

Drift-diffusion system in the critical spaces

小川卓克 (東北大理)

1 2次元臨界空間における drift-diffusion 方程式の可解性

2次元 drift-diffusion 方程式

$$\begin{cases} \partial_t n - \Delta n + \nabla \cdot (n \nabla \psi) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^2, \\ \partial_t p - \Delta p - \nabla \cdot (p \nabla \psi) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^2, \\ -\Delta \psi = \kappa(p - n), & x \in \mathbb{R}^2, \\ n(0, x) = n_0(x), & p(0, x) = p_0(x), \end{cases} \quad (1.1)$$

の時間局所解の存在は、熱核の半群表現と積分方程式を基礎にした縮小写像の方法で、解を構成することができることは、Kurokiba-Ogawa [25] によって論じた。この手法は2次元 Keller-Segel 系に対してもほぼ同様に考えることができる。

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \nabla \cdot (u \nabla \psi) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^2, \\ -\Delta \psi = \kappa u, & x \in \mathbb{R}^2, \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (1.2)$$

この問題においては選ぶ関数空間として空間方向に $L^p(\mathbb{R}^n)$ (ただし $\frac{n}{2} < p < n$, $n = 2, 3$) という自由度がある。こうした空間で解く方法は実は Navier-Stokes 方程式の解の存在定理とほぼ平行な議論である。また $n = 2$ の場合には、別の方法 (エネルギー法) によって一方の臨界である $p = 2$ でも解くことができる。これらのことは文献 [24] で取り扱っている。 $p = 2$ のときには、特に Poisson 方程式の解の取り扱いから重み付きの L^2 空間で解く必要があることを注意する。

さて $n = 2$ の場合の他方の臨界である $p = 1$ は上記積分方程式の方法では単純には含まれない。他方、方程式 (1.1) あるいはそのより単純な形である (1.2) は2次元の渦度 Navier-Stokes 方程式

$$\begin{cases} \partial_t \omega - \Delta \omega + u \nabla \omega = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^2, \\ -\Delta u = \text{rot } \omega = \partial_1 \omega_2 - \partial_2 \omega_1, & x \in \mathbb{R}^2, \\ \omega(0, x) = \text{rot } u_0(x), \end{cases} \quad (1.3)$$

と同一な Scaling 不変性を保つことがわかっている。2次元 渦度の方程式 (1.3) の場合には、空間の基礎空間を $L^1(\mathbb{R}^2)$ と選んで時間局所解の存在が Giga-Miyakawa-Osada [16], Giga-Kanbe [17] らによって得られている。 $L^1(\mathbb{R}^2)$ はこれら方程式を不変にする scaling

$$\begin{cases} n_\lambda(t, x) = \lambda^2 n(\lambda^2 t, \lambda x) \\ p_\lambda(t, x) = \lambda^2 p(\lambda^2 t, \lambda x) \\ \psi_\lambda(t, x) = \psi(\lambda^2 t, \lambda x) \end{cases}$$

において不変な空間、いわゆる臨界空間であって、こうした空間で方程式を考えることは Fujita-Kato の初期の結果に照らしてみれば重要なことであることがわかる。

まずはじめに 2次元渦度の方程式が L^1 で可解となる方法を復習する。scaling 次元が同一の (1.1) や (1.2) に対しても同一の方法を用いることが可能であって、簡単のため、(1.2) に対して議論を行う。

2次元 Keller-Segel 系 (1.2) を熱核を用いて積分方程式に直せば、

$$u(t) = e^{t\Delta}u_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\nabla(u\nabla\psi)ds$$

ここで基本 norm として $\|u\| \equiv \sup_{t \in I} t^{1-1/p}\|u(t)\|_p$ ただし $I = [0, T)$ かつ $1 < p < 2$ と選ぶ。

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_p &\leq \|e^{t\Delta}u_0\|_p + C \int_0^t |t-s|^{-(1/r-1/p)-1/2} \|u\nabla\psi\|_r ds \\ &\leq \|e^{t\Delta}u_0\|_p + C \int_0^t |t-s|^{-(1/r-1/p)-1/2} \|u(s)\|_p \|\nabla\psi\|_s ds \\ &\leq \|e^{t\Delta}u_0\|_p + C \int_0^t |t-s|^{-1/p} \|u(s)\|_p^2 ds \\ &\leq \|e^{t\Delta}u_0\|_p + C \int_0^t |t-s|^{-1/p} s^{-2(1-1/p)} ds \left(\sup_{t \in I} t^{(1-1/p)} \|u(t)\|_p \right)^2 \end{aligned} \tag{1.4}$$

ここで $1/r = 1/p + 1/s$ かつ $1/s = 1/p - 1/2$ である。従って 特に $1/r - 1/p + 1/2 = 1/p$ 。このとき

$$\frac{1}{r} = \frac{2}{p} - \frac{1}{2} \leq 1$$

が必要なので、

$$\frac{2}{p} \leq \frac{3}{2}$$

から $4/3 \leq p$ また、 $p < 2$ を課しておく。今 $4/3 \leq p < 2$ とすると以下の積分は収束して

$$\int_0^t |t-s|^{-1/p} s^{-2(1-1/p)} ds = t^{(1-1/p)} B.$$

ここで B は beta 関数から生じる定数である。従って

$$\sup_I t^{1-1/p}\|u(t)\|_p \leq \sup_I t^{1-1/p}\|e^{t\Delta}u_0\|_p + B \left(\sup_{t \in I} t^{(1-1/p)} \|u(t)\|_p \right)^2$$

を得る。 $t \rightarrow 0$ によつて $\sup_I t^{1-1/p}\|e^{t\Delta}u_0\|_p$ はいくらでも小さくなりうるので (L^p が C_0^∞ を dense に含む事実を用い u_0 を C_0^∞ の関数で近似させることにより、正則性があれば $t \rightarrow 0$ に対して遅く近づくので) 上から bound を得ることができる。同様の方法で差に対する評価することも得られる。次に解が $L^1(\mathbb{R}^2)$ に属することを示すためには、積分方程式を直接 L^1 で評価して L^1 - L^1 有界

性を用いると

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_1 &\leq \|e^{t\Delta}u_0\|_1 + C \int_0^t |t-s|^{-1/2} \|u\nabla\psi\|_1 ds \\
&\leq \|u_0\|_1 + C \int_0^t |t-s|^{-1/2} \|u(s)\|_{4/3} \|\nabla\psi\|_4 ds \\
&\leq \|u_0\|_1 + C \int_0^t |t-s|^{-1/2} \|u(s)\|_{4/3} \|u(s)\|_{4/3} ds \\
&\leq \|u_0\|_1 + C \int_0^t |t-s|^{-1/2} s^{-1/2} ds \left(\sup_{t \in I} t^{1/4} \|u(t)\|_{4/3} \right)^2
\end{aligned} \tag{1.5}$$

ここで

$$\|\nabla(-\Delta)^{-1}u(s)\|_4 \leq C \|u(s)\|_{4/3}, \quad \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}$$

は2次元の Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式である。最後の積分は収束して $B(1/2, 1/2)$ となり特に $\sup_{t \in I} t^{1/4} \|u(t)\|_{4/3}$ の一様有界性を得ているので、解はすべての時間で L^1 に含まれることがわかる。

以上の方法を差に対しても適用することで Giga-Miyakawa-Osada [16] は初期値 $L^1(\mathbb{R}^2)$ の渦度に対して解を構成した。

Proposition 1.1 (Giga-Miyakawa-Osada) $\omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ に対して 2次元渦度の方程式 (1.3) の一意的な時間局所解 $\omega(t) \in C([0, T]; L^1(\mathbb{R}^2)) \cap C((0, T); L^p(\mathbb{R}^2))$ が存在する。

まったく同一に近い議論により

Theorem 1.2 $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ に対して 2次元 Keller-Segel 方程式 (1.2) の一意的な時間局所解 $u(t) \in C([0, T]; L^1(\mathbb{R}^2)) \cap C((0, T); L^p(\mathbb{R}^2))$ が存在する。

を得ることがわかる。従って Kurokiba-Ogawa [24] における可解性の議論は $n = 2$ に関して言えば、 $1 \leq p \leq 2$ に対して成立することがわかる。

さて2次元渦度方程式に対する可解性の場合には、 $\omega(t)$ が最大値原理を満たすことから、その一様有界性から先見評価を得ることができて、解の時間大域存在定理を得ることができるが、Keller-Segel 系ないし Drift-diffusion 系に対しては、最大値原理が一般に成立しないために、先見評価を得るには entropy 評価を用いる必要がある。実際 Nagai-Senba-Yoshida [34], Biler [2], Nagai-Senba-Suzuki [33] らは、有界領域や全空間の場合の2次元の問題の時間大域存在性について entropy 汎関数：

$$\int_{\Omega} u \log u dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} u \psi dx + \int_0^t \int_{\Omega} u |\nabla(\log u - \psi)| dx dt \leq \int_{\Omega} u_0 \log u_0 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_0 \psi_0 dx$$

を用いて証明を行っている。これらは Lyapunov 関数を構成し、解の時間大域挙動を決定するには不可欠であるが、初期時刻からこれらの各項の意味をもたせるには初期条件を $L^1(\mathbb{R}^2)$ から取るだけでは不十分である。

形式的には entropy 汎関数は次のように捉えることができる。

$$\int_{\Omega} u \log u dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} u \psi dx = \int_{\Omega} u \log u dx - \frac{1}{2} \|\nabla\psi\|_2^2$$

右辺第二項は形式的に Poisson 方程式を用いて書き直したものであるが、正値解を考えている限り、 \mathbb{R}^2 においては、この第二項は意味をなさないことがわかる。実際 $|x| \rightarrow \infty$ において

$$\psi \simeq \log|x|^{-1}$$

と挙動することがわかるので $\nabla\psi \notin L^2(\mathbb{R}^2)$ である。この点を、drift-diffusion 方程式に対して考えるならば、解の差の平均が 0 となる特殊な状況の元で考えることにより、解決することができる。より具体的には方程式の適切性を Hardy 空間 \mathcal{H}^1 で考えることにより、それら entropy 汎関数に意味を持たせることが可能になる。そのためには解の存在する空間を $L^1(\mathbb{R}^2)$ から Hardy 空間 $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ と取り直す必要がある。

そのために、まず $v = n + p$ and $w = n - p$ とおいて方程式 (1.1) を以下のように書き直す:

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v + \nabla \cdot (w \nabla \psi) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^2, \\ \partial_t w - \Delta w + \nabla \cdot (v \nabla \psi) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^2, \\ -\Delta \psi = -\kappa w, & x \in \mathbb{R}^2, \\ v(0, x) = n_0(x) + p_0(x), & w(0, x) = n_0(x) - p_0(x), \end{cases} \quad (1.6)$$

を考える。 w に対しては自然に平均 0 の仮定をおくことができる。 v に対しては遠方の境界条件を犠牲にして $v - \bar{v}$ ただし

$$\bar{v} = \int_{\mathbb{R}^2} v(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}^2} v_0(x) dx$$

とおきなおして

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v + \nabla \cdot (w \nabla \psi) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^2, \\ \partial_t w - \Delta w + \alpha \bar{v} w + \nabla \cdot (v \nabla \psi) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^2, \\ -\Delta \psi = -\alpha w, & x \in \mathbb{R}^2, \\ v(t, x) \rightarrow 0, & w(t, x) \rightarrow 0, & |x| \rightarrow \infty, \\ v(0, x) = v_0 \equiv n_0(x) + p_0(x) - \overline{n_0 + p_0}, \\ w(0, x) = w_0 \equiv n_0(x) - p_0(x). \end{cases} \quad (1.7)$$

を考える。この系に対して空間基礎空間を $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ と選ぶことにより、時間局所解の存在を示した。

Definition. $\lambda > 0$ と $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ に対して $\phi_\lambda = \lambda^{-2} \phi(\lambda^{-1}x)$ とおく。このとき $0 < p < \infty$ に対して

$$\mathcal{H}^p = \mathcal{H}^p(\mathbb{R}^2) = \left\{ f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^2); \quad \|f\|_{\mathcal{H}^p} \equiv \left\| \sup_{\lambda > 0} |\phi_\lambda * f| \right\|_p < \infty \right\}.$$

とおいてこれを Hardy 空間と呼ぶ。

特に $p = 1$ と選んだときの、Hardy 空間 \mathcal{H}^1 の双対空間は 有界平均振動 (*bounded mean oscillation*)

$$BMO = \{f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^2); \|f\|_{BMO} < \infty\},$$

のクラスであることが知られている。

Theorem 1.3 (Ogawa-Shimizu[36]) $\alpha = \pm 1$ とする。初期値 $(v_0, w_0) \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2) \times \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$, に対してある時刻 $T > 0$ があって (1.7) に対する時間一意解 (v, w) が存在して $v, w \in C([0, T]; \mathcal{H}^1) \cap L^2(0, T; \dot{\mathcal{H}}^{1,1}) \cap C^1((0, T); \dot{\mathcal{H}}^{2,1}) \cap C^1((0, T); \mathcal{H}^1)$ を満たす。特に初期値から解への軌道写像 $(v_0, w_0) \rightarrow (v, w)$ は $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)^2 \rightarrow C([0, T]; \mathcal{H}^1)^2$ への Lipschitz 連続となる。

Hardy 空間 $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ が方程式 (1.7) に対して臨界空間であることから、いわゆる Fujita-Kato の原理によって同様の関数空間において小さい初期値に対する時間大域解の存在も議論することができるが、この問題に関して、そうした議論は問題を本質を捉えた結果ではない。実際、drift-diffusion 型方程式であるならば、解の存在は大きな初期値に対して可能であるし、また Keller-Segel 系に対しても大域可解性のための初期値の大きさの臨海値を求めなければ問題の本質を捉えたことにはならない。これは自己相似解を捉える際にも、同様のことがいえるはずである。

$f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ であるとき次の評価が成り立つことが知られている。 $f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ ならば そのフーリエ変換 \hat{f} に対して

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{f}(\xi)|^2}{|\xi|^2} d\xi \leq C \|f\|_{\mathcal{H}^1}^2. \quad (1.8)$$

このことから $-\Delta\psi = w$ に対して $w \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ ならば、

$$\|\nabla\psi\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\xi\hat{\psi}|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{w}|^2}{|\xi|^2} d\xi \leq C \|w\|_{\mathcal{H}^1}^2$$

が従い、entropy 汎関数が有限になることがわかる。

2 L^1 型エネルギー不等式

Theorem の証明には、最大正則性に対する端点評価に関連する、臨界型の消散型評価を確立することが重要な役割を果たす。ここではその詳細には至らないが、以下のように熱方程式の初期値問題の解に対するエネルギー評価としてとらえることができる。

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = \phi(x). \end{cases} \quad (2.1)$$

の解に対してはエネルギー不等式

$$\|u(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla u(s)\|_2^2 ds \leq \|u_0\|_2^2$$

が成り立つことが良く知られている。特に線形方程式の場合には解の正則性が直ちに得られることから、上記の不等式は等式で得られる。この不等式は解の基礎空間を L^2 に選んだ際に有効であるが、解の基礎空間を L^p とした際には、同等の不等式が放物型評価として得られる。その際 $p = 1$ として選んだものに対応するのがここで述べる初期条件に対する最大正則性評価である。以下を得る。

Theorem 2.1 $e^{t\Delta}$ を熱方程式の解を与える半群、 $\phi \in \mathcal{H}^1$ とする。このとき

$$\left(\int_0^T \|\nabla e^{t\Delta} \phi\|_{\mathcal{H}^1}^2 dt \right)^{1/2} \leq C \|\phi\|_{\mathcal{H}^1}. \quad (2.2)$$

が成り立つ。ここで C は $T > 0$ に依存しない定数である。

Corollary 2.2 (一般化されたエネルギー不等式) $1 < \theta < \infty$ とする。 u を非斉次熱方程式

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = \phi(x). \end{cases} \quad (2.3)$$

の解とする。このとき

$$\|\nabla u\|_{L^2(I; \mathcal{H}^1)} \leq C \left(\|\phi\|_{\mathcal{H}^1} + \|f\|_{L^2(I; \mathcal{B}_{1,2}^{-1})} \right).$$

ただし $I = \mathbb{R}_+$.

この評価は本質的には端点 Besov 空間における最大正則性理論と同等のものである (cf. Ogawa-Shimizu [37]). 証明の詳細には、実補間を用いた議論が必要である。

Theorem 2.1 の証明は実補間や関数解析の様々な性質を用いているため、直感的にその評価の是非については理解しづらい。そこで Theorem 2.1 の直感的理解の補助的事実として次の Proposition があげられる:

Proposition 2.3 $e^{t\Delta}$ を熱方程式の解を与える半群、 $\phi \in L^1(\mathbb{R}^2)$ とする。このとき一般に不等式

$$\left(\int_0^T \|\nabla e^{t\Delta} \phi\|_1^2 dt \right)^{1/2} \leq C \|\phi\|_1 \quad (2.4)$$

は成り立たない。

Proof of Proposition 2.3. Fourier 変換についての L^1 - L^∞ 評価

$$\sup_{\xi} |\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_1$$

から $f = \nabla e^{t\Delta} \phi$ と選んで

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \|\nabla e^{t\Delta} \phi\|_1^2 dt &\geq 4\pi^2 \int_0^\infty \left(\sup_{\xi} |\xi e^{-t|\xi|^2} \hat{\phi}(\xi)| \right)^2 dt \\ &= 4\pi^2 \int_0^\infty \frac{1}{t} \left(\sup_{\xi} |\sqrt{t} \xi e^{-t|\xi|^2} \hat{\phi}(\xi)| \right)^2 dt \\ &\quad (\text{ここで } \xi \text{ についての sup をはずして適当なベクトル } \eta \text{ を選べば}) \\ &\geq 4\pi^2 \int_0^\infty \frac{1}{t} \left(|\eta e^{-|\eta|^2}| \right)^2 |\hat{\phi}(\sqrt{t}^{-1} \eta)|^2 dt \\ &\geq C \int_0^\infty \frac{|\hat{\phi}(\sqrt{t}^{-1} \eta)|^2}{t} dt \\ &\quad \frac{|\eta|}{\sqrt{t}} = r, \text{ とおいて} \quad dt = -2 \frac{|\eta|^2}{r^3} dr \text{ から} \\ &= C \int_0^\infty \frac{|\hat{\phi}(r\omega)|^2}{r} dr. \end{aligned}$$

ここで $\omega = \eta/|\eta|$ なる単位ベクトルである。両辺 $\omega \in \mathbb{S}^1$ について積分平均をとれば、

$$\int_0^\infty \|\nabla e^{t\Delta} \phi\|_1^2 dt \geq C(\eta) \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{\phi}(\xi)|^2}{|\xi|^2} d\xi \quad (2.5)$$

を得る. 一般に ϕ を適当に選べば右辺 $= \infty$ となる. (たとえば $\hat{\phi}(0) \neq 0$ とすればよい). もし ϕ の積分平均が 0 であっても一般に $\phi \in L^1(\mathbb{R}^2)$ だけでは右辺は有限になるとは限らない. \square

以上の証明から、Proposition 2.3 が評価式 (1.8) の証明も与えていることに注意する. 実際 Proposition 2.3 は (1.8) を用いることなしに証明される.

Hardy 空間での可解性を得るにはもう一つ、非線形項に対する処理を行うために、こうした空間における双線形評価が必要である. 以下の評価は発散が 0 となる場 (いわゆる divergence free 場) と回転が 0 となる場 (rotation free 場) 同士の積に対する著名な Coifman-Lions-Mayer-Semmes [9] による評価を一般化したものである.

Proposition 2.4 $\nabla w \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ かつ $\nabla \psi \in \dot{H}^1 \cap L^\infty$ とする. このとき以下の評価が成り立つ.

$$\|\nabla \cdot (w \nabla \psi)\|_{\mathcal{H}^1} \leq C(\|w\|_2 \|\Delta \psi\|_2 + \|\nabla w\|_{\mathcal{H}^1} \|\nabla \psi\|_\infty).$$

類似の評価は Triebel-Lizorkin space においては知られているがそれらは $f, g \in \dot{F}_{p,\sigma}^s \cap L^r$ が $1 < p \leq \infty, 1 \leq \sigma \leq \infty$ となるときに $1/p = 1/r + 1/q$ and $s > 0$ に対して

$$\|fg\|_{\dot{F}_{p,\sigma}^s} \leq C(\|f\|_r \|g\|_{\dot{F}_{q,\sigma}^s} + \|f\|_{\dot{F}_{q,\sigma}^s} \|g\|_r)$$

となるというものでその証明にはベクトル値関数の極大関数に対する L^p における用いているために $p = 1$ の場合を得ることができない. 我々の評価はこの $p = 1$ の場合に対応していることが

$$\|\nabla(fg)\|_{\dot{F}_{1,2}^0} \simeq \|\nabla(fg)\|_{\mathcal{H}^1}.$$

からわかる.

3 3次元臨界型 drift-diffusion 方程式の解の大域挙動

以下では $n = 3$ の場合の解の時間大域的な挙動について論ずる. Carpio [7] は $n = 2, 3$ の場合に Navier-Stokes 方程式の初期値問題の解の漸近形が熱核で表現出来ることを示し、解の減衰の lower bound を示した. このことは drift-diffusion system (1.1) に対しても成り立つ. 実際非常に類似の性格を持つ、放物型 Keller-Segel 系に対して、Nagai-Yamada [35] は解の漸近系の評価を与えた. ここでは $n = 3$ の場合に初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t n - \Delta n + \nabla \cdot (n \nabla \psi) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^3, \\ \partial_t p - \Delta p - \nabla \cdot (p \nabla \psi) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^3, \\ -\Delta \psi = \kappa(p - n), & x \in \mathbb{R}^3, \\ n(0, x) = n_0(x), & p(0, x) = p_0(x), \end{cases} \quad (3.1)$$

時間大域解を考えて、その漸近形を考える. 考える問題を積分方程式

$$\begin{cases} n(t) = e^{t\Delta} n_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \nabla \cdot (n(s) \nabla \psi(s)) ds, \\ p(t) = e^{t\Delta} p_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \nabla \cdot (p(s) \nabla \psi(s)) ds, \\ -\Delta \psi = \kappa(p - n). \end{cases}$$

と考えると、もし非線形項からの寄与である、積分方程式右辺第 2 項の時間減衰評価が、熱の減衰よりも早いことがあれば、解の時間無限遠での漸近挙動は右辺第 1 項から熱核の漸近形に近づくことがわかる。実際非線形項からの寄与は非線形性（線形近似の解が二つかかっていると見なす）から、右辺第一項からの減衰よりも早く減衰するために一次近似では非線形効果の寄与は現れない。すなわち初期条件に適当な遠方での減衰を仮定すれば、 $1 \leq q \leq \infty$ に対して

$$\|n(t) - M_n G(t)\|_q = o(t^{-\gamma}), \quad \|p(t) - M_p G(t)\|_q = o(t^{-\gamma}), \quad \gamma = \frac{n}{2} \left(1 - \frac{1}{q}\right)$$

を得ることができる。ここで $M_n = \int_{\mathbb{R}^3} n(t) dx$, $M_p = \int_{\mathbb{R}^3} p(t) dx$ は初期全電荷であって、 $n_0 \geq 0$, $p_0 \geq 0$ の条件下ではこれらは保存するので、定数である。さてここで問題にするのは 2 次漸近形である。 $n = 3$ の場合には次に述べる理由によって、この問題は臨界状況となる。今上記の 1 漸近形を用いて、非線形項の減衰が t の一次分だけ早いことに着目すれば、2 次展開は熱核の微分で与えられると予想される。実際 $\|n(t)\|_q = O(t^{-\gamma})$ ($\gamma = \frac{n}{2}(1 - \frac{1}{q})$) からベクトル

$$V = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} n(s, x) \nabla(-\Delta)^{-1}(n(s, x) - p(s, x)) dx ds$$

が well-defined となればこれと $\nabla G(t)$ との内積が 2 次展開の候補となる。これは Convection diffusion 方程式の解に対して Escobedo-Zuazua [10] がまた $n = 2, 3$ のときに Navier-Stokes 方程式の解に対して Carpio [7], Fujigaki-Miyakawa [11] らが示していることに対応する。ところが今の場合、 $n = 3$ のときは $\|n(s)\|_\infty = O(s^{-3/2})$ なので $\|\nabla(-\Delta)^{-1}(n(s) - p(s))\|_q = O(s^{-\gamma+\frac{1}{2}})$ で $q = 1$ とあわせると、形式的には

$$V = \int_0^\infty (1+s)^{-1} ds = \infty$$

となり、漸近形の係数が発散する。このことは Navier-Stokes 方程式の解や、Nagai-Yamada によって扱われた放物型 Keller-Segel 方程式

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \nabla \cdot (u \nabla \psi) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ \partial_t \psi - \Delta \psi + \psi = u, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x), & \psi(0, x) = \psi_0(x), \end{cases} \quad (3.2)$$

では $n \geq 2$ では現れなかった問題である。しかし実際にはもう一つの非線形項から現れる補正を加えることにより、ここでは問題 (3.1) の時間大域解について次の時間大域漸近挙動を示す。

Theorem 3.1 (Ogawa-Yamamoto[38]) $\kappa = -1$, $3/2 \leq r < 3$ とする。初期値 $(n_0, p_0) \in (L^1_2(\mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\mathbb{R}^3))^2$ に対して (3.1) に対する大域的一意解 (n, p) が存在して $1 \leq q \leq \infty$ に対して $n, p \in C([0, \infty); L^q) \cap C^1(0, \infty; L^r) \cap C((0, \infty); W^{2,r})$ を満たす。特に解は次の漸近挙動を示す: $1 \leq p \leq \infty$ として

$$\begin{aligned} \|n(t) - M_n G(t) - m_n \cdot \nabla G(t) - V_n \cdot \nabla G(t) + M_n W J(t)\|_q &= o(t^{-\gamma-\frac{1}{2}}) \quad t \rightarrow \infty \\ \|p(t) - M_p G(t) - m_p \cdot \nabla G(t) - V_p \cdot \nabla G(t) + M_p W J(t)\|_q &= o(t^{-\gamma-\frac{1}{2}}) \quad t \rightarrow \infty \end{aligned}$$

ただし $\gamma = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{q}\right)$ 。さらに $J(t)$ は熱核 $G(t) = \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{3/2} \exp(-\frac{|x|^2}{4t})$ によって

$$J(t) = \int_0^t \nabla G(t-s) * (G(s) \nabla(-\Delta)^{-1} G(s)) ds$$

により与えられる. また $W = \int_{\mathbb{R}^3} (n_0(x) - p_0(x)) dx$, $m_n = \int_{\mathbb{R}^3} x n_0(x) dx$, $m_p = \int_{\mathbb{R}^3} x p_0(x) dx$

$$\begin{cases} V_n = \int_0^\infty n(s) \nabla (-\Delta)^{-1} (n(s) - p(s)) ds \\ V_p = \int_0^\infty p(s) \nabla (-\Delta)^{-1} (n(s) - p(s)) ds \end{cases}$$

とする。

最後に与えた V_p や V_n は形式的には発散する量ではあるが、この問題の場合には実は well-defined となる. これは問題の本質が $n = 3$ の Navier-Stokes 方程式の解のような状況になっていることを示唆している. なお、電氣的に中和されている設定、すなわち $W = 0$ であるような場合には臨界状況とはならず、高次元の場合と同等の結果を得ることができる。

References

- [1] Biler, P., *Local and global solvability of some parabolic systems modeling chemotaxis*, Adv. Math. Sci. Appl. , **8** (1998), 715–743.
- [2] Biler, P., *Existence and nonexistence of solutions for a model of gravitational interaction of particles, III*, Colloq. Math., **68** (1995), 229–239.
- [3] Biler, P., Dolbeault, J., *Long time behavior of solutions to Nernst-Planck and Debye-Hückel drift-diffusion systems*, Ann. Henri Poincaré, **1** (2000), 461–472.
- [4] Biler, P., Hilhorst, D., Nadzieja, T., *Existence and nonexistence of solutions for a model of gravitational interaction of particles, II*, Colloq. Math. **67** (1994), 297–308.
- [5] Biler, P., Nadzieja, T., *A nonlocal singular parabolic problem modeling gravitational interaction of particles*, Adv. Diff. Equations, **3** (1998), 177–197.
- [6] Bony, J.-M., *Calcul symbolique et propagation des singularité pour les équations aux dérivées partielles non linéaires*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **14** (1981), 209–246.
- [7] Carpio, A., *Large-time behavior in incompressible Navier-Stokes equations*, SIAM J. Math. Anal. **27** (1996), 449–475.
- [8] Chae, D.-H. *Well-posedness of the Euler equation in the Lizorkin-Triebel space*, Comm. Pure Appl. Math., **48** (2002) .
- [9] Coifman, R., Lions P.L., Meyer Y., Semmes, S., *Compensated compactness and Hardy spaces* , J. Math. Pures Appl., **72** (1993) 247–286.
- [10] Escobedo, M., Zuazua, E., *Large time behavior for convection-diffusion equation in \mathbb{R}^n* , J. Funct. Anal. **100** (1991), 119–161.
- [11] Fujigaki, Y., Miyakawa, T., *Asymptotic profiles of the nonstationary incompressible Navier-Stokes flows in the whole space*, SIAM J. Math. Anal. **33** no. 3 (2001), 523–544.
- [12] Fefferman, C., Stein, E. M., *H^p spaces of several variables*. Acta Math. **129** (1972), 137–193.
- [13] Fujita, H., *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$* , J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I, **13** (1966), 109–124.
- [14] Fujita, H., Kato, T., *On Navier-Stokes initial value problem 1* , Arch. Rat. Mech. Anal. **46** (1964), 269–315.

- [15] Giga, Y., *Solutions for semilinear Parabolic equations in L^p and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes system*, J. Differential Equations **61** (1986), 186-212.
- [16] Giga, Y., Miyakawa, T., Osada, H., *Two-dimensional Navier-Stokes flow with measure as initial vorticity*, Arch. Rational Mech. Anal., **104** (1988), 223-250.
- [17] Giga, Y., Kambe, T., *Large time behavior of the vorticity of two-dimensional viscous flow and its application to vortex formation*, Comm. Math. Phys., **117** (1988), 549-568.
- [18] Hayakawa, K., *On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations*, Proc. Japan Acad., **49** (1973), 503-505.
- [19] Herrero, M. A., Velázquez, J.J.L., *Singularity patterns in a chemotaxis model*. Math. Ann., **306** (1996), 583-623.
- [20] Jüngel, A., *Qualitative behavior of solutions of a degenerate nonlinear drift-diffusion model for semiconductors*, Math. Model. Meth. Appl. Sci. **5** (1995), 497-518.
- [21] Kato, T., *Strong L^p - solution of the Navier-Stokes equation in \mathbb{R}^m with applications to weak solutions*, Math. Z., **187** (1984) , 471-480.
- [22] Keller, E. F., Segel, L. A., *Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability*, J. Theor. Biol., **26** (1970), 399-415.
- [23] Kurokiba, M., Nagai, T., Ogawa, T., *The uniform boundedness and Threshold for the global existence of the radial solution to a drift-diffusion system*, preprint.
- [24] Kurokiba, M., Ogawa, T., *Finite time blow-up of the solution for a nonlinear parabolic equation of drift-diffusion type* , Diff. Integral Equations **16** (2003), 427-452.
- [25] Kurokiba, M., Ogawa, T., *L^p well posedness of the for the drift-diffusion system arising from the semiconductor device simulation*, preprint, to appear in J. Math. Anal. Appl.
- [26] Miyakawa, T., *Hardy spaces of solenoidal vector fields, with applications to the Navier-Stokes equations*. Kyushu J. Math. **50** (1996), no. 1, 1–64.
- [27] Miyakawa, T., *Application of Hardy space techniques to the time-decay problem for incompressible Navier-Stokes flows in R^n* . Funkcial. Ekvac. **41** (1998), no. 3, 383–434.
- [28] Mock, M. S., *An initial value problem from semiconductor device theory*, SIAM, J. Math. **5** (1974), 597-612.
- [29] Nagai, T., *Blow-up of radially symmetric solutions to a chemotaxis system*, Adv. Math. Sci.Appl., **5** (1995), 581-601.
- [30] Nagai, T., *Global existence of solutions to a parabolic system for chemotaxis in two space dimensions*, Nonlinear Anal. T.M.A., **30** (1997), 5381-5388.
- [31] Nagai, T., *Blowup of nonradial solutions to parabolic-elliptic systems modeling chemotaxis in two-dimensional domains*, to appear in J. Inequal. Appl.
- [32] Nagai, T., Ogawa, T., *Brezis-Merle inequality of parabolic type and application to the global existence of the Keller-Segel equations*, work in preparation.
- [33] Nagai, T., Senba, T., Suzuki, T., *Chemotactic collapse in a parabolic system of mathematical biology*, preprint
- [34] Nagai, T., Senba, T., Yoshida, K., *Application of the Trudinger-Moser inequality to a parabolic system of chemotaxis*, Funkcial. Ekvac. **40** (1997), no. 3, 411–433.
- [35] Nagai, T., Yamada, T., *Large time behavior of bounded solutions to a parabolic chemotaxis in the whole space*, preprint.

- [36] Ogawa, T., Shimizu, S., *The Drift-Diffusion system in the two dimensional critical Hardy space*, submitted.
- [37] Ogawa, T., Shimizu, S., *End-point maximal regularity and its application to the two dimensional Keller-Segel system*, preprint.
- [38] Ogawa, T., Yamamoto, M., *Asymptotic behavior of solution to a drift-diffusion system of fractional diffusion*, work in preparation.
- [39] Senba, T., Suzuki, T., *Chemotactic collapse in a parabolic-elliptic system of mathematical biology*. Adv. Differential Equations, **6** (2001), 21-50.
- [40] Triebel, H., *Theory of Function Spaces*, Birkhäuser, Basel, 1983.
- [41] Yagi, A., *Norm behavior of solutions to a parabolic system of chemotaxis*, Math. Japon. **45** (1997), 241–265.
- [42] Yamazaki, M., *The Navier-Stokes equations in the weak L^n spaces with time dependent external force*, Math. Ann. **317** (2000), 635-675.