

Morita equivalence for groupoids

廣田祐士*

慶應義塾大学大学院理工学研究科

1 Groupoids

定義 1.1 集合 G, G_0 と以下の条件を満たす写像 $s, t : G \rightarrow G_0$ および $\iota : G \rightarrow G, \varepsilon : G_0 \rightarrow G$ が存在するとき, G を G_0 上の groupoid とよぶ.

1. 積 $G^{(2)} := \{(g, h) \mid g, h \in G, s(g) = t(h)\} \rightarrow G, (g, h) \mapsto gh$ が定義されて,

$$s(gh) = s(h), \quad t(gh) = t(g), \quad (gh)k = g(hk)$$

が成り立つ.

2. $s \circ \varepsilon = t \circ \varepsilon = id_X$

3. $g = g\varepsilon(s(g)) = \varepsilon(t(g))g$

4. $\iota(g) = g^{-1}$ と書くとき, $s(g^{-1}) = t(g), \quad t(g^{-1}) = s(g)$ が成り立つ.

上の定義であらわれた写像 $s : G \rightarrow G_0, t : G \rightarrow G_0$ をそれぞれ source map, target map とよび, $\iota : G \rightarrow G, \varepsilon : G_0 \rightarrow G$ を inversion map, identity section という. また, G_0 上の groupoid G を $G \rightrightarrows G_0$ と書く.

例 1.2 任意の群 G は一点 $\{*\}$ 上の groupoid である.

□

例 1.3 (pair groupoid) 集合 X の直積 $G := X \times X$ は, 定義 1.1 で掲げた写像を

$$\begin{aligned} s : G &\rightarrow X, (x, y) \mapsto y, & t : G &\rightarrow X, (x, y) \mapsto x \\ \varepsilon : X &\rightarrow G, x \mapsto (x, x), & \iota : G &\rightarrow G, (x, y) \mapsto (y, x) \\ G^{(2)} &\rightarrow G, ((x, y), (y, z)) \mapsto (x, z) \end{aligned}$$

と定めることで, X 上の groupoid となる. これを pair groupoid, もしくは coarse groupoid とよぶ.

□

*hirota@math.keio.ac.jp

例 1.4 (action groupoid) C^∞ 級多様体 X に Lie 群 G が作用しているとき, 定義 1.1 で掲げた写像を

$$\begin{aligned} s : G \times X &\rightarrow X, (g, x) \mapsto x, & t : G \times X &\rightarrow X, (g, x) \mapsto g \cdot x \\ \varepsilon : X &\rightarrow G \times X, x \mapsto (e, x), & \iota : G \times X &\rightarrow G \times X, (g, x) \mapsto (g^{-1}, gx) \\ (G \times X)^{(2)} &\rightarrow G \times X, ((g, x), (h, y)) \mapsto (gh, y) \quad (\text{ただし } x = h \cdot y) \end{aligned}$$

で定義すると, $G \times X$ は X 上の groupoid となる. これを action groupoid とよぶ.

□

2 Morita equivalence for groupoids

集合 X から groupoid $G \rightrightarrows G_0$ の底空間 G_0 への写像 $\mu : X \rightarrow G_0$ が与えられていると仮定し,

$$G * X = \{ (g, x) \mid g \in G, x \in X, s(g) = \mu(x) \}$$

とおく. 写像 $G * X \rightarrow X, (g, x) \mapsto g \cdot x$ がつぎの条件を満たすとき $G * X \rightarrow X$ を G による X 上の左作用 とよぶ.

1. $\forall (g, x) \in G * X; \mu(g \cdot x) = t(g)$
2. $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$
3. $\forall x \in X; \varepsilon(\mu(x)) \cdot x = x$

そして写像 $\mu : X \rightarrow G_0$ を **moment map** という.

G の右作用も同様に定義される. すなわち, 上記の仮定の下で

$$X * G = \{ (x, g) \mid g \in G, x \in X, t(g) = \mu(x) \}$$

とおくとき以下の条件を満たす写像 $X * G \rightarrow X, (x, g) \mapsto x \cdot g$ を G の X の上への右作用という.

1. $\forall (x, g) \in X * G; \mu(x \cdot g) = s(g)$
2. $x \cdot (gh) = (x \cdot g) \cdot h$
3. $\forall x \in X; x \cdot \varepsilon(\mu(x)) = x$

例 2.1 任意の groupoid $G \rightrightarrows G_0$ に対して groupoid の積演算 $G^{(2)} \rightarrow G$ は target map $t : G \rightarrow G_0$ 上の左作用となる.

□

集合 X に groupoid $G \rightrightarrows G_0$ および $H \rightrightarrows H_0$ がそれぞれ左, 右から作用しており, なおかつ二つの作用が可換であるとき X を (G, H) -bibundle とよぶ. これを記号で $G_0 \xleftarrow{\rho} X \xrightarrow{\sigma} H_0$ と表わす. ここで ρ, σ はそれぞれ左作用および右作用に関する moment map $\rho : X \rightarrow G_0, \sigma : X \rightarrow H_0$ である. 更に, 右作用に関する moment map $\mu : X \rightarrow H_0$ が全射の沈めこみで, μ の各ファイバー $\mu^{-1}(p), (p \in H_0)$ に G が自由かつ推移的に作用しているとき, (G, H) -bibundle X は **left principal** であるという. 一方, 左作用に関する moment map が全射の沈めこみで, 各ファイバーに H が自由かつ推移的に作用しているとき, (G, H) -bibundle X は **right principal** であるという.

また, 二つの bibundle $G \xleftarrow{\rho} X \xrightarrow{\sigma} H, G \xleftarrow{\rho'} X' \xrightarrow{\sigma'} H$ に対して

1. $\rho'(\phi(x)) = \rho(x), \sigma'(\phi(x)) = \sigma(x) \quad (\forall x \in X)$
2. $\phi(g \cdot x) = g \cdot \phi(x), \phi(x \cdot h) = \phi(x) \cdot h \quad (\forall x \in X, g \in G, h \in H)$

を満たす全単射写像 $\phi: X \rightarrow X'$ が存在するとき, X と Y は同型であるという.

例 2.2 任意の groupoid $G \rightrightarrows G_0$ は, 自分自身が持つ積演算により左作用, 右作用が定義され, (G, G) -bibundle となる. 左作用および右作用に関する moment map はそれぞれ target map と source map である.

□

いま (G, H) -bibundle $G_0 \xleftarrow{\rho_X} X \xrightarrow{\sigma_X} H_0$ と (H, K) -bibundle $H_0 \xleftarrow{\rho_Y} Y \xrightarrow{\sigma_Y} K_0$ が与えられたと仮定する. X と Y のファイバー積

$$X \times_{H_0} Y := \{ (x, y) \mid x \in X, y \in Y, \sigma_X(x) = \rho_Y(y) \}$$

には $(x, y) \cdot h := (xh, h^{-1}y)$ と定めることで H が右側から作用することがわかる. この作用による軌道空間を $X \odot_H Y = (X \times_{H_0} Y)/H$ と書くことにすると, 軌道空間 $X \odot_H Y$ は (G, K) -bibundle となる. ここで G による左作用と K による右作用はそれぞれ $g \cdot [x, y] := [gx, y], [x, y] \cdot k := [xyk]$ で定義され, 各々の作用に関する moment map $\bar{\rho}: X \odot_H Y \rightarrow G_0, \bar{\sigma}: X \odot_H Y \rightarrow K_0$ は $\bar{\rho}([x, y]) := \rho_X(x), \bar{\sigma}([x, y]) := \sigma_Y(y) \quad ([x, y] \in X \odot_H Y, g \in G, k \in K)$ と定められる.

定義 2.3 二つの groupoid $G \rightrightarrows G_0, H \rightrightarrows H_0$ が 森田同値 であるとは, left principal かつ right principal であるような (G, H) -bibundle X が存在するときをいう.

例 2.4 $G \rightrightarrows G_0$ を任意の groupoid とする. G_0 の任意の点 x に対して $\Gamma_x = s^{-1}(x) \cap t^{-1}(x)$ とおくと Γ_x は $\{x\}$ 上の groupoid となる. もし, $G \rightrightarrows G_0$ が transitive, すなわち任意の 2 点 $x_1, x_2 \in G_0$ に対して $x_1 = s(g), x_2 = t(g)$ をみたく $g \in G$ が存在するとき, $G \rightrightarrows G_0$ と $\Gamma_x \rightrightarrows \{x\}$ は森田同値となる. このとき $s^{-1}(x)$ が (G, Γ_x) -bibundle となる.

□

さて, groupoid を対象とし, right principal bibundle の同型類を射とする圏 \mathcal{B} を考える. このとき射の合成 \circ は

$$[X] \circ [Y] := [X \odot_H Y] \quad ([X] \in \text{Mor}(G, H), [Y] \in \text{Mor}(H, K))$$

で与えられ, 恒等射は例 2.1 で挙げられた bibundle である. ここで $G \rightrightarrows G_0$ から $H \rightrightarrows H_0$ への射全体を $\text{Mor}(G, H)$ で表わした. すると groupoid の森田同値に関して次のことがわかる ([3]).

定理 2.5 二つの groupoid が森田同値であるのは, それらが圏 \mathcal{B} において同型であるときに限る.

参考文献

- [1] Bursztyn, H., Weinstein, A., Poisson geometry and Morita equivalence. math.SG/0402347.
- [2] Canna da Silva, A., Weinstein, A., *Geometric models for noncommutative geometry*, Berkeley Mathematical Lecture Notes **10**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

- [3] Landsman, N. P., Quantized reduction as a tensor product, 137-180 in N.P. Landsman, M. Pflaum, M. Schlichenmaier(eds.), *Quantization of Singular Symplectic Quotients*, Birkhäuser, Basel, 2001
- [4] Mackenzie, K., *General theory of Lie groupoids and Lie algebroids*, LMS Lecture Notes Series, **213**, Cambridge Univ. Press, 2005.

Yuji HIROTA

Department of Mathematics, Keio University
3-14-1 Hiyoshi, Yokohama, JAPAN 223-8522