完全非線形楕円型方程式の L^p-粘性解の弱ハルナック不等式

小池　茂昭（埼玉大学)

2008 年 3 月 29〜30 日

札幌天神山国際ハウス

1　序

本講演は A. Święch との共同研究 [12] である。

次の方程式の L^p-粘性**優解**の弱ハルナック不等式に関する結果を述べる。

$$\mathcal{P}^+(D^2u) + \mu(x)|Du| = f(x) \quad \text{in } \Omega \tag{1}$$

ここで、$\mathcal{P}^+(D^2u)$ は後で定義するが、およそ $-\triangle u$ と覚えておいて差し支えない。また、次の仮定は大切なので覚えてほしい。

$$\boxed{f \in L^p(\Omega),\ \mu \in L^q(\Omega)}$$

(1) は特殊な方程式に見えるが、多くの完全非線形方程式を扱うために、充分に一般的な方程式である。

2 階楕円型方程式の弱解の regularity の第一段階を最大値原理とするならば、第二段階は弱ハルナック不等式である。実際、弱ハルナック不等式により、(局所最大値原理を用いることなく) 弱解の局所ヘルダー連続評価が可能であるだけでなく、境界付近での弱ハルナック不等式を導くことによって、境界までこめたヘルダー連続評価が得られる。また、2 階微分の評価も可能である (Caffarelli[3], [2] を参照)。

更に、Liouville の定理、強最大値原理、Phragmén-Lindelöf の原理、非有界領域での最大値原理など、弱解の定性的性質の多くが導かれる。ここで注意しておくことは、係数 μ や非斉次項 f が非有界の場合、通常の “バリアー” など、Gilbarg-Trudinger[8] 等でおなじみの技法が使えないことである。また、非発散型方程式なので “部分積分” に依存する技法も使えない。

(1) のように 1 階微分項に非有界係数のある方程式に関しては、関数が $W^{2,n}_{\rm loc}$ に属し、(1) を殆どいたるところで満たす (即ち、L^p-強優解) ならば弱ハルナック不等式が $f, \mu \in L^n(\Omega)$ の場合に成立することが知られている (例えば、[8] を参照)。しかしながら、L^p-粘性解に

関しては、最近の Aleksandrov-Bakelman-Pucci(ABP と略す) 最大値原理に関する我々の結果 [11](2007 年) が知られているだけである。

ただし、$\mu \in L^{2n}(\Omega)$ を仮定すると、弱ハルナック不等式が粘性解に対しても示せる (Trudinger[19] で使われた方法、[9] も参照)。簡単のため $\mathcal{P}^+$ の代りに $-\triangle$ の場合に、この事実を確かめてみる。非負の粘性優解 u に対し、$\mu|Du| \leq \frac{1}{4}\mu^2 + |Du|^2$ に注意すると、$v = 1 - e^{-u} \geq 0$ とおけば、1 階微分項が消えて

$$-\triangle v \geq e^{-u}(f - \frac{1}{4}|\mu|^2)$$

となる。もし u が有界ならば、v に対して、粘性解に対する弱ハルナック不等式 (例えば、[2] 参照) を適用すれば、$u \approx v$ だから、u に対しても弱ハルナック不等式が示される。

しかし、古典的な結果は $\mu \in L^n(\Omega)$ であり、大きなギャップがある。

$p_0 = p_0(n, \lambda, \Lambda) \in [n/2, n)$ で次を満たす定数が知られている。

任意の $f \in L^p(\Omega)$ $(p > p_0)$ に対し、次を満たす関数 (後で L^p-強解と呼ぶ) $u \in C(\Omega) \cap W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ が存在する。

$$\begin{cases} (i) & \mathcal{P}^-(D^2u) = f \quad a.e. \text{ in } \Omega, \\ (ii) & u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \\ (iii) & -C\|f^-\|_{L^p(\Omega)} \leq u \leq C\|f^+\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{in } \Omega \quad (\exists C > 0), \\ (iv) & \forall \Omega' \Subset \Omega, \exists C'(\text{dist}(\Omega', \partial\Omega)) > 0 \text{ s.t. } \|u\|_{W^{2,p}(\Omega')} \leq C'\|f\|_{L^p(\Omega)}. \end{cases} \tag{2}$$

【注意】ここで大切なのは、$p \geq n$ の場合には、ABP 最大値原理 ((iii) に対応する) が得られることである (更にこの場合、積分は Ω 全体である必要はない)。これによって、Caffarelli の L^p 理論を使えば (iv) は比較的易しく導かれる。$n > p > p_0$ まで、(2) を最初に示したのは Escauriaza[6] であり、p_0 を Escauriaza 定数と呼ぶことがある (p_0 の依存性に関しては [5] も参照)。

主結果の弱ハルナック不等式を述べる。Q_t を原点中心、一辺 $t > 0$ の n 次元立方体とする。$Q_4 \subset \Omega$ としておこう。

主結果　(弱ハルナック不等式)

$q > n$ かつ $q \geq p > p_0$ の場合に (1) の非負 L^p-粘性優解 u に対し、

$$\|u\|_{L^r(Q_1)} \leq C \left(\inf_{Q_1} u + \|f\|_{L^p(Q_4)} \right)$$

となる u に依存しない定数 $r, C > 0$ が存在することある。

【注意】・正確には右辺の Q_4 は $Q_{3+\varepsilon}$ $(\forall\varepsilon \in (0, 1])$ でよいことは議論をよくみるとすぐわかる。更に、Cabré[3] の "被覆法" を用いれば、$Q_{1+\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$ でよいことも分かる。これは、きちんと書かれていないので付録に述べておく。

・$r \geq 1$ とは限らないので、左辺はノルムでないかもしれない。でも、後の議論では、そんなの関係ない。

・弱ハルナック不等式が登場すると、局所最大値原理が成り立つか気になるところだが、必要ないので右から左へ受け流す。

2 準備

以下の議論で $C>0$ は、与えられた条件 $(n,\lambda,\Lambda$ 等$)$ 以外には依存しない定数とする。

ここでは、$p>1$ は少なくとも次を満たすものとする。

$$p>\frac{n}{2}$$

これは、$W^{2,p}$ 関数が連続になるための条件だけでなく、$W^{2,p}$ 関数が殆ど至る所で 2 階のテイラー展開が可能である条件でもある。

$r>0$ と関数 $g:U\subset \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ に対し、$\|g\|_{L^r(U)}=\left(\int_U |g|^r dx\right)^{\frac{1}{r}}$ とする。誤解がない場合は $\|g\|_r$ と書く。また、関数の定義域をはみ出して関数を考える時はゼロ拡張とする。

さて、定義を述べるために一般の完全非線形 2 階方程式

$$F(x,u,Du,D^2u)=f(x)\quad \text{in } \Omega \tag{3}$$

を考える。ただし、$\Omega\subset\mathbf{R}^n$ は少なくとも開集合とする。

L^p-粘性解理論では、係数や非斉次項に可測関数を考えているので、$x\to F(x,r,p,X)$ や $x\to f(x)$ に連続性は仮定しない。

以下、関数 $F:\Omega\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times S^n\to\mathbf{R}$ は、次の意味で一様楕円型とする。任意の $x\in\Omega,\ r\in\mathbf{R},\ p\in\mathbf{R}^n,\ X,Y\in S^n$ に対し

$$\mathcal{P}^-(X-Y)\le F(x,r,p,X)-F(x,r,p,Y)\le\mathcal{P}^+(X-Y)$$

が成り立つ。また、S^n は $n\times n$ 実対称行列で全体であり、S^n では通常の部分順序を考える。

また、ここでは一様楕円型定数

$$0<\lambda\le\Lambda$$

を固定し、プッチの極大・極小作用素 $\mathcal{P}^\pm:S^n\to\mathbf{R}$ を次のように定義する。$X\in S^n$ に対し、

$$\mathcal{P}^+(X):=\max\{-\mathrm{trace}(AX)\mid \lambda I\le A\le\Lambda I\}$$
$$\mathcal{P}^-(X):=\min\{-\mathrm{trace}(AX)\mid \lambda I\le A\le\Lambda I\}$$

【注意】・定義からすぐに $\mathcal{P}^+(X)=-\mathcal{P}^-(-X)\ (\forall X\in S^n)$ が示せるので、$\mathcal{P}^-$ に関する性質から $\mathcal{P}^+$ に関する性質も簡単に分かる。

・$\mathcal{P}^-$ は凹、$\mathcal{P}^+$ は凸であることが分かる。また、$\mathcal{P}^\pm(tX)=t\mathcal{P}^\pm(X)\ (t\ge 0)$ も簡単に分かる。

・更に、定義から次の不等式がわかり、それらをうまく使えば、$\mathcal{P}^\pm$ は、$-\triangle$ と考えて大丈夫である。

$$\boxed{\mathcal{P}^-(X)+\mathcal{P}^-(Y)\le\mathcal{P}^-(X+Y)\le\mathcal{P}^+(X)+\mathcal{P}^-(Y)\le\mathcal{P}^+(X+Y)\le\mathcal{P}^+(X)+\mathcal{P}^+(Y)}$$

f が L^p 関数のときは、Carrafelli[3] による局所 L^p 評価が知られており、その研究を元に Caffarelli-Crandall-Kocan-Święch[4] によって、L^p 粘性解が導入された。実際、比較原理を中心とした通常の粘性解の技法は全く使えないことに注意しておく。実際、可測係数を念頭においており、その場合、一意性に関しては "反例の王様"Nadirashvili[13] や Safonov[17] による反例があるので、比較原理が成立すると矛盾してしまう。

本講演に関しては、L^p-粘性解の定義は "殆ど" 使わないが念のため述べる。

L^p-粘性解の定義

$u \in C(\Omega)$ が (3) の L^p-粘性劣解 (L^p-subsolution) とは、任意の $\phi \in W^{2,p}_{\rm loc}(\Omega)$ に対し、もし $u-\phi$ が $x \in \Omega$ で局所最大値を取るならば、次が成り立つこととする。 $\lim_{\varepsilon \to 0} ess. \inf_{B_\varepsilon(x)} \{F(y,u(y),D\phi(y),D^2\phi(y)) - f(y)\} \leq 0$
$u \in C(\Omega)$ が (3) の L^p-粘性優解 (L^p-supersolution) とは、任意の $\phi \in W^{2,p}_{\rm loc}(\Omega)$ に対し、もし $u-\phi$ が $x \in \Omega$ で局所最小値を取るならば、次が成り立つこととする。 $\lim_{\varepsilon \to 0} ess. \sup_{B_\varepsilon(x)} \{F(y,u(y),D\phi(y),D^2\phi(y)) - f(y)\} \geq 0$
$u \in C(\Omega)$ が (3) の L^p-粘性解 (L^p-solution) とは、u が (3) の L^p-粘性劣解かつ L^p-粘性優解であることとする。

更に、L^p-強解の定義も述べておく。こちらは使うかもしれない。

L^p-強解の定義

$u \in C(\Omega)$ が (3) の L^p-強優解 (L^p-strong subsolution) とは、$u \in W^{2,p}_{\rm loc}(\Omega)$ であり、次が成り立つこととする。 $F(x,u(x),Du(x),D^2u(x)) \leq f(x) \quad a.e.\ \text{in } \Omega$
$u \in C(\Omega)$ が (3) の L^p-強劣解 (L^p-strong subsolution) とは、$u \in W^{2,p}_{\rm loc}(\Omega)$ であり、次が成り立つこととする。 $F(x,u(x),Du(x),D^2u(x)) \geq f(x) \quad a.e.\ \text{in } \Omega$
$u \in C(\Omega)$ が (3) の L^p-強解 (L^p-strong solution) とは、u が (3) の L^p-強劣解かつ L^p-強優解であることとする。

【注意】・(3) の L^p-強解ならば L^p-粘性解になるのが、自然であるが自明ではない。しかし、充分一般的な F の仮定の下で成立する ([12] 参照)。よって、ここで得られる結果は当然 L^p-強解でも成り立つ。もちろん、L^p-強解の場合、$q=n$ で ABP 最大値原理が成り立つ

から、より強い結論が得られる。
・逆に、(3) の L^p-粘性解が $W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ に属すれば、L^p-強解になることが期待されるが、これも自明ではない ([12] 参照)。
・上記の二つの注意は、単純な方程式 (1) に関して言えば、$\mu \in L^\infty(\Omega)$ では、[4] で述べられているが、$\mu \in L^q(\Omega)$ の場合は知られてなかった。

また、Du に関して一次以上の増大度があっても上記の二つの注意は成立する。(証明は難しくないが、細かい評価が必要。例えば中川 [16] の結果を参照)

3 主結果の証明のあらすじ

以前の講演に比べて、だいぶ簡単になった。

古典的な強解に対する結果は $\mu, f \in L^n(\Omega)$ で成り立つが、主結果ではこの場合をカバーできていない。これは、ABP 型最大値原理 ((2) の (iii) のこと) が L^p-粘性解で知られていないことが原因である。L^p-粘性解に対する ABP 最大値原理は、主結果の p, q に対する条件でŚwięch との共同研究で得られている ([11] 参照)。

Caffarelli の補題を述べておく。

Caffarelli の補題　([2] 参照)

Ω を滑らかな境界を持つ有界領域とし、$g \in C^\infty(\partial\Omega)$ とする。
次の Dirichlet 問題の $C^2(\overline{\Omega})$ 解が存在する。

$$\begin{cases} \mathcal{P}^+(D^2u) = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

【注意】・要するに、最も簡単な場合は完全非線形でも古典解があるということである。ただし、$\mathcal{P}^+$ が凸であることははずせない。実際、12 次元で古典解がない例 ([14])、24 次元で $W^{2,\infty}$ ですらない例 ([15]) によって最近得られた (読めない論文だが) からである。(愚痴になりますが、“この分野” には読めない良い論文を書く人が多い。Ca$\cdots$, Kr$\cdots$, Nad$\cdots$, $\cdots$、そういう観点からは Evans 氏は “ネ申” です。)
・Caffarelli の原著 [3](および、[2]) では、Ω が球の場合に、特殊な g に対して具体的に構成しており、幾つかの付随した性質も簡単に確かめられる。実際、新たに上述の補題を述べなくても [3] の補題でも充分である (但し、$B_{1/2} \subset Q_1 \subset \overline{B}_{\sqrt{n}/2}$ など、球と立方体の包含関係で煩わしい定数がつく)。

一般の Ω では、具体的には u が分からないが、強最大値原理を使えば、必要な性質が得られる ([12] 参照)。

証明の概略　$q \geq p > n$ の場合だけ考える。$n \geq p > p_0$ は [10], [11] で導入した “逐次比較関数法” を用いる (付録参照)。u の代わりに、充分大きな $t > 1$ をとり、$u/\{t\|f\|_p + \inf_{Q_1} u\}$ とすれば、$\inf_{Q_1} u \leq 1$ かつ、$\|f\|_p \ll 1$ と仮定してよい。すると、$\|u\|_{L^r(Q_1)} \leq C$ となる $r,\ C > 0$ を見つければよい。(実は、より弱い条件 $\inf_{Q_3} u \leq 1$ で充分。この 3 は、Calderon-Zygmund の立方体分割の補題を使うので小さくできないが、最終的に Cabré の被覆法を使えば、あまり気にしなくて良くなる。)

分布関数の言葉に直せば、ある $\sigma > 0,\ C > 0$ に対し、

$$|\{x \in Q_1 \mid u(x) \geq s\}| \leq Cs^{-\sigma} \quad (s > 0)$$

となっていればよい。更に、離散的に任意の自然数 k に対し、

$$|\{x \in Q_1 \mid u(x) \geq M^k\}| \leq \theta^k$$

となる $M > 1, \theta \in (0,1)$ が存在すればよい。

$k = 1$ の時に、この評価を示せれば、立方体分割の補題と縮尺法で $k \geq 2$ でも示せるので、$k = 1$ に限って示してみる。

Q_4 は滑らかでないけど、適当に近似した領域で考えると Caffarelli の補題から次を満たす $\phi \in C^2(Q_4)$ が見つかる。

面倒だから、立方体は滑らかな境界を持つとしてしまう (領域を近似すればうまく行く)。Caffarelli の補題から、$\phi_0 \in C^2(Q_4 \setminus (Q_{1/2})^o)$ で、次の Dirichlet 問題の解がある。

$$\begin{cases} \mathcal{P}^-(D^2\phi_0) = 0 & \text{in } (Q_4)^o \setminus Q_{1/2}, \\ \phi_0 = 0 & \text{on } \partial Q_4, \\ \phi_0 = -1 & \text{on } \partial Q_{1/2}. \end{cases}$$

ϕ_0 は古典解だから、強最大値の原理から $-\sigma := \max_{Q_3} \phi_0 < 0$ となり、$\phi = 2\sigma^{-1}\phi_0$ とおくと、$\phi(x) \leq -2\ (x \in Q_3)$ を得る。ϕ を滑らかに $Q_{1/2}$ 内部に拡張したものを改めて ϕ と書けば、$\phi \in C^2(Q_4)$ は次を満たす。

$$\begin{cases} \mathcal{P}^-(D^2\phi) = \xi(x) & \text{in } (Q_4)^o, \\ \mathrm{supp}\xi \subset Q_1, & \\ \phi = 0 & \text{on } \partial Q_4, \\ \phi \leq -2 & \text{in } Q_3. \end{cases}$$

$w := u + \phi$ とおくと、$\mathcal{P}^\pm$ の不等式から w は次の L^p-優解になる。

$$\mathcal{P}^+(D^2w) + \mu(x)|Dw| \geq f(x) - \mu(x)|D\phi(x)| + \xi(x) \quad \text{in } \Omega_0$$

ただし、$\Omega_0 = \{x \in Q_4^o \mid w(x) < 0\}$ である。ABP 最大値原理より

$$\max_{Q_4}(-w) \leq C\exp(C\|\mu\|_n)\left(\|f\|_n + \|D\phi\|_\infty\|\mu\|_{L^n(\Omega_0)} + \|\xi\|_{L^n(\Omega_0)}\right)$$

$\mathrm{supp}\xi \subset Q_1$ だから、右辺第二項の積分は Ω_0 の変わりに $\{x \in Q_1 \mid w(x) < 0\}$ としてよい。

$\max_{Q_4}(-w) \geq \max_{Q_3}(-u - \phi) \geq \max_{Q_3}(-u + 2) \geq 1$ より、$\|\mu\|_n$ が小さければ ($\|f\|_n$ も小さいことを思い出そう)、次が分かる。

$$|\{x \in Q_1 \mid u(x) < -\min_{Q_1} \phi =: M\}| \geq \delta$$

となる $\delta \in (0,1)$ が存在する。よって、

$$|\{x \in Q_1 \mid u(x) \geq M\}| \leq \theta := 1 - \delta$$

となる。

後は、μ が小さいと言う仮定を Cabré の被覆法 (付録参照) で取り除けばよい。

4 応用

主結果から導かれる新しい結果を列挙する。

(A) 強最大値原理

『$f \equiv 0$ の時、(1) の L^p-粘性劣解 u が内部で最大値を取れば定数関数になる』ことを強最大値原理と呼ぶ。これが (1)(逆の不等式だが) で成り立つ。

(B) 境界付近での弱ハルナック不等式

ポテンシャル論の境界ハルナック不等式とは違うことに注意する。具体的な結果は例えば、[8] と同じなので略す。

(B) を使うことで、応用が広がる。

(C) L^p-粘性解の境界までこめたヘルダー連続評価

もちろん、(B) なしでも弱ハルナック不等式から内部ヘルダー連続評価は導かれる。最近、Sirakov[18] が弱ハルナック不等式を使わずに、同じ結果を得ている。ただし、$q \geq p > n$ の場合のみである ($q > n \geq p > p_0$ の場合は、我々の逐次比較関数法 [11] を使わないと最大値原理すら導かれない)。

(D) L^p-強解の存在

(C) を用いることで (よって、(B) を使っている)、$\mu \in L^q(\Omega)$ $(n < q < \infty)$ の時、次の L^p-強解の存在が示せる。

$$\begin{cases} \mathcal{P}^{\pm}(D^2u) + \mu(x)|Du| = f(x) & a.e. \text{ in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

ただし、$\mathrm{supp}\mu \Subset \Omega$ の場合は Fok[7] で知られている。なぜ、$\mathrm{supp}\mu \Subset \Omega$ という仮定が必要だったかというと、そうでないと近似解の一様収束がしめせない。詳しく言えば、μ_k を μ の近似、u_k をそれらを使った対応する近似方程式の解とすると、最大値原理から

$$\max_{\Omega}(u_k - u_j) \leq C\|f_k - f_j\|_p + C\|\mu_k|Du_k| - \mu_j|Du_j|\|_p$$

右辺第 2 項が $k, j \to \infty$ でゼロに行くかどうか分からない。

内部 $W^{2,p}$ 評価は [8] や [4]、[11] の方法でできるので、$\mathrm{supp}\mu$ がコンパクトなら、$W^{2,p}_{\mathrm{loc}}$ 局所評価と合わせて右辺第 2 項がゼロに行くことを示せる。

(E) 非有界領域での ABP "型" 最大値原理

Cabré[3] が領域に適当な条件 (例えば、柱状領域や錘状領域) があれば、非有界領域でも ABP 最大値原理 (ただし、解の有界性を仮定して、ABP 型の評価を得ること) が成り立つことを示し、Vitolo 等によって、もっと色々な非有界領域を含むよう拡張されてきた。しかし、係数に関しては古典的な結果 [8] の範囲を出ていない。(B) を用いると、この点を改良できる。

更に、Phragmén-Lindelöf の原理や放物型への拡張等々は、中川氏 (院生) が鋭意努力中である。

5　付録　　（Cabréの被覆法）

まず、我々の主結果を正しいとする。Q_4 の代わりに Q_2 で成り立つことを示す。同じように $Q_{1+\varepsilon}$ $(\forall\varepsilon>0)$ で成り立つことも簡単に分かる。

　Q^j $(j=1,2,\ldots,\exists N)$ を Q_1 の点を中心にした一辺が 1/4 の立方体で、ある $\sigma\in(0,1)$ に対し、次を満たすとする (Q の上付きの番号は一辺の長さではなく、単なる番号である)。

$$Q_1\subset\bigcup_{j=1}^N Q^j\subset Q_2,\quad |Q^j\cap Q^{j+1}|\geq\frac{\sigma}{4^n}$$

ただし、上の第 2 式では、$N+1=1$ とする。2 次元なら、簡単に Q^j を選べるが、高次元では、このように "一列" につなげるかどうか、微妙かもしれないが、第 2 の条件の代りに次の条件で充分なので気にしないことにする。

$$\left\{\begin{array}{c}\text{任意の } 1\leq j<k\leq N \text{ に対し、次を満たす } \{j_\ell\}_{\ell=1}^m \text{ が存在する}\\ j_1=j,\, j_m=k,\, |Q_{j_\ell}\cap Q_{j_{\ell+1}}|\geq\dfrac{\sigma}{4^n}\ (\ell=1,\ldots,m-1)\end{array}\right.$$

　各 j に対し、弱ハルナック不等式から

$$\|u\|_{L^r(Q^j)}\leq C_1\left(\inf_{Q^j}u+\|f\|_p\right)$$

が成り立つ。

　一方、Q^j の選び方から、

$$\inf_{Q^j}u\leq\inf_{Q^j\cap Q^{j+1}}u\leq\left(\frac{1}{|Q^j\cap Q^{j+1}|}\int_{Q^j\cap Q^{j+1}}u^r dx\right)^{1/r}\leq C_2\|u\|_{L^r(Q^{j+1})}$$

が成り立っている。

　さて、$\inf_{Q_1}u=\inf_{Q^{j_0}}u$ となる j_0 を固定する。$j_0=N$ としても一般性を失わない。$\alpha=C_1C_2$ とおく ($\alpha\geq 1$ としてよい)。任意の $1\leq j<N$ に対して、

$$\begin{array}{rcl}\|u\|_{L^r(Q^j)}&\leq&C_1\left(\inf_{Q^j}u+\|f\|_p\right)\\ &\leq&C_1\left(C_2\|u\|_{L^r(Q^{j+1})}+\|f\|_p\right)\\ &\leq&\cdots\\ &\leq&\alpha^{N-j}\|u\|_{L^r(Q^N)}+C_1(1+\cdots+\alpha^{N-j-1})\|f\|_p\\ &\leq&C_1\left(\alpha^{N-j}\inf_{Q^N}u+\dfrac{1-\alpha^N}{1-\alpha}\|f\|_p\right)\end{array}$$

となり、$0<r<1$ の時は ($r\geq 1$ なら、通常の三角不等式を使う)、

$$\|u_1+\cdots+u_N\|_r\leq 2^{(\frac{1}{r}-1)(N-1)}\sum_{j=1}^N\|u_j\|_r$$

が成り立つことに注意すれば (もっといい不等式を知ってたら教えてください)、

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^r(Q_1)} &\leq 2^{(\frac{1}{r}-1)(N-1)}\sum_{j=1}^{N}\|u\|_{L^r(Q^j)} \\ &\leq 2^{(\frac{1}{r}-1)(N-1)}C_1\left(N\alpha^N\inf_{Q^N}u+\frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}\|f\|_p\right)\end{aligned}$$

$\inf_{Q^N}u=\inf_{Q_1}u$ を思い出せば、証明が終わる。

6 付録　（逐次比較関数法）

[10], [11] の逐次比較関数法 (勝手に名付けてしまいました) による ABP“型” 最大値原理のおさらいをしておく。これは、非斉次項が n 以下のべき乗可積分 (つまり、$f\in L^p(\Omega)$, $p\in(p_0,n]$) の時に、f を n 以上のべき乗可積分関数と見なせるようにするための方法である。

私見では、このような技法は簡単ではあるが、今までなかったと思われる。というより、必要なかったから誰も作ろうとしなかった。

証明を簡単にするため、$q>n>p>p_0\geq n/2$ に加え、次を仮定する (一般には、以下の議論を有限回繰り返せばよい)。

$$q>\frac{pn}{2p-n} \tag{5}$$

この条件は、$p<n$ が充分 n に近いことを意味している。

さて、$\mathcal{P}^{\pm}$ の代わりに $-\triangle$ で計算してみよう。

$\Omega\subset B_1$ を “一様外錐条件” を満たすとする (境界を頂点とする、一様な開き具合の錐が Ω の外に取れること。滑らかなら OK)。$\mu\in L^q_+(\Omega)$ と $f\in L^p_+(\Omega)$ に対し、$u\in C(\overline{\Omega})$ を次の L^p-粘性劣解とする。

$$-\triangle u-\mu(x)|Du|\leq f(x)\quad\text{in }\Omega.$$

ABP“型” 最大値原理とは、次を満たす u に依存しない定数 $C_k>0$ $(k=1,2)$ と自然数 N が取れることである ([11] 参照)。

$$\max_{\overline{\Omega}}u\leq\max_{\partial\Omega}u+C_1\left\{\exp(C_2\|\mu\|_n)\|\mu\|_q^N+\sum_{k=0}^{N-1}\|\mu\|_q^k\right\}\|f\|_p.$$

【注意】$q>n$ かつ $q\geq p\geq n$ の場合は、右辺の “$\sum_{k=0}^{N-1}$” の項がない形で成立している ([4])。これが “型” なしの由緒正しい ABP 最大値原理である。

(5) の仮定の下でこれを示そう。(5) の場合は、$N=1$ となることが以下で分かる。

$R>1$ をとり、(2) により次の L^p-強解 $v\in C(\overline{B}_R)\cap W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(B_R)$ を考える。

$$\begin{cases}-\triangle v=-f & \text{in }B_R,\\ \qquad v=0 & \text{on }\partial B_R.\end{cases}$$

(2) から、$0 \le -v \le C\|f\|_p$ in B_R かつ、$\|v\|_{W^{2,p}(\Omega)} \le C\|f\|_p$ となっている。よって、$\|Dv\|_{L^{p^*}(\Omega)} \le C\|f\|_p$ となる。ここで、$p^* = np/(n-p)$ である。

簡単な計算から、上の仮定のおかげで、$p' := pqn/(pn+qn-pq) > n$ とおくと、

$$\|\mu Dv\|_{p'} \le C\|\mu\|_q\|Dv\|_{p^*} \le C\|\mu\|_q\|f\|_p$$

となる。

(少なくとも形式的には)$w := u+v$ は次の L^p-粘性劣解になる。

$$-\triangle w - \mu(x)|Dw| \le \mu(x)|Dv(x)| =: f_1(x) \quad \text{in } \Omega$$

$f \in L^n(\Omega)$ だから、通常の ABP 最大値原理より $\max_{\overline{\Omega}} w \le \max_{\partial\Omega} w + C_1 \mathrm{exp}(C_2\|\mu\|_n)\|f_1\|_n$ が成り立つ。よって、$0 \ge v$ に注意して、次のように示せる。

$$\begin{array}{rcl} \max\limits_{\overline{\Omega}} u & \le & \max\limits_{\overline{\Omega}} w + \max\limits_{\overline{\Omega}}(-v) \\ & \le & \max\limits_{\partial\Omega} w + C\|f\|_p + C_1\mathrm{exp}(C_2\|\mu\|_n)\|f_1\|_n \\ & \le & \max\limits_{\partial\Omega} u + C\{1+\mathrm{exp}(C_2\|\mu|_n)\|\mu\|_q\}\|f\|_p. \end{array}$$

References

[1] Cabré, X., On the Alexandroff-Bakelman-Pucci estimate and the reversed Hölder inequality for solutions of elliptic and parabolic equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **48** (1995), 539–570.

[2] Caffarelli, L. A. and X. Cabré, Fully Nonlinear Elliptic Equations, American Mathematical Society, Providence, 1995.

[3] Caffarelli, L. A., Interior a priori estimates for solutions of fully non-linear equations, *Ann. Math.* **130** (1989), 189–213.

[4] Caffarelli, L. A., M. G. Crandall, M. Kocan, and A. Święch, On viscosity solutions of fully nonlinear equations with measurable ingredients, *Comm. Pure Appl. Math.* **49** (1996), 365–397.

[5] Crandall, M. G. and A. Święch, A note on generalized maximum principles for elliptic and parabolic PDE, Evolution equations, 121–127, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 234, Dekker, New York, 2003.

[6] Escauriaza, L., $W^{2,n}$ a priori estimates for solutions to fully non-linear equations, *Indiana Univ. Math. J.* **42** (1993), 413–423.

[7] Fok, P., Some maximum principles and continuity estimates for fully nonlinear elliptic equations of second order, Ph.D. Thesis, UCSB, 1996.

[8] Gilbarg, D. and N. S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1983.

[9] Koike, S., A Beginer's Guide to the Theory of Viscosity Solutions, MSJ Memoirs **13** in 2004. 間違いがたくさんあるので、本を開く前に私の HP から『訂正』をダウンロードしてください。

[10] Koike, S. and A. Święch, Maximum principle and existence of L^p-viscosity solutions for fully nonlinear uniformly elliptic equations with measurable and quadratic terms, *Nonlinear Differential Equations Appl.*, **11** (2004), 491–509.

[11] Koike, S. and A. Święch, Maximum principle for fully nonlinear equations via the iterated comparison function method, *Math. Ann.*, **339** (2007), 461–484.

[12] Koike, S. and A. Święch, Weak Harnack inequality for fully nonlinear uniformly elliptic PDE with unbounded ingredients, submitted.

[13] Nadirashvili, N., Nonuniqueness in the martingale problem and the Dirichlet problem for uniformly elliptic operators, *Ann. Scoula Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, **24** (4), (1997), 537–549.

[14] Nadirashvili N., and S. Vlăduţ, Nonclassical solutions of fully nonlinear elliptic equations, *GAFA, Geom. Funct. Anal.*, **17** (2007), 1283–1296.

[15] Nadirashvili N., and S. Vlăduţ, Singular viscosity solutions to fully nonlinear elliptic equations, *J. Math. Pures Appl.*, **89** (2008), 107–113.

[16] Nakagawa, N., Maximum principle for L^p-viscosity solutions of fully nonlinear equations with unbounded ingredients and superlinear growth terms, Preprint.

[17] Safonov, M. V., Nonuniqueness for second-order elliptic equations with measurable coefficients, *SIAM J. Math. Anal.*, **30** (4), (1999), 879–895.

[18] Sirakov, B., Solvability of fully nonlinear elliptic equations with natural growth and unbounded coefficients, preprint.

[19] Trudinger, N. S., Local estimates for subsolutions and supersolutions of general second order elliptic quasilinear equations, *Invent. Math.* **61** (1980), no. 1, 67–79.