

# シューア多項式の一般化におけるピエリルール

沼田 泰英\*(北海道大学大学院理学研究科)

## 概要

Generalized Schur operators の展開係数として generalized Schur polynomials を定義する. そこには, Pieri's formula に相当する公式が存在する.

## 1 Introduction

Young's lattice は Stanley [11] によって導入された differential poset の prototypical な例である. Young's lattice では Robinson 対応と呼ばれる, standard Young tableaux のペアと順列との間の一対一対応が知られているが, この対応は Fomin [3] によって differential poset やその一般化である dual graphs においても構成されている.

さらに, Young's lattice では Robinson-Schensted-Knuth 対応と呼ばれる semi-standard Young tableaux のペアとある行列との間の一対一対応が知られている. Fomin は [4] において generalized Schur operators を導入し, dual graph における Robinson 対応の手法を Robinson-Schensted-Knuth 対応へ拡張した. この意味で, generalized Schur operators は semi-standard tableaux の一般化であると考えられる. 我々は, generalized Schur operators を用いて Schur polynomials の一般化に相当する多項式を定義する.

完全対称多項式は, 一行のみからなる Young diagram に対応する Schur 多項式であるが,  $i$  次完全対称式  $h_i$  と一般の Schur 多項式  $s_\lambda$  との積は Pieri's formula と呼ばれる等式を満たしている. ここでいう Pieri's formula とは以下のような物である:

$$\sum_{\mu} s_{\mu}(t_1, \dots, t_n) = h_i(t_1, \dots, t_n) s_{\lambda}(t_1, \dots, t_n),$$

ただし, 左辺の  $\mu$  は  $\mu/\lambda$  が  $i$  箱からなる horizontal strip になる様な Young diagram を全て動く.

---

\* nu@math.sci.hokudai.ac.jp

この等式に相当する等式が Schur polynomial の一般化に相当する多項式にも成立していることを示す.

Section 2 では, Young 図形や Schur 多項式におけるよく知られた事実を, いくつか復習する. Section 3 で Schur polynomials の一般化に相当する多項式を定義する. Section 4 で主結果である Pieri formula を示す. Section 5 で例を見る.

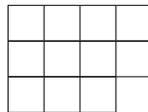
## 2 復習

この節では, Young 図形や Schur 多項式について復習する.

### 2.1 Young 図形 についての復習

非負整数  $n \in \mathbb{N}$  に対して, 非負整数の非減少列  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  ( $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{N}$ ) が,  $\sum_i \lambda_i = n$  を満しているとき,  $n$  の partition(分割) であるといい,  $\lambda \vdash n$  と書く.  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \vdash n$  に対して  $n$  の partition  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  と  $n$  の partition  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, 0)$  を同一視する. 0 の partition は  $(0)$  ( $= (0, 0) = (0, 0, 0) = \dots$ ) のみであり  $\emptyset$  と書くことにする. partition  $\lambda$  に対して,  $|\lambda|$  を  $\sum_i \lambda_i$  で定義する.

$\lambda \vdash n$  に対して,  $\mathcal{D}_\lambda := \{(i, j) \mid 1 \leq j \leq \lambda_i\}$  を  $\lambda$  の Young diagram(ヤング図形) という.  $(i, j) \in \mathcal{D}_\lambda$  を  $i$  行  $j$  列目の box(箱) と呼ぶ. 我々は,  $\mathcal{D}_\lambda$  を  $i$  行目に  $\lambda_i$  個の箱を左に寄せて並べた図形で書き表す. 例えば,  $(4, 4, 3) \vdash 11$  に対し  $\mathcal{D}_{(4,4,3)}$  は



のようにあらわす. 以下特に断りがない限り partition  $\lambda$  とその Young diagram  $\mathcal{D}_\lambda$  とを同一視し両方とも  $\lambda$  で書き表すことにする.

$n$  箱の Young diagrams からなる集合を  $\mathbb{Y}_n := \{\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ , Young diagrams 全体からなる集合を  $\mathbb{Y} := \bigcup_i \mathbb{Y}_i$  と書く. Young diagram  $\mathcal{D}_\lambda$  は, 集合であるので, 集合の包含関係を用いて,  $\mathbb{Y}$  に半順序集合 (poset) の構造を入れることができる.  $\mathbb{Y}$  はこの半順序で束 (lattice) になっており Young's lattice(ヤング束) と呼ばれる. 0 箱の Young diagram  $\emptyset$  は, Young's lattice  $\mathbb{Y}$  の最小元になっている.

$n$  箱の Young diagram  $\lambda$  から  $\{1, \dots, m\}$  への写像,  $T : \lambda \ni (i, j) \mapsto T_{i,j} \in$

$\{1, \dots, m\}$  を,  $\{1, \dots, m\}$  を使った  $\lambda$  上の filling と呼び,

3	1	2	3
1	3	2	3
9	4	1	

のように Young diagram  $\lambda$  の  $i$  行  $j$  列目の箱に  $T_{i,j}$  を書き入れることで filling  $T$  を書き表す. filling  $T$  に対して, その定義域  $\lambda$  を  $T$  の形 (shape) と呼ぶ.

$\lambda$  上の filling  $T$  のうちで,  $T_{i,j} < T_{i+1,j}$ ,  $T_{i,j} \leq T_{i,j+1}$  を満たすものを, semi-standard tableau(半標準盤) と呼ぶ. 形が  $\lambda$  で  $\{1, \dots, m\}$  を使った semi-standard tableaux の総数を  $d_\lambda(m)$  と書く.

Example 2.1. 3 箱の Young diagrams 上の  $\{1, 2\}$  を使った semi-standard tableaux は次の 6 つ:

形が (3) のもの:  $\boxed{1\ 1\ 1}, \boxed{1\ 1\ 2}, \boxed{1\ 2\ 2}, \boxed{2\ 2\ 2}$

形が (2,1) のもの:  $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$

形が (1,1,1) のもの: なし.

よって  $d_{(3)}(2) = 4$ ,  $d_{(2,1)}(2) = 2$ ,  $d_{(1,1,1)}(2) = 0$  である.

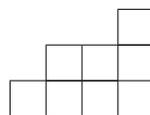
$\lambda \vdash n$  上の semi-standard tableau  $T$  が,  $\lambda$  から  $\{1, \dots, n\}$  への全単射になっているときは standard tableau(標準盤) と呼ぶ. 形が  $\lambda$  の semi-standard tableaux の総数を  $f^\lambda$  と書く.

Example 2.2. 3 箱の Young diagrams 上の standard tableaux は次の 4 つ:

1	1	2	1	3	1	2	3
2	3	2	2	3	1	2	3
3	3	2	2	3	1	2	3

$f^{(3)} = 1$ ,  $f^{(2,1)} = 2$ ,  $f^{(1,1,1)} = 1$  である.

$\lambda, \mu \in \mathbb{Y}$  が  $\lambda \subset \mu$  を満たしているときに,  $\mu \setminus \lambda$  を skew Young diagram(歪ヤング図形) といい  $\mu/\lambda$  と書く. 例えば,  $(4, 4, 3)/(3, 1)$  は



のように書き表す. Young diagram のとき同様に semi-standard tableauxなどを定義することができて skew semi-standard tableau などと呼ばれる. Young diagram  $\lambda$  は  $\lambda/\emptyset$  だと思えることができる.

次の方法で Young tableaux をある Young diagrams の列と同一視する.

$\lambda \vdash n$  上の standard tableau  $T$  に対して, 逆像  $T^{-1}(\{0, \dots, l\})$  は Young diagram になっている. さらに,  $\lambda^{(i)} = (T^{-1}(\{0, \dots, i\}))$  と置くと,  $(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)})$  は  $\emptyset$  から始まり 1 箱ずつ増えていっている Young diagrams の列になっていることがわかる. 逆に  $(\emptyset = \lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(n)} = \lambda)$  という  $\emptyset$  から始まり 1 箱ずつ増えていっている Young diagrams の列に対してが与えられたときに,  $T : \lambda \ni (i, j) \mapsto l$  (if  $(i, j) \in \lambda^{(l)}/\lambda^{(l-1)} \in \{1, \dots, n\}$ ) は  $\lambda$  上の standard tableau を与える. この対応で standard tableau と  $\emptyset$  から始まり 1 箱ずつ増えていっている Young diagrams の列を同一視する. 例えば,

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline \end{array} \leftrightarrow \left( \emptyset, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array} \leftrightarrow \left( \emptyset, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right)$$

のように同一視する. また,  $\mu$  から始まり  $\lambda$  まで 1 箱ずつ増えていっている Young diagrams の列は  $\lambda/\mu$  上の skew standard tableau と同一視することができる.

$\{1, \dots, m\}$  を用いた  $\lambda \vdash n$  上の semi-standard tableaux  $T$  においても, その逆像  $T^{-1}(\{0, \dots, l\})$  は Young diagram になっている. さらに,  $T^{-1}(\{0, \dots, l-1\}) \subset T^{-1}(\{0, \dots, l\})$  であり, skew Young diagram  $T^{-1}(\{0, \dots, l\})/T^{-1}(\{0, \dots, l-1\})$  には各列高々 1 箱しか含まれていないことがわかる. この様な, 各列高々 1 箱しか存在しない歪ヤング図形  $\lambda/\mu$  を horizontal strip(水平列島 [7]) と呼んだりもする.  $\lambda^{(i)} = T^{-1}(\{0, \dots, i\})$  と置くと,  $(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(m)})$  は  $\emptyset$  から始まり各列高々 1 箱ずつ増えていっている Young diagrams の列になっていることがわかる. standard tableau のときと同様に,  $\emptyset$  から始まり各列高々 1 箱ずつ増えていっている Young diagrams の列  $(\emptyset = \lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(m)} = \lambda)$  から  $T : \lambda \rightarrow \{1, \dots, m\}$  を定義すると semi-standard tableau になり, この対応で, semi-standard tableau と  $\emptyset$  から始まり各列高々 1 箱ずつ増えていっている Young diagrams の列を同一視することができる. 例えば,

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 4 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline \end{array} \leftrightarrow \left( \emptyset, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right)$$

のように同一視する.

$K$  を標数 0 の体とする.  $K\mathbb{Y}$  を Young diagrams を基底とするベクトル空間 (即ち, ヤング図形の形式的な有限線形和のなすベクトル空間),  $\widehat{K\mathbb{Y}}$  を  $K\mathbb{Y}$  の完備化 (即ち, ヤング図形の (無限和を許す) 形式的な和のなすベクトル空間) とする. 双線形写像  $\langle \cdot, \cdot \rangle: \widehat{K\mathbb{Y}} \times K\mathbb{Y} \rightarrow K$  を  $\langle \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}} a_\lambda \lambda, \sum_{\mu \in \mathbb{Y}} b_\mu \mu \rangle = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}} a_\lambda b_\lambda$  で定める.

$K\mathbb{Y}$  上の線形写像  $U_1, D_1$  を,  $\lambda \in \mathbb{Y}$  に対して,

$$U_1 \lambda = \sum_{\substack{\mu: \lambda \text{ に } 1 \text{ 箱加えて} \\ \text{得られる young diagram}}} \mu, \quad D_1 \lambda = \sum_{\substack{\mu: \lambda \text{ から } 1 \text{ 箱取り除いて} \\ \text{得られる Young diagram}}} \mu$$

となるように定める. このように定めたときに,  $U_1$  と  $D_1$  は

$$D_1 U_1 - U_1 D_1 = I \quad (1)$$

という交換関係を満たしていることが確かめられる. また,  $K\mathbb{Y}$  上の線形写像  $U_i, D_i$  を,  $\lambda \in \mathbb{Y}$  に対して,

$$U_i \lambda = \sum_{\substack{\mu: \lambda \text{ に各列高々 } 1 \text{ 箱, 全部で } i \text{ 箱} \\ \text{加えて得られる Young diagram}}} \mu, \quad D_i \lambda = \sum_{\substack{\mu: \lambda \text{ から各列高々 } 1 \text{ 箱, 全部で } i \text{ 箱} \\ \text{取り除いて得られる Young diagram}}} \mu \quad (2)$$

となるように定める. このように定めたときに,  $U_i$  と  $D_j$  は

$$D_i U_j = \sum_{k=0}^{\min(i,j)} U_{j-k} D_{i-k}$$

という交換関係を満たしていることが確かめられる. この交換関係は母関数  $U(t) = \sum_i U_i t^i$ ,  $D(t') = \sum_i D_i (t')^i$  を用いて

$$D(t')U(t) = \frac{1}{1-tt'} U(t)D(t') \quad (3)$$

の様にシンプルに書くこともできる.

例えば,  $U_1^n \emptyset$  での  $\lambda \vdash n$  の係数は,  $(\emptyset = \lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(n)} = \lambda)$  という  $\emptyset$  から始まり 1 箱ずつ増えていっている Young diagrams の列の総数に等しいことは定義からわかる. このような列は形が  $\lambda$  の semi-standard tableau と同一視することができたので,

$$U_1^n \emptyset = \sum_{\lambda \vdash n} f^\lambda \lambda \quad (4)$$

がわかる.

同様に,  $\lambda \vdash n$  に対して  $D_1^n \lambda$  での  $\emptyset$  の係数は,  $(\lambda = \lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(n)} = \emptyset)$  という  $\lambda$  から始まり  $\emptyset$  まで 1 箱ずつ減っていっている Young diagrams の列の総数に等し

いことは定義からわかる. このような列の総数は形が  $\lambda$  の standard tableaux の総数に等しいことがわかり,

$$\langle \emptyset, D_1^n \lambda \rangle = f^\lambda \quad (5)$$

が  $\lambda \in \mathbb{Y}_n$  に対して成立することがわかる.

さて, ここで  $D_1^n U_1^n$  について, 観察する. 式 (4), (5) から,

$$\begin{aligned} \langle D_1^n U_1^n \emptyset, \emptyset \rangle &= \left\langle D_1^n \sum_{\lambda \vdash n} f^\lambda \lambda, \emptyset \right\rangle \\ &= \sum_{\lambda \vdash n} f^\lambda \langle D_1^n \lambda, \emptyset \rangle \\ &= \sum_{\lambda \vdash n} f^\lambda \langle f^\lambda \emptyset, \emptyset \rangle \\ &= \sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 \end{aligned}$$

を得る.

さて, 一方で  $D_1$  と  $U_1$  は式 (1) つまり  $D_1 U_1 - U_1 D_1 = I$  という交換関係を満たしているので,  $D_1^n U_1^n = (U_1 D_1 + n) D_1^{n-1} U_1^{n-1} = (U_1 D_1 + n)(U_1 D_1 + n - 1) D_1^{n-2} U_1^{n-2} = \dots = (U_1 D_1 + n)(U_1 D_1 + n - 1) \dots (U_1 D_1 + 1)$  と変形することができ,  $D_1 \emptyset = 0$  に注意すると,  $D_1^n U_1^n \emptyset = n! \emptyset$  がわかる. よって

$$\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = n! \quad (6)$$

を得る. 実際

$$(f^{(1,1,1)})^2 + (f^{(2,1)})^2 + (f^{(3)})^2 = 1^2 + 2^2 + 1^2 = 6 = 3!$$

となっている. この様に,  $U$  や  $D$  を施し展開係数を比較することで, Young tableaux の数え上げに関する結果を得ることができる. 等式 (6) は,

$$\left\{ (P, Q) \left| \begin{array}{l} \lambda \vdash n, \\ P, Q; \text{形が } \lambda \text{ の standard tableaux} \end{array} \right. \right\}$$

と対称群  $S_n$  の元の個数が等しいことを意味している. 実際にこれらの間に 1 対 1 対応を構成する Robinson 対応というものがよく知られている. また,

$$\left\{ (P, Q) \left| \begin{array}{l} \lambda \vdash n, \\ P; \text{形が } \lambda \text{ の } \{1, \dots, l\} \text{ を使った semi-standard tableau,} \\ Q; \text{形が } \lambda \text{ の standard tableau} \end{array} \right. \right\}$$

と  $\{1, \dots, l\}$  の  $n$  文字の列  $\{1, \dots, l\}^n$  の間の全単射 (Robinson-Schensted 対応) や,

$$\left\{ (P, Q) \left| \begin{array}{l} \lambda \vdash n, \\ P; \text{形が } \lambda \text{ の } \{1, \dots, l\} \text{ を使った semi-standard tableau,} \\ Q; \text{形が } \lambda \text{ の } \{1, \dots, k\} \text{ を使った semi-standard tableaux} \end{array} \right. \right\}$$

と

$$\left\{ A = (a_{i,j}) \left| \begin{array}{l} A \text{ は } k \times l \text{ 行列,} \\ a_{i,j} \in \mathbb{N}, \\ \sum_{i,j} a_{i,j} = n \end{array} \right. \right\}$$

の間の全単射 (Robinson-Schensted-Knuth 対応) もよく知られている (例えば [5]). これらについても,  $U, D$  の交換関係を用いた解釈を与える事ができる.

## 2.2 Schur 多項式についての復習

Definition 2.3. Young tableaux  $T$  on  $\lambda$  と  $x = (x_1, \dots, x_n)$  に対し,

$$\begin{aligned} x^T &:= \prod_{(i,j) \in \lambda} x_{T_{i,j}} \\ &= x_1^{|\{(i,j) \in \lambda \mid T_{i,j}=1\}|} \dots x_n^{|\{(i,j) \in \lambda \mid T_{i,j}=n\}|} \\ &= x_1^1 \text{ の入った箱の数 } \dots x_n^n \text{ の入った箱の数} \end{aligned}$$

と定義する. Young diagram  $\lambda$  と  $x = (x_1, \dots, x_n)$  に対し,

$$s_\lambda(x) := \sum_{\substack{T: \text{ a semi-standard tableau} \\ \text{ on } \lambda \text{ with } \{1, \dots, n\}}} x^T$$

と定義し Schur 多項式と呼ぶ. 同様に skew Young diagram  $\lambda/\mu$  と  $x = (x_1, \dots, x_n)$  に対し,

$$s_{\lambda/\mu}(x) := \sum_{\substack{T: \text{ a semi-standard tableau} \\ \text{ on } \lambda/\mu \text{ with } \{1, \dots, n\}}} x^T$$

と定義する.

Schur 多項式  $s_\lambda(x)$  は  $s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = s_\lambda(x_1, \dots, x_n, 0)$  を満たしている. また  $|\lambda|$  次斉次対称多項式である. 変数を特に指定する必要の無い時には  $s_\lambda(x)$  を  $s_\lambda$  の様に略して書く事にする.  $\{s_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{Y}\}$  は (無限変数) 対称多項式環  $\Lambda$  の  $\mathbb{Z}$ -basis になっている.

Skew Young tableaux と Young diagram の列の同一視から次はすぐわかる:

$$D(x_1)D(x_2) \cdots D(x_n)\lambda = \sum_{\mu \in \mathbb{Y}} s_{\lambda/\mu}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Schur 多項式に関するよく知られた公式をいくつか紹介する.

完全対称式, 基本対称式:

$$\begin{aligned} s_{(l)}(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_l} x_{i_1} \cdots x_{i_l} \\ &= h_l(x_1, \dots, x_n), \\ s_{(1^l)}(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i_1 < \dots < i_l} x_{i_1} \cdots x_{i_l} \\ &= e_l(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

ただしここで,  $h_l(x_1, \dots, x_n)$  は  $l$  次斉次完全対称多項式 (homogenous complete symmetric polynomial),  $e_l(x_1, \dots, x_n)$  は  $l$  次基本対称多項式 (elementary symmetric polynomial),  $(1^l)$  は  $l$  個の 1 からなる partition とする.

Pieri formula:

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} s_{\mu}(t_1, \dots, t_n) &= h_i(t_1, \dots, t_n) s_{\lambda}(t_1, \dots, t_n), \\ \sum_{\nu} s_{\nu}(t_1, \dots, t_n) &= e_i(t_1, \dots, t_n) s_{\lambda}(t_1, \dots, t_n), \end{aligned}$$

ただし, 左辺の  $\mu$  は  $\mu/\lambda$  が  $i$  箱からなる horizontal strip になる様な Young diagram を全て動き, 左辺の  $\nu$  は  $\nu/\lambda$  が  $i$  箱からなる vertical strip になる様な Young diagram を全て動く.

Cauchy identity:

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}} s_{\lambda}(x_1, \dots, x_n) s_{\lambda}(y_1, \dots, y_n) &= \prod_{i,j} \frac{1}{(1 - x_i y_j)}, \\ s_{\lambda}(x_1, \dots, x_n) s_{\tilde{\lambda}}(y_1, \dots, y_n) &= \prod_{i,j} (1 + x_i y_j), \end{aligned}$$

ただし,  $\tilde{\lambda}$  は  $\lambda$  の転置. Skew version は [9, p.93 Ex.26].

Schur identity:

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{Y}} s_{\lambda}(x_1, \dots, x_n) = \prod_i \frac{1}{(1 - x_i)} \prod_{i < j} \frac{1}{(1 - x_i x_j)}.$$

Skew version は [9, p.93 Ex.27].

Jacobi-Trudi formula:

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_m) = \frac{\det((x_j)^{(\lambda_i)+m-i})_{1 \leq i, j \leq m}}{\det((x_j)^{m-i})_{1 \leq i, j \leq m}} \\ = \frac{\det((x_j)^{(\lambda_i)+m-i})_{1 \leq i, j \leq m}}{\prod_{1 \leq i < j \leq m} (x_i - x_j)}.$$

$$s_\lambda(x) = \det((h_{(\lambda_i)+j-i}(x))_{1 \leq i, j \leq k},$$

$$s_\lambda(x) = \det((e_{(\tilde{\lambda}_i)+j-i}(x))_{1 \leq i, j \leq l}.$$

これらを定義とする流儀もある.

## 2.3 まとめ

ここまで説明したいいくつかの Schur 多項式の性質を抽象化すると次のようになる:

Tableaux による表示 Tableaux  $T$  に対して, “形”  $\text{shape}(T)$  と “冪”  $x^T$  が定義されている. 多項式の族  $\{S_\lambda\}$  は

$$S_\lambda(x) = \sum_{\text{shape}(T)=\lambda} x^T$$

という表示を持つ.

Cauchy Formula 多項式の族  $\{S_\lambda\}$  に対して, 対になる多項式の族  $\{\bar{S}_\lambda\}$  があり,

$$\sum_\lambda \bar{S}_\lambda(x_1, \dots, x_n) S_\lambda(y_1, \dots, y_n) = \prod_{i,j} A(x_i y_j)$$

を満たしている.

Pieri Formula (“シンプルな形”  $(i)$  に対応する  $S_{(i)}$  と思えるような) 多項式の族  $\{H_i\}$  があり,

$$\sum_{\lambda \not\prec_i \mu} c_{\lambda, \mu} S_\mu(t_1, \dots, t_n) = H_i(t_1, \dots, t_n) S_\lambda(t_1, \dots, t_n),$$

ただし, 左辺の  $\lambda \not\prec_i \mu$  は “ $\mu/\lambda$  が  $i$  箱からなる horizontal strip” に相当するような条件,  $c_{\lambda, \mu}$  は係数とする.

Robinson-Schensted-Knuth 対応  $\{S_\lambda\}$  を定義する tableaux  $T$  と  $\{\bar{S}_\lambda\}$  を定義する tableaux  $\bar{T}$  の組達  $(T, \bar{T})$  には, 数え上げの結果が存在する.

転置 (転置の様な操作を使って定義される,) 多項式の族  $\{\tilde{S}_\lambda\}$  があって同様な性質を満たす. 特に,  $\{\bar{S}_\lambda\}$  と Cauchy formula

$$\sum_{\lambda} \bar{S}_\lambda(x_1, \dots, x_n) \tilde{S}_\lambda(y_1, \dots, y_n) = \prod_{i,j} \tilde{A}(x_i y_j)$$

成り立っていて,  $\tilde{A}(t)A(t) = 1$  が成立している.

このような性質を満たす多項式の族は Schur 多項式以外にも知られている. 我々の結果は, そのような族のいくつかに統一的な解釈を与えていることになる.

Remark 2.4. 講演の時点では知らなかったのでコメントできなかったが, Thomas Lam が同様の結果を出している [8]. 彼は, Heisenberg algebra から出発し, 対称関数の族を定義している. また一方で Heisenberg algebra から, generalized Schur operators (Definition 3.1) を構成し, その対称関数の族が Pieri formula などを満たしている事を示している.

### 3 Definition

この節で, 2 種類の多項式を定義する. 一つは Schur polynomials の一般化に相当するもの (Definition 3.3) であり, もう一つは完全対称多項式に相当するもの (Definition 3.7) である.

#### 3.1 Generalized Schur Operators

まず始めに, Schur polynomials の一般化に相当するものを定義するために, Fomin [4] によって導入された generalized Schur operators を定義する. 我々の多項式は generalized Schur operators の展開係数として定義される.

$K$  を標数 0 の体とする.  $K$  は  $t, t', t_1, t_2, \dots$  を変数とする冪級数を含んでいるとする. 添字  $i \in \mathbb{Z}$  に対して,  $V_i$  は有限次元  $K$ -ベクトル空間とする.  $Y_i$  を  $V_i$  の基底とし fix する.  $V = \bigoplus_i V_i, Y = \bigcup_i Y_i$  とする.

全ての  $i < 0$  において,  $Y_i = \emptyset$  であり,  $Y_0 = \{\emptyset\}$  であるときに,  $Y$  は最小元  $\emptyset$  を持つと言う事にする.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  を  $\langle \sum_{\lambda \in Y} c_\lambda \lambda, \sum_{\lambda \in Y} c'_\lambda \lambda \rangle = \sum_{\lambda \in Y} c_\lambda c'_\lambda$  を満たす自然なペアリングとする.

非負整数  $i > 0$  に対し,  $D_i, U_j$  を  $V$  上の線形写像とし任意の  $j$  に対して  $D_i(V_j) \subset V_{j-i}, U_i(V_j) \subset V_{j+i}$  を満たしているとする.  $\{a_i\}$  を  $K$  の元の列とする. 列  $\{A_i\}$  と変数  $x$  に

対して,  $A(x)$  で母関数  $\sum_{i \geq 0} A_i x^i$  を表す.

Definition 3.1 (generalized Schur operators). 等式  $D(t')U(t) = a(tt')U(t)D(t')$  が成立している時,  $D(t_1) \cdots D(t_n)$  と  $U(t_n) \cdots U(t_1)$  を, generalized Schur operators with  $\{a_m\}$  と呼ぶ.

Remark 3.2.  $D(t_1) \cdots D(t_n)$  と  $U(t_n) \cdots U(t_1)$  を generalized Schur operators with  $\{a_i\}$  とする. 任意の  $x, y \in Y$  に対して,  $\langle y, U_i x \rangle = \langle x, U_i^* y \rangle$  を満たす線形写像を  $U_i^*$  と書く. 同様に,  $D_i^*$  も定義する. このとき,  $U^*(t_n) \cdots U^*(t_1)$  と  $D^*(t_1) \cdots D^*(t_n)$  は等式  $U^*(t')D^*(t) = a(tt')D^*(t)U^*(t')$  を満たしており generalized Schur operators with  $\{a_m\}$  である.

Definition 3.3 (generalized Schur polynomials).  $D(t_1) \cdots D(t_n), U(t_n) \cdots U(t_1)$  を generalized Schur operators とする.  $\lambda \in V$  と  $\mu \in Y$  に対して,  $s_{\lambda, \mu}^D(t_1, \dots, t_n)$  と  $s_U^{\mu, \lambda}(t_1, \dots, t_n)$  を, それぞれ  $D(t_1) \cdots D(t_n)\lambda$  と  $U(t_n) \cdots U(t_1)\lambda$  の  $\mu$  の係数と定義し generalized Schur polynomials と呼ぶことにする.

Generalized Schur polynomials  $s_{\lambda, \mu}^D(t_1, \dots, t_n)$  は,  $D(t)$  と  $D(t')$  が可換である時, 即ち  $D(t)D(t') = D(t')D(t)$  が成立する時には対称多項式となる.

また定義より,  $\lambda, \mu \in Y$  に対して

$$\begin{aligned} s_{\lambda, \mu}^D(t_1, \dots, t_n) &= \langle D(t_1) \cdots D(t_n)\lambda, \mu \rangle \\ &= \langle D^*(t_n) \cdots D^*(t_1)\mu, \lambda \rangle \\ &= s_{D^*}^{\lambda, \mu}(t_1, \dots, t_n) \end{aligned}$$

が成立している.

Example 3.4. Prototypical な example は Young's lattice  $\mathbb{Y}$  である.  $V_i$  として  $Y_i$  を basis とする  $K$ -線形空間とする. このとき Young's lattice  $\mathbb{Y}$  は 0 箱の Young diagram  $\emptyset$  を最小元として持っている.

$D_i, U_i$  を 2 のように定義する. このとき, 3 が成立していた. 言い替えると,  $\{a_m = 1\}$  に対して,  $D(t')U(t) = a(tt')U(t)D(t')$  を満たしている. 即ち,  $D(t_1) \cdots D(t_n)$  と  $U(t_n) \cdots U(t_1)$  は generalized Schur operators with  $\{1, 1, 1, \dots\}$  である.

この時,  $\lambda, \mu \in \mathbb{Y}$  に対して,  $s_{\lambda, \mu}^D(t_1, \dots, t_n)$  と  $s_U^{\lambda, \mu}(t_1, \dots, t_n)$  は両方ともに skew Schur polynomial  $s_{\lambda/\mu}(t_1, \dots, t_n)$  である.

Example 3.5. 多項式環  $K[x]$  を  $K$ -vector space だと思い  $V$  とする.  $V_i$  は  $i$  次の多項式が

らなる空間とする. この時,  $V_i$  は 1 次元であり, basis  $Y_i$  として  $\{x^i\}$  をとることができる. また, このとき  $1 = x^0$  を最小元として持っている.

$D_i$  と  $U_i$  を,  $\frac{\partial^i}{i!}$  に  $\frac{x^i}{i!}$  より定義する, ただし  $\partial$  は  $x$  の (偏) 微分を表す. この様に定義すると  $D(t)$  と  $U(t)$  はそれぞれ  $\exp(t\partial)$  と  $\exp(tx)$  となる.  $D(t)$  と  $U(t)$  は  $D(t)U(t') = \exp(tt')D(t)U(t')$  を満たすので,  $D(t_1)\cdots D(t_n)$  と  $U(t_n)\cdots U(t_1)$  は generalized Schur operators with  $\{a_m = \frac{1}{m!}\}$  である.

さらに,  $\partial$  (または  $x$ ) と  $t$  は可換なので, 次が成立している;

$$\begin{aligned} D(t_1)\cdots D(t_n) &= \exp(\partial t_1)\cdots \exp(\partial t_n) = \exp(\partial(t_1 + \cdots + t_n)), \\ U(t_n)\cdots U(t_1) &= \exp(xt_n)\cdots \exp(xt_1) = \exp(x(t_1 + \cdots + t_n)). \end{aligned}$$

このことから直接計算により,

$$\begin{aligned} s_{x^{i+j}, x^i}^D(t_1, \dots, t_n) &= \frac{(i+j)!}{i!j!} (t_1 + \cdots + t_n)^j, \\ s_U^{x^{i+j}, x^i}(t_1, \dots, t_n) &= \frac{1}{j!} (t_1 + \cdots + t_n)^j \end{aligned}$$

が分かる.

Remark 3.6. Partition  $\lambda \vdash l$  に対して  $z_\lambda$  を  $z_\lambda := 1^{m_1(\lambda)} m_1(\lambda)! \cdot 2^{m_2(\lambda)} m_2(\lambda)! \cdots$ , ただし  $m_i(\lambda) = |\{j | \lambda_j = i\}|$  とする.  $U_0 = D_0 = I$  を仮定する.  $l \in \mathbb{Z}_{>0}$  に対し, 次のように帰納的に  $b_l, B_l, B_{-l}$  を定義する:

$$\begin{aligned} b_l &= a_l - \sum_{\lambda \vdash l, \lambda_2 \neq 0} \frac{b_\lambda}{z_\lambda}, \\ B_l &= D_l - \sum_{\lambda \vdash l, \lambda_2 \neq 0} \frac{B_\lambda}{z_\lambda}, \\ B_{-l} &= U_l - \sum_{\lambda \vdash l, \lambda_2 \neq 0} \frac{B_{-\lambda}}{z_\lambda}, \end{aligned}$$

ただし,  $b_\lambda = b_{\lambda_1} \cdot b_{\lambda_2} \cdots$ ,  $B_\lambda = B_{\lambda_1} \cdot B_{\lambda_2} \cdots$ ,  $B_{-\lambda} = B_{-\lambda_1} \cdot B_{-\lambda_2} \cdots$ . この時,  $l, k \in \mathbb{Z}_{>0}$ ,  $l \neq k$  に対し,

$$\begin{aligned} [B_l, B_{-l}] &= l \cdot b_l \cdot I, \\ [B_l, B_{-k}] &= 0 \end{aligned}$$

が成立. もし  $U_i$  と  $D_i$  が  $U_j$  と  $D_j$  それぞれ可換で, なおかつ  $b_l \neq 0$  ならば,  $\{B_l, B_{-l} | l \in \mathbb{Z}_{>0}\}$  は the Heisenberg algebra を生成する. この場合は Lam [8] の議論を適用できる.

(Remark 3.10 で彼の complete symmetric polynomials  $h_i[b_m](t_1, \dots, t_n)$  と我々の weighted complete symmetric polynomials  $h_i^{\{a_m\}}(t_1, \dots, t_n)$  の関係について触れる.)  
 また,  $\lambda \vdash l$  に対して,  $\text{sgn}(\lambda) := (-1)^{\sum_{i: \lambda_i - 1 > 0} (\lambda_i - 1)}$  と置き

$$a'_l = \sum_{\lambda} \frac{\text{sgn}(\lambda) b_{\lambda}}{z_{\lambda}},$$

$$U'_{-l} = \sum_{\lambda} \frac{\text{sgn}(\lambda) B_{-\lambda}}{z_{\lambda}},$$

と定義することで generalized Schur operators  $D(t)$  and  $U'(t)$  with  $\{a'_m\}$  を得る事ができる. これは  $U_i$  と  $D_i$  が  $U_j$  と  $D_j$  可換でない時にでも定義できるが,  $a(t) \cdot a'(-t) = 1$  を満たしている. Young's lattice の例では,  $U'$  は転置をとって  $U$  を施し転置をとったものである.

## 3.2 Weighted Complete Symmetric Polynomials

次に, 完全対称多項式の一般化に相当する多項式を定義する. この多項式は帰納的に定義される.

Definition 3.7.  $\{a_m\}$  を  $K$  の元の列とする.  $i$ -th weighted complete symmetric polynomial  $h_i^{\{a_m\}}(t_1, \dots, t_n)$  を

$$h_i^{\{a_m\}}(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} \sum_{j=0}^i h_j^{\{a_m\}}(t_1, \dots, t_{n-1}) h_{i-j}^{\{a_m\}}(t_n), & (\text{for } n > 1) \\ a_i t_1^i & (\text{for } n = 1) \end{cases}$$

により定義する.

定義より  $i$ -th weighted complete symmetric polynomial  $h_i^{\{a_m\}}(t_1, \dots, t_n)$  は斉次な対称多項式であり,

$$a(t_1) \cdots a(t_n) = \sum_i h_i^{\{a_m\}}(t_1, \dots, t_n)$$

を満たす.

Example 3.8. 全ての  $a_m$  が 1 のとき,  $h_i^{\{1, 1, \dots\}}(t_1, \dots, t_n)$  は通常の完全対称多項式  $h_i(t_1, \dots, t_n)$  となる. この場合  $\sum_i h_i(t) = a(t) = \sum_i t^i = \frac{1}{1-t}$  である.

Example 3.9. 非負整数  $m$  に対して,  $a_m = \frac{1}{m!}$  のとき,  $h_i^{\{\frac{1}{m!}\}}(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{i!} (t_1 + \cdots + t_n)^i$  であり  $\sum_i h_i^{\{\frac{1}{m!}\}}(t) = a(t) = \exp(t)$  である.

Remark 3.10.  $\{b_m\}$  を  $K$  の元の列とする.  $h_i[b_m](t_1, \dots, t_n)$  を

$$h_i[b_m](t_1, \dots, t_n) := \sum_{\lambda \vdash i} \frac{b_\lambda p_\lambda(t_1, \dots, t_n)}{z_\lambda}$$

と定義する, ただし,  $b_\lambda = b_{\lambda_1} \cdot b_{\lambda_2} \cdots$ ,  $p_\lambda = p_{\lambda_1} \cdot p_{\lambda_2} \cdots$ ,  $p_i(t_1, \dots, t_n) = t_1^i + \cdots + t_n^i$  とする. このとき,

$$h_i[b_m](t_1, \dots, t_n) = \sum_{j=0}^i h_j[b_m](t_1, \dots, t_{n-1}) h_{i-j}[b_m](t_n).$$

が成立している.  $a_i := \sum_{\lambda \vdash i} \frac{b_\lambda}{z_\lambda}$  と置くと  $h_i[b_m](t_1) = a_i t^i$  となり

$$h_i[b_m](t_1, \dots, t_n) = h_i^{\{a_m\}}(t_1, \dots, t_n)$$

が言える.

## 4 Main Results

この節で, generalized Schur polynomials と weighted complete symmetric polynomials のいくつかの性質を示す: 最小元を持つときには, weighted complete symmetric polynomials が generalized Schur polynomials のうちの特別な物として書き表すことができること (Proposition 4.2) を示す. また, 主結果である, 一般の generalized Schur polynomials に対する Pieri's formula (Theorem 4.5) や, いくつかのバリエーション (Theorem 4.10) も与える. さらに, 一般の generalized Schur polynomials に対する Pieri's formula の系として得られる, 最小元を持つ場合の Pieri's formula (Corollary 4.6) を与える.

### 4.1 Pieri's Formula

まず,  $U_i$  と  $D(t_1) \cdots D(t_n)$  の交換関係を観察する. この交換関係から主結果である一般の generalized Schur polynomials に対する Pieri's formula (Theorem 4.5) は導かれる. また,  $V$  が最小元を持つときには weighted complete symmetric polynomials が generalized Schur polynomials の和として書けること (Proposition 4.2) もこの交換関係から導かれる.

Proposition 4.1.  $D(t_1) \cdots D(t_n)$  と  $U(t_n) \cdots U(t_1)$  を generalized Schur operators with  $\{a_m\}$  とする. このとき任意の  $i$  に対して

$$D(t_1) \cdots D(t_n)U_i = \sum_{j=0}^i h_{i-j}^{\{a_m\}}(t_1, \dots, t_n)U_j D(t_1) \cdots D(t_n)$$

が成立する.

*Proof.* 証明の方針のみ述べる. Generalized Schur operators with  $\{a_m\}$  の満たすべき式

$$D(t)U(t') = a(tt')U(t')D(t)$$

から,  $D(t)U_i = \sum_{j=0}^i a_j t^j U_{i-j} D(t)$  がいえる. また同様に,

$$D(t_1) \cdots D(t_n)U_i = \sum_{j=0}^i H_{i,j}(t_1, \dots, t_n)U_j D(t_1) \cdots D(t_n)$$

としたとき,  $H_{i,j}(t_1, \dots, t_n)$  が  $h_{i-j}^{\{a_m\}}(t_1, \dots, t_n)$  と同じ漸化式を満たしている事がいえ, これらからこの Proposition が示される.  $\square$

この Proposition から, 最小元  $\emptyset$  がある時には, weighted complete symmetric polynomials は次の Proposition 4.2 のように generalized Schur polynomials の線形結合として書けることがわかる.

Proposition 4.2.  $\emptyset$  を最小元とし,  $D(t_1) \cdots D(t_n)$  と  $U(t_n) \cdots U(t_1)$  が generalized Schur operators with  $\{a_m\}$  とすると, 任意の  $i \geq 0$  で次の等式が成立している:

$$s_{U_i \emptyset, \emptyset}^D(t_1, \dots, t_n) = h_i^{\{a_m\}}(t_1, \dots, t_n) d_0^m u_0,$$

ただし,  $u_0 \in K$  と  $d_0 \in K$  は  $U_0 \emptyset = u_0 \emptyset$ ,  $D_0 \emptyset = d_0 \emptyset$  を満たすものとする.

*Proof.* 証明の方針のみ述べる.  $D(t_1) \cdots D(t_n)U_i \emptyset$  における  $\emptyset$  の係数を比較する事で Proposition 4.1 から示す事ができる.  $\square$

Example 4.3. Young's lattice  $\mathbb{Y}$  の場合, Proposition 4.2 は 1 行からなる Young diagram に対応する Schur polynomial  $s_{(i)}$  が完全対称多項式  $h_i$  であることを表している.

Example 4.4.  $K[x]$  の例の場合, Proposition 4.2 は  $\exp(\partial(t_1 + \cdots + t_n)) \cdot \frac{x^i}{i!}$  での  $x^0$  の係数が  $\frac{(t_1 + \cdots + t_n)^i}{i!}$  であることを表している.

一般の場合 (最小元を持つとは限らない場合) を考える. Proposition 4.1 より,  $\lambda \in V$  と  $\mu \in Y$  に対して

$$\langle D(t_1) \cdots D(t_n) U_i \lambda, \mu \rangle = \left\langle \sum_{j=0}^i h_{i-j}^{\{a_m\}}(t_1, \dots, t_n) U_j D(t_1) \cdots D(t_n) \lambda, \mu \right\rangle$$

が言える. この等式により Theorem 4.5 が従う.

Theorem 4.5 (Pieri's formula).  $\mu \in Y_k$  と  $\lambda \in V$  に対して, generalized Schur operators は

$$s_{U_i \lambda, \mu}^D(t_1, \dots, t_n) = \sum_{j=0}^i h_{i-j}^{\{a_m\}}(t_1, \dots, t_n) \sum_{\nu \in Y_{k-j}} \langle U_j \nu, \mu \rangle s_{\lambda, \nu}^D(t_1, \dots, t_n)$$

を満たす.

更に最小元  $\emptyset$  があるのであれば, 次の系を得る.

Corollary 4.6.  $\lambda \in V$  に対して, 次の等式が成り立つ;

$$\begin{aligned} s_{U_i \lambda, \emptyset}^D(t_1, \dots, t_n) &= h_i^{\{a_m\}}(t_1, \dots, t_n) u_0 s_{\lambda, \emptyset}^D(t_1, \dots, t_n) \\ &= s_{U_i \emptyset, \emptyset}^D(t_1, \dots, t_n) u_0 s_{\lambda, \emptyset}^D(t_1, \dots, t_n), \end{aligned}$$

ただし,  $u_0 \in K$  は  $U_0 \emptyset = u_0 \emptyset$  を満たすものとする.

Example 4.7. Young's lattice  $\mathbb{Y}$  の場合, Young diagram  $\lambda \in \mathbb{Y}$  に対して,  $U_i \lambda$  は  $\kappa/\lambda$  が  $i$  箱からなる horizontal strip となるような Young diagrams  $\kappa$  の和である. 従って  $s_{U_i \lambda, \emptyset}^D(t_1, \dots, t_n) = \sum_{\kappa} s_{\kappa}(t_1, \dots, t_n)$ , ただし右辺の和は  $\kappa/\lambda$  が  $i$  箱からなる horizontal strip となるような Young diagrams  $\kappa$  を動く. 一方で  $u_0 = 1$ ,  $h_i^{\{a_m\}}(t_1, \dots, t_n) = h_i(t_1, \dots, t_n)$  であるので, Corollary 4.6 の右辺は  $h_i(t_1, \dots, t_n) s_{\lambda}(t_1, \dots, t_n)$  となり, Corollary 4.6 は通常の Pieri's formula に他ならない. さらに Theorem 4.5 は skew Schur polynomials に対する Pieri's formula である: 即ち, skew Young diagram  $\lambda/\mu$  と  $i \in \mathbb{N}$  に対し, 次が成立している;

$$\sum_{\kappa} s_{\kappa/\mu}(t_1, \dots, t_n) = \sum_{j=0}^i \sum_{\nu} h_{i-j}(t_1, \dots, t_n) s_{\lambda/\nu}(t_1, \dots, t_n),$$

ただし左辺の和は  $\kappa/\lambda$  が  $i$  箱の horizontal strip になる様な  $\kappa$  を動く; 右辺の和は  $\mu/\nu$  が  $j$  箱の horizontal strip になる様な  $\nu$  を動く.

## 4.2 Some Variations of Pieri's Formula

ここでは, generalized Schur polynomials に対する Pieri's formula のいくつかのバリエーションを見る.

次の Proposition は Proposition 4.1 に \* を施す事などにより従う.

Proposition 4.8.  $D(t_1) \cdots D(t_n)$  と  $U(t_n) \cdots U(t_1)$  を generalized Schur operators with  $\{a_i\}$  とする. このとき次が成立する:

$$\begin{aligned} D_i U(t_n) \cdots U(t_1) &= \sum_{j=0}^i h_{i-j}^{\{a_m\}}(t_1, \dots, t_n) U(t_n) \cdots U(t_1) D_j, \\ U_i^* D(t_n)^* \cdots D^*(t_1) &= \sum_{j=0}^i h_{i-j}^{\{a_m\}}(t_1, \dots, t_n) D^*(t_n) \cdots D^*(t_1) U_j^*, \\ U^*(t_1) \cdots U^*(t_n) D_i^* &= \sum_{j=0}^i h_{i-j}^{\{a_m\}}(t_1, \dots, t_n) D_j^* U^*(t_1) \cdots U^*(t_n). \end{aligned}$$

この proposition から Corollary 4.2, Theorem 4.5, Corollary 4.6 のバリエーションが導かれる. Corollary 4.2, Theorem 4.5, Corollary 4.6 と同様の方法で証明できる.

Proposition 4.9.  $D(t_1) \cdots D(t_n)$  と  $U(t_n) \cdots U(t_1)$  を generalized Schur operators with  $\{a_i\}$  とし,  $\emptyset$  が最小元であるとする. このとき, 次が成立する:

$$s_{D_i^* \emptyset, \emptyset}^{U^*}(t_1, \dots, t_n) = h_i^{\{a_m\}}(t_1, \dots, t_n) u_0^n d_0,$$

ただし,  $u_0 \in K$  と  $d_0 \in K$  は  $U_0 \emptyset = u_0 \emptyset$ ,  $D_0 \emptyset = d_0 \emptyset$  を満たすものとする.

Theorem 4.10 (variations of Pieri's formula). 任意の  $\mu \in Y_k$  と  $\lambda \in V$  に対して, generalized Schur polynomials は次を満たす:

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa \in Y} \langle D_i \kappa, \mu \rangle s_{U^*}^{\kappa, \lambda}(t_1, \dots, t_n) &= \sum_{j=0}^i h_{i-j}^{\{a_m\}}(t_1, \dots, t_n) s_U^{\mu, D_j \lambda}(t_1, \dots, t_n), \\ s_{D_i^* \lambda, \mu}^{U^*}(t_1, \dots, t_n) &= \sum_{j=0}^i h_{i-j}^{\{a_m\}}(t_1, \dots, t_n) \sum_{\nu \in Y_{k-j}} \langle D_j^* \nu, \mu \rangle s_{\lambda, \nu}^{U^*}(t_1, \dots, t_n), \\ \sum_{\kappa \in Y} \langle U_i^* \kappa, \mu \rangle s_{D^*}^{\kappa, \lambda}(t_1, \dots, t_n) &= \sum_{j=0}^i h_{i-j}^{\{a_m\}}(t_1, \dots, t_n) s_{D^*}^{\mu, U_j^* \lambda}(t_1, \dots, t_n). \end{aligned}$$

Corollary 4.11. 任意の  $\lambda \in V$  に対して, 次が成立する:

$$\begin{aligned} s_{D_i^* \lambda, \emptyset}^{U^*}(t_1, \dots, t_n) &= h_i^{\{a_m\}}(t_1, \dots, t_n) d_0 s_{\lambda, \emptyset}^{U^*}(t_1, \dots, t_n) \\ &= s_{D_i^* \emptyset, \emptyset}^{U^*}(t_1, \dots, t_n) d_0 s_{\lambda, \emptyset}^{U^*}(t_1, \dots, t_n), \end{aligned}$$

ただし,  $d_0 \in K$  は  $D_0 \emptyset = d_0 \emptyset$  を満たすものとする.

## 5 More Examples

この節では, generalized Schur operators の例を挙げる.

### 5.1 Shifted Shapes

Fomin [4, Example 2.1] と同じ例を考える.  $Y$  を shifted shapes 全体からなる集合とする. (i.e.,  $Y$  を  $\{(i, j) | i \leq j < \lambda_i + i\} | \lambda = (\lambda_1 > \lambda_2 > \dots), \lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$  とする.)

$D_i$  を  $\lambda \in Y$  に対して,

$$D_i \lambda = \sum_{\nu} 2^{cc_0(\lambda/\nu)} \nu,$$

(ただし  $cc_0(\lambda/\nu)$  は main diagonal を含まない  $\lambda/\nu$  の連結な component の数とし, 和は  $\lambda/\nu$  が  $i$  箱からなる horizontal strip となるような  $\nu$  を全て動くもとする) となるように定義する.

$U_i$  は  $\lambda \in Y$  に対して

$$U_i \lambda = \sum_{\mu} 2^{cc(\mu/\lambda)} \mu,$$

(ただし  $cc(\lambda \setminus \mu)$  は  $\lambda/\mu$  の連結な component の数とし, 和は  $\mu/\lambda$  が  $i$  箱からなる horizontal strip となるような  $\mu$  を全て動くもとする) となる様に定義する.

この時  $D(t)$  と  $U(t)$  は

$$D(t')U(t) = \frac{1 + tt'}{1 - tt'} U(t)D(t')$$

を満たしているので,  $D(t_1) \cdots D(t_n)$  と  $U(t_n) \cdots U(t_1)$  は generalized Schur operators with  $\{1, 2, 2, 2, \dots\}$  である. この場合,  $\lambda, \mu \in Y$  に対して, generalized Schur polynomials  $s_{\lambda, \mu}^D$  と  $s_U^{\lambda, \mu}$  はそれぞれ  $Q_{\lambda/\mu}(t_1, \dots, t_n)$  と  $P_{\lambda/\mu}(t_1, \dots, t_n)$  となる, ただしここで  $P \cdots$  と  $Q \cdots$  は shifted skew Schur polynomials を表す.

この場合, Corollary 4.2 は

$$h_i^{\{1,2,2,2,\dots\}}(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} 2Q_{(i)}(t_1, \dots, t_n) & i > 0 \\ Q_{\emptyset}(t_1, \dots, t_n) & i = 0 \end{cases}$$

を意味する. また Corollary 4.9 より

$$h_i^{\{1,2,2,2,\dots\}}(t_1, \dots, t_n) = P_{(i)}(t_1, \dots, t_n)$$

が分かる.

Corollary 4.6 は次を満たす:

$$h_i^{\{1,2,2,2,\dots\}} Q_{\lambda}(t_1, \dots, t_n) = \sum_{\mu} 2^{cc(\lambda \setminus \mu)} Q_{\mu}(t_1, \dots, t_n),$$

ただし和は  $\lambda/\mu$  が  $i$  箱からなる horizontal strip となるような  $\mu$  を全て動くものとする)

## 5.2 Young's Lattice: Dual Identities

次に Fomin [4, Example 2.4] と同じ例を考える.  $Y$  として, Young's lattice を考える.  $U_i$  は Example 3.4 で考えた物と同じ物とする, (i.e.,  $U_i \lambda = \sum_{\mu} \mu$ , ただし  $\mu$  は  $\mu/\lambda$  が  $i$  箱の horizontal strip となるように動く.)

$D'_i$  を  $\lambda \in Y$  に対して,  $D'_i \lambda = \sum_{\mu} \mu$ , ただし  $\mu$  は  $\lambda/\mu$  が  $i$  箱の vertical strip となるように動く, と定義する.

このとき  $D'(t)$  と  $U(t)$  は

$$D'(t')U(t) = (1 + tt')U(t)D'(t')$$

を満たすので,  $D'(t_1) \cdots D'(t_n)$  と  $U(t_n) \cdots U(t_1)$  は generalized Schur operators with  $\{1, 1, 0, 0, 0, \dots\}$  である. このとき  $\lambda, \mu \in Y$  に対して, generalized Schur polynomials  $s_{\lambda, \mu}^{D'}$  は  $s_{\lambda'/\mu'}(t_1, \dots, t_n)$  に等しい, ただし  $\lambda'$  と  $\mu'$  は  $\lambda$  と  $\mu$  の転置を表し,  $s_{\lambda'/\mu'}(t_1, \dots, t_n)$  は shifted Schur polynomials を表すとする.

この時, Corollary 4.2 は次を意味する:

$$h_i^{\{1,1,0,0,0,\dots\}}(t_1, \dots, t_n) = s_{(1^i)}(t_1, \dots, t_n) = e_i(t_1, \dots, t_n),$$

ただし  $e_i(t_1, \dots, t_n)$  は  $i$  次基本対称多項式を表す.

Corollary 4.6 は次のようになる:

$$\sum_{\mu} s_{\mu}(t_1, \dots, t_n) = e_i(t_1, \dots, t_n) s_{\lambda}(t_1, \dots, t_n),$$

ただし  $\mu$  は  $\lambda/\mu$  が  $i$  箱の vertical strip となるように動く.

Skew Young diagram  $\lambda/\mu$  に対して, Theorem 4.10 は次を意味する:

$$\sum_{\kappa} s_{\kappa/\mu}(t_1, \dots, t_n) = \sum_{j=0}^i \sum_{\nu} e_{i-j}(t_1, \dots, t_n) s_{\lambda/\nu}(t_1, \dots, t_n),$$

ただし  $\kappa$  は  $\kappa/\lambda$  が  $i$  箱の vertical strip となるように,  $\nu$  は  $\mu/\nu$  が  $j$  箱の vertical strip となるように動く.

## 参考文献

- [1] Fomin, S., Generalized Robinson-Schensted-Knuth correspondence, Zar. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 155(1986), 156–175, 195 (Russian); English transl., J. Soviet Math. 41(1988), pp.979–991.
- [2] Fomin, S., Duality of graded graphs, J. Algebra Combin. 3 (1994) 357–404.
- [3] Fomin, S., Schensted algorithms for dual graded graphs, J. Algebraic Combin. 4(1995), pp.5–45.
- [4] Fomin, S., Schur Operators and Knuth Correspondences, J. of Combinatorial theory, Series A. 72(1995), pp.277–292.
- [5] Fulton, W., Young Tableaux; with applications to representation theory and geometry, volume 35 of London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, New York, 1997.
- [6] Gessel, Ira M., Counting paths in Young’s lattice, J. Statistical planning and inference. 34(1993), 125–134.
- [7] 寺田至, 原田耕一郎「群論」(岩波講座 現代数学の基礎) 岩波書店
- [8] T. Lam, A Combinatorial Generalization of the Boson-Fermion Correspondence, Math. Res. Lett. 13 (2006), no.3, pp.377–329.
- [9] Macdonald, I.G., Symmetric functions and Hall polynomials, 2nd edition, Oxford University Press, 1995.
- [10] Roby, T., Applications and extensions of Fomin’s generalization of the Robinson-Schensted correspondence to differential posets, Ph.D.thesis, M.I.T., 1991.
- [11] Stanley, R., Differential posets, J. American Math. Soc, 1(1988), pp.919–961.
- [12] Stanley, R., Variations on differential posets, Invariant theory and tableaux (Stan-ton, D., ed.), IMA volumes in mathematics and its applications, Springer-Verlag,

New York, pp.145–165.