1のベキ根におけるアフィン量子代数のevaluation表現

阿部　友紀*　　（上智大・理工）

1 Introduction

quantum affine algebra の表現に evaluation 表現と呼ばれるものが二種類存在する。1 のベキ根でない quantum affine algebra の evaluation 表現に関しては、Chari, Pressley 氏らにより [9] で研究されている。そこで我々は 1 のべき根における quantum affine algebra の evaluation 表現について考えたい。

このノートの主な目的は、次の３点である：

- evaluation 表現の Drinfel'd 多項式を求める。
- evaluation 表現を evaluation Schnizer 表現の部分表現として具体的に構成する。
- 二種類の evaluation 表現が同型になる条件を、次の二通りの方法で示す：
  - Drinfeld'd 多項式の理論を用いた方法。
  - evaluation Schnizer 表現の部分表現として構成したことを利用した方法。

なお、このノートの内容は、上智大学の中島俊樹先生との共同研究 [3] に基づいて書かれている。

2 1のべき根におけるquantum algebra

2.1 Notations

最初に、Lie algebra に関する基本的な記号を以下で定める：

$n \in \mathbb{N} := \{1, 2, \cdots\}$,

$\mathfrak{sl}_{n+1}$: finite-dimensional simple Lie algebra over $\mathbb{C}$ of type A_n,

$\widetilde{\mathfrak{sl}}_{n+1} = \mathfrak{sl}_{n+1} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$: loop algebra of $\mathfrak{sl}_{n+1}$,

$I := \{1, 2, \cdots, n\}$, $\quad \widetilde{I} := I \sqcup \{0\}$: index set,

$(\mathfrak{a}_{i,j})_{i,j \in \widetilde{I}}$ (resp. $(\mathfrak{a}_{i,j})_{i,j \in I}$): generalized Cartan matrix of $\widetilde{\mathfrak{sl}}_{n+1}$ (resp. $\mathfrak{sl}_{n+1}$),

$\{\alpha_i\}_{i \in \widetilde{I}}$ (resp. $\{\alpha_i\}_{i \in I}$): simple roots of $\widetilde{\mathfrak{sl}}_{n+1}$ (resp. $\mathfrak{sl}_{n+1}$),

*e-mail: yu-abe@sophia.ac.jp

$\delta := \sum_{i\in\widetilde{I}} \alpha_i$: smallest positive imaginary root,
$\widetilde{\Delta}$ (resp. Δ): root system of $\widetilde{\mathfrak{sl}}_{n+1}$ (resp. $\mathfrak{sl}_{n+1}$),
$\widetilde{\Delta}_+$ (resp. Δ_+): the set of positive roots of $\widetilde{\mathfrak{sl}}_{n+1}$ (resp. $\mathfrak{sl}_{n+1}$),
$\widetilde{\Delta}_+^{\mathrm{re}} := \{\alpha + n\delta \,|\, \alpha \in \Delta, n \in \mathbb{N}\} \sqcup \Delta_+$: the set of positive real roots of $\widetilde{\mathfrak{sl}}_{n+1}$,
$\widetilde{\Delta}_+^{\mathrm{im}} := \{m\delta \,|\, m \in \mathbb{N}\}$: the set of positive imaginary roots of $\widetilde{\mathfrak{sl}}_{n+1}$.

2.2　1のべき根における quantum algebra の定義

l を $(n+1)$ と互いに素である 3 以上の奇整数とし、ε を 1 の原始 l 乗根とする。また、任意の $r \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ に対し、q-integer 等を以下で定める:

$$[r] := \frac{\varepsilon^r - \varepsilon^{-r}}{\varepsilon - \varepsilon^{-1}}, \quad [m]! := [m][m-1]\cdots[1], \quad [0]! := 1.$$

l が $(n+1)$ と互いに素であるという条件は、次の条件と同値であることが分かる（[7] 参照)）:

$$l \text{ の倍数でない任意の } k \in \mathbb{Z} \text{ に対し、} \det([k\mathfrak{a}_{i,j}])_{i,j\in I} \neq 0.$$

この時、1 のベキ根における quantum algebra と quantum loop algebra を、1 のベキ根ではない時と同様に、以下で定義する。

Definition 2.1. *$\widetilde{U}_\varepsilon := U_\varepsilon(\widetilde{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ (resp. $U_\varepsilon := U_\varepsilon(\mathfrak{sl}_{n+1})$) を、生成元 $\{E_i, F_i, K_i^{\pm 1} \,|\, i \in \widetilde{I}$ (resp. $i \in I$)$\}$ と以下の基本関係式で与えられる associative $\mathbb{C}$-algebra とする。この時、$\widetilde{U}_\varepsilon$ (resp. U_ε) を quantum loop algebra (resp. quantum algebra) と呼ぶ:*

$$\begin{aligned}
&K_iK_i^{-1} = K_i^{-1}K_i = 1, \quad K_iK_j = K_jK_i, \quad K_0 = \prod_{m=1}^{n} K_m^{-1},\\
&K_iE_jK_i^{-1} = \varepsilon^{\mathfrak{a}_{i,j}}E_j, \quad K_iF_jK_i^{-1} = \varepsilon^{-\mathfrak{a}_{i,j}}F_j,\\
&E_iF_j - F_jE_i = \delta_{i,j}\frac{K_i - K_i^{-1}}{\varepsilon - \varepsilon^{-1}},\\
&\sum_{r=0}^{1-\mathfrak{a}_{ij}} (-1)^r E_i^{(r)}E_jE_i^{(1-\mathfrak{a}_{i,j}-r)} = \sum_{r=0}^{1-\mathfrak{a}_{ij}} (-1)^r F_i^{(r)}F_jF_i^{(1-\mathfrak{a}_{i,j}-r)} = 0 \quad i \neq j,
\end{aligned}$$

ただし、

$$E_i^{(r)} := \frac{1}{[r]!}E_i^r, \quad F_i^{(r)} := \frac{1}{[r]!}F_i^r \quad (r \in \mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \cdots\}).$$

また、$\widetilde{U}_\varepsilon^+$ (resp. $\widetilde{U}_\varepsilon^-, \widetilde{U}_\varepsilon^0$) を $\{E_i\}_{i\in\widetilde{I}}$ (resp. $\{F_i\}_{i\in\widetilde{I}}$, $\{K_i\}_{i\in\widetilde{I}}$) によって生成される、$\widetilde{U}_\varepsilon$ の $\mathbb{C}$-subalgebra とする。同様に、U_ε^+ (resp. $U_\varepsilon^-, U_\varepsilon^0$) を $\{E_i\}_{i\in I}$ (resp. $\{F_i\}_{i\in I}$, $\{K_i\}_{i\in I}$) によって生成される、U_ε の $\mathbb{C}$-subalgebra とする。

Remark 2.2. 1 のベキ根における *quantum algebra* には、*Definition 2.1* で定義したものとは別に、*Lusztig* によって定義された「制限型」（=*Lusztig* 型）と呼ばれるものがある（*[19], [22], [10]* 等参照)。制限型と区別するために、*Definition 2.1* の *quantum algebra* を非制限型

（$=$ *De Concini-Kac* 型）と呼ぶ。制限型の理論は、非制限型の理論を考える上でも必要なものだが、ここでは非制限型のみを扱うこととする（制限型と非制限型との関係については *[23], [2], [3]* 等を参照）。

2.3 Root vector と PBW basis

1 のベキ根でない場合と同様に、U_ε (resp. $\widetilde{U}_\varepsilon$) には root vector が存在し、そこから PBW basis を構成することが出来る（1 のベキ根でない quantum algebra や quantum loop algebra の root vector や PBW basis については [20], [5] などを参照）。ここでは、root vector の存在は仮定し、そこから PBW basis を構成する方法のみ紹介する。そのために、以下の記号を定めておく：

$$\widetilde{\Delta}^{\mathrm{im}}_+(I) := I \times \widetilde{\Delta}^{\mathrm{im}}_+ = \{(i, m\delta) \,|\, i \in I, m \in \mathbb{N}\}, \quad \widetilde{\Delta}_+(I) := \widetilde{\Delta}^{\mathrm{re}}_+ \sqcup \widetilde{\Delta}^{\mathrm{im}}_+(I),$$

$$\{E_\gamma, F_\gamma \,|\, \gamma \in \Delta_+\}\text{: } U_\varepsilon \text{ の root vector}, \quad \{\widetilde{E}_\beta, \widetilde{F}_\beta \,|\, \beta \in \widetilde{\Delta}_+(I)\}\text{: } \widetilde{U}_\varepsilon \text{ の root vector},$$

$$\mathbb{Z}_+^{\Delta_+} := \{c : \Delta_+ \longrightarrow \mathbb{Z}_+ ; \mathrm{map}\}, \quad \mathbb{Z}_+^{\widetilde{\Delta}_+(I)} := \{c : \widetilde{\Delta}_+(I) \longrightarrow \mathbb{Z}_+ ; \mathrm{map} \,|\, \#\{c(\beta) \neq 0\} < \infty\},$$

$$B_\varepsilon^+ := \{\prod_{\gamma \in \Delta_+(I)}^{<} E_\gamma^{c(\gamma)} \,|\, c \in \mathbb{Z}_+^{\Delta_+}\}, \quad B_\varepsilon^- := \{\prod_{\gamma \in \Delta_+}^{<} F_\gamma^{c(\gamma)} \,|\, c \in \mathbb{Z}_+^{\Delta_+}\},$$

$$B_\varepsilon^0 := \{\prod_{i=1}^{n} K_i^{m_i} \,|\, m_i \in \mathbb{Z}, i \in I\}, \quad B_\varepsilon := B_\varepsilon^- B_\varepsilon^0 B_\varepsilon^+,$$

$$\widetilde{B}_\varepsilon^+ := \{\prod_{\beta \in \widetilde{\Delta}_+(I)}^{<} \widetilde{E}_\beta^{c(\beta)} \,|\, c \in \mathbb{Z}_+^{\widetilde{\Delta}_+(I)}\}, \quad \widetilde{B}_\varepsilon^- := \{\prod_{\beta \in \widetilde{\Delta}_+(I)}^{<} \widetilde{F}_\beta^{c(\beta)} \,|\, c \in \mathbb{Z}_+^{\widetilde{\Delta}_+(I)}\},$$

$$\widetilde{B}_\varepsilon^0 := \{\prod_{i=1}^{n} K_i^{m_i} \,|\, m_i \in \mathbb{Z}, i \in I\}, \quad \widetilde{B}_\varepsilon := \widetilde{B}_\varepsilon^- \widetilde{B}_\varepsilon^0 \widetilde{B}_\varepsilon^+.$$

ただし、root vector たちの積は $\widetilde{\Delta}_+(I)$, Δ_+ 内の適当な全順序 $<$ の順番に掛けているとする。この時、以下の定理を得る：$\star = -, 0$, or $+$ とすると、

Theorem 2.3 ([14]). *$B_\varepsilon^\star$ (resp. B_ε) は $U_\varepsilon^\star$ (resp. U_ε) の $\mathbb{C}$-basis* になる。

Theorem 2.4 ([5], [3]). *$\widetilde{B}_\varepsilon^\star$ (resp. $\widetilde{B}_\varepsilon$) は $\widetilde{U}_\varepsilon^\star$ (resp. $\widetilde{U}_\varepsilon$) の $\mathbb{C}$-basis* になる。

3 Small quantum algebra

3.1 Small quantum algebra の定義

$\widetilde{J}_0 := \{\widetilde{E}_\beta^l, \widetilde{F}_\beta^l, \widetilde{E}_{(i,ml\delta)}, \widetilde{F}_{(i,ml\delta)} \,|\, \beta \in \widetilde{\Delta}^{\mathrm{re}}_+, m \in \mathbb{N}\} \subset \widetilde{U}_\varepsilon$, $J_0 := \{E_\gamma^l, F_\gamma^l \,|\, \gamma \in \Delta_+\} \subset U_\varepsilon$ とし、$\widetilde{J}$ (resp. J) を $\widetilde{J}_0 \cup \{K_i^l - 1\}_{i \in I}$ (resp. $J_0 \cup \{K_i^l - 1\}_{i \in I}$) で生成される $\widetilde{U}_\varepsilon$ (resp. U_ε) の two-sided ideal とする。

Definition 3.1. *Small quantum loop algebra* $\widetilde{U}_\varepsilon^{\mathrm{fin}}$ *(resp. small quantum algebra* $U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}$*)* を以下で定義する：

$$\widetilde{U}_\varepsilon^{\mathrm{fin}} := \widetilde{U}_\varepsilon/\widetilde{J}, \quad (\textit{resp. } U_\varepsilon^{\mathrm{fin}} := U_\varepsilon/J) \quad (\textit{quotient algebra}).$$

表現論レベルでは、$\widetilde{U}_\varepsilon^{\mathrm{fin}}$ (resp. $U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}$) の表現を考えることは、$\widetilde{U}_\varepsilon$ (resp. U_ε) の表現であって、$\widetilde{U}_\varepsilon$ (resp. U_ε) の center がほぼ自明に作用する表現達を考えることと同じである。このことは、以下の命題によって分かる。

今、$Z(\widetilde{U}_\varepsilon)$ (resp. $Z(U_\varepsilon)$) を $\widetilde{U}_\varepsilon$ (resp. U_ε) の center とし、$\widetilde{Z}_0$ (resp. Z_0) を $\widetilde{J}_0 \cup \{K_i^{\pm l}\}_{i\in I}$ (resp. $J_0 \cup \{K_i^{\pm l}\}_{i\in I}$) で生成される $\widetilde{U}_\varepsilon$ (resp. U_ε) の subalgebra とする。

Proposition 3.2 ([7])**.** $Z(\widetilde{U}_\varepsilon) = \widetilde{Z}_0$.

Proposition 3.3 ([14])**.** $Z_0 \subset Z(U_\varepsilon)$. さらに、$Z(U_\varepsilon)$ は Z_0 上 *integral* な有限生成 *algebra.*

ここで、$\widetilde{U}_\varepsilon^{\mathrm{fin}}$ の元 $\widetilde{E}_\beta + \widetilde{J}$, $\widetilde{F}_\beta + \widetilde{J}$, $K_i + \widetilde{J}$ ($\beta \in \widetilde{\Delta}_+$, $i \in I$) をそれぞれ、$\widetilde{e}_\beta$, $\widetilde{f}_\beta$, k_i, と書くことにする。同様に、U_ε の大文字の元を小文字にすることで、$U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}$ の元を表すことにする。また、以下の記号を定めておく：任意の $i \in I$, $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\begin{aligned}
x_{i,r}^+ &:= (-1)^{ir}\widetilde{e}_{\alpha_i+r\delta} \quad (r \geq 0), \quad x_{i,r}^+ := (-1)^{ir-1}\widetilde{f}_{-\alpha_i-r\delta}k_i^{-1} \quad (r < 0),\\
x_{i,r}^- &:= (-1)^{ir-1}k_i\widetilde{e}_{-\alpha_i+r\delta} \quad (r > 0), \quad x_{i,r}^- := (-1)^{ir}\widetilde{f}_{\alpha_i-r\delta} \quad (r \leq 0),\\
h_{i,s} &:= (-1)^{is}\widetilde{e}_{(i,s\delta)}, \quad h_{i,-s} := (-1)^{is}\widetilde{f}_{(i,s\delta)}.
\end{aligned}$$

さらに、$\widetilde{U}_\varepsilon^{\mathrm{fin}}$ の元 $\psi_{i,r}^{\pm}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$) を、変数 t のベキ級数を用いて以下のように定義する：

$$\sum_{r=0}^{\infty} \psi_{i,\pm r}^{\pm} t^{\pm r} := k_i \mathrm{exp}(\pm(\varepsilon - \varepsilon^{-1}) \sum_{s=1}^{\infty} h_{i,\pm s} t^{\pm s}).$$

これらの元 $x_{i,r}^{\pm}$, $h_{i,s}$, $\psi_{i,r}^{\pm}$ は、$\widetilde{U}_\varepsilon$ の Drinfel'd realization ([15], [4] 参照) に対応するものになっている ([6] Lemma 1.5 参照)。

この時、$(\widetilde{U}_\varepsilon^{\mathrm{fin}})^+$ (resp. $(\widetilde{U}_\varepsilon^{\mathrm{fin}})^-$, $(\widetilde{U}_\varepsilon^{\mathrm{fin}})^0$) を $\{x_{i,r}^+ \,|\, i \in I, r \in \mathbb{Z}\}$ (resp. $\{x_{i,r}^- \,|\, i \in I, r \in \mathbb{Z}\}$, $\{\psi_{i,\pm r}^{\pm} \,|\, i \in I, r \in \mathbb{Z}\}$) によって生成される $\widetilde{U}_\varepsilon^{\mathrm{fin}}$ の subalgebra とすると、以下の（弱い意味での）三角分解を得る：

$$\widetilde{U}_\varepsilon^{\mathrm{fin}} = (\widetilde{U}_\varepsilon^{\mathrm{fin}})^-(\widetilde{U}_\varepsilon^{\mathrm{fin}})^0(\widetilde{U}_\varepsilon^{\mathrm{fin}})^+.$$

同様に、$(U_\varepsilon^{\mathrm{fin}})^+$ (resp. $(U_\varepsilon^{\mathrm{fin}})^-$, $(U_\varepsilon^{\mathrm{fin}})^0$) を $\{e_i \,|\, i \in I\}$ (resp. $\{f_i \,|\, i \in I\}$, $\{k_i \,|\, i \in I\}$) によって生成される $U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}$ の subalgebra とすると、$U_\varepsilon^{\mathrm{fin}} = (U_\varepsilon^{\mathrm{fin}})^-(U_\varepsilon^{\mathrm{fin}})^0(U_\varepsilon^{\mathrm{fin}})^+$ を得る。

3.2 Small quantum algebra の highest-weight 表現

Definition 3.4. V を $\widetilde{U}_\varepsilon^{\mathrm{fin}}$ *(resp.* $U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}$*)* 表現とし、$v$ を零でない V の元とする。任意の $i \in I$, $r \in \mathbb{Z}$ に対し、$x_{i,r}^+ v = 0$ *(resp.* $e_i v = 0$*)* となる時、v を V の *primitive vector* と呼ぶ。

今、$U=\widetilde{U}_\varepsilon^{\mathrm{fin}}, U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}$ とする。

Definition 3.5. V を U 表現とし、$\Lambda : U^0 \longrightarrow \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$-*algebra* 準同型とする。また、V は、ある *primitive vector* $v_\Lambda \in V$ によって、U 表現として生成されているとする。任意の $u \in U^0$ に対して、$uv_\Lambda = \Lambda(u)v_\Lambda$ となる時、V を *highest weight* Λ の *highest-weight* U 表現と呼び、v_Λ を *highest-weight vector* と呼ぶ。

Proposition 3.6. 任意の $\mathbb{C}$-*algebra* 準同型 $\Lambda : U^0 \longrightarrow \mathbb{C}$ に対し、*highest weight* Λ の既約な *highest-weight* U 表現が（同型を除いて）ただ一つ存在する。

ここで、highest weight Λ の既約な highest-weight $\widetilde{U}_\varepsilon^{\mathrm{fin}}$ 表現 (resp. $U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}$ 表現) を $\widetilde{V}_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\Lambda)$ (resp. $V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\Lambda)$) と書くことにする。

3.3 Small quantum algebra の有限次元既約表現の分類

1 のベキ根でない quantum algebra と同様に、small quantum algebra の表現には分類定理がある（1 のベキ根でない quantum loop algebra の有限次元既約表現の分類については [8], [11] 等を参照）。この小節では、small quantum algebra と small quantum loop algebra の有限次元既約表現の分類について紹介する。

今、任意の零でない複素数 c に対し、$(1-ct^l)$ で割ることが出来ない $\mathbb{C}[t]$ の元 $P(t)$ を l-acyclic とよぶ（[16] 参照）。このとき、以下の記号を定める：

$$\mathbb{C}_l[t] := \{P(t) \in \mathbb{C}[t] \mid P(t) \text{ は } l\text{-acyclic かつ } P(0) \neq 0 \text{ かつ最高次の係数は } 1\}.$$

Definition 3.7. *(a)* 任意の $\lambda = (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{Z}_l^n$ に対し、$\mathbb{C}$-*algebra* 準同型 $\Lambda_\lambda^{\mathrm{fin}} : (U_\varepsilon^{\mathrm{fin}})^0 \longrightarrow \mathbb{C}$ を以下で定義する：

$$\Lambda_\lambda^{\mathrm{fin}}(k_i) := \varepsilon^{\lambda_i} \quad (i \in I).$$

(b) 任意の $\boldsymbol{P} = (P_i(t))_{i\in I} \in \mathbb{C}_l[t]^n$ に対し、$\mathbb{C}$-*algebra* 準同型 $\widetilde{\Lambda}_{\boldsymbol{P}}^{\mathrm{fin}} : (\widetilde{U}_\varepsilon^{\mathrm{fin}})^0 \longrightarrow \mathbb{C}$ を、変数 t のベキ級数を用いて以下のように定義する：

$$\sum_{m=0}^{\infty} \widetilde{\Lambda}_{\boldsymbol{P}}^{\mathrm{fin}}(\psi_{i,m}^+)t^m := \varepsilon^{\deg(P_i)} \frac{P_i(\varepsilon^{-2}t)}{P_i(t)} := \sum_{m=0}^{\infty} \widetilde{\Lambda}_{\boldsymbol{P}}^{\mathrm{fin}}(\psi_{i,-m}^-)t^{-m},$$

ただし、左側の等式を見る時は、中央の項を $t=0$ で *Laurent* 展開し、右側の等式を見る時は、中央の項を $t=\infty$ で *Laurent* 展開するものとする。

任意の $\mathbf{P} \in \mathbb{C}_l[t]^n$ (resp. $\lambda \in \mathbb{Z}_l^n$) に対して、$\widetilde{V}_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\mathbf{P}) := \widetilde{V}_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\widetilde{\Lambda}_{\mathbf{P}}^{\mathrm{fin}})$ (resp. $V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda) := V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\Lambda_\lambda^{\mathrm{fin}})$) と定義する。$\widetilde{V}_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\mathbf{P})$ の $\mathbf{P}$ は "Drinfel'd 多項式" と呼ばれている。この時、以下の分類定理を得る：

Theorem 3.8 ([12], [16] (resp. [19], [10]))**.** 任意の $\boldsymbol{P} \in \mathbb{C}_l[t]^n$ *(resp.* $\lambda \in \mathbb{Z}_l^n$*)* に対し、$\widetilde{V}_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\boldsymbol{P})$ *(resp.* $V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)$*)* は有限次元既約 $\widetilde{U}_\varepsilon^{\mathrm{fin}}$ 表現 *(resp.* $U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}$ 表現*)* になる。特に、$\boldsymbol{P} \in \mathbb{C}_l[t]^n$ *(resp.* $\lambda \in \mathbb{Z}_l^n$*)* に $\widetilde{V}_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\boldsymbol{P})$ *(resp.* $V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)$*)* を対応させる写像は、$\mathbb{C}_l[t]^n$ *(resp.* $\mathbb{Z}_l^n$*)* と有限次元既約 $\widetilde{U}_\varepsilon^{\mathrm{fin}}$ 表現 *(resp.* $U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}$ 表現*)* 全体の集合（の同型類）との間に一対一対応を与える。

4　1のベキ根における evaluation 表現

4.1　Evaluation 準同型

$X = E, F$ とし、以下の記号を定める：

$$X_\theta^+ := [X_n, [\cdots [X_2, X_1]_\varepsilon \cdots]_\varepsilon, \quad X_\theta^- := [X_1, [\cdots [X_{n-1}, X_n]_\varepsilon \cdots]_\varepsilon.$$

ただし、任意の $u, v \in U_\varepsilon$ に対し、

$$[u, v]_\varepsilon := uv - \varepsilon^{-1} vu.$$

また、fundamental weight に対応する、以下の元 $K_{\Lambda_1}, K_{\Lambda_n}$ を生成元として U_ε に新たに加えておく：

$$K_{\Lambda_1} := \prod_{i \in I} K_i^{\frac{n-i+1}{n+1}}, \quad K_{\Lambda_n} := \prod_{i \in I} K_i^{\frac{i}{n+1}}.$$

(表現においては、各 K_i の行き先を決定してしまえば、$K_{\Lambda_1}, K_{\Lambda_n}$ の行き先も一意的に決定してしまう)。

Proposirion 4.1 ([18] §2, [9] Proposition 3.4)**.** 任意の $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^\times$ に対し、以下のような $\mathbb{C}$-*algebra* 準同型 $\mathrm{ev}_{\mathbf{a}}^+, \mathrm{ev}_{\mathbf{a}}^- : \widetilde{U}_\varepsilon \longrightarrow U_\varepsilon$ が存在する：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ev}_{\mathbf{a}}^\pm(E_i) = E_i, \quad \mathrm{ev}_{\mathbf{a}}^\pm(F_i) = F_i, \quad \mathrm{ev}_{\mathbf{a}}^\pm(K_i) = K_i, \quad (i \in I),\\
&\mathrm{ev}_{\mathbf{a}}^\pm(E_0) = \mathbf{a} K_{\Lambda_1}^{\pm 1} K_{\Lambda_n}^{\mp 1} F_\theta^\pm, \quad \mathrm{ev}_{\mathbf{a}}^\pm(F_0) = (-\varepsilon)^{n-1} \mathbf{a}^{-1} K_{\Lambda_1}^{\pm 1} K_{\Lambda_n}^{\pm 1} E_\theta^\pm.
\end{aligned}$$

この準同型 $\mathrm{ev}_{\mathbf{a}}^\pm$ を $\widetilde{U}_\varepsilon$ の evaluation 準同型と呼ぶ。

同様に、任意の $u \in \widetilde{U}_\varepsilon$ に対し、$\widetilde{U}_\varepsilon^{\mathrm{fin}}$ の元 $u + \widetilde{J}$ を $U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}$ の元 $\mathrm{ev}_{\mathbf{a}}^\pm(u) + J$ に送る写像は、$\widetilde{U}_\varepsilon^{\mathrm{fin}}$ から $U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}$ への準同型になる。この準同型を $\widetilde{U}_\varepsilon^{\mathrm{fin}}$ の evaluation 準同型と呼び、$\widetilde{U}_\varepsilon$ の場合と同様に $\mathrm{ev}_{\mathbf{a}}^\pm$ と書くことにする。

4.2　Evaluation 表現の Drinfel'd 多項式

任意の $\lambda \in \mathbb{Z}_l^n$ と $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^\times$ に対し、$V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)$ を $\mathrm{ev}_{\mathbf{a}}^\pm$ で持ち上げた $\widetilde{U}_\varepsilon^{\mathrm{fin}}$ 表現を $V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)_{\mathbf{a}}^\pm$ と書くことにする。すなわち、任意の $u \in \widetilde{U}_\varepsilon^{\mathrm{fin}}$ に対し、u の $V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)_{\mathbf{a}}^\pm$ への作用は、$\mathrm{ev}_{\mathbf{a}}^\pm(u)$ の $V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)$ への作用で定義される。

この時、Theorem 3.8 より、ある Drinfel'd 多項式 $\mathbf{P}_{\mathbf{a}}^\pm = (P_{i,\mathbf{a}}^\pm(t))_{i \in I} \in \mathbb{C}_l[t]^n$ が存在し、$V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)_{\mathbf{a}}^\pm \cong \widetilde{V}_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\mathbf{P}_{\mathbf{a}}^\pm)$ となる。この Drinfel'd 多項式は、以下のように具体的に求めることが出来る。

Theorem 4.1. 任意の $i \in I$ に対し、

$$P_{i,\mathbf{a}}^\pm(t) = \prod_{k=1}^{\lambda_i} (t - \mathbf{a} \varepsilon^{\lambda_i - 2k \pm \lambda[i]}),$$

ただし、$\lambda[i] := \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k - \sum_{k=i+1}^{n} \lambda_k + i$ であり、$\lambda_i = 0$ の時は $P_{i,\mathbf{a}}^{\pm}(t) = 1$ とする。また、$\mathbf{a}$ の値は、λ に応じ、予め適当な値に取っておくものとする。

証明について：証明は、1 のベキ根でない場合と同様である。1 のベキ根でない場合の証明方法は、Chari-Pressley により、[9] の §3.6 で与えられている。

今、$\mathbf{a}_+, \mathbf{a}_- \in \mathbb{C}^\times$ とすると、$V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)_{\mathbf{a}_+}^+$ と $V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)_{\mathbf{a}_-}^-$ とは、$\widetilde{U}_\varepsilon^{\mathrm{fin}}$ 表現として同型とは限らないが、$\mathbf{a}_\pm$ や λ の値によっては同型になることもある。具体的には、以下の命題で与えられる：

Proposition 4.2. $\lambda = (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{Z}_l^n$, $\mathbf{a}_\pm \in \mathbb{C}^\times$ とする。また、$\mathrm{supp}(\lambda) := \{i \in I \,|\, \lambda_i \neq 0\}$ と定義し、$i_1, i_2, \cdots, i_m \in I$ を、$\mathrm{supp}(\lambda) = \{i_1, \cdots, i_m\}$ *(*$i_1 < \cdots < i_m$*)* となるものとする。この時、以下の条件 *(a)* から *(c)* は同値である：

(a) $V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)_{\mathbf{a}_+}^+$ と $V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)_{\mathbf{a}_-}^-$ とは、$\widetilde{U}_\varepsilon^{\mathrm{fin}}$ 表現として同型である。

(b) 任意の $i \in \mathrm{supp}(\lambda)$ に対して、$\mathbf{a}_+ = \mathbf{a}_- \varepsilon^{2\lambda[i]}$.

(c) 任意の $2 \leq r \leq m$ に対して、

$$\lambda_{i_r} \equiv (-1)^r (2C_r - \lambda_{i_1} - i_1) + i_r \not\equiv 0 \pmod{l},$$
$$\mathbf{a}_+ = \begin{cases} \mathbf{a}_- \varepsilon^{2C_m} & m \text{ は奇数}, \\ \mathbf{a}_- \varepsilon^{2(\lambda_{i_1} + i_1 - C_m)} & m \text{ は偶数}. \end{cases}$$

ただし、

$$C_r := \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} i_k \quad (2 \leq r \leq m).$$

証明について：(a) と (b) とが同値であることは、$V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)_{\mathbf{a}_+}^+$ と $V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)_{\mathbf{a}_-}^-$ との Drinfel'd 多項式を見比べることにより分かる。あとは具体的に計算することにより、(b) と (c) とが同値であるということが得られる。

Remark 4.3. この命題は 1 のベキ根でない場合は成立しない。1 のベキ根でない *(A* 型*)quantum loop algebra* に対しても、二種類の *evaluation* 表現が存在するが、$\#\mathrm{supp}(\lambda)$ が 2 以上の場合、それらの表現が同型になることはない。

5 Evaluation Schnizer 表現と $V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)_{\mathbf{a}}^{\pm}$

この節では、evaluation Schnizer 表現というものを使い、$V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)_{\mathbf{a}}^{\pm}$ を具体的に構成するということを考える。さらに、そのことを利用し、Proposition 4.2 の別証明を与える。

5.1 Evaluation Schnizer 表現

任意の $a=(a_{i,j})_{1\le i\le j\le n}\in(\mathbb{C}^\times)^N$, $b=(b_{i,j})_{1\le i\le j\le n}\in\mathbb{C}^N$, $\lambda=(\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbb{C}^n$ に対し、以下の記号を定義する：

$N:=\dfrac{1}{2}n(n+1)$: $\mathfrak{sl}_{n+1}$ の positive root の個数、

$V_N(a,b,\lambda)$: l^N-dimensional $\mathbb{C}$-vector space,

$\{v_\lambda^{a,b}(m)\in V_N(a,b,\lambda)\,|\,m=(m_{i,j})_{1\le i\le j\le n}\in\mathbb{Z}_l^N\}$: $V_N(a,b,\lambda)$ の $\mathbb{C}$-basis,

（また、任意の $m\in\mathbb{Z}_l^N, m'\in\mathbb{Z}^N$ に対し、$v_\lambda^{a,b}(m+lm'):=v_\lambda^{a,b}(m)$ とする。）

$\epsilon_{i,j}$: (i,j) 成分のみ 1 で他は 0 である $\mathbb{Z}_l^N$ の元 $(1\le i\le j\le n)$,

$\alpha_{i,j}:=\displaystyle\sum_{k=j+1}^{i}\epsilon_{k-1,n-i+k}-\sum_{k=j}^{i}\epsilon_{k,n-i+k}\in\mathbb{Z}_l^N\quad(1\le j\le i\le n).$

Theorem 5.1 ([25] Theorem 3.2, [24])**.** $a=(a_{i,j})_{1\le i\le j\le n}\in(\mathbb{C}^\times)^N$, $b=(b_{i,j})_{1\le i\le j\le n}\in\mathbb{C}^N$, $\lambda=(\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbb{C}^n$ とする。次のようにして $V_N(a,b,\lambda)$ に U_ε 表現の構造を定めることが出来る：任意の $m=(m_{i,j})_{1\le i\le j\le n}\in\mathbb{Z}_l^N$, $i\in I$ に対し、

$$\begin{aligned}
E_iv_\lambda^{a,b}(m)&=\sum_{j=1}^{i}a(\alpha_{i,j})[N_{i,j}(m+b)]v_\lambda^{a,b}(m+\alpha_{i,j}),\\
F_iv_\lambda^{a,b}(m)&=\sum_{j=i}^{n}a_{i,j}[M_{i,j}(m+b)-\lambda_i]v_\lambda^{a,b}(m+\epsilon_{i,j}),\\
K_iv_\lambda^{a,b}(m)&=\varepsilon^{\mu_i(m+b)+\lambda_i}v_\lambda^{a,b}(m).
\end{aligned}$$

ただし、任意の $c=(c_{i,j})_{1\le i\le j\le n}\in\mathbb{C}^N$ に対し、

$$\begin{aligned}
&M_{i,j}(c):=\sum_{k=i-1}^{j-1}(c_{i,k}-c_{i-1,k})+\sum_{k=i}^{j}(c_{i,k}-c_{i+1,k})\quad(i\le j),\\
&N_{i,j}(c):=c_{j-1,n-i+j}-c_{j,n-i+j}\quad(j\le i),\\
&\mu_i(c):=\sum_{k=i-1}^{n}c_{i-1,k}-2\sum_{k=i}^{n}c_{i,k}+\sum_{k=i+1}^{n}c_{i+1,k},\quad a(c):=\prod_{1\le i\le j\le n}a_{i,j}^{c_{i,j}}.
\end{aligned}$$

この表現のことを U_ε の “Schnizer 表現” と呼ぶことにする。

この時、evaluation 準同型を用いて、$V_N(a,b,\lambda)$ を $\widetilde{U}_\varepsilon$ 表現とみなすことが出来る。すなわち、任意の $u\in\widetilde{U}_\varepsilon$, $\mathbf{a}\in\mathbb{C}^\times$ に対し、u の $v_\lambda^{a,b}(m)$ への作用を $\mathrm{ev}_{\mathbf{a}}^{\pm}(u)v_\lambda^{a,b}(m)$ で定義することにより、$V_N(a,b,\lambda)$ は $\widetilde{U}_\varepsilon$ 表現となる。$\mathrm{ev}_{\mathbf{a}}^{\pm}$ を用いて $\widetilde{U}_\varepsilon$ 表現とみなした $V_N(a,b,\lambda)$ を “evaluation Schnizer 表現” と呼び、$V_N(a,b,\lambda)_{\mathbf{a}}^{\pm}$ と書くことにする。

特に、$\widetilde{U}_\varepsilon$ の生成元の $V_N(a,b,\lambda)_{\mathbf{a}}^{\pm}$ への作用を具体的に記述することが出来る。Proposition 4.1 より I の元 i に対しては、E_i, F_i, K_i の作用は $V_N(a,b,\lambda)$ への作用と変わらないため、E_0

及び F_0 の作用を書くことにする。そのために、まず以下の記号を定める：

$$
\begin{aligned}
R_s &:= \{r^s = (r_1^s, \cdots, r_n^s) \in I^n \,|\, r_1^s \geq \cdots \geq r_{s-1}^s \geq r_s^s < r_{s+1}^s < \cdots < r_n^s\},\\
R_s^F &:= \{r^s = (r_1^s, \cdots, r_n^s) \in R_s \,|\, \text{任意の } k \in I \text{ に対し、} k \leq r_k^s\},\\
R_s^E &:= \{r^s = (r_1^s, \cdots, r_n^s) \in R_s \,|\, \text{任意の } k \in I \text{ に対し、} r_k^s \leq k\},\\
R^F &:= \bigsqcup_{s=1}^n R_s^F, \quad R^E := \bigsqcup_{s=1}^n R_s^E.
\end{aligned}
$$

この時、予め複素数 $\mathbf{a}$ を適当な値に取っておくと、E_0, F_0 の作用は以下で与えられる：

Theorem 5.2. $a = (a_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq n} \in (\mathbb{C}^\times)^N$, $b = (b_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq n} \in \mathbb{C}^N$, $\lambda = (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^\times$ とする。任意の $m = (m_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq n} \in \mathbb{Z}_l^N$ に対し、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ev}_{\mathbf{a}}^{\pm}(E_0)v_\lambda^{a,b}(m) = \mathbf{a}\sum_{s\in I}\sum_{r^s\in R^F}&(-1)^{s+n}(\prod_{k\in I} a_{k,r_k^s})\varepsilon^{\pm(C(m+b,r^s)-\lambda[s])}\\
&[-m_{s-1,s-1}+m_{s,s}-b_{s-1,s-1}+b_{s,s}-\lambda_s]v(m+\sum_{k\in I}\epsilon_{k,r_k^s}),\\
\mathrm{ev}_{\mathbf{a}}^{\pm}(F_0)v_\lambda^{a,b}(m) = \mathbf{a}^{-1}\sum_{s\in I}\sum_{r^s\in R^E}&(-1)^{s}(\prod_{k\in I} a(\alpha_{k,r_k^s}))\varepsilon^{\pm(D(m+b,r^s)-s+n+1)}\\
&[m_{1,n-s+1}+b_{1,n-s+1}]v(m+\sum_{k\in I}\alpha_{k,r_k^s}).
\end{aligned}
$$

ただし、任意の $c = (c_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq n} \in \mathbb{C}^N$ に対して、

$$
C(c, r^s) := c_{s-1,s-1} + \sum_{k=1}^{s}\sum_{p=r_k^s+1}^{r_{k-1}^s}(c_{k-1,p-1} - c_{k,p}), \tag{5.1}
$$

$$
D(c, r^s) := -c_{n,n} + \sum_{k=1}^{n-s+1} c_{1,k} - \sum_{k=s+1}^{n}(c_{r_k^s-1,n-k+r_k^s} - c_{r_k^s,n-k+r_k^s}). \tag{5.2}
$$

5.2 $V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)_{\mathbf{a}}^{\pm}$ の構成

今、$(\mathbb{C}^\times)^N$ の元 $a^{(0)}$ と $\mathbb{C}^N$ の元 $b^{(0)}$ とを以下で定める：

$$
a_{i,j}^{(0)} := 1, \quad b_{i,j}^{(0)} := 0, \quad a^{(0)} := (a_{i,j}^{(0)})_{1\leq i\leq j\leq n}, \quad b^{(0)} := (b_{i,j}^{(0)})_{1\leq i\leq j\leq n}.
$$

また、任意の $\lambda = (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^n$ と $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^\times$ に対し、

$$
V_N(\lambda) := V_N(a^{(0)}, b^{(0)}, \lambda), \quad V_N(\lambda)_{\mathbf{a}}^{\pm} := V_N(a^{(0)}, b^{(0)}, \lambda)_{\mathbf{a}}^{\pm}, \quad v_\lambda(m) := v_\lambda^{a^{(0)},b^{(0)}}(m),
$$

と定める。さらに、$v_\lambda(\mathbf{0})$ によって生成される $V_N(\lambda)_{\mathbf{a}}^{\pm}$ (resp. $V_N(\lambda)$) の $\widetilde{U}_\varepsilon$ 部分表現 (resp. U_ε 部分表現) を $L_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)_{\mathbf{a}}^{\pm}$ (resp. $L_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)$) と書く。$L_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)_{\mathbf{a}}^{\pm}$ は $L_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)$ を $\mathrm{ev}_{\mathbf{a}}^{\pm}$ で持ち上げた表現とみなすこともできる（$L_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)_{\mathbf{a}}^{\pm}$, $L_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)$ は、どれも vector space としては同じものである)。

この時、[2]（または、[23], [1]）の結果を利用することにより、以下の定理を得る：

Theorem 5.3. $\lambda \in \mathbb{Z}_l^n$, $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^\times$ とする。

(a) $L_\varepsilon^{\text{fin}}(\lambda)$ は $U_\varepsilon^{\text{fin}}$ 表現とみなすことが出来る。特に、$U_\varepsilon^{\text{fin}}$ 表現として $L_\varepsilon^{\text{fin}}(\lambda)$ は $V_\varepsilon^{\text{fin}}(\lambda)$ と同型である。

(b) $L_\varepsilon^{\text{fin}}(\lambda)_{\mathbf{a}}^{\pm}$ は $\widetilde{U}_\varepsilon^{\text{fin}}$ 表現とみなすことが出来る。特に、$\widetilde{U}_\varepsilon^{\text{fin}}$ 表現として $L_\varepsilon^{\text{fin}}(\lambda)_{\mathbf{a}}^{\pm}$ は $V_\varepsilon^{\text{fin}}(\lambda)_{\mathbf{a}}^{\pm}$ と同型である。

この時、$L_\varepsilon^{\text{fin}}(\lambda)$ の highest-weight vector と lowest-weight vector を具体的に求めることが出来る。そのために、以下の記号を定義しておく。任意の $\lambda = (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{Z}_l^n$ に対し、$\mathbb{Z}_l^N$ の元 $m^\lambda = (m_{i,j}^\lambda)$ を以下で定義する：

$$m_{i,j}^\lambda \equiv \sum_{k=1}^{i} \lambda_{j-k+1} \pmod{l}.$$

Proposition 5.4. $\lambda \in \mathbb{Z}_l^n$ とし、$v \in V_N(\lambda)$ とする（$v \in L_\varepsilon^{\text{fin}}(\lambda)$ とは限らない)。

(a) 「任意の $i \in I$ に対し、$E_i v = 0$」となるための必要十分条件は、「$v \in \mathbb{C}v_\lambda(\mathbf{0})$」となることである。特に、$L_\varepsilon^{\text{fin}}(\lambda)$ の *highest-weight vector* は、$v_\lambda(\mathbf{0})$ の零でないスカラー倍である。

(b) 「任意の $i \in I$ に対し、$F_i v = 0$」となるための必要十分条件は、「$v \in \mathbb{C}v_\lambda(m^\lambda)$」となることである。特に、$L_\varepsilon^{\text{fin}}(\lambda)$ の *lowest-weight vector* は、$v_\lambda(m^\lambda)$ の零でないスカラー倍である。

よって、特に、vector space として以下の等式が成り立つ：

$$L_\varepsilon^{\text{fin}}(\lambda)_{\mathbf{a}}^{\pm} = L_\varepsilon^{\text{fin}}(\lambda) = U_\varepsilon^{-} v_\lambda(\mathbf{0}) = U_\varepsilon^{+} v_\lambda(m^\lambda).$$

5.3 Proposition 4.2 の別証

Theorem 5.2, Theorem 5.3, Proposition 5.4 を用いることにより、Proposition 4.2 を Drinfel'd 多項式の理論を使わずに証明することが出来る。以下、その証明を示す。今、$\lambda = (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{Z}_l^n$, $\mathbf{a}_\pm \in \mathbb{C}^\times$ とする。Proposition 4.2 の (b) と (c) とが同値であることの証明には、もともと Drinfel'd 多項式の理論などは使っていないので、(a) と (b) とが同値であることを示すことにする。

(a) ならば (b) の証明：ϕ を $L_\varepsilon^{\text{fin}}(\lambda)_{\mathbf{a}_+}^{+}$ と $L_\varepsilon^{\text{fin}}(\lambda)_{\mathbf{a}_-}^{-}$ の $\widetilde{U}_\varepsilon^{\text{fin}}$ 表現の同型写像とする。この時、Proposition 5.4(a) の highest-weight vector の一意性により、ϕ はスカラー写像であることが分かる。よって、任意の $m \in \mathbb{Z}_l^N$ に対して $\text{ev}_{\mathbf{a}_+}^{+}(E_0)v_\lambda(m) = \text{ev}_{\mathbf{a}_-}^{-}(E_0)v_\lambda(m)$ となることが分かる。特に、$\text{ev}_{\mathbf{a}_+}^{+}(E_0)v_\lambda(\mathbf{0}) = \text{ev}_{\mathbf{a}_-}^{-}(E_0)v_\lambda(\mathbf{0})$ となる。よって、Theorem 5.2 より、

$$\mathbf{a}_+ \sum_{s\in I} \sum_{r^s \in R^F} (-1)^{s+n} \varepsilon^{-\lambda[s]} [-\lambda_s] v(\sum_{k\in I} \epsilon_{k,r_k^s}) = \mathbf{a}_- \sum_{s\in I} \sum_{r^s \in R^F} (-1)^{s+n} \varepsilon^{\lambda[s]} [-\lambda_s] v(\sum_{k\in I} \epsilon_{k,r_k^s}).$$

よって、任意の $s \in \text{supp}(\lambda)$ に対して $\mathbf{a}_+ = \mathbf{a}_- \varepsilon^{2\lambda[s]}$ となる。

(b) ならば (a) の証明：任意の $u \in \widetilde{U}_\varepsilon$ に対し、$\text{ev}_{\mathbf{a}_+}(u)$ の $L_\varepsilon^{\text{fin}}(\lambda)$ 上での作用と $\text{ev}_{\mathbf{a}_-}(u)$ の $L_\varepsilon^{\text{fin}}(\lambda)$ 上での作用とが等しいことを示せばよい。$u = E_i, F_i, K_i$ $(i \in I)$ の時は、$\text{ev}_{\mathbf{a}_+}(u)$ と

$\mathrm{ev}_{\mathbf{a}_-}(u)$ とが U_ε の元として等しいので成立する。よって、$u=E_0$ の時と、$u=F_0$ の時を示せばよい。

$u=F_0$ の時： 任意の $r^s\in R^E$ に対し、

$$D(m^\lambda, r^s)=\lambda[n-s+1]-(n-s+1),$$

となる (see (5.2))。よって、

$$\mathrm{ev}^+_{\mathbf{a}_+}(F_0)v_\lambda(m^\lambda)=\mathbf{a}_+^{-1}\sum_{s\in I}\sum_{r^s\in R^E}(-1)^s\varepsilon^{\lambda[n-s+1]}[\lambda_{n-s+1}]v(m^\lambda+\sum_{k\in I}\alpha_{k,r^s_k}),$$
$$\mathrm{ev}^-_{\mathbf{a}_-}(F_0)v_\lambda(m^\lambda)=\mathbf{a}_-^{-1}\sum_{s\in I}\sum_{r^s\in R^E}(-1)^s\varepsilon^{-\lambda[n-s+1]}[\lambda_{n-s+1}]v(m^\lambda+\sum_{k\in I}\alpha_{k,r^s_k}).$$

よって、条件 (b) より、$\mathrm{ev}^+_{\mathbf{a}_+}(F_0)v_\lambda(m^\lambda)=\mathrm{ev}^-_{\mathbf{a}_-}(F_0)v_\lambda(m^\lambda)$ となる。

一方、Proposition 5.4 より、$v_\lambda(m^\lambda)$ は $L^{\mathrm{fin}}_\varepsilon(\lambda)$ の lowest-weight vector だから、

$$L^{\mathrm{fin}}_\varepsilon(\lambda)=U^+_\varepsilon v_\lambda(m^\lambda)=\bigoplus_{i_1,\cdots,i_r\in I}E_{i_1}\cdots E_{i_r}v_\lambda(m^\lambda),$$

となる。$i\neq 0$ であれば $F_0E_i=E_iF_0$ なので、$v_\lambda(m^\lambda)$ への作用が等しければ、$\mathrm{ev}^+_{\mathbf{a}_+}(F_0)$ と $\mathrm{ev}^-_{\mathbf{a}_-}(F_0)$ とは $L^{\mathrm{fin}}_\varepsilon(\lambda)$ 上で等しくなる。

同様に、highest-weight vector を利用することにより、$u=E_0$ の場合を示すことが出来る。 □

参考文献

[1] Abe, Y. (2006). Inductive Construction of Nilpotent Modules of Quantum Groups at Roots of Unity arXiv: math. QA/0601749.

[2] Abe, Y., Nakashima, T. (2005). Nilpotent representations of classical quantum groups at roots of unity. J. Math. Phys. 46, No. 12, 113505 1–19.

[3] Abe, Y., Nakashima, T. (2006). Evaluation representations of quantum affine algebras at roots of unity arXiv: math. QA/0601049.

[4] Beck, J. (1994). Braid group action and quantum affine algebras. Comm. Math. Phys. 165(3):555–568.

[5] Beck, J. (1994). Convex bases of PBW type for quantum affine algebras. Comm. Math. Phys. 165(1):193–199.

[6] Beck, J., Chari, V., Pressley, A. (1999). An algebraic characterization of the affine canonical basis. Duke Math. J. 99(3):455–487.

[7] Beck, J., Kac, V.G. (1996). Finite-dimensional representations of quantum algebras. Amer. Math. Soc. 9:391–423.

[8] Chari, V., Pressley, A. (1991). Quantum Affine Algebras. Comm. Math. Phys. 142:261–283.

[9] Chari, V., Pressley, A. (1994). Small representations of quantum affine algebras. Lett. Math. Phys. 30:131–145.

[10] Chari, V., Pressley, A. (1994). A Guide to Quantum Groups. Cambridge University Press, Cambridge.

[11] Chari, V., Pressley, A. (1995). Quantum affine algebras and their representations. Amer. Math. Soc. 16:59–78.

[12] Chari, V., Pressley, A. (1997). Quantum algebras at roots of unity. J. Amer. Math. Soc. 1:280–328.

[13] Date, E., Jimbo, M., Miki, K., Miwa, T. (1991). Cyclic Representations of $U_q(sl(n+1,\mathbb{C}))$ at $q^N = 1$. Publ. RIMS, Kyoto Univ. 27:366–437.

[14] De Concini, C., Kac, V.G. (1990). Actes du Colloque en I'honneur de Jacques Diximier, edited by A. Connes, M. Duflo, A. Joseph and R. Rentschler (Prog. Math. Birkhauser.). 92:471–506.

[15] Drinfel'd, V.G. (1988). A new realization of Yangians and quantized affine algebras. Soviet Math. Dokl. 36:212–216.

[16] Frenkel, E. (2002). The q-characters at roots of unity. Adv. Math. 171(1):139–167.

[17] Gavarini, F. (1999). A PBW basis for Lusztig's form of untwisted affine quantum groups. Comm. Algebra 27(2):903–918.

[18] Jimbo, M. (1986). A q-analogue of $U(\mathfrak{gl}(N+1))$, Heck algebra and Yang-Baxter equation. Lett. Math. Phys. 11:247–252.

[19] Lusztig, G. (1989). Modular representations and quantum groups. Contemp. Math 82:59–77.

[20] Lusztig, G. (1990). Finite dimensional Hopf algebras arising from quantized universal enveloping algebras. J. Amer. Math. Soc. 3:257–296.

[21] Lusztig, G. (1990). Quantum groups at root of 1. Geom. Dedicata 35:89–113.

[22] Lusztig, G. (1993). Introduction to Quantum Groups. Birkhäuser, Boston.

[23] Nakashima, T. (2002). Irreducible modules of finite dimensional quantum algebras of type A at roots of unity. J. Math. Phys. 43(4):2000–2014.

[24] Schnizer, W.A. (1993). Roots of unity: Representations for symplectic and orthogonal quantum groups. J. Math. Phys. 34:4340–4363.

[25] Schnizer, W.A. (1994). Roots of unity: Representations of Quantum Group. Commun. Math. Phys. 163:293–306.