超リー代数 $D(2,1;i)$ の有限次元既約表現

慶應義塾大学理工学研究科　加藤大典
E-mail: y11535@educ.cc.keio.ac.jp

1　場の理論と超リー代数

本稿では係数体は全て複素数体 $\mathbb{C}$ とする.

超リー代数は $\mathbb{Z}_2$ 次数付き圏というものを考えると自然に出てくるリー代数の１つの一般化であるが、超リー代数がこれまで注目されてきたのは物理学の動機付けによるところが大きい.

そのことを簡単に説明することがこのセクションの目的であるが、それに先立ってまず超リー代数の定義を紹介しておく.

定義 1 (超リー代数) $\mathbb{Z}_2$ 次数付きベクトル空間 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ について、$v \in \mathfrak{g}_0 \amalg \mathfrak{g}_1$ の次数を $\tilde{v}$ とかくことにする. すなわち、$\tilde{\ } : \mathfrak{g}_0 \amalg \mathfrak{g}_1 \to \mathbb{Z}_2$ であって、

$$\tilde{v} = 0 :\Leftrightarrow v \in \mathfrak{g}_0 \quad \tilde{v} = 1 :\Leftrightarrow x \in \mathfrak{g}_1.$$

このとき、$\mathfrak{g}$ 及び双線形形式 $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ が次の条件を満たすならば、$[\cdot,\cdot]$ は超リー積と呼ばれ、$\mathfrak{g}$ は超リー代数と呼ばれる.

1.
$$\widetilde{[u,v]} = \tilde{u} + \tilde{v}$$

2.
$$[u,v] = -(-1)^{\tilde{u}\tilde{v}}[v,u]$$

3.
$$[u,[v,w]] + (-1)^{(\tilde{u}+\tilde{v})\tilde{w}}[w,[u,v]] + (-1)^{\tilde{u}(\tilde{v}+\tilde{w})}[v,[w,u]]$$

但し、$u, v, w \in \mathfrak{g}_0 \cup \mathfrak{g}_1$.

以上が正確な定義があるが、その具体的な例をこの節の後半で紹介する.

1.1　生成・消滅作用素 (演算子)

場の量子論では系の状態はヒルベルト空間（通常は $C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{C})$ に L^2 ノルムを導入したものを考える）の元として表されるのが一般的であるが、物理量（運動量など）は「そのヒルベルト空間から自分自身へのユニタリー作用素であって、$\mathbb{R}^4$ へのローレンツ群の作用に関して不変であるもの」で表される（これが物理量という術語の定義である）.

このような物理量はその性質により、ボソン・フェルミオンの２種類に大別されることが知られている.（例外はある.）

場の量子論では生成作用素・消滅作用素と呼ばれる２種類の作用素が特に重要であると考えられているが、、これは大雑把な言い方をすれば粒子の生成・消滅に対応する．いま、慣習に従い、$a^\dagger(q)$ で「粒子 q を生成する生成作用素」、$a(q)$ で「粒子 q を消滅させる消滅作用素」を表すものとし（$a^\dagger(q)$ は $a(q)$ の共役作用素である）、$[\cdot,\cdot]_+$, $[\cdot,\cdot]_-$ を $[a,b]_+ := ab - ba$, $[a,b]_- := ab + ba$ と定義すれば、q, q' のいずれかがボソンであるならば

$$\begin{aligned}[a^\dagger(q), a(q)]_+ &= \delta(q - q') \\ [a(q), a(q')]_+ = [a^\dagger(q), a^\dagger(q')]_+ &= 0,\end{aligned}$$

q, q' がフェルミオンであるならば、

$$\begin{aligned}[a^\dagger(q), a(q)]_- &= \delta(q - q') \\ [a(q), a(q')]_+ = [a^\dagger(q), a^\dagger(q')]_- &= 0.\end{aligned}$$

但し、ここで δ はクロネッカーのデルタであって、$\delta(q - q')$ は q と q' が同一の粒子ならば 1、異なる粒子であるならば 0 であることを表している.

よって生成・消滅作用素全体の空間には $[\cdot,\cdot]_+$ 及び $[\cdot,\cdot]_-$ の２つの積が入っていると考えることが自然となるが、これを１つの超リー代数とみることもできて、その方が便利である．このとき、ボソンの状態全体がなす部分ベクトル空間が上の超リー代数の定義における $\mathfrak{g}_0$ に相当し、フェルミオンの状態全体がなす部分ベクトル空間が $\mathfrak{g}_1$ に対応する.

1.2　ルート系

ここではルート系及びカルタン行列の定義を与える.

定義 2 (リー代数のカルタン部分代数) 単純リー代数 $\mathfrak{g}$ の極大可換部分代数を $\mathfrak{g}$ のカルタン部分代数と呼ぶ.

定義 3 (超リー代数のカルタン部分代数) 単純超リー代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ について、$\mathfrak{g}_0$ はリー代数であるが、$\mathfrak{g}_0$ のカルタン部分代数を $\mathfrak{g}$ のカルタン部分代数と呼ぶ.

ここで注意するのは、超リー代数 $\mathfrak{g}$ のカルタン部分代数 $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の可換部分代数であるため、$\mathfrak{h}$ の $\mathfrak{g}$ への随伴表現 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ は $h \in \mathfrak{h}$ によらず同一の固有ベクトルを持つことである．すなわち「任意の $h \in \mathfrak{h}$ について、

$$[h, g] = \alpha(h) \cdot g$$

なる $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ 及び $g \in \mathfrak{g}$ が存在する（$\mathfrak{h}^*$ は $\mathfrak{h}$ の双対空間）.

定義 4 上を満たす α は一般に複数存在するが、その全体をルート系と呼ぶ.

定義 5 *1.* 全てのルート α について、$\alpha(h) \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ なる $h \in \mathfrak{h}$ を固定する．このとき、任意のルート α について、$\alpha(h) > 0$ または $\alpha(h) < 0$ となるが、$\alpha(h) > 0$ なる α を正ルート、$\alpha(h) < 0$ なるルートを負ルートと呼ぶ.

2. 他の正ルートのどのような和でも表せない正ルートを正の単純ルート、他の負ルートのでのような和でも表せない負ルートを負の単純ルートと呼ぶ．正の単純ルート（または負の単純ルート）の全体は $\mathfrak{h}^*$ の基底をなす．

ルート系は超リー代数の構造を調べる上で非常に重要な役割をなす．ルートの間の関係を記述するのがカルタン行列であるが、その前に超リー代数上に内積の考えを導入する．

定義 6 双線形 *2* 次形式 $<\cdot,\cdot>: \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{C}$ が次の条件（不変性）を満たすとき、$<\cdot,\cdot>$ を $\mathfrak{g}$ の内積と呼ぶ．

$$<[u,v],w>=<u,[v,w]> \quad (u,v,w\in\mathfrak{g})$$

リー代数の場合は単純リー代数の内積に非退化性を要求したが、超リー代数の場合は単純であっても常に非退化不変 2 次形式が存在するとは限らない（むしろ非退化のものが存在しない単純超リー代数の方が圧倒的に多い）という事情から条件を緩めてある．

定義 7 (カルタン行列) 単純超リー代数 $\mathfrak{g}$ について、$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ をその単純ルート、$<\cdot,\cdot>$ を $\mathfrak{g}$ の内積とする．

$$(<\alpha_i,\alpha_j>)_{1\le i,j\le n}$$

は n 次複素正方行列となるが、これを $\mathfrak{g}$ のカルタン行列と呼ぶ．

但し、単純リー代数には内積に非退化性を要求したため、

補題 1 単純リー代数 $\mathfrak{g}$ の内積は存在してかつ複素数倍を除き一意である．

が成立したが、単純超リー代数では内積の非退化性を犠牲にしているため類似の結果は成立しない．結果として同一の単純超リー代数に複数の異なるカルタン行列が対応することになり、それが状況を複雑にしている．

2 超リー代数の表現論と最高ウェイト理論

定義 8 (超行列) 下のようなブロック分割付き複素行列

$$X=\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$$

の全体は通常の複素行列の和とスカラー倍のもとにベクトル空間となるが、これを $\mathrm{Mat}_{p|q\times r|s}(\mathbb{C})$ とかく．さらに

$$\mathrm{Mat}_{p|q\times r|s}(\mathbb{C})_0 := \{\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & D \end{array}\right); A\in\mathrm{Mat}_{p\times r}(\mathbb{C}), D\in\mathrm{Mat}_{q\times s}(\mathbb{C})\}$$

$$\mathrm{Mat}_{p|q\times r|s}(\mathbb{C})_1 := \{\left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline C & 0 \end{array}\right); B\in\mathrm{Mat}_{p\times s}(\mathbb{C}), C\in\mathrm{Mat}_{q\times r}(\mathbb{C})\}$$

と定義すれば、$\mathrm{Mat}_{p|q\times r|s}(\mathbb{C}) = \mathrm{Mat}_{p|q\times r|s}(\mathbb{C})_0 \oplus \mathrm{Mat}_{p|q\times r|s}(\mathbb{C})_1$ となるが、ここで定義 *1* の記法を用いて

$$[X, Y] = XY - (-1)^{\tilde{X}\tilde{Y}} YX$$

*(*但し X と Y の積は行列としての積）と定義すれば、$\mathrm{Mat}_{p|q\times r|s}(\mathbb{C})$ は超リー代数の構造を持つ．$\mathrm{Mat}_{p|q\times r|s}(\mathbb{C})$ の元は $p|q \times r|s$ 型超行列と呼ばれる．

定義 9

$$\mathfrak{gl}(m|n) := \mathrm{Mat}_{m|n\times m|n}(\mathbb{C})$$

定義 10 $\mathfrak{g}$ は超リー代数とする．線形写像

$$\Phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(m|n)$$

であって、

$$\widetilde{\Phi(v)} = \tilde{v} \tag{1}$$

$$[\Phi(u), \Phi(v)] = [u, v] \tag{2}$$

をみたすものを $\mathfrak{g}$ の $m|n$ 次元表現（または $\mathfrak{g}$ 加群）と呼ぶ．

2.1 最高ウェイト理論

定義 11 単純超リー代数 $\mathfrak{g}$、$\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ をその表現、$\mathfrak{h}$ とする.$\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ について、任意の $h \in \mathfrak{h}$ に対し $g \in \mathfrak{g}$ が存在して

$$\sigma(h)g = \Lambda(h)g$$

をみたすとき、Λ はウェイトと呼ばれる．

$\mathfrak{g}$ の表現 ρ のウェイト全体がなす集合 W について、W の順序 $\succ$ を、次で定義する．

定義 12 $w_1, w_2 \in W$ について、

$$w_1 \succ w_2 :\Leftrightarrow w_1 - w_2 \text{が } \mathfrak{g} \text{ のある正ルートに等しい}$$

定義 13 (最高ウェイト) ρ の全てのウェイト w に対し、$w_h \succ w$ をみたす ρ のウェイト w_h が唯 1 つ存在するが、これを ρ の最高ウェイトを呼ぶ．

任意の $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対し、Λ を最高ウェイトに持つ既約表現が存在する．

次に紹介する、「一般化された Kac–Moody 超リー代数」と呼ばれるクラスの単純超リー代数に対しては、有限次元単純リー代数の表現論で用いられている議論がほぼそのままの形で適用できる（指標公式が得られている）．しかしながら、リー代数でない有限次元単純超リー代数の殆ど全てが、一般化された Kac–Moody 超リー代数ではないことは注目すべき事実である．

定義 14 (一般化された Kac–Moody 超リー代数) 単純超リー代数 $\mathfrak{g}$ のカルタン行列 (a_{ij}) が、次を満たすとき、$\mathfrak{g}$ は一般化された *Kac–Moody* 超リー代数と呼ばれる．

1. $a_{ii}=2$ または $a_{ii}\leq 0$.
2. $i\neq j$ ならば $a_{ij}\leq 0$.
3. $a_{ij}=0$ ならば $a_{ji}=0$.
4. i が $a_{ii}=2$ をみたすならば、全ての j について a_{ij} は整数である.

2.2 Verma 加群

任意の $\Lambda\in\mathfrak{h}^*$ について、Λ を最高ウェイトに持つ既約表現が存在することの証明は構成的に行われる. この証明は、始めに Λ を最高ウェイトとして持つが既約とは限らない $\mathfrak{g}$ 加群を構成することによって得られる. この加群は既約とは限らないが、その極大真部分加群による剰余加群を考えれば、これは既約表現となる.

Verma 加群と呼ばれる $\mathfrak{g}$ 加群を定義するため、$\mathfrak{g}$ によって決まる普遍展開超代数と呼ばれる $\mathbb{C}$ 代数を準備する (cf. [4]).

定義 15 $\mathbb{C}$ 代数 A であって、次をみたすものの中で普遍的なものを $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ とかき、$\mathfrak{g}$ の普遍展開超代数と呼ぶ.

1 対 1 の線型写像 $\iota:\mathfrak{g}\to A$ が存在して、

$$\iota(u)\iota(v)-(-1)^{\tilde{u}\tilde{v}}\iota(v)\iota(u)=[\iota(u),\iota(v)]$$

$(u,v\in\mathfrak{g})$ をみたす.

単純超リー代数 $\mathfrak{g}$ のルート分解 $\mathfrak{g}=\oplus_{\alpha;\text{ ルート}}\mathfrak{g}_\alpha$ について、$\mathfrak{n}_+:=\oplus_{\alpha;\text{ 正ルート}}\mathfrak{g}_\alpha$, $\mathfrak{n}_-:=\oplus_{\alpha;\text{ 負ルート}}\mathfrak{g}_\alpha$ とかくことにする. 明らかに $\mathfrak{g}=\mathfrak{n}_-\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_-$.

定義 16 v_Λ を Λ に依存する不定元、$\mathbb{C}v_\Lambda$ を v_Λ から生成される *1* 次元複素ベクトル空間とする. $1\otimes v_\Lambda\in\mathcal{U}(\mathfrak{g})\otimes\mathbb{C}v_\Lambda$ に対し、$h\in\mathfrak{h}$、$e\in\mathfrak{n}_+$、$f\in\mathfrak{n}_-$ との積を

$$h(1\otimes v_\lambda):=\Lambda(h)\otimes v_\Lambda\quad e(1\otimes v_\Lambda):=0\quad f(1\otimes v_\Lambda):=f\otimes v_\Lambda$$

と定義すれば、積の結合性を要求することにより、$\mathcal{U}(\mathfrak{g})\otimes\mathbb{C}_\Lambda$ は $\mathbb{C}$ 代数となる. このとき $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\otimes\mathbb{C}v_\Lambda$ の積から定まる $\mathfrak{g}$ の $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\otimes\mathbb{C}v_\Lambda$ への作用があるが、この作用の $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)\otimes\mathbb{C}v_\Lambda$ （これは $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\otimes\mathbb{C}_\Lambda$ の部分代数とみることができる）への制限は Λ を最高ウェイトに持つ $\mathfrak{g}$ 加群であり、これを「最高ウェイト Λ を持つ $\mathfrak{g}$ の *Verma* 加群」と呼ぶ.

3 単純超リー代数の $5|4$ 次元既約表現

有限次元単純超リー代数の分類は Kac([3]) によって完成されており、大別すると古典型・例外型・カルタン型の 3 つのタイプに分けられる. この節では、例外型に属する $D(2,1;i)$ $(i=\sqrt{-1})$ を例にとり、上に述べた方法を用いて $D(2,1;i)$ の $5|4$ 次元既約表現を構成する. $D(2,1;i)$ のカルタン行列は

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -i \\ 0 & -i & 2i \end{pmatrix}$$

であり、従って $D(2,1;i)$ は一般化された Kac–Moody 超リー代数ではない.

$D(2,1;i)$ は $9|8$ 次元超リー代数であり、$D(2,1;i)$ の正の単純ルート $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ について

$$\alpha_1(h_1) = 2 \quad \alpha_1(h_2) = -1 \quad \alpha_1(h_3) = 0$$
$$\alpha_2(h_1) = -1 \quad \alpha_2(h_2) = 0 \quad \alpha_2(h_3) = -i$$
$$\alpha_3(h_1) = 0 \quad \alpha_3(h_2) = -i \quad \alpha_3(h_3) = 2i$$

をみたすようにカルタン部分代数の 1 組の基底 h_1, h_2, h_3 を選ぶことができ、さらに単純なもの以外の正ルートは

$$\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 \quad \alpha_5 = \alpha_2 + \alpha_3 \quad \alpha_6 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \quad \alpha_7 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$$

である.

以下に $D(2,1;i)$ の超リー積を書き下す. いま、$\beta_i := -\alpha_i$ とかくことにすれば、$e_i \in D(2,1;i)_{\alpha_i}, f_i \in$

$D(2,1;i)_{\beta_i}$ （$D(2,1;i)_{\alpha_i}$ はルート α_i の固有空間）を、

$$[h_1,h_2]=0 \quad [h_1,h_3]=0 \qquad [h_1,e_1]=2e_1 \quad [h_1,e_2]=-e_2$$
$$[h_1,e_3]=0 \quad [h_1,e_4]=e_4 \qquad [h_1,e_5]=-e_5 \quad [h_1,e_6]=e_6$$
$$[h_1,e_7]=0 \quad [h_1,h_1]=-2f_1 \qquad [h_1,f_2]=f_2 \quad [h_1,f_3]=0$$
$$[h_1,f_4]=-f_4 \quad [h_1,f_5]=f_5 \qquad [h_1,f_6]=-f_6 \quad [h_1,f_7]=0$$
$$[h_2,e_1]=-e_1 \quad [h_2,e_2]=0 \qquad [h_2,e_3]=-ie_3 \quad [h_2,e_4]=-e_4$$
$$[h_2,e_5]=-ie_5 \quad [h_2,e_6]=-(1+i)e_6 \qquad [h_2,e_7]=-(1+i)e_7 \quad [h_2,f_1]=f_1$$
$$[h_2,f_2]=0 \quad [h_2,f_3]=if_3 \qquad [h_2,f_4]=-f_4 \quad [h_2,f_5]=if_5$$
$$[h_2,f_6]=(1+i)f_6 \quad [h_2,f_7]=(1+i)f_7 \qquad [h_3,e_1]=0 \quad [h_3,e_2]=-ie_2$$
$$[h_3,e_3]=2e_3 \quad [h_3,e_4]=-ie_4 \qquad [h_3,e_5]=ie_5 \quad [h_3,e_6]=ie_6$$
$$[h_3,e_7]=0 \quad [h_3,f_1]=0 \qquad [h_3,f_2]=if_2 \quad [h_3,f_3]=-2f_3$$
$$[h_3,f_4]=if_4 \quad [h_3,f_5]=-if_5 \qquad [h_3,f_6]=-if_6 \quad [h_3,f_7]=0$$
$$[e_1,e_2]=e_4 \quad [e_1,e_3]=0 \qquad [e_1,e_4]=0 \quad [e_1,e_5]=e_6$$
$$[e_1,e_6]=0 \quad [e_1,e_7]=0 \qquad [e_1,f_1]=h_1 \quad [e_1,f_2]=0$$
$$[e_1,f_3]=0 \quad [e_1,f_4]=f_2 \qquad [e_1,f_5]=0 \quad [e_1,f_6]=f_5$$
$$[e_1,f_7]=0 \quad [e_2,e_2]=0 \qquad [e_2,e_3]=e_5 \quad [e_2,e_4]=0$$
$$[e_2,e_5]=0 \quad [e_2,e_6]=e_7 \qquad [e_2,e_7]=0 \quad [e_2,f_1]=0$$
$$[e_2,f_2]=h_2 \quad [e_2,f_3]=0 \qquad [e_2,f_4]=-f_1 \quad [e_2,f_5]=if_3$$
$$[e_2,f_6]=0 \quad [e_2,f_7]=(1+i)f_6 \qquad [e_3,e_4]-e_6 \quad [e_3,e_5]=0$$
$$[e_3,e_6]=0 \quad [e_3,e_7]=0 \qquad [e_3,f_1]=0 \quad [e_3,f_2]=0$$
$$[e_3,f_3]=h_3 \quad [e_3,f_4]=0 \qquad [e_3,f_5]=-if_2 \quad [e_3,f_6]=-if_4$$
$$[e_3,f_7]=0 \quad [e_4,e_4]=0 \qquad [e_4,e_5]=-e_7 \quad [e_4,e_6]=0$$
$$[e_4,e_7]=0 \quad [e_4,f_1]=e_4 \qquad [e_4,f_2]=e_1 \quad [e_4,f_3]=0$$
$$[e_4,f_4]=-(h_1+h_2) \quad [e_4,f_5]=0 \qquad [e_4,f_6]=-if_3 \quad [e_4,f_7]=(1+i)f_5$$
$$[e_5,e_5]=0 \quad [e_5,e_6]=0 \qquad [e_5,e_7]=0 \quad [e_5,f_1]=0$$
$$[e_5,f_2]=-ie_3 \quad [e_5,f_3]=-ie_2 \qquad [e_5,f_4]=0 \quad [e_5,f_5]=i(h_2+h_3)$$
$$[e_5,f_6]=if_1 \quad [e_5,f_7]=0 \qquad [e_6,e_7]=0 \quad [e_6,f_1]=e_5$$
$$[e_6,f_2]=0 \quad [e_6,f_3]=-ie_4 \qquad [e_6,f_4]=ie_3 \quad [e_6,f_5]=0$$
$$[e_6,f_6]=i(h_1+h_2+h_3) \quad [e_6,f_7]=(-1+i)f_2 \qquad [e_7,f_1]=0 \quad [e_7,f_2]=(1+i)e_6$$
$$[e_7,f_3]=0 \quad [e_7,f_4]=(1+i)e_5 \qquad [e_7,f_5]=(1+i)e_4 \quad [e_7,f_6]=(-1+i)e_2$$
$$[e_7,f_7]=(-1+i)(h_1+h_3)$$

をみたすようにとることができる.

3.1 $\Lambda = h_1^*$ を最高ウェイトに持つ既約表現

$D(2,1;i)$ の既約表現については次のことが成り立つのではないかと考えられる.

予想 1 λ_1, λ_2 は整数、μ_1, μ_2 は正の整数であるとする. このとき $D(2,1;i)$ の既約表現 ρ の最高ウェイトが

$$\Lambda = \lambda_1 h_1^* + i\lambda_2 h_3^* + (\mu_1 + i\mu_2) h_2^*$$

のかたちをとるならば（ここで h_1^*, h_2^*, h_3^* はそれぞれ h_1, h_2, h_3 の双対基底)、ρ は有限次元表現となる.

これより先は Λ を $\Lambda = h_1^*$ に固定し、これを最高ウェイトとして持つ既約表現について考える.

命題 1 $\Lambda = h_1^*$ を最高ウェイトに持つ *Verma* 加群 V_Λ について、その極大真部分加群 J は唯 1 つ存在する. さらに剰余加群 V_Λ/J のベクトル空間としての次元は $5|4$ 次元であり、その基底として

$$[1 \otimes v_\Lambda], [f_1 \otimes v_\Lambda], [f_2 f_3 f_2 f_1 \otimes v_\Lambda], [f_1 f_2 f_3 f_2 f_1 \otimes v_\Lambda], [f_2 f_3 f_2 f_1 f_2 f_3 f_2 f_1 \otimes v_\Lambda]$$
$$[f_2 f_1 \otimes v_\Lambda], [f_3 f_2 f_1 \otimes v_\Lambda], [f_2 f_1 f_2 f_3 f_2 f_1 \otimes v_\Lambda], [f_3 f_2 f_1 f_2 f_3 f_2 f_1 \otimes v_\Lambda]$$

を選ぶことができる. ここで $[a]$ は a を代表元に持つ剰余類を表すものとする.

上のように基底を選べば、ρ の行列表示は

$$\left(\begin{array}{ccccc|cc}
h_1 & e_1 & (-1+i)e_7 & 0 & 0 & e_4 & ie_6 \\
f_1 & -h_1+h_2 & 0 & (1-i)e_7 & 0 & e_2 & -ie_5 \\
0 & 0 & h_1+(1+i)h_2 & e_1 & (-4+2i)e_7 & f_5 & f_2 \\
0 & -f_7 & f_1 & -h_1+(2+i)h_2 & 0 & -f_6 & f_4 \\
0 & 0 & f_7 & 0 & h_1+(2+2i)h_2 & 0 & 0 \\
\hline
0 & f_2 & (-1+i)e_5 & (1-i)e_6 & 0 & h_2+ih_3 & -ie_3 \\
0 & 0 & -f_4 & f_2 & (-2+2i)e_5 & -f_7 & 0 \\
0 & 0 & f_6 & -f_5 & (2+2i)e_2 & 0 & f_7
\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{cc}
0 & 0 \\
0 & 0 \\
(2+i)e_4 & (-1+2i)e_6 \\
(2+i)e_2 & (1-2i)e_5 \\
f_5 & f_7 \\
\hline
(3-i)e_7 & 0 \\
0 & (-3+i)e_7 \\
(2+2i)h_1+ih_3 & -ie_3 \\
f_3 & (2+2i)h_2-ih_3
\end{array}\right)$$

となる.

参考文献

[1] F.A.Berezin, Introduction to superanalysis, D.Reidel Publ. Co., 1987.

[2] P. Deligne, J.W.Morgan, Notes on supersymmetry, In: Qunatum fields and strings: a course for mathematicians vol.1, American Mathmatical Society, 1999.

[3] V.G.Kac, Lie superalgebras, Adv. Math., **26**(1977) 8–96.

[4] L.E.Ross, Representations of graded Lie algebras, Trans.Amer.Math.Soc. **120** (1965) 17–23.

[5] 脇本　実、無限次元リー代数、岩波講座　現代数学の展開、岩波書店.

[6] S.Weinberg, The quantum theory of fields vol.1 Foundations, Cambridge Univ. Press, 2005.