21 世紀 COE プログラム：
特異性から見た非線形構造の数学

第10回 COE 研究員連続講演会

正値調和関数に対する Martin 積分表現と非線形楕円型方程式の正値解の存在

COE 研究員
平田　賢太郎

2006.6.21（水），6.22（木），6.23(金)

Series #120. February, 2007

Publication of this series is partly supported by Grant-in-Aid for formation of COE.
'Mathematics of Nonlinear Structures via Singularities'（Hokkaido University）
URL:http://coe.math.sci.hokudai.ac.jp

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

#97 M. Watanabe, 第 5 回 COE 研究員連続講演会 『逆散乱法』入門, 52 pages. 2005.

#98 M. Takeda, T. Mikami (Eds.), Probability and PDE, 48 pages. 2005.

#99 M. Van Manen, The 6th COE Lecture Series "From the cut-locus via medial axis to the Voronoi diagram and back" 42 pages. 2005.

#100 K. Hayami, T. Nara, D. Furihata, T. Matsuo, T. Sakurai and T. Sakajo (Eds.), 応用数理サマーセミナー「逆問題」, 196 pages. 2005.

#101 B. Forbes, The 7th COE Lecture Series トーリックミラー対称性、56 pages. 2005.

#102 H. Kubo, T. Ozawa and K. Yamauchi, SAPPORO GUEST HOUSE SYMPOSIUM ON MATHEMATICS 20 "Nonlinear Wave Equations", 68 pages. 2005.

#103 A. Miyachi and K. Tachizawa, Proceedings of the Harmonic Analysis and its Applications at Sapporo, 107 pages. 2005.

#104 S. Izumiya (Ed), Y. Numata, J. Ishimoto, I. Sasaki, Y. Nagase and M. Yamamoto, 第 2 回数学総合若手研究集会 - The 2nd COE Conference for Young Researchers -, 274 pages. 2006.

#105 T. Yamamoto, O. Hatori, M. Hayashi and T. Nakazi (Eds.), 第 14 回関数空間セミナー, 112 pages. 2006.

#106 Y. Daido, 学位論文 Doctoral thesis "RECONSTRUCTION OF INCLUSIONS FOR THE INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF HEAT EQUATION USING PROBE METHOD", 68 pages. 2006.

#107 T. Yamamoto, 学位論文 Doctoral thesis "Singular fibers of two colored differentiable maps and cobordism invariants", 333 pages. 2006.

#108 S. Izumiya, Singularity theory of smooth mappings and its applications: a survey for non-specialists, 41 pages. 2006.

#109 J. Cheng, B. Y. C. Hon, J. Y. Lee, G. Nakamura and M. Yamamoto, Inverse Problems in Applied Sciences - towards breakthrough - Organizing Committee, 96 pages. 2006.

#110 K. Matsumoto, 超幾何関数早春学校, 87 pages. 2006.

#111 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, Y. Tonegawa, K. Tsutaya and T. Sakajo, The 31th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 91 pages. 2006.

#112 H. Okamoto, D. Sheen, Z. Shi, T. Ozawa, T. Sakajo and Y. Chen, Book of Abstracts of the First China-Japan-Korea Joint Conference on Numerical Mathematics & The Second East Asia SIAM Symposium, 78 pages. 2006.

#113 N. Ishimura, T. Ishiwata, T. Sakajo, T. Sakurai, M. Nagayama, T. Nara, K. Hayami, D. Furihata and T. Matsuo, 応用数理サマーセミナー「確率微分方程式」, 116 pages. 2006.

#114 T. Abe, 第 8 回 COE 研究員連続講演会『超平面配置と対数的ベクトル場の幾何』, 23 pages. 2006.

#115 H. Kubo and T. Ozawa, Sapporo Guest House Symposium on Mathematics 22 "Nonlinear Wave Equations", 67 pages. 2006.

#116 S. Okabe, 第 9 回 COE 研究員連続講演会『ある束縛条件下における平面弾性閉曲線のダイナミクス』, 31 pages. 2006.

#117 A. Suzuki, T. Ito, N. Sato, K. Shibuya, D. Hirose, Y. Maekawa and K. Matsumoto, 第 3 回数学総合若手研究集会 –他分野との学際的交流を目指して, 264 pages. 2007.

#118 T. Yamamoto, Y. Sato, N. Kataoka and H. Takagi, Proceedings of the conference on New Aspects of High-dimensional Nonlinear Dynamics, 73 pages. 2007.

#119 T. Yamamoto and T. Nakazi, 第 15 回関数空間セミナー報告集, 82 pages. 2007.

21 世紀 COE プログラム:
特異性から見た非線形構造の数学

第 10 回 COE 研究員連続講演会

正値調和関数に対する Martin 積分表現と非線形楕円型方程式の正値解の存在

COE 研究員
平田　賢太郎

2006.6.21(水)，6.22(木)，6.23(金)

北海道大学理学部 3 号館 508 室

正値調和関数に対するMartin積分表現と非線形楕円型方程式の正値解の存在

平田 賢太郎

平成19年2月16日

0　序

このノートは，2006 年 6 月 21 日（水）から 23 日（金）に行われた第 10 回 COE 連続講演会の講演内容（少し違うかもしれない）をまとめたものである．

第 1 節では，ポテンシャル論の基礎知識として調和・優調和・劣調和関数・Green 関数・Green ポテンシャルに関する基本的性質を列挙している．証明およびより詳しい情報等は専門書 [6] を参照されたい．

第 2 節では，Lipschitz 領域の幾何的性質を調べ，正値調和関数に対する Carleson 評価や境界 Harnack 原理を示している．更に，Lipschitz 領域上の正値調和関数に対する積分表現定理を与えている．ここでの議論は Lipschitz 領域に限らずもっと一般の領域においても適用できることを注意しておく．

第 3 節では，境界 Harnack 原理の応用として，Lipschitz 領域上の Green 関数に対する大域的評価を与えている．特に，滑らかな領域においては Green 関数も Martin 核も具体的な関数で評価される．

第 4 節では，前節までの結果を用いて，最も基本的な非線形楕円型方程式である $-\Delta u = u^p$ の正値解について述べている．特に，境界に極をもつ正値解の存在および全ての正値解に対する境界増大評価に関する結果をまとめている．

このノートを通して，**次元は $n \geq 3$ とし，Ω は $\mathbb{R}^n$ 内の有界領域とする．** 第 2 節以降は境界が局所的に Lipschitz または $C^{1,1}$ であることを仮定する．次の記号を用いる．$\delta_\Omega(x)$ は x から境界 $\partial\Omega$ までの距離を表す．中心 x，半径 r の開球と球面をそれぞれ $B(x,r)$ と $S(x,r)$ と書く．簡単の為に，単位球と単位球面はそれぞれ B と S と書く．ν_n は B の体積を表し，σ_n は S の面積を表す．記号 A は特に重要でない定数を表す．何度も繰り返し使うが全て異なる値と解釈する．2 つの正値関数 f_1, f_2 が比較可能であるとは，定数 $A > 1$ が存在して $f_1/A \leq f_2 \leq Af_1$ を満たすときをいう．このとき，$f_1 \approx f_2$ と書き，定数 A を比較定数とよぶ．

1　基本的性質と事実

この節では，次節以降に必要となる古典的事実および基本的性質を列挙する．

1.1　調和・優調和・劣調和関数

定義 1.1. $h \in C^2(\Omega)$ が調和関数であるとは，Laplace 方程式

$$\Delta h = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 h}{\partial x_j^2} = 0 \quad \text{in } \Omega$$

を満たすときをいう．

Ω 上の可測関数 h が（体積）平均値の等式を満たすとは，任意の $x \in \Omega$ と $0 < r < \delta_\Omega(x)$ に対して

$$h(x) = \frac{1}{\nu_n r^n} \int_{B(x,r)} h(y)dy \tag{1.1}$$

が成り立つときをいう．調和関数は連続性と平均値の等式で特徴付けられる．連続性と平均値の等式の半分ずつをとって劣調和性と優調和性が定義される．

定義 1.2. $u : \Omega \to (-\infty, +\infty]$ が優調和であるとは，次を満たすときをいう．

(1) $u \not\equiv +\infty$ かつ Ω 上で下半連続である．

(2) 各 $x \in \Omega$ に対して，$r_x > 0$ が存在して任意の $0 < r < r_x$ に対して

$$u(x) \geq \frac{1}{\nu_n r^n} \int_{B(x,r)} u(y)dy \tag{1.2}$$

を満たす．

$s : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ が劣調和であるとは，$-s$ が優調和関数であるときをいう．

注意 1.3. u が Ω 上の優調和関数ならば，(定義では $0 < r < r_x$ であるが実際は）$0 < r < \delta_\Omega(x)$ に対して (1.2) が成り立つことが示される．

例 1.4 (基本調和関数)．$a_n = \sigma_n(n-2)$ とする．$y \in \mathbb{R}^n$ とし，

$$U_y(x) = \frac{1}{a_n}|x-y|^{2-n}$$

とする．U_y は $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$ 上で調和であり，$\mathbb{R}^n$ 上で優調和である．

例 1.5 (Poisson 核と Poisson 積分)．$y \in S$ とし，

$$P(x,y) = \frac{1}{\sigma_n} \frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}$$

とする．$P(\cdot, y)$ は B 上で調和である．また，$f \in L^1(S)$ に対して，

$$P[f](x) = \int_S P(x,y)f(y)d\sigma(y)$$

は B 上で調和である．

最大値・最小値の原理. u は Ω 上で優調和，s は Ω 上で劣調和とする．全ての $y \in \partial\Omega$ で

$$\liminf_{x \to y}(u(x) - s(x)) \geq 0 \tag{1.3}$$

を満たすならば，Ω 上で $s \leq u$ が成り立つ．

Herglotz の定理. h が B 上の正値調和関数ならば，S 上の (Radon) 測度 μ_h が一意的に存在して

$$h(x) = \int_S P(x,y)d\mu_h(y) \quad \text{for } {}^\forall x \in B$$

と表される．

Herglotz の定理から次の Harnack の不等式が容易に従う．

Harnack の不等式. $0 < \alpha < 1$ とする．h が $B(z,r)$ 上の正値調和関数ならば，

$$\frac{1-\alpha}{(1+\alpha)^{n-1}} h(z) \le h(x) \le \frac{1+\alpha}{(1-\alpha)^{n-1}} h(z) \quad \text{for } {}^\forall x \in B(z,\alpha r) \tag{1.4}$$

が成り立つ．

$\alpha > 0$ は任意に小さくとれるので次が成り立つ．

調和関数列の同程度連続性. $z \in \Omega$ とする．$\sup_j h_j(z) < \infty$ を満たす Ω 上の正値調和関数列 $\{h_j\}_j$ は点 z で同程度連続である．

定義 1.6. $x, y \in \Omega$ とする．Ω 内の球の列 $\{B(x_j, r_j)\}_{j=0}^N$ が x と y を結ぶ Harnack 鎖であるとは，$x_0 = x$，$x_N = y$，$x_{j-1} \in B(x_j, r_j/2)$ $(j = 1, \ldots, N)$ を満たすときをいう．N を Harnack 鎖の長さという．

定義 1.7. $\ell(\gamma)$ は曲線 γ の長さを表す．Ω 上の擬双曲距離を

$$k_\Omega(x,y) = \inf_{\gamma : x \frown y} \int_0^{\ell(\gamma)} \frac{dt}{\delta_\Omega(\gamma(t))}$$

で定義する．但し，下限は x と y を結ぶ曲線 $\gamma : [0, \ell(\gamma)] \to \Omega$ に関してとる．

k_Ω が距離の公理を満たすことは容易に確かめられる．Harnack 鎖の長さと擬双曲距離は次のように関係している．

命題 1.8. $x, y \in \Omega$ とする．x と y を結ぶ最短の Harnack 鎖の長さは $k_\Omega(x,y) + 1$ に比較可能である．

Harnack の不等式を繰り返し適用し，命題 1.8 と併せて次を得る．

Harnack の不等式（一般形）. h が Ω 上の正値調和関数ならば，任意の $x, y \in \Omega$ に対して

$$\exp(-A(k_\Omega(x,y)+1)) \le \frac{h(x)}{h(y)} \le \exp(A(k_\Omega(x,y)+1))$$

が成り立つ．但し，$A > 1$ は次元 n のみに依存する定数である．

第 1.2 節で定義する Green 関数に Harnack 不等式を適用する際，次が必要になる．

命題 1.9. $z \in \Omega$ とする．任意の $x, y \in \Omega \setminus B(z, \delta_\Omega(z)/2)$ に対して，

$$k_{\Omega\setminus\{z\}}(x,y) \le 3k_\Omega(x,y) + \pi$$

が成り立つ．

u が劣調和ならば，$p \ge 1$ に対して $|u|^p$ も劣調和である（Jensen の不等式）．$p < 1$ に対しては一般にいえないが次が成り立つ．

命題 1.10. u は Ω 上の非負値劣調和関数とし，$0 < p < 1$ とする．任意の $x \in \Omega$ と $0 < r < \delta_\Omega(x)$ に対して

$$u(x)^p \le \frac{2^{n/p}}{r^n} \int_{B(x,r)} u(y)^p dy$$

が成り立つ．

証明. $x \in \Omega$ と $0 < r < \delta_\Omega(x)$ を任意に固定し，

$$M = \sup\{u(y)^p (r-\varepsilon)^n : y \in B(x,\varepsilon),\ 0 < \varepsilon < r\}$$

とする．u の上半連続性より $M < +\infty$ である．$y \in B(x,\varepsilon)$ と $0 < \varepsilon < \rho < r$ とする．$B(y, \rho-\varepsilon) \subset B(x,\rho) \subset B(x,r)$ であるから，平均値の不等式より

$$u(y)(\rho-\varepsilon)^n \le \int_{B(x,\rho)} u(z)dz \le \left(\frac{M}{(r-\rho)^n}\right)^{(1-p)/p} \int_{B(x,r)} u(z)^p dz$$

が従う．$\rho = (\varepsilon + r)/2$ とすると，$\rho - \varepsilon = (r-\varepsilon)/2 = r - \rho$ より

$$u(y)(r-\varepsilon)^{n/p} \le 2^{n/p} M^{(1-p)/p} \int_{B(x,r)} u(z)^p dz$$

である．よって，

$$M^{1/p} \le 2^{n/p} M^{(1-p)/p} \int_{B(x,r)} u(z)^p dz$$

であるから

$$u(x)^p (r-\varepsilon)^n \le M \le 2^{n/p} \int_{B(x,r)} u(z)^p dz$$

が従う．$\varepsilon \to 0$ として命題を得る． □

1.2 Green 関数と Green ポテンシャル

簡単の為に，Ω が Dirichlet 問題に関して正則な場合に Green 関数の定義を述べる．つまり，任意の $f \in C(\partial\Omega)$ に対して，Dirichlet 問題

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & \text{in } \Omega \\ h = f & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

は解 $h \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ をもつとする．但し，$h = f$ on $\partial\Omega$ は

$$\lim_{\Omega \ni x \to y} h(x) = f(y) \quad \text{for } {}^\forall y \in \partial\Omega$$

と解釈する．

注意 1.11. 各境界点において，そこを頂点とする truncated cone が外部にとれるならば，正則である．特に，後で述べる Lipschitz 領域は正則な領域の例である．

定義 1.12. $G_\Omega : \Omega \times \Omega \to [0, +\infty]$ が Ω の Green 関数であるとは，任意に $y \in \Omega$ を固定したときに次を満たすときをいう．

(1) $G_\Omega(\cdot, y) - U_y$ は Ω 上で調和である（点 y まで調和拡張される）．

(2) $G_\Omega(\cdot, y) = 0$ on $\partial\Omega$ である．

言い換えると，Ω 上の調和関数 h_y で $h_y = U_y$ on $\partial\Omega$ を満たすものが存在して

$$G_\Omega(x, y) = U_y(x) - h_y(x)$$

と書ける．

例 1.13 (球の Green 関数)**.** $B(z, r)$ の Green 関数は

$$G_{B(z,r)}(x, y) = \frac{1}{a_n} \times \begin{cases} |x-y|^{2-n} - \left(\dfrac{|y-z||x-y^*|}{r} \right)^{2-n} & \text{if } y \neq z \\ |x-y|^{2-n} - r^{2-n} & \text{if } y = z \end{cases}$$

である．但し，y^* は $S(z, r)$ に関する y の反転 $y^* = z + \frac{r^2}{|y-z|^2}(y - z)$ を表す．

命題 1.14. 次が成り立つ．

(1) Green 関数は一意に存在する．

(2) 各 $y \in \Omega$ に対して，$G_\Omega(\cdot, y)$ は $\Omega \setminus \{y\}$ 上で正値調和であり，Ω 上で優調和である．

(3) 各 $y \in \Omega$ に対して，超関数の意味で $-\Delta G_\Omega(\cdot, y) = \delta_y$ in Ω を満たす．つまり，

$$-\int_\Omega G_\Omega(x, y) \Delta\phi(x) dx = \phi(y) \quad \text{for } {}^\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

が成り立つ．

(4) 任意の $x, y \in \Omega$ に対して $G_\Omega(x, y) = G_\Omega(y, x)$ である．

(5) $D \subset \Omega$ ならば，$D \times D$ 上で $G_D \leq G_\Omega$ である．

定義 1.15. μ を Ω 上の（Radon）測度とする．非負値関数

$$G_\Omega\mu(x) = \int_\Omega G_\Omega(x,y)d\mu(y)$$

が Ω 上で優調和であるとき，$G_\Omega\mu$ を測度 μ の Green ポテンシャルという．

u を Ω 上の非負値優調和関数とし，任意の $x \in \Omega$ に対して

$$h(x) = \sup_s s(x)$$

とする．但し，上限は Ω 上で $s \leq u$ を満たす劣調和関数 s に関してとる．このとき，h は Ω 上の調和関数であることがいえる．h を Ω 上の u の最大調和劣関数という．また，Ω 上の非負値優調和関数 u に対して

$$\int_\Omega \phi(x)d\mu_u(x) = -\int_\Omega u(x)\Delta\phi(x)dx \quad \text{for } {}^\forall\phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

を満たす Ω 上の測度 μ_u が一意的に存在することがいえる．μ_u を u に関する Riesz 測度という．

Riesz の分解定理. u を Ω 上の非負値優調和関数とする．このとき，u は調和関数と Green ポテンシャルの和

$$u(x) = h(x) + \int_\Omega G_\Omega(x,y)d\mu_u(y)$$

に分解できる．但し，h は Ω 上の u の最大調和劣関数である．

次が直ちに従う．

命題 1.16. u を Ω 上の非負値優調和関数とする．u が Green ポテンシャルである為の必要十分条件は，u の Ω 上の最大調和劣関数がゼロ関数である．

命題 1.17. h を Ω 上の非負値調和関数とし，ω を $\overline{\omega} \subset \Omega$ なる有界開集合とする．このとき，$\Omega \setminus \omega$ 上の測度 μ が存在して，任意の $x \in \omega$ に対して

$$h(x) = \int_{\Omega\setminus\omega} G_\Omega(x,y)d\mu(y)$$

が成り立つ．

証明. $y \in \omega$ とする．$\alpha > 0$ を十分大きくとると，$\overline{\omega}$ 上で $h \leq \alpha G_\Omega(\cdot, y)$ とできる．$u = \min\{h, \alpha G_\Omega(\cdot, y)\}$ は Ω 上で優調和であり，ω 上で $u = h$ である．$u = 0$ on $\partial\Omega$ より，u の最大調和劣関数はゼロ関数である．命題 1.16 より，u はある測度 μ の Green ポテンシャルである．任意の $\phi \in C_0^\infty(\omega)$ に対して

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\omega \phi\Delta u dx = \int_\omega u\Delta\phi dx = \int_\Omega\int_\Omega G_\Omega(x,y)\Delta\phi(x)dxd\mu(y) \\ &= -\int_\Omega \phi(y)d\mu(y) \end{aligned}$$

であるから，$\mu(\omega) = 0$ である． □

命題 1.18. Ω 上の非負値優調和関数 u に対して，Green ポテンシャルの増加列 $\{G_\Omega \mu_j\}_j$ で u に Ω 上各点収束するものが存在する．

証明. $x_0 \in \Omega$ を固定し，優調和関数 $u_j = \min\{u, jG_\Omega(\cdot, x_0)\}$ を考える．命題 1.16 より，u_j は Green ポテンシャルであり，$u_j \le u_{j+1}$ かつ $u_j \to u$ $(j \to \infty)$ である． □

Ω 上の可測関数 f に対して（積分が定義できるとき）

$$G_\Omega f(x) = \int_\Omega G_\Omega(x,y) f(y) dy$$

と書く．Green ポテンシャルの滑らかさに関する次の結果は [22] を参照されたい．

命題 1.19. $f \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ ならば，$G_\Omega f \in C^1(\Omega)$ である．更に，f が Ω 上で Hölder 連続ならば，$G_\Omega f \in C^2(\Omega)$ であり $-\Delta G_\Omega f = f$ in Ω を満たす．

2 Lipschitz 領域上の正値調和関数の積分表現

この節の目的は，一般領域で確立された正値調和関数に対する Martin 積分表現について，Lipschitz 領域の場合に限定し詳しく解説することである．

2.1 調和関数の積分表現に関する歴史的背景

単位球上の正値調和関数は単位球面上の測度の Poisson 積分で表現できる（Herglotz の定理）．一般領域への拡張は 1941 年に Robert S. Martin [19] により成された．今日 Martin 境界と呼ばれている理想境界 $\Delta(\Omega)$ と Martin 核と呼ばれている積分核 $K_\Omega(x,y)$ を導入することで，任意の領域 Ω 上の正値調和関数は $\Delta(\Omega)$ 上の測度 μ を用いて

$$h(x) = \int_{\Delta(\Omega)} K_\Omega(x,y) d\mu(y)$$

と表現できることが示された．実際，Martin 境界は $x_0 \in \Omega$ を固定し Green 関数の比 $G_\Omega(x,y)/G_\Omega(x_0,y)$ が y に関して連続的に拡張できるように作られたもので，その極限が Martin 核である．測度 μ の一意性を保証する為には Martin 境界の中でも本質的な部分（極小 Martin 境界）だけを考える必要がある．この Martin の研究を考慮すると，正値調和関数全体の構造を知る為には Martin 境界を調べればよい．1970 年に Hunt & Wheeden [14] は Lipschitz 領域，1982 年に Jerison & Kenig [15] は NTA 領域，2001 年に Aikawa [1] は一様領域の Martin 境界が位相境界と同一視できることを示している．また，Ancona [4] は半径一定の開球の和で表される有界領域の Martin 境界が位相境

界に一致する為の十分条件を与えている．角をもつ領域にも適用できるように論文 [3] では開凸集合の和に拡張した．他にも，1つの位相境界点の上にある Martin 境界点の個数に関する結果として，Benedicks [7] が Denjoy 領域，Ancona [5] と Chevallier [9] が Lipschitz-Denjoy 領域，Cranston & Salisbury [10] が 2 次元扇型領域，Lömker [18] が高次元扇型領域において調べている．

この節では，John 領域の Martin 境界点の研究 [3] で開発した方法に論文 [2] で使われた方法（Brelot の方法）を取り入れ境界 Harnack 原理を導き，Lipschitz 領域の Martin 境界が位相境界に一致することを比較的簡単に証明する．

2.2 Lipschitz 領域の幾何的性質

定義 2.1. $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ が k-Lipschitz 関数であるとは，任意の $x', y' \in \mathbb{R}^{n-1}$ に対して

$$|f(x') - f(y')| \le k|x' - y'|$$

を満たすときをいう．

定義 2.2. 有界領域 Ω が k-Lipschitz 領域であるとは，次を満たす $r_0 > 0$ と $\partial\Omega$ 上の有限個の点 $\{y_j\}_{j=1}^M$ が存在するときをいう．

(1) $\partial\Omega \subset \bigcup_{j=1}^M B(y_j, r_0)$ である．

(2) $\theta_k = \tan^{-1}(1/k)$ と $\kappa = 10/\sin(\theta_k/2)$ とする．各 $B(y_j, \kappa r_0)$ において適当に座標系 $(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ をとると，k-Lipschitz 関数 f で

$$\begin{aligned} \Omega \cap B(y_j, \kappa r_0) &= \{(x', x_n) : f(x') < x_n\} \cap B(y_j, \kappa r_0) \\ \partial\Omega \cap B(y_j, \kappa r_0) &= \{(x', x_n) : f(x') = x_n\} \cap B(y_j, \kappa r_0) \end{aligned} \tag{2.1}$$

を満たすものが存在する．

以下，Ω は k-Lipschitz 領域とし，$x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ とする．

補題 2.3. $\xi \in \partial\Omega$ と $0 < r < r_0$ とする．$0 < \alpha < 1$ に対して，

$$\int_{\Omega \cap B(\xi, r)} \left(\frac{r}{\delta_\Omega(x)} \right)^\alpha dx \le A r^n$$

が成り立つ．但し，A は α, k, n のみに依存する定数である．

証明. $\xi \in \partial\Omega$ を含む球 $B(y_j, r_0)$ と Lipschitz 関数 f で (2.1) を満たすものがある．$0 < r < r_0$ に対して $B(\xi, r) \subset B(y_j, 2r_0)$ である．$x \in \Omega \cap B(\xi, r)$ に対して，$\delta_\Omega(x) \ge (x_n - f(x'))/2k$ より

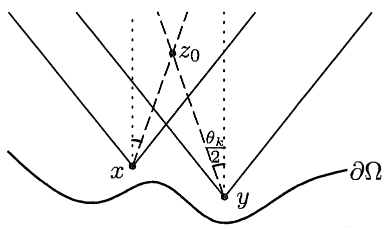
$$\begin{aligned} \int_{\Omega \cap B(\xi, r)} \left(\frac{r}{\delta_\Omega(x)} \right)^\alpha dx &\le \int_{\{|x'-y'|<r\}} \int_{f(x')}^{f(x')+r} \left(\frac{2kr}{x_n - f(x')} \right)^\alpha dx_n dx' \\ &\le A r^n \end{aligned}$$

を得る． $\square$

補題 2.4. $\xi \in \partial\Omega$ と $0 < r < r_0$ とする．$x, y \in \Omega \cap B(\xi, r)$ に対して

$$k_{\Omega \cap B(\xi,\kappa r)}(x,y) \le A \log^+ \frac{|x-y|}{\min\{\delta_\Omega(x), \delta_\Omega(y)\}} + A$$

が成り立つ．但し，A は k のみに依存する定数であり，$\log^+ t = \max\{0, \log t\}$ である．



証明. $\rho = |x-y|/\sin(\theta_k/2)$ とする．$z_0 \in B(x,\rho) \cap B(y,\rho)$ で

$\{z : \angle zwz_0 < \theta_k/2\} \cap B(w, 2\rho) \subset \Omega$

$(w = x, y)$ を満たす点がとれる．x と z_0 を結ぶ線分を γ_x とすると，

$$\int_0^{\ell(\gamma_x)} \frac{dt}{\delta_\Omega(\gamma_x(t))} \le 1 + \frac{1}{\sin(\theta_k/2)} \int_{\delta_\Omega(x)/2}^{\ell(\gamma_x)} \frac{dt}{t} \le 1 + \frac{1}{\sin(\theta_k/2)} \log^+ \frac{2\rho}{\delta_\Omega(x)}$$

である．y と z_0 を結ぶ線分 γ_y に対しても同様の不等式が従う．$\gamma_x \cup \gamma_y \subset B(\xi, \kappa r/2)$ に注意して結論を得る． $\square$

2.3 Carleson 評価と境界 Harnack 原理

$\xi \in \partial\Omega$ と $0 < r < r_0$ に対して，$\delta_\Omega(\xi_r) \ge r \sin\theta_k$ を満たす $\xi_r \in \Omega \cap S(\xi, r)$ が存在する．

定理 2.5 (Carleson 評価)**.** $\xi \in \partial\Omega$ と $0 < r < r_0$ とする．h が $\Omega \cap B(\xi, \kappa r)$ 上の正値調和関数で $\partial\Omega \cap B(\xi, \kappa r)$ 上で $h = 0$ ならば，

$$h(x) \le A h(\xi_r) \quad \text{for } {}^\forall x \in \Omega \cap B(\xi, r/2)$$

が成り立つ．但し，A は k, n のみに依存する定数である．

証明. Harnack の不等式と補題 2.4 より

$$\frac{h(x)}{h(\xi_r)} \le A_1 \left(\frac{r}{\delta_\Omega(x)} \right)^\beta$$

である．但し，$A_1 > 1$ と $\beta > 1$ は k, n のみに依存する定数である．そこで，$B(\xi, \kappa r)$ 上の非負値劣調和関数

$$u = \begin{cases} \dfrac{h}{A_1 h(\xi_r)} & \text{on } \Omega \cap B(\xi, \kappa r) \\ 0 & \text{on } B(\xi, \kappa r) \setminus \Omega \end{cases}$$

を考える．$x \in B(\xi, r/2)$ と $0 < \alpha < 1$ する．命題 1.10 ($p = \alpha/\beta$) と補題 2.3 より

$$u(x)^{\alpha/\beta} \leq \frac{A}{r^n}\int_{B(x,r/2)} u(z)^{\alpha/\beta}dz \leq \frac{A}{r^n}\int_{\Omega\cap B(\xi,r)} u(z)^{\alpha/\beta}dz \leq A$$

である．よって，定理の結論が従う．　□

有界領域 D 上の調和測度を導入する．Perron-Wiener-Brelot の方法により，任意の $f \in C(\partial D)$ に対する Dirichlet 問題

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & \text{in } D \\ h = f & \text{on } \partial D \end{cases}$$

は唯一つの解 $h = H_f \in C^2(D)$ をもつ．$x \in D$ を任意に固定すると，$f \mapsto H_f(x)$ は $C(\partial D)$ 上の正値線形汎関数である．Riesz の表現定理により，∂D 上の確率 Borel 測度 ω_x^D が唯一つ存在して

$$H_f(x) = \int_{\partial D} f(y)d\omega_x^D(y) \quad \text{for } f \in C(\partial D)$$

と表せる．$\omega_x^D = \omega(x, \cdot, D)$ を x と D に関する調和測度という．Borel 集合 $E \subset \partial D$ に対して，$\omega(\cdot, E, D) = H_{\chi_E}$ は D 上の非負値調和関数であることに注意する．

補題 2.6. $x \in D$ とする．このとき，

$$\int_{\partial D} \phi(y)d\omega_x^D(y) = \phi(x) + \int_D G_D(x,y)\Delta\phi(y)dy \quad \text{for } {}^\forall\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

が成り立つ．

証明. Green 関数は次のように書ける（外側ではゼロとしておく）．$y \in D$ に対して

$$G_D(x,y) = \begin{cases} U_y(x) - \displaystyle\int_{\partial D} U_y(z)d\omega_x^D(z) & \text{for } x \in D \\ 0 & \text{for } x \in \mathbb{R}^n \setminus D \end{cases}$$

である．$\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ とする．Fubini の定理より

$$\begin{aligned}\int G_D(x,y)\Delta\phi(y)dy &= \int U_y(x)\Delta\phi(y)dy - \int\int_{\partial D} U_y(z)\Delta\phi(y)d\omega_x^D(z)dy \\ &= -\phi(x) + \int_{\partial D}\phi(z)d\omega_x^D(z)\end{aligned}$$

となる．　□

補題 2.7. $\xi \in \partial\Omega$ と $0 < r < r_0$ に対して

$$\omega(x, \Omega\cap S(\xi, r), \Omega\cap B(\xi, r)) \le Ar^{n-2} G_{\Omega\cap B(\xi,\kappa r)}(x, \xi_{2r}) \quad \text{for } {}^\forall x \in \Omega\cap B(\xi, r/2)$$

が成り立つ．但し，A は k, n のみに依存する定数である．

証明. $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ を $|\Delta\phi| \le A/r^2$ かつ

$$\phi = \begin{cases} 1 & \text{on } S(\xi, r) \\ 0 & \text{on } B(\xi, 3r/4) \cup (\mathbb{R}^n \setminus B(\xi, 5r/4)) \end{cases}$$

にとる．$x \in \Omega \cap B(\xi, r/2)$ とする．補題 2.6 $(D = \Omega \cap B(\xi, r))$ と $G_D \le G_{\Omega\cap B(\xi,\kappa r)}$ より

$$\omega(x, \Omega \cap S(\xi, r), D) \le \frac{A}{r^2} \int_{\operatorname{supp}\phi} G_{\Omega\cap B(\xi,\kappa r)}(x, y)dy$$

である．定理 2.5，補題 2.4 と Harnack の不等式より

$$G_{\Omega\cap B(\xi,\kappa r)}(x, y) \le AG_{\Omega\cap B(\xi,\kappa r)}(x, \xi_{2r}) \quad \text{for } y \in \Omega\cap(B(\xi, 5r/4)\setminus B(\xi, 3r/4))$$

が従う．よって，補題を得る． □

定理 2.8 (境界 Harnack 原理). $\xi \in \partial\Omega$ と $0 < r < r_0$ とする．h_1 と h_2 が $\Omega \cap B(\xi, \kappa r)$ 上の正値調和関数で $\partial\Omega \cap B(\xi, \kappa r)$ 上で $h_1 = 0 = h_2$ ならば，

$$\frac{h_1(x)}{h_2(x)} \approx \frac{h_1(y)}{h_2(y)} \quad \text{for } {}^\forall x, y \in \Omega \cap B(\xi, r/4)$$

が成り立つ．但し，比較定数は k, n のみに依存する．

証明. 定理 2.5，最大値の原理と補題 2.7 より

$$\begin{aligned} h_1(x) &\le Ah_1(\xi_r)\omega(x, \Omega \cap S(\xi, r/2), \Omega \cap B(\xi, r/2)) \\ &\le Ar^{n-2}G_{\Omega\cap B(\xi,\kappa r)}(x, \xi_r)h_1(\xi_r) \qquad \text{for } x \in \Omega \cap B(\xi, r/4) \end{aligned}$$

が従う．また，Harnack の不等式と最大値の原理より

$$r^{n-2}G_{\Omega\cap B(\xi,\kappa r)}(\cdot, \xi_r) \le A\frac{h_2}{h_2(\xi_r)} \quad \text{on } \Omega \setminus B(\xi_r, \delta_\Omega(\xi_r)/2)$$

が従う．よって，

$$\frac{h_1(x)}{h_2(x)} \le A\frac{h_1(\xi_r)}{h_2(\xi_r)} \quad \text{for } x \in \Omega \cap B(\xi, r/4)$$

である．h_1 と h_2 の位置を入れ替えて逆向きの不等式も従うから補題を得る． □

2.4 Martin 境界と正値調和関数の積分表現

$x_0 \in \Omega$ は固定点とする．Ω 上の正値調和関数 h が $\xi \in \partial\Omega$ における核関数であるとは，$h(x_0) = 1$ かつ $h = 0$ on $\partial\Omega \setminus \{\xi\}$ を満たすときをいう．ξ における Ω 上の核関数の全体を $\mathcal{H}_\xi$ と表す．

補題 2.9. $h_1, h_2 \in \mathcal{H}_\xi$ に対して，

$$\frac{1}{A} h_1 \le h_2 \le A h_1 \quad \text{in } \Omega$$

が成り立つ．但し，A は k, n のみに依存する定数である．

証明. $0 < r < r_0$ とする．定理 2.8，補題 2.4 と Harnack の不等式より，k, n のみに依存する定数 A が存在して

$$\frac{1}{A} h_1(x) \le \frac{h_1(\xi_r)}{h_2(\xi_r)} h_2(x) \le A h_1(x) \quad \text{for } x \in \Omega \cap S(\xi, r)$$

が従う．$h_1 = 0 = h_2$ on $\partial\Omega \setminus B(\xi, r)$ であるから，最大値の原理より上式は $x \in \Omega \setminus B(\xi, r)$ に対して成り立つ．$h_1(x_0) = 1 = h_2(x_0)$ より $h_1(y_r)/h_2(y_r) \approx 1$ がわかる．よって，

$$\frac{h_1(x)}{h_2(x)} \approx 1 \quad \text{for } x \in \Omega \setminus B(\xi, r)$$

である．$r \to 0$ として結論を得る． □

定理 2.10. $\mathcal{H}_\xi$ は唯一つの元からなる．特に，各 $x \in \Omega$ に対して，極限

$$\lim_{y \to \xi} \frac{G_\Omega(x, y)}{G_\Omega(x_0, y)} = K_\Omega(x, \xi)$$

は存在し，$K_\Omega(\cdot, \xi) \in \mathcal{H}_\xi$ である．

証明. $\{y_j\}$ を $y_j \to \xi$ なる Ω 内の点列とする．$\{\omega_k\}$ は $\omega_k \subset \omega_{k+1}$，$\Omega = \bigcup_k \omega_k$ を満たす有界開集合の列とする．各 k に対して，十分大きい j_k が存在して $\{G_\Omega(\cdot, y_j)/G_\Omega(x_0, y_j)\}_{j \ge j_k}$ は ω_k 上の正値調和関数の一様有界列である（Harnack の不等式）．同程度連続であるから，Ascoli-Arzelá の定理と対角線論法により適当な部分列をとると $G_\Omega(\cdot, y_j)/G_\Omega(x_0, y_j)$ は Ω 上で局所一様収束することがわかる．極限関数 h は連続で平均値の等式を満たすから Ω 上の正値調和関数であり，$h(x_0) = 1$ である．また，定理 2.8 を用いて

$$h(x) \approx \frac{G_\Omega(x, \xi_r)}{G_\Omega(x_0, \xi_r)} \quad \text{for } x \in \Omega \setminus B(\xi, \kappa r)$$

がわかる．よって，$h = 0$ on $\partial\Omega \setminus \{\xi\}$ が従うから，$h \in \mathcal{H}_\xi$ である．

次に一意性を Kemper の方法 [16] で示す．h は上のものとし，

$$c = \sup_{\substack{x \in \Omega \\ u \in \mathcal{H}_\xi}} \frac{h(x)}{u(x)}$$

とする．補題2.9より $1 \le c < \infty$ である．仮に $\mathcal{H}_\xi \setminus \{h\} \ne \emptyset$ とすると，$c > 1$ がわかる（最大値の原理）．$u \in \mathcal{H}_\xi$ に対して

$$\frac{cu-h}{c-1} \in \mathcal{H}_\xi$$

であるから，$c \ge (c-1)h/(cu-h)$ である．従って，$c^2 u \ge (2c-1)h$ である．よって，

$$c = \sup_{\substack{x\in\Omega \\ u\in\mathcal{H}_\xi}} \frac{h(x)}{u(x)} \le \frac{c^2}{2c-1} < c$$

となり矛盾が生じる．ゆえに，$\mathcal{H}_\xi = \{h\}$ である．

最後に，一意性より h は点列 $\{y_j\}$ に無関係であることがわかる． □

極限関数 $K_\Omega(\cdot,\xi)$ を ξ に極をもつ Ω の Martin 核という．

系 2.11. V は $\partial\Omega$ 内の相対的開集合とし，$y \in \Omega$ とする．h は Ω 上の正値調和関数で $h = 0$ on V とする．このとき，

$$\frac{h}{G_\Omega(\cdot,y)} \in C(\Omega \cup V)$$

である．

証明. $\xi \in V$ とし，$0 < r < \min\{r_0, |y-\xi|/\kappa\}$ を $B(\xi,\kappa r) \cap \partial\Omega \subset V$ にとる．命題 1.17 の証明と同様にして

$$\frac{h(x)}{G_\Omega(x,y)} = \int_{\Omega\setminus B(\xi,\kappa r)} \frac{G_\Omega(x,z)}{G_\Omega(x,y)} d\mu(z) \quad \text{for } x \in \Omega \cap B(\xi,r)$$

がわかる．定理 2.10 より，$x \to \xi$ とすると

$$\frac{G_\Omega(x,z)}{G_\Omega(x,y)} = \frac{G_\Omega(z,x)/G_\Omega(x_0,x)}{G_\Omega(y,x)/G_\Omega(x_0,x)} \to \frac{K_\Omega(z,\xi)}{K_\Omega(y,\xi)}$$

であり，$G_\Omega(x,z)/G_\Omega(x,y)$ は $(x,z) \in (\Omega \cap B(\xi,r)) \times (\Omega \setminus B(\xi,\kappa r))$ 上で有界であるから，Lebesgue の収束定理より $h/G_\Omega(\cdot,y)$ は点 ξ で連続である． □

定理 2.12. h が Ω 上の正値調和関数ならば，$\partial\Omega$ 上の測度 μ が存在して

$$h(x) = \int_{\partial\Omega} K_\Omega(x,y)d\mu(y) \quad \text{for } {}^\forall x \in \Omega \tag{2.2}$$

と表される．

証明. 領域の列 $\{\omega_j\}$ を $x_0 \in \omega_1$，$\omega_j \subset \omega_{j+1}$，$\Omega = \bigcup_j \omega_j$ にとる．命題 1.17 より，$\partial\omega_j$ 上の測度 ν_j が存在して

$$h(x) = \int_{\partial\omega_j} G_\Omega(x,y)d\nu_j(y) = \int_{\partial\omega_j} \frac{G_\Omega(x,y)}{G_\Omega(x_0,y)} d\mu_j(y) \quad \text{for } x \in \omega_j$$

である．但し，$d\mu_j(y) = G_\Omega(x_0, y)d\nu_j(y)$ である．$\mu_j(\overline{\Omega}) = h(x_0)$ である．$\{\mu_j\}$ はコンパクト集合 $\overline{\Omega}$ 上の有界列より適当な部分列をとると $\overline{\Omega}$ 上の測度 μ に w^*-収束する．$\operatorname{supp}\mu_j \to \partial\Omega$ より $\operatorname{supp}\mu \subset \partial\Omega$ である．定理 2.10 より $G_\Omega(x,\cdot)/G_\Omega(x_0,\cdot) \in C(\overline{\Omega} \setminus \{x\})$ であるから (2.2) が従う． □

注意 2.13. 実は，測度 μ の一意性もいえる．少し長くなるので省略する．

3 Green 関数と Martin 核に対する大域的評価

この節では，境界 Harnack 原理の応用として，Green 関数の大域的評価を示す．滑らかな領域における Green 関数の大域的評価は 1986 年に Zhao [25] により与えられた．Lipschitz 領域の場合は少し工夫が必要で 2000 年に Bogdan [8] が補助的集合 $\mathcal{B}(x,y)$ を導入することで拡張している．更に，Hansen [11] は一様領域で示し，３ G 不等式との同値性も調べている．非有界領域の１つの例である錐領域においては下で定義する関数 g ではなくて無限遠点の Martin 核を用いると上手く評価できることがわかっている（[12]）．論文 [12] で定義した $\mathcal{B}(x,y)$ を用いて Bogdan や Hansen より短い証明を与える．

$x, y \in \Omega$ に対して

$$\mathcal{B}(x,y) = \left\{ b \in \Omega : \frac{1}{\kappa}\max\{|x-b|, |b-y|\} \le |x-y| \le \kappa\delta_\Omega(b) \right\}$$

とする．$\kappa > 1$ を十分大きくとると，任意の $x, y \in \Omega$ に対して $\mathcal{B}(x,y) \neq \emptyset$ がわかる．$x_0 \in \Omega$ を固定し，

$$g(x) = \min\{1, G_\Omega(x, x_0)\}$$

とする．

定理 3.1. Ω は Lipschitz 領域とする．このとき，任意の $x, y \in \Omega$ と $b \in \mathcal{B}(x,y)$ に対して

$$G_\Omega(x,y) \approx \frac{g(x)g(y)}{g(b)^2}|x-y|^{2-n} \tag{3.1}$$

が成り立つ．但し，比較定数は Ω のみに依存する．

証明. $r_0 > 0$ と $\kappa > 0$ は Lipschitz 領域に関する定数とし，

$$A_2 = \max\left\{20\kappa, \frac{4\operatorname{diam}\Omega}{r_0}\right\}$$

とする．$\delta_\Omega(x_0) \ge \kappa r_0$ としてよい．また，$\delta_\Omega(x) \le \delta_\Omega(y)$ として示せばよい．２つの場合にわけて示す．

Case 1: $|x-y| \le A_2\delta_\Omega(x)$ の場合. $\mathcal{B}(x,y)$ の定義より

$$\max\{|x-b|, |y-b|\} \le \kappa|x-y| \le \kappa^2 A_2 \min\{\delta_\Omega(x), \delta_\Omega(y), \delta_\Omega(b)\}$$

である．よって，補題 2.4 と Harnack の不等式より

$$g(x) \approx g(b) \approx g(y) \quad \text{と} \quad G_\Omega(x,y) \approx |x-y|^{2-n}$$

が従う．よって，(3.1) を得る．
Case 2: $|x-y| > A_2\delta_\Omega(x)$ **の場合．** $r = |x-y|/A_2$ とすると，$r < r_0/4$ かつ $\delta_\Omega(x) < r$ である．$x_b \in \partial\Omega$ を $|x_b - x| = \delta_\Omega(x)$ にとる．容易に，$|y - x_b| \geq 4\kappa r$ と $|x_0 - x_b| \geq 4\kappa r$ がわかる．$x_1 \in \Omega \cap S(x_b, r/2)$ を $\delta_\Omega(x_1) \approx r$ にとる．$|b - x_1| \leq A\min\{\delta_\Omega(b), \delta_\Omega(x_1)\}$ より，$g(b) \approx g(x_1) \approx G_\Omega(x_1, x_0)$ が従う．よって，定理 2.8 より

$$G_\Omega(x,y) \approx \frac{G_\Omega(x_1,y)}{G_\Omega(x_1,x_0)} G_\Omega(x,x_0) \approx \frac{g(x)}{g(b)} G_\Omega(x_1,y) \tag{3.2}$$

である．さらに 2 つの場合を考える．
Subcase 2.1: $\delta_\Omega(y) \geq r$ **の場合．** $|x_1 - y| \leq Ar \leq A\min\{\delta_\Omega(x_1), \delta_\Omega(y)\}$ より，$G_\Omega(x_1,y) \approx |x_1 - y|^{2-n} \approx |x-y|^{2-n}$ である．また，$|y-b| \leq A\min\{\delta_\Omega(y), \delta_\Omega(b)\}$ より，$g(y) \approx g(b)$ である．よって，(3.2) と併せて (3.1) を得る．
Subcase 2.2: $\delta_\Omega(y) < r$ **の場合．** $y_b \in \partial\Omega$ を $|y_b - y| = \delta_\Omega(y)$ にとり，$y_1 \in \Omega \cap S(y_b, r)$ を $\delta_\Omega(y_1) \approx r$ にとる．$|x_1 - y_b| \geq 4\kappa r$ であるから，定理 2.8 より

$$G_\Omega(x_1,y) \approx \frac{G_\Omega(x_1,y_1)}{G_\Omega(x_0,y_1)} G_\Omega(x_0,y) \approx \frac{g(y)}{g(y_1)} G_\Omega(x_1,y_1)$$

が従う．$|x_1 - y_1| \leq A\min\{\delta_\Omega(x_1), \delta_\Omega(y_1)\}$ より，$G_\Omega(x_1,y_1) \approx |x_1 - y_1|^{2-n} \approx |x-y|^{2-n}$ である．また，$|y_1 - b| \leq Ar \leq A\min\{\delta_\Omega(y_1), \delta_\Omega(b)\}$ より，$g(y_1) \approx g(b)$ である．よって，(3.2) と併せて (3.1) を得る．以上で定理の証明を終わる．□

Lipschitz 領域のなかでも $C^{1,1}$ 領域においては，Green 関数や Martin 核は次のように具体的な関数で評価できる．

定理 3.2. Ω は有界 $C^{1,1}$ 領域とする．任意の $x, y \in \Omega$ と $\xi \in \partial\Omega$ に対して

$$G_\Omega(x,y) \approx \min\left\{1, \frac{\delta_\Omega(x)\delta_\Omega(y)}{|x-y|^2}\right\} |x-y|^{2-n} \tag{3.3}$$

$$K_\Omega(x,\xi) \approx \frac{\delta_\Omega(x)}{|x-\xi|^n} \tag{3.4}$$

が成り立つ．但し，比較定数は Ω のみに依存する．

証明． $x \in \Omega$ は境界に十分近いとし，$x_b \in \partial\Omega$ を $|x_b - x| = \delta_\Omega(x)$ にとる．Ω が $C^{1,1}$ 領域ならば，x_b で外接する 2 つの球 $B_1 \subset \Omega$ と $B_2 \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$（半

径は Ω によって決まる）がとれる．B_1 の中心を z とすると，$G_{B_1}(x,z) \le G_\Omega(x,z) \le G_{\mathbb{R}^n\setminus\overline{B_2}}(x,z)$ より，$G_\Omega(x,x_0) \approx G_\Omega(x,z) \approx \delta_\Omega(x)$ が従う．特に，

$$g(x) \approx \delta_\Omega(x) \quad \text{for } {}^\forall x \in \Omega$$

に注意する．$\delta_\Omega(x) \le \delta_\Omega(y)$ として (3.3) を示せばよい．２つの場合を考える．$b \in \mathcal{B}(x,y)$ とする．

Case 1: $|x-y| \le \delta_\Omega(y)/3$ **の場合.** $|x-y| \le \delta_\Omega(x)/2$ より，$g(b) \approx g(x) \approx g(y)$ が従う．定理 3.1 より，

$$G_\Omega(x,y) \approx |x-y|^{2-n} \approx \min\left\{1, \frac{\delta_\Omega(x)\delta_\Omega(y)}{|x-y|^2}\right\}|x-y|^{2-n}$$

を得る．

Case 2: $|x-y| > \delta_\Omega(y)/3$ **の場合.** $g(b) \approx \delta_\Omega(b) \approx |x-y|$ より

$$\frac{g(x)g(y)}{g(b)^2} \approx \frac{\delta_\Omega(x)\delta_\Omega(y)}{|x-y|^2} \approx \min\left\{1, \frac{\delta_\Omega(x)\delta_\Omega(y)}{|x-y|^2}\right\}$$

であるから，定理 3.1 より (3.3) を得る．

次に (3.4) を示す．y は境界に十分近いとする．(3.1) より

$$\frac{G_\Omega(x,y)}{G_\Omega(x_0,y)} \approx \frac{\delta_\Omega(x)}{\delta_\Omega(b)^2}|x-y|^{2-n}$$

である．$y \to \xi$ のとき，b は $\mathcal{B}(x,\xi)$ に集積点 b_0 をもつ（点列をとって考える）．$\delta_\Omega(b_0) \approx |x-\xi|$ より，

$$K_\Omega(x,\xi) \approx \frac{\delta_\Omega(x)}{\delta_\Omega(b_0)^2}|x-\xi|^{2-n} \approx \frac{\delta_\Omega(x)}{|x-\xi|^n}$$

を得る． □

次の２つの系は定理 3.2 を用いて容易に示される．

系 3.3. Ω は有界 $C^{1,1}$ 領域とし，$\xi \in \partial\Omega$ と $r > 0$ とする．$x, y \in \Omega$ が $|x-y| < r < |x-\xi|/2$ を満たすならば，

$$K_\Omega(x,\xi)K_\Omega(y,\xi) \le \frac{A}{r^n}G_\Omega(x,y)$$

が成り立つ．但し，A は Ω のみに依存する定数である．

系 3.4. Ω は有界 $C^{1,1}$ 領域とし，$\xi \in \partial\Omega$ と $r > 0$ とする．$x, y \in \Omega$ が $|x-y| \ge r$ を満たすならば，

$$G_\Omega(x,y) \le \frac{A}{r^n}K_\Omega(x,\xi)K_\Omega(y,\xi)$$

が成り立つ．但し，A は Ω のみに依存する定数である．

4 非線形楕円型方程式の正値解

この節では，最も基本的な非線形楕円型方程式（Lane-Emden 方程式）

$$-\Delta u = u^p$$

の正値解について述べる．特に，ポテンシャル解析を応用し，境界に極をもつ正値解の存在および境界増大評価を示す．ゼロ境界値問題や孤立特異点をもつ解の存在は微分方程式論的方法で研究され，次のことは古くから知られている．Ω は単位球とし，$p > 1$ とする．

(1) $p < (n+2)/(n-2)$ のときに限り，

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

は正値解をもつ．

(2) $p < n/(n-2)$ のときに限り，

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p & \text{in } \Omega \setminus \{0\} \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

は原点付近で $u(x) \approx |x|^{2-n}$ を満たす正値解をもつ．

(1) については [23] にまとめられている．(2) については [17, 20, 21, 24] などを参照されたい．特に，[24] では Lipschitz 領域においてポテンシャル論的手法で証明が与えられている．論文 [12] では，錐領域において無限遠点に極をもつ正値解の存在を調べている．

4.1 境界に極をもつ正値解の存在

次の 2 つの定理より，Martin 核と比較可能な正値解の存在に関する p の臨界値は $(n+1)/(n-1)$ であることがわかる．以下，Ω は有界 $C^{1,1}$ 領域とする．

定理 4.1. $\xi \in \partial\Omega$ とする．$1 < p < (n+1)/(n-1)$ ならば，

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \setminus \{\xi\} \end{cases} \tag{4.1}$$

の正値解 $u \in C^2(\Omega)$ で

$$u(x) \approx \frac{\delta_\Omega(x)}{|x-\xi|^n} \quad \text{for } x \in \Omega \tag{4.2}$$

を満たすものが存在する．

定理 4.2. $\xi \in \partial\Omega$ とする．$p \geq (n+1)/(n-1)$ ならば，(4.2) を満たす (4.1) の正値解は存在しない．

証明. 仮に (4.1) は (4.2) を満たす正値解 u をもつとする．Riesz の分解定理と定理 3.2 より，

$$
\begin{aligned}
u(x) &\geq \int_{\Omega\setminus B(x,\delta_\Omega(x)/2)} G_\Omega(x,y)(-\Delta u(y))dy \\
&\geq \frac{1}{A}\int_{\Omega\setminus B(x,\delta_\Omega(x)/2)} \frac{\delta_\Omega(x)\delta_\Omega(y)}{|x-y|^n}\left(\frac{\delta_\Omega(y)}{|y-\xi|^n}\right)^p dy \\
&\geq \frac{1}{A}\delta_\Omega(x)\int_{\{y\in\Omega:|y-\xi|<\delta_\Omega(y)\}\setminus B(x,\delta_\Omega(x)/2)} \frac{1}{|y-\xi|^{np-1-p}}dy
\end{aligned}
$$

が従う．$p \geq (n+1)/(n-1)$ ならば，最後の積分は発散するから $u \equiv +\infty$ となる．ゆえに，(4.2) を満たす正値解は存在しない．□

定理 4.1 の証明は，一般化 Kato 族を導入しその性質と不動点定理を用いて与えられる．G_Ω を Ω の Green 関数，$K_\Omega(\cdot,\xi)$ を ξ に極をもつ Ω の Martin 核とし，

$$H_\xi(x,y) = \frac{G_\Omega(x,y)K_\Omega(y,\xi)}{K_\Omega(x,\xi)}$$

とする．Ω 上の可測関数 f が $\xi \in \partial\Omega$ に関する一般化 Kato 族 $\mathcal{K}_\xi(\Omega)$ に属するとは，

$$\lim_{r\to 0}\left(\sup_{x\in\Omega}\int_{\Omega\cap B(x,r)} H_\xi(x,y)|f(y)|dy\right) = 0 \tag{4.3}$$

$$\lim_{r\to 0}\left(\sup_{x\in\Omega}\int_{\Omega\cap B(\xi,r)} H_\xi(x,y)|f(y)|dy\right) = 0 \tag{4.4}$$

を満たすときをいう．また，

$$\|f\|_{\mathcal{K}_\xi(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega}\int_\Omega H_\xi(x,y)|f(y)|dy$$

とする．

注意 4.3. 加藤敏夫氏による Kato 族は $H_\xi(x,y)$ の代わりに Newton 核 $|x-y|^{2-n}$ を用いて定義された．つまり，任意の $z \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\lim_{r\to 0}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\int_{\Omega\cap B(z,r)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-2}}dy\right) = 0$$

を満たす可測関数 f の全体である．包含関係 Kato 族 $\subsetneq \mathcal{K}_\xi(\Omega)$ が成り立つことに注意する．より一般に $-\Delta u(x) = \delta_\Omega(x)^{-\alpha}u(x)^p$ なる方程式を考える際，Kato 族の範疇ではシャープな α や p に対して (4.2) を満たす正値解の存在を検証できないが，一般化 Kato 族を考えることで克服できる．

補題 4.4. $1 < p < (n+1)/(n-1)$ ならば，$K_\Omega(\cdot,\xi)^{p-1} \in \mathcal{K}_\xi(\Omega)$ である．特に，$\|K_\Omega(\cdot,\xi)^{p-1}\|_{\mathcal{K}_\xi(\Omega)} < \infty$ である．

証明. $x \in \Omega$ と $r > 0$ とし，

$$\begin{aligned}
E_1 &= \Omega \cap B(x,r) \cap B(x, \delta_\Omega(x)/2) \\
E_2 &= \big(\Omega \cap B(x,r) \setminus B(x,\delta_\Omega(x)/2)\big) \setminus B(\xi, |x-\xi|/2) \\
E_3 &= \big(\Omega \cap B(x,r) \setminus B(x,\delta_\Omega(x)/2)\big) \cap B(\xi, |x-\xi|/2)
\end{aligned}$$

とする．定理 3.2 より

$$\begin{aligned}
H_\xi(x,y)K_\Omega(y,\xi)^{p-1} &\le A\frac{\delta_\Omega(y)^p}{\delta_\Omega(x)}\frac{|x-\xi|^n}{|x-y|^{n-2}|y-\xi|^{np}} \\
&\le \frac{A}{|x-y|^{np-1-p}} \quad \text{for } y \in E_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_\xi(x,y)K_\Omega(y,\xi)^{p-1} &\le A\frac{\delta_\Omega(y)^{1+p}|x-\xi|^n}{|x-y|^n|y-\xi|^{np}} \\
&\le \begin{cases} \dfrac{A}{|x-y|^{np-1-p}} & \text{for } y \in E_2 \\[2ex] \dfrac{A}{|y-\xi|^{np-1-p}} & \text{for } y \in E_3 \end{cases}
\end{aligned}$$

が従う．$E_3 \ne \emptyset$ ならば $E_3 \subset B(\xi, r)$ に注意して，

$$\int_{\Omega\cap B(x,r)} H_\xi(x,y)K_\Omega(y,\xi)^{p-1}dy \le Ar^{n+p+1-np} \tag{4.5}$$

がわかる．よって，$K_\Omega(\cdot,\xi)^{p-1}$ は (4.3) を満たす．十分小さい $\delta > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\cap B(\xi,r)} H_\xi(x,y)K_\Omega(y,\xi)^{p-1}dy &\le \varepsilon + \int_{\Omega\cap B(\xi,r)\setminus B(x,\delta)} H_\xi(x,y)K_\Omega(y,\xi)^{p-1}dy \\
&\le \varepsilon + A\frac{|x-\xi|^n}{\delta^n}\int_{B(\xi,r)} |y-\xi|^{1+p-np}dy \\
&\le \varepsilon + \frac{A}{\delta^n}r^{n+1+p-np}
\end{aligned}$$

であるから (4.4) も満たす．$\|K_\Omega(\cdot,\xi)^{p-1}\|_{\mathcal{K}_\xi(\Omega)} < \infty$ は Ω を半径 r の球で有限被覆し (4.5) から従う． □

補題 4.5. $1 < p < (n+1)/(n-1)$ とする．任意の $z \in \overline{\Omega}$ に対して

$$\lim_{r\to 0}\left(\sup_{x\in\Omega}\int_{\Omega\cap B(z,r)} H_\xi(x,y)K_\Omega(y,\xi)^{p-1}dy\right) = 0$$

が成り立つ．

証明. $x \in \Omega$ と $r > 0$ とする．補題 4.4 と系 3.4 より

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega \cap B(z,r)} H_\xi(x,y) K_\Omega(y,\xi)^{p-1} dy \\
&\quad \le \varepsilon + \int_{\Omega \cap B(z,r) \setminus (B(x,\delta) \cup B(\xi,\delta))} H_\xi(x,y) K_\Omega(y,\xi)^{p-1} dy \\
&\quad \le \varepsilon + \frac{A}{\delta^n} \int_{\Omega \cap B(z,r) \setminus B(\xi,\delta)} K(y,\xi)^{p+1} dy
\end{aligned}$$

が従う．$\int_{\Omega \setminus B(\xi,\delta)} K_\Omega(y,\xi)^{p+1} dy < \infty$ より結論を得る． □

以下，$1 < p < (n+1)/(n-1)$ とする．$\lambda > 0$ とし，

$$W_\lambda = \left\{ w \in C(\overline{\Omega}) : \frac{\lambda}{2} \le w \le \frac{3}{2}\lambda \right\}$$

とする．W_λ 上の作用素を

$$T_\lambda w(x) = \lambda + \frac{1}{K_\Omega(x,\xi)} \int_\Omega G_\Omega(x,y) \big(w(y) K_\Omega(y,\xi) \big)^p dy$$

で定義する．

補題 4.6. $w \in W_\lambda$ に対して，$T_\lambda w \in C(\overline{\Omega})$ である．

証明. $z \in \overline{\Omega} \setminus \{\xi\}$ と $0 < \delta < |z - \xi|/2$ とし，$x_1, x_2 \in \Omega \cap B(z, \delta/2)$ とする．補題 4.5 より，十分小さい $\delta > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
&|T_\lambda w(x_1) - T_\lambda w(x_2)| \\
&\quad \le \varepsilon + A \int_{\Omega \setminus (B(z,\delta) \cup B(\xi,\delta))} \left| \frac{G_\Omega(x_1,y)}{K_\Omega(x_1,\xi)} - \frac{G_\Omega(x_2,y)}{K_\Omega(x_2,\xi)} \right| K_\Omega(y,\xi)^p dy
\end{aligned} \tag{4.6}$$

が従う．系 2.11 と境界 Harnack 原理より $G_\Omega(x,y)/K_\Omega(x,\xi) \in C(\overline{\Omega} \setminus \{y\})$ がわかる．系 3.4 より被積分関数は $K_\Omega(y,\xi)^{p+1}$ で上から押さえられるから，Lebesgue の収束定理より $|x_1 - x_2| \to 0$ のとき $|T_\lambda(x_1) - T_\lambda(x_2)| \to 0$ が従う．よって，点 z で連続である．点 ξ で連続であることも同様にわかる． □

補題 4.7. 定数 $\lambda_0 > 0$ が存在して，$0 < \lambda < \lambda_0$ に対して T_λ は W_λ から W_λ への縮小写像である．

証明. まず，$w \in W_\lambda$ に対して $T_\lambda w \in W_\lambda$ であることを示す．$\|K_\Omega(\cdot,\xi)^{p-1}\|_{\mathcal{K}_\xi(\Omega)} < \infty$ より，十分小さい $\lambda > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
|T_\lambda w(x) - \lambda| &\le \int_\Omega H_\xi(x,y) w(y)^p K_\Omega(y,\xi)^{p-1} dy \\
&\le \left(\frac{3}{2}\lambda \right)^p \|K_\Omega(\cdot,\xi)^{p-1}\|_{\mathcal{K}_\xi(\Omega)} \\
&\le \frac{1}{2}\lambda
\end{aligned}$$

となる．補題 4.6 と併せて $T_\lambda w \in W_\lambda$ を得る．次に，$w_1, w_2 \in W_\lambda$ とすると，

$$\begin{aligned}|T_\lambda w_1(x) - T_\lambda w_2(x)| &\le \int_\Omega H_\xi(x,y)|w_1(y)^p - w_2(y)^p| K_\Omega(y,\xi)^{p-1} dy \\ &\le \|w_1^p - w_2^p\|_\infty \|K_\Omega(\cdot,\xi)^{p-1}\|_{\mathcal{K}_\xi(\Omega)} \\ &\le p\left(\frac{3}{2}\lambda\right)^{p-1} \|w_1 - w_2\|_\infty \|K_\Omega(\cdot,\xi)^{p-1}\|_{\mathcal{K}_\xi(\Omega)} \\ &\le \frac{1}{2}\|w_1 - w_2\|_\infty\end{aligned}$$

であるから T_λ は縮小写像である． □

定理 4.1 の証明. $0 < \lambda < \lambda_0$ とする．W_λ の完備性と T_λ の縮小性より，T_λ は不動点 $w \in W_\lambda$ をもつ．つまり，$w = T_\lambda w$ である．$u = wK_\Omega(\cdot,\xi)$ とすると，

$$u(x) = \lambda K_\Omega(x,\xi) + \int_\Omega G_\Omega(x,y)u(y)^p dy$$

である．$u \in L^1_{loc}(\Omega)$ と命題 1.19 より $u \in C^1(\Omega)$ であり，更に $u \in C^2(\Omega)$ と $-\Delta u = u^p$ in Ω が従う．また，定理 3.2 より (4.2) も従う．$u/K_\Omega(\cdot,\xi) = T_\lambda w \in C(\overline{\Omega})$ と $K_\Omega(\cdot,\xi) = 0$ on $\partial\Omega \setminus \{\xi\}$ より $u = 0$ on $\overline{\Omega} \setminus \{\xi\}$ がわかる． □

4.2 正値解に対する境界増大評価

定理 4.8. $0 < p \le (n+1)/(n-1)$ ならば，

$$-\Delta u = u^p \quad \text{in } \Omega \tag{4.7}$$

の全ての正値解 u は

$$u(x) \le A\delta_\Omega(x)^{1-n} \quad \text{for } x \in \Omega$$

を満たす．但し，A は u, p, Ω のみに依存する定数である．

定理を証明する為の準備をする．(4.7) の正値解 u は Ω 上の正値優調和関数であるから，Riesz の分解定理より

$$u(x) = h(x) + \int_\Omega G_\Omega(x,y)(-\Delta u(y))dy \tag{4.8}$$

が従う．但し，h は Ω 上の u の最大調和劣関数である．特に，$h \ge 0$ である．定理 2.12 と (3.4) を用いて，

$$h(x) \le A\delta_\Omega(x)^{1-n} \quad \text{for } x \in \Omega$$

がわかる．但し，A は h と Ω のみに依存する定数である．また，(3.3) を用いて次の 2 つの補題を導くことができる．

補題 4.9. u と Ω のみに依存する定数 A が存在して，任意の $z \in \Omega$ に対して

$$\delta_\Omega(z) \int_{B(z,\delta_\Omega(z)/2)} (-\Delta u(y))dy \le A$$

が成り立つ.

補題 4.10. 各 $j \in \mathbb{N}$ に対して，j, u と Ω のみに依存する定数 $c_j > 0$ が存在して，任意の $z \in \Omega$ と $x \in B(z, \delta_\Omega(z)/2^{j+1})$ に対して

$$u(x) \le c_j \delta_\Omega(z)^{1-n} + \int_{B(z,\delta_\Omega(z)/2^j)} \frac{-\Delta u(y)}{|x-y|^{n-2}} dy$$

が成り立つ.

定理 4.8 の証明. 簡単のために $B(r) = B(0,r)$ と書く．$z \in \Omega$ と $j \in \mathbb{N}$ とする．$r = \delta_\Omega(z)$ とし，$\psi_z(\zeta) = r^{n+1}(-\Delta u(z + r\zeta))$ とする．補題 4.9 と補題 4.10 において，$x = z + r\eta$，$y = z + r\zeta$ と変数変換すると，

$$\int_{B(1/2)} \psi_z(\zeta) d\zeta \le A \tag{4.9}$$

$$r^{n-1} u(z + r\eta) \le c_j + \int_{B(2^{-j})} \frac{\psi_z(\zeta)}{|\eta - \zeta|^{n-2}} d\zeta \quad \text{for } \eta \in B(2^{-(j+1)}) \tag{4.10}$$

が従う．$0 < p \le (n+1)/(n-1)$ とし，

$$\frac{n+1}{n-1} < q < \frac{n}{n-2}, \quad \ell = \left[\frac{\log(q/(q-1))}{\log(q/p)} \right] + 1, \quad c_0 = \max_{1 \le j \le \ell+1} \{c_j\}$$

とする．また，

$$\Psi_{z,j}(\eta) = c_0 + \int_{B(2^{-j})} \frac{\psi_z(\zeta)}{|\eta - \zeta|^{n-2}} d\zeta$$

と定義する．(4.10) と Hölder の不等式より

$$\delta_\Omega(z)^{n-1} u(z) = r^{n-1} u(z) \le \Psi_{z,\ell+1}(0) \le c_0 + A \|\psi_z\|_{L^{q/(q-1)}(B(2^{-(\ell+1)}))}$$

が従うので，定理 4.8 の結論を得る為には z に無関係な定数 A が存在して

$$\|\psi_z\|_{L^{q/(q-1)}(B(2^{-(\ell+1)}))} \le A \tag{4.11}$$

となることを示せばよい．その為にまず，各 $\kappa \ge 1$ に対して $\kappa, c_0, p, q, \Omega$ のみに依存する定数 A が存在して

$$\|\psi_z^{\kappa/p}\|_{L^q(B(2^{-(j+1)}))} \le A + A \|\psi_z^\kappa\|_{L^1(B(2^{-j}))} \tag{4.12}$$

が成り立つことを示す．Jensen の不等式より

$$\left(\int_{B(2^{-j})} \frac{\psi_z(\zeta)}{|\eta - \zeta|^{n-2}} d\zeta \right)^\kappa \le 2^{\kappa - 1} \int_{B(2^{-j})} \frac{\psi_z(\zeta)^\kappa}{|\eta - \zeta|^{n-2}} d\zeta \quad \text{for } \eta \in B(1)$$

が従う．よって，Minkowski の不等式より

$$\begin{aligned}
\|\Psi^{\kappa}_{z,j}\|_{L^q(B(2^{-j}))} &\le A + A\left\| \int_{B(2^{-j})} \frac{\psi_z(\zeta)^{\kappa}}{|\cdot - \zeta|^{n-2}} d\zeta \right\|_{L^q(B(2^{-j}))} \\
&\le A + A\|\psi_z^{\kappa}\|_{L^1(B(2^{-j}))}
\end{aligned}$$

となる．ところで，(4.7), (4.10) と $p \le (n+1)/(n-1)$ より，$\eta \in B(2^{-(j+1)})$ に対して

$$\psi_z(\eta) = r^{n+1}(-\Delta u(z + r\eta)) = r^{n+1} u(z + r\eta)^p \le A\Psi_{z,j}(\eta)^p$$

であるから (4.12) を得る．$s = q/p > 1$ とすると，(4.12) より

$$\int_{B(2^{-(j+1)})} \psi_z(\eta)^{\kappa s} d\eta \le A + A\left(\int_{B(2^{-j})} \psi_z(\eta)^{\kappa} d\eta \right)^q$$

である．これを ℓ 回繰り返し用いる．$s^{\ell} \ge q/(q-1)$ に注意して，Hölder の不等式より

$$\begin{aligned}
\|\psi_z\|_{L^{q/(q-1)}(B(2^{-(\ell+1)}))} &\le A\left(\int_{B(2^{-(\ell+1)})} \psi_z(\eta)^{s^{\ell}} d\eta \right)^{1/s^{\ell}} \\
&\le A + A\left(\int_{B(2^{-\ell})} \psi_z(\eta)^{s^{\ell-1}} d\eta \right)^{q/s^{\ell}} \\
&\le \cdots \\
&\le A + A\left(\int_{B(1/2)} \psi_z(\eta) d\eta \right)^{q^{\ell}/s^{\ell}}
\end{aligned}$$

を得る．よって，(4.9) より (4.11) が従う．以上で定理 4.8 の証明が完成である． □

注意 4.11. 第 4 節の内容は論文 [13] で得た結果の特別な場合をまとめたものである．もう少し詳しいことやもう少し一般の非線形楕円型方程式に関する結果は論文 [13] を参照されたい．

参考文献

[1] H. Aikawa, *Boundary Harnack principle and Martin boundary for a uniform domain*, J. Math. Soc. Japan **53** (2001), no. 1, 119–145.

[2] H. Aikawa, *Equivalence between the boundary Harnack principle and the Carleson estimate*, preprint.

[3] H. Aikawa, K. Hirata and T. Lundh, *Martin boundary points of a John domain and unions of convex sets*, J. Math. Soc. Japan **58** (2006), no. 1, 247–274.

[4] A. Ancona, *Une propriété de la compactification de Martin d'un domaine euclidien*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **29** (1979), no. 4, ix, 71–90.

[5] A. Ancona, *Sur la frontière de Martin des domaines de Denjoy*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **15** (1990), no. 2, 259–271.

[6] D. H. Armitage and S. J. Gardiner, *Classical potential theory*, Springer-Verlag London Ltd., 2001.

[7] M. Benedicks, *Positive harmonic functions vanishing on the boundary of certain domains in* $\mathbf{R}^n$, Ark. Mat. **18** (1980), no. 1, 53–72.

[8] K. Bogdan, *Sharp estimates for the Green function in Lipschitz domains*, J. Math. Anal. Appl. **243** (2000), no. 2, 326–337.

[9] N. Chevallier, *Frontière de Martin d'un domaine de* $\mathbf{R}^n$ *dont le bord est inclus dans une hypersurface lipschitzienne*, Ark. Mat. **27** (1989), no. 1, 29–48.

[10] M. C. Cranston and T. S. Salisbury, *Martin boundaries of sectorial domains*, Ark. Mat. **31** (1993), no. 1, 27–49.

[11] W. Hansen, *Uniform boundary Harnack principle and generalized triangle property*, J. Funct. Anal. **226** (2005), no. 2, 452–484.

[12] K. Hirata, *Sharp estimates for the Green function, 3G inequalities, and nonlinear Schrödinger problems in uniform cones*, J. d'Analyse Math. (to appear)

[13] K. Hirata, *The boundary growth of superharmonic functions and positive solutions of nonlinear elliptic equations*, preprint.

[14] R. A. Hunt and R. L. Wheeden, *Positive harmonic functions on Lipschitz domains*, Trans. Amer. Math. Soc. **147** (1970), 507–527.

[15] D. S. Jerison and C. E. Kenig, *Boundary behavior of harmonic functions in nontangentially accessible domains*, Adv. in Math. **46** (1982), no. 1, 80–147.

[16] J. T. Kemper, *A boundary Harnack principle for Lipschitz domains and the principle of positive singularities*, Comm. Pure Appl. Math. **25** (1972), 247–255.

[17] Y. Li and J. Santanilla, *Existence and nonexistence of positive singular solutions for semilinear elliptic problems with applications in astrophysics*, Differential Integral Equations **8** (1995), no. 6, 1369–1383.

[18] A. Lömker, *Martin boundaries of quasi-sectorial domains*, Potential Anal. **13** (2000), no. 1, 11–67.

[19] R. S. Martin, *Minimal positive harmonic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **49** (1941), 137–172.

[20] W. M. Ni, *On a singular elliptic equation*, Proc. Amer. Math. Soc. **88** (1983), no. 4, 614–616.

[21] W. M. Ni and R. D. Nussbaum, *Uniqueness and nonuniqueness for positive radial solutions of* $\Delta u + f(u, r) = 0$, Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985), no. 1, 67–108.

[22] S. C. Port and C. J. Stone, *Brownian motion and classical potential theory*, Academic Press, New York, 1978.

[23] T. Suzuki, *Semilinear elliptic equations*, Gakkōtosho Co. Ltd., Tokyo, 1994.

[24] Q. S. Zhang and Z. Zhao, *Singular solutions of semilinear elliptic and parabolic equations*, Math. Ann. **310** (1998), no. 4, 777–794.

[25] Z. Zhao, *Green function for Schrödinger operator and conditioned Feynman-Kac gauge*, J. Math. Anal. Appl. **116** (1986), no. 2, 309–334.