 (Jacobs)  $(X, \mathcal{T})$  を位相力学系とする。  $\mu \in M(X, \mathcal{T})$  に対してそのエルゴード分解を  $\mu = \int_{EM(X, \mathcal{T})} \nu d\rho(\nu)$  とするとき、次が成り立つ：

$$h_{\mathcal{T}}(\mu) = \int_{EM(X, \mathcal{T})} h_{\mathcal{T}}(\nu) d\rho(\nu).$$

*Proof.* See [4, 9].

## 2.2 Kolmogorov 複雑性

$A$  を空でない有限集合とする。一般性を失うことなく  $A := \{0, 1, \dots, N\}$  ( $N \in \mathbb{Z}_+$ ) としてよい。 $A$  上のすべての有限記号列を

$$A^* := \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n = \{\lambda, 0, 1, \dots, N, 00, 01, \dots, 0N, 10, \dots, 1N, \dots, NN, 000, \dots\}$$

と定義する。ここで、 $A^0 = \{\lambda\}$  であり、 $\lambda$  は空列を表すとする。次の全単射  $I_{A^* \rightarrow \#} : A^* \rightarrow \#$  ( $\# \in \{\mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}\}$ ) を用いて、 $A^*$  と  $\mathbb{Z}_+$  または  $\mathbb{Z}$  を同一視することにする。

$$I_{A^* \rightarrow \mathbb{Z}_+}(x) := \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} (N+1)^k + \sum_{k=1}^n a_k (N+1)^{n-k}, & x = a_1 a_2 \cdots a_n \in A^n \ (n \in \mathbb{N}), \\ 0, & x = \lambda, \end{cases}$$

$$I_{A^* \rightarrow \mathbb{Z}}(x) := \alpha(I_{A^* \rightarrow \mathbb{Z}_+}(x))$$

ここで、任意の  $n \in \mathbb{Z}_+$  に対して  $\alpha(n) := (-1)^{n+1} \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$  である。たとえば、 $A = \{0, 1\}$  の場合は次のようになる：

$x$	$\lambda$	0	1	00	01	10	11	000	001	...
$I_{\{0,1\}^* \rightarrow \mathbb{Z}_+}(x)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$x$	$\lambda$	0	1	00	01	10	11	000	001	...
$I_{\{0,1\}^* \rightarrow \mathbb{Z}}(x)$	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	...

簡単のため、 $I_{\# \rightarrow A^*} := I_{A^* \rightarrow \#}^{-1}$  とする。

二つの記号列をつなげる写像  $A^* \times A^* \ni (x, y) \mapsto xy \in A^*$  を接続という。記号列  $x \in A^*$  の長さを  $l(x)$  で表す。明らかに、任意の  $x, y \in A^*$  に対して  $l(xy) = l(x) + l(y)$  である。

$x, y \in A^*$  に対して、ある  $z \in A^*$  が存在して  $y = xz$  であるとき、 $x$  は  $y$  の接頭語 (prefix) であるという。部分集合  $A \subset A^*$  は、任意の元  $x \in A$  に対して、 $A \setminus \{x\}$  の元が  $x$  の接頭語にならないとき、prefix-free であるという。 $x \in A^*$  に対して

$$\bar{x} := \underbrace{1 \cdots 1}_{l(x)} 0x$$

とする。  $l(\bar{x}) = 2l(x) + 1$  である。

$A_1, A_2$  を空でない有限集合とする。  $\mathcal{D} \subset A_1^*$  に対して写像  $f: \mathcal{D} \rightarrow A_2^*$  を考える。  $\mathcal{D} \subsetneq A_1^*$  であるとき、  $f$  を部分関数といい、  $f: A_1^* \rightsquigarrow A_2^*$  とかくことにする。  $\mathcal{D} = A_1^*$  であるとき、  $f$  を全域関数という。 部分関数  $\phi: A_1^* \rightsquigarrow A_2^*$  は、あるチューリングマシン  $M$  によって計算されるとき、再帰的であるという。 部分再帰関数  $\phi: A_1^* \rightsquigarrow A_2^*$  の定義域  $\text{dom}(\phi)$  が prefix-free であるとき、  $\phi$  を部分再帰 prefix 関数という。

$\phi: \{0, 1\}^* \rightsquigarrow \mathcal{A}^*$  を部分再帰 prefix 関数とする。 このとき、任意の  $x \in \mathcal{A}^*$  に対して、  $x$  の  $\phi$  に関する複雑度  $K_\phi(x)$  を

$$K_\phi(x) := \begin{cases} \min\{l(p) : p \in \phi^{-1}(x)\}, & (\phi^{-1}(x) \neq \emptyset), \\ \infty & (\phi^{-1}(x) = \emptyset) \end{cases}$$

によって定義する。 さらに、すべての部分再帰 prefix 関数  $\psi: \{0, 1\}^* \rightsquigarrow \mathcal{A}^*$  に対して、ある定数  $c_{\phi, \psi} \in \mathbb{R}$  が存在して、

$$\forall x \in \mathcal{A}^*, \quad K_\phi(x) \leq K_\psi(x) + c_{\phi, \psi}$$

が成り立つとき、  $\phi$  は additively optimal であるという。

**定理 2.15** additively optimal な部分再帰 prefix 関数が存在する。

*Proof.* See [5].

additively optimal な部分再帰 prefix 関数は全射である。

**定義 2.16** 適当な additively optimal な部分再帰 prefix 関数  $\phi: \{0, 1\}^* \rightsquigarrow \mathcal{A}^*$  を一つ固定する。 このとき、  $x \in \mathcal{A}^*$  の prefix Kolmogorov complexity を次のように定義する：

$$K(x) := K_\phi(x).$$

### 2.3 $\mathbb{Z}^d$ サブシフト

$\Sigma$  を空でない有限集合とし、  $\Omega := \Sigma^G$  とする。  $\Sigma$  の離散位相の積位相によって  $\Omega$  に位相を与えると、チコノフの定理により、  $\Omega$  はコンパクト位相空間になることがわかる。 この位相は、任意の  $\omega = (\omega_g)_{g \in G}, \omega' = (\omega'_g)_{g \in G} \in \Omega$  に対して、次のように定められる距離  $d$  が生成する位相でもある：

$$d(\omega, \omega') := 2^{-n(\omega, \omega')}, \quad n(\omega, \omega') := \sup\{n \in \mathbb{N} : \forall g \in \Lambda_n, \omega_g = \omega'_g\}.$$

したがって、  $\Omega$  はコンパクト距離空間である。 任意の  $n \in \mathbb{N}$  と任意の  $s \in \Sigma^{\Lambda_n}$  に対して、  $s$  のシリンダー集合を  $\llbracket s \rrbracket := \{\omega \in \Omega : \omega \upharpoonright \Lambda_n = s\}$  と定める。  $\llbracket s \rrbracket$  は開かつ閉集合である。 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して、  $\mathcal{C}_n$  を  $\Sigma^{\Lambda_n}$  上のシリンダー集合の族

$$\mathcal{C}_n := \{\llbracket s \rrbracket : s \in \Sigma^{\Lambda_n}\}$$

とし、  $\mathcal{C} := \bigcup_n \mathcal{C}_n$  とする。  $\mathcal{C}$  は Borel  $\sigma$ -代数  $\mathfrak{B}(\Omega)$  を生成する。 次に、

$$\Sigma^{\Lambda^*} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma^{\Lambda_n}$$

とおく。ここで、 $\Sigma^{\Lambda_0} := \{\lambda\}$  であり、任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して、 $\Sigma^{\Lambda_n} := \{(\omega_g)_{g \in \Lambda_n} : \forall g \in \Lambda_n, \omega_g \in \Sigma\}$  である。任意の部分集合  $V \subset \Sigma^{\Lambda^*}$  に対して、 $\llbracket V \rrbracket := \bigcup_{s \in V} \llbracket s \rrbracket$  とする。

写像  $\sigma^g : \Omega \rightarrow \Omega$  を  $g \in G$  によるシフト、つまり、任意の  $\omega = (\omega_g)_{g \in G}$  に対して  $(\sigma^g \omega)_i := \omega_{i+g}$  であるものとする。 $\sigma := (\sigma^g)_{g \in G}$  とすると、 $\sigma$  は  $\Omega$  上の  $G$  の連続な作用であり、したがって、 $(\Omega, \sigma)$  は位相力学系である。 $\sigma : G \times \Omega \ni (g, \omega) \mapsto \sigma^g(\omega) \in \Omega$  であることに注意。

空でない部分集合  $S \subset \Omega$  は、シフト不変 (i.e.  $\forall g \in G, \sigma^g(S) = S$ ) かつ  $S$  が閉であるとき、サブシフトであるという。 $S \subset \Omega$  がサブシフトであるとき、 $(S, \sigma \upharpoonright (G \times S))$  は位相力学系である。

関数  $f : G \rightarrow \mathbb{Z}_+$  は、部分再帰 prefix 関数  $\phi : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$  が存在して、任意の  $(x_1, \dots, x_d) \in G$  に対して次のようにかけるとき、計算可能であるという：

$$f(x_1, \dots, x_d) = (I_{\{0,1\}^* \rightarrow \mathbb{Z}_+} \circ \phi) \left( \overline{I_{\# \rightarrow \{0,1\}^*}(x_1)} \cdots \overline{I_{\# \rightarrow \{0,1\}^*}(x_{d-1})} I_{\# \rightarrow \{0,1\}^*}(x_d) \right)$$

ただし、

$$\# = \begin{cases} \mathbb{Z}, & G = \mathbb{Z}^d, \\ \mathbb{Z}_+, & G = \mathbb{Z}_+^d. \end{cases}$$

全単射な計算可能関数  $f : G \rightarrow \mathbb{Z}_+$  で、任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して、

$$f(\Lambda_n) = \{0, 1, \dots, |\Lambda_n| - 1\}$$

であるようなものを一つ固定し、写像  $\mathcal{G} : \Sigma^{\Lambda^*} \rightarrow \Sigma^*$  を次のように定義する：

$$\mathcal{G}(s) := \begin{cases} s_{f^{-1}(0)} \cdots s_{f^{-1}(|\Lambda_n|-1)}, & s = (s_g)_{g \in \Lambda_n} \in \Sigma^{\Lambda_n} \ (n \in \mathbb{N}), \\ \lambda, & s = \lambda. \end{cases}$$

$s \in \Sigma^{\Lambda^*}$  の prefix Kolmogorov complexity を

$$K(s) := K(\mathcal{G}(s))$$

と定義する。

**定義 2.17 (Kolmogorov complexity density)** 任意の  $\omega \in \Omega$  に対して、upper Kolmogorov complexity density と lower Kolmogorov complexity density をそれぞれ

$$\overline{\mathcal{K}}(\omega) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{K(\omega \upharpoonright \Lambda_n)}{|\Lambda_n|}, \quad \underline{\mathcal{K}}(\omega) := \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{K(\omega \upharpoonright \Lambda_n)}{|\Lambda_n|}$$

と定義する。もし  $\overline{\mathcal{K}}(\omega) = \underline{\mathcal{K}}(\omega)$  であるとき、この量を単に  $\mathcal{K}(\omega)$  と表す。

**注意 2.18**  $\overline{\mathcal{K}}(\omega)$  と  $\underline{\mathcal{K}}(\omega)$  は、prefix Kolmogorov complexity を定義する際に用いる additively optimal な部分再帰 prefix 関数  $\phi$  と  $\mathcal{G}$  の選び方に依存しない。



### 3 主定理とその応用

以上の準備のもと、主定理を述べる。 $\Sigma$  を空でない有限集合とし、 $S \subset \Omega$  ( $:= \Sigma^G$ ) をサブシフトとする。さらに、 $\Omega$  上の  $G$  のシフト作用  $\sigma$  の  $S$  への制限を  $\varsigma$  とする。このとき、 $(S, \varsigma)$  は位相力学系である。

**定理 3.1 (Brudno's theorem for  $\mathbb{Z}^d$  (or  $\mathbb{Z}_+^d$ ) subshifts)**  $\mu \in EM(S, \varsigma)$  ならば、次が成り立つ：

$$\mathcal{K}(\omega) = h_\varsigma(\mu), \quad \mu\text{-a.e. } \omega \in S. \quad (3.1)$$

証明は省略する。詳細は [3] を参照せよ。

**例 3.2 (Bernoulli シフト)**  $\mathbb{Z}^d$  または  $\mathbb{Z}_+^d$  シフト空間を、以前と同じ記号  $(\Omega, \sigma)$  で表す。このとき、 $\Sigma$  上の確率分布  $q = (q_i : i \in \Sigma)$  に対応する  $\mathfrak{B}(\Omega)$  上の Bernoulli 測度を  $\mu := q^{\times G}$  とする。このとき  $\mu$  はエルゴード的であり、 $h_\sigma(\mu) = \sum_{i \in \Sigma} \varphi(q_i)$  であるから、定理 3.1 より  $\mu$ -a.e.  $\omega \in \Omega$  に対して次が成り立つ：

$$\mathcal{K}(\omega) = \sum_{i \in \Sigma} \varphi(q_i).$$

**定理 3.3**  $\mu \in M(S, \varsigma)$  ならば、次が成り立つ：

$$h_\varsigma(\mu) = \mu(\mathcal{K}). \quad (3.2)$$

*Proof.*  $\mu = \int_{EM(S, \varsigma)} \nu d\rho(\nu)$  をエルゴード分解とすると、定理 2.13、定理 2.14、定理 3.1 より、

$$\int_S \mathcal{K}(\omega) d\mu(\omega) = \int_{EM(S, \varsigma)} \left\{ \int_S \mathcal{K}(\omega) d\nu(\omega) \right\} d\rho(\nu) = \int_{EM(S, \varsigma)} h_\varsigma(\nu) d\rho(\nu) = h_\varsigma(\mu).$$

■

定理 3.3 と圧力の定義より、圧力の  $\mathcal{K}$  を用いた表示式が得られる。

**定理 3.4**  $\psi \in USC(S)$ ,  $\inf \psi > -\infty$  とする。このとき、 $\psi$  の圧力は次のように表すことができる：

$$p(\psi) = \sup_{\mu \in M(S, \varsigma)} \mu(\mathcal{K} + \psi).$$

特に、位相エントロピーは  $\sup_{\mu \in M(S, \varsigma)} \mu(\mathcal{K})$  である。 $\mu \in M(S, \varsigma)$  が  $\psi$  に対する平衡状態であるとすると、

$$p(\psi) = \mu(\mathcal{K} + \psi)$$

が成り立つ。

**例 3.5** ( $d$ 次元 Ising モデル)  $d \in \mathbb{N}$ ,  $\Sigma := \{+1, -1\}$  とする。ここで、 $\Sigma$  の元  $+1, -1$  は、それぞれ  $G := \mathbb{Z}^d$  上の「格子気体」の各点における「上向きスピン」、「下向きスピン」を表している。 $\Omega := \Sigma^G$  を配位空間、 $\mathcal{T}$  を  $\Omega$  上の  $G$  のシフト作用とする。 $d$ 次元 Ising モデルに対して、局所エネルギー関数  $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  を次のように定義する：

$$\psi(\omega) := -\beta \left( -\sum_{j=1}^d (\omega_{\mathbf{0}}\omega_{e_j} + \omega_{\mathbf{0}}\omega_{-e_j}) - B\omega_{\mathbf{0}} \right), \quad \omega \in \Omega.$$

ここで、 $\mathbf{0} := (0, \dots, 0)$ ,  $e_j := (0, \dots, \overset{j\text{th}}{1}, \dots, 0) \in G$  であり、 $-\sum_{j=1}^d (\omega_{\mathbf{0}}\omega_{e_j} + \omega_{\mathbf{0}}\omega_{-e_j})$  は隣接スピン間の相互作用、 $-B\omega_{\mathbf{0}}$  は格子点  $\mathbf{0}$  のスピン上の磁場  $B \in \mathbb{R}$  の効果、 $\beta \geq 0$  は逆温度をそれぞれ表す。 $\psi$  に対する平衡状態  $\mu$  が存在し、定理 3.4 を用いるとこの  $\mu$  に対して圧力は  $p(\psi) = \mu(\mathcal{K} + \psi)$  となる。

## 参考文献

- [1] Benci, V., Bonanno, C., Galatolo, S., Menconi, G., Virgilio, M.: Dynamical systems and computable information. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B* **4**, 935–960 (2004)
- [2] Brudno, A.A.: Entropy and the complexity of the trajectories of a dynamical system. *Trans. Mosc. Math. Soc.* **2**, 127–151 (1983)
- [3] Fuda, T., Tonozaki, M.: Brudno’s theorem for  $\mathbb{Z}^d$  ( $\mathbb{Z}_+^d$ ) subshifts. arXiv:1508.05506.
- [4] Keller, G.: *Equilibrium States in Ergodic Theory*. Cambridge University Press (1998)
- [5] Li, M., Vitányi, P.: *An Introduction to Kolmogorov Complexity and Its Applications*, 3rd edn. Springer (2008)
- [6] Ornstein, D., Weiss, B.: The Shannon-McMillan-Breiman theorem for a class of amenable groups. *Israel J. Math.* **44**, 53–60 (1983)
- [7] Pollicott, M., Yuri, M.: *Dynamical Systems and Ergodic Theory*. Cambridge University Press (1998)
- [8] Simpson, S.G.: Symbolic Dynamics: Entropy = Dimension = Complexity. *Theory Comput. Syst.* **56**, 527–543 (2015)
- [9] Walters, P.: *An Introduction to Ergodic Theory*. Springer (1982)

# 一般化されたシュタルクハミルトニアンに対する 固有値の非存在

板倉恭平 (Kyohei ITAKURA)  
神戸大学大学院理学研究科 数学専攻

## 1 導入

通常のシュタルクハミルトニアンは次のように表される.

$$H = p^2 - E \cdot x + q(x) \quad \text{on } L^2(\mathbb{R}^n).$$

ここで,  $p = -i\nabla = (-i\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -i\frac{\partial}{\partial x_n})$  であり,  $0 \neq E \in \mathbb{R}^n$  は一様な電場に対応する定ベクトルである.  $-E \cdot x$  をシュタルクポテンシャルと呼ぶ.  $q$  は摂動項である.  $q$  がある意味で  $p^2 - E \cdot x$  よりも小さいという条件の下で, 上述の  $H$  が固有値をもたないことはよく知られている事実である. 今回は, シュタルクポテンシャルの部分を一一般化したハミルトニアンを考えたときに得られた, 固有値の非存在について述べる.

## 2 仮定と結果

$V$  を実数値関数として, 全ハミルトニアン  $H$  を次のように定める.

$$H = p^2 + V \quad \text{on } L^2(\mathbb{R}^n).$$

さらに,  $V$  に対して以下の条件を仮定する.  $0 < \alpha < 1$  として

- (A)  $V = V_1 + V_2$  と分解できて,  $V_1 \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  であり, ある  $h \in \mathbb{R}^n$  が存在して,  $V_1 \geq -(h \cdot x)_+^\alpha$  が成り立つ. さらに,  $V_2 \in L^p(\mathbb{R}^n) + L^\infty(\mathbb{R}^n)$  であり,  $p$  は  $n \geq 4$  のとき  $p > \frac{n}{2}$  とし,  $n \leq 3$  のとき  $p = 2$  とする. ここで,  $x_+ = \max\{x, 0\}$  という記号を用いた.
- (B) (A) と同じ  $p$  に対して,  $V \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$  が成り立つ.
- (C)  $V$  は次を満たすような超関数型の導関数を持つ. (A) と同じ  $h$  に対して,  $-|h \cdot x|^{1-\alpha}(h \cdot \nabla V(x))$  が有界かつ, ある  $\delta, R > 0$  が存在して,  $h \cdot x \geq R$  に対して,  $-|h \cdot x|^{1-\alpha}(h \cdot \nabla V(x)) \geq \delta$  が成り立つ.

これらの条件は  $V_1$  として次のものを想定して定めている.

$$V_1(x) = \begin{cases} (-E \cdot x)^\alpha & (E \cdot x < 0), \\ -(E \cdot x)^\alpha & (E \cdot x \geq 0). \end{cases}$$

これは、シュタルクポテンシャルの中を  $\alpha$  に置き換えたものに相当し、この意味で、シュタルクポテンシャルの一般化となっている。ファリス・ラヴィンの定理により (例えば [RS II] を参照),  $H$  は条件 (A) の下で自己共役になる。条件 (B) は一意接続性を保証するために必要である ([ABG], [H], [JK], [SchS] を参照)。また、条件 (C) は直交変換を用いることで次の条件 (C') に還元される。

(C')  $V$  は次を満たすような超関数型の導関数を持つ。  $-|x_1|^{1-\alpha} \frac{\partial V(x)}{\partial x_1}$  が有界かつ、ある  $\delta, R > 0$  が存在して、  $x_1 \geq R$  に対して、  $-|x_1|^{1-\alpha} \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} \geq \delta$  が成り立つ。

以下が、得られた主結果である。

**定理 2.1**  $H = p^2 + V$  とし、  $V$  は条件 (A), (B), (C) を満たすとする。そのとき、  $H$  は固有値をもたない。

定理 2.1 は以下の 2 つの命題を組み合わせて示される。

**命題 2.2**  $H$  が固有関数  $\psi$  をもつとすると、任意の  $a \geq 0$  に対して  $e^{a(x_1)_+} \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$  が成り立つ。

**命題 2.3** 任意の  $a \geq 0$  に対して  $e^{a(x_1)_+} \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$  が成り立つような  $H$  の固有関数  $\psi$  は存在しない。

### 3 命題の証明のアウトライン

まず、命題 2.2, 命題 2.3 の証明に用いる関数や記法を導入する。なめらかな関数  $W(x_1)$  を

$$W(x_1) = \begin{cases} x_1 - R - \frac{1}{2} & (x_1 \geq R + 1), \\ 0 & (x_1 \leq R) \end{cases}$$

で、  $0 \leq W, 0 \leq W' \leq 1, 0 \leq W''$  が成り立つように定める。命題 2.2, 命題 2.3 を証明するためには、指数の中の  $(x_1)_+$  を上記の  $W(x_1)$  に置き換えたものについて示せばよい。また、もう一つなめらかな関数  $F(x_1)$  を

$$F(x_1) = \begin{cases} (x_1 - R)^{2-\alpha} & (x_1 \geq R + 1), \\ 0 & (x_1 \leq R) \end{cases}$$

で、  $0 \leq F, F', F''$  が成り立つように定める。命題 2.2 の証明には背理法を用いる。つまりある  $a > 0$  が存在して、

$$e^{aW} \psi \notin L^2$$

を仮定して矛盾を導く。命題 1.2 の証明の中で、この  $a$  は固定して考える。ここで、  $aW(x_1), F(x_1)$  を有界な関数で近似することを考える。  $t, s > 2R + 2$  なる  $t, s$  に対してなめらかな関数  $W_t(x_1), F_s(x_1)$  を次のように定める。まず  $W_t(x_1)$  は

$$W_t(x_1) = \begin{cases} aW(x_1) & (x_1 \leq t), \\ at & (x_1 \geq 2t) \end{cases}$$

かつ,  $W_t^{(k)}(x_1) = O(t^{-k+1})$  ( $k \geq 1$ ),  $W_t''(x_1) \leq 0$  ( $x_1 \geq R+1$ ),  $0 \leq W_t' \leq aW'$  を満たし,  $F_s(x_1)$  は

$$F_s(x_1) = \begin{cases} F(x_1) & (x_1 \leq s), \\ s^{2-\alpha} & (x_1 \geq 2s) \end{cases}$$

かつ,  $F_s^{(k)}(x_1) = O(s^{-k+2-\alpha})$  ( $k \geq 1$ ),  $0 \leq F_s' \leq F'$ ,  $F_s''(x_1)F'(x_1) - F_s'(x_1)F''(x_1) \leq 0$  ( $x_1 \geq R+1$ ) を満たす.  $t, s \rightarrow \infty$  のとき,  $W_t, F_s$  がそれぞれ  $aW, F$  に各点収束していることはすぐにわかる. また,  $W_t$  を用いると

$$\|e^{W_t\psi}\| \rightarrow \infty \quad (t \rightarrow \infty)$$

が成り立っていることに注意しておく. ここで,  $\psi_t = \frac{e^{W_t\psi}}{\|e^{W_t\psi}\|}$  と定め,  $\langle A \rangle_t = \langle \psi_t, A\psi_t \rangle$  という記法を用いる. さらに,

$$A^F = \frac{1}{2}(F'p_1 + p_1F')$$

と定める. また, なめらかな関数  $G$  に対して  $\psi_G = e^G\psi$  とし,  $\langle A \rangle_G = \langle \psi_G, A\psi_G \rangle$  とする. このとき, 次の2つの補題が成り立つ.

**補題 3.1**  $G, J$  をなめらかな関数とし,  $\psi_G \in \mathcal{D}([H, A^J]) \cap \mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(A^J) \cap \mathcal{D}(A^G)$  とする. さらに,  $G$  は有界な導関数を持つとする. そのとき次の等式が成り立つ.

$$\langle i[H, A^J] \rangle_G = -4\text{Re}\langle A^J A^G \rangle_G - 2\langle J'G'G'' \rangle_G.$$

**補題 3.2**  $u \in \mathcal{D}(H)$  とし,  $\langle B \rangle_u = \langle u, Bu \rangle$  と書くことにする. そのとき次が成り立つ.

$$\langle i[H, A^{F_s}] \rangle_u \rightarrow \langle i[H, A^F] \rangle_u \quad (s \rightarrow \infty).$$

ここでは, この2つの補題の証明は省略する ([Sig] の命題 2.2, 命題 2.4 を参照).

**命題 2.2** の証明のアウトライン.

まず, ある  $c > 0$  が存在して, 十分大きい  $t > 0$  に対して

$$\langle i[H, A^F] \rangle_t \geq c \tag{1}$$

が成り立つことを示す. これには, 交換子を直接計算することにより得られる次の式を用いる.

$$\langle i[H, A^F] \rangle_t = \langle -F'V' + 2p_1F''p_1 - \frac{1}{2}F^{(4)} \rangle_t.$$

一方で, 次が成り立つことを示す.

$$\langle i[H, A^F] \rangle_t \leq o(1) \quad (t \rightarrow \infty).$$

この評価は,  $J = F_s, G = W_t$  として補題 3.1 と補題 3.2 を用いることで示すことができる. しかしこれは (1) と矛盾する.  $\square$

命題 2.3 の証明のアウトライン.

命題 2.3 も背理法を用いて示す. つまり,  $\psi$  を  $H$  の固有関数として矛盾を導く. 命題 2.2 より,  $\psi$  は任意の  $a \geq 0$  に対して  $e^{aW}\psi \in L^2$  である. そこで, パラメータとして  $t$  の代わりに  $a$  を用いて,  $\psi_a = \frac{e^{aW}\psi}{\|e^{aW}\psi\|}$  と定め,  $\langle A \rangle_a = \langle \psi_a, A\psi_a \rangle$  という記法を用いる. まず, 命題 2.2 のときと同様に交換子を直接計算することで次の評価を導く.

$$\langle i[H, A^F] \rangle_a \geq c \quad (\exists c > 0). \quad (2)$$

一方で,  $J = F, G = aW$  として補題 3.1 を用いることで, 次の評価を導く.

$$\langle i[H, A^F] \rangle_a \leq o(1) \quad (a \rightarrow \infty).$$

しかしこれは (2) と矛盾する.  $\square$

## 参考文献

- [ABG] Amrein, W.O., Berthier, A.M., Georgescu, V.:  $L^p$ -inequalities for the Laplacian and unique continuation. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 31, 153-168 (1981)
- [H] Hörmander, L.: Uniqueness theorems for second order elliptic differential equations. Commun. Part. Diff. Eqns. 8, 21-64 (1983)
- [JK] Jerrison, D., Kenig, C. (with an Appendix by Stein, E.M.): Unique continuation and absence of positive eigenvalues for Schrödinger operators. Ann. Math. 121, 463-494 (1985)
- [RS] Reed, M., Simon, B.: Methods of modern mathematical physics II and IV, New York: Academic Press 1975 and 1978
- [SchS] Schechter, M., Simon, B.: Unique continuation for Schrödinger operators with unbounded potentials. J. Math. Anal. Appl. 77, 482-492 (1980)
- [Sig] Sigal, I.M.: Stark Effect in multielectron Systems: Non-Existence of Bound States. Commun. Math. Phys. 122, 1-22 (1989)

# 非線型波動方程式に対する初期値問題の解析

若狭 恭平 (Kyouhei Wakasa)

北海道大学大学院理学研究院数学部門, 日本学術振興会特別研究員 PD

e-mail : wakasa@math.sci.hokudai.ac.jp

## 1 序論

次の非線型波動方程式に対する初期値問題を考える.

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta_x u = |u|^p, & \text{in } \mathbf{R}^n \times [0, \infty), \\ u(x, 0) = f(x), \partial_t u(x, 0) = g(x), & \text{for } x \in \mathbf{R}^n, \end{cases} \quad (1)$$

ここで,  $n \geq 1$  は空間次元,  $u = u(x, t)$  は未知関数,  $f, g \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ ,  $p > 1$  である.

この初期値問題について, 小さい初期値  $(f, g)$  を与えた場合の時間大域解の存在と非存在に関する研究は, 空間 3 次元における John [10] の結果を始まりとする. それは,  $p > 1 + \sqrt{2}$  (優臨界) ならば, 十分小さい  $(f, g)$  に対して (1) の解は時間大域的に存在し,  $1 < p < 1 + \sqrt{2}$  (劣臨界) ならば, (1) の解は時間大域的には存在しないというものである.  $p = 1 + \sqrt{2}$  (臨界) のときは, Schaeffer [22] により解が時間大域的に存在しないことが示されている. John の研究以降, 他の空間次元において (1) の方程式を解析する取り組みが様々な研究者によって行われた. その中で Strauss [25] は次の予想を立てた. それは, 「 $n \geq 2$ ,  $p_0(n)$  を 2 次方程式  $(n-1)p^2 - (n+1)p - 2 = 0$  の正根とするとき,  $p > p_0(n)$  ならば十分小さい初期値に対して解は時間大域的に存在し, 他方,  $1 < p \leq p_0(n)$  ならば解は時間大域的には存在しない。」というものである. この予想は, 空間 2 次元において, Glassey [7], [8], 空間 4 次元以上の高次元空間では, Sideris [23], Rammaha [21], Georgiev & Lindblad & Sogge [5], Yordanov & Zhang [29], Zhou [34] らによって解決された. 現在ではこの予想はほぼ解決されている. 空間 1 次元の場合は, Kato [11] によってすべての  $p > 1$  に対して時間大域解が存在しないことが示されている. Strauss による予想を解決する研究と並行して, (1) の解の最大存在時間 (Lifespan) の評価を得る研究も行われた. 詳しくは, Lindblad [18], Zhou [31], [32], [33], Lindblad & Sogge [20], Takamura & Wakasa [27], Takamura [26] らを参照のこと.

1990 年代後半から 2000 年代前半にかけて, 次のような相互作用効果を考慮した非線型波動方程式系 ( $p$ - $q$  系) の機構を理解する取り組みが様々な研究者によって行われた.

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta_x u = |v|^p, & \text{in } \mathbf{R}^n \times [0, \infty), \\ \partial_t^2 v - \Delta_x v = |u|^q, & \text{in } \mathbf{R}^n \times [0, \infty), \end{cases} \quad (2)$$

ここで,  $p, q > 1$  とする. Del Santo & Georgiev & Mitidieri [3] は, (2) の時間大域解の存在と非存在が次の曲線で決定されることを示した. すなわち,

$$F(p, q, n) = \max \left\{ \frac{q + 2 + p^{-1}}{pq - 1}, \frac{p + 2 + q^{-1}}{pq - 1} \right\} - \frac{n - 1}{2},$$

とおくと,  $F(p, q, n) < 0$  ならば, 十分小さい初期値に対して (2) の解は時間大域的に存在し,  $F(p, q, n) > 0$  ならば, 解は時間大域的には存在しないというものである. その後,  $F(p, q, n) = 0$  の場合は, 空間3次元において, Del Santo & E.Mitidieri [4], 高次元空間において, Kurokawa & Takamura & Wakasa [15] が (2) の解が時間大域的に存在しないことを示した. 更に, 単独方程式の場合と同様に, 解の最大存在時間の最適な評価を得る研究が, Kubo & Ohta [12], Agemi & Kurokawa & Takamura [1], Kurokawa & Takamura [14], Georgiev & Takamura & Zhou [6], Kurokawa & Takamura & Wakasa [15] らによって行われた.

近年の研究動向としては, 外部初期値境界値問題や, 平坦ではない計量をもつ空間での Strauss 予想の解決を行う研究が活発に行われている. 特に, 後者の研究についてはブラックホールの理論に現れる, シュヴァルツシルト時空やカー時空等が考えられている. これらの研究については, 講演中に詳細を述べることとする. 外部問題に関しては, 例えば, Hidano & Metcalfe & Smith & Sogge & Zhou [9], Zhou & Han [35], Li & Wang [17], Zha & Zhou [30], Lai & Y.Zhou [16] を参照のこと. また, シュヴァルツシルト時空やカー時空における解析については, Catania & Georgiev [2], Lindblad & Metcalfe & Sogge & Tohaneanu & Wang [19] を参考文献として挙げておく.

## 2 主結果

ここでは, 講演者による結果 [28] を紹介することとする. 次の重みつき非線型項をもつ波動方程式に対する初期値問題を考える.

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = \frac{|u|^{p-1}u}{(1+x^2)^{(1+a)/2}} & \text{in } \mathbf{R} \times [0, \infty), \\ u(x, 0) = \varepsilon f(x), \partial_t u(x, 0) = \varepsilon g(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases} \quad (3)$$

ここで,  $(f, g) \in C^2(\mathbf{R}) \times C^1(\mathbf{R})$ ,  $\varepsilon > 0$  は十分小さいパラメータ,  $a \geq -1$ ,  $p > 1$  とする. (3) の方程式は, シュヴァルツシルト時空における (1) のトイモデルとして考えられる.  $a = -1$  のときは, 前で述べたように [11] により, すべての  $p > 1$  に対して解が時間大域的に存在しないことがわかっている. Kubo & Osaka & Yazici [13] は,  $p > 1$ ,  $pa > 1$  で, 初期値が奇関数かつ  $\varepsilon$  が十分小さければ, (3) の解は時間大域的に存在し,  $p > 1$ ,  $a \geq -1$  で,  $f \equiv 0$ ,  $g(x) \geq 0$  ( $\forall x \in \mathbf{R}$ ),  $\int_{\delta/2}^{\delta} g(y)dy > 0$  ( $0 < \delta < 1$ ) をみたす初期値に対しては, (3) の解が時間大域的には存在しないことを示した. 特に, (3) の解の最大存在時間を  $T_\varepsilon$  と表せば,  $T_\varepsilon \leq C\varepsilon^{-p^2}$  となることも示した. ここで,  $C > 0$  は  $\varepsilon$  に依らない定数である. しかしながら, この評価は少なくとも  $a = -1$  のときには最適ではないことが分かっている. 実際,  $a = -1$  のときは, 最大存在時間が  $T_\varepsilon \leq C\varepsilon^{-(p-1)/2}$  if  $\int_{\mathbf{R}} g(x)dx \neq 0$  で評価されることが Zhou [31] によって明らかにされているからである. 従って, 我々の目的は Zhou [31] の結果を  $a \geq -1$  のときに拡張することが目的となる. 我々は以下の結果を得た.

**Theorem 1 (K.Wakasa [28])**  $a \geq -1$ ,  $p > 1$  とする.  $f \equiv 0$  で,  $g \in C^1(\mathbf{R})$  は,  $g(x) \geq 0$  ( $\neq 0$ )  $\forall x \in \mathbf{R}$ ,  $\int_{-1}^1 g(y)dy > 0$ . をみたすとする. このときある正定数  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(g, a, p)$ ,  $C = C(g, a, p)$  が存在して,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  に対して

$$T_\varepsilon \leq \begin{cases} C\varepsilon^{-(p-1)/(1-a)} & \text{if } -1 \leq a < 0, \\ \phi^{-1}(C\varepsilon^{-(p-1)}) & \text{if } a = 0, \\ C\varepsilon^{-(p-1)} & \text{if } a > 0, \end{cases} \quad (4)$$



が成立する. ここで,  $\phi(s) = s \log(2 + s)$  for  $s \geq 0$  である.

**Theorem 2 (K.Wakasa[28])**  $a \geq -1$ ,  $p > 1$  とする.  $f \in C^2(\mathbf{R})$ ,  $g \in C^1(\mathbf{R})$  は,  $\|f\|_{L^\infty(\mathbf{R})} < \infty$ ,  $\|g\|_{L^1(\mathbf{R})} < \infty$  をみたすとする. このとき, ある正定数  $c = c(f, g, a, p)$  が存在して,

$$T_\varepsilon \geq \begin{cases} c\varepsilon^{-(p-1)/(1-a)} & \text{if } -1 \leq a < 0, \\ \phi^{-1}(c\varepsilon^{-(p-1)}) & \text{if } a = 0, \\ c\varepsilon^{-(p-1)} & \text{if } a > 0, \end{cases} \quad (5)$$

が成立する.

証明の中で鍵となる事実は, 逐次近似法の第1段階の評価式が, 1次元波動方程式の解の表現公式の特性を基に改良できたことにある. また, 初期値が奇関数である場合も解の最大存在時間の評価を得ることができる. このことについては, 講演中に詳細を述べることにする.

## References

- [1] R.Agemi, Y.Kurokawa and H.Takamura, *Critical curve for  $p$ - $q$  systems of nonlinear wave equations in three space dimensions*, J. Differential Equations, **167**(2000), 87-133.
- [2] D.Catania and V.Georgiev, *Blow-up for the semilinear wave equation in the Schwarzschild metric*, Differential Integral Equations **19** (2006), no. 7, 799-830.
- [3] D.Del Santo, V.Georgiev and E.Mitidieri, *Global existence of the solutions and formation of singularities for a class of hyperbolic systems*, in “Geometric Optics and Related Topics” (F.Colombini and N.Lerner Eds.), Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, **32**, pp.117-140, Birkhäuser Boston, 1997.
- [4] D.Del Santo and E.Mitidieri, *Blow-up of solutions of a hyperbolic system: the critical case*, Differential Equations, **34**, (1998), 1157-1163.
- [5] V.Georgiev, H.Lindblad and C.D.Sogge, *Weighted Strichartz estimates and global existence for semilinear wave equations*, Amer. J. Math., **119**(1997), 1291-1319.
- [6] V.Georgiev, H.Takamura and Y.Zhou, *The lifespan of solutions to nonlinear systems of a high-dimensional wave equation*, Nonlinear Anal., **64**(2006), 2215-2250.
- [7] R.Glassey, *Finite-time blow-up for solutions of nonlinear wave equations*, Math. Z., **177**(1981), 323-340.
- [8] R.Glassey, *Existence in the large for  $\square u = f(u)$  in two space dimensions*, Math. Z, **178**(1981), 233-261.
- [9] K. Hidano, J. Metcalfe, H.F. Smith, C.D. Sogge and Y. Zhou, *On abstract Strichartz estimates and the Strauss conjecture for nontrapping obstacles*, Trans. Amer. Math. Soc. **362** (5) (2010) 2789-2809.

- [10] F.John, *Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions*, Manuscripta Math., **28**(1979), 235-268.
- [11] T.Kato, *Blow up of solutions of some nonlinear hyperbolic equations*, Comm. Pure Appl. Math, **33**(1980), 501-505.
- [12] H.Kubo and M.Ohta, *Critical blowup for systems of semilinear wave equations in low space dimensions*, J. Math. Anal. Appl., **240**, (1999), 340-360.
- [13] H.Kubo, A.Osaka and M.Yazici, *Global existence and blow-up for wave equations with weighted nonlinear terms in one space dimension*, Interdisciplinary Information Sciences, **19**(2013), 143-148.
- [14] Y.Kurokawa and H.Takamura, *A weighted pointwise estimate for two dimensional wave equations its applications to nonlinear systems*, Tsukuba J. Math. **27** (2003), 417-448.
- [15] Y.Kurokawa, H.Takamura and K.Wakasa, *The blow-up and lifespan of solutions to systems of semilinear wave equation with critical exponents in high dimensions*, Differential and Integral Equations, Khayyam Publishing, Inc., 25, no.3-4, (2012), 363-382.
- [16] N.A.Lai and Y.Zhou, *Finite time blow up to critical semilinear wave equation outside the ball in 3-D*, Nonlinear Analysis **125** (2015) 550-560.
- [17] X. Li and G. Wang, *Blow up of solutions to nonlinear wave equations in 2D exterior domains*, Arch. Math. **98** (2012) 265-275.
- [18] H.Lindblad, *Blow-up for solutions of  $\square u = |u|^p$  with small initial data*, Comm. Partial Differential Equations, **15**(6)(1990), 757-821.
- [19] H.Lindblad, J.Metcalf, C.D.Sogge, M.Tohaneanu and C.Wang, *The Strauss conjecture on Kerr black hole backgrounds*, Math. Ann. **359** (2014), no. 3-4, 637-661.
- [20] H.Lindblad and C.D.Sogge, *Long-time existence for small amplitude semilinear wave equations*, Amer. J. Math., **118**(1996), 1047-1135.
- [21] M.A.Rammaha, *Finite-time blow-up for nonlinear wave equations in high dimensions*, Comm. Partial Differential Equations, **12**(1987), 677-700.
- [22] J.Schaeffer, *The equation  $u_{tt} - \Delta u = |u|^p$  for the critical value of  $p$* , Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **101A**(1985), 31-44.
- [23] T.C.Sideris, *Nonexistence of global solutions to semilinear wave equations in high dimensions*, J. Differential Equations, **52**(1984), 378-406.
- [24] H.F. Smith, C.D. Sogge and C. Wang, *Strichartz estimates for Dirichlet-wave equations in two dimensions with applications*, Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012) 3329-3347.

- [25] W.A.Strauss, *Nonlinear scattering theory at low energy*, J. Funct. Anal., **41**(1981), 110-133.
- [26] H.Takamura, *Improved Kato's lemma on ordinary differential inequality and its application to semilinear wave equations*, Nonlinear Analysis TMA, **125** (2015), 227-240.
- [27] H.Takamura and K.Wakasa, *The sharp upper bound of the lifespan of solutions to critical semilinear wave equations in high dimensions*, J. Differential Equations, **251**, no.4-5, (2011) 1157-1171.
- [28] K.Wakasa, *The lifespan of solutions to wave equations with weighted nonlinear terms in one space dimension*, to appear in Hokkaido Mathematical Journal.
- [29] B.Yordanov and Q.S.Zhang, *Finite time blow up for critical wave equations in high dimensions*, J. Funct. Anal., **231**(2006), 361-374.
- [30] D.Zha and Y.Zhou, *Lifespan of classical solutions to quasilinear wave equations outside of a star-shaped obstacle in four space dimensions*, J. Math. Pures Appl. **103** (3) (2015) 788-808.
- [31] Y.Zhou, *Life span of classical solutions to  $u_{tt} - u_{xx} = |u|^{1+\alpha}$* , Chin. Ann. Math. Ser.B, **13**(1992), 230-243.
- [32] Y.Zhou, *Blow up of classical solutions to  $\square u = |u|^{1+\alpha}$  in three space dimensions*, J. Partial Differential Equations, **5**(1992), 21-32.
- [33] Y.Zhou, *Life span of classical solutions to  $\square u = |u|^p$  in two space dimensions*, Chin. Ann. Math. Ser.B, **14**(1993), 225-236.
- [34] Y.Zhou, *Blow up of solutions to semilinear wave equations with critical exponent in high dimensions*, Chin. Ann. Math. Ser.B, **28**(2007), 205-212.
- [35] Y.Zhou and W.Han, *Blow-up of solutions to semilinear wave equations with variable coefficients and boundary*, J. Math. Anal. Appl. **374** (2011) 585-601.

# 中間畳み込みと接続係数

近内 翔太郎 (Konnai Shotaro) (神戸大学・理)\*

## 1. 導入

既約な Fuchs 型方程式は, addition と middle convolution と呼ばれる操作を有限回施すことによって「基本型」の Schlesinger 型方程式のクラスに帰着する。これはその逆も成立し, 既約な Fuchs 型は対応する「基本型」の系から addition と middle convolution を有限回繰り返すことで構成できる。一般に, 連立系の middle convolution によってできる Schlesinger 型方程式はゲージ変換による不定性を残して定まっており, 元の方程式からできる方程式の具体的な形を予想することは殆どできない。そのため, 必要な middle convolution の回数が多いほど, 方程式を上手く構成することは難しくなってくる。しかし, 扱う対象を大久保型微分方程式に限定すれば, middle convolution による微分方程式の構成や, 解の構成をある程度標準化することができる。講演ではこのことを紹介し, その接続問題への応用について述べる。

## 2. 方程式の構成

Schlesinger 型常微分方程式

$$\frac{d}{dx}Y = \sum_{k=1}^r \frac{A_k}{x-t_k} Y \quad (A_k \in \text{Mat}(n; \mathbb{C})) \quad (1)$$

の留数行列の組を  $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_r)$  で表す。  $r$  個のパラメータの組  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{C}^r$  に対して,

$$\text{add}_{\mathbf{a}}(\mathbf{A}) = (A_1 + a_1, \dots, A_r + a_r) \quad (2)$$

を  $\mathbf{A}$  の addition と呼ぶ。  $\mathbf{A}$  の middle convolution は次のように 3 段階で定義される。

第 1 段階 (畳込み). Schlesinger 型方程式の留数行列の組  $\mathbf{A}$  に対し,  $nr \times nr$  行列の組

$$\mathbf{B} = (B_1, \dots, B_r); \quad B_k = \begin{pmatrix} O & & & & \\ A_1 & \cdots & A_k + \mu & \cdots & A_r \\ & & O & & \end{pmatrix} \quad (k = 1, \dots, r) \quad (3)$$

と Schlesinger 型方程式  $\frac{d}{dx}Z = \sum_{k=1}^r \frac{B_k}{x-t_k} Z$  を対応させる操作を  $c_{\mu}(\mathbf{A}) = \mathbf{B}$  で表し,  $\mathbf{A}$  の畳込みと呼ぶ。

第 2 段階 ( $K$  簡約). 留数行列  $A_k$  ( $k = 1, \dots, r$ ) の階数を  $n_k$  とする。各  $A_k$  を

$$A_k = P_k Q_k; \quad P_k \in \text{Mat}(n, n_k; \mathbb{C}), \quad Q_k \in \text{Mat}(n_k, n; \mathbb{C}) \quad (4)$$

と分解し, ブロック行列  $Q$  を

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & & Q_r \end{pmatrix} \in \text{Mat}(\tilde{n}, nr; \mathbb{C}) \quad (\tilde{n} = \sum_{k=1}^r n_k) \quad (5)$$

\* e-mail: konnai@math.kobe-u.ac.jp

で定義すると,  $QB_k = \tilde{B}_k Q$  を満たす  $\tilde{B}_k \in \text{Mat}(\tilde{n}; \mathbb{C})$  が一意に定まる. この  $\tilde{\mathbf{B}} = (\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_r)$  と Schlesinger 型方程式  $\frac{d}{dx}\tilde{Z} = \sum_{k=1}^r \frac{\tilde{B}_k}{x-t_k}\tilde{Z}$  を  $\mathbf{B}$  の  $K$  簡約と呼ぶ.

第3段階 ( $L$  簡約).  $\tilde{\mathbf{B}} = \sum_{k=1}^r \tilde{B}_k$  の階数を  $\hat{n}$  とする. これを2つの行列の積

$$\tilde{\mathbf{B}} = P_0 Q_0; \quad P_0 \in \text{Mat}(\tilde{n}, \hat{n}; \mathbb{C}), \quad Q_0 \in \text{Mat}(\hat{n}, \tilde{n}; \mathbb{C}) \quad (6)$$

に分解する. このとき  $Q_0 \tilde{B}_k = \hat{B}_k Q_0$  ( $k = 1, \dots, r$ ) を満たす行列の組  $\hat{\mathbf{B}} = (\hat{B}_1, \dots, \hat{B}_r)$  と Schlesinger 型方程式  $\frac{d}{dx}\hat{Z} = \sum_{k=1}^r \frac{\hat{B}_k}{x-t_k}\hat{Z}$  が一意に定まる. この一連の操作を  $\text{mc}_\mu(\mathbf{A}) = \hat{\mathbf{B}}$  で表し,  $\mathbf{A}$  の middle convolution と呼ぶ.

以下では  $\mathbf{A}$  に対応する Schlesinger 型方程式は, 型  $(n_1, \dots, n_r)$  の大久保型方程式であって, ブロック行列  $A = (A_{ij})_{i,j=1}^r$  を用いて

$$(x - T) \frac{d}{dx} Y = AY; \quad T = \text{diag}(t_1 I_{n_1}, \dots, t_r I_{n_r}) \quad (7)$$

と表される場合を考える. このとき次の定理が成立する.

定理 1. 大久保型方程式  $(x - T) \frac{d}{dx} Y = AY$  において, 1個の添字  $k \in \{1, \dots, r\}$  を選び,  $\text{Ker}(A_{kk} + c) = 0$ ,  $\text{Ker}(A_{kk} - \rho) = 0$  と仮定する. このとき

$$\mathbf{A}^{mc} = \text{add}_{(0, \dots, \rho, \dots, 0)} \circ \text{mc}_{-\rho-c} \circ \text{add}_{(0, \dots, c, \dots, 0)}(\mathbf{A}) = (A_1^{mc}, \dots, A_r^{mc}) \quad (8)$$

は, 次の行列  $A^{mc}$  の定める大久保型方程式  $(x - T) \frac{d}{dx} W = A^{mc} W$  と同値である.

$$A^{mc} = \begin{pmatrix} & A_{1k}(A_{kk} + c)(A_{kk} - \rho)^{-1} & (\rho + c)\xi_1 & & & & & & & & \\ & A_{ij} - (\rho + c)\delta_{ij} & \vdots & & \vdots & & & & & & A_{ij} \\ & & A_{k-1,k}(A_{kk} + c)(A_{kk} - \rho)^{-1} & (\rho + c)\xi_{k-1} & & & & & & & \\ A_{k1} & \dots & A_{k,k-1} & & A_{kk} & & 0 & & A_{k,k+1} & \dots & A_{kr} \\ \eta_1 & \dots & \eta_{k-1} & & 0 & & \rho & & \eta_{k+1} & \dots & \eta_r \\ & & & & A_{k+1,k}(A_{kk} + c)(A_{kk} - \rho)^{-1} & (\rho + c)\xi_{k+1} & & & & & \\ & & & & A_{ij} & \vdots & & & \vdots & & A_{ij} - (\rho + c)\delta_{ij} \\ & & & & & & & & A_{rk}(A_{kk} + c)(A_{kk} - \rho)^{-1} & (\rho + c)\xi_r & \end{pmatrix} \quad (9)$$

ここで  $\xi_i \in \text{Mat}(n_i, n_k; \mathbb{C})$ ,  $\eta_j \in \text{Mat}(n_k, n_j; \mathbb{C})$  は次の関係式を満たすものとする.

$$\xi_i \eta_j = A_{ij} - \rho - A_{ik}(A_{kk} - \rho)^{-1} A_{kj} \quad (i, j = 1, \dots, r, i, j \neq k) \quad (10)$$

ここまでの話は代数的な操作によって Schlesinger 型方程式から新しい Schlesinger 型方程式を作ったにすぎない. しかし, 実際にはこれらの結果は方程式の解にまで議論の対象を拡張することができる. さらに, 大久保型方程式では大久保標準解行列という解行列を利用して接続係数に関する話題に応用することができ, 元の大久保型方程式 (7) の接続係数と定理 1 の大久保型方程式 (9) の接続係数の間の関係式を具体的に記述することが可能である. 以下でこのことについて述べる.

### 3. 大久保標準解行列と接続

以下,  $\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \{t_1, \dots, t_r\}$  上の大久保型方程式 (7) の  $A$  と  $A_{kk}$  の固有値は整数差を持たないとする。このとき, (7) の解として各特異点の周りの挙動を表す

$$\Psi^{(k)} = F^{(k)}(x)(x - t_k)^{A_k}, \quad F^{(k)}(x) \in \text{Mat}(n; O_{t_k}), \quad F^{(k)}(t_k) = I_n, \quad (11)$$

という形をした解の基本行列が取れる。この  $\Psi^{(k)}(x)$  を

$$\Psi^{(k)}(x) = (\Psi_1^{(k)}, \dots, \Psi_r^{(k)}), \quad \Psi_j^{(k)}(x) \in \text{Mat}(n, n_j; O(\tilde{\mathcal{D}})), \quad (12)$$

と分け,  $\Psi_k^{(k)}$  を集めた解を

$$\Psi(x) = (\Psi_1^{(1)}, \dots, \Psi_r^{(r)}) \quad (13)$$

とおき, 大久保標準解行列と呼ぶ。大久保標準解行列は次のようにほぼ一般的な仮定の下で解の基本行列となる。

**定理 2.** 大久保型方程式 (7) に対し次を仮定する。

- (1): ブロック対角要素  $A_{kk}$  ( $k = 1, \dots, r$ ) の固有値は非整数,
  - (2):  $A$  の固有値は負整数をとらない
  - (3):  $A_{kk}$  ( $k = 1, \dots, r$ ) と  $A$  の固有値は 0 を除く整数差を持たない
- このとき大久保標準解行列は解の基本行列。

一般に, 大久保型方程式の解  $\Psi^{(j)}(x)$  と  $\Psi_k^{(k)}(x)$  の関係は  $x = t_k$  において正則な解を  $H_j^{(k)}(x)$  と置くと, 接続係数  $C_{kj}$  を用いて

$$\Psi_j^{(j)}(x) = \Psi_k^{(k)}(x)C_{kj} + H_j^{(k)}(x) \quad (14)$$

と表すことができる。  $\gamma_1, \dots, \gamma_r$  をそれぞれ  $x = t_1, \dots, x = t_r$  の周りを回る  $\mathcal{D}$  上の曲線とし, その大久保標準解行列に対する解析接続が

$$\gamma_k \Psi(x) = \Psi(x)M_k \quad (15)$$

と表されるとする。すると, (14) から  $M_k$  ( $k = 1, \dots, r$ ) は

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ (e(A_{kk}) - 1)C_{k1} & \cdots & e(A_{kk}) & \cdots & (e(A_{kk}) - 1)C_{kr} & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad e(A_{kk}) = e^{2\pi i A_{kk}} \quad (16)$$

と簡潔に表示される。

大久保型方程式 (9) の大久保標準解行列を  $\Psi^{mc}(x)$ ,  $\gamma_j \Psi^{mc}(x) = \Psi^{mc}(x)M_j^{mc}$  とする。このとき  $M_j^{mc}$  は大久保型方程式 (9) の形に合わせて次のように表すことができる。

$$M_j = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ (e(A_{jj} - \rho - c) - 1)C_{k1}^{mc} & \cdots & e(A_{jj}) & \cdots & (e(A_{jj}) - 1)C_{kr}^{mc} & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (j \neq k) \quad (17)$$

ここで  $C_{ik} = (C_{i(k1)}, C_{i(k2)})$ ,

$$M_k^{mc} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & (e(A_{kk}) - 1)C_{(k1)1}^{mc} & \cdots & e(A_{kk}) & 0 & \cdots & (e(A_{kk}) - 1)C_{(k1)r}^{mc} \\ & & (e(A_{kk}) - 1)C_{(k2)1}^{mc} & \cdots & 0 & e(\rho) & \cdots & (e(A_{kk}) - 1)C_{(k2)r}^{mc} \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

$M_k$  と  $M_k^{mc}$  の関係は convolution を経由して求めることができる。

$\mathcal{D}_x = \mathbb{C} \setminus \{t_1, \dots, t_r, x\}$  とし,  $p_0 \in \mathcal{D}_x$  の  $\pi^1(\mathcal{D}_x, p_0)$  の生成元  $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_x$  を起点  $p_0$  とした  $u = t_1, \dots, t_r, x$  の周りを回る曲線のホモトピー類とする。このときパラメータ  $\mu \in \mathbb{C}$  に対し Euler 変換を  $nr \times n$  のブロック行列

$$I_{L_k}^\mu \Psi(x) = \left( \int_{L_k} (x-u)^\mu \Psi(u) \frac{du}{u-t_i} \right)_{i=1}^r \quad (k = 1, \dots, r) \quad (19)$$

として定める。ここで  $L_k$  は  $u$  平面  $\mathcal{D}_x$  上の積分路で  $L_k = L[t_k, x] = \alpha_x^{-1} \alpha_k^{-1} \alpha_x \alpha_k$  で定まる路。convolution を施した方程式 (3) の解はこの Euler 変換によって実現することができ、次が成立する。

**定理 3.** 以下の3つの条件

(i):  $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

(ii):  $A_k (k = 1, \dots, r)$  の異なる固有値は整数差を持たない。

(iii):  $A_k (k = 1, \dots, r), A_\infty - \mu = -(A_1 + \dots + A_r) - \mu$  は  $\mathbb{Z}_{>0}$  の固有値を持たない。  
の成立を仮定する。このとき

$$I^\mu \Psi(x) = (I_{L_1}^\mu \Psi(x), \dots, I_{L_r}^\mu \Psi(x)) \quad (20)$$

は convolution を施した方程式 (3) の解の基本行列。

$I^\mu \Psi(x)$  は解の基本行列であるが、実際は殆ど大久保標準解行列と変わらず適当なブロック対角行列を掛けてやることで本当に大久保標準解行列にすることができる。

**定理 4.**

$$I^\mu \Psi(x) R^{-1}, \quad R = (R_1, \dots, R_r) \quad (21)$$

は (3) の大久保標準解行列。ここで

$$\begin{aligned} R_i &= \tilde{B}(A_{ii}, -\rho - c + 1), \quad (i \neq k) \\ R_k &= \tilde{B}(A_{kk} + c, -\rho - c + 1) \end{aligned} \quad (22)$$

で次で定まる  $\tilde{B}$  は行列値のベータ関数で

$$\tilde{B}(A, \mu) := (e(A) - 1)(e(\mu) - 1) \int_0^1 u^{A-1} (1-u)^{\mu-1} du, \quad A \in \text{Mat}(n; \mathbb{C}), \quad \mu \in \mathbb{C}. \quad (23)$$

定理 4 を利用し、 $I^\mu \Psi(x)$  を上手く簡約してやることで大久保型方程式 (9) の大久保標準解行列が構成され、接続係数の間に成立する漸化式が導出される。

定理 5. (主定理) 大久保型方程式 (7) の接続係数  $C_{ij}, (i, j = 1, \dots, r)$  と大久保型方程式 (9) の接続係数  $C_{ij}^{mc}, (i, j = 1, \dots, (k1), \dots, r)$  間には次の関係式が成立する。

$$C_{ij}^{mc} = \begin{cases} \left( \frac{t_i - t_k}{t_j - t_k} \right)^{\rho+c} \frac{e(\frac{-1}{2}(\rho+c))\Gamma(\rho+c-A_{ii})}{\Gamma(-A_{ii})} C_{ij} \frac{\Gamma(A_{jj}-\rho-c+1)}{\Gamma(A_{jj}+1)} & (j < i; i, j \neq k) \\ \left( \frac{t_i - t_k}{t_j - t_k} \right)^{\rho+c} \frac{e(\frac{1}{2}(\rho+c))\Gamma(\rho+c-A_{ii})}{\Gamma(-A_{ii})} C_{ij} \frac{\Gamma(A_{jj}-\rho-c+1)}{\Gamma(A_{jj}+1)} & (i < j; i, j \neq k), \end{cases} \quad (24)$$

$$C_{i(k1)}^{mc} = \begin{cases} (t_i - t_k)^{\rho+c} e(\frac{1}{2}(\rho+c)) \frac{\Gamma(\rho+c-A_{ii})}{\Gamma(-A_{ii})} C_{ik} \frac{\Gamma(A_{kk}-\rho)}{\Gamma(A_{kk}+c)} & (i < k) \\ (t_i - t_k)^{\rho+c} e(\frac{-1}{2}(\rho+c)) \frac{\Gamma(\rho+c-A_{ii})}{\Gamma(-A_{ii})} C_{ik} \frac{\Gamma(A_{kk}-\rho)}{\Gamma(A_{kk}+c)} & (k < i) \end{cases} \quad (25)$$

$$C_{(k1)j}^{mc} = \begin{cases} -e(\frac{-1}{2}(\rho+c))(t_j - t_k)^{-\rho-c} \frac{\Gamma(1+\rho-A_{kk})}{\Gamma(1-A_{kk}-c)} C_{kj} \frac{\Gamma(A_{jj}-\rho-c+1)}{\Gamma(A_{jj}+1)} & (j < k) \\ -e(\frac{1}{2}(\rho+c))(t_j - t_k)^{-\rho-c} \frac{\Gamma(1+\rho-A_{kk})}{\Gamma(1-A_{kk}-c)} C_{kj} \frac{\Gamma(A_{jj}-\rho-c+1)}{\Gamma(A_{jj}+1)} & (k < j) \end{cases} \quad (26)$$

## 参考文献

- [1] N.M. Katz: *Rigid Local Systems*, Annals of Mathematics Studies **139**, Princeton University Press, Princeton, 1996.
- [2] K. Okubo: *On the Group of Fuchsian Equations*, Seminar Reports of Tokyo Metropolitan University, 1987.
- [3] M. Dettweiler and S. Reitter: Middle convolution of Fuchsian systems and the construction of rigid differential systems, J. Algebra **318** (2007), 1–24.
- [4] S. Konnai. Connection coefficients and monodromy representations for a class of Okubo systems of ordinary differential equations (in preparation)



# ボース場と相互作用する量子系の模型の 基底状態に対する縮退度の評価

船川大樹 (Daiju Funakawa)\*

北海道大学博士課程 3 年

## 【概要】

ヒルベルト空間上の摂動の入った自己共役作用素について、基底状態に対する縮退度を上から評価する。さらにボース場と相互作用する量子系の模型を定義し、この模型が自己共役で基底状態を持つこと、基底状態に対する縮退度の上からの評価を与える。

## 1 モチベーション及び主定理

### 1.1 モチベーション

本研究は九州大学の廣島氏が 2005 年に行った研究 [H1] の一般化である。場の量子論において基底状態の存在性を言及すること、及び基底状態における縮退度を求めることは重要な研究の一つとなっている。基底状態の存在または非存在の証明は [AH, AHH1, GLL] など様々手法が得られてきた。基底状態における縮退度についてもいくつか計算方法はあるが、一般論は数少ない。フェルミオンを考慮しない場合のハミルトニアンについて基底状態における縮退度を計算する際、汎関数積分表示を使用し計算する方法もある。しかし、フェルミオンを考慮した場合、現段階では汎関数積分表示を使って基底状態に対する縮退度を計算することが出来ない。この場合の一つの解決として [H1] によって 摂動項が非摂動項に対して相対有界な場合は基底状態における縮退度を上から評価する方法が得られた。そして、本研究により相互作用項が非摂動項に対して相対有界でない場合にも、基底状態における縮退度が上から評価できることが得られた。この研究は新井朝雄教授との共同研究である。本講演では本研究の応用例としてボース場と相互作用する量子系の模型を定義し、基底状態の縮退度を上からの評価について発表する。

### 1.2 主定理

本紙ではヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  上の線形作用素  $T$  の定義域を  $D(T)$  で表すこととする。また、 $T$  のスペクトルを  $\sigma(T)$  で表し、 $T$  が下に有界な場合、 $T$  のスペクトル集合  $\sigma(T)$  の下限を  $T$  の最低エネルギーと呼び、 $E_0(T)$  と書く： $E_0(T) := \inf \sigma(T)$ 。さらに  $\ker(T - E_0(T)) \neq \{0\}$  の場合、 $T$  は基底状態を持つと言い、 $\dim \ker(T - E_0(T))$  を  $T$  の基底状態に対する縮退度と呼び、 $m(T)$  で表す： $m(T) := \dim \ker(T - E_0(T))$ 。また、 $\mathcal{H}$  から  $\ker(T - E_0(T))$  への正射影作用素を  $P_T$  で定義する。

ヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  上の非負な自己共役作用素  $A_0, A_1, \dots, A_n$   $n = 1, 2, \dots$  に対して  $A_0 \leq \sum_{j=1}^n A_j$  であることを、 $\cap_{j=1}^n D(A_j^{1/2}) \subset D(A_0^{1/2})$  であり、次の不等式が成り立つことと定義する：

$$\langle A_0^{1/2} \psi, A_0^{1/2} \psi \rangle \leq \sum_{j=1}^n \langle A_j^{1/2} \psi, A_j^{1/2} \psi \rangle \quad \psi \in \cap_{j=1}^n D(A_j^{1/2}).$$

\* E-mail: funakawa@math.sci.hokudai.ac.jp

$H_0$  を  $\mathcal{H}$  上の下に有界な自己共役作用素とし,  $H_1$  を  $\mathcal{H}$  上の対称作用素とする. また, この 2 つの作用素の和

$$H := H_0 + H_1$$

は下に有界な自己共役作用素であるとする. ここで,  $H$  の定義域は  $D(H) := D(H_0) \cap D(H_1)$  と定義する.

また, 以下の 3 条件 (仮定 1~仮定 3) を仮定する.

仮定 1 (i)  $H_0$  と  $H$  は基底状態を持ち,  $m(H_0) < \infty$  である.

(ii)  $\mathcal{H}$  上の非負自己共役作用素  $L$  で

$$I \leq L + P_{H_0}$$

となるものが存在する.

$(K, \Sigma, \mu)$  を  $\sigma$ -有限な測度空間とし,  $\omega$  を  $K$  上の非負な  $\Sigma$  可測関数で  $0 < \omega(k) < \infty$ ,  $\mu$ -a.e.  $k \in K$  を満たすものとする. また, 各  $s \in \mathbb{R}$  に対して  $X := L^2(K, d\mu)$  の部分空間

$$X_s := \{f \in X \mid \int_K \omega(k)^s |f(k)|^2 d\mu(k) < \infty\}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

を定義する. また,  $\mathcal{H}$  上の稠密な閉線形作用素の族  $\{A(f) \mid f \in X\}$  が存在し, 各  $f \in X$  に対して  $D(L^{1/2}) \subset D(A(f))$  と, 任意の  $\psi \in D(L^{1/2})$  に対して

$$A(zf + wg)\psi = z^* A(f)\psi + w^* A(g)\psi, \quad f, g \in X, z, w \in \mathbb{C}$$

を満たすとする. ここで  $z^*$  は  $z \in \mathbb{C}$  の複素共役を表す. さらに次の線形作用素を定義する:

$$A_0(f, t) := e^{-itH_0} A(f) e^{itH_0}, \quad t \in \mathbb{R}, f \in X$$

仮定 2 (i) ある  $\alpha \in (0, 1]$  と  $\beta \geq 0$  について, 任意の  $f \in X_{-\beta}$  に対して  $A(f)$  は  $H_0^\alpha$  に対して相対有界である.

(ii)  $H_0^\alpha$  の芯  $\mathcal{D}$  が存在して, 任意の  $f \in X_{-\beta}$  に対して  $\mathcal{D}$  上で  $s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} A(f) e^{itH_0} = 0$  が成立する.

(iii) ある稠密な部分空間  $Y \subset X_{-\beta}$  上の任意の  $f \in Y$  と任意の  $t \in \mathbb{R}$  について,  $(H_0, A_0(f, t))$  は  $D(H)$  上に弱交換子  $[H_0, A_0(f, t)]_w^{D(H)}$  を持ち,  $[H_0, A_0(f, t)]_w^{D(H)}$  は  $D(H)$  上で  $t$  について強連続である.

(iv) 各  $\psi \in D(H)$  と  $f \in Y$  に対して  $A_0(f, t)$  は  $t$  について強微分可能であり,

$$\frac{dA_0(f, t)\psi}{dt} = -i[H_0, A_0(f, t)]_w^{D(H)}\psi, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(v) 任意の  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f \in Y$  に対して  $(H_1, A_0(f, t))$  は  $D(H)$  上で弱交換子を持ち, 任意の  $\psi \in D(H)$  に対して  $[H_1, A_0(f, t)]_w^{D(H)}\psi$  は  $t$  について強連続である. さらに  $\mu$ -a.e.  $k \in K$  に対して  $D(T(k)^*) \cap D(T(k)) \supset D(H)$  を満たす  $\mathcal{H}$  上の稠密な線形作用素  $T(k)$  が存在し, 以下を満たす:

(a) 任意の  $\psi, \chi \in D(H)$  と  $f \in Y$  に対して  $\int_K |f(k)\langle \chi, T(k)\psi \rangle| d\mu(k) < \infty$  を満たし, 任意の  $t \in \mathbb{R}$  に対して以下が成立する:

$$\langle \chi, [H_1, A_0(f, t)]_w^{D(H)}\psi \rangle = \int_K e^{i\omega(k)t} f(k)^* \langle \chi, T(k)\psi \rangle d\mu(k).$$

(b) 任意の  $\phi \in P_H \mathcal{H}$  と  $f \in Y$  に対して以下が成立する.

$$\int_K |f(k)| \omega^{-n}(k) \|T(k)\phi\| d\mu(k) < \infty, \quad n = 0, 1$$

(c) 稠密な部分空間  $Y_0 \subset Y$  が存在して任意の  $\psi \in \mathcal{D}$ ,  $f \in Y_0$  と  $\phi \in P_H \mathcal{H}$  に対して次が成立する:

$$\int_0^\infty \left| \int_K f(k)^* \langle \psi, e^{is(H-E_0(H)+\omega(k))} T(k)\phi \rangle d\mu(k) \right| ds < \infty.$$

仮定 3  $X$  上の正規直交系  $\{e_n\}_n$  で  $e_n \in Y$ ,  $n \in \mathbb{N}$  となるものと  $\varepsilon_0 \in [0, 1)$  が存在して次を満たす:

$$\sup_{\phi \in D(L^{1/2}) \cap P_H \mathcal{H}, \|\phi\|=1} \left( \|L^{1/2}\phi\|^2 - \sum_{n=1}^\infty \|A(e_n)\phi\|^2 \right) \leq \varepsilon_0.$$

定理 1(A.Arai and D.Funakawa 2015) 仮定 1-3 を仮定する. また,  $(K, \Sigma)$  上の非負関数  $f_1, f_2$  が存在して  $f_1 + \omega^{-1}f_2 \in X$  と

$$\begin{aligned} \gamma &:= \|f_1 + \omega^{-1}f_2\|^2 < 1 - \varepsilon_0, \\ \|T(k)^*\psi\| &\leq f_1(k)\|(H - E_0(H) + \omega(k))\psi\| + f_2(k)\|\psi\|, \mu - a.e. k \in K \end{aligned}$$

が成立すると仮定する. このとき (i)(ii) が成立する:

(i) 任意の  $\phi \in P_H\mathcal{H}$  は  $P_{H_0}\mathcal{H}$  と overlap する.

(ii)

$$\dim D(L^{1/2}) \cap P_H\mathcal{H} \leq \frac{1}{1 - \gamma - \varepsilon_0} m(H_0)$$

さらに  $\gamma + \varepsilon_0 < \frac{1}{m(H_0)+1}$  と  $P_H\mathcal{H} \subset D(L^{1/2})$  を仮定する. このとき

(iii)

$$m(H) \leq \frac{1}{1 - \gamma - \varepsilon_0} m(H_0)$$

が成立する. 特に  $m(H_0) = 1, \gamma + \varepsilon_0 < 1/2$  の場合  $m(H) = 1$  である.

## 2 例 : QB モデル

### 2.1 ボソソフック空間と QB モデルの定義

定理 1 を使い, 場の量子論のモデルの縮退度を上から評価してみる. そのために, フォック空間と呼ばれるヒルベルト空間と, フォック空間上の重要な線形作用素について定義を与える.  $\mathcal{W}$  を可分なヒルベルト空間とする. この時, 次のようにしてボソソフック空間を定める:

$$\mathcal{F}_b(\mathcal{W}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \otimes_s^n \mathcal{W} = \{\Psi = (\Psi^{(n)})_n \mid \Psi^{(n)} \in \otimes_s^n \mathcal{W}, n = 0, 1, \dots\}.$$

ここで,  $\otimes_s^n$  は  $n$  重対称テンソル積を表す. 各  $f \in \mathcal{W}$  に対して, ボソソフック空間上で作用する生成作用素を次で定義する.

$$\begin{aligned} D(a(f)^*) &:= \{\Psi \in \mathcal{F}_b(\mathcal{W}) \mid \sum_{n=0}^{\infty} \|(a(f)^*\Psi)^{(n)}\|^2 < \infty\} \\ (a(f)^*\Psi)^{(n)} &= a_{n-1}(f)^*\Psi^{(n-1)} \\ a_n(f)^*\Psi^{(n)} &= \sqrt{n+1}S_n(f \otimes \Psi^{(n)}). \end{aligned}$$

ここで,  $S_n$  は  $\otimes^n \mathcal{W}$  上の対称化作用素である. 生成作用  $a(f)^*$  は閉作用素であり, 生成作用素の共役でボソソフック空間上の消滅作用素を定義する:

$$a(f)\Psi := (a(f)^*)^*\Psi.$$

線形作用素  $T, S$  に対して, 交換子  $[T, S]$  を  $[T, S] := TS - ST$  と定義する. また, ボソソフック空間の稠密な部分空間として次の有限粒子部分空間を定める:

$$\mathcal{F}_{b,0}(\mathcal{W}) := \{\Psi \in \mathcal{F}_b(\mathcal{W}) \mid \text{ある } N \in \mathbb{N} \text{ が存在して, 任意の } n > N \text{ に対して } \Psi^{(n)} = 0\}.$$

このとき, 生成・消滅作用素は次の正準交換関係と呼ばれる重要な関係を満たす:

$$[a(f), a(g)^*] = \langle f, g \rangle, \quad [a(f), a(g)] = [a(f)^*, a(g)^*] = 0 \quad \text{on } \mathcal{F}_{b,0}.$$

シーガルの場の作用素と呼ばれるボソソフック空間上の線形作用素は次で定義される:

$$\phi(f) := \frac{1}{\sqrt{2}}(a(f) + a(f)^*).$$

この作用素は可閉作用素であり, 閉包を取った作用素を同じ  $\phi(f)$  で書くこととする.  $\phi(f)$  は自己共役作用素である.

また,  $\mathcal{W}$  上の非負で単射な自己共役作用素  $T$  に対して, ボソンフォック空間上で作用する第 2 量子化作用素を次で定義する:

$$D(d\Gamma_b(T)) := \{\Psi \in \mathcal{F}_b(\mathcal{W}) \mid \sum_{n=0}^{\infty} \|d\Gamma_b(T)^{(n)}\Psi^{(n)}\|^2 < \infty\},$$

$$d\Gamma_b(T)^{(n)}\Psi^{(n)} := \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{j=1}^n (I \otimes \cdots \otimes T \otimes \cdots \otimes I) \Psi^{(n)},$$

$$d\Gamma_b(T)^{(0)} := 0.$$

このとき, 第 2 量子化作用素  $d\Gamma_b(T)$  は自己共役であり, また  $E_0(d\Gamma_b(T)) = 0$  となる. 特に  $d\Gamma_b(T)$  の基底状態はボソンフォック真空と呼ばれる次のベクトルである:

$$\Omega_b := (1, 0, 0, \dots) \in \overline{\mathcal{F}_b(\mathcal{W})}.$$

次にヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  を取る. 粒子のエネルギーを表す作用素として  $\mathcal{H}$  上に働く下に有界な自己共役作用素  $A$  を取る. また,  $\mathcal{H}$  上で働く非負な自己共役作用素  $B_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  を取る. また,  $\mathbb{R}^d$  上ボレル可測な関数  $\omega_{\text{QB}}$  で  $0 < \omega_{\text{QB}}(k) < \infty$ , a.e.  $k \in \mathbb{R}^d$  を満たすものを取る. この  $\omega_{\text{QB}}$  による  $L^2(\mathbb{R}^d)$  上の掛け算作用素を同じ記号  $\omega_{\text{QB}}$  で書く. さらに  $L^2(\mathbb{R}^d)$  上の関数  $\lambda$  を取る.

以上の定義から, ボース場と相互作用する量子系の模型として  $\mathcal{F} := \mathcal{H} \otimes \mathcal{F}_b(L^2(\mathbb{R}^d))$  で働く QB モデルを次で定義する:

$$H_{\text{QB}} := A \otimes I + I \otimes d\Gamma_b(\omega_{\text{QB}}) + \sum_{j=1}^4 g_j B_j \otimes \phi(\lambda)^j.$$

ここで  $g_j \in \mathbb{R}$  は結合定数と呼ばれる実数であり, 特に  $g_4 > 0$  を満たすものとする. 以下,  $H_0^{\text{QB}} := A \otimes I + I \otimes d\Gamma_b(\omega)$ ,  $H_{\text{int}} := \sum g_j H_j$ ,  $H_j := B_j \otimes \phi(\lambda)^j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  として定理 1 を使い, QB モデルの縮退度を上から評価する.

## 2.2 主定理

QB モデルに対して次を仮定する:

**(QB.1)** 各  $j = 1, 2, 3, 4$  に対して,  $B_j$  は  $A$  と強可換である. すなわち,  $B_j$  のスペクトル測度と  $A$  のスペクトル測度は可換である.

**(QB.2)**  $\lambda \in D(\omega_{\text{QB}}) \cap D(\omega_{\text{QB}}^{-1/2})$ .

$\mathbb{R}_+ := \{g \in \mathbb{R} \mid g > 0\}$  とする.

**定理 2**

(QB.1), (QB.2) を仮定する. この時, 全ての  $(g_1, g_2, g_3, g_4) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$  に対して  $H_{\text{QB}}$  は  $D(H_{\text{QB}}) = D(H_0^{\text{QB}}) \cap D(H_4)$  上の自己共役作用素である.

**(QB.3)**  $\omega_{\text{QB}}$  は次の (1) と (2) を満たす. (1) 集合  $K_{\omega_{\text{QB}}} := \{k \in \mathbb{R}^d \mid \omega_{\text{QB}}(k) = 0\}$  のルベグ測度は 0 である. また,  $\omega_{\text{QB}} \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus K_{\text{QB}})$  が成立する. (2) ルベグ測度 0 の部分集合  $K \subset \mathbb{R}^d$  が存在し, 次を満たす:

$$\omega_{\text{QB}} \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus K), \quad \frac{\partial \omega_{\text{QB}}}{\partial k_n}(k) \neq 0, \quad n = 1, \dots, d, \quad k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{R}^d \setminus K.$$

(QB.3) の例として次の関数がある.  $\mathbb{R}^d$  上の関数  $\omega_{\text{QB}}$  を  $\omega_{\text{QB}}(k) = |k^2 + m^2|^p$ ,  $p > 0$ ,  $m \geq 0$  と定義する. この時,  $m = 0$  の場合は  $K_{\omega_{\text{QB}}} = \{0\}$ ,  $K = \bigcup_{n=1}^d \{(k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{R}^d \mid k_n = 0\}$  となり,  $m > 0$  の場合は  $K_{\omega_{\text{QB}}} = \emptyset$ ,  $K = \bigcup_{n=1}^d \{(k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{R}^d \mid k_n = 0\}$  となる.

**(QB.4)**  $A$  はコンパクトレゾルVENTを持つ.

この時, 特に定数  $\delta > 0$  が存在し,  $0 < \delta < \sigma(A) \setminus \{E_0(A)\} - E_0(A)$  を満たす.

**(QB.5)**  $\lambda \in D(\omega_{\text{QB}}^{-1})$ .

**(QB.6)**  $\lambda$  は  $k_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, d$  について微分可能である.

(QB.7)

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial_j \lambda(k)}{\omega_{\text{QB}}(k)} \right|^2 + \left| \frac{\partial_j \omega_{\text{QB}}(k) \lambda(k)}{\omega_{\text{QB}}(k)^2} \right|^2 dk < \infty.$$

ここで,  $\partial_j := \frac{\partial}{\partial k_j}$  である.

(QB.8)  $\lambda$  の台は有界である.

定理 3

(QB.1)-(QB.8) を仮定する. この時, 任意の  $(g_1, g_2, g_3, g_4) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$  に対して  $H_{\text{QB}}$  は基底状態を持つ.

注意: 基底状態の存在性は結合定数に制限を掛ければ仮定 (QB.3)-(QB.8) をぐっと減らすことができる.

(QB.9)  $\lambda \in C^2(\mathbb{R}^d)$ .

(QB.10)  $|g_3| = O(g_4^{1+\alpha})$   $\alpha > 0$ .

定理 4

(QB.1)-(QB.10) を仮定する. この時十分小さな結合定数  $|g_j|$   $j = 1, 2, 3, 4$ , に対して, 次が成立する.

$$m(H_{\text{QB}}) \leq m(A).$$

特に  $A$  の基底状態における縮退度が 1 である時には, 十分小さな結合定数  $|g_j|$   $j = 1, 2, 3, 4$  に対して  $H_0^{\text{QB}}$  の基底状態における縮退度も 1 である.

## 参考文献

- [A1] A. Arai, An abstract sum formula and its applications to special functions, J. Math. Anal. Appl. **167** (1992), 245–265.
- [A2] A. Arai, A theorem on essential selfadjointness with application to Hamiltonians in nonrelativistic quantum field theory. J. Math. Phys. **32** (1991), no. 8, 2082–2088.
- [A3] A. Arai, Essential spectrum of a self-adjoint operator on an abstract Hilbert space of Fock type and applications to quantum field Hamiltonians. J. Math. Anal. Appl. **246** (2000), no. 1, 189–216.
- [A4] A. Arai, Perturbation of embedded eigenvalues: a general class of exactly soluble models in Fock spaces. Hokkaido Math. J. **19** (1990), no. 1, 1–34.
- [AF] A. Arai and D. Funakawa, Upper Bounds on the Degeneracy of the Ground State in Quantum Field Models. Adv. Math. Phys. Open access journal (2015).
- [AH] A. Arai and M. Hirokawa, On the existence and uniqueness of ground states of a generalized spin-boson model, J. Funct. Anal. **151** (1997), 455–503.
- [AHH1] A. Arai, M. Hirokawa and F. Hiroshima, On the absence of eigenvectors of Hamiltonians in a class of massless quantum field models without infrared cutoff, J. Funct. Anal. **168** (1999), 470–497.
- [AHH2] A. Arai, M. Hirokawa and F. Hiroshima, Regularities of ground states of quantum field models, Kyushu J. Math. **61** (2007), 321–372.
- [BFS] V. Bach, J. Fröhlich and I. M. Sigal, Quantum electrodynamics of confined nonrelativistic particles, Adv. Math. **137** (1998), 299–395.
- [G] Gérard, C. On the existence of ground states for massless Pauli-Fierz Hamiltonians. Ann. Henri Poincaré **1** (2000), no. 3, 443–459.
- [GLL] Griesemer, M; Lieb, Elliott H.; Loss, M. Ground states in non-relativistic quantum electrodynamics. Invent. Math. **145** (2001), no. 3, 557–595.
- [F] W. G. Faris, Invariant cones and uniqueness of the ground state for fermion systems, J. Math. Phys. **13** (1972), 1285–1290.
- [FG] J. Fröhlich, M. Griesemer, B. Schlein, Asymptotic completeness for Rayleigh scattering. Ann. Henri Poincaré **3** (2002), no. 1, 107–170.

- [H1] F. Hiroshima, Multiplicity of ground states in quantum field models: applications of asymptotic fields, *J. Funct. Anal.* **224** (2005), 431–470.
- [H2] F. Hiroshima, Perturbations of embedded eigenvalues in quantum field theory, *Sûgaku* **57** (2005), 70–92 (in Japanese); *Sugaku Expositions* **21** (2008), 177–207 (English translation).
- [Ht] T. Hidaka, Existence of a ground state for the Nelson model with a singular perturbation. *J. Math. Phys.* **52** (2011), no. 2, 022102, 21 pp.
- [HS] Helffer, B.; Sjöstrand, J. Équation de Schrödinger avec champ magnétique et équation de Harper. *Springer Lecture Notes in Phys* **345**, 1989, pp118-197.
- [LL] E. H. Lieb, M. Loss, *Analysis*, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, 1997
- [M1] T. Miyao, Nondegeneracy of ground states in nonrelativistic quantum field theory, *J. Operator Theory* **64** (2010), 207–241.
- [M2] T. Miyao, Self-dual cone analysis in condensed matter physics, *Rev. Math. Phys.* **23** (2011), 749–822.
- [RS1] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1972.
- [RS2] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier*
- [RS3] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics III: Scattering Theory*, Academic Press, New York, 1979. *Analysis, Self-adjointness*, Academic Press, New York, 1975.
- [RS4] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics IV: Analysis of Operators*, Academic Press, New York, 1978.
- [S] I. Sasaki, Ground state of a model in relativistic quantum electrodynamics with a fixed total momentum, arXiv: math-ph/0606029.



# パラレルセッション 会場D





# Remarks on Kato's inequality when $\Delta_p u$ is a measure

Toshio Horiuchi, Xiaojing Liu

December 25, 2015

## 1 Introduction

Let  $\Omega$  be a bounded domain of  $\mathbf{R}^N$  ( $N \geq 1$ ). In this article, we shall study Kato's inequality when  $\Delta_p u$  is a measure. By  $\Delta_p u$  we denote a  $p$ -Laplace operator:

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u), \quad (1.1)$$

where  $1 < p < \infty$  and  $\nabla u = (\partial u / \partial x_1, \partial u / \partial x_2, \dots, \partial u / \partial x_N)$ .

The classical Kato's inequality for a Laplacian asserts that given any function  $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  such that  $\Delta u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ , then  $\Delta u^+$  is a Radon measure and the following holds:

$$\Delta u^+ \geq \chi_{[u \geq 0]} \Delta u \quad \text{in } D'(\Omega), \quad (1.2)$$

where  $u^+ = \max[u, 0]$ . A similar inequality holds when  $\Delta u$  is replaced by  $\Delta_p u$  under additional assumptions on distributional derivatives of  $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  (see e.g. [7, 8, 10]).

Our main result (see Theorem 2.1 and Corollary 2.1 below) further extends Kato's inequality involving  $\Delta_p$  to the case where  $\Delta_p u \in M(\Omega)$ , where  $M(\Omega)$  denotes the space of Radon measures on  $\Omega$ . In other words,  $\mu \in M(\Omega)$  if and only if, for every  $\omega \subset\subset \Omega$ , there exists  $C_\omega > 0$  such that  $|\int_\omega \varphi d\mu| \leq C_\omega \|\varphi\|_{L^\infty}$ , for any  $\varphi \in C_c^\infty(\omega)$ .

We begin with recalling that for any  $\mu \in M(\Omega)$  can be uniquely decomposed as a sum of two Radon measures on  $\Omega$  (see e.g. [4, 6]):  $\mu = \mu_d + \mu_c$ , where

$$\begin{cases} \mu_d(A) = 0 & \text{for any Borel measurable set } A \subset \Omega \text{ such that } C_p(A, \Omega) = 0, \\ |\mu_c|(\Omega \setminus F) = 0 & \text{for some Borel measurable set } F \subset \Omega \text{ such that } C_p(F, \Omega) = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Here by  $C_p(K, \Omega)$  we denote a  $p$ -capacity of a Borel set  $K$  relative to  $\Omega$  (for the precise definition see Definition 2.3 in §2). We note that  $(\mu_d)^+ = (\mu^+)_d$  and  $(\mu_c)^+ = (\mu^+)_c$  hold by the definition.

Then we recall an admissible class of functions for the strong maximum principle in [10]:

**Definition 1.1. (Admissible class in  $W_{\text{loc}}^{1,p^*}(\Omega)$ )** Let  $1 < p < \infty$  and  $p^* = \max(1, p-1)$ . A function  $u \in W_{\text{loc}}^{1,p^*}(\Omega)$  is said to be admissible if and only if  $\Delta_p u \in M(\Omega)$  and there exists a sequence  $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  such that:

1.  $u_n \rightarrow u$  a.e. in  $\Omega$ ,  $u_n \rightarrow u$  in  $W_{\text{loc}}^{1,p^*}(\Omega)$  as  $n \rightarrow \infty$ .
2.  $\Delta_p u_n \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) and

$$\sup_n |\Delta_p u_n|(\omega) < \infty \quad \text{for every } \omega \subset\subset \Omega. \quad (1.4)$$

**Proposition 1.1.** 1. Assume that a function  $u \in W_{\text{loc}}^{1,p^*}(\Omega)$  is admissible. Then  $u^+ = \max[u, 0]$  and  $u^- = \max[-u, 0]$  are also admissible.

2. Assume that  $p = 2$ . Then a function  $u \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$  is admissible if  $\Delta u \in M(\Omega)$ .

3. A function  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  is admissible if  $\Delta_p u \in M(\Omega)$ .

## 2 Main results

**Theorem 2.1.** Let  $N \geq 1$ ,  $1 < p < \infty$  and  $\Omega$  be a bounded domain of  $\mathbf{R}^N$ . Let  $\Phi$  be a  $C^1$  convex function such that  $0 \leq \Phi' < \infty$  on  $\mathbf{R}$ . Let  $u \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$  if  $p = 2$  and let  $u \in W_{\text{loc}}^{1,p^*}(\Omega)$  if  $p \neq 2$ . Assume that  $\Delta_p u \in M(\Omega)$ . Moreover if  $p \neq 2$ , assume that  $u$  is admissible in the sense of Definition 1.1. Then we have

$$\Delta_p \Phi(u) \geq \Phi'(u)^{p-1} (\Delta_p u)_d - \|\Phi'\|_{L^\infty(\mathbf{R})} (\Delta_p u)_c^- \quad \text{in } D'(\Omega). \quad (2.1)$$

From this theorem it follows that we have:

**Corollary 2.1.** Assume the same assumptions in Theorem 2.1. Then it holds that

$$\Delta_p(u^+) \geq \chi_{[u \geq 0]} (\Delta_p u)_d - (\Delta_p u)_c^- \quad \text{in } D'(\Omega), \quad (2.2)$$

$$\Delta_p |u| \geq \text{sgn}(u) (\Delta_p u)_d - |\Delta_p u|_c \quad \text{in } D'(\Omega), \quad (2.3)$$

where  $\text{sgn}(t) = 1$  for  $t > 0$ ,  $\text{sgn}(t) = -1$  for  $t < 0$ , and  $\text{sgn}(0) = 0$ .

**Theorem 2.2. ( Inverse maximum principle )** Let  $N \geq 1$ ,  $1 < p < \infty$  and let  $\Omega$  be a bounded domain of  $\mathbf{R}^N$ . Let  $u \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$  if  $p = 2$  and let  $u \in W_{\text{loc}}^{1,p^*}(\Omega)$  if  $p \neq 2$ . Assume that  $u \geq 0$  a.e. in  $\Omega$  and  $\Delta_p u \in M(\Omega)$ . Moreover if  $p \neq 2$ , assume that  $u$  is admissible in the sense of Definition 1.1. Then we have

$$(-\Delta_p u)_c \geq 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (2.4)$$

**Example 1.** Let  $u = |x|^\alpha$  for  $\alpha = (p - N)/(p - 1)$ .

1.  $u$  satisfies

$$\Delta_p u = \alpha |\alpha|^{p-2} c_N \delta,$$

where  $\delta$  denotes a Dirac mass and  $c_N$  denotes the surface area of the  $N$ -dimensional unit ball  $B_1$ . It is easy to see that  $|\nabla u| \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$  if and only if  $p > 2 - 1/N$ . When  $1 < p \leq 2 - 1/N$  holds, we can consider  $u$  as a renormalized solution. We recall that if  $p \leq 2 - 1/N$ , then we cannot expect the solution of an equation of the form  $\Delta_p u = f$  (a Radon measure) to be in  $W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$ . For the detail, see e.g. [1, 2, 5, 11, 12].

2. If  $2 - 1/N \leq p \leq N$ , then  $(-\Delta_p(u^+))_c = (-\Delta_p u)_c^+ = -\alpha |\alpha|^{p-2} c_N \delta \geq 0$ . If  $p > N$ , then  $(-\Delta_p(u^+))_c = (-\Delta_p u)_c^+ = 0$  and  $\Delta_p(u^+) \geq \chi_{[u \geq 0]} (\Delta_p u)_d = \alpha |\alpha|^{p-2} c_N \delta \geq 0$ .

3. When  $p > 2 - 1/N$ ,  $u$  is admissible in  $W^{1,p^*}(B_1)$ . In fact,  $u = |x|^\alpha$  is approximated by a sequence of admissible functions  $v_{\alpha(n)} = |x|^{\alpha(n)} \in L^1(B_1)$  where  $\alpha(n) = \alpha + 1/(n(p - 1))$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Then, in the sense of measures we have

$$\Delta_p v_{\alpha(n)} = \frac{1}{n} |\alpha(n)|^{p-2} \alpha(n) |x|^{1/n-N} \rightarrow \Delta_p u \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

Therefore there exists a sequence  $\{n_{\alpha(n)}\}$  such that  $\{n_{\alpha(n)}\} \rightarrow \infty$  as  $n \rightarrow \infty$  and a sequence of mollification  $\{(v_{\alpha(n)})_p^{n_{\alpha(n)}}\}$  satisfies the conditions in Definition 1.1

### 3 Lemmas

Let us describe lemmas which are useful for the proof of the main results. Given  $k > 0$ , we denote by  $T_k: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  a truncation function

$$T_k(s) := \begin{cases} k & \text{if } s \geq k, \\ s & \text{if } -k < s < k, \\ -k & \text{if } s \leq -k. \end{cases} \quad (3.1)$$

Since  $T_k|_{\mathbf{R}_+}$  is concave, we have the following lemma in the spirit of the standard  $L^1$ -version of Kato's inequality (see [9]).

**Lemma 1.** *Assume that  $v \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega)$ ,  $\Delta_p v \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$  and  $v \geq 0$  a.e. in  $\Omega$ . Then, for any  $k \geq 0$  we have*

$$\Delta_p(T_k(v)) \leq t_k(v)\Delta_p v \quad \text{in } D'(\Omega), \quad (3.2)$$

where the function  $t_k: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$  is given by

$$t_k(s) := \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq s \leq k, \\ 0 & \text{if } s > k. \end{cases}$$

**Lemma 2.** *Let  $N \geq 1$ ,  $1 < p < \infty$ ,  $p \neq 2$  and  $\Omega$  be a bounded domain of  $\mathbf{R}^N$ . Let  $\Phi$  be a  $C^1$  convex function such that  $0 \leq \Phi' < \infty$  on  $\mathbf{R}$ . Let  $u \in W_{\text{loc}}^{1,p^*}(\Omega)$ . Assume that  $u$  is admissible in the sense of Definition 1.1. Then we have the followings:*

1.  $T_k(u) \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega)$  for every  $k > 0$ . Moreover, given  $\omega \subset\subset \omega' \subset\subset \Omega$ , there exist positive constant  $C$  such that

$$\int_{\omega} |\nabla T_k(u)|^p \leq Ck \left( \int_{\omega'} |\Delta_p u| + \int_{\omega'} |\nabla u|^{p-1} \right), \quad (3.3)$$

where positive constant  $C$  are independent on each  $u$ .

2. If  $u \geq 0$  a.e. in  $\Omega$ , then  $\Delta_p(T_k(u))$  is a Radon measure for every  $k > 0$  and we have

$$\Delta_p(T_k(u)) \leq (\Delta_p u)^+ \quad \text{in } \Omega. \quad (3.4)$$

The next lemma is seen in [3]; Theorem 2.1.

**Lemma 3.** *Let  $1 < p < \infty$ . Let  $\nu \in M(\Omega)$ . Then  $\nu \in L^1(\Omega) + W^{-1,p'}(\Omega)$  if and only if  $\nu$  is a diffuse measure. Here  $p' = p/(p-1)$  and  $W^{-1,p'}(\Omega)$  is the dual space of  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .*

When  $p = 2$ , the next lemma is seen in [4]; Lemma 2.1.

**Lemma 4.** *Assume that  $\nu \in M(\Omega)$  is a diffuse measure with respect to  $p$ -capacity (i.e.  $\nu_c = 0$ ). Let  $\{v_n\}$  be a sequence in  $L^\infty(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$  such that  $\|v_n\|_\infty \leq C$  and  $v_n \rightarrow v$  weakly in  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . Then*

$$v_n \rightarrow v \quad \text{in } L_{\text{loc}}^1(\Omega; d\nu).$$

Equivalently, there exists a subsequence  $\{v_{n_k}\}$  converging to  $v$   $|\nu|$ -a.e. in  $\Omega$ . Here  $L_{\text{loc}}^1(\Omega; d\nu) = \{f : \int_{\omega} |f| d\nu < \infty, \forall \omega \subset\subset \Omega\}$

Without loss of generality in the proof of Theorem 2.1, we may assume that  $\Phi \in C^2(\mathbf{R})$ ,  $0 \leq \Phi' \leq 1$  and  $\Phi''$  has compact support in  $\mathbf{R}$ . Since  $\Phi$  is convex and  $\Phi'$  is uniformly bounded, we see that both limit  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Phi'(t)$  exist. Then we prepare the following lemma.

**Lemma 5.** *Assume  $u \in W_{\text{loc}}^{1,p^*}(\Omega)$  is admissible. Let  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ . Let  $\Phi$  be a  $C^2$  convex function such that  $\text{supp } \Phi''$  has compact support and*

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} (\Phi'(t))^{p-2} \Phi''(t) < \infty. \quad (3.5)$$

Then  $\Phi'(u_n)^{p-1} \varphi \rightarrow \Phi'(u)^{p-1} \varphi$  weakly in  $W_0^{1,p}(\Omega)$  as  $n \rightarrow \infty$ .

## References

- [1] P. Bénilan, L. Boccardo, T. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre and J.L. Vazquez, An  $L^1$ -theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4<sup>e</sup> série*, tome 22, No.2, (1995), 241-273.
- [2] L. Boccardo, T. Gallouët, Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data, *J. Funct. Anal.* vol. 87, 1989, 149-169
- [3] L. Boccardo, T. Gallouët, L. Orsina, Existence and uniqueness of entropy solutions for nonlinear elliptic equations with measure data, *Annales de l'I.H.P. section C*, tome 13 no. 5 (1996), p. 539-551.
- [4] H. Brezis, A. Ponce, Kato's inequality when  $\Delta u$  is a measure, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 338 (2004),599-604.
- [5] M.F. Bidaut-Véron, M. Garcia-Huidobro, L. Véron, Remarks on some quasilinear equations with gradient terms and measure data, arXiv:1211.6542 [math.AP] 13 Feb (2013).
- [6] L. Dupaigne and A. Ponce, Singularities of positive supersolutions in elliptic PDEs, *Selecta Math. (N.S.)* 10, (2004), 341-358.
- [7] T. Horiuchi, Some remarks on Kato's inequality, *J. of Inequal. & Appl.*, vol. 6, (2001), 29-36.
- [8] T. Horiuchi, Kato's Inequalities for Degenerate Quasilinear Elliptic Operators, *Kyungpook Mathematical Journal* 2008 Vol. 48, No. 1, 15 – 24
- [9] T. Kato, Schrödinger operators with singular potentials. *Israel J. Math.*13 (1972), 135-148.
- [10] X. Liu, T. Horiuchi, Remarks on the strong maximum principle involving  $p$ -Laplacian, preprint.
- [11] F. Maeda, Renormalized solutions of Dirichlet problems for quasilinear elliptic equations with general measure data, *Hiroshima Math. J.*, 38 (2008), 51-93.
- [12] G.D. Maso, F. Murat, L. Orsina, A. Prignet, Renormalized solutions of elliptic equations with general measure data, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 28, (1999), 741-808457-468.
- [13] E. Stredulinsky, Weighted Inequalities and Degenerate Elliptic Partial Differential Equations, *Lecture Notes in Mathematics* vol. 1074, 1984, 96-139.

# Zero-point of continuous closed 1-form and Lusternik-Schnirelman type Category

渡邊 一義 Kazuyoshi Watanabe (東北大学理学研究科数学専攻)\*

## 1 Introduction

closed 1-form は Novikov 理論などいろいろな側面から研究されており, 現在では Symplectic 幾何など数学の様々な分野で応用されている. 2002 年には M.Farber により closed 1-form に対する Lusternik-Schnirelmann 型理論が研究された. Lusternik-Schnirelmann category とは位相空間に対して何枚の可縮な open set で被覆できるかという量である. 古典的な Lusternik-Schnirelmann 理論は多様体の category がなめらかな関数の特異点の個数の下界になっているが, 1-form に対する Lusternik-Schnirelmann 理論は 1-form の零点の個数だけでなく, ホモクリニックサイクルという多様体上の力学系に関する情報も与える. コホモロジークラスに關係する category を定義するために Farber は位相空間上の closed 1-form を定義した. これを連続的な closed 1-form と呼ぶことにする. このレポートでは連続的な closed 1-form 及びコホモロジークラスに關係した Lusternik-Schnirelmann Category に関する要約を述べ, 多様体に限らず CW-complex 上で連続的な closed 1-form の零点を適切に定めることで前述の Lusternik-Schnirelmann category に関する定理が成立することを紹介する.

## 2 Continuous closed 1-form

$X$  を CW-complex と仮定する. まず closed 1-form を一般化した, “連続的な closed 1-form”について述べる.

**Definition 1.**  $X$  上の連続的な closed 1-form  $\omega$  とは  $\mathcal{U} = \{U\}$  を  $X$  の開被覆として連続実関数  $f_U : U \rightarrow \mathbf{R}$  の組  $\{f_U\}_{U \in \mathcal{U}}$  で次を満たすものと定義する: 任意の組  $U, V \in \mathcal{U}$  に対して,

$$f_U|_{U \cap V} - f_V|_{U \cap V} : U \cap V \rightarrow \mathbf{R} \quad (1)$$

が局所定数関数になっている

2つの 1-forms  $\{f_U\}_{U \in \mathcal{U}}, \{g_V\}_{V \in \mathcal{V}}$  が 1-form として一致するとは  $\{f_U, g_V\}_{U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}}$  が再び  $X$  上の連続的な closed 1-form になっていると定義する. 任意の  $X$  上の連続関数  $f : X \rightarrow \mathbf{R}$  は開被覆として  $\mathcal{U} = \{X\}$  をとって closed 1-form としてあらわされる. それを  $d f$  とあらわす.

$\omega = \{f_U\}_{U \in \mathcal{U}}$  を連続的な closed 1-form として,  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  を  $X$  上の連続的な道とする.  $[0, 1]$  の細分  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = 1$  を, 任意の  $i$  に対して  $\gamma[t_i, t_{i+1}]$  が一つの開集合  $U_i \in \mathcal{U}$  に含まれるようにとる. こ

---

\* email:kazuyoshi.watanabe.q5@dc.tohoku.ac.jp

のとき, 道  $\gamma$  に沿った連続的な closed 1-form  $\omega$  の積分を次のように定める.

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_{i=1}^{N-1} [f_{U_i}(\gamma(t_{i+1})) - f_{U_i}(\gamma(t_i))] \quad (2)$$

この積分は細分や開被覆の取り方に依らない.

**Lemma 1.**  $X$  上の始点と終点と同じ道  $\gamma, \gamma'$  に対して, 両者が境界について, ホモトピックであるなら, 連続的な closed 1-form のそれぞれの道に沿った積分の値は一致する

### 3 Category with respect to a cohomology class

Lusternik-Schnirelmann category はいかに位相空間が複雑かを示す量であった. 以下の定義はその category を 1-form のあらわす方向にどれだけ複雑かを示す量として拡張したものである.

**Definition 2.**  $X$  を有限型の CW-complex として,  $\xi \in H^1(X; \mathbf{R})$  をコホモロジークラスとする.  $\text{cat}(X, \xi)$  を任意の自然数  $N > 0$  に対してつぎを満たす開被覆が存在するような最小の整数  $k$  とする.

$$X = F \cup F_1 \cup \dots \cup F_k, \quad (3)$$

(a)  $j = 1, \dots, k$  に対し, 包含写像  $F_j \rightarrow X$  はそれぞれ null-homotopic.

(b) あるホモトピー  $h_t : F \rightarrow X$  ( $t \in [0, 1]$ ) があって次を満たす:

$h_0$  は包含写像  $F \rightarrow X$  であり, 任意の  $F$  上の点  $x \in F$  に対して  $\int_{\gamma_x} \omega \leq -N$  が成り立つ. ここで  $\omega$  は  $\xi$  をあらわす連続的な closed 1-form として, また  $\gamma_x(t) = h_t(x)$  である.

#### Remark

古典的な Lusternik-Schnirelmann category との比較をする. 一般には次が成立する.

$$\text{cat}(X, \xi) \leq \text{cat}(X) \quad (4)$$

ここで  $\text{cat}(X)$  は Lusternik-Schnirelmann category をあらわす.

また, コホモロジーが 0 の時, 両者は一致する.

$$\text{cat}(X, 0) = \text{cat}(X) \quad (5)$$

### 4 The Estimate of the number of zeros

ここでは, 連続的な closed 1-form の零点を定める. 1-form の定める力学系を利用して, 零点を定めたい.

**Definition 3.**  $\omega = \{f_U\}_{U \in \mathcal{U}}$  を  $X$  上の連続的な closed 1-form とする.  $\omega$  の勾配的な流れとは,  $X$  上の連続的な流れ  $\varphi^t$  で  $U - (\text{Fix}(\varphi^t) \cap U)$  上,  $f_U$  は流れに沿って狭義単調減少になっていることである.

また,  $\omega$  の任意の勾配的な流れに対して, 点  $p \in X$  が固定点になっているとき, 点  $p$  は  $\omega$  の零点である, という.

古典的な Lusternik-Schnirelman category の理論では category が滑らかな関数の臨界点の下界になっていた。1-form に関する場合、力学系が特殊な状況であれば、零点の下界になっていることがわかる。まず固定点と category の関係を述べる。

**Theorem 1.**  $X$  を有限型の CW-complex とし、 $\omega$  を  $X$  上の  $\xi \in H^1(X; \mathbf{R})$  をあらわす連続的な closed 1-form とする。  $\varphi$  を  $\omega$  の勾配的な流れとして固定点が  $0 < k < \infty$  個あるとする。このとき  $k \leq \text{cat}(X, \xi)$  ならば、 $\varphi$  はホモクリニックサイクルを持つ。

ホモクリニックサイクルとは流れの軌跡の列  $\gamma_1(t), \gamma_2, \dots, \gamma_n(t)$  があつて  $i = 1, \dots, n-1$  に対して次の式が成り立つもののことである。

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma_i(t) = p_{i+1} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma_{i+1}(t), \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma_n(t) = p_1 = \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma_1(t). \quad (6)$$

零点の定義より、次がわかる。

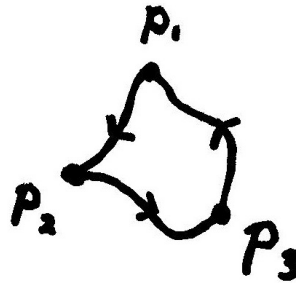


図1 Homoclinic cycle

**Corollary 1.**  $X$  を有限型の CW-complex とし、 $\omega$  を  $X$  上の  $\xi \in H^1(X; \mathbf{R})$  をあらわす連続的な closed 1-form とする。

(1)  $\omega$  が有限個の零点  $p_1, \dots, p_k$  をもつとする。もし  $k < \text{cat}(X, \xi)$  ならば、 $p_1, \dots, p_k$  を固定点とするような  $\omega$  の勾配的な流れはホモクリニックサイクルを持つ。

(2)  $\omega$  がホモクリニックサイクルを持たないような勾配的な流れをもつとすると、 $\omega$  は少なくとも  $\text{cat}(X, \xi)$  個の零点を持つ。

## 5 Examples

連続的な closed 1-form と category の計算例を挙げる。

種数2の閉曲面  $T_1$  とその穴を一つつぶしたようなもの  $T_2$  を考え、図のように穴に対して回るように 1-form をとる。すると、 $T_1$  の方は滑らかな多様体となり、1-form は滑らかなものとしてとれる。一方  $T_2$  に対しては、多様体ではなく、1-form は連続的な closed 1-form としてあらわすことができる。つまり、Farber 氏の方法では  $d\theta_1$  を測ることができても、 $d\theta_2$  をみることはできない。だが、ここで述べた方法により、 $d\theta_2$  の零点も定義されることができ、個数も測ることができる。

ここで  $T_1$  上で、 $d\theta_1$  の零点の個数は2個であり、 $\text{cat}(T_1, [d\theta_1]) = 1$  である。

また、 $T_2$  上で、 $d\theta_2$  の零点の個数は1個であり、 $\text{cat}(T_2, [d\theta_2]) = 1$  である。



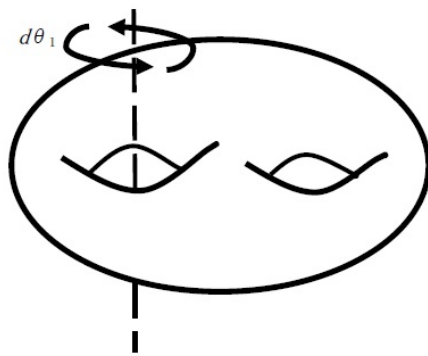


图2  $T_1$

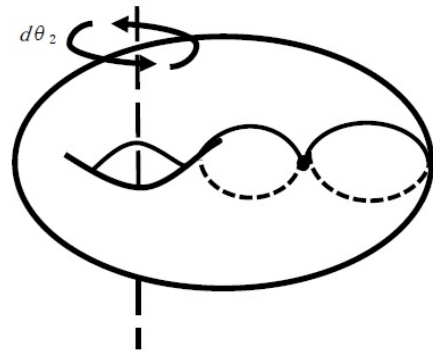


图3  $T_2$

## 参考文献

- [1] M.Farber, "Topology of closed one forms", Msth. Surveys Monogr., vol108, Amer. Math. Soc., Providence, RI 2004.
- [2] M.Farber,"Lusternik-Schnirelman theory and dynamics", (South Hadley,MA,2001),Contemp.Math.,vol.316,Amer.Math.Soc.,Providence,RI 2002,pp.95-111.
- [3] M.Farber, T.Kappeler, J.Latschev, and E.Zehnder, "Lyapunouv 1-forms for flows", *Ergodic Theory Dynam. Systems* **24**:5 (2004), 1451-1475.
- [4] O.Cornea, G.Lupton, J. Oprea, and D.Tanré, "Lusternik-Schnirelmann category", Math. Surveys Monogr., vol. 103, Amer. Math Soc., 2003

# 同変 Čech-de Rham 理論とその応用

藤沢 好 (Ko FUJISAWA)\*

## 1 序

多様体の位相不変量を調べる一つの道具として de Rham コホモロジーと呼ばれるものがある. すなわち  $M$  を  $C^\infty$  多様体とすると, その上の  $p$  次微分形式全体を  $\Omega^p(M)$  とし外微分  $d$  を考えると  $d^2 = 0$  が成り立ち, これより de Rham コホモロジー

$$H^*(M) = \text{Ker}d / \text{Im}d$$

が定義される. これは比較的ベタな計算で多様体の不変量を求められうる対象ではあるが, まだボンヤリしている点がある. たとえば  $E \rightarrow M$  をベクトル束とすると, その上の微分形式のファイバー積分は通常ファイバー方向に関してコンパクトな台を持つ必要がある. これでは, たとえば Thom 類などを考える場合, それを代表する微分形式が (適当な正規化により) 式としてボンヤリしてしまいがちで, 特性類や種々の不変量をベタな計算で導出するのに不向きである. これらの欠点を解消する一つ方法として諏訪立雄教授の Čech-de Rham 理論がある. 本稿ではこの Čech-de Rham 理論をその同変版へ拡張したもの, すなわち Lie 群の作用が与えられた空間に対して定義される不変量である同変コホモロジーへ拡張した理論について簡単に説明する (通常の Čech-de Rham 理論は群が自明に作用する特殊な場合だと思えることに注意しておく)

## 2 Cartan 複体による同変コホモロジーの定義

$G$  をコンパクト Lie 群, その Lie 環を  $\mathfrak{g}$   $M$  を  $G$ -多様体とする. このとき Lie 環  $\mathfrak{g}$  には  $G$  の随伴作用  $Ad_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  があり, また de Rham 複体  $\Omega^*(M)$  には  $g^{-1} \in G$  による左移動  $L_g^{-1}$  から誘導される引き戻し  $g^* := (L_g^{-1})^* : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M)$  によって作用する.

**定義 2.1**  $M$  上の同変微分形式とは, 多項式写像  $\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow \Omega^*(M)$  で次の図式が可換となるものをいう:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\alpha} & \Omega^*(M) \\ Ad_g \downarrow & & \downarrow g^* \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\alpha} & \Omega^*(M) \end{array}$$

これは  $\Omega_G^*(M) := (S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega^*(M))^G$  ( $S(\mathfrak{g}^*)$  は  $\mathfrak{g}^*$  の対称代数, もしくは  $\mathfrak{g}$  上の多項式環) の元とみなされ, 次のようにして DGA をなす:

$$\begin{aligned} \deg \alpha &= 2(\text{多項式次数}) + (\text{微分形式の次数}) \\ d_{eq} \alpha(X) &= d\alpha(X) - \iota_X \alpha(X) \quad (X \in \mathfrak{g}) \end{aligned}$$

\* 北海道大学大学院理学院数学専攻 s143035@math.sci.hokudai.ac.jp

ここで  $\iota_X$  はベクトル場  $X_M = \frac{d}{dt}|_{t=0} \exp(-tX)$  による内部微分である.

**定義 2.2**  $(\Omega_G^*(M), d_{eq})$  を Cartan 複体と呼び, そのコホモロジー

$$H_G^*(M) = \ker d_{eq} / \text{Im} d_{eq}$$

を  $M$  の同変 de Rham コホモロジーと呼ぶ

### 3 同変 Čech-de Rham コホモロジー

簡単のため (また応用のため)  $G$ -多様体  $M$  が 2 つの  $G$ -不変な開集合による被覆  $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$  を持つものとする.

**定義 3.1**  $M$  の被覆  $\mathcal{U}$  に対して

$$\begin{aligned} \Omega_G^r(\mathcal{U}) &= \Omega^r(U_0) \oplus \Omega^r(U_1) \oplus \Omega^{r-1}(U_0 \cap U_1) \\ D_{eq} : \Omega_G^r(\mathcal{U}) &\rightarrow \Omega_G^{r+1}(\mathcal{U}), \quad (\xi_0, \xi_1, \xi_{01}) \mapsto (d_{eq}\xi_0, d_{eq}\xi_1, \xi_1 - \xi_0 - d_{eq}\xi_{01}) \end{aligned}$$

を考えると,  $(\Omega_G^*(\mathcal{U}), D_{eq})$  は複体をなし, これを Čech Cartan 複体と呼ぶ. またそのコホモロジーを  $H_G^*(\mathcal{U})$  と書き,  $\mathcal{U}$  に関する同変 Čech-de Rham コホモロジーと呼ぶ.

**定理 3.2** 自然な準同型  $r : \Omega_G^r(M) \rightarrow \Omega_G^r(U_0) \oplus \Omega_G^r(U_1)$  は次のコホモロジーの同型を誘導する:

$$H_G^r(M) \xrightarrow{\sim} H_G^r(\mathcal{U})$$

これは  $\mathcal{U}$  に従属する同変 1 の分割を用いて証明される. 同変 Čech-de Rham コホモロジーを用いれば自然に同変相対 de Rham コホモロジーが定義される:

**定義 3.3**  $(\Omega_G^*(\mathcal{U}), D_{eq})$  の部分複体として

$$\Omega_G^r(\mathcal{U}, U_0) = \{\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_{01}) \in \Omega_G^r(\mathcal{U}) \mid \xi_0 = 0\}$$

を考え, このコホモロジーを  $H_G^*(\mathcal{U}, U_0)$  と書き, 同変相対 de Rham コホモロジーと呼ぶ

**定義 3.4**  $\pi : E \rightarrow M$  を  $G$ -同変  $r$  次元ベクトル束とする (すなわち群が束写像として作用しているベクトル束). このとき  $E$  の  $G$ -被覆  $\mathcal{W} = \{W_0, W_1\}$  を  $W_0 = E \setminus M$ ,  $W_1 = E$  と定める. またある  $G$ -不変な Riemann 計量に関する  $E$  の

$$\pi_1 : T_1 \rightarrow M \text{ を閉単位 } r\text{-球束, } \pi_{01} : T_{01} \rightarrow M \text{ を単位 } (r-1)\text{-球面束}$$

を考える (ただし  $T_{01}$  は  $T_1$  の境界の向きと逆). このときファイバー積分  $\pi_*$  を次のように定める:

$$\pi_* : \Omega_G^p(\mathcal{W}, W_0) \rightarrow \Omega_G^{p-r}(M), \quad \alpha = (0, \alpha_1, \alpha_{01}) \mapsto \pi_*\alpha := (\pi_1)_*\alpha_1 + (\pi_{01})_*\alpha_{01}$$

ここで  $(\pi_1)_*$  および  $(\pi_{01})_*$  は通常ファイバー積分である

**定理 3.5** ファイバー積分  $\pi_* : \Omega_G^p(\mathcal{W}, W_0) \rightarrow \Omega_G^{p-r}(M)$  はコホモロジーの準同型を誘導する:

$$\pi_* : H_G^p(\mathcal{W}, W_0) \rightarrow H_G^{p-r}(M)$$

**定理 3.6** 次の  $\psi_{eq}^E \in H_G^r(\mathcal{W}, W_0)$  を同変 Thom 類と呼ぶ：

$$\pi_* : H_G^r(\mathcal{W}, W_0) \rightarrow H_G^0(M), \quad \pi_* \psi_{eq}^E = 1$$

これは次のような同変 Čech-de Rham コサイクルで代表される：

$$(0, \pi^* \varepsilon_{eq}, -\psi_{eq}) \in \Omega_G^r(\mathcal{W}, W_0)$$

ここで  $\varepsilon_{eq}$  は  $M$  上の  $d_{eq}$ -閉同変  $r$ -形式 (同変 Euler 類) ,  $\psi_{eq}$  は  $E \setminus M$  上の同変  $(r-1)$ -形式 (同変角形式) で以下の等式を満たす

$$d_{eq} \psi_{eq} = -\pi^* \varepsilon_{eq} \text{ on } E \setminus M, \quad -(\pi_{01})_* \psi_{eq} = 1$$

## 4 同変特性類とその局所化

3章では同変 Thom 類の比較的明示的なコサイクルの表示を見たが、この章では同変 Chern-Weil 理論と諏訪理論を利用して同変 Thom 類の同変 top Chern 類の局所化による定式化について論じる。これはベタな微積の計算で確かめることができ、Mathai-Quillen らによるフェルミオン積分や超対称性の言葉を経由した同変 Thom 形式の表示と比べて頗る初等的である。以下では  $\pi : E \rightarrow M$  を  $G$ -同変  $r$ -次元ベクトル束とし、 $E$  に値を持つ微分形式  $\Omega^*(M, E)$  には自然な  $G$  作用が与えられているとする。

**定義 4.1** 接続  $\nabla : \Omega^*(M, E) \rightarrow \Omega^{*+1}(M, E)$  で

$$g \cdot \nabla = \nabla \cdot g$$

を満たすものを  $G$ -不変接続と呼ぶ。

**定義 4.2**  $G$ -不変接続  $\nabla$  に対し

$$(\nabla_{eq} \alpha)(X) := (\nabla - \iota_X) \alpha(X) \quad \alpha \in S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega^*(M, E)$$

を  $G$ -同変接続と呼び、このとき

$$\nabla_{eq} : \Omega_G^*(M, E) \rightarrow \Omega_G^{*+1}(M, E)$$

となり、また  $K_{eq}(X) = (\nabla_{eq})(X)^2 + L_X^E$  を  $G$ -同変曲率と呼ぶ。ここで  $L_X^E$  は  $\Omega_G^0(M, E)$  への  $G$  作用から誘導される無限小変換で、このとき自然に  $K_{eq} \in \Omega_G^2(M, \text{End}(E))$  とみなせる。

**定義 4.3** 不変多項式  $\phi : M(r, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  に対して  $G$ -同変特性類が

$$\phi(E)_{eq} = [\phi(\nabla_{eq})] := [\phi(K_{eq})] \in H_G^*(M)$$

で定まる

これは通常の Chern-Weil 理論と同様に Bott の difference form を用いて同変接続の取り方に依らず定義されることがわかる。

**定義 4.4**  $\pi : E \rightarrow M$  上の同変接続  $\nabla_{eq}$  に対し同変 Chern 形式を

$$c^*(\nabla_{eq}) := \det(I_r + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} K_{eq}) = 1 + c_{eq}^i(\nabla_{eq}) + \cdots + c_{eq}^l(\nabla_{eq})$$

で定め, そのコホモロジー類

$$c_{eq}^*(E) = 1 + c_{eq}^1(E) + \cdots + c_{eq}^l(E) \in H_G^*(M)$$

を同変 Chern 類と呼ぶ

これらの同変特性類は通常のコホモロジーの元として定められたが, 次に同変 Čech-de Rham コホモロジーにおける同変特性類について考える.

$\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$  を  $M$  の  $G$ -被覆とし,  $\nabla_{eq}^0$  を  $E|_{U_0}$  上の  $G$ -同変接続,  $\nabla_{eq}^1$  を  $E|_{U_1}$  上の  $G$ -同変接続とする. このとき同変接続  $\tilde{\nabla}_{eq} = (1-t)\nabla_{eq}^0 + t\nabla_{eq}^1 : E \times \mathbb{R} \rightarrow M \times \mathbb{R}$  と自然な射影  $\rho : M \times [0, 1] \rightarrow M$  に対して Bott の difference form を

$$\phi(\nabla_{eq}^0, \nabla_{eq}^1) := \rho_* \phi(\tilde{\nabla}_{eq}) \in \Omega_G^*(U_0 \cap U_1)$$

と定めると, これは

$$D_{eq} \phi(\nabla_{eq}^0, \nabla_{eq}^1) = \phi(\nabla_{eq}^1) - \phi(\nabla_{eq}^0)$$

を満たす. これより

$$\phi(\nabla_{eq}^*) = (\phi(\nabla_{eq}^0), \phi(\nabla_{eq}^1), \phi(\nabla_{eq}^0, \nabla_{eq}^1)) \in \Omega_G(\mathcal{U})$$

は  $D_{eq}$ -閉で同変 Čech de Rham コサイクルを定める

**定理 4.5** 同型  $r : H_G^r(M) \xrightarrow{\sim} H_G^r(\mathcal{U})$  により,  $\phi(E)_{eq} = [\phi(\nabla_{eq}^*)]$ .

この定理より  $[\phi(\nabla_{eq}^*)]$  は同変 Čech-de Rham コホモロジーにおける同変特性類と呼ぶに相応しいものであることがわかる. また  $[\phi(\nabla_{eq}^*)]$  は接続の組の取り方に依らずに定まる.

次に同変特性類の局所化について簡単に説明する:

$S \subset M$  を  $G$ -不変閉部分多様体とし,  $U_0 = M \setminus S$ ,  $U_1$  を  $S$  の  $G$ -不変な開近傍とする. このとき  $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$  は  $M$  の  $G$ -被覆となり, このとき短完全系列

$$0 \rightarrow \Omega_G^*(\mathcal{U}, U_0) \rightarrow \Omega_G^*(\mathcal{U}) \rightarrow \Omega_G^*(U_0) \rightarrow 0$$

から誘導されるコホモロジーの完全系列

$$\cdots \rightarrow H_G^*(M, M \setminus S) \rightarrow H_G^*(M) \rightarrow H_G^*(M \setminus S) \rightarrow \cdots$$

がある. このときある幾何学的な理由で特性類  $\phi_G(E)_{eq} \in H_G^*(M) (= H_G^*(\mathcal{U}))$  が  $H_G^*(M \setminus S)$  で消滅するときがあり, このとき系列の完全性より  $H_G^*(M, M \setminus S) (= H_G^*(\mathcal{U}, U_0))$  に  $\phi(E)_{eq}$  に対応する元があるが, 一般にこれは一意ではない. しかし実は特性類が微分形式のレベルで消滅している場合には対応する元が一意に定まる. これを特性類  $\phi_G(E)_{eq}$  の局所化と呼ぶ. その特別な場合として次の状況を考える.

$G$ -同変ベクトル束  $\pi : E \rightarrow M$  に対し  $\mathcal{W} = \{W_0, W_1\}$  を 3 章と同様にして定める. このとき対角切断

$$s_\Delta : E \rightarrow \pi^* E$$

を考える. また  $D_{eq}^0$  を  $s_\Delta$ -trivial な  $\pi^* E$  の  $W_0$  上の同変接続,  $D_{eq}^1$  を  $\pi^* E$  の  $W_1$  上の同変接続とする. このとき  $c^r(\pi^* E, s_\Delta)_{eq}$  を

$$c^r(D_{eq}^*) = (0, c^r(D_{eq}^1), c^r(D_{eq}^0, D_{eq}^1)) \in \Omega_G^{2r}(\mathcal{W}, W_0)$$

で代表されるコホモロジー類とする.

**定理 4.6** 上の設定のもと, 次の等式が成り立つ.

$$c^l(\pi^* E, s_\Delta)_{eq} = \psi_{eq}^E$$

**注意 4.7** たとえばこの等式を 1 点が底空間の場合, すなわちベクトル束  $\pi: \mathbb{C}^l \rightarrow \{0\}$  の場合で考えると  $D_{eq}^0$  や  $D_{eq}^1$  は具体的に与えることで、直接計算で上の等式を確かめることができる.

## 参考文献

- [1] Nicole Berline, Ezra Getzler, and Michele Vergne. Heat kernels and Dirac operators. Springer Science & Business Media, 1992.
- [2] Tatsuo Suwa. Complex analytic geometry, in preparation. *World Scientific*.
- [3] Tatsuo Suwa. Indices of vector fields and residues of singular holomorphic foliations. *Actualités Mathématiques*, 1998.

# Ricci ソリトンとその種々の一般化について

只野 誉 (Homare TADANO)\*

## 概 要

In this note, stimulated by M. Fernández-López and E. García-Río, we shall give an upper diameter bound for compact shrinking Ricci solitons in terms of the range of the scalar curvature. As an application, we shall provide a new sufficient condition for four-dimensional compact shrinking Ricci solitons to satisfy the Hitchin–Thorpe inequality. We shall also consider some generalizations of Ricci solitons and give corresponding theorems.

## 1. Ricci ソリトン

近年, Ricci フローは多様体上の標準的計量の構成において大きな成功を収め, 微分幾何学における主要な道具としてその地位を確立した. Ricci ソリトンは Hamilton [19] によって導入され, Perelman [29, 30, 31] による Poincaré 予想の証明において重要な役割を果たした. Ricci ソリトンは Ricci フローの自己相似解に対応する点で重要な研究対象であり, 理論物理学における超弦理論の文脈からも活発に調べられている [14].

*Definition 1.1.* 滑らかな完備 Riemann 多様体  $(M, g)$  が **Ricci** ソリトン であるとは,  $M$  上の滑らかなベクトル場  $X \in \mathfrak{X}(M)$  と実数  $\lambda \in \mathbb{R}$  が存在して

$$(1.2) \quad \text{Ric}_g + \frac{1}{2} \mathcal{L}_X g = \lambda g$$

が成り立つときにいう. ここで  $\text{Ric}_g$  は  $(M, g)$  上の Ricci 曲率テンソルであり,  $\mathcal{L}_X$  はベクトル場  $X$  による Lie 微分を表す.  $X$  が Killing ベクトル場なら, Ricci ソリトンは Einstein 多様体である. この場合, Ricci ソリトンは 自明 であるという. Ricci ソリトン  $(M, g)$  は  $\lambda > 0, \lambda = 0, \lambda < 0$  のとき, 其々 **shrinking**, **steady**, **expanding** であるという. もし,  $X$  が  $M$  上の滑らかな函数  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  の勾配ベクトル場を用いて  $X = \nabla f$  と書けるならば, Ricci ソリトンは 勾配 Ricci ソリトン であるという.  $f$  をベクトル場  $X$  のポテンシャル函数という. このとき Ricci ソリトンの式 (1.2) は

$$(1.3) \quad \text{Ric}_g + \text{Hess } f = \lambda g$$

と書ける. ここで  $\text{Hess } f$  は  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  のヘッシアンを表す. ポテンシャル函数  $f$  が定数ならば勾配 Ricci ソリトン  $(M, g)$  は自明である.

*Example 1.4.* 勾配 Ricci ソリトンの典型例は標準的平坦計量を備えた Euclid 空間  $\mathbb{R}^n$  であり, **Gaussian** ソリトン と呼ばれる. ここで函数  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  はノルムを用いて  $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} |\mathbf{x}|^2$  で与えられる. これは非コンパクトな shrinking Ricci ソリトンである.

---

第12回 数学総合若手研究集会 (2016年2月29日–2016年3月3日, 於 北海道大学) 報告集

2010 Mathematics Subject Classification: Primary 53C21, Secondary 53C20, 53C25

キーワード: Ricci フロー, Ricci ソリトン, Ricci almost ソリトン, Quasi-Einstein 多様体, 直径評価, Myers の定理, Hitchin–Thorpe 不等式

\* 〒560-0043 大阪府豊中市待兼山町1番1号 大阪大学大学院理学研究科

e-mail: h-tadano@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

一方, コンパクト多様体上の非自明な Ricci ソリトンは 4次元以上の shrinking 勾配 Ricci ソリトンであることが知られており [7], その具体例は  $(M, g)$  が Kähler 多様体の場合に小磯 [22], Cao [6], Wang-Zhu [43] らが構成している. Ricci ソリトン  $(M, g)$  が与えられると, 時間  $t$  に依存するベクトル場  $Y_t := -\frac{1}{2\lambda t}X$  により生成されるフロー  $\varphi_t$  で  $g$  を引き戻して得られる  $M$  上の Riemann 計量  $g(t) = -2\lambda t\varphi_t^*g$  は Ricci フロー

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t) = -2 \operatorname{Ric}_{g(t)}$$

の解になる. Ricci ソリトンは Ricci フローの自己相似解に対応し, このフローの特異点モデルとして現れるだけでなく, Li-Yau-Hamilton 不等式の研究においても重要な役割を演じる [7, 10, 20]. Perelman [29, 30, 31] による Poincaré 予想の解決において Ricci ソリトンが中心的な役割を果たして以降, 多くの数学者の注目を集めている.

## 2. コンパクト性と直径評価

本稿を通して全ての多様体は連結で滑らかであり, 境界を持たないと仮定する. 完備 Riemann 多様体に対してそのコンパクト性や直径を調べることは基本的な問題の一つであり, 次の Myers の定理が有名である:

**Theorem 2.1** (Myers [28]). *Let  $(M, g)$  be an  $n$ -dimensional complete Riemannian manifold. If there exists some positive constant  $\lambda > 0$  such that  $\operatorname{Ric}_g \geq \lambda g$ , then  $(M, g)$  is compact with finite fundamental group. Moreover,*

$$\operatorname{diam}(M, g) \leq \pi \sqrt{\frac{n-1}{\lambda}}.$$

また, コンパクト性に関しては次の Ambrose の定理がよく知られている:

**Theorem 2.2** (Ambrose [1]). *Let  $(M, g)$  be a complete Riemannian manifold. Suppose that there exists some point  $p \in M$  for which every geodesic  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$  emanating from  $p$  satisfies*

$$\int_0^\infty \operatorname{Ric}_g(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)) ds = +\infty.$$

*Then  $(M, g)$  is compact.*

完備 Riemann 多様体  $(M, g)$  と  $M$  上のベクトル場  $X \in \mathfrak{X}(M)$  に対して

$$\operatorname{Ric}_X := \operatorname{Ric}_g + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g, \quad \operatorname{Ric}_f := \operatorname{Ric}_g + \operatorname{Hess} f$$

とおき, これらを Bakry-Émery Ricci 曲率と呼ぶ. Ricci ソリトンは Einstein 多様体の一般化であるから Myers の定理のような基本的な性質が Ricci ソリトンに対して拡張出来ないか考えることは自然である. 然し乍ら Bakry-Émery Ricci 曲率の正値性は Ricci ソリトンのコンパクト性を導かない. 実際, Example 1.4 で挙げた Gaussian ソリトンは shrinking であるが非コンパクトである. Shrinking Ricci ソリトンのコンパクト性はそのベクトル場のノルムの有界性によって特徴付けられる. 実際, 次の成り立つ:

**Theorem 2.3** (Fernández-López and García-Río [12]). *Let  $(M, g)$  be a complete Riemannian manifold satisfying  $\operatorname{Ric}_X \geq \lambda g$  for some vector field  $X \in \mathfrak{X}(M)$  and positive constant  $\lambda > 0$ . Then  $M$  is compact if and only if  $|X|$  is bounded on  $M$ .*



一方, Theorem 2.2 の一般化として次が成り立つ:

**Theorem 2.4** ([37]). *Let  $(M, g)$  be a complete Riemannian manifold. Suppose that there exists some point  $p \in M$  for which every geodesic  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$  emanating from  $p$  satisfies*

$$\int_0^\infty \text{Ric}_X(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)) ds = +\infty$$

and  $|X| \leq C$  for some non-negative constant  $C \geq 0$ . Then  $(M, g)$  is compact.

*Remark 2.5.* Theorem 2.4 はベクトル場  $X$  が勾配ベクトル場の場合に Zhang [45] によって示されている. Theorem 2.3 は Theorem 2.4 から直ちに従う.

Bakry–Émery Ricci 曲率が正值の場合, 対応するベクトル場のポテンシャル関数が有界であるか又はベクトル場のノルムが有界であれば, 次の Myers 型の定理が成り立つ:

**Theorem 2.6** (Wei–Wylie [44]). *Let  $(M, g)$  be an  $n$ -dimensional complete Riemannian manifold satisfying  $\text{Ric}_f \geq \lambda g$  for some positive constant  $\lambda > 0$ . If  $|f| \leq k$  for some non-negative constant  $k \geq 0$ , then  $(M, g)$  is compact. Moreover,*

$$(2.7) \quad \text{diam}(M, g) \leq \pi \sqrt{\frac{n-1}{\lambda}} + \frac{4k}{\sqrt{(n-1)\lambda}}.$$

**Theorem 2.8** (Limoncu [24]). *Let  $(M, g)$  be an  $n$ -dimensional complete Riemannian manifold satisfying  $\text{Ric}_X \geq \lambda g$  for some positive constant  $\lambda > 0$ . If  $|X| \leq k$  for some non-negative constant  $k \geq 0$ , then  $(M, g)$  is compact. Moreover,*

$$(2.9) \quad \text{diam}(M, g) \leq \frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{k}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{k^2}{2} + (n-1)\lambda} \right).$$

*Remark 2.10.* Theorem 2.6 及び 2.8 において  $k = 0$  とすれば, これらは Theorem 2.1 に帰着される. 最近, Limoncu [25, 24] の議論を修正することで (2.7), (2.9) を改良した直径評価が其々 [35, 36] で与えられた.

近年, 多くの数学者が Ricci ソリトンに対する直径評価を与えている. 特に, 非自明なコンパクト Ricci ソリトンに対する下からの一様な直径評価は Witten ラプラシアン の第一固有値の下界評価との関連で二木–佐野 [16] によって与えられ, その後, Andrews–Ni [2], Chu–Hu [11], 二木–Li–Li [15] らによって改良された:

**Theorem 2.11** (Futaki–Li–Li [15]). *Let  $(M, g)$  be an  $n$ -dimensional non-trivial compact shrinking Ricci soliton satisfying (1.3). Then*

$$\text{diam}(M, g) \geq \frac{2(\sqrt{2}-1)\pi}{\sqrt{\lambda}}.$$

一方, Fernández–López と García–Río [13] はコンパクト Ricci ソリトンに対する下からの直径評価を Ricci 曲率とスカラー曲率を用いて与えた:

**Theorem 2.12** (Fernández–López and García–Río [13]). *Let  $(M, g)$  be an  $n$ -dimensional compact shrinking Ricci soliton satisfying (1.3). Then*

$$\text{diam}(M, g) \geq \max \left\{ \sqrt{\frac{R_{\max} - n\lambda}{\lambda(C - \lambda)}}, \sqrt{\frac{R_{\max} - n\lambda}{\lambda(\lambda - c)}}, 2\sqrt{\frac{R_{\max} - n\lambda}{\lambda(C - c)}} \right\}.$$

但し, 本稿を通して

$$C := \max_{v \in TM} \{\text{Ric}_g(v, v) : |v| = 1\}, \quad c := \min_{v \in TM} \{\text{Ric}_g(v, v) : |v| = 1\}$$

は其々  $(M, g)$  の単位球束上の Ricci テンソルの最大値及び最小値を表し,

$$R_{\max} = \max_M R, \quad R_{\min} = \min_M R$$

は其々スカラー曲率  $R$  の  $M$  上の最大値及び最小値を表す. 定義から  $cg \leq \text{Ric}_g \leq Cg$  が成り立つ. Theorem 2.6 を受けて Fernández-López と García-Río [13] はコンパクト Ricci ソリトンの上からの直径評価はスカラー曲率の振幅を用いて与えられるだろうと予想した. 次の直径評価はこの予想に対する肯定的な答えを与える:

**Theorem 2.13** ([36]). *Let  $(M, g)$  be an  $n$ -dimensional compact shrinking Ricci soliton satisfying (1.3). Then*

$$(2.14) \quad \text{diam}(M, g) \leq \frac{1}{\lambda} \left( 2\sqrt{R_{\max} - R_{\min}} + \sqrt{4(R_{\max} - R_{\min}) + (n-1)\lambda\pi^2} \right).$$

*Remark 2.15.* Theorem 2.13 において Ricci ソリトンが定スカラー曲率を持てば, Ricci ソリトンは Einstein 多様体になり, 直径評価 (2.14) は Myers [28] によって示された正の Einstein 定数を持つ Einstein 多様体に対する直径評価に帰着される.

### 3. Hitchin–Thorpe 不等式への応用

Hitchin [21] と Thorpe [39] は 4 次元コンパクト多様体  $(M, g)$  が Einstein 計量を許容すれば,  $M$  の Euler 数  $\chi(M)$  と符号  $\tau(M)$  は不等式

$$(3.1) \quad 2\chi(M) \geq 3|\tau(M)|$$

を満たすことを示した. 言い換えれば, この不等式を満たさぬ 4 次元コンパクト多様体は Einstein 計量を許容しない. (3.1) を Hitchin–Thorpe 不等式という. (3.1) は Einstein 計量の存在に対する障害を与えるが, 逆に (3.1) を満たすにも拘らず Einstein 計量を許容しない無限個の 4 次元多様体が LeBrun [23] によって構成されている.

Ricci ソリトンは Einstein 多様体の自然な一般化であるから, 4 次元コンパクト Ricci ソリトンの存在に対する障害が予想される. Ma [26] はスカラー曲率に関する条件の下で 4 次元コンパクト Ricci ソリトンに対する Hitchin–Thorpe 不等式を示した:

**Theorem 3.2** (Ma [26]). *Let  $(M, g)$  be a four-dimensional compact shrinking Ricci soliton satisfying (1.3). If the scalar curvature  $R$  satisfies*

$$(3.3) \quad \int_M R^2 \leq 24\lambda^2 \text{vol}(M, g),$$

*then the soliton  $(M, g)$  satisfies the Hitchin–Thorpe inequality  $2\chi(M) \geq 3|\tau(M)|$ .*

また, Fernández-López と García-Río [13] は Theorem 2.12 を応用して, コンパクト Ricci ソリトンに対する 上から の直径評価を仮定することで同様の十分条件を与えた:

**Theorem 3.4** (Fernández-López and García-Río [13]). *Let  $(M, g)$  be a four-dimensional compact shrinking Ricci soliton satisfying (1.3). If*

$$\text{diam}(M, g) \leq \max \left\{ \sqrt{\frac{2}{C-\lambda}}, \sqrt{\frac{2}{\lambda-c}}, 2\sqrt{\frac{2}{C-c}} \right\},$$

*then the soliton satisfies the Hitchin–Thorpe inequality  $2\chi(M) \geq 3|\tau(M)|$ .*

一方, Theorem 2.13 を応用して, コンパクト Ricci ソリトンに対する 下から の直径評価を仮定することで新たな十分条件を与えることが出来る:

**Theorem 3.5** ([36]). *Let  $(M, g)$  be a four-dimensional compact shrinking Ricci soliton satisfying (1.3). If*

$$(3.6) \quad \sqrt{\frac{R_{\max} - R_{\min}}{\lambda^2}}(16 + 6\pi^2) \leq \text{diam}(M, g),$$

*then the soliton satisfies the Hitchin–Thorpe inequality  $2\chi(M) \geq 3|\tau(M)|$ .*

*Remark 3.7.* Theorem 3.5 において Ricci ソリトンが定スカラー曲率を持てば, Ricci ソリトンは Einstein 多様体になり (3.6) は自動的に満たされ, Hitchin [21] と Thorpe [39] によって示された Einstein 多様体に対する Hitchin–Thorpe 不等式に帰着される.

#### 4. 種々の一般化

近年の Ricci フロー及び Ricci ソリトンの発展を背景に, 多くの数学者がそれらの一般化を考えている. この章では, それらの一般化のうち Ricci almost ソリトンと quasi-Einstein 多様体に焦点を当てる.

##### 4.1. Ricci almost ソリトン

Ricci almost ソリトンは Pigola–Rigoli–Rimoldi–Setti [32] によって導入された.

*Definition 4.1.* 滑らかな完備 Riemann 多様体  $(M, g)$  が **Ricci almost** ソリトンであるとは,  $M$  上の滑らかなベクトル場  $X \in \mathfrak{X}(M)$  と函数  $\lambda \in C^\infty(M)$  が存在して

$$(4.2) \quad \text{Ric}_g + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g$$

が成り立つときにいう.  $X$  が Killing ベクトル場で  $\dim M \geq 3$  なら, Ricci almost ソリトンは Einstein 多様体である. この場合, Ricci almost ソリトンは **自明** であるという. Ricci almost ソリトン  $(M, g)$  は  $\lambda > 0, \lambda = 0, \lambda < 0$  のとき, 其々 **shrinking**, **steady**, **expanding** であるという. もし,  $X$  が  $M$  上の滑らかな函数  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  の勾配ベクトル場を用いて  $X = \nabla f$  と書けるならば, Ricci almost ソリトンは勾配 **Ricci almost** ソリトンであるという.  $f$  をベクトル場  $X$  のポテンシャル函数という. このとき Ricci almost ソリトンの式 (4.2) は次の式に帰着される:

$$(4.3) \quad \text{Ric}_g + \text{Hess } f = \lambda g.$$

全ての奇数次元単位球面は非自明な勾配 Ricci almost ソリトンの構造を許容することが知られている [17]. 函数  $\lambda \in C^\infty(M)$  が定数ならば, Ricci almost ソリトンは Ricci ソリトンである. 近年, 多くの数学者が Ricci ソリトンに対応する理論を Ricci almost ソリトンに対して拡張している. 例えば, Perelman の結果 [29] からコンパクト多様体上の Ricci ソリトンは勾配 Ricci ソリトンであるが, Barros–Batista–Ribeiro Jr. [4] はコンパクト多様体上の Ricci almost ソリトンが定スカラー曲率を持てば, 勾配 Ricci almost ソリトンになることを示した. 一方, Sharma の結果 [34] によって完備  $K$ -接触多様体上の勾配 Ricci ソリトンは佐々木–Einstein 多様体になるが, Ghosh [17] はコンパクト  $K$ -接触多様体上の勾配 Ricci almost ソリトンは単位球面に等長同型な佐々木多様体になることを示した. なお, Kähler 多様体上の勾配 Ricci almost ソリトンは勾配 Ricci ソリトンであることが知られている [27]. Ricci almost ソリトンは Ricci ソリトンの自然な一般化であるから, Ricci ソリトンの場合と同様に 4 次元コンパクト Ricci ソリトンの存在に対する障害が予想される. Brasil–Costa–Ribeiro Jr. [5] は次を示した:

**Theorem 4.4** (Brasil–Costa–Ribeiro Jr. [5]). *Let  $(M, g)$  be a four-dimensional compact gradient Ricci almost soliton with positive scalar curvature satisfying (4.3). If the scalar curvature satisfies*

$$\int_M R^2 d\mu \leq 6 \int_M \lambda R d\mu,$$

*then the soliton  $(M, g)$  satisfies the Hitchin–Thorpe inequality  $2\chi(M) \geq 3|\tau(M)|$ .*

Chen の結果 [9] により, 完備 Riemann 多様体上の shrinking Ricci ソリトンのスカラー曲率は非負であるから, Ricci almost ソリトンが Ricci ソリトンに帰着されるとき, Theorem 4.4 は Ma [26] による Theorem 3.2 に一致する.

Riemann 幾何学における最も重要な問題の一つは, Riemann 多様体がどのような条件下で球面に等長同型か調べることである. Brasil–Costa–Ribeiro Jr. [5] は 4 次元のコンパクト勾配 Ricci almost ソリトンが  $S^4$  と等長同型であるための十分条件を与えた:

**Theorem 4.5** (Brasil–Costa–Ribeiro Jr. [5]). *Let  $(M, g)$  be a four-dimensional compact gradient Ricci almost soliton with positive scalar curvature satisfying (4.3). If the scalar curvature satisfies*

$$\int_M R^2 d\mu \leq 6 \int_M \lambda R d\mu - 192\pi^2,$$

*then the soliton is isometric to the standard sphere  $S^4$ .*

特に Ricci almost ソリトンが Ricci ソリトンに帰着されるとき, Theorem 4.5 は 4 次元のコンパクト Ricci ソリトンが  $S^4$  と等長同型であるための十分条件を与える:

**Theorem 4.6** (Brasil–Costa–Ribeiro Jr. [5]). *Let  $(M, g)$  be a four-dimensional compact shrinking Ricci soliton satisfying (1.3). If the scalar curvature satisfies*

$$(4.7) \quad \int_M R^2 d\mu \leq 24\lambda^2 \text{vol}(M, g) - 192\pi^2,$$

*then the soliton is isometric to the standard sphere  $S^4$ .*

次に, Ricci ソリトンの別の一般化として Case–Shu–Wei [8] が導入した quasi–Einstein 多様体について述べる.

## 4.2. Quasi-Einstein 多様体

完備 Riemann 多様体  $(M, g)$  上のベクトル場  $X \in \mathfrak{X}(M)$  と関数  $f \in C^\infty(M)$  に対して

$$\text{Ric}_X^m := \text{Ric}_g + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g - \frac{1}{m}X^* \otimes X^* \quad \text{Ric}_f^m := \text{Ric}_g + \text{Hess } f - \frac{1}{m}df \otimes df$$

とおき, これらを  $m$ -Bakry-Émery Ricci 曲率と呼ぶ. ここで  $X^*$  は  $X$  の双対である.

*Definition 4.8.* 滑らかな完備 Riemann 多様体  $(M, g)$  が **quasi-Einstein** 多様体であるとは,  $M$  上の滑らかな関数  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  と  $0 < m \leq \infty$  が存在して

$$(4.9) \quad \text{Ric}_f^m = \lambda g$$

が成り立つときにいう.  $f$  が定数関数なら, quasi-Einstein 多様体は Einstein 多様体である. この場合, quasi-Einstein 多様体は自明であるという.  $m = \infty$  なら, quasi-Einstein 多様体は Ricci ソリトンである. Quasi-Einstein 多様体  $(M, g)$  は  $\lambda > 0, \lambda = 0, \lambda < 0$  のとき, 其々 **shrinking, steady, expanding** であるという.

Quasi-Einstein 多様体は Riemann 多様体の直積上に Einstein 計量を構成する上で重要な役割を果たす. 実際, 任意次元の Riemann 多様体  $(M, g)$  と  $m$  次元の Riemann 多様体  $(N, h)$  に対してその直積

$$(M \times N, \bar{g}) := \left( M \times N, g \oplus \exp\left(-\frac{2f}{m}\right)h \right)$$

が Einstein 多様体になるのは  $(M, g)$  が (4.9) を満たす quasi-Einstein 多様体でありかつ  $(N, h)$  が Einstein 多様体であるときに限る [3]. Quasi-Einstein 多様体の具体例は Wang [41] が構成している. Ricci almost ソリトンと同様に多くの数学者が quasi-Einstein 多様体の性質を調べている. 例えば, Ricci ソリトンと同様にコンパクト多様体上の steady または expanding な quasi-Einstein 多様体は自明である [40]. また, 3 次元以下の shrinking Ricci ソリトンは自明であるが, 2 次元の shrinking quasi-Einstein 多様体は自明である [8]. 完備  $K$ -接触多様体上の勾配 Ricci ソリトンは佐々木-Einstein 多様体になるが, 同様の事実は完備  $K$ -接触多様体上の quasi-Einstein 多様体に対しても成り立つ [18]. なお, Kähler 多様体上の quasi-Einstein 多様体は自明である [8].

$m$ -Bakry-Émery Ricci 曲率に対応して, 次の Myers-Ambrose 型の定理が成り立つ:

**Theorem 4.10** (Limoncu [24]). *Let  $(M, g)$  be an  $n$ -dimensional complete Riemannian manifold satisfying  $\text{Ric}_X^m \geq \lambda g$  for some positive constant  $\lambda > 0$ , where  $m \in (0, \infty)$ . Then  $(M, g)$  is compact. Moreover,*

$$\text{diam}(M, g) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{n-1+m}.$$

*Remark 4.11.* Theorem 4.10 はベクトル場  $X$  が勾配ベクトル場の場合に Qian [33] によって示されている.

**Theorem 4.12** ([37]). *Let  $(M, g)$  be a complete Riemannian manifold. Suppose that there exists some point  $p \in M$  for which every geodesic  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$  emanating from  $p$  satisfies*

$$\int_0^\infty \text{Ric}_X^m(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)) ds = +\infty,$$

*where  $m \in (0, \infty)$ . Then  $(M, g)$  is compact.*

Theorem 2.12 で与えられたコンパクトな Ricci ソリトンに対する下からの直径評価を quasi-Einstein 多様体に拡張することで, コンパクトな quasi-Einstein 多様体に対する下からの直径評価を与えることが出来る:

**Theorem 4.13** ([38]). *Let  $(M, g)$  be an  $n$ -dimensional non-trivial compact shrinking quasi-Einstein manifold satisfying (4.9) with finite  $m > 1$ . Then*

$$\text{diam}^2(M, g) \geq \max \left\{ \frac{m(m-1)}{(m-1)(\lambda-c) + R_{\max} - R_{\min}} \log \left( \frac{R_{\max} + (m-n)\lambda}{m\lambda} \right), \right. \\ \left. \frac{m}{C-\lambda} \log \left( \frac{R_{\max} + (m-n)\lambda}{m\lambda} \right), \right. \\ \left. \frac{4m(m-1)}{(m-1)(C-c) + R_{\max} - R_{\min}} \log \left( \frac{R_{\max} + (m-n)\lambda}{m\lambda} \right) \right\}.$$

一方, コンパクトな quasi-Einstein 多様体に対する下からの一様な直径評価は Wang [42] によって与えられた:

**Theorem 4.14** (Wang [42]). *Let  $(M, g)$  be an  $n$ -dimensional non-trivial compact shrinking quasi-Einstein manifold satisfying (4.9) with finite  $m \geq 1$ . Then*

$$(4.15) \quad \text{diam}(M, g) \geq \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

Theorem 4.14 は非自明な quasi-Einstein 多様体と Einstein 多様体の間に間隙定理を与える. 実際, コンパクトな quasi-Einstein 多様体が (4.15) を満たさなければ, このような多様体は Einstein 多様体でなければならない. 一方, Theorem 4.13 を用いることで, quasi-Einstein 多様体に対する次の間隙定理を与えることが出来る:

**Theorem 4.16** ([38]). *Let  $(M, g)$  be an  $n$ -dimensional compact shrinking quasi-Einstein manifold satisfying (4.9) with finite  $m > 1$ . Then  $(M, g)$  is trivial if and only if the one of the following conditions holds:*

$$(1) \quad \text{Ric}_g \geq \left( 1 - \frac{m(m-1) \log \left( \frac{R_{\max} + (m-n)\lambda}{m\lambda} \right) - \frac{(n-1)\pi^2(R_{\max} - R_{\min})}{\lambda}}{m(m-1) \log \left( \frac{R_{\max} + (m-n)\lambda}{m\lambda} \right) + (n-1)(m-1)\pi^2} \right) \lambda g,$$

$$(2) \quad cg \leq \text{Ric}_g \leq \left( \lambda + \frac{cm}{(n-1)\pi^2} \log \left( \frac{R_{\max} + (m-n)\lambda}{m\lambda} \right) \right) g \text{ for some } c > 0,$$

$$(3) \quad cg \leq \text{Ric}_g \leq \left( \left( 1 + \frac{4m(m-1)}{(n-1)\pi^2} \log \left( \frac{R_{\max} + (m-n)\lambda}{m\lambda} \right) \right) c - R_{\max} + R_{\min} \right) g \text{ for some } c > 0.$$

また, quasi-Einstein 多様体に対する Hitchin-Thorpe 不等式に関して, 次が成り立つ:

**Theorem 4.17** ([38]). *Let  $(M, g)$  be a four-dimensional compact shrinking quasi-Einstein manifold satisfying (4.9) with finite  $m > 1$ . If the scalar curvature satisfies*

$$(4.18) \quad \int_M R^2 d\mu \leq 6\lambda \frac{m-2}{m+2} \int_M R d\mu + \frac{72\lambda^2}{m+2} \text{vol}(M, g),$$

*then the manifold  $(M, g)$  satisfies the Hitchin-Thorpe inequality  $2\chi(M) \geq 3|\tau(M)|$ .*

*Remark 4.19.* Theorem 4.17において,  $m = \infty$  とすると quasi-Einstein 多様体は Ricci ソリトンになり (4.18) は Ma によって与えられた Ricci ソリトンが Hitchin–Thorpe 不等式を満たすための十分条件 (3.3) に帰着される.

また, Theorem 4.6 を quasi-Einstein 多様体に拡張することで, 次を得る:

**Theorem 4.20** ([38]). *Let  $(M, g)$  be a four-dimensional compact shrinking quasi-Einstein manifold satisfying (4.9) with finite  $m > 1$ . If the scalar curvature satisfies*

$$(4.21) \quad \int_M R^2 d\mu \leq 6\lambda \frac{m-2}{m+2} \int_M R d\mu + \frac{72\lambda^2}{m+2} \text{vol}(M, g) - 192\pi^2 \frac{m-1}{m+2},$$

*then the manifold  $(M, g)$  must be isometric to the standard sphere  $\mathbb{S}^4$ .*

*Remark 4.22.* Theorem 4.20において,  $m = \infty$  とすると quasi-Einstein 多様体は Ricci ソリトンになり (4.21) は Brasil–Costa–Ribeiro Jr. [5] によって与えられた Ricci ソリトンが  $\mathbb{S}^4$  と等長同型であるための十分条件 (4.7) に帰着される.

## 参考文献

- [1] W. Ambrose, *A theorem of Myers*, Duke Math. J. **24** (1957), 345–348.
- [2] B. Andrews and L. Ni, *Eigenvalue comparison on Bakry–Emery manifolds*, Comm. Partial Differential Equations **37** (2012), 2081–2092.
- [3] A. L. Besse, “Einstein manifolds”, Springer, New York, 1987.
- [4] A. Barros, R. Batista, E. Ribeiro Jr., *Compact almost Ricci solitons with constant scalar curvature are gradient*, Monatsh. Math. **174** (2014), 29–39.
- [5] A. Brasil, E. Costa and E. Ribeiro Jr., *Hitchin–Thorpe inequality and Kaehler metrics for compact almost Ricci soliton*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **193** (2014), 1851–1860.
- [6] H.-D. Cao, *Existence of gradient Kähler–Ricci solitons*, Elliptic and Parabolic Methods in Geometry (Minneapolis, MN, 1994), 1–16, A. K. Peters (ed.), Wellesley, MA, 1996.
- [7] \_\_\_\_\_, *Recent progress on Ricci solitons*, Recent advances in geometric analysis, 1–38, Adv. Lect. Math. (ALM), 11, Int. Press, Somerville, MA, 2010.
- [8] J. Case, Y.-J. Shu and G. Wei, *Rigidity of quasi-Einstein metrics*, Diff. Geom. Appl. **29** (2011), 93–100.
- [9] B.-L. Chen, *Strong uniqueness of the Ricci flow*, J. Differential Geom. **82** (2009), 363–382.
- [10] B. Chow, P. Lu and L. Ni, “Hamilton’s Ricci flow”, Graduate Studies in Mathematics, 77, Amer. Math. Soc., Providence, RI; Science Press, New York, 2006.
- [11] Y. Chu and Z. Hu, *Lower bound estimates of the first eigenvalue for the  $f$ -Laplacian and their applications*, Q. J. Math. **64** (2013), 1023–1041.
- [12] M. Fernández-López and E. García-Río, *A remark on compact Ricci solitons*, Math. Ann. **340** (2008), 893–896.
- [13] \_\_\_\_\_, *Diameter bounds and Hitchin–Thorpe inequalities for compact Ricci solitons*, Q. J. Math. **61** (2010), 319–327.
- [14] D. Friedan, *Nonlinear models in  $2 + \varepsilon$  dimensions*, Ann. Phys. **163** (1985), 318–419.
- [15] A. Futaki, H. Li and X.-D. Li, *On the first eigenvalue of the Witten–Laplacian and the diameter of compact shrinking solitons*, Ann. Global Anal. Geom. **44** (2013), 105–114.
- [16] A. Futaki and Y. Sano, *Lower diameter bounds for compact shrinking Ricci solitons*, Asian J. Math. **17** (2013), 17–32.
- [17] A. Ghosh, *Certain contact metrics as Ricci almost solitons*, Results Math. **65** (2014), 81–94.
- [18] \_\_\_\_\_, *Quasi-Einstein contact metric manifolds*, Glasgow Math. J. **57** (2015), 569–577.
- [19] R. Hamilton, *The Ricci flow on surfaces*, Mathematics and general relativity (Santa Cruz, CA, 1986), 237–262, Contemp. Math., 71, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.

- [20] \_\_\_\_\_, *The formation of singularities in the Ricci flow*, Surveys in differential geometry, Vol. II (Cambridge, MA, 1993), 7–136, Int. Press, Cambridge, MA, 1995.
- [21] N. Hitchin, *Compact four-dimensional Einstein manifolds*, J. Differential Geom. **9** (1974), 435–442.
- [22] N. Koiso, *On rotationally symmetric Hamilton’s equation for Kähler-Einstein metrics*, Recent topics in differential and analytic geometry, 327–337, Adv. Stud. Pure Math., 18-I, Academic Press, Boston, MA, 1990.
- [23] C. LeBrun, *Four-manifolds without Einstein metrics*, Math. Res. Lett. **3** (1996), 133–147.
- [24] M. Limoncu, *Modifications of the Ricci tensor and applications*, Arch. Math. (Basel) **95** (2010), 191–199.
- [25] \_\_\_\_\_, *The Bakry-Emery Ricci tensor and its applications to some compactness theorems*, Math. Z. **271** (2012), 715–722.
- [26] L. Ma, *Remarks on compact Ricci solitons of dimension four*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **351** (2013), 817–823.
- [27] G. Maschler, *Almost soliton duality*, Adv. Geom. **15** (2015), 159–166.
- [28] S. B. Myers, *Riemannian manifolds with positive mean curvature*, Duke Math. J. **8** (1941), 401–404.
- [29] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, arXiv:math/0211159
- [30] \_\_\_\_\_, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, arXiv:math/0303109
- [31] \_\_\_\_\_, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, arXiv:math/0307245
- [32] S. Pigola, M. Rigoli, M. Rimoldi and A. G. Setti, *Ricci almost solitons*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5), Vol. X (2011), 757–799.
- [33] Z. Qian, *Estimates for weighted volumes and applications*, Q. J. Math. **48** (1997), 235–242.
- [34] R. Sharma, *Certain results on  $K$ -contact and  $(k, \mu)$ -contact manifolds*, J. Geom. **89** (2008), 138–147.
- [35] H. Tadano, *Remark on a diameter bound for complete Riemannian manifolds with positive Bakry-Émery Ricci curvature*, Diff. Geom. Appl. **44** (2016), 136–143.
- [36] \_\_\_\_\_, *An upper diameter bound for compact Ricci solitons with applications to the Hitchin-Thorpe inequality*, arXiv:1504.05384
- [37] \_\_\_\_\_, *Some Ambrose and Galloway type theorems via modified Ricci curvature*, Preprint, 2015.
- [38] \_\_\_\_\_, *Diameter bounds, gap theorems and Hitchin-Thorpe inequalities for compact quasi-Einstein manifolds*, Preprint, 2015.
- [39] J. Thorpe, *Some remarks on the Gauss-Bonnet formula*, J. Math. Mech. **18** (1969), 779–786.
- [40] L. F. Wang, *Rigid properties of quasi-Einstein metrics*, Proc. Amer. Math. Soc. **139** (2011), 3679–3689.
- [41] \_\_\_\_\_, *On noncompact  $\tau$ -quasi Einstein metrics*, Pacific. J. Math. **254** (2011), 449–464.
- [42] \_\_\_\_\_, *Diameter estimate for compact quasi-Einstein metrics*, Math. Z. **273** (2013), 801–809.
- [43] X.-J. Wang and X. Zhu, *Kähler-Ricci solitons on toric manifolds with positive first Chern class*, Adv. Math. **188** (2004), 87–103.
- [44] G. Wei and W. Wylie, *Comparison geometry for the Bakry-Emery Ricci tensor*, J. Differential Geom. **83** (2009), 377–405.
- [45] S. Zhang, *A theorem of Ambrose for Bakry-Emery Ricci tensor*, Ann. Global Anal. Geom. **45** (2014), 233–238.



# Oriented graphの非対称性について

佐竹 翔平 (Shohei Satake) (名古屋大学大学院情報科学研究科)\*

本研究は神戸大学の澤 正憲准教授, 中部大学の神保 雅一教授との共同研究である.

一般に与えられたグラフなどの数学的構造の対称性の高さはその全自己同型群の位数で測られる. 本講演ではグラフと向き付けされたグラフに着目する. (無向) グラフとは集合  $V$  と,  $E \subset \binom{V}{2}^1$  の組で表される構造であり, 向き付けされたグラフとは集合  $V$  と  $(u, v) \in E \Rightarrow (v, u) \notin E$  をみたす  $E \subset V^2$  の組で表される構造である. また  $V$  の要素を頂点,  $E$  の要素を辺といい, 与えられた無向または向き付けされたグラフ  $H$  について頂点集合, 辺集合をそれぞれ  $V(H)$ ,  $E(H)$  で表すことにする<sup>2</sup>.

グラフ  $G$  においては  $\{u, v\} \in E(G) \iff \{u^\sigma, v^\sigma\} \in E(G)$  をみたす  $V(G)$  上の置換  $\sigma$  を  $G$  の自己同型といい,  $G$  の全自己同型群を  $\text{Aut}(G)$  で表す<sup>3</sup>. その意味で, グラフ  $G$  について  $|\text{Aut}(G)| > 1$  であるとき,  $G$  は対称であるといい, そうでないとき  $G$  は非対称であるという. だがこの尺度では, 非対称な2つのグラフ  $G, G'$  が与えられたとき, 両者を比較することはできない. ではどのようにしてグラフの“非対称性”を測ればよいのだろうか. この問題に最初に解答を与えたのが1963年のErdős, Rényiの論文[4]である. [4]では非対称な有限グラフ  $G$  に対して, 辺を適当に追加または除去してある対称なグラフに変形する操作 **symmetrization** を考え, 各 **symmetrization** にかかわった辺の数の最小値を  $A(G)$  とよび, それを  $G$  の非対称性の尺度とした. ただし,  $G$  が対称であるとき  $A(G) = 0$  とし,  $G$  が  $K_1$  であるときには  $A(G) = \infty$  と定義する. まず  $A(G)$  について以下の定理が導かれる.

**定理 1** (Erdős-Rényi [4]).  $n \geq 2$  とし,  $G$  を  $n$  頂点からなるグラフとする. このとき

$$A(G) \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

だがこの上界を達成するグラフを見つけるのは容易ではない. そこで[4]は, 十分大きな  $n$  についてはその  $A(G)$  が上界に近い値をもつような  $n$  頂点グラフ  $G$  の存在性を **Erdős-Rényi** ランダムグラフの手法を用いて示している. 例えば, 性質  $\mathcal{P}$  をもつグラフの存在性を示したいとしよう.  $n$  点集合に対し, その各2点部分集合に対して, 辺を確率  $1/2$  で選ぶ試行を独立に行って, ランダムに  $n$  頂点グラフを生成する. そのようなグラフを **Erdős-Rényi** ランダムグラフ, または単に **ランダムグラフ** と呼び, ランダムグラフ全体の集合を  $\mathcal{G}(n, 1/2)$  で表す. このときに確率  $P\{G \in \mathcal{G}(n, 1/2) \mid G \text{ は } \mathcal{P} \text{ をみたさない}\}$  が1“より小さい”ことを示せば, 所望のグラフの存在性を示すことができる. より詳しくは[3, Chapter 11]等を参照されたい.

また, [4]では可算無限グラフの対称性についても述べられており, **可算無限ランダムグラフ** は確率1で **Rado** グラフ  $R$  と呼ばれるグラフに同型になることが示されている.  $R$  とは以下の定義を満たす可算無限グラフである.

\* 〒464-8601 名古屋市千種区不老町 名古屋大学大学院情報科学研究科計算機数理科学専攻  
e-mail: satake.shohei@f.mbox.nagoya-u.ac.jp

<sup>1</sup>  $\binom{V}{2}$  で  $V$  の2点部分集合全体を表す.

<sup>2</sup> その他のグラフ理論の用語についてはDiestelの教科書[3]等を参照されたい.

<sup>3</sup> 向き付けされたグラフについても同様に定義される.

(\*) 任意の互いに交わらない有限の頂点部分集合  $U, V$  に対して,  $U$  のすべての頂点との間に辺があり,  $V$  のすべての頂点との間に辺をもたないような頂点  $z \notin U \cup V$  が存在する.

この定義を満たすグラフは同型を除いて一意であることが往復論法を用いて示される. その議論から次の事実が成り立つ.

**定理 2** (cf. Cameron [1], Erdős-Rényi [4]).  $R$  は対称であり, さらに  $|\text{Aut}(R)| = 2^{\aleph_0}$ .

この事実から  $R$  は高い対称性をもつグラフであることがわかる.  $R$  は数学的に非常に興味深いグラフであり, その他の  $R$  の性質についても多くのモデル理論や組合せ論の研究者によって調べられている.

こうした非対称性に関する問題については, もちろん様々なアプローチが考えられるが, 本講演では, Erdős, Rényi の仕事に着目し, その向きづけされたグラフに関する類似 ([5], [6]) を与える. 以下, 混乱のおそれがない限り, 向き付けされたグラフを単純に “グラフ” と書くことにする. まず, 非対称な有限グラフ  $D$  に対して辺の除去, 追加または辺の向きの変更を行ってある対称なグラフに変形する操作を  $D$  の **symmetrization** とよび,  $A(D)$  をそのかかわった辺の数の最小値と定義する. まず  $A(D)$  について以下の上界が得られた.

**定理 3** (S-Sawa-Jimbo [5]).  $n \geq 3$  とし,  $D$  を  $n$  頂点からなるグラフとする. このとき

$$A(D) \leq \lfloor \frac{2n+1}{3} \rfloor.$$

向き付けされたグラフの場合でも無向の場合と同様, 上界を達成するグラフを見つけるのは困難である. そこで次の定理でこの上界が漸近的に最良であることを Erdős-Rényi ランダム (oriented) グラフの手法を用いて示す. 講演では証明のアイデアを簡潔に述べる予定である.

**定理 4** (S-Sawa-Jimbo-Enomoto [5]). 任意の  $\epsilon > 0$  に対して, ある自然数  $n_0(\epsilon)$  があって, 任意の  $n > n_0(\epsilon)$  について  $A(D) > \frac{2}{3}n(1 - \epsilon)$  であるような  $n$  頂点グラフ  $D$  が存在する.

また可算無限グラフについての対称性に関する結果も得られた. 可算無限ランダム (oriented) グラフは **random oriented graph**  $RO$  (cf. [2]) とよばれるグラフと確率 1 で同型になる.

(\*) 任意の互いに交わらない有限の頂点部分集合  $U, V, W$  に対して,  $U$  のすべての頂点から  $z$  に向かう辺があり,  $V$  のすべての頂点に  $z$  から向かう辺があり,  $W$  のすべての頂点と  $z$  の間に辺をもたないような頂点  $z \notin U \cup V \cup W$  が存在する.

この定義をみたすグラフは  $R$  と同様にして, 同型を除いて一意であることが示される. この  $RO$  について次の定理が成り立つ.

**定理 5** (S-Sawa-Jimbo [5]).  $RO$  は対称である. さらに  $|\text{Aut}(RO)| = 2^{\aleph_0}$ .

講演では, この定理の証明をいくつかの方法で与える. また, 時間の許す限り,  $RO$  のグラフ理論的性質や  $\text{Aut}(RO)$  の性質についても議論したい.

## 謝辞

定理4の証明について、榎本彦衛先生から多くのアイデアとご助言をいただきました。御礼申し上げます。

## 参考文献

- [1] P. J. Cameron. The random graph, in : “The mathematics of Paul Erdős II” , R. L. Graham, J. Nešetřil, S. Butler ed., Algorithms and Combinatorics **14**, Springer, Berlin, 1997, 333–351.
- [2] R. Diestel, I. Leader, A. Scott, S. Thomassé. Partitions and orientations of the Rado graph. *Trans. Amer. Math. Soc.* **359** (2007), 2395–2405.
- [3] R. Diestel. Graph theory. Fourth ed. Graduate Texts in Mathematics, **173**. Springer, Heidelberg, 2010.
- [4] P. Erdős, A. Rényi. Asymmetric graphs. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **14** (1963), 295–315.
- [5] S. Satake, M. Sawa, and M. Jimbo. Erdős-Rényi Theory for Asymmetric Digraphs. preprint.
- [6] S. Satake, M. Sawa, and M. Jimbo. グラフの非対称性に関する Erdős-Rényi の定理とその有向グラフへの拡張 (Japanese). To appear in RIMS Kokyuroku.

# トロピカル幾何学とモノドロミー変換

山本 悠登 Yuto Yamamoto (東京大学大学院数理科学研究科)\*

## 1. 概要

トロピカル幾何学は、通常の加法を2つの数のmaxをとる操作に、乗法を通常の加法+に取り換えて得られるmax-plus代数上の代数幾何学である。このmaxとplusの演算は、通常の演算+, ×のある種の極限(トロピカル極限)として現れるが、複素代数多様体にその極限を施すと、その多様体の“骨格”が現れる。この“骨格”が、トロピカル幾何学の主な研究対象であるトロピカル多様体である。

トロピカル多様体は、極限を取る前の元の多様体に関する様々な情報を持っていることが知られている。例えばItenberg, Khazarkov, Mikhalkin, Zharkov[1]によって導入されたトロピカルホモロジーを用いれば、トロピカル多様体の組み合わせ的なデータから、元の複素多様体のHodge数を回復できることが知られている[4]。「トロピカル多様体から、元の多様体の情報をどこまで引き出せるか?」という問いが、トロピカル幾何学における中心的な課題の一つとなっている。

トロピカル多様体は(ある種のアフィン構造を持つ)多面複体であり、基本的にトロピカル多様体を持つ情報は、組み合わせ的なものに限られる。また、トロピカル化によって得られるトロピカル多様体の次元は、実次元で元の多様体の次元の半分になる。そのため、トロピカル極限を取る過程でかなりの情報を捨ててしまっていることになる。しかし、逆にその構造が組み合わせ的で単純である故にトロピカル多様体の取り扱いと比較的簡単で、様々な量を具体的に計算することを可能にする。

本講演では、トロピカル多様体と元の多様体のトロピカル極限周りのモノドロミーとの関係について述べる。[6]において、トーリック超曲面の場合に、そのトロピカル化によって得られるトロピカル多様体を用いて、元の多様体の幾何学的モノドロミーの具体的な記述を与えた。特に、一次元の場合にはモノドロミーが多様体のコホモロジーにどのように作用するのかも計算可能である。具体例を扱いながらこの結果を紹介する。

## 2. トロピカル幾何学

max-plus代数 $(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$ は次のように定義される。 $\mathbb{T} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ として、これに加法 $\oplus$ 、乗法 $\odot$ を

$$a \oplus b := \max\{a, b\}, \quad a \odot b := a + b \quad (a, b \in \mathbb{T}) \quad (2.1)$$

で与える。 $(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$ は結合法則や交換法則を満たすが、加法 $\oplus$ に関して逆元が必ずしも存在しない。そのため、これは環にはならず半環と呼ばれる。

トロピカル幾何学における多項式は、次の形の関数 $F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ として定義される。

$$\begin{aligned} F(X_1, \dots, X_{n+1}) &= \bigoplus_{m \in A} a_m \odot X_1^{m_1} \odot \dots \odot X_{n+1}^{m_{n+1}} \\ &= \max_{m \in A} \{a_m + m_1 X_1 + \dots + m_{n+1} X_{n+1}\} \end{aligned} \quad (2.2)$$

\* e-mail: yuto@ms.u-tokyo.ac.jp

ここで,  $n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}$  で,  $A$  は  $\mathbb{Z}^{n+1}$  の有限部分集合とする. 各  $a_m \odot X_1^{m_1} \odot \cdots \odot X_{n+1}^{m_{n+1}}$  が単項式であり, それらはすべて  $\mathbb{R}^{n+1}$  上の一次関数である. そして, 全ての単項式の  $\max$  を取って得られる  $F$  は  $\mathbb{R}^{n+1}$  上の下に凸な区分線型関数を定める.

また, トロピカル多項式  $F$  が定める超曲面  $V(F) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  は, 次で定義される.

$$V(F) = \{X \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \exists p \neq \exists q \in A, \text{s.t. } F(X) = a_p + p \cdot X = a_q + q \cdot X\}. \quad (2.3)$$

ここで,  $p \cdot X$  は  $p_1 X_1 + \cdots + p_{n+1} X_{n+1}$  を表す.  $q \cdot X$  も同様である.

トロピカル幾何学と複素代数幾何学の間関係を考える上で用いる典型的な対象は, 収束 Puiseux 級数体や収束 Laurent 級数体上の多項式である. ここでは, 収束 Laurent 級数体  $K := \mathbb{C}\{t\}$  を用いる. これは次の標準的な非アルキメデス付値を持つ.

$$\text{val}: K \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, \quad k = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j t^j \mapsto -\min \{j \in \mathbb{Z} \mid c_j \neq 0\}. \quad (2.4)$$

$K$  上の Laurent 多項式  $f = \sum_{m \in A} k_m x^m \in K[x_1^\pm, \dots, x_{n+1}^\pm]$  のトロピカル化とは, 次式で与えられるトロピカル多項式  $\text{trop}(f): \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  である.

$$\text{trop}(f)(X_1, \dots, X_{n+1}) := \max_{m \in A} \{\text{val}(k_m) + m_1 X_1 + \cdots + m_{n+1} X_{n+1}\}. \quad (2.5)$$

トロピカル化によって得られる超曲面と元の複素代数超曲面の間には, 次のような関係がある. まず, 十分大きい実数  $R \in \mathbb{R}^{>0}$  をとり固定する.  $f_R \in \mathbb{C}[x_1^\pm, \dots, x_{n+1}^\pm]$  を  $f$  の  $t$  に  $1/R$  を代入して得られる  $\mathbb{C}$  上の Laurent 多項式とする. さらに,  $\text{Log}_R: (\mathbb{C}^*)^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  を

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (\log_R |x_1|, \dots, \log_R |x_{n+1}|) \quad (2.6)$$

とし,  $\mathcal{A}_R := \text{Log}_R(\{x \in (\mathbb{C}^*)^{n+1} \mid f_R(x) = 0\})$  とおく.

**Theorem 2.1.** ([3, 5])  $R \rightarrow \infty$  の極限の下で,  $\mathcal{A}_R$  は,  $V(\text{trop}(f))$  に Hausdorff 収束する.

ここで,  $\mathbb{R}^{n+1}$  の部分集合の Hausdorff 収束は, 次の Hausdorff 距離によって定義される.

$$d(X, Y) := \max \left\{ \sup_{x \in X} d(x, Y), \sup_{y \in Y} d(X, y) \right\}, \quad (X, Y \subset \mathbb{R}^{n+1}) \quad (2.7)$$

**Example 2.2.**  $K$  上の多項式  $f$  が次で与えられる場合を考える.

$$f(x_1, x_2) = x_2^2 + x_2 (x_1^3 + t^{-2} x_1^2 + t^{-2} x_1 + t^{-1}) + 1. \quad (2.8)$$

このとき  $f$  のトロピカル化は,

$$\text{trop}(f)(X_1, X_2) = \max \{2X_2, 3X_1 + X_2, 2X_1 + X_2 + 2, X_1 + X_2 + 2, X_2 + 1, 0\} \quad (2.9)$$

となる. 図 2.1 の太線部は,  $\text{trop}(f)$  によって定められるトロピカル超曲面  $V(\text{trop}(F))$  を示している. また,  $\mathcal{A}_R$  は図 2.2 の灰色の領域のようになる.

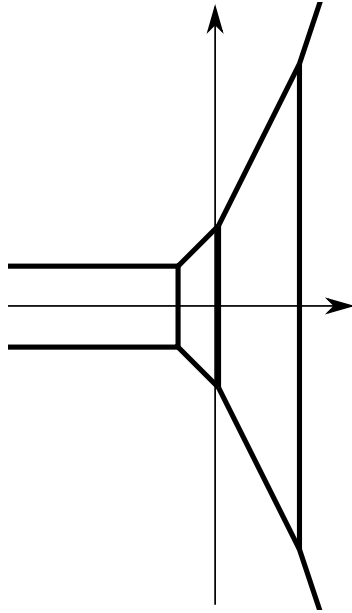


図 2.1: (2.8) の場合の  $V(\text{trop}(f))$

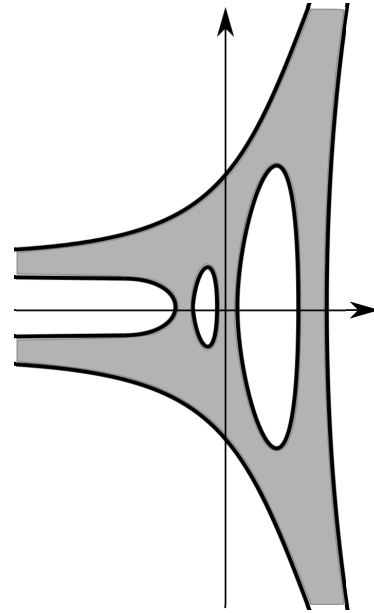


図 2.2: (2.8) の場合の  $\mathcal{A}_R$

### 3. 設定

$K := \mathbb{C}\{t\}$  を収束 Laurent 級数体とする.  $n \in \mathbb{N}$  を自然数とし,  $M$  を階数  $n+1$  の自由  $\mathbb{Z}$ -加群とする. また,  $M_{\mathbb{R}} := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  とし,  $\Delta \subset M_{\mathbb{R}}$  を凸格子多面体とする.  $A := \Delta \cap M$  とおく. さらに,  $f = \sum_{m \in A} k_m x^m \in K[x_1^{\pm}, \dots, x_{n+1}^{\pm}]$  を  $K$  上の  $n+1$  変数 Laurent 多項式とする. ただし, 全ての  $m \in A$  に対して  $k_m \neq 0$  であると仮定する. 十分大きい実数  $R \in \mathbb{R}^{>0}$  をとり固定する.  $S_R^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$  とおく.  $q \in S_R^1$  に対して,  $f_q \in \mathbb{C}[x_1^{\pm}, \dots, x_{n+1}^{\pm}]$  を  $f$  の  $t$  に  $1/q$  を代入して得られる  $\mathbb{C}$  上の多項式とする.  $(\mathbb{C}^*)^{n+1}$  での  $f_q$  の零点集合を適当にコンパクト化したものを  $V_q$  とする.  $\{V_q\}_{q \in S_R^1}$  の  $q = \infty$  周りのモノドロミー変換について考える.

モノドロミーを考える上で本質的ではないが, ここでのコンパクト化について正確に述べると,  $\mathcal{F}$  を  $\Delta$  に対する正規扇とし, それのユニモジュラーな細分  $\mathcal{F}'$  をとる.  $X_{\mathcal{F}'}$  を  $\mathcal{F}'$  に関する  $\mathbb{C}$  上のトーリック多様体とする.  $V_q \subset X_{\mathcal{F}'}$  を  $f_q$  によって定められる  $X_{\mathcal{F}'}$  内のトーリック超曲面として考える.

### 4. 次元 1 の場合のモノドロミー

超曲面が次元 1 の場合 ( $n = 1$ ) に限って主結果を紹介する. 一般の次元  $n$  でのモノドロミー変換については, [6] で述べている.  $\{\rho_i\}_{i=1, \dots, d}$  を  $V(\text{trop}(f))$  の有界な辺全体の集合とする. 各辺  $\rho_i$  には, 次のようにしてその長さ  $L_i \in \mathbb{R}^{>0}$  を定義することができる.  $\nu_{i1}, \nu_{i2} \in \mathbb{R}^{n+1}$  を  $\rho_i$  の端点とし, 原始的なベクトル  $V_i \in \mathbb{Z}^{n+1}$  を用いて  $\nu_{i1} - \nu_{i2} = l_i V_i$  ( $l_i \in \mathbb{R}^{>0}$ ) と書けるとする. このとき,  $\rho_i$  の長さを  $L_i := l_i$  と定義する. また,  $C_i$  ( $i = 1, \dots, d$ ) を各  $\rho_i$  に対応する  $V_{q=R}$  上の単純閉曲線とし,  $T_i: V_{q=R} \rightarrow V_{q=R}$  を  $C_i$  に沿った Dehn 振りとする.

**Theorem 4.1.** ([6, Corollary 1.1.])  $n = 1$  の場合,  $\{V_q\}_{q \in S_R^1}$  のモノドロミー変換は,  $T_1^{L_1} \circ \dots \circ T_d^{L_d}$  によって与えられる.

これは、日本数学会 2010 年度秋季総合分科会の岩尾氏による企画特別講演 [2] において、予想として述べられている。

## 5. 具体例

再び (2.8) の例を考える。このとき、

$$f_q(x_1, x_2) = x_2^2 + x_2(x_1^3 + q^2x_1^2 + q^2x_1 + q^1) + 1. \quad (5.1)$$

図 5 に示すように、 $\rho_i (i = 1 \dots 7)$  を  $V(\text{trop}(F))$  の辺とし、 $C_i$  を  $\rho_i$  に対応する  $V_{q=R}$  上の単純閉曲線とする。左の図の背景にある格子は、 $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$  を示す。

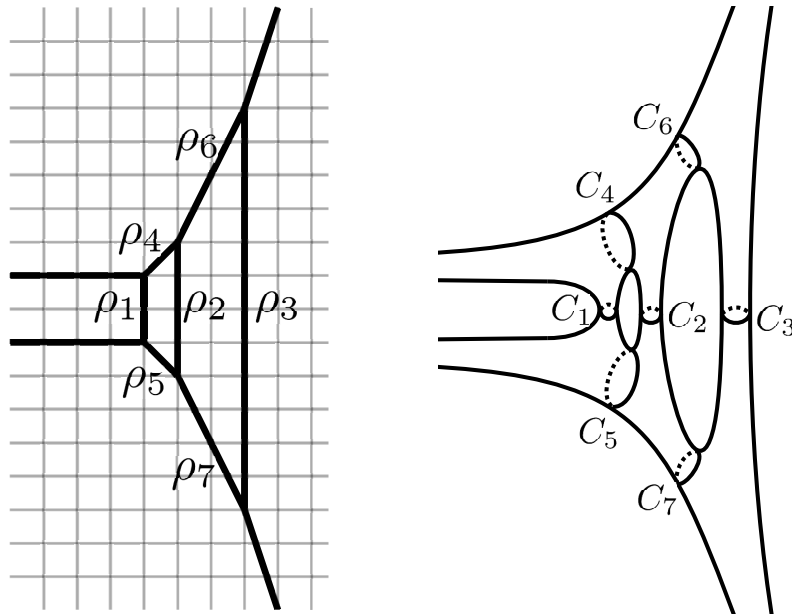


図 5.1: (2.8) の場合のトロピカル超曲面  $V(\text{trop}(f))$  とトーリック超曲面  $V_q$

各  $\rho_i$  の長さ  $L_i$  は、その辺の上にある格子の数を数えることで、

$$L_1 = 2, \quad L_2 = 4, \quad L_3 = 12, \quad L_4 = L_5 = 1, \quad L_6 = L_7 = 2 \quad (5.2)$$

とわかり、Theorem 4.1 から  $\{V\}_{q \in S^1_{\mathbb{R}}}$  のモノドロミー変換が

$$T_1^2 \circ T_2^4 \circ T_3^{12} \circ T_4 \circ T_5 \circ T_6^2 \circ T_7^2 \quad (5.3)$$

によって与えられることが分かる。

## 参考文献

- [1] I. Itenberg, L. Khazarkov, G. Mikhalkin, and I. Zharkov. *Tropical homology*, In preparation.
- [2] 岩尾慎介, 複素積分 vs トロピカル積分, 日本数学会 2010 年度秋季総合分科会企画特別講演, <http://mathsoc.jp/videos/2010shuuki.html>, 2010.
- [3] Grigory Mikhalkin, *Decomposition into pairs-of-pants for complex algebraic hypersurfaces*, *Topology* **43** (2004), no. 5, 1035-1065.

- [4] G. Mikhalkin and I. Zharkov. *Tropical eigenwave and intermediate jacobians*, In Homological Mirror Symmetry and Tropical Geometry, volume 15 of Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, pages 309-349. 2014.
- [5] Hans Rullgård, *Polynomial amoebas and convexity*, Preprint, Stockholm University, 2001.
- [6] Yuto Yamamoto, *Geometric monodromy around the tropical limit*, arXiv:1509.00175.



# Right-angled Artin group のハンドル体群への埋め込みに関して

久野恵理香 (Erika KUNO) (東京工業大学)\*

本稿では,  $H = H_{g,n}$  を種数  $g \geq 0$ , marked point  $n \geq 0$  個付きの連結コンパクト向き付け可能ハンドル体とし, その境界  $\partial H$  を種数  $g \geq 0$ , marked point  $n \geq 0$  個付きの連結コンパクト向き付け可能曲面  $S = S_{g,n}$  と見なす.

## 1. 導入

2012年に Koberda [2] がグラフ  $\Gamma$  が  $S$  の曲線グラフ  $\mathcal{C}(S)$  の full subgraph であるならば  $\Gamma$  上の right-angled Artin group  $A(\Gamma)$  は  $S$  の写像類群  $\text{Mod}(S)$  の部分群になることを示した. 更に 2013年に Kim-Koberda [1] が  $S$  の複雑度が 2 以下のとき上記の逆が成り立つ, すなわち  $A(\Gamma)$  が  $\text{Mod}(S)$  の部分群になるとき  $\Gamma$  は  $\mathcal{C}(S)$  の full subgraph になることを示し,  $S$  の複雑度が  $n \geq 4$  のときに各  $n$  に対してグラフ  $\Gamma(n)$  で  $A(\Gamma(n))$  は  $\text{Mod}(S)$  の部分群になるが  $\Gamma(n)$  は  $\mathcal{C}(S)$  の full subgraph にならないものを構成した.  $H$  のハンドル体群  $\text{Mod}(H)$  は  $S$  の写像類群  $\text{Mod}(S)$  の部分群であり,  $H$  の円板グラフ  $\mathcal{D}(H)$  への作用がある. 本稿では, ハンドル体群と円板グラフに対して同様のことを考え得られた結果について報告する.

## 2. 準備

### 2.1. グラフ

本稿ではグラフ  $\Gamma$  とは 1 次元有限単体グラフを指すこととする.  $V(\Gamma)$  を  $\Gamma$  の頂点集合,  $E(\Gamma)$  を  $\Gamma$  の辺集合とする. 更にグラフはループや多重辺を持たないとする.

**定義 2.1.**  $X \subset V(\Gamma)$  に対し,  $X$  による  $\Gamma$  の **full subgraph** または  $X$  による **誘導部分グラフ**  $\Lambda$  とは,  $\Lambda$  の頂点集合を  $X$  とし,  $\Lambda$  の辺集合を  $X$  内に両端点を持つ  $\Gamma$  の辺全体として定められたグラフのことである.

$\Gamma$  の頂点  $v$  の  $\Gamma$  内の **link** とは  $v$  と辺で結ばれる頂点全体の集合のことである. また,  $n$  個の頂点上の完全グラフ  $K$  とは  $K$  の各頂点が  $K$  のその他の全ての頂点と辺で結ばれるグラフである.  $\Gamma$  の誘導部分グラフで完全グラフであるものを **clique** という.

**定義 2.2.** 正の整数  $N$  に対して  $\Gamma$  が  **$N$ -thick stars** を持つとは,  $\Gamma$  の各頂点  $v$  の link が異なる 2 つの  $N - 1$  個の頂点上の clique を含むことである.

### 2.2. ハンドル体

種数  $g \geq 0$  のハンドル体  $H_g$  とは 3次元球体に  $g$  個の 1-ハンドル  $D^2 \times I$  を貼り合わせることで得られる 3次元多様体である. 但し,  $D^2$  は 2次元円板で  $I$  は区間である.  $H_g$  の境界  $\partial H_g$  は種数  $g$  の連結向き付け可能閉曲面  $S_g$  となる. 種数  $g \geq 0$ , marked point  $n \geq 0$  個付きのハンドル体  $H = H_{g,n}$  とは,  $\partial H_g$  上の  $n$  個の点に名前  $p_1, p_2, \dots, p_n$  を付けることで得られる 3次元多様体である.  $H$  の境界  $\partial H$  を種数  $g \geq 0$ , marked point  $n \geq 0$  個付きの連結コンパクト向き付け可能曲面  $S = S_{g,n}$  と見なす.  $H$  内の円板  $d$  が  $H$  に固有に埋め込まれるとは,  $d$  の内部は  $H$  の内部に,  $d$  の境界は  $H$  の境界に

\* 〒152-8551 東京都目黒区大岡山 2-12-1 東京工業大学大学院理工学研究科 数学専攻  
e-mail: kuno.e.aa@m.titech.ac.jp

埋め込まれることである.  $H$  内に固有に埋め込まれた円板  $d$  が本質的であるとは,  $d$  は  $\partial H$  上の円板の境界にならず, かつ  $\partial H$  上の1つの marked point にアイソトピックにならないことである. 本稿では円板とは  $H$  に固有に埋め込まれた本質的な円板を指すこととする.

**定義 2.3.** ハンドル体  $H$  上の **multi-disk** とは  $H$  内の互いに交わらずアイソトピックでないいくつかの円板の和集合のことである.  $H$  の複雑度を  $\xi(H) = \max\{3g-3+n, 0\}$  と定める. これは  $H$  内の multi-disk の成分数の最大に一致する. 成分数が  $3g-3+n$  である multi-disk を **maximal multi-disk** という (例は図 1).

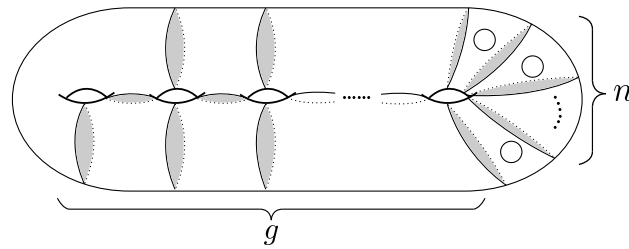


図 1:  $H_{g,n}$  内の maximal multi-disk の例.

$S$  上の **multi-curve** を定義 2.3 の  $H$  内の円板を  $S$  内の本質的単純閉曲線に変えることで定める.  $S$  の複雑度は  $\xi(H) = \max\{3g-3+n, 0\}$  であり  $H$  の複雑度と一致する.

**定義 2.4.**  $H$  の円板グラフ  $\mathcal{D}(H)$  とは, 円板のアイソトピー類を頂点とし, 2つの頂点はそれらに対応する円板のアイソトピー類の中で横断的に交わらない代表元の組が選べる時に辺で結ばれると定めることによってできるグラフのことである (例は図 2).

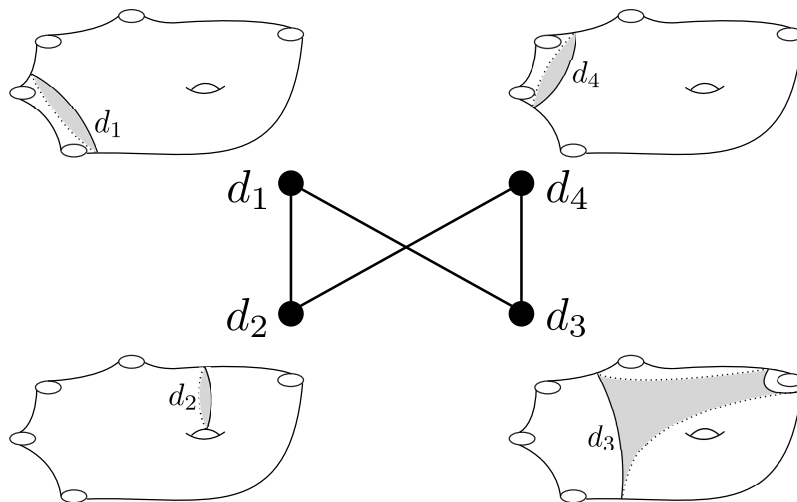


図 2:  $H_{1,5}$  の disk graph の例.

$S$  の曲線グラフ  $\mathcal{C}(S)$  は定義 2.4 の円板のアイソトピー類を本質的単純閉曲線のアイソトピー類に変えることで定められるグラフである.

**定義 2.5.**  $H$  のハンドル体群  $\text{Mod}(H)$  とは  $H$  上の向きを保つ微分同相写像のアイソトピー類で  $H$  上の marked point の集合を保つもの全体に写像の合成を演算として群構造を入れたものである.  $H$  内の円板  $d$  に沿った **disk twist**  $\delta_d$  とは  $d$  に沿って  $H$  を切りその片側を  $2\pi$  右に回転させ再び  $d$  で  $H$  を貼り合わせるという操作で得られる微分同相写像のことである (図 3 を見よ).  $\text{Mod}(H)$  の元  $\phi$  が **multi-disk twist** であるとは,  $\phi$  がいくつかの互いに交わらなくアイソトピックでない円板に沿った disk twist (の累乗) を合成したものを代表元に持つことである.

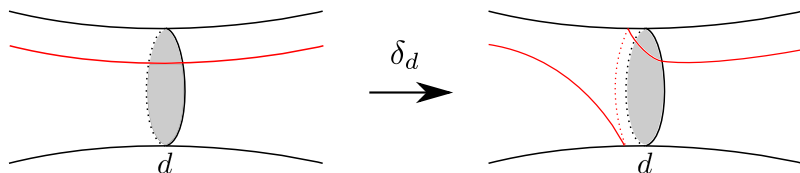


図 3: disk twist の例.

$S$  の写像類群  $\text{Mod}(S)$  は定義 2.5 の  $H$  上の向きを保つ微分同相写像を  $S$  上の向きを保つ微分同相写像に変えることで定義される群である.  $\text{Mod}(H)$  は  $\text{Mod}(S)$  の部分群になる.

### 2.3. Right-angled Artin group

**定義 2.6.** 有限グラフ  $\Gamma$  上の **right-angled Artin group**  $A(\Gamma)$  とは以下の表示から与えられる有限生成群のことである:

$$A(\Gamma) = \langle V(\Gamma) \mid [v_i, v_j] = 1 \Leftrightarrow \{v_i, v_j\} \in E(\Gamma) \rangle.$$

例 (Right-angled Artin group)

- (1) 図 4 (a) は,  $\langle v, w \mid [v, w] = 1 \rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  となる, 但し  $\mathbb{Z}$  は整数全体の集合である.
- (2) 図 4 (b) は,  $\langle v, w \mid \emptyset \rangle \cong F_2$  となる, 但し  $F_2$  は階数 2 の自由群である.
- (3) 図 4 (c) は,  $\langle v, w, x, y \mid [v, x] = [v, y] = [w, x] = [w, y] = 1 \rangle \cong F_2 \times F_2$  となる.
- (4) 図 4 (d) は,  $\langle v, w, x, y \mid [v, w] = [x, y] = 1 \rangle \cong (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) * (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$  となる.

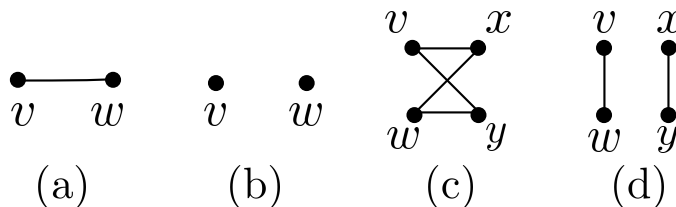


図 4: グラフから right-angled Artin group を定める例.

**定義 2.7.**  $A(\Gamma)$  から  $\text{Mod}(H)$  への埋め込み (単射準同型)  $f$  が標準的であるとは以下の 2つの条件を満たすことである.

- (i) 写像  $f$  は  $\Gamma$  の各頂点を multi-disk twist にうつす.
- (ii) グラフ  $\Gamma$  の異なる 2つの頂点  $u$  と  $v$  に対して,  $f(u)$  の support は  $f(v)$  の support に含まれない. 但し multi-disk twist の **support** とはその multi-disk twist に含まれる各 disk twist を施す円板の正則近傍の和集合のことである.

### 3. 主結果

定理 3.1.  $\Gamma$  が  $\mathcal{D}(H)$  の誘導部分グラフであるならば  $A(\Gamma)$  は  $\text{Mod}(H)$  の部分群になる.

定理 3.2.  $H$  の複雑度が 0 または 1 であるとする,  $A(\Gamma)$  が  $\text{Mod}(H)$  の部分群ならば  $\Gamma$  は  $\mathcal{D}(H)$  の誘導部分グラフになる.  $H$  の複雑度が 2 で  $A(\Gamma)$  から  $\text{Mod}(H)$  への標準的な埋め込みが存在する, すると  $\Gamma$  は  $\mathcal{D}(H)$  の誘導部分グラフになる.

定理 3.3.  $\Gamma_0$  を図 5 のグラフとする.  $H = H_{0,7}, H_{1,5}$  に対して  $A(\Gamma_0)$  は  $\text{Mod}(H)$  の部分群になるが  $\Gamma_0$  は  $\mathcal{D}(H)$  の誘導部分グラフにならない.

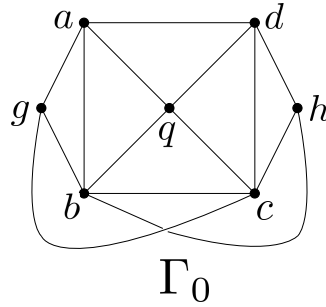


図 5: グラフ  $\Gamma_0$ .

定理 3.4.  $H$  を複雑度が  $N$  の任意のハンドル体とする.  $\Gamma$  が  $N$ -thick stars を持ち  $A(\Gamma)$  から  $\text{Mod}(H)$  への標準的な埋め込みが存在するならば  $\Gamma$  は  $\mathcal{D}(H)$  の誘導部分グラフになる.

### 謝辞

研究集会「第 12 回 数学総合若手研究集会」での講演の機会を与えてくださった運営委員の方々には心より感謝申し上げます. また, 日頃から研究に関することで常に背中を押していただき, 本研究においても丁寧にご指導をしてくださった東京工業大学の遠藤久顕先生には感謝してやみません. そして, 奈良女子大学の張娟姫先生と東京理科大学の廣瀬進先生にはハンドル体群や円板グラフに関して大変有益な助言をいただき大きな学びとなりましたことを改めて厚く御礼申し上げます.

### 参考文献

- [1] S. Kim and T. Koberda, *Right-angled Artin groups and finite subgraphs of curve graphs*, to appear in Osaka Journal of Mathematics, available at arXiv:1310.4850v2 [math.GT].
- [2] T. Koberda, *Right-angled Artin groups and a generalized isomorphism problem for finitely generated subgroups of mapping class groups*, Geom. Funct. Anal. **22** (2012), no. 6, 1541–1590.

# 向き付け不可能曲面の写像類群の表示について

大森 源城 (Genki Omori) (東京工業大学)\*

## 1. 導入

$N_{g,n}$  を種数  $g$ , 境界成分  $n$  の連結な向き付け不可能コンパクト曲面,  $\Sigma_{g,n}$  を種数  $g$ , 境界成分  $n$  の連結な向き付け可能コンパクト曲面とする.  $S$  を  $N_{g,n}$  もしくは  $\Sigma_{g,n}$  とした時に,  $\mathcal{M}(S)$  を  $S$  の写像類群, すなわち  $S$  の境界上恒等的な自己微分同相写像の境界を固定するアイソトピー類からなる群とする. ただし,  $S$  が向き付け可能な場合は向きを保つ写像類のみを考えることにする.  $\mathcal{M}(\Sigma_{g,n})$  の有限表示は, Hatcher-Thurston [3], Wajnryb [7], Harer [2] などによって求められている. Gervais [1] はそれらの有限表示を用いて  $\mathcal{M}(\Sigma_{g,n})$  の無限表示を求めており, 更に, Luo [4] がその Gervais の表示を書き換えてより単純化された無限表示を与えている.

一方, Paris-Szepietowski [5] によって  $n$  が 0 か 1 の時に  $\mathcal{M}(N_{g,n})$  の有限表示が求められており, 更に Stukow [6] はその表示を書き換え, 生成系が Dehn twist と Y-同相写像からなる有限表示を与えている. 本稿では  $n$  が 0 か 1 の時の  $\mathcal{M}(N_{g,n})$  の単純な無限表示について紹介する.

## 2. 準備

$S$  上の双側な単純閉曲線  $c$  に対し,  $t_c \in \mathcal{M}(S)$  を,  $c$  に沿って  $S$  を切り開き, その片方の境界を 360 度右に捻り再び貼り合わせる事で得られる  $S$  上の微分同相写像とし,  $c$  に沿った右手 Dehn twist と呼ぶ. ただし,  $S$  が向き付け不可能な場合には各  $c$  の正則近傍  $\mathcal{N}(c)$  に向きを 1 つ入れる事で右手 Dehn twist  $t_c$  を定義する (図 1 参照).

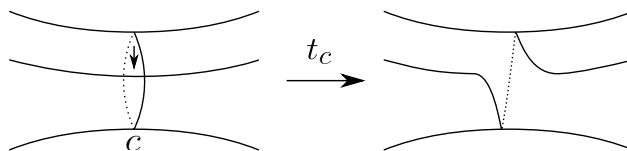


図 1:  $S$  上の双側な単純閉曲線  $c$  に沿った右手 Dehn twist  $t_c$ .

$N_{g,n}$  上の単側な単純閉曲線  $\mu$  と単純閉曲線  $\alpha$  に対して,  $Y_{\mu,\alpha} \in \mathcal{M}(N_{g,n})$  を,  $\mu$  の正則近傍である Möbius の帯を  $\alpha$  に沿って 1 周させる事で得られる  $N_{g,n}$  上の微分同相写像とし, Crosscap pushing map と呼ぶ. 特に  $\alpha$  が双側な時,  $Y_{\mu,\alpha}$  を Y-同相写像と呼ぶ. また,  $Y_{\mu,\alpha}$  は, “ $\mu$  の正則近傍である Möbius の帯を 1 点とみなし”, その操作によって  $\alpha$  から得られる  $N_{g-1,n}$  上の基点付き単純ループ  $\bar{\alpha}$  と準同型写像  $\psi_\mu : \pi_1(N_{g-1,n}) \rightarrow \mathcal{M}(N_{g,n})$  によって,  $Y_{\mu,\alpha} = \psi_\mu(\bar{\alpha})$  と書ける事に注意する.

以下, Dehn twists と  $Y_{\mu,\alpha}$  たちとの間の関係式について紹介する.

(0)  $S$  上で円板若しくは Möbius の帯を張る単純閉曲線  $c$  に対し,  $t_c = 1$ .

(I) ブレイド関係式:

本研究は科研費 (課題番号:15J10066) の助成を受けたものである.

\* e-mail: omori.g.aa@m.titech.ac.jp

- $f \in \mathcal{M}(S)$  に対し,  $ft_c f^{-1} = t_{f(c)}^{\varepsilon_f}$ . ただし,  $f|_{\mathcal{N}(c)} : \mathcal{N}(c) \rightarrow \mathcal{N}(f(c))$  が向きを保つ時は  $\varepsilon_f = 1$ , 保たない時は  $\varepsilon_f = -1$  とする.
- $f \in \mathcal{M}(N_{g,n})$  に対し,  $fY_{\mu,\alpha} f^{-1} = Y_{f(\mu),f(\alpha)}^{\varepsilon_{\alpha,f(\alpha)}}$ . ただし,  $f(\alpha)$  の向きと  $\alpha$  の向きから誘導される  $f(\alpha)$  の向きが等しい時は  $\varepsilon_{\alpha,f(\alpha)} = 1$ , 等しくない時は  $\varepsilon_{\alpha,f(\alpha)} = -1$  とする.

(II) 2-チェイン関係式 :

図 2 のような単純閉曲線  $c_1, c_2, \delta$  に対し,  $(t_{c_1} t_{c_2})^6 = t_\delta$ . ただし, この  $t_{c_1}, t_{c_2}, t_\delta$  の正の向きは  $\mathcal{N}(c_1 \cup c_2)$  の向きから誘導されるものとする.

(III) ランタン関係式 :

図 3 のような単純閉曲線  $\alpha_i (i = 1, 2, 3), \delta_i (i = 1, 2, 3, 4)$  に対し,  $t_{\alpha_1} t_{\alpha_2} t_{\alpha_3} = t_{\delta_1} t_{\delta_2} t_{\delta_3} t_{\delta_4}$ . ただし, この  $t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}, t_{\alpha_3}, t_{\delta_1}, t_{\delta_2}, t_{\delta_3}, t_{\delta_4}$  の正の向きは  $\mathcal{N}(\alpha_1 \cup \alpha_2)$  の向きから誘導されるものとする.

- (IV)  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \overline{\alpha\beta} \in \pi_1(N_{g-1,n})$  が単純なループで代表される時,  $\psi_\mu(\overline{\alpha\beta}) = \psi_\mu(\bar{\alpha})\psi_\mu(\bar{\beta})$ .  
 (V)  $\alpha$  が単側な単純閉曲線である時,  $Y_{\mu,\alpha} = t_{\delta_1}^{\varepsilon_1} t_{\delta_2}^{\varepsilon_2}$ . ただし,  $\delta_1 \sqcup \delta_2$  は  $\mathcal{N}(\mu \cup \alpha)$  の境界になるもので,  $\varepsilon_1$  と  $\varepsilon_2$  はそれぞれ 1 か  $-1$  である (図 4 参照).

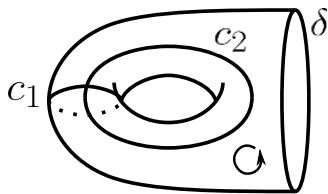


図 2: 2-チェイン関係式.

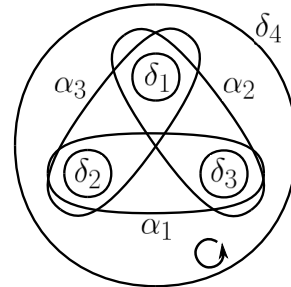


図 3: ランタン関係式.

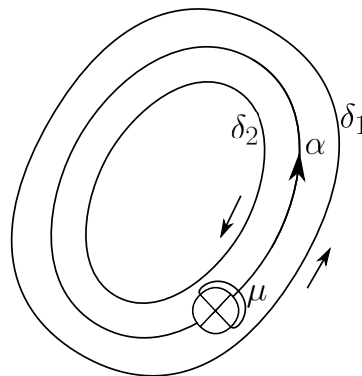


図 4:  $\alpha, \mathcal{N}_{N_{g,n}}(\delta_1), \mathcal{N}_{N_{g,n}}(\delta_2)$  の向きが上図のような時,  $Y_{\mu,\alpha} = t_{\delta_1} t_{\delta_2}^{-1}$  となる. ここで, 図中の  $\times$  印は開円板を抜いて出来る境界の対蹠点の同一視を意味する.

Gervais [1] と Luo [4] が与えた  $\mathcal{M}(\Sigma_{g,n})$  の無限表示は, 以下のものである.

**定理 2.1** (Gervais, Luo).  $g \geq 0, n \geq 0$  に対し,  $\mathcal{M}(\Sigma_{g,n})$  の表示は以下で与えられる.

生成系:  $\{t_c \mid c : \Sigma_{g,n}$  上の単純閉曲線

関係式: (0), (I), (II), (III).

ただし, ブレイド関係式は  $t_d t_c t_d^{-1} = t_{t_d(c)}^{\varepsilon_d}$  の形であつ  $|c \cap d|$  が 0 か 1 のもので十分.

### 3. 主結果

Stukow [6] の有限表示に Gervais [1] の議論を適用することによって次の結果が得られる.

**定理 3.1.**  $g \geq 3$  かつ  $n \in \{0, 1\}$ , 若しくは  $(g, n) = (2, 1)$  に対し,  $\mathcal{M}(N_{g,n})$  の表示は以下で与えられる.

生成系:  $\{t_c \mid c: N_{g,n}$  上の双側な単純閉曲線

$\cup \{Y_{\mu,\alpha} \mid \mu: N_{g,n}$  上の単側な単純閉曲線,  $\alpha: N_{g,n}$  上の単純閉曲線

関係式: (0), (I), (II), (III), (IV), (V).

**注意 3.2.** 関係式 (I), (IV) を Dehn twist と Y-同相写像の積で書き直す事で, 定理 3.1 の関係式 (V) は不要になる.

**注意 3.3.**  $\mathcal{M}(N_2)$  は有限群であり, 更に  $\mathcal{M}(N_1)$ ,  $\mathcal{M}(N_{1,1})$  は自明な群になる.

### 参考文献

- [1] S. Gervais, *Presentation and central extensions of mapping class groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 3097–3132.
- [2] L. Harer, *The second homology group of the mapping class groups of orientable surfaces*, Invent. Math. **72**, 221–239 (1983)
- [3] A. Hatcher, W. Thurston, *A presentation for the mapping class group of a closed orientable surface*, Top. **19** (1980), 221–237.
- [4] F. Luo, *A presentation of the mapping class groups*, Math. Res. Lett. **4** (1997), 735–739.
- [5] L. Paris and B. Szepietowski. *A presentation for the mapping class group of a nonorientable surface*, arXiv:1308.5856v1 [math.GT], 2013.
- [6] M. Stukow. *A finite presentation for the mapping class group of a nonorientable surface with Dehn twists and one crosscap slide as generators*, J. Pure Appl. Algebra **218** (2014), no. 12, 2226–2239.
- [7] B. Wajnryb, *A simple presentation for the mapping class group of an orientable surface*, Israel J. Math. **45** (1989), 157–174.

# STRICTLY CONVEX WULFF SHAPES AND $C^1$ CONVEX INTEGRANDS

HUHE HAN

ABSTRACT. Let  $\gamma : S^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  be a continuous function and let  $\mathcal{W}_\gamma$  be the Wulff shape associated with  $\gamma$ . We show that Wulff shape  $\mathcal{W}_\gamma$  is strictly convex if and only if convex integrand of  $\mathcal{W}_\gamma$  is of class  $C^1$ . We also show that if the boundary of  $\mathcal{W}_\gamma$  is a  $C^1$  submanifold, then  $\gamma$  must be the convex integrand of  $\mathcal{W}_\gamma$ .

## 1. INTRODUCTION

Let  $n$  be a positive integer. Given a continuous function  $\gamma : S^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  where  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  is the unit sphere and  $\mathbb{R}_+$  is the set consisting of positive real numbers, the *Wulff shape associated with  $\gamma$* , denoted by  $\mathcal{W}_\gamma$ , is the following intersection

$$\mathcal{W}_\gamma = \bigcap_{\theta \in S^n} \Gamma_{\gamma, \theta}.$$

Here,  $\Gamma_{\gamma, \theta}$  is the following half-space:

$$\Gamma_{\gamma, \theta} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \cdot \theta \leq \gamma(\theta)\}.$$

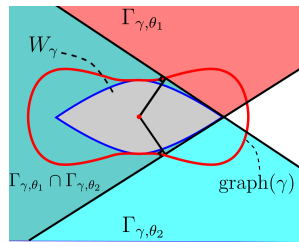


FIGURE 1. A Wulff shape  $\mathcal{W}_\gamma$ .

By definition, the Wulff shape  $\mathcal{W}_\gamma$  is a convex body such that the origin of  $\mathbb{R}^{n+1}$  is an interior point of  $\mathcal{W}_\gamma$ . The notion of Wulff shape was first introduced by G. Wulff in [9]. Let  $Id : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \times \{1\}$  be the map defined by  $Id(x) = (x, 1)$ . Denote the point  $(0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+2}$  by  $N$ . The set  $S^{n+1} - H(-N)$  is denoted by

---

2010 *Mathematics Subject Classification.* 52A20, 52A55, 82D25.

*Key words and phrases.* Wulff shape, dual Wulff shape, strictly convex, convex integrand, support function.



$S_{N,+}^{n+1}$ . Let  $\alpha_N : S_{N,+}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \times \{1\}$  be the central projection relative to  $N$ , namely,  $\alpha_N$  is defined as follows for any  $P = (P_1, \dots, P_{n+1}, P_{n+2}) \in S_{N,+}^{n+1}$  (see Figure 2):

$$\alpha_N(P_1, \dots, P_{n+1}, P_{n+2}) = \left( \frac{P_1}{P_{n+2}}, \dots, \frac{P_{n+1}}{P_{n+2}}, 1 \right).$$

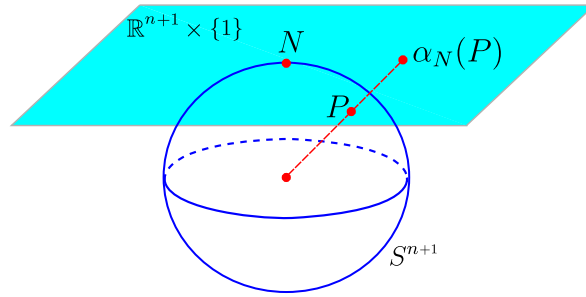


FIGURE 2. The central projection  $\alpha_N$ .

Next, we consider the mapping  $\Psi_N : S^{n+1} - \{\pm N\} \rightarrow S_{N,+}^{n+1}$  (see Figure 3), defined by

$$\Psi_N(P) = \frac{1}{\sqrt{1 - (N \cdot P)^2}}(N - (N \cdot P)P).$$

The mapping  $\Psi_N$  was introduced in [5], has the following intriguing properties:

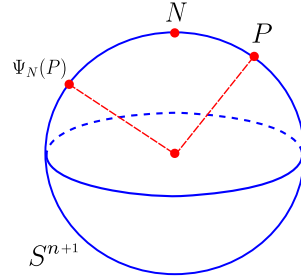


FIGURE 3.  $P \cdot \Psi_N(P) = 0$ .

- (1) For any  $P \in S^{n+1} - \{\pm N\}$ , the equality  $P \cdot \Psi_N(P) = 0$  holds,
- (2) for any  $P \in S^{n+1} - \{\pm N\}$ , the property  $\Psi_N(P) \in \mathbb{R}N + \mathbb{R}P$  holds,
- (3) for any  $P \in S^{n+1} - \{\pm N\}$ , the property  $N \cdot \Psi_N(P) > 0$  holds,
- (4) the restriction  $\Psi_N|_{S_{N,+}^{n+1} - \{N\}} : S_{N,+}^{n+1} - \{N\} \rightarrow S_{N,+}^{n+1} - \{N\}$  is a  $C^\infty$  diffeomorphism.

For any point  $P \in S^{n+1}$ , let  $H(P)$  be the closed hemisphere centered at  $P$ , namely,

$$H(P) = \{Q \in S^{n+1} | P \cdot Q \geq 0\},$$

where the dot in the center stands for the scalar product of two vectors  $P, Q \in \mathbb{R}^{n+2}$ . For any non-empty subset  $\widetilde{W} \subset S^{n+1}$ , the *spherical polar set of  $\widetilde{W}$* , denoted by  $\widetilde{W}^\circ$ , is defined as follows:

$$\widetilde{W}^\circ = \bigcap_{P \in \widetilde{W}} H(P).$$

for details on spherical polar set, see for instance [1, 6]

**Proposition 1** ([6]). *Let  $\gamma : S^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  be a continuous function. Let  $\text{graph}(\gamma) = \{(\theta, \gamma(\theta)) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \mid \theta \in S^n\}$ , where  $(\theta, \gamma(\theta))$  is the polar plot expression for a point of  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ . Then,  $\mathcal{W}_\gamma$  is characterized as follows:*

$$\mathcal{W}_\gamma = Id^{-1} \circ \alpha_N \left( (\Psi_N \circ \alpha_N^{-1} \circ Id(\text{graph}(\gamma)))^\circ \right).$$

**Proposition 2** ([6]). *For any Wulff shape  $\mathcal{W}_\gamma$ , the following set, too, is a Wulff shape:*

$$Id^{-1} \circ \alpha_N \left( (\alpha_N^{-1} \circ Id(\mathcal{W}_\gamma))^\circ \right).$$

**Definition 1** ([6]). Let  $\mathcal{W}_\gamma$  be a Wulff shape. The Wulff shape given in Proposition 2 is called the *dual Wulff shape* of  $\mathcal{W}_\gamma$ .

A Wulff shape  $\mathcal{W}_\gamma$  said to be *self-dual Wulff shape* if the equality  $\mathcal{W}_\gamma = Id^{-1} \circ \alpha_N \left( (\alpha_N^{-1} \circ Id(\mathcal{W}_\gamma))^\circ \right)$  holds, for details on self-dual Wulff shapes, see for instance [4].

The mapping  $\text{inv} : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ , defined as follows, is called the *inversion* with respect to the origin of  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

$$\text{inv}(\theta, r) = \left( -\theta, \frac{1}{r} \right).$$

Let  $\Gamma_\gamma$  be the boundary of the convex hull of  $\text{inv}(\text{graph}(\gamma))$ . If the equality  $\Gamma_\gamma = \text{inv}(\text{graph}(\gamma))$  is satisfied, then  $\gamma$  is called a *convex integrand*. The notion of convex integrand was firstly introduced by J. Taylor in [8].

## 2. MAIN RESULTS

**Theorem 1** ([2]). *Let  $W \subset \mathbb{R}^{n+1}$  be a convex body containing the origin of  $\mathbb{R}^{n+1}$  as an interior point of  $W$ . Then,  $W$  is strictly convex if and only if its convex integrand  $\gamma_W$  is of class  $C^1$ .*

**Theorem 2** ([3]). *Let  $\gamma : S^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  be a continuous function and let  $\mathcal{W}_\gamma$  be the Wulff shape associated with  $\gamma$ . Suppose that the boundary of  $\mathcal{W}_\gamma$  is a  $C^1$  submanifold. Then,  $\gamma$  must be the convex integrand of  $\mathcal{W}_\gamma$ .*

## 3. APPLICATIONS OF THEOREM 1

Since the boundary of the convex hull of a  $C^1$  closed submanifold is a  $C^1$  closed submanifold (for instance, see [7, 10]), as a corollary of Theorem 1, we have the following:

**Corollary 1** ([2]). *Let  $\gamma : S^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  be a function of class  $C^1$ . Then,  $\mathcal{W}_\gamma$  is strictly convex.*

In particular, we have the following:

**Corollary 2** ([6], Theorem 1.3). *Let  $\gamma : S^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  be a function of class  $C^1$ . Then,  $\mathcal{W}_\gamma$  is never a polytope.*

On the other hand, the converse of Corollary 1 does not hold in general (see Figure 4).

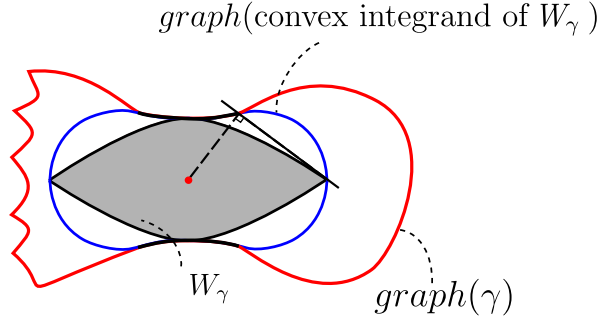


FIGURE 4. A strictly convex Wulff shape  $\mathcal{W}_\gamma$  having non smooth support function  $\gamma$ .

Combining Theorem 1 and Proposition 1 yields the following:

**Corollary 3** ([2]). *A Wulff shape in  $\mathbb{R}^{n+1}$  is strictly convex if and only if the boundary of its dual Wulff shape is  $C^1$  diffeomorphic to  $S^n$ .*

In particular, we have the following:

**Corollary 4** ([2]). *A Wulff shape in  $\mathbb{R}^{n+1}$  is strictly convex and its boundary is  $C^1$  diffeomorphic to  $S^n$  if and only if its dual Wulff shape is strictly convex and the boundary of it is  $C^1$  diffeomorphic to  $S^n$ .*

It is interesting to compare Corollary 4 and the following proposition:

**Proposition 3** ([6]). *A Wulff shape in  $\mathbb{R}^{n+1}$  is a polytope if and only if its dual Wulff shape is a polytope.*

Finally, we give an application of Theorem 1 from the view point of pedal.

**Definition 2** ([2]). Let  $p$  (resp.,  $F : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ) be a point of  $\mathbb{R}^{n+1}$  (resp., a  $C^1$  embedding). Then, the *pedal of  $F(S^n)$  relative to  $p$*  is the mapping  $G : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  which maps  $\theta \in S^n$  to the nearest point in the tangent hyperplane to  $F(S^n)$  at  $F(\theta)$  from the given point  $p$ .

Let  $W$  be a Wulff shape in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Suppose that  $\partial W$  is  $C^1$  diffeomorphic to  $S^n$ . Then,  $\partial W$  may be regarded as the graph of a certain  $C^1$  embedding  $F : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , and  $\gamma_W$  is exactly the pedal of  $\partial W$  relative to the origin. Theorem 1 gives a sufficient condition for the pedal of  $\partial W$  relative to the origin to be smooth:

**Corollary 5** ([2]). *Suppose that a Wulff shape  $W$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$  is strictly convex and its boundary is  $C^1$  diffeomorphic to  $S^n$ . Then, the pedal of  $\partial W$  relative to the any interior point of  $W$  is of class  $C^1$ .*

## REFERENCES

- [1] H. Han and T. Nishimura, *The spherical dual transform is an isometry for spherical Wulff shapes*, preprint (available from arXiv:1504.02845 [math.MG]).
- [2] H. Han and T. Nishimura, *Strictly convex Wulff shapes and  $C^1$  convex integrands*, preprint (available from arXiv:1507.05162 [math.MG]).
- [3] H. Han and T. Nishimura, *Uniqueness of the surface energy density for a Wulff shape with  $C^1$  boundary*, preprint (available from arXiv:1509.02786 [math.MG]).
- [4] H. Han and T. Nishimura, *Self-dual Wulff shapes and spherical convex bodies of constant width  $\pi/2$* , preprint (available from arXiv:1511.04165 [math.MG]).
- [5] T. Nishimura, *Normal forms for singularities of pedal curves produced by non-singular dual curve germs in  $S^n$* , *Geom Dedicata* **133**(2008), 59–66.
- [6] T. Nishimura and Y. Sakemi, *Topological aspect of Wulff shapes*, *J. Math. Soc. Japan*, **66** (2014), 89–109.
- [7] S. A. Robertson and M. C. Romero-Fuster, *The convex hull of a hypersurface*, *Proc. London Math. Soc.*, **50**(1985), 370–384.
- [8] J. E. Taylor, *Crystalline variational problems*, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **84**(1978), 568–588.
- [9] G. Wulff, *Zur frage der geschwindigkeit des wachstrums und der auflösung der kristallflächen*, *Z. Kristallographie und Mineralogie*, **34**(1901), 449–530.
- [10] V. M. Zakalyukin, *Singularities of convex hulls of smooth manifolds*, *Functional Anal. Appl.*, **11**(1977), 225–227(1978).

GRADUATE SCHOOL OF ENVIRONMENT AND INFORMATION SCIENCES, YOKOHAMA NATIONAL UNIVERSITY, YOKOHAMA 240-8501, JAPAN

*E-mail address:* han-huhe-bx@ynu.jp

# TOPOLOGICAL CLASSIFICATION OF MAP GERMS USING REEB GRAPHS

ERICA BOIZAN BATISTA

## 1. INTRODUCTION

The classification problem of singular points of  $C^\infty$  map germs is one of the most important problems in Singularity theory. The classical classification is done via  $\mathcal{A}$ -equivalence, where we take  $C^\infty$ -diffeomorphism germs in the source and the target. However, this is a difficult problem and it presents a lot of rigidity. Then it seems natural to investigate the classification of map germs up to weaker equivalence relations. Here we consider topological equivalence or  $C^0$ - $\mathcal{A}$ -equivalence, where the changes of coordinates are homeomorphisms instead of  $C^\infty$ -diffeomorphisms.

This work is devoted to the topological classification of  $C^\infty$  map germs from  $\mathbb{R}^3$  to  $\mathbb{R}^2$  which are finitely determined. The topological structure of a finitely determined map germ  $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  is determined by the so-called link of  $f$  (cf. [6]). The link of  $f$  is obtained by taking a small enough representative  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  and the intersection of its image with a small enough sphere  $S_\delta^1$  centered at the origin in  $\mathbb{R}^2$ . When  $f$  has isolated zeros (i.e.,  $f^{-1}(0) = \{0\}$ ), the link is a stable map  $\gamma : S^2 \rightarrow S^1$  and  $f$  is topologically equivalent to the cone of  $\gamma$ . As a consequence, two finitely determined map germs  $f, g : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  are topologically equivalent if their associated links are topologically equivalent.

## 2. FINITE DETERMINACY AND THE LINK OF A MAP GERM

Two  $C^\infty$  map germs  $f, g : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  are  $\mathcal{A}$ -equivalent if there exist  $C^\infty$ -diffeomorphism germs  $\psi : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  and  $\phi : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  such that  $f = \phi \circ g \circ \psi$ . If  $\phi, \psi$  are homeomorphisms instead of  $C^\infty$ -diffeomorphisms, then we say that  $f$  and  $g$  are *topologically equivalent* (or  $C^0$ - $\mathcal{A}$ -equivalent).

For simplicity, we will write just diffeomorphism instead of  $C^\infty$ -diffeomorphism.

We say that  $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  is  $k$ -determined if for any map germ  $g$  with the same  $k$ -jet, we have that  $g$  is  $\mathcal{A}$ -equivalent to  $f$ . We say that  $f$  is finitely determined if it is  $k$ -determined for some  $k$ .

Let  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  be a  $C^\infty$  map, where  $U \subset \mathbb{R}^3$  is an open subset. We denote by  $S(f) = \{p \in U \mid Jf(p) \text{ does not have rank } 2\}$  the *singular set* of  $f$ , where  $Jf(p)$  is the Jacobian matrix of  $f$ . We also denote the *discriminant set* of  $f$  by  $\Delta(f) = f(S(f))$ .

Let  $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  be a finitely determined map germ. Then there exists a representative  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  such that

- i)  $S(f) \cap f^{-1}(0) = \{0\}$ ,
- ii) the restriction  $f|_{U - \{0\}}$  has only definite and indefinite simple fold singularities.

If  $f$  is finitely determined, then its discriminant  $\Delta(f)$  is a plane curve with an isolated singularity at the origin. The number of half branches of  $\Delta(f)$  will play a crucial role in

---

*Key words and phrases.* topological equivalence, classification, link, Reeb graph.

the analysis of the Reeb graph associated to link of  $f$  and consequently, in the topological classification of  $f$ .

Denote by  $J^r(n, p)$  the  $r$ -jet space from  $(\mathbb{R}^n, 0)$  to  $(\mathbb{R}^p, 0)$ . For positive integers  $r$  and  $s$  with  $s \geq r$ , let  $\pi_r^s : J^s(n, p) \rightarrow J^r(n, p)$  be the canonical projection defined by  $\pi_r^s(j^s f(0)) = j^r f(0)$ . For a positive number  $\epsilon > 0$  we set

$$D_\epsilon^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 \leq \epsilon\}, \quad B_\epsilon^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 < \epsilon\} \text{ and } S_\epsilon^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 = \epsilon\}.$$

We denote  $D^n$ ,  $B^n$  and  $S^{n-1}$  the standard disk, ball and sphere of radius 1, respectively.

T. Fukuda has proved the following cone structure theorem in his papers [5, 6]:

**Theorem 2.1.** *For any semialgebraic subset  $W$  of  $J^r(n, p)$ , there exist an integer  $s$  ( $s \geq r$ ) depending only on  $n, p$  and  $r$ , and there exists a closed semialgebraic subset  $\Sigma_W$  of  $(\pi_r^s)^{-1}(W)$  having codimension  $\geq 1$  such that for any  $C^\infty$  map  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  with  $j^s f(0)$  belonging to  $(\pi_r^s)^{-1}(W) \setminus \Sigma_W$  we have the following properties:*

(A) **The case  $f^{-1}(0) = \{0\}$ :** *there is  $\epsilon_0 > 0$  such that for any number  $\epsilon$  with  $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$  we have:*

- (A-i) *the set  $\tilde{S}_\epsilon^{n-1} = f^{-1}(S_\epsilon^{p-1})$  is a  $C^\infty$  submanifold without boundary which is diffeomorphic to the standard unit sphere  $S^{n-1}$ .*
- (A-ii) *The restricted map  $f|_{\tilde{S}_\epsilon^{n-1}} : \tilde{S}_\epsilon^{n-1} \rightarrow S_\epsilon^{p-1}$  is topologically stable ( $C^\infty$  stable if  $(n, p)$  is a nice pair in Mather's sense).*
- (A-iii) *If  $\tilde{D}_\epsilon^{n-1} = f^{-1}(D_\epsilon^{p-1})$ , then the restricted map  $f|_{\tilde{D}_\epsilon^{n-1}} : \tilde{D}_\epsilon^{n-1} \rightarrow D_\epsilon^p$  is topologically equivalent to the cone of  $f|_{\tilde{S}_\epsilon^{n-1}}$ .*

(B) **The case  $f^{-1}(0) \neq \{0\}$ :** *there exist a positive number  $\epsilon_0$  and a strictly increasing  $C^\infty$  function  $\delta : [0, \epsilon_0] \rightarrow [0, \infty)$  with  $\delta(0) = 0$  such that for every  $\epsilon$  and  $\delta$  with  $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$  and  $0 < \delta \leq \delta(\epsilon)$  we have:*

- (B-i)  *$f^{-1}(0) \cap S_\epsilon^{n-1}$  is an  $(n - p - 1)$ -dimensional manifold and it is diffeomorphic to  $f^{-1}(0) \cap S_{\epsilon_0}^{n-1}$ .*
- (B-ii)  *$D_\epsilon^n \cap f^{-1}(S_\delta^{p-1})$  is a  $C^\infty$  manifold, in general with boundary and it is diffeomorphic to  $D_{\epsilon_0}^n \cap f^{-1}(S_{\delta(\epsilon_0)}^{p-1})$ .*
- (B-iii) *the restriction  $f|_{D_\epsilon^n \cap f^{-1}(S_\delta^{p-1})} : D_\epsilon^n \cap f^{-1}(S_\delta^{p-1}) \rightarrow S_\delta^{p-1}$  is a topologically stable map ( $C^\infty$  stable if  $(n, p)$  is a nice pair in Mather's sense) and its topological class is independent of  $\epsilon$  and  $\delta$ .*

Assuming that  $f$  is  $r$ -determined for some  $r$  and taking  $W = \{j^r f(0)\}$ , we can apply Theorem 2.1 to obtain a representative of  $f$  satisfying (A) or (B), depending on if  $f^{-1}(0) = \{0\}$  or  $f^{-1}(0) \neq \{0\}$ . Note that when  $n \leq p$  we always have  $f^{-1}(0) = \{0\}$  but when  $n > p$  we may have the two possibilities.

**Definition 2.2.** Let  $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  be a finitely determined map germ such that  $f^{-1}(0) = \{0\}$ . We say that the stable map  $f|_{\tilde{S}_\epsilon^2} : \tilde{S}_\epsilon^2 \rightarrow S_\epsilon^1$  is the *link* of  $f$ , where  $f$  is a representative that satisfies the Fukuda's conditions (A) of Theorem 2.1 adapted for case  $n = 3$  and  $p = 2$ .

**Corollary 2.3.** *Two finitely determined map germs  $f, g : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  with  $f^{-1}(0) = \{0\} = g^{-1}(0)$  are topologically equivalent if their associated links are topologically equivalent.*

### 3. THE GENERALIZED REEB GRAPH

The Reeb graph was introduced by Reeb in [7] and it is well known that it is a complete topological invariant for Morse functions from  $S^2$  to  $\mathbb{R}$  (see [1]).

**Proposition 3.1.** *Let  $\gamma : S^2 \rightarrow S^1$  be a stable map. Then  $\gamma$  is not a regular map.*

Given a continuous map  $f : X \rightarrow Y$  between topological spaces, we consider the following equivalence relation on  $X$ :  $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$  and  $x$  and  $y$  are in the same connected component of  $f^{-1}(f(x))$ .

**Proposition 3.2.** *Let  $\gamma : S^2 \rightarrow S^1$  be a stable map. Then the quotient space  $S^2 / \sim$  admits the structure of a connected graph in the following way:*

- (1) *the vertices are the connected components of level curves  $\gamma^{-1}(v)$ , where  $v \in S^1$  is a critical value;*
- (2) *each edge is formed by points that correspond to connected components of level curves  $\gamma^{-1}(v)$ , where  $v \in S^1$  is a regular value.*

Each vertex of the graph can be of three topological types, depending on if the connected component has a maximum/minimum critical point, a saddle point or just regular points.

Let  $v_1, \dots, v_r \in S^1$  be the critical values of  $\gamma$ . We choose a base point  $v_0 \in S^1$  and an orientation. We can reorder the critical values such that  $v_0 \leq v_1 < \dots < v_r$  and we label each vertex with the index  $i \in \{1, \dots, r\}$ , if it corresponds to the critical value  $v_i$ .

**Definition 3.3.** The graph given by  $S^2 / \sim$  together with the the labels of the vertices, as previously defined, is said to be the *generalized Reeb graph* associated to  $\gamma : S^2 \rightarrow S^1$ .

For simplicity, from now on we will just call Reeb graph to the generalized Reeb graph, unless otherwise specified.

**Proposition 3.4.** *Let  $\gamma : S^2 \rightarrow S^1$  be a stable map. Then the Reeb graph of  $\gamma$  is a tree.*

Let  $\gamma, \delta : S^2 \rightarrow S^1$  be two stable maps. Let  $\Gamma_\gamma$  and  $\Gamma_\delta$  be their respective Reeb graphs. Consider the induced quotient maps  $\bar{\gamma} : \Gamma_\gamma \rightarrow S_\gamma^1$  and  $\bar{\delta} : \Gamma_\delta \rightarrow S_\delta^1$ , where  $S_\gamma^1, S_\delta^1$  denote  $S^1$  with the graph structure whose vertices are the critical values of  $\gamma, \delta$  respectively.

**Definition 3.5.** An *isomorphism* between two graphs  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$  is a bijection  $f$  from  $V(\Gamma_1)$  to  $V(\Gamma_2)$  such that two vertices  $v$  and  $w$  are adjacent in  $\Gamma_1$  if and only if  $f(v)$  and  $f(w)$  are adjacent in  $\Gamma_2$ , where  $V(\Gamma_i) = \{\text{vertices of } \Gamma_i\}$ .

**Definition 3.6.** We say that  $\Gamma_\gamma$  is *equivalent* to  $\Gamma_\delta$  and we denote it by  $\Gamma_\gamma \sim \Gamma_\delta$ , if there exist graph isomorphisms  $j : \Gamma_\gamma \rightarrow \Gamma_\delta$  and  $l : S_\gamma^1 \rightarrow S_\delta^1$ , such that the following diagram is commutative:

$$\begin{array}{ccc} V_\gamma & \xrightarrow{\bar{\gamma}|_{V_\gamma}} & \Delta_\gamma \\ j|_{V_\gamma} \downarrow & & \downarrow l|_{\Delta_\gamma} \\ V_\delta & \xrightarrow{\bar{\delta}|_{V_\delta}} & \Delta_\delta \end{array}$$

where  $V_\gamma = \{\text{vertices of } \Gamma_\gamma\}$ ,  $V_\delta = \{\text{vertices of } \Gamma_\delta\}$  and  $\Delta_\gamma$  and  $\Delta_\delta$  are their respective discriminant sets.

**Theorem 3.7.** *Let  $\gamma, \delta : S^2 \rightarrow S^1$  be two stable maps. If  $\gamma$  and  $\delta$  are topologically equivalent then their respective Reeb graphs are equivalent.*

The above theorem allows us to extend the definition of Reeb graph for  $C^0$ -stable maps between topological spheres.

**Theorem 3.8.** *Let  $\gamma, \delta : S^2 \rightarrow S^1$  be two stable maps such that  $\Gamma_\gamma \sim \Gamma_\delta$ . Then  $\gamma$  is  $\mathcal{A}$ -equivalent to  $\delta$ .*

**Corollary 3.9.** *Let  $\gamma, \delta : S^2 \rightarrow S^1$  be two stable maps. Then the following statements are equivalent:*

- (1)  $\gamma, \delta$  are  $\mathcal{A}$ -equivalent,
- (2)  $\gamma, \delta$  are topologically equivalent,
- (3)  $\Gamma_\gamma \sim \Gamma_\delta$ .

**Theorem 3.10.** *Let  $f, g : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  be two finitely determined map germs such that  $f^{-1}(0) = \{0\} = g^{-1}(0)$ . If  $f$  and  $g$  are topologically equivalent then the Reeb graphs of their links are equivalent.*

Again, Theorem 3.10 together with Corollary 2.3 and Theorem 3.8 show that the Reeb graph is a complete topological invariant for map germs from with isolated zeros.

**Corollary 3.11.** *Let  $f, g : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$  be finitely determined map germs such that  $f^{-1}(0) = \{0\} = g^{-1}(0)$ . Then the following statements are equivalent:*

- (1)  $f, g$  are topologically equivalent,
- (2) the Reeb graphs of the links of  $f, g$  are equivalent,
- (3) the links of  $f, g$  are topologically equivalent.

## REFERENCES

- [1] V.I. Arnold, *Topological classification of Morse functions and generalisations of Hilbert's 16-th problem*, Math. Phys. Anal. Geom. Vol. 10 (2007) 227–236.
- [2] E.B. Batista, J.C.F. Costa, J.J. Nuño-Ballesteros, *The Reeb graph of a map germ from  $\mathbb{R}^3$  to  $\mathbb{R}^2$  with isolated zeros*, to appear in Proc. Edinb. Math. Soc. (2).
- [3] E.B. Batista, J.C.F. Costa, J.J. Nuño-Ballesteros, *The Reeb graph of a map germ from  $\mathbb{R}^3$  to  $\mathbb{R}^2$  with non isolated zeros*, preprint (2015).
- [4] J.C.F. Costa, J.J. Nuño-Ballesteros, *Topological  $\mathcal{K}$ -classification of finitely determined map germs*, Geom. Dedicata 166 (2013) 147–162.
- [5] T. Fukuda, *Local Topological Properties of Differentiable Mappings I*, Invent. Math. 65 no. 2 (1981/82) 227–250.
- [6] T. Fukuda, *Local Topological Properties of Differentiable Mappings II*, Tokyo J. Math. 8, no.2 (1985) 501–520.
- [7] G. Reeb, *Sur les points singuliers d'une forme de Pfaff complètement intégrable ou d'une fonction numérique*, C. R. Acad. Sci. Paris 222 (1946) 847–849.

RESEARCH INSTITUTE OF ENVIRONMENT AND INFORMATION SCIENCES, YOKOHAMA NATIONAL UNIVERSITY, YOKOHAMA 240-8501, JAPAN

*E-mail address:* ericabbatista@gmail.com



# グラフに付随したハイパー群

親木 翔平 (Shohei OYANOKI) (奈良教育大学大学院)\*

## 概 要

有限ハイパー群とは、有限群を拡張したものである。また、グラフとは、頂点の集合と辺の集合からなる図形のことである。本研究では、グラフから隣接行列などの代数的な道具を用いてハイパー群を構成することを行った。また、ハイパー群からグラフを構成することも行った。本講演では、有限群と有限ハイパー群との違いについて述べ、具体例を交えながら、グラフからハイパー群を構成する方法について述べる。

## 1. はじめに

有限群を拡張した概念の一つとして、有限ハイパー群が存在する。そのハイパー群の定義について述べ、有限群がハイパー群であることの証明を行う。そして、いくつかの具体例を通してハイパー群の構成方法について述べる。

## 2. 有限ハイパー群とは

### 2.1. 記号の準備

まず、有限ハイパー群について述べるために必要な記号の定義を行う。

**定義 1** (algebra). 空でない集合  $A$  が次の性質を満たすとき、集合  $A$  は algebra であるという。

1.  $A$  は  $\mathbb{C}$  上のベクトル空間である。
2.  $A$  に積が定義されている。
3.  $A$  内の演算に対して、分配法則を満たす。

**定義 2** (対合  $-$ ). algebra  $A$  に対して、写像  $-$  を  $- : A \rightarrow A$  とする。  $a, b \in A, \lambda \in \mathbb{C}$  に対して

$$(a + b)^- = a^- + b^-, \quad (\lambda a)^- = \lambda^{-1} a^-, \quad (ab)^- = b^- a^-, \quad (a^-)^- = a$$

を満たすとき、写像  $-$  を対合という。ただし、 $\lambda^{-1}$  は  $\lambda$  の複素共役を表す。

**定義 3** (involutive algebra). 空でない集合  $A$  が次の性質を満たすとき、集合  $A$  は involutive algebra であるという。

1.  $A$  が algebra である。
2.  $A$  に対合  $-$  が定義されている。

**定義 4** (台 (support)). 集合  $X = \{c_0, c_1, \dots, c_n\}$  があり、 $\mu = a_0 c_0 + a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n$  ( $a_i \in \mathbb{C}, c_i \in X$ ) に対して、 $\mu$  の台 (support) を表す  $\text{supp}(\mu)$  を

$$\text{supp}(\mu) := \{c_j ; a_j \neq 0\}$$

と定義する。

---

キーワード：ハイパー群, グラフ

\* e-mail: a153302@student.nara-edu.ac.jp

## 2.2. 有限ハイパー群の公理

比較のために有限群の定義をまず以下に示す.

**定義 5** (有限群). 有限集合  $G = \{g_0, g_1, g_2, \dots, g_n\}$  に対して, 二項演算  $\circ : G \times G \rightarrow G$  が定義されており, 以下の条件を満たすとす. このとき,  $G = (G, \circ)$  を群という.

- $g_i \circ g_j = g_k \in G$  (演算に関して閉じている).
- $g \in G$  に対して,  $g \circ e = e \circ g = g$  となる  $e \in G$  の存在.
- $g \in G$  に対して,  $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$  となる  $g^{-1} \in G$  の存在.
- $g_i, g_j, g_k \in G$  に対して,  $g_i \circ (g_j \circ g_k) = (g_i \circ g_j) \circ g_k$  が成立.

そして, 有限ハイパー群は次のように定義されている.

**定義 6** (有限ハイパー群, Generalized fusion rule algebra).

有限集合  $K := \{c_0, c_1, \dots, c_n\}$  に対して,

$$\mathbb{C}K := \left\{ \mu = \sum_{k=0}^n a_k c_k, a_k \in \mathbb{C} \right\}$$

とおく. 次の二つの演算, convolution  $\circ : \mathbb{C}K \times \mathbb{C}K \rightarrow \mathbb{C}K$ , involution  $*$  :  $\mathbb{C}K \rightarrow \mathbb{C}K$  があり,  $\mathcal{K} := (K, \mathbb{C}K, \circ, *)$  が次の条件を満たすとす. このとき  $\mathcal{K} := (K, \mathbb{C}K, \circ, *)$  をハイパー群という.

1.  $\mathbb{C}K$  は結合律を満たす involutive algebra である.

2.  $c_i \circ c_j = \sum_{k=0}^n a_{ij}^k c_k$

3.  $c_0$  は単位元

4.  $c_i^* = c_j \Leftrightarrow c_0 \in \text{supp}(c_i \circ c_j)$

5.  $a_{ij}^k \in \mathbb{R}^+$ ,  $\sum_{k=0}^n a_{ij}^k = 1$

また, 最後の条件を  $a_{ij}^k \in \mathbb{Z}^+$  に置き換えたとき,  $\mathcal{K}$  を Generalized fusion rule algebra といひ特に,  $\mathcal{F}$  と表す. ただし,  $\mathbb{R}^+ := \{r | r \in \mathbb{R}, r \geq 0\}$ ,  $\mathbb{Z}^+ := \{m | m \in \mathbb{Z}, m \geq 0\}$  である.

**注 1.** この定義は, ハイパー群は有限群とは異なり, 集合  $K$  内には演算は定義されておらず,  $\mathbb{C}K$  内での演算を考えるということを意味している. また, 公理の 2, 3, 4 はそれぞれ, 有限群の公理における, 演算に関して閉じているかどうか, 単位元の存在性, 逆元の存在性に対応している.

**注 2.** ハイパー群  $\mathcal{K}$  は本来  $(K, \mathbb{C}K, \circ, *)$  の四つ組で構成されるが, 記述を省略して,  $\mathcal{K} = \{c_0, c_1, c_2\}$  がハイパー群である. といった形で記すことがある.

ここで, ハイパー群が群の拡張になっていることを確かめる.

定理 1 (有限群はハイパー群である). 任意の有限群は有限ハイパー群である.

証明. 群  $G = (G, \cdot)$  を考える. ただし  $G$  は,  $G = \{g_0, g_1, \dots, g_n\}$  とし  $g_0$  は  $G$  の単位元. さらに,  $g_i, g_j \in \mathbb{C}G$  に対して, convolution  $\circ$  を

$$g_i \circ g_j := g_i \cdot g_j = g_k \quad (0 \leq k \leq n)$$

と定める. さらに, involution  $*$  を,  $(g_i)^* := (g_i)^{-1}$  とする. これより,  $\mathcal{G} = (G, \mathbb{C}G, \circ, *)$  がハイパー群の公理を満たしていることを確認する.

1.  $\mathbb{C}G$  は結合律を満たす involutive algebra であることについて.  
これは  $\mathbb{C}G$  の定義, 群が結合律を満たすことから確かめられる.

2.  $g_i \circ g_j = \sum_{k=0}^n a_{ij}^k g_k$  について

$$g_i \circ g_j = g_i \cdot g_j = g_k \quad (0 \leq k \leq n)$$

となる. また,

$$g_k = 0 \times g_0 + 0 \times g_1 + \dots + 0 \times g_{k-1} + 1 \times g_k + 0 \times g_{k+1} + \dots + 0 \times g_n$$

と表されるので, 満たしていることがわかる.

3.  $g_0$  は単位元. これは  $G$  が群であることから明らかである.

4.  $g_i^* = g_j \Leftrightarrow g_0 \in \text{supp}(g_i \circ g_j)$  について

(a)  $\Leftarrow$  について

$g_i \circ g_j = g_k \quad (0 \leq k \leq n)$  と表されることに注意して証明を行う.

$$\begin{aligned} g_0 &\in \text{supp}(g_i \circ g_j) \\ \Rightarrow g_0 &\in \text{supp}(g_k) \\ \Rightarrow g_0 &\in \{g_k\} \\ \Rightarrow g_0 &= g_k \\ \Rightarrow g_0 &= g_i \cdot g_j \\ \Rightarrow g_i^{-1} &= g_j \\ \Rightarrow g_i^* &= g_j \end{aligned}$$

(b)  $\Rightarrow$  について

これは, 上記の議論は遡っていくことが可能であるため, 成立していることがわかる.

5.  $a_{ij}^k \in \mathbb{R}^+$ ,  $\sum_{k=0}^n a_{ij}^k = 1$  について

$g_k = 0 \times g_0 + 0 \times g_1 + \dots + 0 \times g_{k-1} + 1 \times g_k + 0 \times g_{k+1} + \dots + 0 \times g_n$  であり, その係数の和が明らかに 1 であるから, この公理も満たしている

以上をもって, 有限群が有限ハイパー群であることが証明できた. □

### 3. グラフからハイパー群の構成

ハイパー群を構成する方法は複数存在する. その中でも比較的単純な方法である, 隣接行列を用いて構成することについて述べる. そのための準備をいくつか行う.

**定義 7** (隣接行列). 頂点数が  $n$  のグラフ  $G$  に対して, 頂点  $v_i$  と  $v_j$  を結ぶ辺の数を  $a_{ij}$  としたとき,  $a_{ij}$  を要素とする  $n \times n$  行列  $A(G) = (a_{ij})$  を  $G$  の隣接行列という. 有向グラフの場合は,  $a_{ij}$  は始点  $v_i$ , 終点  $v_j$  を持つ弧の個数とする.

**注 3.** この定義からもわかるように, 隣接行列はグラフ  $G$  の頂点のラベルのつけ方に依存している.

#### 3.1. 正 $n$ 角形のグラフの場合

得られている結果は次の通りである.

**定理 2** (正  $m$  角形のグラフに付随したハイパー群). 正  $m$  角形  $D_m$  の隣接行列から得られるハイパー群を  $\mathcal{K}(D_m)$  とする.  $\mathcal{K}(D_m)$  の位数は  $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$  である. また, その構造式は正  $2m$  ( $m = 1, 2, 3, \dots, n$ ) 角形の場合は, 次の式 (1) のようになり,

$$\begin{aligned} c_i c_j &= c_j c_i = \frac{1}{2} c_{|i-j|} + \frac{1}{2} c_{i+j} \quad (1 \leq i, j \leq n-1) \\ c_n c_i &= c_i c_n = c_{n-i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (1)$$

正  $2m+1$  ( $m = 1, 2, 3, \dots, n$ ) 角形の場合は, 次の式 (2) のようになる.

$$\begin{aligned} c_i c_j &= c_j c_i = \frac{1}{2} c_{|i-j|} + \frac{1}{2} c_{i+j} \quad (1 \leq i, j \leq n-1) \\ c_n c_i &= c_i c_n = \frac{1}{2} c_{|n+1-j|} + \frac{1}{2} c_{|m-j|} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (2)$$

このハイパー群を構成した方法は次の通りである.

1. グラフから隣接行列  $Y_1$  を生成する.
2. 隣接行列から, Generalized fusion rule algebra を得る.
3. その Generalized fusion rule algebra の各元を次元関数で割る.

なお, 次元関数の定義は以下のようなものになる.

**定義 8** (次元関数). Generalized fusion rule algebra  $\mathcal{F}$  に対して,  $d: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^+$  となる準同形写像を次元関数という. ただし,  $\mathcal{F}$  の単位元  $e$  に対しては,  $d(e) = 1$  である.

次に, いくつかの例を示す.

#### 3.2. 正三角形の無向グラフ

最も単純な正三角形の無向グラフについて考える. まず, 手順 1 を実行する. 隣接行列の定義より,

$$\begin{aligned} Y_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ Y_1^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2Y_0 + Y_1 \end{aligned}$$

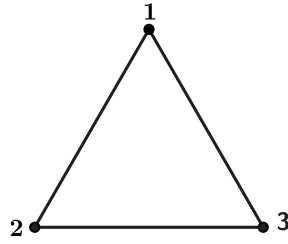


図 1: 正三角形の無向グラフ

よって,  $\mathcal{F} := \{Y_0, Y_1\}$  とすると, これは Generalized fusion rule algebra になる. その構造式は次のようになる.

$$Y_1^2 = 2Y_0 + Y_1, \quad Y_0Y_1 = Y_1Y_0 = Y_1$$

次に, 手順2を実行する. 今得られた,  $Y_1^2 = 2Y_0 + Y_1$  の両辺を写像  $d$  で写す. 次元関数の定義より,  $d(Y_0) = 1$  であるから, 求めたい次元関数 (の値)  $d(Y_1)$  を  $x$  とおく.

$$d(Y_1^2) = d(2Y_0 + Y_1)$$

写像  $d$  が準同形であることより,  $d(Y_1) = -1, 2$ . 写像  $d$  の値域が  $\mathbb{R}^+$  であることから,  $d(Y_1) = 2$ . 次に手順3を実行する. つまり, 集合  $\mathcal{F}$  の各元を次元関数 (の値) で割る. したがって, 各元は次のようになる.

$$c_0 := \frac{1}{d(Y_0)}Y_0 = Y_0, \quad c_1 := \frac{1}{d(Y_1)}Y_1 = \frac{1}{2}Y_1$$

そして, 手順2で得られた関係式を用いると,

$$c_1^2 = \frac{1}{2}Y_1 \frac{1}{2}Y_1 = \frac{1}{4}Y_1^2 = \frac{1}{4}(2Y_0 + Y_1) = \frac{1}{2}Y_0 + \frac{1}{4}Y_1 = \frac{1}{2}c_0 + \frac{1}{2}c_1$$

したがって,  $\mathcal{K} := \{c_0, c_1\}$  とすると, これは位数2のハイパー群であり,  $K \cong \mathbb{Z}_{\frac{1}{2}}(2)$  である. そして, その構造式は,

$$c_1^2 = \frac{1}{2}c_0 + \frac{1}{2}c_1, \quad c_0c_1 = c_1c_0 = c_1$$

である. ただし,  $\mathbb{Z}_q(2)$  とは, 位数が2のハイパー群であり, 以下の構造式をもつものである.

$$c_1^2 = qc_0 + (1-q)c_1 \quad (0 < q \leq 1)$$

これが正三角形の無向グラフから得られるハイパー群である.

### 3.3. 完全グラフ $K_n$

まず, 定義を述べる. なお, 下の図2に示すのは,  $n = 5, 6$  の場合である.

**定義 9** (完全グラフ). 完全グラフとは,  $n$  個の頂点を互いにすべて辺で結んだグラフであり,  $K_n$  と表す.

これより, 次の定理を証明する.

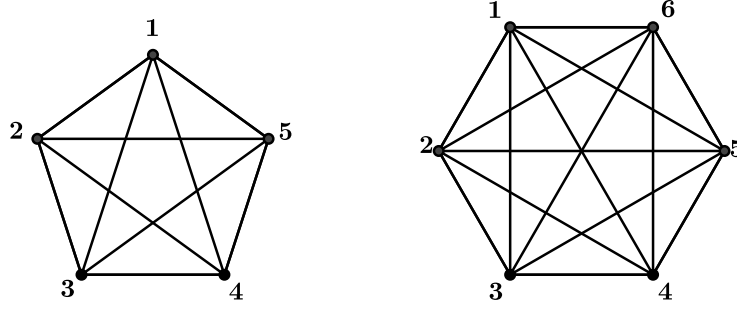


図 2: 完全グラフ  $K_5, K_6$

定理 3 (完全グラフ  $K_n$  に付随したハイパー群). 完全グラフ  $K_n$  から, ハイパー群が得られ,  $\mathcal{K} = \{c_0, c_1\} \cong \mathbb{Z}_{\frac{1}{n-1}}(2)$  となる. そしてその構造式は以下ようになる.

$$c_1^2 = \frac{1}{n-1}c_0 + \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)c_1, \quad c_1c_0 = c_0c_1 = c_1$$

証明. このとき, グラフは, すべての頂点が自分自身以外とは 1 本ずつ接続されているので, 隣接行列  $Y_1$  は対角成分が 0 であり, それ以外の成分は 1 となる. したがって,  $Y_1^2$  は, 対角成分が  $n-1$ , それ以外の成分はすべて  $n-2$  となる. つまり,

$$Y_1^2 = (n-1)Y_0 + (n-2)Y_1 \quad (3)$$

の関係が成り立つ. したがって,  $\mathcal{F} := \{Y_0, Y_1\}$  とするとこれは Generalized fusion rule algebra となる. ここから次元関数を用いてハイパー群を構成する.  $d(Y_1) = x \in \mathbb{R}^+$  とおく. 式 (3) より,  $d(Y_1) = n-1$  となる. そして,

$$c_0 := \frac{1}{d(Y_0)}Y_0 = Y_0, \quad c_1 := \frac{1}{d(Y_1)}Y_1 = \frac{1}{(n-1)}Y_1$$

とし,  $c_1^2$  を計算する.

$$\begin{aligned} c_1^2 &= \frac{1}{(n-1)^2}Y_1^2 = \frac{1}{(n-1)^2}((n-1)Y_0 + (n-2)Y_1) \\ &= \frac{1}{(n-1)^2}((n-1)c_0 + (n-1)(n-2)c_1) \\ &= \frac{1}{(n-1)}(c_0 + (n-2)c_1) \\ &= \frac{1}{n-1}c_0 + \frac{n-2}{n-1}c_1 \\ &= \frac{1}{n-1}c_0 + \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)c_1 \end{aligned}$$

よって,  $\mathcal{K} := \{c_0, c_1\}$  とすると, これはハイパー群となり,  $\mathcal{K} \cong \mathbb{Z}_{\frac{1}{n-1}}(2)$  である. その構造式は,

$$c_1^2 = \frac{1}{n-1}c_0 + \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)c_1, \quad c_1c_0 = c_0c_1 = c_1$$

である. 以上により定理が示された. □

### 3.4. $A_n$ 型のディンキン図形に付随したハイパー群

次に,  $A_n$  ディンキン図形から得られるハイパー群を述べる.  $A_n$  ディンキン図形の定義は以下の通りである.

**定義 10** ( $A_n$  ディンキン図形).  $n$  個の頂点と  $n - 1$  本の辺を直鎖状に連結させたグラフを  $A_n$  型ディンキン図形という.

### 3.5. $A_3$ 型ディンキン図形



図 3:  $A_3$  型ディンキン図形

これまでと同様に考えると

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで,  $Y_2$  を次のように定義する.

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

すると,  $Y_1^2 = Y_0 + Y_2$  となる. そして,  $Y_2^2 = Y_0$  であるから, 以上の結果をまとめると, 表 1 を得る.

表 1:  $A_3$  型ディンキン図形に付随した Fusion rule algebra の演算表

	$Y_0$	$Y_1$	$Y_2$
$Y_0$	$Y_0$	$Y_1$	$Y_2$
$Y_1$	$Y_1$	$Y_0 + Y_2$	$Y_1$
$Y_2$	$Y_2$	$Y_1$	$Y_0$

したがって,  $\mathcal{F} := \{Y_0, Y_1, Y_2\}$  と定義すれば, これは Generalized fusion rule algebra である. ここからハイパー群を構成する. これまでと同じようにすることもできるが, 次元関数の求め方には複数あるため, 今回は隣接行列  $Y_1$  の最大固有値  $\lambda_{max}$  の固有ベクトルを利用して構成する.

$$\det(Y_1 - \lambda E) = -\lambda^3 - (-\lambda - \lambda) = \lambda(\sqrt{2} + \lambda)(\sqrt{2} - \lambda)$$

したがって,

$$\lambda_{max} = \sqrt{2} \quad \left( = 2 \cos \frac{1}{3+1} \pi \right)$$

である. これよりこの固有値に対する固有ベクトルを求めると,  $\mathbf{x}$  は, 任意定数  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  を用いて,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる. ここで,

$$c_0 := \frac{1}{x}Y_0 = Y_0, \quad c_1 := \frac{1}{y}Y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}Y_1, \quad c_2 := \frac{1}{z}Y_2 = Y_2$$

とする. これらに対して,  $c_1^2$  や  $c_2^2$  などを計算すると,

$$c_1^2 = \frac{1}{2}Y_1^2 = \frac{1}{2}(Y_0 + Y_2) = \frac{1}{2}(c_0 + c_1) = \frac{1}{2}c_0 + \frac{1}{2}c_1$$

$$c_1c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}Y_1Y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}Y_1 = c_1, \quad c_2c_1 = Y_2\frac{1}{\sqrt{2}}Y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}Y_2Y_1 = c_1, \quad c_2^2 = Y_2^2 = Y_0 = c_0$$

が得られる. したがって,  $\mathcal{K} := \{c_0, c_1, c_2\}$  とすると, これはハイパー群となり, 構造式をまとめると, 次の表2のようになる.

表 2:  $A_3$  型ディンキン図形に付随したハイパー群 の演算表

	$c_0$	$c_1$	$c_2$
$c_0$	$c_0$	$c_1$	$c_2$
$c_1$	$c_1$	$\frac{1}{2}c_0 + \frac{1}{2}c_1$	$c_1$
$c_2$	$c_2$	$c_1$	$c_0$

これが,  $A_3$  型ディンキン図形から得られるハイパー群である.

#### 4. おわりに

今回はハイパー群を構成する方法に焦点を当てて述べてきた. さらに, その構成方法についても主に隣接行列について述べてきた. したがって, 今後の課題としてハイパー群からグラフを構成する方法の確立であったり, ハイパー群が得られるグラフとそうでないグラフの幾何学的意味を明らかにすることであったりが挙げられる.

#### 参考文献

- [1] S. Kawakami, M. Sakao, T. Tsurii and S. Yamanaka: Signed Actions of Finite Hypergroups and the Extension Problem, Bull. Nara Univ. Educ., Vol. 61(2012), No. 2, 13-24.
- [2] F.M.Goodman, P.de la Harpe, V.F.R.Jones, "Coxeter Graphs and Towers of Algebras", Springer-Verlag,1989
- [3] 小林俊行・大島利雄, Lie 群と Lie 環, 1, 岩波講座現代数学の基礎, 岩波書店, 1999 年
- [4] 斎藤正彦, 線型代数入門, 基礎数学, 1, 東京大学出版会, 1966 年
- [5] 高橋恒郎, ベクトルと行列, 数学講座, 4, 筑摩書房, 1970 年
- [6] 立花俊一・奈良知恵・田澤新成共訳, j.A.Bondy & U.S.R.Murty 著, グラフ理論への入門, 共立出版株式会社, 1991 年
- [7] 仁平政一・西尾義典, グラフ理論序説, プレアデス出版, 2010 年
- [8] 渡辺敬一, 環と体, 講座<数学の考え方>, 12, 朝倉書店, 2002 年





# ポスターセッション 会場E



# Eigenvector sensitivity analysis による 生物群集の季節動態を駆動するプロセスの環境勾配に沿った空間パターン

金森由妃<sup>1</sup>, 深谷肇一<sup>2</sup>, 野田隆史<sup>3</sup>

Yuki KANAMORI<sup>1</sup>, Keiichi FUKAYA<sup>2</sup>, Takashi NODA<sup>3</sup>

<sup>1</sup>北海道大学大学院 環境科学院

<sup>2</sup>統計数理研究所

<sup>3</sup>北海道大学大学院 地球環境科学研究院

## 概要

物理的環境（例えば気温，湿度，降水量など）の季節変化は，あらゆる生息地に存在し，群集構造の時間的な違いを生成する要因の1つである．そのため，群集構造の季節変化とその空間的な違いがどのようなプロセスに起因するのかを明らかにすることは，生態学の主要な目的である生物の数や分布を予測する上で重要である．

生態学において，Eigenvector sensitivity analysis は，物理的環境の変化が個体群動態を駆動するプロセスに与える影響を定量的に評価するために用いられる．本研究では，この手法を多種系に拡張することで，岩礁潮間帯の固着生物群集の季節動態を駆動するプロセスが環境勾配に沿ってどのような空間パターンを示すのかを明らかにした．

## 1. 背景

### 推移確率行列モデル

推移確率行列モデルは，状態ベクトル  $\mathbf{x}$  と推移確率行列  $\mathbf{P}$  から構成されるモデルで（式（1）），生態学においては，生物群集のダイナミクス（以下，群集動態）を定量的に記述する方法の1つとして知られている（e.g. [4, 6, 7]）.

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{P}\mathbf{x}_t \quad (1)$$

樹木，草本，海藻，サンゴなど，生活史の初期を除いて移動することなく基質に定着したまま生活する生物を固着生物という．固着生物は，互いに空間（基質）を巡る競争

関係にあるため、ある空間内に生息する生物種の組成（以下、群集構造）は、個々の種の空間占有量によって表現される。例えば、25 個体が生息できる空間に、種 A が 10 個体、種 B が 2 個体、種 C が 8 個体存在している場合を考える。この時、空間の状態は、種 A、種 B、種 C と裸地（生物が存在しない）の 4 つの場合が考えられる。したがって、この群集構造は、状態ベクトル  $\mathbf{x}$  を用いて

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} \text{proportion of species A} \\ \text{proportion of species B} \\ \text{proportion of species C} \\ \text{proportion of vacant} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/25 \\ 2/25 \\ 8/25 \\ 5/25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.08 \\ 0.32 \\ 0.2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

とあらわすことができる。

推移確率行列  $\mathbf{P}$  は、状態ベクトル  $\mathbf{x}$  が時間  $t$  から時間  $t+1$  へ変化した時、その背後で生じたプロセスを確率として表現する。前述の例の種 A に着目し、時間  $t$  に 10 個体の種 A が占有していた空間が、時間  $t+1$  には、4 個体がそのまま空間を占有し、3 個体が種 B に置換し、2 個体が種 C に置換し、1 個体が死亡し裸地となったとする。この時、種 A が種 A のままであり続ける確率  $p_{AA}$ 、種 A が種 B (or 種 C) に置換する確率  $p_{BA}$  ( $p_{CA}$ )、種 A の死亡する確率  $p_{VA}$  は、それぞれ、

$$\mathbf{P}_{\bullet A} = \begin{pmatrix} p_{AA} \\ p_{BA} \\ p_{CA} \\ p_{VA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/10 \\ 3/10 \\ 2/10 \\ 1/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

となる。種 B、種 C、裸地に関しても同様に推移確率を求めることができ、それぞれの推移確率は推移確率行列の各列に記述される：

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{AA} & p_{AB} & p_{AC} & p_{AV} \\ p_{BA} & p_{BB} & p_{BC} & p_{BV} \\ p_{CA} & p_{CB} & p_{CC} & p_{CV} \\ p_{VA} & p_{VB} & p_{VC} & p_{VV} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

## Eigenvector sensitivity analysis

ダイナミクスの特性を評価する方法の1つに、推移確率行列の固有値解析がある[1].

例えば、単一種で構成される個体群に対して推移確率行列モデルを適用した場合、推移確率行列の最大固有値は個体群動態の特性である個体群成長率をあらわす。しかし、先述したようなマルコフ連鎖型の推移確率行列モデルでは、推移確率行列の最大固有値は必ず1になることから、固有値解析から群集動態の特性を評価することはできない。そこで、生命表反応解析（個体群成長率が時空間的に異なる時、その差異に対してキーとなるプロセスを摂動解析により推定する方法）の概念をベースに、群集構造をあらわす状態ベクトル  $\mathbf{x}$  の季節差に対して感度分析を行うことで、群集構造の季節間の変動に対して重要なプロセスを推定することを試みた。

まずは春と秋の2季節において、群集動態に対する季節の効果を推定するために、春の群集構造  $\mathbf{x}^{\text{spring}}$  と、春の群集構造を生成する冬の推移確率行列  $\mathbf{P}^{\text{winter}}$  を基準とし、群集構造の季節変化に対する推移確率行列の各要素の寄与率を推定するモデルを作成した：

$$\mathbf{x}^{\text{autumn}} - \mathbf{x}^{\text{spring}} \approx \sum_{i,j} (p_{ij}^{\text{summer}} - p_{ij}^{\text{winter}}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p_{ij}} \Big|_{\mathbf{P}^\dagger}, \quad (5)$$

ここで、

$$\mathbf{P}^\dagger = (\mathbf{P}^{\text{summer}} + \mathbf{P}^{\text{winter}}) / 2 \quad (6)$$

である。この時、 $p_{ij}$  は推移確率行列  $\mathbf{P}$  の各要素である。また、 $\partial \mathbf{u} / \partial p_{ij}$  は、 $\mathbf{P}^\dagger$  の固有ベクトルの感度を示す。

固有ベクトルの感度は、スケール化された固有ベクトル感度分析によって算出することができる [1, 4, 6].  $\mathbf{P}^\dagger$  の最大固有値に対する固有ベクトルを  $\mathbf{u}_1$  とし、 $p_{ij}$  を変化させた時の  $\mathbf{u}_1$  の感度は以下の式により推定できる：

$$\frac{\partial \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}}{\partial p_{ij}} = u_j^{(1)} \sum_{m=1}^s \frac{\bar{v}_i^{(m)}}{\lambda_1 - \lambda_m} \mathbf{u}_m - \mathbf{u}_1 \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial p_{ij}}. \quad (7)$$

この時、 $u_j^{(1)}$  は  $\mathbf{u}_1$  の  $j$  番目の要素、 $\bar{v}_i^{(m)}$  は複素共役で構成される左固有ベクトルの  $i$  番目の要素、そして、 $\lambda_m$  は  $m$  番目の固有値を示す。

マルコフ連鎖の概念上, 式(6) に直接, 式 (7) を適用することはできず,  $p_{ij}$  の変化は, 列  $j$  の他のすべての要素の変化によって補償される必要がある. 補償の仕方は複数あるが[1], 本研究では比例補償 (proportional compensation) を用い, 最終的な式を,

$$\frac{d \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}}{dp_{ij}} = \frac{\partial \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}}{\partial p_{ij}} + \sum_{m \neq i}^s \frac{\partial \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}}{\partial p_{mj}} \frac{-p_{mj}}{1-p_{ij}} \quad m \neq i \quad (8)$$

とした[1, 4].

## 2. 野外データ

2002–2014年の春と秋に, 北海道東部の5海岸25岩礁に設置した永久方形区 (縦100cm, 横50cm) において, 固定調査点の直下に出現する固着生物を記録した. 岩礁潮間帯では, 一般に, 浸水時間の違いが物理的な環境勾配を生成することが知られている[2, 5]. そのため, 永久方形区では上部から25cmごとに4つの高さ (ブロック) に分けて生物調査を行った. 得られたデータは, 優占種5種 (キタイワフジツボ, ピリヒバ, フクロフノリ, マツモ, クロバギンナンソウ) と一年生生物, 多年生生物, 裸地の8つのカテゴリーに分類した.

春と秋の時間推移データに Multistate Dynamic Occupancy Model [3]を適用し, 観察誤差を考慮した春と秋の状態ベクトル  $\mathbf{x}^{\text{spring}}, \mathbf{x}^{\text{autumn}}$  と, その間の推移である推移確率行列  $\mathbf{P}^{\text{summer}}, \mathbf{P}^{\text{winter}}$  を推定した.

## 3. 結果

群集の季節動態に対して重要なプロセスは物理的環境勾配に沿って連続的に変化しており, ①生物が裸地へ棲み付く“加入”は, 物理的環境条件が最も厳しい環境下において重要, ②生物が死亡し裸地へ戻る“攪乱”は, 物理的環境条件が中程度の環境下において重要, ③生物が空間を占有し続ける“存続”, および種  $i$  が種  $j$  に置換する“競争”は, 物理的環境条件が中程度～穏やかな環境下において重要, であることが明らかとなった.

## 参考文献

- [1] Caswell, H. 2001. Matrix population models: construction, analysis, and interpretation. 2d ed. Sinauer, Sunderland, Mass.
- [2] Connell, J. H. 1972. Community interactions on marine rocky intertidal shores. *Annual Review of Ecology and Systematics* **3**:169-192
- [3] Fukaya, K. and Royle, A. 2013. Markov models for community dynamics allowing for observation error. *Ecology* **94**:2670-2677
- [4] Hill, M. F., J. D. Witman, and H. Caswell. 2004. Markov chain analysis of succession in a rocky subtidal community. *American Naturalist* **164**:46-61.
- [5] Raffaelli, D. and Hawkins, S. 1996. *Intertidal Ecology*. Chapman and Hall, London, UK.
- [6] Tanner, J. E., T. P. Hughes, and J. H. Connell. 1994. Species coexistence, keystone species, and succession: a sensitivity analysis. *Ecology* **75**:2204–2219.
- [7] Wootton, J. T. 2001. Causes of species diversity differences: a comparative analysis of Markov models. *Ecology Letters* **4**:46–56.



# Recognition problem of map-germs and applications (写像芽の認識問題とその応用)

加葉田雄太朗

Yutaro Kabata

北海道大学大学院理学院数学専攻

## 1 Introduction

我々が物体（曲面）を眺める時、そこには自然に  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  の写像の特異点が輪郭として現れる。特に曲面の直線との接触は曲面の射影の局所的な特異点型により測ることができ、特異点理論は曲面の局所理論の有効なツールである [1, 2, 4, 5, 12]。

ポスターではまず  $\mathbb{R}^2$  から  $\mathbb{R}^2$  への可微分写像の特異点（写像芽）の  $\mathcal{A}$ -型の著者による簡易な判定法を与える。次に判定法を用いてジェネリックな曲面のワンパラメーター族の中心射影に現れる特異点の分類に対する結果を紹介する。また、曲面の Monge form に関する条件式が上記の特異点の分類過程の副産物として得られるが、それに基づいて得られた曲面の Monge form のジェットの射影変換による分類、及びその BDE (binary differential equation) のトポロジカルな位相型の分類との関係も紹介する。

本稿では、特に写像芽の判定法について詳しく説明し、その応用については概要のみを説明する。詳細については [5, 12] を参考されたい。

## 2 Classification and Recognition

ポスター及び本稿では可微分写像芽  $f : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$  で  $\text{corank}(df)_0 = 1$  であるもの（以下では、 $\text{corank}1$  写像芽と呼ぶ）を主な対象とし、これの  $\mathcal{A}$ -同値による同値類を考える。なお、二つの可微分写像芽が  $\mathcal{A}$ -同値とはソースとターゲットの局所座標変換が存在して互いに移り合うことである。 $\text{corank}1$  写像芽  $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$  で  $\mathcal{A}_e\text{-cod} \leq 4$  となるものの  $\mathcal{A}$ -同値類による分類が J. H. Rieger によって与えられている [8] (表 1)。(なお、

$\mathcal{A}_e\text{-cod} \leq r$  の写像芽とは写像族  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^2$  に一般的に現れる  $\mathcal{A}$ -特異点を意味する)。

では、任意に与えられた写像芽の  $\mathcal{A}$ -型はどのように判定できるであろうか？「与えられた写像芽がリストのうちのいずれの同値類に属するかを決定する判定法を与えよ」という問題は認識問題と呼ばれ実は自明ではない [4]。通常、与えられた写像芽がどの同値類に属するかを決定するには、テイラー展開の低次の項から順に具体的な座標変換を見つけて整理していく、という過程を踏まなければいけない。この過程は非常に煩雑であり、特に非専門家にとっては分類の結果を応用しようとするときの壁となるであろう。さらには、Rieger の分類は代数的な手法に基づいているので、Rieger のリストとその証明からは各同値類の幾何科学的な意味も見だし難い。次節では佐治氏の  $\mathcal{A}_e$ -余次元 1 の写像芽の判定法 [10] を拡張した写像芽のジェットレベルでの系統的な判定法を紹介し、またテイラー展開の係数を用いた  $\mathcal{A}$ -型の判定法についても言及する。

### 3 Saji's criteria and the generalization

佐治氏の判定法は、以下で定義される  $\lambda$  (*discriminant function*) と  $\eta$  (*null vector filed*) という幾何学的な記号によって記述される。 $\lambda$  は  $\lambda(x, y) := \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)}$  ( $f = (f_1, f_2)$ ) として、 $\eta$  は  $f$  の特異点集合 ( $\lambda = 0$ ) 上で  $df$  の kernel を張るようなベクトル場として、それぞれ定義する。これらを用いてより高次の  $\text{corank}1$  写像芽  $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$  を次のようにジェットレベルで判定することができる。

定理 3.1 表 3 において第 1 列目におけるジェットの型は第 3 列目の条件によって判定できる。

なお  $\mathcal{A}_e$ -余次元 2 以上の  $\mathcal{A}$ -型の判定にはさらに条件が必要である。ここでは次の Butterfly と呼ばれる  $\text{corank}1$  写像芽、およびその退化形 (表における番号と標準形はそれぞれ 6 :  $(x, xy + y^5 \pm y^7)$ 、7 :  $(x, xy + y^5)$  と書かれる) の特徴付けを例として見てみよう [5]。

1.  $j^5 f(0) \sim_{\mathcal{A}^5} (x, xy + y^5) \iff d\lambda(0) \neq 0, \eta\lambda(0) = \eta^2\lambda(0) = \eta^3\lambda(0) = 0, \eta^4\lambda(0) \neq 0.$
2. さらに上の条件があるとき  $f = (x, xy + y^5 + \sum_{i+j \geq 6} a_{ij}x^i y^j)$  と表すことができ、  
 $\alpha_f := a_{07} - \frac{5}{8}a_{06}^2 \neq 0 \iff f \sim_{\mathcal{A}} (x, xy + y^5 \pm y^7), \quad \alpha_f = 0 \iff f \sim_{\mathcal{A}} (x, xy + y^5)$

上の 1. では、座標変換によって  $f$  の原点での 5-ジェット  $j^5 f(0)$  (5 次までのテイラー展開) が  $(x, xy + y^5)$  となることに対して、座標変換で不変になるような幾何学的な特徴付けを佐治氏のように  $\eta$  と  $\lambda$  を用いて与えている。しかしながらこれだけでは

Specified jet [8]	$\mathcal{A}$ -type [9]	Criteria [10, 11, 5]
regular : $(x, y)$	1	$\lambda(0) \neq 0$ (we may assume $\lambda(0) = 0$ in the following)
fold : $(x, y^2)$	2	$\eta\lambda(0) \neq 0$
cusp : $(x, xy + y^3)$	3	$d\lambda(0) \neq 0, \eta\lambda(0) = 0, \eta^2\lambda(0) \neq 0$
$I_2 : (x, y^3 \pm x^2y)$	$4_{\pm}^{\pm}$	$d\lambda(0) = 0, \det H_{\lambda}(0) \neq 0, \eta^2\lambda(0) \neq 0$
$I_* : (x, y^3)$	$4_{\pm}^{\pm} (k \geq 3)$	$d\lambda(0) = 0, \text{rk}H_{\lambda}(0) = 1, \eta^2\lambda(0) \neq 0$
$II_4 : (x, xy + y^4)$	5	$d\lambda(0) \neq 0, \eta\lambda(0) = \eta^2\lambda(0) = 0, \eta^3\lambda(0) \neq 0$
$II_5 : (x, xy + y^5)$	6, 7	$d\lambda(0) \neq 0, \eta\lambda(0) = \eta^2\lambda(0) = \eta^3\lambda(0) = 0, \eta^4\lambda(0) \neq 0$
$II_6 : (x, xy + y^6)$	8, 9	$d\lambda(0) \neq 0, \eta\lambda(0) = \dots = \eta^4\lambda(0) = 0, \eta^5\lambda(0) \neq 0$
$II_7 : (x, xy + y^7)$	10	$d\lambda(0) \neq 0, \eta\lambda(0) = \dots = \eta^4\lambda(0) = \eta^5\lambda(0) = 0, \eta^6\lambda(0) \neq 0$
$III_* : (x, xy^2 + y^4)$	$11_{2k+1}$	$d\lambda(0) = 0, \det H_{\lambda}(0) < 0, \eta^2\lambda(0) = 0, \eta^3\lambda(0) \neq 0$
$IV_1 : (x, xy^2 + y^5)$	12, 13, (14)	$d\lambda(0) = 0, \det H_{\lambda}(0) < 0, \eta^2\lambda(0) = \eta^3\lambda(0) = 0, \eta^4\lambda(0) \neq 0$
$IV_2 : (x, xy^2 + y^6)$	15	$d\lambda(0) = 0, \det H_{\lambda}(0) < 0, \eta^2\lambda(0) = \dots = \eta^4\lambda(0) = 0, \eta^5\lambda(0) \neq 0$
$V_1 : (x, x^2y + y^4)$	16, 17	$d\lambda(0) = 0, \text{rk}H_{\lambda}(0) = 1, \eta^2\lambda(0) = 0, \eta^3\lambda(0) \neq 0$
$V_2 : (x, x^2y + Ax^3y)$	18	$d\lambda(0) = 0, \text{rk}H_{\lambda}(0) = 1, \eta^2\lambda(0) = \eta^3\lambda(0) = 0$
$VI : (x, y^4 + \alpha x^2y^2 + Ax^3y)$	19	$d\lambda(0) = 0, \text{rk}H_{\lambda}(0) = 0, \eta^3\lambda(0) \neq 0$

表1 Classifications and criteria: 第2列目は対応する  $\mathcal{A}_e$  余次元4以下の  $\mathcal{A}$ -型 ([8]を参照) を意味しており、3列目において  $H_{\lambda}$  は  $\lambda$  の Hesse 行列を表す。

butterfly  $(x, xy + y^5 \pm y^7)$  とその退化系  $(x, xy + y^5)$  を区別することはできない。我々は2. で見たように具体的に座標をとった時のテイラー展開の係数で書かれる判定式を必要とするのである。他の corank1 写像芽 ( $2 \leq \mathcal{A}_e\text{-cod} \leq 4$ ) も同様に、

1.  $\eta$  と  $\lambda$  によってジェットが特徴付けられ、
2. テイラー展開の係数によって各  $\mathcal{A}$ -型が決定される

という形で記述される [5]。

## 4 Application to central projections of the surface

我々の判定法の応用として、曲面の中心射影に現れる特異点の分類を紹介する。 $\pi_p : \mathbb{R}^3 - \{p\} \rightarrow \mathbb{R}P^2$  を、 $x$  を  $x-p$  で生成される直線に対応させるような自然な射影とした時、 $\mathbb{R}^3$  内の曲面  $M$  の点  $p \in \mathbb{R}^3 - M$  からの中心射影  $\varphi_p$  は  $\varphi_p := \pi_p|_M : M \rightarrow \mathbb{R}P^2$  と定義される。興味深いことにジェネリックな曲面の中心射影には  $\mathcal{A}_e\text{-cod} = 3$  の特異点のうち3つ (8, 12, 16) が現れないことが Arnold と Platonova によって示されている [1, 6, 7]。彼らは Rieger とは異なる立場で曲面の中心射影に現れる特異点の分類を行っているため、Rieger のリストと曲面の中心射影に一般に現れる特異点との関係は明らかではない。講演者は前節の判定法を用いて、Rieger の分類の立場から Arnold と Platonova による結果の再証明を与えた。その過程で、判定法の  $\eta^k\lambda(0)$  という量と  $\alpha_f$  のように書ける量との違いで、特異点が中心射影にジェネリックに現れるかどうか決定することを確かめた。

さらに同様の手法で、1-パラメーター曲面族の中心射影に一般に現れる特異点の分類も行い、Arnold と Platonova の結果の一般化を与えた。

## 5 Application to the classification of jets of Monge forms

以降では  $\mathbb{R}^3 = \{[x; y; z; 1]\}$  として  $\mathbb{R}P^3$  の開部分集合とみなす。 $\mathbb{R}^3$  内の滑らかな曲面は任意の点で Monge form のテイラー展開により書ける。ポスター及び本稿の関心は曲面の局所理論なので、原点 0 で Monge form  $z = f(x, y) = \sum_{ij} a_{ij} x^i y^j$  により定まる曲面 (芽)  $M$  を考える ( $M = \{(x, y, f(x, y))\}$ )。

前節の曲面の中心射影における特異点分類において、上の Monge form のジェット空間 (多項式空間あるいは有限個の  $a_{ij}$  の組がなす空間) のストラティフィケーションが自然に得られる。つまり、 $M$  の中心射影の写像芽が原点である型になるという条件は Monge form のテイラー展開の係数  $a_{ij}$  に関する条件式を生み出すということである。

ここで得られたストラティフィケーションにおける各 stratum の射影変換による簡潔な標準形が本ポスターで紹介される ([12] も参照)。ただし、ジェネリックな曲面の Monge form に関する結果は Platonova [7] により与えられていたもので、それをパラメーター族に拡張したというのが著者等の新しい結果であるということに注意しておく。

本ポスターでは最後に、得られた標準形が表す曲面の原点における漸近曲線を定義する BDE

$$f_{yy} dy^2 + 2f_{xy} dx dy + f_{xx} dx^2 = 0.$$

と [3, 13] などにおける BDE のなトポロジカルな分類との比較を紹介する。

## 参考文献

- [1] V. I. Arnold, Singularities of caustics and wavefronts, Kluwer Acad. Publ. (1991).
- [2] J. W. Bruce, Projections and reflections of generic surfaces in  $\mathbb{R}^3$ . *Math. Scand.* 54 no.2 (1984), 262-278.
- [3] A. A. Davydov, Normal form of a differential equation, not solvable for the derivative, in a neighborhood of a singular point, *Funct. Anal. Appl.* 19 (1985), 1–10.
- [4] T. Gaffney, The structure of  $T\mathcal{A}(f)$ , classification and an application to differential geometry, In singularities, Part I, Proc. Sympos. in Pure Math. 40 (1983), Amer. Math. Soc., 409-427.
- [5] Y. Kabata, *Recognition of plane-to-plane map-germs*, arXiv:1505.01317.
- [6] O. A. Platonova, Singularities of the mutual disposition of a surface and a line, *Uspekhi Mat. Nauk*, 36:1 (1981), 221–222.
- [7] O. A. Platonova, Projections of smooth surfaces, *J. Soviet Math* **35** no.6 (1986), 2796–2808
- [8] J. H. Rieger, Families of maps from the plane to the plane. *J. London Math. Soc.* (2) 36 (1987), no. 2, 351-369.
- [9] J. H. Rieger, Versal topological stratification and the bifurcation geometry of map-germs of the plane. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 107, no. 1, (1990), 127-147.
- [10] K. Saji, Criteria for singularities of smooth maps from the plane into the plane and their applications. *Hiroshima Math. J.* 40, (2010), 229-239.
- [11] K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada,  $A_k$  Singularities of wave fronts. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 146 (2009), no. 3, 731-746.
- [12] H. Sano, Y. Kabata, J. Deolindo and T. Ohmoto, *Projective classification of jets of surfaces in 3-space*, arXiv:1504.06499.
- [13] F. Tari, Two parameter families of implicit differential equations, *Discrete Contin. Dynam. Systems*, 13 (2005), 139–262

# Ruelle-Perron-Frobenius の定理による Gibbs 測度の存在証明

慶應義塾大学大学院基礎理工学専攻 篠田 万穂 Mao Shinoda

## 1 Introduction

We study the Ruelle Perron Frobenius theorem, which are defined for continuous functions on the space,  $\Sigma_n^+ = \{1, \dots, n\}^{\mathbb{N}}$ , of sequences  $\underline{x} = \{x_i\}_{i=0}^{\infty}$  of 1 to  $n$ . The operators act on the Banach space  $C(\Sigma_n^+)$  of continuous functions on  $\Sigma_n^+$  with the sup  $\|\phi\| = \sup\{|\phi(x)| : \underline{x} \in \Sigma_n^+\}$ . The set  $M(\Sigma_n^+, \sigma)$  denotes the set of all  $\sigma$ -invariant Borel probability measures. For Hölder continuous function  $\phi$ , there is a unique measure called equilibrium state for  $\phi$ , which attains the supremum in the Variational Principle

$$P(\phi) = \sup \left\{ h_\mu + \int \phi d\mu : \mu \in M(\Sigma_n^+, \sigma) \right\}$$

where  $P(\phi)$  is the pressure of  $\phi$  and  $h_\mu$  is the entropy of the  $\mu$ .

The Ruelle Perron Frobenius theorem says the Ruelle Perron Frobenius operators for Hölder continuous functions have the eigenfunction  $h$  and the eigenmeasure  $\nu$  with the same positive eigenvalue  $\lambda$ . This is an extension of the Perron Frobenius theorem to the infinite dimensional space  $C(\Sigma_n^+)$ . The theorem is important since the unique equilibrium state for a Hölder continuous function is given by the eigenfunction and the eigenmeasure of the Ruelle Perron Frobenius operator for  $\phi$ .

## 2 Definition of Symbolic Dynamical System

Endow  $\Sigma_n^+ = \{1, \dots, n\}^{\mathbb{N}}$  with the product topology of the discrete topology of  $\{1, \dots, n\}$ . We can define a metric which coincides with the topology. Take  $\beta \in (0, 1)$ . Define a metric  $d_\beta$  on  $\Sigma_n^+$  by

$$d_\beta(\underline{x}, \underline{y}) = \begin{cases} 0 & \text{if } \underline{x} = \underline{y}, \\ \beta^N & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where  $N = \min\{i \geq 0 : x_i \neq y_i\}$ . Observe that  $\Sigma_n^+$  is a compact metric space. Let  $\mathcal{B}(\Sigma_n^+)$  denote the set of all Borel sets of  $\Sigma_n^+$  and the set

$$[x_0, \dots, x_{m-1}] = \{\underline{y} \in \Sigma_n^+ : x_i = y_i \text{ for all } i = 0, \dots, m-1\}$$

is called a cylinder set starting 0 with length  $m$ . Note that the set of all cylinder sets is a basis of the topology of  $\Sigma_n^+$ .

Define a continuous map  $\sigma : \Sigma_n^+ \rightarrow \Sigma_n^+$  by  $\sigma(\{x_i\}_{i=0}^\infty) = \sigma(\{x_{i+1}\}_{i=0}^\infty)$ , which is called the shift map.

$\mu \in M(\Sigma_n^+)$  is  $\sigma$ -invariant if

$$\mu(\sigma^{-1}B) = \mu(B)$$

for all  $B \in \mathcal{B}(X)$ . The set  $M(\Sigma_n^+, \sigma)$  denotes the set of all  $\sigma$ -invariant measures on  $\Sigma_n^+$ . For  $\phi \in C(\Sigma_n^+)$  and  $k \in \mathbb{N}$  define

$$\text{var}_k \phi = \sup\{\|\phi(\underline{x}) - \phi(\underline{y})\| : x_i = y_i \text{ for } 0 \leq i \leq k\}$$

and define

$$\mathcal{F} = \{\phi \in C(\Sigma_n^+) : \exists b > 0, \exists \alpha \in (0, 1), \text{var}_k \phi \leq b\alpha^k \text{ for } \forall k \geq 0\}.$$

Then  $\phi \in \mathcal{F}$  is Hölder continuous with regard to  $d_\beta$ , i.e., there is  $C > 0$  and  $\gamma \in (0, 1]$  such that

$$\|\phi(\underline{x}) - \phi(\underline{y})\| \leq C d_\beta(\underline{x}, \underline{y})^\gamma$$

for all  $\underline{x}, \underline{y} \in \Sigma_n^+$ . The set  $\mathcal{F}$  is the set of all Hölder continuous functions.

We can introduce weak\*-topology on the dual space  $C(\Sigma_n^+)^*$  of the Banach space  $C(\Sigma_n^+)$  to  $M(\Sigma_n^+)$  by the Riesz Representation Theorem. For  $\mu \in M(\Sigma_n^+)$ , define  $F_\mu \in C(\Sigma_n^+)^*$  by

$$F_\mu(\phi) = \int \phi d\mu$$

for every  $\phi \in C(\Sigma_n^+)$ . Then, by the Riesz Representation Theorem, this correspondence becomes a bijection between  $M(\Sigma_n^+)$  and  $\{F \in C(\Sigma_n^+)^* : F \text{ is linear, normalized, continuous and positive}\}$ , a subset of  $C(\Sigma_n^+)^*$ . We induce the weak\*-topology on  $C(\Sigma_n^+)^*$  to  $M(\Sigma_n^+)$  by this correspondence. Note that  $M(\Sigma_n^+)$  and  $M(\Sigma_n^+, \sigma)$  are non-empty and compact in weak\*-topology.

### 3 The existence and the uniqueness of equilibrium states

For any Hölder continuous function there is a unique Gibbs measure, which gives quantitative information on the measure of cylinder sets. The Gibbs measures for Hölder continuous functions are also the unique equilibrium state.

**Definition 3.1** *Gibbs measures*[2]

Let  $\phi$  be a continuous function on  $\Sigma_n^+$ . A measure  $\mu \in M(\Sigma_n^+)$  is called a Gibbs measure for  $\phi$  if there are  $c_1, c_2 > 0$  and  $P \in \mathbb{R}$  such that

$$c_1 \leq \frac{\mu([x_0, \dots, x_{m-1}])}{\exp(-mP + \sum_{k=0}^{m-1} \phi(\sigma^k \underline{x}))} \leq c_2$$

for all  $\underline{x} \in \Sigma_n^+$  and  $m \geq 1$ .

if  $\mu$  is a Gibbs measure for a Hölder continuous function, the value  $P$  in the above definition is actually the pressure for  $\phi$ . We define the Ruelle Perron Frobenius operators whose eigenfunctions and eigenmeasures are used to construct Gibbs measures.

**Definition 3.2** *Ruelle Perron Frobenius operator*[2]

For  $\phi \in C(\Sigma_n^+)$  define an operator  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\phi : C(\Sigma_n^+) \rightarrow C(\Sigma_n^+)$  by

$$\mathcal{L}f(\underline{x}) = \sum_{\underline{y} \in \sigma^{-1}\underline{x}} e^{\phi(\underline{y})} f(\underline{y})$$

for every  $f \in C(\Sigma_n^+)$  where  $\underline{x} \in \Sigma_n^+$ .

The dual operator  $\mathcal{L}^* : M(\Sigma_n^+) \rightarrow M(\Sigma_n^+)$  is

$$\mathcal{L}^*\nu(f) = \int \mathcal{L}f d\nu$$

for every  $\nu \in M(\Sigma_n^+)$  where  $f \in C(\Sigma_n^+)$ .

We have the following theorem.

**Theorem 1** *Ruelle Perron Frobenius Theorem* [2, Theorem 1.7.]

Suppose  $\phi \in \mathcal{F}$ . Then there are  $\lambda > 0$ ,  $h \in C(\Sigma_n^+)$  with  $h > 0$  and  $\nu \in M(\Sigma_n^+)$  such that

$$\mathcal{L}h = \lambda h, \quad \mathcal{L}^*\nu = \lambda\nu, \quad \nu(h) = 1, \quad (3.3)$$

and

$$\|\lambda^{-m}\mathcal{L}^m g - \nu(g)h\| \rightarrow 0 \quad \text{as } m \rightarrow \infty \quad (3.4)$$

for every  $g \in C(\Sigma_n^+)$ .

This theorem can be considered as the extension of the Perron Frobenius Theorem. The theorem says that for a  $d \times d$  matrix  $B = (b_{ij})$  with positive entries there are right and left eigenvectors with the same positive eigenvalue  $\lambda$  such that their elements are all positive. Define a linear functional  $T : C(\Sigma_n^+) \rightarrow \mathbb{R}$  by  $T(g) = \nu(g)$ . Note that the space  $C(\Sigma_n^+)$  can be decomposed into the eigenspace  $E(\lambda)$  of  $\lambda$  and  $\text{Ker}(T)$ . (3.4) implies  $\lambda$  is the spectral radius of  $\mathcal{L}$ .

We can get a Gibbs measure, which is actually an equilibrium state, for a Hölder continuous function. Let  $\phi \in \mathcal{F}$ . We get  $\lambda > 0$ ,  $h \in C(\Sigma_n^+)$  and  $\nu \in M(\Sigma_n^+)$  as in the above theorem. Define  $\mu \in M(\Sigma_n^+)$  by

$$\mu(f) = \nu(hf) = \int f(\underline{x})h(\underline{x})d\nu \quad (3.5)$$

for all  $f \in C(\Sigma_n^+)$ . The measure  $\mu$  becomes  $\sigma$ -invariant and the unique Gibbs measure for  $\phi$ . The measure  $\mu$  is also the unique equilibrium state for  $\phi$ .



**Theorem 2** *The existence and uniqueness of Gibbs measures [2, Theorem 1.2. and Theorem 1.22]*

*Suppose  $\phi \in \mathcal{F}$ . Then there is a unique Gibbs measure  $\mu$  with the constant*

$$P = P(\phi).$$

**Theorem 3** *The existence and uniqueness of equilibrium states [2, Theorem 1.22.]*

*Suppose  $\phi \in \mathcal{F}$ . Then the Gibbs measure  $\mu_\phi$  for  $\phi$  is the unique equilibrium state for  $\phi$ , i.e.,*

$$h_{\mu_\phi} + \int \phi d\mu_\phi = P(\phi).$$

## 4 Phase transition

In the previous section we saw the case where uniqueness of equilibrium states holds. On the other hand, it is not clear whether uniqueness holds for continuous functions which is not Hölder continuous. Indeed there are examples of functions which have more than two equilibrium states.[3] The coexistence of multiple equilibrium states is called a phase transition with the analogy of the statistical mechanics.

It is interesting to find functions which have more than two equilibrium states and the condition on functions that phase transition happens. It is also interesting to search how common phase transition happens, which means whether functions with more than two equilibrium states are dense in the set of all continuous functions.

## 参考文献

- [1] A.T.Baraviera, R.Leplaideur and A.O.Lopes, Ergodic optimization, zero temperature limits and the Max-Plus algebra, 29<sup>o</sup> Coloquio Brasileiro de Matematica, IMPA, 2013.
- [2] Rufus Bowen, Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms, Lecture Notes in Mathematics vol. 470, Springer, Berlin, 1975.
- [3] Franz Hofbauer, Examples for the Nonuniqueness of the Equilibrium States, Transactions of the American Mathematical Society vol. 228, 1977, pp.223-241.
- [4] Peter Walters, An Introduction to Ergodic Theory, Graduate Texts in Mathematics 79, Springer, New York, 1982.

# 行列問題を用いた可換梯子型 パーシステントホモロジー群の直既約分解

竹内 博志 (Hiroshi Takeuchi) \*

共同研究者：Emerson Gaw Escolar, 浅芝 秀人, 平岡 裕章

## 概要

近年の位相的データ解析では、実データ解析の需要に応えるため、ジグザグパーシステント加群などの時系列位相的データ解析の手法が提案されてきた。本研究では、ジグザグパーシステント加群の直既約分解を前提として、現在ガラスのデータ解析に応用されている可換梯子型パーシステント加群の直既約分解を、行列問題を用いた新しい分解アルゴリズムによって達成した。

## 1 位相的データ解析及び本研究の背景

位相的データ解析では、有限個の点列で与えられるデータ  $P \subset \mathbb{R}^N$  に対して、その位相的性質を調べる問題がよく考えられる。例えば、センサーネットワークの被覆問題 [6] や材料科学における物性解析 [5] などに応用されている。もちろん  $P$  は有限集合であるから、単純にホモロジー群を考へても意味のある特徴抽出は行えない。そこで位相的データ解析では、有限点列からフィルトレーション付きの幾何モデル  $X = \{X_i: \text{有限単体複体もしくは位相空間} \mid X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_n\}$  を構成し、その幾何モデルに対して体  $K$  係数  $q$  次ホモロジー関手  $H = H_q(-, K)$  を作用させることがよく行われる（有限点列から有限単体複体のフィルトレーションを構成する方法としては、アルファ複体や Vietoris-Rips 複体などがよく使われる [3]）：

$$H(X): H(X_1) \rightarrow H(X_2) \rightarrow \dots \rightarrow H(X_n) \quad (1)$$

(1) をパーシステントホモロジー群と呼ぶ。これは  $H(X_i)$  の元がフィルトレーション内を  $j$  進んだ  $H(X_{i+j})$  で存続しているかどうかを調べる事が出来、与えられた空間の堅牢 (robust) な位相不変量を抽出することが出来る。次の節で述べる箎 (quiver) の表現論を用いることで、この (加) 群は一意的に直既約分解することが出来、それによってパーシステント図などの扱いやすい表示を得ることが出来る。

また、この箎の表現論を用いて、パーシステントホモロジー群を様々な形式で一般化することが出来る。その中でも、本研究の研究対象である可換梯子型パーシステント加群は、時系列データの

\* 東北大学大学院理学研究科 (〒980-0845 仙台市青葉区荒巻青葉 6 - 3, E-mail: hiroshi.takeuchi.s6@dc.tohoku.ac.jp)

堅牢なホモロジー群を扱うことが出来る。例えば論文 [4] では可換梯子型パーシステント加群を用い、シリカガラス (SiO<sub>2</sub>) の加圧状態でのリング構造の保持性等が議論されており、今後この可換梯子型パーシステント加群を使ったデータ解析の発展が期待されている。この加群を扱いやすく表示するときも直既約分解する必要があるが、先行研究で得られている分解アルゴリズム [4] は扱いが困難で冗長である。本研究ではこの分解アルゴリズムを、行列の標準形を求める問題に置き換えることによって簡易化した。

## 2 籠の表現論

籠  $Q = (Q_0, Q_1)$  とは、頂点集合が  $Q_0$  で有向辺の集合が  $Q_1$  で与えられる有向グラフのことである。籠  $Q$  の頂点  $a \in Q_0$  から  $b \in Q_0$  への辺  $\alpha \in Q_1$  を  $\alpha: a \rightarrow b$  で表す。また頂点  $a$  から  $b$  への長さ  $\ell$  の道  $(a | \alpha_1 \dots \alpha_\ell | b)$  は、 $\alpha_1$  の始点が  $a$  で  $\alpha_\ell$  の終点が  $b$ 、かつ  $\alpha_i$  の終点と  $\alpha_{i+1}$  の始点 ( $i = 1, \dots, \ell - 1$ ) が等しい  $\ell$  個の辺  $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$  から与えられる。このとき、籠  $Q$  に対して道代数  $KQ$  が、 $Q$  内の全ての道で張られるベクトル空間に、道の合成

$$(a | \alpha_1 \dots \alpha_\ell | b)(c | \beta_1 \dots \beta_m | d) = \delta_{b,c}(a | \alpha_1 \dots \alpha_\ell \beta_1 \dots \beta_m | d)$$

( $\delta_{b,c}$  はクロネッカーのデルタ記号)

からなる積構造を入れたものとして定まる。ここでは有限 ( $|Q_0|, |Q_1| < \infty$ ) かつサイクル<sup>\*1</sup>を持たない籠のみを考える。また始点と終点が等しい道  $w_i$  の線形和

$$\rho = \sum_{i=1}^k c_i w_i, \quad c_i \in K$$

を  $Q$  の関係と呼び、関係の集まり  $\{\rho_1, \dots, \rho_s\}$  が道代数  $KQ$  に生成するイデアルを  $\langle \rho_1, \dots, \rho_s \rangle$  と書く。

籠  $Q$  の表現  $M = (M_a, \varphi_\alpha)_{a \in Q_0, \alpha \in Q_1}$  とは、各頂点  $a \in Q_0$  に有限次元ベクトル空間  $M_a$  を割り当て、各辺  $\alpha: a \rightarrow b$  に線形写像  $\varphi_\alpha: M_a \rightarrow M_b$  を割り当てたものである。またイデアル  $I = \langle \rho_1, \dots, \rho_s \rangle$  が定める代数  $A = KQ/I$  の表現  $M = (M_a, \varphi_\alpha)_{a \in Q_0, \alpha \in Q_1}$  は、籠  $Q$  の表現であって各関係  $\rho_j = \sum_i c_{ij} w_{ij}$  に対して  $\varphi_{\rho_j} = \sum_i c_{ij} \varphi_{w_{ij}} = 0$  を満たすもので与えられる<sup>\*2</sup>。ここで  $\varphi_w$  は道  $w = (a | \alpha_1 \dots \alpha_\ell | b)$  に対して線形写像の合成  $\varphi_w = \varphi_{\alpha_\ell} \circ \dots \circ \varphi_{\alpha_1}$  を意味する。例えば、次の籠

$$Q = \begin{array}{ccc} \overset{1'}{\circ} & \xrightarrow{\alpha} & \overset{2'}{\circ} \\ \beta \uparrow & & \delta \uparrow \\ \underset{1}{\circ} & \xrightarrow{\gamma} & \underset{2}{\circ} \end{array} \quad (2)$$

\*1 始点と終点が等しい道

\*2 定義より、イデアル  $I$  が  $\{0\}$  の場合は、籠の表現と代数の表現は同じものである。

の、関係  $\rho = \gamma\delta - \beta\alpha$  が定める代数  $KQ/I$  の表現

$$M = \begin{array}{ccc} M_{1'} & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & M_{2'} \\ \varphi_\beta \uparrow & & \varphi_\delta \uparrow \\ M_1 & \xrightarrow{\varphi_\gamma} & M_2 \end{array} \quad (3)$$

においては  $\varphi_\delta\varphi_\gamma - \varphi_\alpha\varphi_\beta = 0$  が成り立ち、(3) が可換図式となる。このように代数の表現を可換図式とするような関係から定まるイデアルを可換関係イデアルと呼ぶことにする。

代数  $A = KQ/I$  の表現  $M = (M_a, \varphi_\alpha)_{a \in Q_0, \alpha \in Q_1}$  と  $M' = (M'_a, \varphi'_\alpha)_{a \in Q_0, \alpha \in Q_1}$  の直和表現  $M \oplus M'$  とは、各頂点  $a \in Q_0$  にベクトル空間  $M_a \oplus M'_a$  を割り当て、各辺  $\alpha: a \rightarrow b$  に線形写像  $\varphi_\alpha \oplus \varphi'_\alpha: M_a \oplus M'_a \rightarrow M_b \oplus M'_b$  を割り当てたものである。

代数  $A = KQ/I$  の表現  $M$  は、 $M = N \oplus N'$  なる任意の直和分解に対して常に  $N = 0$  もしくは  $N' = 0$  となるとき直既約という。Krull-Schmidt の定理によると、任意の表現  $M$  は直既約な表現の直和  $M \cong W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$  に同型を除いて一意に分解出来ることが知られている。籠  $Q$  もしくは代数  $A$  は、直既約表現の異なる同型類の個数が有限個であるとき有限型であるといい、そうでないとき無限型と呼ぶ。

$A_n$  型の籠とは、次のような  $n$  個の頂点が  $n-1$  個の辺で結ばれた有向グラフのことである：

$$A_n(\tau_n): \circ \longleftrightarrow \circ \xleftarrow{2} \cdots \xleftarrow{n} \circ$$

ここで、 $\longleftrightarrow$  は  $\longrightarrow$  もしくは  $\longleftarrow$  を表し、それぞれに記号  $f, b$  (forward と backward) を用意しておけば、 $A_n$  型籠は  $f, b$  の  $n-1$  個の列  $\tau_n$  で表せる。Gabriel の定理 [7] によると、 $A_n$  型籠の任意の表現

$$M: M_1 \longleftrightarrow M_2 \longleftrightarrow \cdots \longleftrightarrow M_n$$

は、直既約な区間表現

$$I[b, d]: 0 \longleftrightarrow \cdots \longleftrightarrow 0 \xleftarrow{b \text{ 番目}} K \longleftrightarrow K \longleftrightarrow \cdots \longleftrightarrow K \xleftarrow{d \text{ 番目}} 0 \longleftrightarrow \cdots \longleftrightarrow 0$$

( $K \longleftrightarrow K$  は全て恒等写像)

の直和

$$M \cong \bigoplus_{1 \leq b \leq d \leq n} I[b, d]^{m_{b,d}}, \quad (m_{b,d} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : \text{重複度}) \quad (4)$$

として同型を除いて一意に分解可能であることが知られている。パーシステントホモロジー群は、 $A_n$  型籠の射の向きが全て揃った  $\tau_n = ff \cdots f$  の特別な場合であり、各区間表現は  $H(X_b)$  で発生し  $H(X_{d+1})$  で消滅するホモロジー群の生成元を意味している。パーシステントホモロジー群の一意分解 (4) から定まる多重集合

$$D_M = \{(b, d) \mid 1 \leq b \leq d \leq n, (b, d) \text{ は重複度 } m_{b,d} \text{ をもつ}\}$$

をパーシステント図と呼ぶ。この表示は視覚的にわかりやすく、パーシステントホモロジー群の応用においては頻繁に利用されている。

叢の表現論によって拡張されたパーシステントホモロジー群（パーシステント加群と呼ぶ）は、位相的データ解析の適用範囲を更に広げることになった。例えばタンパク質フォールディングのように、時系列データとして時刻  $t$  での位相空間  $Y_t$  の列  $Y_1, Y_2, \dots, Y_T$  が与えられている場合（例えば時刻  $t$  でのタンパク質の形を  $Y_t$  とする）、これらは一般にはフィルトレーションを成さないが、

$$Y_1 \hookrightarrow Y_1 \cup Y_2 \hookrightarrow Y_2 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow Y_{T-1} \cup Y_T \hookrightarrow Y_T$$

( $\hookrightarrow$  は包含写像)

が誘導するパーシステント加群

$$H(Y_1) \longrightarrow H(Y_1 \cup Y_2) \longleftarrow H(Y_2) \longrightarrow \dots \longrightarrow H(Y_{T-1} \cup Y_T) \longleftarrow H(Y_T) \quad (5)$$

を直既約分解することで、時系列  $Y_1, \dots, Y_T$  の中で存続する位相的特徴を抽出することが可能になる。

$A_n$  型パーシステント加群をジグザグ（パーシステント）加群といい、論文 [2] をはじめとして様々な直既約分解アルゴリズムが与えられている。ジグザグ加群は時系列データを扱うことが出来る最も基本的なパーシステント加群なので、現在力を入れて発展が継続されている。

### 3 シリカガラスによる位相的データ解析への新たな話題提起

時系列データとして次のような例を考えてみよう。シリカガラス  $\text{SiO}_2$  の原子配置  $P \subset \mathbb{R}^3$  が与えられている。このガラスを圧縮変形させて新しい原子配置  $P' \subset \mathbb{R}^3$  を得た。この時、2つのシリカガラスに共通する幾何構造、即ちガラスの圧縮変形に対して不変な幾何構造を捉えたい。ジグザグパーシステント加群を考えると、この幾何構造を捉えることは出来るが、この手法は各空間におけるホモロジー群のパーシステンスを捉えてはいない。この時系列のパーシステンスと空間のパーシステンスを同時に捉える手法として考えられたのが、次の可換梯子 (Commutative Ladder, CL) 型パーシステント加群である。まず元の原子配置  $P$  に対して、2つの位相空間  $X_r = \bigcup_{p \in P} B_r(p)$  (ただし、 $B_r(p)$  は点  $p$  を中心とした半径  $r$  の球体)、 $X_s = \bigcup_{p \in P} B_s(p)$  をとり、新しい原子配置  $P'$  に対しても同様に2つの位相空間  $W_r = \bigcup_{p' \in P'} B_r(p')$ 、 $W_s = \bigcup_{p' \in P'} B_s(p')$  をとると、次の可換図式が定まる。

$$\begin{array}{ccccc} H(X_s) & \longrightarrow & H(X_s \cup W_s) & \longleftarrow & H(W_s) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ H(X_r) & \longrightarrow & H(X_r \cup W_r) & \longleftarrow & H(W_r) \end{array}$$

この図式を CL 型パーシステント加群と呼び、縦方向はフィルターの数が2のパーシステントホモロジー群になっており、横方向は時系列データの数が2のジグザグ加群になっている。従ってこの新しいパーシステント加群は、時系列データに共通する幾何構造を考えつつ、その幾何構造の堅牢性・パーシステンスを考えることが出来る。

## 4 可換梯子 (CL) 型パーシステント加群

CL 型パーシステント加群は一般に次のように定義される.

定義. 上段と下段で同じ横方向の向き付け  $\tau_n$  を与えた籠

$$L(\tau_n) = \begin{array}{ccccccc} \circ^{1'} & \longleftrightarrow & \circ^{2'} & \longleftrightarrow & \circ^{3'} & \longleftrightarrow & \dots & \longleftrightarrow & \circ^{n-1'} & \longleftrightarrow & \circ^{n'} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow \\ \circ^1 & \longleftrightarrow & \circ^2 & \longleftrightarrow & \circ^3 & \longleftrightarrow & \dots & \longleftrightarrow & \circ^{n-1} & \longleftrightarrow & \circ^n \end{array}$$

を可換関係イデアル  $I$  で割った代数  $CL(\tau_n) = KL(\tau_n)/I$  を長さ  $n$  の可換梯子と呼ぶ. そしてこの代数  $CL(\tau_n)$  の表現

$$M = \begin{array}{ccccccccccc} M_{1'} & \xleftarrow{h_{1'}} & M_{2'} & \xleftarrow{h_{2'}} & M_{3'} & \xleftarrow{h_{3'}} & \dots & \xleftarrow{\phantom{h}} & M_{n-1'} & \xleftarrow{h_{n-1'}} & M_{n'} \\ \varphi_1 \uparrow & \circlearrowleft & \varphi_2 \uparrow & \circlearrowleft & \varphi_3 \uparrow & & & & \varphi_{n-1} \uparrow & \circlearrowleft & \varphi_n \uparrow \\ M_1 & \xleftarrow{h_1} & M_2 & \xleftarrow{h_2} & M_3 & \xleftarrow{h_3} & \dots & \xleftarrow{\phantom{h}} & M_{n-1} & \xleftarrow{h_{n-1}} & M_n \end{array} \quad (6)$$

を長さ  $n$  の CL 型パーシステント加群と呼ぶ.

[4] では,  $CL(\tau_n)$  は  $n \leq 4$  のとき向きづけ  $\tau_n$  に依らず常に有限型となり,  $n > 4$  では一般には無限型となることが示されており, Auslander-Reiten 籠を用い, パーシステント図を Auslander-Reiten 籠の頂点集合上の関数として一般化出来ることが示されている. ここで一般に, 代数  $A$  に対してその Auslander-Reiten 籠とは, 頂点集合  $\Gamma_0$  を全ての直既約表現の同型類で与え, また同型類  $[M], [N] \in \Gamma_0$  に対して既約射  ${}^*3M \rightarrow N$  が存在するとき  $\Gamma_1$  内の辺  $[M] \rightarrow [N]$  を対応させた籠  $\Gamma(A) = (\Gamma_0, \Gamma_1)$  のことである. 長さ  $n \leq 4$  の可換梯子に対する Auslander-Reiten 籠は論文 [4] に全てリストアップされている. 図 1 には一例として, [4] でシリカの解析に使われた CL 型パーシステント加群  $CL(fb)$

$$\begin{array}{ccccc} \circ & \longrightarrow & \circ & \longleftarrow & \circ \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \circ & \longrightarrow & \circ & \longleftarrow & \circ \end{array} \quad (7)$$

の場合の Auslander-Reiten 籠を載せている. ここで各頂点に位置する既約な同型類  $[I]$  は次元ベクトル  $\dim I$  を用いて表示しており, 例えば既約表現

$$\begin{array}{ccccc} K & \longrightarrow & 0 & \longleftarrow & K \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ K & \longrightarrow & K & \longleftarrow & K \end{array}$$

の次元ベクトルは  $\begin{smallmatrix} 101 \\ 111 \end{smallmatrix}$  で表している.

\*3 次の 2 つの条件を満たすとき  $f: M \rightarrow N$  を既約射という: (i)  $f$  はレトラクションでも切断でもない. (ii) 任意の分解  $f = f_1 \circ f_2$  に対して,  $f_1$  はレトラクションもしくは  $f_2$  は切断になる.

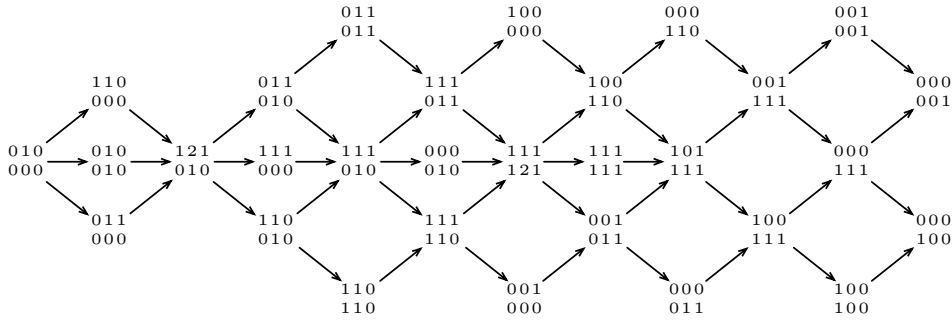


図1  $CL(fb)$  の Auslander-Reiten 箭

よって有限型の可換梯子  $CL(\tau_n)$  の Auslander-Reiten 箭を  $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$  で表すと、 $CL(\tau_n)$  の任意の表現  $M$  は、頂点集合  $\Gamma_0$  で与えられる直既約表現を用いて一意に分解

$$M \cong \bigoplus_{[l] \in \Gamma_0} I^{k[l]}, \quad (k[l] \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : \text{重複度})$$

される。

## 5 主結果

本研究では、CL 型パーシステント加群を行列で表示することによって、有限型の CL 型パーシステント加群 (6) の直既約分解アルゴリズムを簡略化した。

一般に、箭  $Q$  の表現  $V = (V_a, f_\alpha)$  と  $W = (W_a, g_\alpha)$  の間の射  $\phi = \{\phi_a: V_a \rightarrow W_a\}_{a \in Q_0}: V \rightarrow W$  を

$$\begin{array}{ccc} W_a & \xrightarrow{g_\alpha} & W_b \\ \phi_a \uparrow & \circlearrowleft & \phi_b \uparrow \\ V_a & \xrightarrow{f_\alpha} & V_b \end{array} \quad (\forall \alpha: a \rightarrow b \in Q_1) \quad (8)$$

を満たすものと定めると、 $Q$  の表現全体を対象とした表現の圏  $\text{rep}(Q)$  が定義される。

更に、圏  $\text{rep}(Q)$  の射全体を対象とする圏  $\text{Arr}(\text{rep}(Q))$  を考えることが出来る。この新たな圏  $\text{Arr}(\text{rep}(Q))$  の射は対象  $\phi_1: V_1 \rightarrow W_1$  と  $\phi_2: V_2 \rightarrow W_2$  に対し、

$$\psi = (\psi_V, \psi_W): \phi_1 \rightarrow \phi_2, \quad \begin{array}{ccc} V_2 & \xrightarrow{\phi_2} & W_2 \\ \psi_V \uparrow & \circlearrowleft & \psi_W \uparrow \\ V_1 & \xrightarrow{\phi_1} & W_1 \end{array} \quad (9)$$

と定める。

以上の一般論は箭  $Q$  を代数  $KQ/I$  に取り替えても成り立つ。このようにして定まる圏  $\text{rep}(CL(\tau_n))$  と  $\text{Arr}(\mathbb{A}_n(\tau_n))$  の間には圏同型  $F: \text{rep}(CL(\tau_n)) \cong \text{Arr}(\mathbb{A}_n(\tau_n))$  が自然に定まるので、CL 型パーシステント加群を圏  $\mathbb{A}_n(\tau_n)$  の射として扱うことが出来る。即ち、 $M \in \text{rep}(CL(\tau_n))$  の直

既約分解を求める問題は、射  $F(M) = \phi: V \rightarrow W$  の標準形を求める問題に帰着される。更にこの  $\phi$  は以下述べるように、行列の形で簡単に扱うことが出来る。

任意の  $V = (V_i, f_\alpha) \in \text{rep}(\mathbb{A}_n(\tau_n))$  は、(4) のように

$$\eta_V: V \cong \bigoplus_{1 \leq b \leq d \leq n} I[b, d]^{m_{b,d}}, \quad (m_{b,d} \in \mathbb{N}_0: \text{重複度}) \quad (10)$$

と分解された。この同型を通して、 $\phi: V \rightarrow W$  を

$$\Phi = \eta_W \phi \eta_V^{-1}: \bigoplus_{1 \leq a \leq b \leq n} I[a, b]^{m_{a,b}} \rightarrow \bigoplus_{1 \leq c \leq d \leq n} I[c, d]^{m'_{c,d}} \quad (11)$$

と書き直すことが出来る。更に、 $\Phi$  を行列

$$\Phi = \left[ \Phi_{(a,b)}^{(c,d)} \right], \quad \Phi_{(a,b)}^{(c,d)}: I[a, b]^{m_{a,b}} \rightarrow I[c, d]^{m'_{c,d}}, \quad (12)$$

$$\Phi_{(a,b)}^{(c,d)} = [g_{i,j}], \quad g_{i,j}: I[a, b] \rightarrow I[c, d], \quad (1 \leq i \leq m_{a,b}, 1 \leq j \leq m'_{c,d}) \quad (13)$$

と表示することが出来る。一般に、 $I[a, b]$  から  $I[c, d]$  への射の集合  $\text{Hom}_{K\mathbb{A}_n(\tau_n)}(I[a, b], I[c, d])$  の体  $K$  上のベクトル空間としての次元は 0 もしくは 1 である。従って、この次元がちょうど 1 のとき、0 でない射  $f_{(a,b)}^{(c,d)}: I[a, b] \rightarrow I[c, d]$  が存在し、任意の  $i, j$  についてある  $m_{i,j} \in K$  が存在して、 $g_{i,j} = m_{i,j} f_{(a,b)}^{(c,d)}$  と書ける。即ち  $\Phi$  は

$$\Phi = \left[ \Phi_{(a,b)}^{(c,d)} \right] = \left[ F_{(a,b)}^{(c,d)} f_{(a,b)}^{(c,d)} \right], \quad (F_{(a,b)}^{(c,d)} \text{ は係数 } K \text{ の行列}) \quad (14)$$

と書ける。ただし、 $\dim_K \text{Hom}_{K\mathbb{A}_n(\tau_n)}(I[a, b], I[c, d]) = 0$  の場合は  $f_{(a,b)}^{(c,d)} = 0$  と定める。従ってこの行列は、特定の成分は常に 0 になるという特徴を持つ。

あとはこの行列を標準形に直せば良いが、この行列は通常の係数  $K$  の行列と違って成分に射  $f_{(a,b)}^{(c,d)}$  を含むため、実行出来る行列の基本変形が  $f_{(a,b)}^{(c,d)}$  によって制限される。例として籓 (7) から定まる  $CL(fb)$  型パーシステント加群の直既約分解を考えよう。今、 $\mathbb{A}_3(fb)$  の Auslander-Reiten 籓  $\Gamma(\mathbb{A}_3(fb))$  は (15) である。ただし以下、 $I[b, d]$  や  $(b, d)$  を  $b:d$  と略記する。

$$\Gamma(\mathbb{A}_3(fb)) = \begin{array}{ccccc} & & & & 3:3 \\ & & & & \nearrow f_{1:3}^{3:3} \\ & & 1:2 & \xrightarrow{f_{1:2}^{1:3}} & \\ & \nearrow f_{2:2}^{1:2} & & & \\ 2:2 & & & & 1:3 \\ & \searrow f_{2:2}^{2:3} & \nearrow f_{2:3}^{1:3} & & \searrow f_{1:3}^{1:1} \\ & & 2:3 & & 1:1 \end{array} \quad (15)$$



この場合, (14) の表記は一般に以下のように書ける.

$$\Phi = \begin{array}{c} 1:1 \\ 1:2 \\ 2:2 \\ 1:3 \\ 2:3 \\ 3:3 \end{array} \left[ \begin{array}{cccccc} 1:1 & 1:2 & 2:2 & 1:3 & 2:3 & 3:3 \\ F_{1:1}^{1:1} f_{1:1}^{1:1} & F_{1:2}^{1:1} f_{1:2}^{1:1} & 0 & F_{1:3}^{1:1} f_{1:3}^{1:1} & 0 & 0 \\ 0 & F_{1:2}^{1:2} f_{1:2}^{1:2} & F_{2:2}^{1:2} f_{2:2}^{1:2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{2:2}^{2:2} f_{2:2}^{2:2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_{1:2}^{1:3} f_{1:2}^{1:3} & F_{2:2}^{1:3} f_{2:2}^{1:3} & F_{1:3}^{1:3} f_{1:3}^{1:3} & F_{2:3}^{1:3} f_{2:3}^{1:3} & 0 \\ 0 & 0 & F_{2:2}^{2:3} f_{2:2}^{2:3} & 0 & F_{2:3}^{2:3} f_{2:3}^{2:3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{1:3}^{3:3} f_{1:3}^{3:3} & F_{2:3}^{3:3} f_{2:3}^{3:3} & F_{3:3}^{3:3} f_{3:3}^{3:3} \end{array} \right] \quad (16)$$

ここで, 0 となっている成分は全て  $\dim_K \text{Hom}_{K\Delta_n(\tau_n)}(a:b, c:d) = 0$  を満たすことが確かめられる. 例えば  $\varphi: 1:1 \rightarrow 1:2$  は,

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{\text{id}_K} & K & \longleftarrow & 0 \\ \varphi_1 \uparrow & & \varphi_2 \uparrow & & \varphi_3 \uparrow \\ K & \longrightarrow & 0 & \longleftarrow & 0 \end{array}, \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \quad (17)$$

である. 明らかに  $\varphi_2 = \varphi_3 = 0$  であり, また図式の可換性より,  $\varphi_1 = 0$  でなくてはならない. 従って  $\varphi = 0$  となる.

以下  $f_{a:b}^{c:d}$  は省略する.

圏  $\text{rep}(\Delta_n(\tau_n))$  の同型射も, 行列の表記では  $\Phi$  と同様に, 特定の成分が必ず 0 になるという制限を受ける. 行列  $\Phi$  の列の基本変形は, 圏  $\text{rep}(\Delta_n(\tau_n))$  の同型射によって与えられる行列

$$R = \begin{array}{c} 1:1 \\ 1:2 \\ 2:2 \\ 1:3 \\ 2:3 \\ 3:3 \end{array} \left[ \begin{array}{cccccc} 1:1 & 1:2 & 2:2 & 1:3 & 2:3 & 3:3 \\ R_{1:1}^{1:1} & R_{1:2}^{1:1} & 0 & R_{1:3}^{1:1} & 0 & 0 \\ 0 & R_{1:2}^{1:2} & R_{2:2}^{1:2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{2:2}^{2:2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{1:2}^{1:3} & R_{2:2}^{1:3} & R_{1:3}^{1:3} & R_{2:3}^{1:3} & 0 \\ 0 & 0 & R_{2:2}^{2:3} & 0 & R_{2:3}^{2:3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{1:3}^{3:3} & R_{2:3}^{3:3} & R_{3:3}^{3:3} \end{array} \right] \quad (18)$$

を  $\Phi$  に右から掛けることによって実行される. 例えば  $\Phi R$  の  $(2:2, 1:2)$  成分は  $(F_{1:2}^{1:2} R_{2:2}^{1:2} + F_{2:2}^{1:2} R_{2:2}^{2:2})$  なので,  $R$  を適当に取れば  $(F_{1:2}^{1:2})$  の成分を  $(F_{2:2}^{1:2})$  の成分に足すことが出来る. しかし逆に,  $\Phi R$  の  $(1:2, 1:2)$  成分は  $(F_{1:2}^{1:2} R_{1:2}^{1:2})$  なので,  $(F_{2:2}^{1:2})$  の成分を  $(F_{1:2}^{1:2})$  の成分に足すことは出来ない. 行の基本変形も同様の制限を受ける.

本研究ではこの制限された基本変形を用い, 全ての小行列  $F_{a:b}^{c:d}$  を標準形

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (E \text{ は単位行列}) \quad (19)$$

に変換する擬似コードを作成した。この最終的な出力が CL 型の直既約成分を与えることは、Auslander-Reiten 籠 ( $CL(fb)$ ) の場合は図 15) で確認出来る。

## 6 まとめ

本研究では、CL 型パーシステント加群を行列の形に置き換えることにより、従来より簡便な直既約分解のアルゴリズムを構成した。またこのアルゴリズムはジグザグ加群の直既約分解を仮定しているので、ジグザグ加群の直既約分解アルゴリズムが改良されると、このアルゴリズムも自動的に改良される利点がある。更にこの擬似コードは容易に並列化出来るので、クラスターマシンによるビッグデータの解析に適している。

## 参考文献

- [1] I. Assem, D. Simson, and A. Skowroński. Elements of the Representation Theory of Associative Algebras 1: Techniques of Representation Theory. Cambridge University Press. (2006).
- [2] G. Carlsson, V. de Silva. Zigzag Persistence. *Found. Comput. Math.* 10, 367–405 (2010).
- [3] H. Edelsbrunner and J. L. Harer. Computational Topology. AMS. (2009).
- [4] E. Escolar and Y. Hiraoka. Computing persistence modules on commutative ladders of finite type. *Lecture Notes in Computer Science* 8592, 144–151. (2014).
- [5] M. Gameiro, Y. Hiraoka, S. Izumi, M. Kramar, K. Mischaikow, and V. Nanda. Topological Measurement of Protein Compressibility via Persistent Diagrams. *Japan J. Indust. Appl. Math.*. Vol. 32 1–17. (2015).
- [6] Y. Hiraoka and G. Kusano. Coverage Criterion in Sensor Networks Stable under Perturbation. arXiv:1409.7483.
- [7] 草場公邦. 行列特論. 裳華房. (1979).

# 局所 Hardy 空間の元を外力項とする Rivière 型方程式の弱解の正則性

野島 崇史 (Takafumi Nojima)  
東京工業大学修士課程 2 年

## 1 導入

本稿で述べる結果と先行研究の説明の為, 与えられた関数  $f$  による Poisson 方程式

$$-\Delta u = f \tag{1.1}$$

の  $W^{1,2}$ -弱解  $u$  の正則性について考えよう. ここで  $W^{k,p}$  は Sobolev 空間であり, 添え字  $k, p$  はそれぞれ弱い意味での微分可能回数と弱微分の  $p$  乗可積分性を意味する. 今は方程式と Sobolev 空間の定義域はさほど重要ではないので記述を省略した.  $f$  の可積分性は  $u$  の正則性に影響を与える. 例えば  $f$  が  $L^2_{\text{loc}}$ -関数 (局所 2 乗可積分関数) の場合は差分法により  $u$  の高階の弱微分可能性が示せ,  $u$  が  $W^{2,2}_{\text{loc}}$ -関数と分かる. また, Calderón-Zygmund の特異積分論により  $1 < p < \infty$  の場合

$$f \text{ が } L^p_{\text{loc}}\text{-関数ならば } u \text{ は } W^{2,p}_{\text{loc}}\text{-関数} \tag{1.2}$$

なる事が分かる [3, Chapter 9]. 一方で  $p = 1$  のときには (1.2) は成り立たない事が分かっている. 次のような反例が挙げられる.

**例 1.1** ( $p = 1$  のとき (1.2) 不成立の例).  $B_1$  を  $\mathbb{R}^2$  の単位円盤とし,  $f_0 \in W^{1,2}(B_1) \cap C^\infty(\overline{B_1} \setminus \{0\})$  を  $f_0(x) := \log \log(e|x|^{-1})$  として定める.  $x \in \overline{B_1} \setminus \{0\}$  に対して  $f_0$  の微分は

$$\nabla f_0(x) = -\frac{x}{|x|^2 \log(e|x|^{-1})}, \quad \Delta f_0(x) = -\frac{1}{\{|x| \log(e|x|^{-1})\}^2} = -|\nabla f_0(x)|^2$$

となる事が計算により求められる. また Gauss の発散定理を使う事で, 超関数の意味で

$$-\Delta f_0 = |\nabla f_0|^2 \text{ in } B_1$$

が成り立つと分かる.  $f := |\nabla f_0|^2$ ,  $u := f_0$  と置けば  $u \in W^{1,2}(B_1)$  で方程式

$$-\Delta u = f \quad \text{in } B_1$$

の弱解となっている. しかし  $u \notin W^{2,1}(B_{1/2})$  である. 実際

$$|\nabla^2 u(x)| \geq \frac{1}{2|x|^2 \log(e|x|^{-1})}$$

が  $B_1 \setminus \{0\}$  上で成り立つことから

$$\begin{aligned} \int_{B_{1/2}} |\nabla^2 u| dx &\geq \int_{B_{1/2}} \frac{1}{2|x|^2 \log(e|x|^{-1})} dx \\ &= 2\pi \int_{(0,1/2)} \frac{1}{2r^2 \log(er^{-1})} r dr = +\infty. \end{aligned}$$

このように (1.2) は  $p = 1$  では成立しない. しかし, 特殊な表示を持つ  $L^1$ -関数  $f$  に絞って考えると, (1.2) の  $p = 1$  のときに相当する結果が示せる場合がある. 次は div-curl lemma と呼ばれる定理の一部である. 証明は [5] を参照せよ.

**命題 1.2.**  $B_1$  を  $\mathbb{R}^2$  の単位円盤とし,  $f_1, f_2 \in W^{1,2}(B_1)$  とする. このとき, 方程式

$$-\Delta u = \det(\nabla f_1, \nabla f_2) \tag{1.3}$$

の  $W^{1,2}$ -弱解  $u$  について,  $u \in W_{\text{loc}}^{2,1}(B_1)$  である.

(1.3) の右辺について,  $f_1, f_2 \in W^{1,2}(B_1)$  なので

$$\det(\nabla f_1, \nabla f_2) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \in L^1(B_1).$$

しかし, それ以上の可積分性は一般には望めない. その為, 例 1.1 で見たように Calderón-Zygmund 理論からは  $u \in W_{\text{loc}}^{2,1}(B_1)$  とは分からない. それにもかかわらず弱解の正則性が上がるのは, (1.3) の右辺がヤコビアンという特殊な表示を持っている為である.

命題 1.2 は「Calderón-Zygmund 理論を適用して弱解の正則性を調べる事は出来なくても, (1.3) のように方程式が特殊な表示を持つときは, 弱解の正則性が上がる」事を意味するが, それでは他にどのような方程式の特殊な表示があるだろうか.

2007 年に方程式の弱解の正則性が上がる新たな表示が発見された [7]. 発見者である Rivière にちなみ, その表示を持つ方程式を総称して Rivière 型方程式と呼ぶ. 本稿の主結果は Rivière 型方程式に関係するものである. 次の第 2 節では Rivière 型方程式について説明をする. 先行研究と主結果については第 3 節に記す.

## 2 Rivière 型方程式

$m \geq 2$ ,  $B_1$  を  $\mathbb{R}^2$  の単位円盤,  $\mathfrak{so}(m)$  を  $m$  次反対称行列全体の集合とする. また,  $\Omega = (\Omega_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m} \in L^2(B_1; \mathfrak{so}(m) \otimes \wedge^1 \mathbb{R}^2)$  とする. すなわち,

$$\Omega_{i,j} \in L^2(B_1; \mathbb{R}^2), \quad \Omega_{j,i} = -\Omega_{i,j}$$

とする.  $m$ -連立偏微分方程式

$$-\Delta u^i = \sum_{j=1}^m \langle \Omega_{i,j}, \nabla u^j \rangle_{\mathbb{R}^2} \quad \text{in } B_1 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (2.1)$$

を考えよう. (2.1) の右辺を  $(\Omega \cdot \nabla u)^i$  とおく. すると (2.1) は

$$-\Delta u = \Omega \cdot \nabla u \quad \text{in } B_1 \quad (2.2)$$

と書き表せる. (2.2) を Rivière 型方程式と呼ぶ.

**注意 2.1.** (2.1) の右辺をこのように置いたのは, 形式的に  $m$  次正方行列と列ベクトルの行列の積と見立てた為である.

(2.2) の弱解  $u \in W^{1,2}(B_1; \mathbb{R}^m)$  が与えられたとして, その正則性を考えよう. まず, (2.2) の右辺は  $L^1(B_1; \mathbb{R}^m)$  に属す事が直ちに分かる. しかし一般論からはそれ以上の可積分性は分からず, 弱解  $u$  の高階の弱微分可能性は分からない. しかし Rivière は  $\Omega$  の反対称性という構造が  $u$  の正則性を上げることを見抜き, 次の定理を証明した.

**定理 2.2** ([7]).  $B_1$  を  $\mathbb{R}^2$  の単位円盤,  $m \geq 2$ ,  $1 \leq p < 2$ ,  $\Omega \in L^2(B_1; \mathfrak{so}(m) \otimes \wedge^1 \mathbb{R}^2)$  とする. このときある  $\epsilon = \epsilon(m, p) > 0$  が存在して,  $\|\Omega\|_{L^2(B_1)} \leq \epsilon$  が成り立つならば

$$-\Delta u = \Omega \cdot \nabla u \quad \text{in } B_1$$

の弱解  $u \in W^{1,2}(B_1; \mathbb{R}^m)$  は  $W^{2,p}(B_{1/2}; \mathbb{R}^m)$  に属す. さらにある  $C = C(m, p) > 0$  が存在して, 次のように評価できる.

$$\|u\|_{W^{2,p}(B_{1/2})} \leq C \|u\|_{L^1(B_1)}.$$

定理 2.2 と被覆の議論により  $u \in W_{\text{loc}}^{2,p}(B_1; \mathbb{R}^m)$  と分かる.

### 3 主結果と関連する先行研究

記号は第2節と同じとする. Rivière 型方程式 (2.2) の右辺に外力項  $f$  を加えた方程式

$$-\Delta u = \Omega \cdot \nabla u + f \quad \text{in } B_1 \quad (3.1)$$

と, (3.1) の弱解  $u \in W^{1,2}(B_1; \mathbb{R}^m)$  について考える. (3.1) において  $\Omega \equiv O$  in  $B_1$  とすると  $m$ -連立 Poisson 方程式なので,  $f$  の属する関数空間に応じて得られる (3.1) の弱解の性質は, Poisson 方程式の場合に類似すると予想される. (3.1) の弱解  $u$  の正則性に関して以下の先行研究がある. 弱解列のコンパクト性の研究, 調和写像や Dirac 調和写像への応用については [2, 4, 7, 8, 9, 10, 11] などを参照せよ.

- $f \in L \log L(B_1; \mathbb{R}^m)$  ならば  $u \in W_{\text{loc}}^{2,1}(B_1; \mathbb{R}^m)$  [11]
- $f \in L^p(B_1; \mathbb{R}^m)$  ( $1 < p < 2$ ) ならば  $u \in W_{\text{loc}}^{2,p}(B_1; \mathbb{R}^m)$  [11]
- $f \in L^2(B_1; \mathbb{R}^m)$  ならば  $u \in W_{\text{loc}}^{2,2}(B_1; \mathbb{R}^m)$  は不成立.  $f \equiv 0$  の場合で反例が挙げられる. [9, Chapter 4.3].

ここで

$$L \log L(B_1) := \left\{ f \in L^1(B_1) \mid \|f\|_{L \log L(B_1)} < \infty \right\},$$

$$\|f\|_{L \log L(B_1)} := \int_{B_1} |f| \log \left( e + |f| \cdot \|f\|_{L^1(B_1)}^{-1} \right) dx$$

としている.  $(L \log L(B_1), \|\cdot\|_{L \log L(B_1)})$  は Banach 空間となる事が知られており ([6, Theorem 3], [9, Chapter 2.7.2]), また Lebesgue 空間と  $L \log L(B_1)$  の間には

$$L^p(B_1) \quad (p > 1) \xrightarrow{\text{conti.}} L \log L(B_1) \xrightarrow{\text{conti.}} L^1(B_1) \quad (3.2)$$

なる包含関係がある事も知られている.

(3.1) の弱解の  $W^{2,1}$ -正則性については  $f \in L^1(B_1; \mathbb{R}^m)$  の場合は例 1.1 で見たように一般には得られない. ( $\Omega \equiv O$  in  $B_1$  とすると (3.1) は Poisson 方程式となる為) 一方で  $L \log L(B_1; \mathbb{R}^m)$  という  $L^1(B_1; \mathbb{R}^m)$  より少しだけ良い関数空間に属する  $f$  を与えた場合は弱解  $u$  は  $u \in W_{\text{loc}}^{2,1}(B_1; \mathbb{R}^m)$  に属する事が上述の先行研究で判明している.

そこで本稿では外力項  $f$  の属する関数空間として, 更に  $L^1(B_1; \mathbb{R}^m)$  に近い局所 Hardy 空間  $h^1(B_1; \mathbb{R}^m)$  を与えても弱解の  $W^{2,1}$ -正則性が得られるかどうかを考察する.

局所 Hardy 空間は次で定義される関数空間である.

$$h_\phi^1(B_1) := \left\{ f \in L^1(B_1) \mid \|f\|_{h_\phi^1(B_1)} := \|m_{B_1, \phi}[f]\|_{L^1(B_1)} < \infty \right\}.$$

ここで各  $f \in L^1(B_1)$ ,  $\int_{\mathbb{R}^2} \phi dx \neq 0$  なる  $\phi \in C_c^\infty(B_1)$ ,  $t > 0$  に対して,

$$\begin{aligned} \phi_t(x) &:= t^{-2} \phi(x/t), \\ m_{B_1, \phi}[f] &: B_1 \ni x \mapsto \sup \{ |\phi_t * f(x)| \mid 0 < t < 1 - |x| \} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

とおいた.  $(h_\phi^1(B_1), \|\cdot\|_{h_\phi^1(B_1)})$  は Banach 空間となる [1]. 定義によると  $\|\cdot\|_{h_\phi^1(B_1)}$  は  $\phi$  の取り方に依存するが, ノルム同値になるという意味で同じ Banach 空間を与える. その為,  $h^1(B_1)$ ,  $\|\cdot\|_{h^1(B_1)}$  などと  $\phi$  を省略して表記する. Lebesgue 空間,  $L \log L(B_1)$  と  $h^1(B_1)$  の間には

$$L \log L(B_1) \stackrel{\text{conti.}}{\hookrightarrow} h^1(B_1) \stackrel{\text{conti.}}{\hookrightarrow} L^1(B_1)$$

なる包含関係がある. (3.2) とあわせると次の包含関係が分かる.

$$L^p(B_1) \ (p > 1) \stackrel{\text{conti.}}{\hookrightarrow} L \log L(B_1) \stackrel{\text{conti.}}{\hookrightarrow} h^1(B_1) \stackrel{\text{conti.}}{\hookrightarrow} L^1(B_1)$$

$h^1(B_1)$  は絶対値を取る事に関して閉じていない ( $L^\infty(B_1)$  との積を取る操作についても閉じていない) ので, その点で  $L \log L(B_1)$  と状況が異なっている. 一連の先行研究ではいずれも「外力項の属する関数空間が絶対値を取る演算について閉じている」という性質を用いて弱解の正則性の証明を行なっている. それゆえ外力項が局所 Hardy 空間に属す場合は先行研究の手法を適用する事ができない. そこで私は別の方針を立てて問題点を回避し, 次の結果を得た.

**主結果 3.1.**  $B_1$  を  $\mathbb{R}^2$  の単位円盤,  $m \geq 2$ ,  $\Omega \in L^2(B_1; \mathfrak{so}(m) \otimes \wedge^1 \mathbb{R}^2)$ ,  $f \in h^1(B_1; \mathbb{R}^m)$  とする. このとき

$$-\Delta u = \Omega \cdot \nabla u + f \quad \text{in } B_1$$

の弱解  $u \in W^{1,2}(B_1; \mathbb{R}^m)$  は  $W^{2,1}(B_1; \mathbb{R}^m)$  に属す. さらにある  $C = C(m) > 0$  が存在して,

$$\|\nabla^2 u\|_{L^1(B_1)} \leq C \{ \|\nabla u\|_{L^2(B_1)} + \|f\|_{h^1(B_1)} \}$$

と評価できる.

## 参考文献

- [1] D. -C. Chang, The dual of Hardy spaces on a bounded domain in  $\mathbb{R}^n$ . *Forum Math.* 6 (1994), no. 1, 65–81.
- [2] Q. Chen, J. Jost, G. Wang and M. Zhu, The boundary value problem for Dirac-harmonic maps. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* 15 (2013), no. 3, 997–1031.
- [3] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order. Second edition. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*, 224. Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [4] P. Laurain and T. Rivière, Angular energy quantization for linear elliptic systems with antisymmetric potentials and applications. *Anal. PDE* 7 (2014), no. 1, 1–41.
- [5] P. L. Lions, Jacobians and Hardy spaces. *International Symposium in honor of Renato Caccioppoli (Naples, 1989)*. *Ricerche Mat.* 40 (1991), suppl., 255–260.
- [6] M. M. Rao and Z. D. Ren, *Theory of Orlicz spaces*. *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*, 146. Marcel Dekker, Inc., New York, 1991.
- [7] T. Rivière, Conservation laws for conformally invariant variational problems. *Invent. Math.* 168 (2007), no. 1, 1–22.
- [8] T. Rivière and M. Struwe, Partial regularity for harmonic maps and related problems. *Comm. Pure Appl. Math.* 61 (2008), no. 4, 451–463.
- [9] B. Sharp, Compensation phenomena in geometric partial differential equations. <http://wrap.warwick.ac.uk/50026/>. thesis, University of Warwick, (2012).
- [10] B. Sharp, Higher integrability for solutions to a system of critical elliptic PDE. *Methods Appl. Anal.* 21 (2014), no. 2, 221–240.
- [11] B. Sharp and P. Topping, Decay estimates for Riviere’s equation, with applications to regularity and compactness. *Trans. Amer. Math. Soc.* 365 (2013), no. 5, 2317–2339.



# イジング模型の確率幾何的表現による 相転移・臨界現象の解析

北海道大学 大学院  
理学院 数学専攻  
半田 悟 (Satoshi HANDA)

## 1 導入

### 1.1 背景

水は  $0^{\circ}\text{C}$  で凍りはじめて氷へと状態を変え、 $100^{\circ}\text{C}$  で沸騰しはじめて水蒸気へと状態を変える。このように私たちの身の回りには、ある温度を境にして、性質の異なった状態（相）に移り変わる、いわゆる「相転移現象」といわれる物理現象が多くみられる。その境となる温度は「臨界点」といわれる。別の相転移現象としては、鉄は常温において、一度磁場をかけた後、磁場を切ると、その磁場の影響を保つ（自発磁化が存在する）が、 $770^{\circ}\text{C}$  という温度を超えると、磁場の影響を保つことができなくなる、という現象が有名である。これは、強磁性相から常磁性相に移り変わるという相転移現象であり、その臨界点はキュリー温度として良く知られている。また、臨界点の周辺では、諸々の物理量が特異的な振る舞いをするという「臨界現象」がみられる。これら臨界点の存在や諸々の臨界現象は、実験的に観測されている。この実験的事実を理論的に説明しようと、統計力学に基づいた数理模型が、それぞれの相転移現象に応じて、考案されてきた。特に、強磁性体の統計力学模型が、1920年にドイツの物理学者ヴィルヘルム・レントンによって考案された。その模型は、レントンの学生であるエルンスト・イジングがその研究を行ったことから、「イジング模型」といわれ、現在にいたるまで、多くの物理学者・数学者が研究を続けている。

### 1.2 目的

イジング模型に関する未解決問題のひとつに、1-arm 指数  $\rho$  と言われる臨界指数の決定の問題がある。定義等の詳細は後で述べることにする。この 1-arm 指数  $\rho$  は、イジング模型においては 1 であるという予想がされているが、1 という上限評価も下限評価も示されていない。今回は、その上限評価について研究することを目的とした。結果としては、1 という上限評価を厳密に得ることはできていない現状であるが、従来のハイパースケリング不等式から得られる上限評価を少しだけ改良することができた。証明には、ランダムカレント表現とよばれる確率幾何的な表現を用いる。以下では、イジング模型をスピン系の言葉で定義し、その後、確率幾何的表現であるランダムカレント表現を紹介し、最後に、1-arm 指数の定義や上限評価についてまとめる。

## 2 イジング模型の定義とランダムカレント表現

### 2.1 イジング模型の定義と基本的な事実

$\Lambda$  上の各格子点  $x$  に、スピン変数と言われる確率変数  $\sigma_x \in \{+1, -1\}$  を定義する。+1 は格子点  $x$  上のスピンの上向き状態にあることを表現し、-1 は下向き状態にあることを表現している (図 1 参照)。格子点上のスピンの組を  $\sigma = \{\sigma_x\}_{x \in \Lambda}$  で表し、スピン配位と呼ぶ。またスピン配位全体の集合を  $S_\Lambda$  と書くことにする。また、 $\mathbb{B}_\Lambda$  は、 $\Lambda$  の二点の組み合わせ全体を表し、その組み合わせをボンドという。このスピン変数たちに確率測度を与えるが、ここでは統計力学で良く用いられるカノニカル分布 (ギブス分布ともいわれる) を用いる。その確率測度を用いて、スピン変数たちの積  $\sigma^A = \prod_{x \in A} \sigma_x$  の期待値を以下の様に定義する。

$$\langle \sigma^A \rangle_{\Lambda; \beta, h}^{BC} = \sum_{\sigma \in S_\Lambda} \sigma^A e^{-\beta H_h(\sigma)} / Z(\beta, h).$$

ここで  $\beta \in \mathbb{R}^+$  は、逆温度を表すパラメータである。規格化定数に相当する分母を  $Z(\beta, h)$  と書き、分配関数と呼ぶ。指数部分にある  $H_h(\sigma)$  は、スピン配位  $\sigma$  の状態におけるエネルギーを表すハミルトニアンといわれる量であり、

$$H_h(\sigma) = - \sum_{\{x, y\} \in \mathbb{B}_\Lambda} J_{x, y} \sigma_x \sigma_y - h \sum_{x \in \Lambda} \sigma_x$$

と定義される。ここで、 $h \in \mathbb{R}$  は、考えている系にかけている外部磁場の大きさを表すパラメータである。 $J_{x, y}$  は相互作用定数といわれる、2つのスピンの間の相互作用の大きさを表す定数である。平行移動不変性 (並進対称性) ( $J_{x, y} = J_{o, y-x}$ ) と強磁性 ( $J_{x, y} \geq 0$ ) を仮定しておく。また、外部磁場がかかっていないときのハミルトニアン  $H_0(\sigma)$  を単に、 $H(\sigma)$  と表すことにする。

次に、境界条件について述べる。ハミルトニアン  $H_h(\sigma)$  を用いて定義されたイジング模型は、自由境界条件をもつといわれる。さらに、 $\Lambda$  の外部境界が +1 のスピンで囲まれている状況を考えたハミルトニアン  $H_h^+(\sigma)$ , つまり、

$$H_h^+(\sigma) = H_h(\sigma) - \sum_{x \in \Lambda, y \notin \Lambda} J_{x, y} \sigma_x$$

を用いたときを、プラス境界条件という。

と定義する。BC というのは、境界条件を表し、free, + でそれぞれ表すことにする。

自発磁化  $m_s(\beta)$  を、

$$m_s(\beta) = \lim_{h \downarrow 0} \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} \left\langle \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{x \in \Lambda} \sigma_x \right\rangle_{\Lambda; \beta, h}^{BC} = \dots = \langle \sigma_o \rangle_{\mathbb{Z}^d; \beta}^+$$

と定める。 $m_s(\beta)$  は、磁場を無くしたあとに磁性がどうなるかを表している。実際には、高温相 (逆温度  $\beta$  が小さいとき) では、この値は 0 であり、低温相 (逆温度  $\beta$  が大きいとき) では、正にもちあがる (図 2 参照)。これは熱揺らぎとスピンの協力現象のバランスによるものと解釈できる。この境目に相当するのが臨界点である。背景でも述べたように、一般に温度などのパラメータを変化させたときに、ある値を境に物質の性質が定積に変化する現象を相転移という。イジング模型において、その性質を表す物理量のひとつが、上記で定義した自発磁化である。イジング模型において臨界点は、その自発磁化を用いて次のように定義される。

$$\beta_c = \inf\{\beta \geq 0 \mid m_s(\beta) > 0\}.$$

$\beta < \beta_c$  を高温相といい,  $\beta > \beta_c$  を低温相という. 定義から高温相では自発磁化は 0 であり, 低温相では正にもちあがる. 特に最近接格子模型においては,  $d \geq 2$  で  $\beta_c$  が 0 でも  $+\infty$  でもない有限な値になることが知られており, 相転移の存在が結論づけられる. また臨界点の直上や近傍では, それらの物理量が冪的な特異性を示す. このような振る舞いを一般的に臨界現象と呼ぶ. その冪指数たちを臨界指数と呼ぶ. 臨界点は考えている物理系の細かい定義によって変わるが, 臨界指数はそういった詳細に依らず, 次元や対称性だけで決まるものと信じられている. そのため, 物理系は臨界指数によって分類できるとされており, イジング模型においても, その臨界指数を求めることは重要であり, 大きな目的となっている. 次の節で 1-arm 指数と呼ばれる臨界指数を与える.

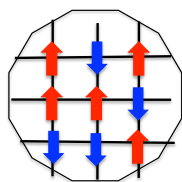


図1 各格子点上のスピン変数の向き

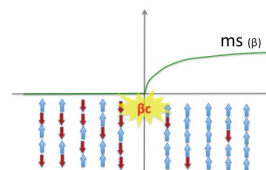


図2 イジング模型の臨界現象

## 2.2 ランダムカレント表現と源泉の移し替え補題の帰結

**Proposition 2.1** (ランダムカレント表現 [3]).

$$\langle \sigma^A \rangle_{\Lambda}^+ = \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^{\mathbb{B}_{\Lambda} \cup \{g\}} \\ \partial \mathbf{n} \cap \Lambda = A}} \frac{w(\mathbf{n})}{\tilde{Z}(\beta)}.$$

まず, この命題に出てくる記号等を説明する. 非負整数の組  $\mathbf{n} = \{n_b\}_{b \in \mathbb{B}_{\Lambda}} \in \mathbb{Z}_+^{\mathbb{B}_{\Lambda}}$  を「カレント配位」といい,  $n_b$  をボンド  $b$  上の「カレント」という.  $\partial \mathbf{n}$  は格子点の集合で, 「源泉」と呼ばれ, 以下のように定義される.

$$\partial \mathbf{n} = \left\{ z \in \Lambda \mid \sum_{b \ni z} n_b \text{ は奇数} \right\}.$$

ここで  $w(\mathbf{n}) = \prod_{b \in \mathbb{B}_{\Lambda}} \frac{(\beta J_b)^{n_b}}{n_b!}$  を重みと呼ぶ.  $g \notin \mathbb{Z}^d$  は, ゴーストサイトと言われる点で, ある意味  $\Lambda$  の外部境界を一点とみた点であり, 内部境界の点は  $g$  との間にもボンドがあり, そこにもカレントがふられている. 上記の命題における右辺の式の表現を「ランダムカレント表現」という. 特に, 次節で定義する 1-arm 指数を定義する際に用いられる  $\langle \sigma_o \rangle_r^+$  という, 「半径  $r$  の  $d$  次元球上の臨界点直上におけるプラス境界条件のもとでの一点関数の期待値」をランダムカレント表現すると次のようになり, また下図3のようになる.

$$\langle \sigma_o \rangle_{\beta_c, r}^+ = \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^{\mathbb{B}_{B_r} \cup \{g\}} \\ \partial \mathbf{n} \cap B_r = \{o\}}} \frac{w(\mathbf{n})}{\tilde{Z}(\beta)}.$$

赤い線は奇数の線で, 青い線は 0 でない偶数の線を表している. 源泉が  $B_r$  の中では  $o$  だけなので, 赤い線で  $o$  と境界に対応する  $g$  がつながらなければならない. このランダムカレント表現の導出は, カノニカル分布における確率の重みに相当する, 指数関数の部分をテイラー展開することによる.

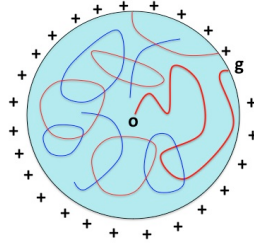


図3  $\langle \sigma_o \rangle_{\beta_c, r}^+$  に対するランダムカレント表現

最後に、ランダムカレント表現において重要な等式を紹介しておく。これは、全体のグラフを部分グラフへと分ける場合の数、という組み合わせ論的な等式として、証明される。

**Proposition 2.2** (源泉の移し替え補題の帰結 [3]).

$$\sum_{\substack{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}_+^{\mathbb{B} \cup \{g\}} \\ \partial \mathbf{m} = A}} \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^{\mathbb{B} \cup \{g\}} |_B \\ \partial \mathbf{n} = \{x, y\}}} w(\mathbf{m})w(\mathbf{n}) = \sum_{\substack{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}_+^{\mathbb{B} \cup \{g\}} \\ \partial \mathbf{m} = A \Delta \{x, y\}}} \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^{\mathbb{B} \cup \{g\}} |_B \\ \partial \mathbf{n} = \emptyset}} w(\mathbf{m})w(\mathbf{n}) \mathbf{1}\{x \xleftrightarrow{\mathbf{m} + \mathbf{n}} y \text{ in } B\}.$$

ここで、 $\mathbb{Z}_+^{\mathbb{B} \cup \{g\}} |_B$  は  $B$  内のボンド上でのみ 0 でない値をとるカレント全体の集合とする。 $\Delta$  は集合の対称差である。事象  $\{x \xleftrightarrow{\mathbf{m} + \mathbf{n}} y \text{ in } B\}$  は、格子点  $x, y$  が  $B$  内のボンドで、 $\mathbf{m} + \mathbf{n}$  のカレント和が 0 でないものを使ってつながるという事象を表している。二つのスピン変数たちの期待値の積を考えると、それらをカレント表現で書くと二つのカレントが表れ、それを式変形する際に役立つ等式である。例えば、以下のようなものがある。

$$\langle (\sigma_o)_r^+ \rangle^2 = \sum_{\substack{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}_+^{\mathbb{B} B_r \cup \{g\}} \\ \partial \mathbf{m} \cap B_r = \{o\}}} \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^{\mathbb{B} B_r \cup \{g\}} \\ \partial \mathbf{n} \cap B_r = \{o\}}} \frac{w(\mathbf{m})w(\mathbf{n})}{\tilde{Z}(\beta)^2} = \sum_{\substack{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}_+^{\mathbb{B} B_r \cup \{g\}} \\ \partial \mathbf{m} \cap B_r = \emptyset}} \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_+^{\mathbb{B} B_r \cup \{g\}} \\ \partial \mathbf{n} \cap B_r = \emptyset}} \frac{w(\mathbf{m})w(\mathbf{n})}{\tilde{Z}(\beta)^2} \mathbf{1}\{o \xleftrightarrow{\mathbf{m} + \mathbf{n}} g\}.$$

### 3 1-arm 指数 $\rho$ の上限評価

#### 3.1 臨界指数の定義

まず、臨界指数  $\rho > 0$  は次のように定義される。

$$\langle \sigma_o \rangle_{\beta_c, r}^+ \asymp r^{-\rho}.$$

ここで、臨界点直上であることに注意する。自発磁化の式をみると、 $r \rightarrow \infty$  に相当するものであることが分る。臨界点直上の自発磁化の値は 0 であり、臨界点で連続であることが知られている。つまり、この臨界指数は、 $r$  が大きくなっていくとき、半径  $r$  の  $d$  次元球上の  $\beta_c$  直上での自発磁化は  $r$  のどのくらいの冪で 0 に減衰するかを表す指数である。

#### 3.2 主定理と予想

**Theorem 3.1.**

$d > 4$  におけるイジング模型に対して、1-arm 指数  $\rho$  の存在と  $\langle \sigma_o \sigma_x \rangle_{\mathbb{Z}^d}^{\text{free}} \asymp (|x| \vee 1)^{2-d}$  を仮定する。このとき、 $\rho \leq \frac{d-3}{2}$  である。特に、 $d = 5$  においては、 $\rho \leq 1$  である。

### Conjecture 3.2.

$d > 4$  におけるイジング模型に対して, 1-arm 指数  $\rho$  の存在と  $\langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{\mathbb{Z}^d}^{\text{free}} \asymp (|x| \vee 1)^{2-d}$  を仮定する. このとき,  $\rho \leq 1$  である.

パーコレーションという別の模型での 1-arm 指数  $\rho_{pc}$  が,  $d > 6$  において 2 であることが厳密に示されており [1], イジング模型でも, 対応する 1-arm 指数を決定しようということが最大の目標となっている. イジング模型では  $d > 4$  において 1 であることが信じられているので, まずは, 上からの評価だけでも導出しようという試みである. ハイパースケーリング不等式 (最後に載せておく) という不等式から,  $d > 4$  では  $\rho \leq \frac{d-2}{2}$  であるということが知られている. ここに,  $d$  として  $4 + \epsilon$  ( $\epsilon > 0$ ) を入れてみると,  $\rho \leq 1 + \frac{\epsilon}{2}$  であることが示されるのだが,  $\epsilon > 0$  であるから, 1 よりも真に大きい可能性が排除できない. 従って, その可能性を排除でき, 1 以下であるということを示すだけでも大きな進歩なのである. これまでに得られた結果としては,  $d > 4$  においては  $\rho \leq \frac{d-3}{2}$  であるという,  $\rho \leq 1$  に比べると非常に弱いものになっているが, 上述のハイパースケーリング不等式から得られる結果よりも,  $\frac{1}{2}$  だけ精度が良くなっている. 一般の  $d > 4$  の場合は, 示すことができなかったので, Conjecture としている. 下からの評価  $\rho \geq 1$  についても, 将来的な課題であり, これが解決されると, 臨界指数  $\rho$  が  $d > 4$  で 1 であることが完全解決されるのである. 証明に関しては, あるスピン変数らの期待値の積を考え, それらをランダムカレント表現し, 源泉の移し替え補題の帰結等を用いて, 不等式評価をし, 再びスピン系の表現に戻すことでなされる.

**Theorem 3.3** (ハイパースケーリング不等式 [2]).

$d$  次元の有限レンジのイジング模型は次の不等式を満たす.

$$d - 2 + \eta \geq 2\rho.$$

$d > 4$  において  $\eta = 0$  であるという事実を用いると,  $\rho \leq \frac{d-2}{2}$  が得られる.

## 参考文献

- [1] G. Kozma and A. Nachmias. Arm exponents in high dimensional percolation. *J. Amer. Math. Soc.* **24** (2011): 375–409.
- [2] H. Tasaki. Hyperscaling Inequalities for Percolation. *Commun. Math. Phys.* **113** (1987): 49–65.
- [3] 田崎 晴明, 原 隆. **相転移と臨界現象の数理**. 共立出版株式会社 (2015)

# Transmuted Logistic II distribution

Glauber Márcio Silveira Pereira<sup>1</sup>

Carlos Alberto Ribeiro Diniz<sup>1</sup>

## Abstract

A generalization of the generalized inverse Logistic II distribution so-called transmuted generalized inverse Logistic II distribution is proposed and studied. The studies we have done: calculate the first and second time, set the survival function, risk function and a study of statistical order.

**Keywords:** transmuted, logistic II distribution, heavy-tailed distribution, asymmetry parameter.

## Introduction

The models are an important tool for estimating the behavior of some population. However, in many cases, they show some problems of adjustment with the data. The Logistics II model describes a similar curve with normal, symmetrical model, but with a correction in tails. It has interesting applications in modeling chronic obstructive respiratory disease, geological issues, Hemolytic Uremic Syndrome Data (HUS), physical-chemical phenomena, psychological issues, the survival time of patients diagnosed with leukemia, and weight gain data. [2] In this paper we built a model transmuted Logistics II. In order to improve the model data that already known to have heavy tails characteristic of more asymmetrically. A transmuted a transformation model is made in a model in order to generalize it. This model has a parameter more, the asymmetry parameter.

## Logistic II Model

The probability density function (pdf) of the logistic II distribution is given by:

$$f(x; \mu, \delta) = \frac{\exp\left\{-\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)\right\}}{\delta \left(1 + \exp\left\{-\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)\right\}\right)^2} \quad (1)$$

at where  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  e  $\delta \in \mathbb{R}^+$ .

We have the cdf of logistic II distribution:

$$F(x; \mu, \delta) = \int_{-\infty}^x \frac{\exp\left\{-\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)\right\}}{\delta \left(1 + \exp\left\{-\left(\frac{t-\mu}{\delta}\right)\right\}\right)^2} dt = \frac{1}{1 + \exp\left\{-\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)\right\}} \quad (2)$$

---

<sup>1</sup>Federal University of São Carlos (UFSCar). e-mail: [glauber@gmail.com](mailto:glauber@gmail.com)

## Transmuted Model

This section explains how the transmuted model is constructed of any existing model, and  $F_1$  a model of the distribution function known and  $f_2$  to the new model. The new model is defined by the following transformation: [1]

$$F_2(x) = (1 + \lambda)F_1(x) - \lambda F_1(x)^2 \quad (3)$$

which on differentiation yields,

$$f_2(x) = f_1(x)[(1 + \lambda) - 2\lambda F_1(x)] \quad (4)$$

for  $\lambda \in [-1, 1]$  where  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  are the pdfs of  $F_1(x)$  and  $F_2(x)$ .

## Transmuted Logistic II Model

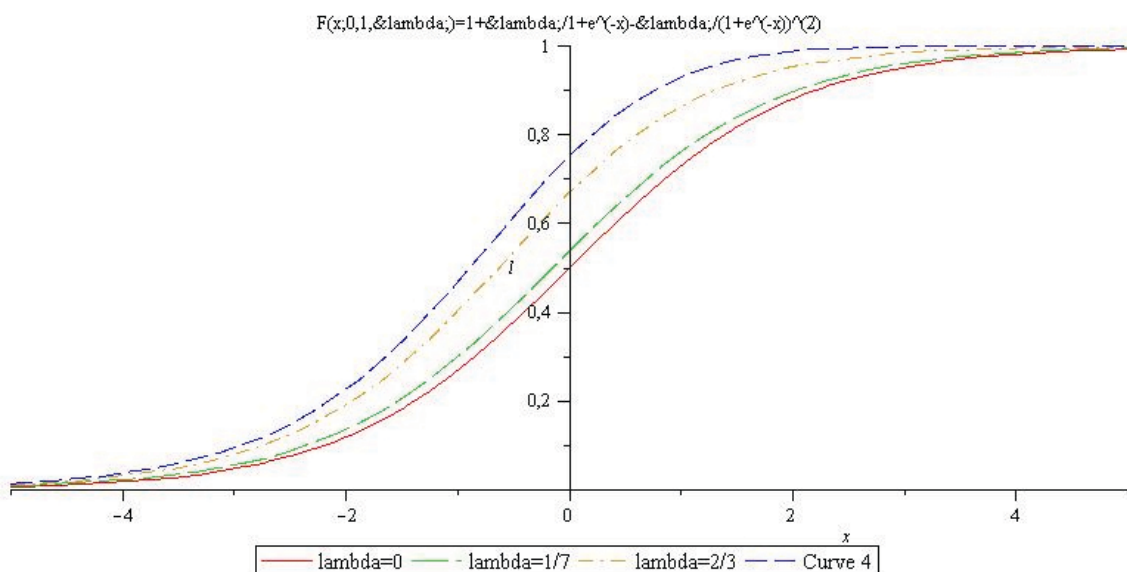
In this section we use the results shown in the previous section in the logistic II model and thus create a new model. Applying equation 2 the equation 4 define the density function:

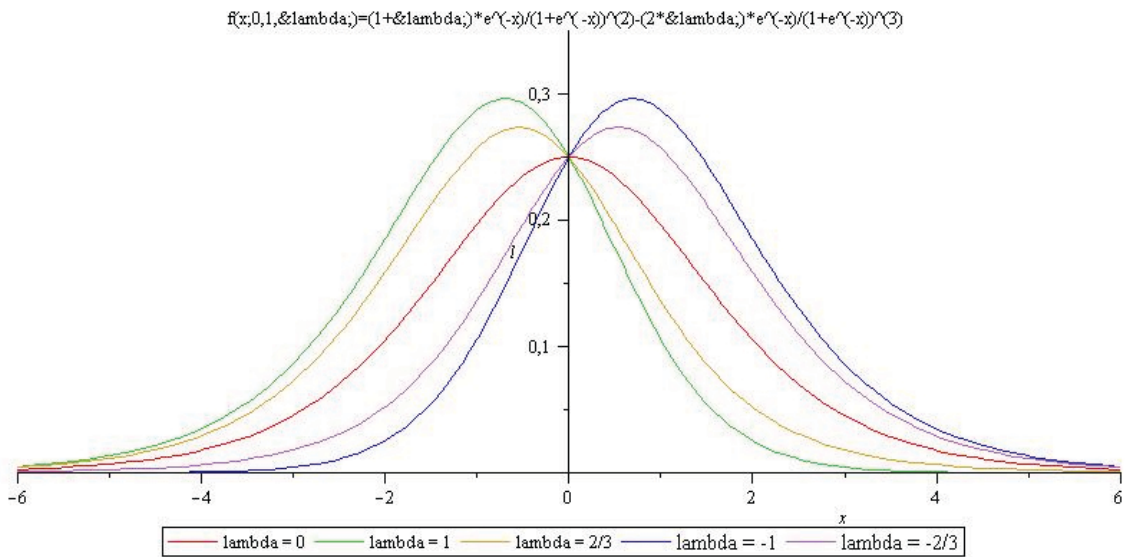
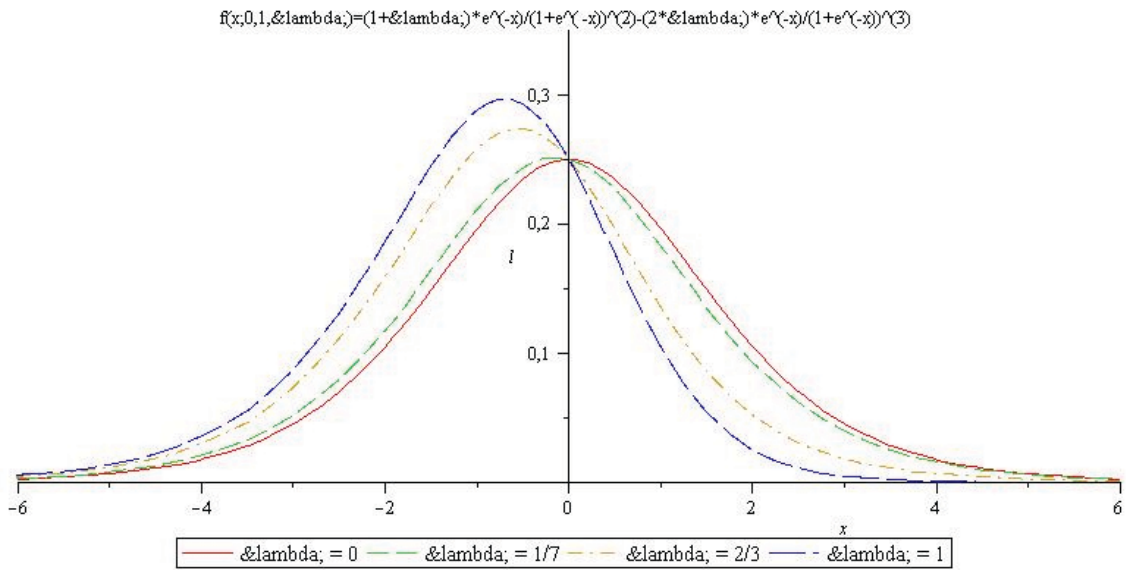
$$F_{TL2}(x; \mu, \delta, \lambda) = \frac{1}{1 + \exp\left\{-\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)\right\}} \left[ (1 + \lambda) - \frac{\lambda}{1 + \exp\left\{-\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)\right\}} \right]$$

Also we define the probability density function of the logistic model transmuted II:

$$f_{TL2}(x; \mu, \delta, \lambda) = \frac{\exp\left\{-\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)\right\}}{\delta \left(1 + \exp\left\{-\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)\right\}\right)^2} \left\{ (1 + \lambda) - \frac{2\lambda}{1 + \exp\left\{-\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)\right\}} \right\}$$

for  $\lambda \in [-1, 1]$ .





The first and second figures above are some examples of distribution functions and pdf for some values of  $\lambda$ . The third figure shows the asymmetry in cases where comparing two constants and their respective opposite to zero and constant, if there is symmetry in the model.

Regardless of the values  $\mu$  and  $\delta$  we can standardize this model as a random variable  $Z = \frac{X - \mu}{\delta} \sim TLog2(Z)$  to facilitate the bills. Thus we have the distribution function:

$$F_{TL2}(z) = \frac{1}{1 + \exp\{-z\}} \left[ (1 + \lambda) - \frac{\lambda}{1 + \exp\{-z\}} \right]$$

and

$$f_{TL2}(z) = \frac{\exp\{-z\}}{(1 + \exp\{-z\})^2} \left\{ (1 + \lambda) - \frac{2\lambda}{1 + \exp\{-z\}} \right\}$$



## References

1. SEBER G A F and WILD C J , *Nonlinear regression*, John wiley & Sons, New York, 768, 1989
2. SHAW W e BUCKLEY I, *The alchemy of probability distributions: beyond Gram-Charlier expansions and a skew- kurtotic- normal distribution from a rank transmutation map*, *First IMA Computational Finance Conference* , 2007
3. NADARAJAH S e KOTZ S , *A GENERALIZED LOGISTIC DISTRIBUTION*, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2005:19, 3169 - 3174, 2005

# 正則曲面上のフロンタルと接触可展面

(Osculating developable surfaces of regular surfaces along frontals)

本多 俊一

HONDA Shun'ichi

北海道大学大学院理学院数学専攻

## 1 概要

正則曲面上の正則曲線はダルブー枠 (Darboux frame) を用いて, その性質が広く知られている. しかし, 曲線が特異点を持つ場合はこの限りではない. 本講演では, ユークリッド平面  $\mathbb{R}^2$  上のフロンタル ([2]) を一般化した正則曲面  $M$  上のフロンタルを定義し, [3] における正則曲面  $M$  上の正則曲線に沿った接触可展面の一般化として, 正則曲面  $M$  上のフロンタルに沿った接触可展面を定義し, その性質を紹介する. その際, 「[4] における枠付き曲線」及び「[5] における球面ルジャンドル曲線」の理論を応用する. なお, 本講演は泉屋周一氏 (北海道大学), 高橋雅朋氏 (室蘭工業大学) との共同研究に基づく.

## 2 正則曲面上のフロンタル

$I$  を開区間または  $\mathbb{R}$ ,  $U$  を開領域または  $\mathbb{R}^2$  とする. 埋め込み  $\mathbf{X} : U \rightarrow M, (u, v) \mapsto \mathbf{X}(u, v)$  に対して,  $M = \mathbf{X}(U)$  を正則曲面と呼ぶ. さらに, 正則とは限らない平面曲線  $\bar{\gamma} : I \rightarrow U, t \mapsto (u(t), v(t))$  に対し, 空間曲線

$$\gamma = \mathbf{X} \circ \bar{\gamma} : I \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$$

を考える. 正則曲面の単位法線ベクトルを  $\gamma$  上に制限したものを

$$\mathbf{n}_\gamma(t) = \frac{\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v}{|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v|} \circ \bar{\gamma}(t)$$

とする. また, 単位接束  $T_1M$  を

$$T_1M = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in M \times T_{\mathbf{x}}M \mid |\mathbf{y}| = 1\} \subset M \times S^2$$

とする.

**定義 2.1 (単位接束  $T_1M$  上のルジャンドル曲線)** 写像  $(\gamma, \nu) : I \rightarrow T_1M$  が任意の  $t \in I$  に対して  $(\gamma, \nu)^*(t)\theta = 0$  を満たすとき,  $(\gamma, \nu)$  を正則曲面  $M$  上のルジャンドル曲線と呼ぶ. ここで,  $\theta$  は単位接束  $T_1M$  上の標準接触 1 次形式である. 上記の条件は任意の  $t \in I$  に対して  $\dot{\gamma}(t) \cdot \nu(t) = 0$  を満たすことと同値である. さらに,  $(\gamma, \nu)$  がはめ込みのとき  $(\gamma, \nu)$  を正則曲面  $M$  上のルジャンドルはめ込みと呼ぶ.

**定義 2.2 (正則曲面  $M$  上のフロントル)** 正則曲面  $M$  上の曲線  $\gamma : I \rightarrow M$  に対して, ある  $\nu : I \rightarrow S^2$  が存在して  $(\gamma, \nu) : I \rightarrow T_1M \subset M \times S^2$  がルジャンドル曲線であるとき,  $\gamma$  を正則曲面  $M$  上のフロントルと呼ぶ. さらに,  $(\gamma, \nu)$  がルジャンドルはめ込みのとき  $\gamma$  を正則曲面  $M$  上のフロントと呼ぶ.

**注意 2.3**  $(\gamma, \nu) : I \rightarrow T_1M \subset M \times S^2$  がルジャンドル曲線であることと,  $(\gamma, \mathbf{n}_\gamma, \nu) : I \rightarrow M \times S^2 \times S^2$  が枠付き曲線 (付録A, [4]) であることは同値である. 以下では,  $(\gamma, \mathbf{n}_\gamma, \nu)$  が枠付き曲線であるとして議論を展開する.

### 3 接触可展面

枠付き曲線  $(\gamma, \mathbf{n}_\gamma, \nu) : I \rightarrow M \times S^2 \times S^2$  の曲率を  $(\ell, m, n, \alpha)$  (付録A, [4]), 球面ルジャンドル曲線  $(\mathbf{n}_\gamma, \nu_n) : I \rightarrow S^2 \times S^2$  の曲率を  $(m_n, n_n)$  とする (付録B, [5]).

このとき,  $\boldsymbol{\mu}(t) := \mathbf{n}_\gamma(t) \times \nu(t)$  及び  $\boldsymbol{\mu}_n(t) := \mathbf{n}_\gamma(t) \times \nu_n(t)$  とすると, 枠付き曲線  $(\gamma, \mathbf{n}_\gamma, \nu)$  の枠  $\{\mathbf{n}_\gamma(t), \nu(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$  と球面ルジャンドル曲線  $(\mathbf{n}_\gamma, \nu_n)$  の枠  $\{\mathbf{n}_\gamma(t), \nu_n(t), \boldsymbol{\mu}_n(t)\}$  に対して, 滑らかな関数  $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$  が存在して以下の関係を満たす:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{n}_\gamma(t) \\ \nu_n(t) \\ \boldsymbol{\mu}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) \\ 0 & \sin \theta(t) & \cos \theta(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_\gamma(t) \\ \nu(t) \\ \boldsymbol{\mu}(t) \end{pmatrix}.$$

**定義 3.1 (接触可展面)** 正則曲面  $M$  上のフロントル  $\gamma$  に沿った (Osculating developable surface) を  $OD_\gamma : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$OD_\gamma(t, \lambda) = \gamma(t) + \lambda \nu_n(t)$$

とする.

定義より  $OD_\gamma$  は線織面であるが,  $\det(\dot{\gamma}(t), \nu_n(t), \dot{\nu}_n(t)) = 0$  より,  $OD_\gamma$  は可展面である (付録C). 一方,  $(t_0, 0)$  が  $OD_\gamma$  の正則点であるとする. このとき,  $(t_0, 0)$  において  $OD_\gamma$  の法線ベクトルは  $\mathbf{X}$  の法線ベクトル  $\mathbf{n}_\gamma$  と同じ方向を持つ. これらの性質より,  $OD_\gamma$  を正則曲面上のフロントルに沿った接触可展面と呼ぶ.

以下で  $OD_\gamma$  と直交射影 (中心射影) (付録D) との関係を与える:

**定理 3.2** 上記の設定の下,  $\mathbf{n}_\gamma$  の正則点が稠密であるとする. このとき, 以下が成り立つ:

(A) 以下は同値である:

- (1)  $OD_\gamma$  は柱面である,
- (2)  $n_n(t) \equiv 0$ ,
- (3)  $\gamma$  は直交射影に関する輪郭母線である.

(B)  $n_n(t) \neq 0$  とする. このとき, 以下は同値である:

- (4)  $OD_\gamma$  は錐面である,
- (5)  $\alpha(t) \sin \theta(t) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\alpha(t) \cos \theta(t)}{n_n(t)} \right) \equiv 0$ ,
- (6)  $\gamma$  は中心射影に関する輪郭母線である.

**例 3.3** 平面曲線  $\bar{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t^3, -t^2)$  と正則曲面  $\mathbf{X} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto (u, v, (u^2 + v^3)^2)$  の合成  $\gamma = \mathbf{X} \circ \bar{\gamma}(t) = (t^3, -t^2, 0)$  を考える. このとき,  $\gamma$  は  $M = \mathbf{X}(\mathbb{R}^2)$  上のフロントルである.

さらに接触可展面は  $OD_\gamma(t, \lambda) = (t^3, -t^2 + \lambda, 0)$  で与えられる.  $n_n(t) \equiv 0$  より,  $OD_\gamma(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$  は柱面である (図1).

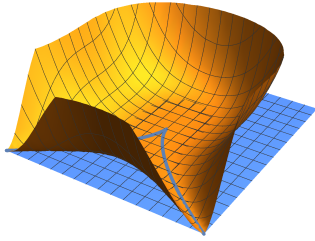


図1

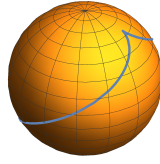


図2

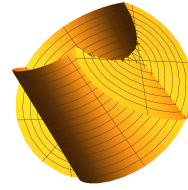


図3

定理 3.4  $M \subset \mathbb{R}^3$  を可展面とする. このとき,  $M$  の正則部分上の曲線  $\gamma$  に対して, ある  $\nu_n : I \rightarrow S^2$  が存在して,  $(\mathbf{n}_\gamma, \nu_n) : I \rightarrow S^2 \times S^2$  は球面ルジャンドル曲線である. さらに,  $\mathbf{n}_\gamma$  の正則点が稠密なとき,  $OD_\gamma(I \times \mathbb{R}) \subset M$  が成り立つ.

非柱面的な  $OD_\gamma$  の特異点は以下で特徴付けられる:

定理 3.5 枠付き曲線  $(\gamma, \mathbf{n}_\gamma, \nu) : I \rightarrow M \times S^2 \times S^2$  の曲率を  $(\ell, m, n, \alpha)$ , 球面ルジャンドル曲線  $(\mathbf{n}_\gamma, \nu_n) : I \rightarrow S^2 \times S^2$  の曲率を  $(m_n, n_n)$  とする. このとき, 非柱面的な  $OD_\gamma$  に対して, 以下が成り立つ:

(1)  $OD_\gamma(t_0, \lambda_0)$  が正則点であるための必要十分条件は,

$$\alpha(t_0) \cos \theta(t_0) + \lambda_0 n_n(t_0) \neq 0$$

が成り立つことである.

(A)  $(t_0, \lambda_0)$  を  $m_n(t_0) \neq 0$  を満たす  $OD_\gamma$  の特異点とする. このとき, 以下が成り立つ:

(2)  $OD_\gamma$  が  $(t_0, \lambda_0)$  においてカスプ状曲面  $\mathbf{c}$  に局所微分同相であるための必要十分条件は,

$$\alpha(t_0) \sin \theta(t_0) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\alpha(t_0) \cos \theta(t_0)}{n_n(t_0)} \right) \neq 0$$

が成り立つことである.

(3)  $OD_\gamma$  が  $(t_0, \lambda_0)$  においてツバメの尾  $\mathbf{sw}$  に局所微分同相であるための必要十分条件は,

$$\alpha(t_0) \sin \theta(t_0) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\alpha(t_0) \cos \theta(t_0)}{n_n(t_0)} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \alpha(t_0) \sin \theta(t_0) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\alpha(t_0) \cos \theta(t_0)}{n_n(t_0)} \right) \right) \neq 0$$

が成り立つことである.

(B)  $(t_0, \lambda_0)$  を  $m_n(t_0) = 0$  を満たす  $OD_\gamma$  の特異点とする. このとき, 以下が成り立つ:

(4)  $OD_\gamma$  が  $(t_0, \lambda_0)$  においてカスプ状交叉帽子  $\mathbf{cc}$  に局所微分同相であるための必要十分条件は,  $\dot{m}_n(t_0) \neq 0$  かつ

$$\alpha(t_0) \sin \theta(t_0) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\alpha(t_0) \cos \theta(t_0)}{n_n(t_0)} \right) \neq 0$$

が成り立つことである.

ここで, カスプ状曲面  $\mathbf{c}$  は  $\mathbf{c}(u, v) = (u, v^2, v^3)$ , ツバメの尾  $\mathbf{sw}$  は  $\mathbf{sw}(u, v) = (3u^4 + u^2v, 4u^3 + 2uv, v)$ , カスプ状交叉帽子  $\mathbf{cc}$  は  $\mathbf{cc}(u, v) = (u, uv^3, v^2)$  である.

例 3.6 空間曲線  $\gamma : [0, 2\pi) \rightarrow S^2$ ,

$$\gamma(t) = \left( \frac{3}{4} \cos t - \frac{1}{4} \cos 3t, \frac{3}{4} \sin t - \frac{1}{4} \sin 3t, \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t \right)$$

は  $S^2$  上のフロントルである (図 2). 実際,  $\gamma$  の双対  $\nu : [0, 2\pi) \rightarrow S^2$  は

$$\nu(t) = \left( \frac{3}{4} \sin t + \frac{1}{4} \sin 3t, -\frac{3}{4} \cos t - \frac{1}{4} \cos 3t, -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin t \right)$$

である. このとき, 接触可展面  $OD_\gamma$  は  $\lambda = \tan t$  ( $t \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}$ ) でカスプ状曲面,  $(0, 0), (\pi, 0)$  でカスプ状交叉帽子である (図 3).

## 付録

### 付録 A 枠付き曲線 ([4])

$I$  を区間または  $\mathbb{R}$  とする.

定義 3.7 (枠付き曲線) 写像  $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$  が次の 3 つの条件を満たすとき枠付き曲線 (framed curve) と呼ぶ:

$$(1) \dot{\gamma}(t) \cdot \nu_1(t) = 0, (2) \dot{\gamma}(t) \cdot \nu_2(t) = 0, (3) \nu_1(t) \cdot \nu_2(t) = 0.$$

特に,  $(\dot{\gamma}, \dot{\nu}_1, \dot{\nu}_2) \neq (0, 0, 0)$  を満たすとき,  $(\gamma, \nu_1, \nu_2)$  を枠付きはめ込み (framed immersion) と呼ぶ.

枠付き曲線  $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$  に対して,  $\boldsymbol{\mu}(t) := \nu_1(t) \times \nu_2(t)$  とすると,  $\{\nu_1(t), \nu_2(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$  は  $\gamma(t)$  に沿う正の枠で,

$$\begin{pmatrix} \dot{\nu}_1(t) \\ \dot{\nu}_2(t) \\ \dot{\boldsymbol{\mu}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \ell(t) & m(t) \\ -\ell(t) & 0 & n(t) \\ -m(t) & -n(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ \boldsymbol{\mu}(t) \end{pmatrix} \quad \dot{\gamma}(t) = \alpha(t)\boldsymbol{\mu}(t)$$

を満たす. このとき,

$$\ell(t) = \dot{\nu}_1(t) \cdot \nu_2(t), \quad m(t) = \dot{\nu}_1(t) \cdot \boldsymbol{\mu}(t), \quad n(t) = \dot{\nu}_2(t) \cdot \boldsymbol{\mu}(t), \quad \alpha(t) = \dot{\gamma}(t) \cdot \boldsymbol{\mu}(t)$$

である. この関数の組  $(\ell, m, n, \alpha) : I \rightarrow \mathbb{R}^4$  を枠付き曲線の曲率と呼ぶ. 枠付き曲線の曲率は, パラメータのとり方に依存する.

2 つの枠付き曲線  $(\gamma, \nu_1, \nu_2), (\tilde{\gamma}, \tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2) : I \rightarrow \mathbb{R} \times S^2 \times S^2$  に対して, ある回転  $\mathbf{X} \in SO(3)$  及び平行移動  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  が存在して,

$$(a) \tilde{\gamma}(t) = \mathbf{X}(\gamma(t)) + \mathbf{x}, \quad (b) \tilde{\nu}_1(t) = \mathbf{X}(\nu_1(t)), \quad (c) \tilde{\nu}_2(t) = \mathbf{X}(\nu_2(t))$$

を満たすとき, 2 つの枠付き曲線  $(\gamma, \nu_1, \nu_2)$  と  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2)$  は合同であると言う.

定理 3.8 (枠付き曲線の存在) [4]  $(\ell, m, n, \alpha) : I \rightarrow \mathbb{R}^4$  を滑らかな写像とする. このとき, 枠付き曲線  $(\gamma, \nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$  で,  $(\ell, m, n, \alpha)$  を曲率とするものが存在する.

定理 3.9 (枠付き曲線の一意性) 2 つの枠付き曲線  $(\gamma, \nu_1, \nu_2), (\tilde{\gamma}, \tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^2$  に対して, これらの曲率が一致するとする. このとき, 2 つの枠付き曲線  $(\gamma, \nu_1, \nu_2)$  と  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2)$  は合同である.

## 付録B 球面ルジャンドル曲線 ([5])

定義 3.10 (球面ルジャンドル曲線) 写像  $(\gamma, \nu) : I \rightarrow S^2 \times S^2$  が次の2つの条件を満たすとき球面ルジャンドル曲線 (spherical Legendre curve) と呼ぶ:

$$(1) \gamma(t) \cdot \nu(t) = 0, \quad (2) \dot{\gamma}(t) \cdot \nu = 0.$$

特に,  $(\dot{\gamma}, \dot{\nu}) \neq (0, 0)$  を満たすとき,  $(\gamma, \nu)$  を球面ルジャンドルはめ込み (spherical Legendre immersion) と呼ぶ.

球面ルジャンドル曲線  $(\gamma, \nu) : I \rightarrow S^2 \times S^2$  に対して,  $\boldsymbol{\mu}(t) := \gamma(t) \times \nu(t)$  とすると,  $\{\gamma(t), \nu(t), \boldsymbol{\mu}(t)\}$  は  $\gamma(t)$  に沿う正の枠で,

$$\begin{pmatrix} \dot{\gamma}(t) \\ \dot{\nu}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\mu}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m(t) \\ 0 & 0 & n(t) \\ -m(t) & -n(t) & 0 \end{pmatrix}$$

を満たす. このとき,

$$m(t) = \dot{\gamma}(t) \cdot \boldsymbol{\mu}(t), \quad n(t) = \dot{\nu}(t) \cdot \boldsymbol{\mu}(t)$$

である. この関数の組  $(m, n) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  を球面ルジャンドル曲線の曲率と呼ぶ. 球面ルジャンドル曲線の曲率は, パラメータの取り方に依存する.

2つの球面ルジャンドル曲線  $(\gamma, \nu), (\tilde{\gamma}, \tilde{\nu}) : I \rightarrow S^2 \times S^2$  に対して, ある回転  $\mathbf{X} \in SO(3)$  が存在して,

$$(a) \tilde{\gamma}(t) = A(\gamma(t)), \quad (b) \tilde{\nu}(t) = A(\nu(t))$$

を満たすとき, 2つの球面ルジャンドル曲線  $(\gamma, \nu)$  と  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\nu})$  は合同であると言う.

定理 3.11 (球面ルジャンドル曲線の存在)  $(m, n) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  を滑らかな写像とする. このとき, 球面ルジャンドル曲線  $(\gamma, \nu) : I \rightarrow S^2 \times S^2$  で,  $(m, n)$  を曲率とするものが存在する.

定理 3.12 (球面ルジャンドル曲線) 2つの球面ルジャンドル曲線  $(\gamma, \nu), (\tilde{\gamma}, \tilde{\nu}) : I \rightarrow S^2 \times S^2$  に対して, これらの曲率が一致するとする. このとき, 2つの球面ルジャンドル曲線  $(\gamma, \nu)$  と  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\nu})$  は合同である.

## 付録C 線織面と可展面

空間曲線  $\gamma(t)$  とそのパラメータ  $t$  に依存する零でないベクトル  $\xi(t)$  およびパラメータ  $\lambda$  によって

$$F(t, \lambda) = \gamma(t) + \lambda\xi(t)$$

と表される曲面を線織面 (ruled surface) と呼ぶ.  $\gamma$  を導線 (base curve),  $\xi$  を準曲線 (director curve) と呼び,  $t$  を固定するごとに得られる直線  $\gamma(t) + \xi(t)$  を母線 (ruling) と呼ぶ. ガウス曲率が常に 0 であるような線織面を可展面 (developable surface) と呼ぶ. 線織面  $F(t, \lambda)$  が可展面であることの必要十分条件は, 任意の  $t \in I$  に対して,

$$\det(\dot{\gamma}, \xi(t), \dot{\xi}(t)) = 0$$

が成り立つことである．導線  $\xi$  を正規化し， $\tilde{\xi}(t) = \xi(t)/|\xi(t)|$  とする． $\dot{\tilde{\xi}}(t) \equiv 0$  であるとき， $F(t, \lambda)$  は柱面 (cylinder) であると言う．また， $\dot{\tilde{\xi}}(t) \neq 0$  であるとき， $F(t, \lambda)$  は非柱面的 (non-cylindrical) であるという． $F(t, \lambda)$  が非柱面的であるとき，

$$\gamma(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \cdot \tilde{\xi}(t)}{\tilde{\xi}(t) \cdot \dot{\tilde{\xi}}(t)} \tilde{\xi}(t)$$

で表示される曲線を締括線 (striction curve) と呼び．線織面の特異点は締括線上に現れることが知られている．締括線が定点であるとき， $F(t, \lambda)$  は錐面 (cone) であると言う．

## 付録D 輪郭母線

$M \subset \mathbb{R}^3$  を正則曲面， $\mathbf{n}$  を  $M$  上の単位法線ベクトル場とする．単位ベクトル  $\mathbf{k} \in S^2$  に対して， $\mathbf{k}$  方向への直交射影の輪郭母線は

$$\{p \in M \mid \mathbf{n}(p) \cdot \mathbf{k} = 0\}$$

で与えられる．これは  $\mathbf{k}$  方向への直交射影の特異集合である．

一方，定点  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$  に対して， $\mathbf{c}$  に対する中心射影の輪郭母線は

$$\{p \in M \mid (p - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{n}(p) = 0\}$$

で与えられる．これは  $\mathbf{c}$  に対する中心射影の特異集合である．輪郭母線概念は映像理論において重要な役割を担っている ([1]).

## 参考文献

- [1] R. Cipolla, P. J. Giblin, Visual Motion of Curves and Surfaces, Cambridge Univ. Press (2000).
- [2] T. Fukunaga and M. Takahashi, Existence and uniqueness for Legendre curves, Journal of Geometry Vol.10 (2014) 92-107.
- [3] S. Izumiya and S. Otani, Flat approximations of surfaces along curves, Demonstratio Mathematica XLVIII (2) (2015) 217-241.
- [4] S. Honda and M. Takahashi, Framed curves in the Euclidean space, to appear in Advances in Geometry (2015).
- [5] M. Takahashi, Legendre curves in the unit spherical bundle over the unit sphere and evolutes, to appear in Contemporary Mathematics (2016).

# ルート系のエルハルト多項式とその零点

山田 祐見 (Yumi Yamada)

山形大学 地域教育文化学部 地域教育文化学科

## 1 導入

定義 1.1 (級数展開)

$$\begin{aligned}\Sigma &= \Sigma(\Gamma, S; z) \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} z^{l_S(\gamma)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sigma(k) z^k \\ &\in \mathbb{Z}[[z]]\end{aligned}$$

ただし,  $\sigma(k)$  は  $\{\gamma \in \Gamma \mid l_S(\gamma) = k\}$  を満たす元の数を表す.

定義 1.2 (基本的な4つのルート格子  $A_n, B_n, C_n, D_n$ )

$$\begin{aligned}A_n &= \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0 \right\} \\ &\supset R(A_n) = \{\pm(e_i - e_j) \mid 1 \leq i < j \leq n+1\} \\ B_n &= \mathbb{Z}^n \\ &\supset R(B_n) = \{\pm e_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup R(D_n) \\ C_n &= \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i \equiv 0 \pmod{2} \right\} \\ &\supset R(C_n) = \{\pm 2e_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup R(D_n) \\ D_n &= \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i \equiv 0 \pmod{2} \right\} \\ &\supset R(D_n) = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}\end{aligned}$$



定理 1.1 (上記の組  $(\Gamma, R)$  の級数展開)

$$\begin{aligned}\Sigma(A_n, R; z) &= (1-z)^{-n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 z^i \\ \Sigma(B_n, R; z) &= (1-z)^{-n} \left( \sum_{i=0}^n \binom{2n+1}{2i} z^i - 2nz(1+z)^{n-1} \right) \\ \Sigma(C_n, R; z) &= (1-z)^{-n} \sum_{i=0}^n \binom{2n}{2i} z^i \\ \Sigma(D_n, R; z) &= (1-z)^{-n} \left( \sum_{i=0}^n \binom{2n}{2i} z^i - 2nz(1+z)^{n-2} \right)\end{aligned}$$

## 2 エルハルト多項式

$K$  を有限次元の実ベクトル空間  $V$  の格子  $\Gamma$  における凸多面体とする。 $K^\circ$  を  $K$  の内部の格子点の数,  $\partial K$  を  $K$  の境界の点の数とすると,  $k \geq 1$  に対して,

$$\begin{aligned}kK \cap \Gamma \text{ の元の数} & \text{を } E_K(k) \\ kK^\circ \cap \Gamma \text{ の元の数} & \text{を } E_{K^\circ}(k) \\ \partial(kK) \cap \Gamma \text{ の元の数} & \text{を } E_{\partial K}(k)\end{aligned}$$

と表し, これを用いてエルハルト級数を以下のように定義する.

定義 2.1 (エルハルト級数)

$$\begin{aligned}\varepsilon_K(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} E_K(k) z^k = \frac{P_K(z)}{(1-z)^{d+1}} \\ \varepsilon_{K^\circ}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} E_{K^\circ}(k) z^k = \frac{P_{K^\circ}(z)}{(1-z)^{d+1}} \\ \varepsilon_{\partial K}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} E_{\partial K}(k) z^k = \varepsilon_K(z) - \varepsilon_{K^\circ}(z)\end{aligned}$$

次に,  $K$  が上記のような次元  $d$  の整凸多面体としたときの特徴をまとめる.

**定理 2.1** (エルハルト)

(i)  $E_K(k)$  は次数が  $d$  である  $k$  に関する多項式であり,  $E_K(0) = 1$

(ii)  $k \geq 1$  に対して,

$$E_K(-k) = (-1)^d E_{K^\circ}(k)$$

(iii) 同様に,  $k \geq 1$  に対して,

$$E_{K^\partial}(-k) = (-1)^{d+1} E_{K^\partial}^\circ(k)$$

(iv)  $K$  がラミネーターならば,  $P_K\left(\frac{1}{z}\right) = z^d P_K(z)$

(v) 多項式  $E_K(k)$  の主係数は  $Vol_{ret}(K)$

(vi) 多項式  $E_K(k)$  の  $k^{d-1}$  の係数の 2 倍は  $Vol_{ret}(\partial K)$

ただし,  $Vol(K) = \sqrt{disk(\Gamma)} Vol_{ret}(K)$ .

級数展開とエルハルト級数の間には

$$\frac{\Sigma(\gamma, R; z)}{1-z} = \varepsilon_K(z)$$

という関係があり, それぞれの部分集合  $R$  を凸に包むことによって現れる  
 整凸多面体に関するエルハルト多項式を以下のように導くことができる.

**定理 2.2** (エルハルト多項式)

$$A_n \text{ の場合 : } E_K(k) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 \binom{k-i+n}{n}$$

$$B_n \text{ の場合 : } E_K(k) = \binom{k+n}{n} + \sum_{i=1}^n \left\{ \binom{2n+1}{2i} - 2n \binom{n-1}{i-1} \right\} \binom{k-i+n}{n}$$

$$C_n \text{ の場合 : } E_K(k) = \sum_{i=0}^n \binom{2n}{2i} \binom{k-i+n}{n}$$

$$D_n \text{ の場合 : } E_K(k) = \binom{k+n}{n} + \sum_{i=1}^n \left\{ \binom{2n}{2i} - 2n \binom{n-2}{i-1} \right\} \binom{k-i+n}{n}$$

また, 4つのルート格子  $A_n, B_n, C_n, D_n$  における  $Vol(K)$  と  $Vol_{ret}(\partial K)$  は以下のように定まる.

命題 2.1 ( $Vol(K), Vol_{ret}(K)$ )

$$A_n \text{ の場合 : } Vol(K) = \frac{\sqrt{n+1}(2n)!}{(n!)^3} = \frac{\sqrt{n+1}}{n!} \binom{2n}{n}$$

$$Vol_{ret}(\partial K) = \frac{1}{(n-1)!} \binom{2n}{n}$$

$$B_n \text{ の場合 : } Vol(K) = \frac{2^n(2^n - n)}{n!}$$

$$Vol_{ret}(\partial K) = \frac{2^{2n-1}}{(n-1)!}$$

$$C_n \text{ の場合 : } Vol(K) = \frac{4^n}{n!}$$

$$Vol_{ret}(\partial K) = \frac{2^{2n-1}}{(n-1)!}$$

$$D_n \text{ の場合 : } Vol(K) = \frac{2^n(2^n - n)}{n!}$$

$$Vol_{ret}(\partial K) = \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} (2^n - n)$$

特に,  $A_n, C_n, D_n$  のとき

$$\frac{Vol_{ret}(\partial K)}{Vol_{ret}(K)} = n$$

同様に  $B_n$  に対して,

$$\frac{Vol_{ret}(\partial K(B_n))}{Vol_{ret}(K(B_n))} < n (n \geq 3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{Vol_{ret}(\partial K(B_n))}{Vol_{ret}(K(B_n))} = \frac{1}{2}$$

である.

### 3 様々な特性

上記の4つのルート系のエルハルト多項式に関して、もし何かしらの特徴があるのならば、 $n$ 次元におけるエルハルト多項式が予測できるのではないかと考え、実際に上記の4つのルート系の級数展開、エルハルト級数、そしてエルハルト多項式をプログラムを使って展開してみた。すると、いくつかの特性を見つけることができた。

### 定理 3.1

$A_n, C_n$  型ルート系において, それぞれの  $R$  を凸に包んだものを  $K$  としたとき, そのエルハルト多項式の根の実部はすべて  $-\frac{1}{2}$  になる.

### 定理 3.2

4つのルート系に対してエルハルト級数と級数展開の各係数を素数で割っていくと, 分数と整数の並びに法則性がある.

## 4 結語

最後に, 今回は4つの基本的なルート格子  $A_n, B_n, C_n, D_n$  に関する研究が主だったが, 他にも様々な特徴や法則性があるようだ. それを見つけると共に,  $\mathbb{Z}^n$  のエルハルト多項式についての研究を進めていきたいと考えている.

## 参考文献

- [1] 柘田幹也 福川由貴子 著, 格子からみえる数学, 日本評論社
- [2] Paul R.Scott, The Fracination of the Elementary, ‘ Hannah Neumann Memorial Lecture ’ presented at ICME 5 in Adelaide,South Australia,in August,1984
- [3] 日比孝之, 可換変数と組合せ論, シュプリンガー・フェアラーク東京
- [4] R.Bacher, P.De La Harpe & B.Venkov, Sries de Croissance et Polynomes D'Ehrhart Associs aux Rseaux de Racines, Ann.Inst.Fourier,Grenoble49,3(1999)

## 索引

### ■ア行

李 滋錫, 133  
板倉 恭平, 234  
一木 信吾, 208  
伊藤 孝明, 113  
岩佐 亮明, 100  
大音 智弘, 160  
大川 幸男, 67  
太田 和惟, 122  
大竹 秀一, 89  
大場 貴裕, 50  
大森 源城, 292  
岡本 健太郎, 37  
緒方 勇太, 44  
小野塚 友一, 182  
親木 翔平, 304  
小山 宏次郎, 143

### ■カ行

金久保 有輝, 150  
金森 由妃, 315  
加葉田 雄太郎, 320  
川越 大輔, 21  
川崎 菜穂, 186  
北川 めぐみ, 221  
久野 恵理香, 288  
黒田 匡迪, 79  
小山 民雄, 28  
近内 翔太郎, 243  
後藤 良彰, 11

### ■サ行

佐々野 詠淑, 129  
佐竹 翔平, 280  
篠田 万穂, 325  
柴田 和樹, 148  
鈴木 雄太, 176

### ■タ行

竹内 博志, 329  
只野 誉, 270  
田村 朋之, 105  
千野 由喜, 195  
辻栄 周平, 72  
土谷 昭善, 169

### ■ナ行

長尾 秀人, 199  
永原 健太郎, 211  
野島 崇史, 338

### ■ハ行

早坂 亮太, 117  
原田 遼太郎, 174  
韓 呼和, 295  
半田 悟, 344  
鉢州太 恵里香, 300  
平川 義之輔, 3  
藤沢 好, 265  
布田 徹, 225  
船川 大樹, 248  
PEREIRA Glauber, 349  
HOROCHOLYN Stefan, 205  
本多 俊一, 353

### ■マ行

百瀬 康弘, 97

### ■ヤ行

山縣 幸司, 93  
山田 祐見, 359  
山本 悠登, 283  
弓林 司, 57

### ■ラ行

劉 曉静, 257

### ■ワ行

若狭 恭平, 238  
渡邊 一義, 261