INTRODUCTION TO THE TOPOLOGICAL VERTEX

三鍋 聡司
名古屋大学大学院多元数理科学研究科

1. はじめに

このノートは，第 11 回代数学若手研究会での講演に際して，研究会のホームページにおいてもらっていたものに若干の修正・加筆を行ったものです．研究会での講演では，主に代数や組み合わせ論の人向けに，Topological Vertex の組み合わせ論的な側面を紹介しました．その内容は Okounkov–Reshetikhin–Vafa の論文 [ORV] の一部で，式 (1) で与えられる topological vertex というものが，境界条件付きの plane partition の数え上げの母関数となるというものです．これについては新たにノートに書き加えました (§4)．また，講演では幾何学への応用についてはあまり触れることが出来ませんでしたが，これについては本ノートに詳しく書いてあります．

2. Topological Vertex の出自

2003 年に物理学者 Aganagic–Klemm–Mariño–Vafa [AKMV] は，toric Calabi–Yau threefold (TCY3) の分配関数を明示的に表す公式を提案した．ここで分配関数とは，連結とは限らない定義域を持つ安定写像によって定義される Gromov–Witten (GW) 不変量の生成母関数のことである．これは連結な定義域の安定写像を考えることによって定義される通常の GW 不変量の生成母関数の exponential をとったものに他ならない．AKMV の提案した分配関数の公式は分割に関する和となっており，その summand は skew Schur function の特殊値で表される 3 点関数 (topological vertex と呼ばれる) の組み合わせで与えられる．その 3 点関数の組み方は，TCY3 の扇によって決まる．AKMV の議論はある種の string duality に基づくものであったが，その後数学者 Li–Liu–Liu–Zhou [LLLZ] が AKMV の分配関数の数学的に厳密な定義を与えた (TCY3 の GW 不変量の定義を含む)．LLLZ は GW 不変量の退化公式を用いて分配関数を計算し，AKMV の結果を再現することに成功した．ただし彼らは skew Schur function に関するある恒等式を仮定しており，その恒等式は未だ証明されていない (Remark A.2 参照)．この点を除けば topological vertex の数学的理論は完成しているといえる．このノートでは topological vertex とその応用を簡単に紹介する．ここでは topological vertex の物理的な由来については詳しくは述べない．物理的背景の説明をも含む，日本語で書かれた専門家による優れた入門的解説として [Ka1, Ka2] がある．

Date: 2006 年 6 月 6 日.

3. Topological vertex の定義

$\mathcal{P}$ を分割[1] の集合とする. 分割 $\mu = (\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots) \in \mathcal{P}$ に対し, 2つの整数 $|\mu|$, $\kappa(\mu)$ を次のように定義する:

$$|\mu| = \sum_{j=1}^{l(\mu)} \mu_j \ , \quad \kappa(\mu) = |\mu| + \sum_{j=1}^{l(\mu)} \mu_j(\mu_j - 2j) \ .$$

ここで $l(\mu)$ は μ の長さである. このとき, $\kappa(\mu) = 2\sum_{x\in\mu} c(x)$ ($c(x)$ は content) である. 従って $\kappa(\mu)$ は常に偶数であり, 次の性質を満たす: $\kappa(\mu^t) = -\kappa(\mu)$ (ただし, μ^t は μ の転置). この κ 因子は topological vertex の理論では本質的に重要である.

次に topological vertex の定義を与える.

Definition 3.1.

$$C_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(q) \overset{\text{def.}}{=} q^{\frac{1}{2}\kappa(\lambda_3)} s_{\lambda_2}(q^\rho) \sum_{\mu\in\mathcal{P}} s_{\lambda_1/\mu}(q^{\lambda_2^t+\rho}) s_{\lambda_3^t/\mu}(q^{\lambda_2+\rho}) \in \mathbb{Q}(q^{\frac{1}{2}}) \ , \tag{1}$$

ここで, $s_{\mu/\nu}(q^{\mu+\rho})$ (resp. $s_\mu(q^\rho)$) は skew Schur function の変数を次のように特殊化したものである:

$$s_{\mu/\nu}(x_i = q^{\mu_i - i + \frac{1}{2}}) \quad (\text{resp. } s_\mu(x_i = q^{-i+\frac{1}{2}})) \ .$$

Remark 3.2. $C_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(q)$ の由来について少しだけ述べる. まず, 物理的には geometric transition と呼ばれる, 位相的弦理論と 3 次元 U(∞) Chern–Simons 理論との双対性 (Gopakumar–Vafa duality) を利用して導出された. 表式 (1) は, Hopf link 不変量を Schur function の特殊値で表す公式が基になっている. 次に, 数学的には TCY3 上の GW 不変量の localization による計算で, Hodge 積分の公式から出てくると思われているが, この部分は未だ完全ではない (Remark A.2 参照).

4. 境界条件付きの plane partition の数え上げ

$C_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(q)$ は様々な対称性を持つが, 最も重要な性質は次の cyclic symmetry である:

$$C_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(q) \ = \ C_{\lambda_2,\lambda_3,\lambda_1}(q) \ = \ C_{\lambda_3\lambda_1,\lambda_2}(q) \ . \tag{2}$$

上記の topological vertex の表式 (1) 及び cyclic symmetry (2) の証明は Okounkov–Reshetikhin–Vafa [ORV] によって与えられた. ORV は, topological vertex $C_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(q)$ が, 3 つの分割 $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ によって境界条件が指定された plane partition の数え上げの生成母関数と解釈できるということを利用して cyclic symmetry を示した[2]. この節では Okounkov–Reshetikihin–Vafa の結果の概要を述べる.

Remark 4.1. Macdonald function を用いた topological vertex の拡張が Awata–Kanno [AW] によって提案されている. また, Zhou [Z2] も別の拡張を提案している, しかし, cyclic symmetry を満たすような拡張は得られていない.

[1]分割に関する記号, 用語は基本的に I.G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials* に従う.

[2]恒等式 (2) は非常に非自明な恒等式であり, plane partition との対応を用いない証明は筆者の知る限りでは与えられていない.

まず，plane partition $\{\pi_{i,j}\}$ とは非負整数からなる二重数列であって，$\pi_{i,j} \geq \pi_{i+1,j}$, $\pi_{i,j} \geq \pi_{i,j+1}$ を満たすものである．Plane partition$\{\pi_{i,j}\}$ に対して，平面上の点 (i,j) に $\pi_{i,j}$ 個の立方体を積み上げていけば，立体 Young 図形が対応する．この対応の下で，直方体 $[0,N_1]\times[0,N_2]\times[0,N_3]$ に含まれる plane partition であって，$x_i = N_i$ における境界条件が三つの分割 (μ_1,μ_2,μ_3) で指定されたものの数え上げを考える (Figure 1 を参照):

$$P_{N_1,N_2,N_3}(\mu_1,\mu_2,\mu_3) := \sum_{\pi} q^{|\pi|} \ .$$

ただし，上記の和は直方体 $[0,N_1]\times[0,N_2]\times[0,N_3]$ に含まれる plane partition であって，境界条件 (μ_1,μ_2,μ_3) を満たすもの全体をわたる和であり，$|\pi| := \sum_{1\leq i\leq N_1, 1\leq j\leq N_2}$ である．さらに，直方体の大きさを無限大として，

$$P(\mu_1,\mu_2,\mu_3) := \lim_{N_1,N_2,N_3\to\infty} q^{-\sum_{i=1}^{3} N_i|\mu_i|} P_{N_1,N_2,N_3}(\mu_1,\mu_2,\mu_3)\ ,$$

というスケール極限を考える．このとき次が成り立つ．

Theorem 4.2 (Okounkov–Reshetikihin–Vafa [ORV])**.**

$$P(\mu_1,\mu_2,\mu_3) = q^{-\frac{1}{2}\sum_i ||\mu_i||^2} \prod_{n\geq 1}(1-q^n)^{-n} C_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}(q)\ .$$

ただし，$||\mu_i||^2 := \sum_{k=1}^{l(\mu_i)} (\mu_i)_k^2$ である．

証明については原論文 [ORV] のほか，[Ka1, §4] を参照されたい．この定理の系として，Topological vertex の cyclic symmetry (2) が plane partition の対称性から直ちに得られる．なお，topological vertex と plane partition との対応は，GW 不変量と Donaldson–Thomas (DT) 不変量とが生成母関数のレベルで等しいという Maulik–Nekrasov–Okounkov–Pandharipande [MNOP1, MNOP2] の予想のもとになっている (§6.4 参照)．

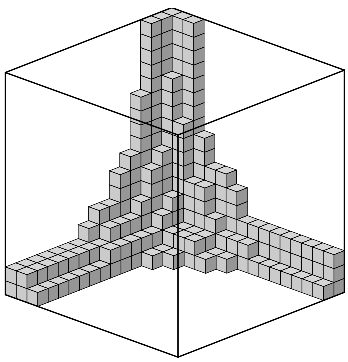

FIGURE 1. A plane partition with the boundary condition $\mu_1 = (3,2)$, $\mu_2 = (3,1)$, $\mu_3 = (3,1,1)$. (図は [ORV] から引用.)

5. 分配関数の例

一般の TCY3 の分配関数の定義を与える為には，若干の準備が必要となるので，この節では最も基本的な場合に分配関数の例を示す．TCY3 の定義と分配関数の一般公式は §A で与える．

複素射影直線 $\mathbb{P}^1$ 上の階数 2 のベクトル束の全空間 $X_n \stackrel{\text{def.}}{=} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n-1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n-1)$ は TCY3 である．X_n の分配関数は，

$$Z_{X_n}(q,Q)=\sum_{\mu\in\mathcal{P}}Q^{|\mu|}(-1)^{(n+1)|\mu|}q^{\frac{n}{2}\kappa(\mu)}C_{\emptyset,\emptyset,\mu^t}(q)C_{\emptyset,\emptyset,\mu}(q)\ , \tag{3}$$

と与えられる．ここで，Q は X_n の 2 次のホモロジー群の生成元 $[\mathbb{P}^1]$ に対応するパラメータである．3 つの分割の内 2 つが空の場合，topological vertex の具体形は次のようになる:

$$C_{\emptyset,\emptyset,\mu}(q)\ =\ s_\mu(q^\rho)\ =\ q^{\frac{1}{4}\kappa(\mu)}\left(\prod_{x\in\mu}[h(x)]_q\right)^{-1}\ , \tag{4}$$

ここで, $h(x)$ は hook length であり, $[m]_q=q^{\frac{m}{2}}-q^{-\frac{m}{2}}$ である．これより，分配関数は，

$$Z_{X_n}(q,Q)=1+\sum_{d=1}^{\infty}(-1)^{(n+1)d}Q^d\sum_{\mu\in\mathcal{P}_d}q^{\frac{n}{2}\kappa(\mu)}\left(\prod_{x\in\mu}[h(x)]_q\right)^{-2}\ , \tag{5}$$

と書ける．ここで $\mathcal{P}_d$ は d の分割の集合である．

分配関数 (5) の対数をとって (式 (9) 参照) $d=1,2$ の GW 不変量を計算すると，

$$\begin{aligned}
N_{g=0,\ d=1}(X_n)\ &=(-1)^n\ ,\ N_{g=1,\ d=1}(X_n)=\frac{(-1)^{n+1}}{12}\ ,\ N_{g=2,\ d=1}(X_n)=\frac{(-1)^n}{40},\ \cdots\\
N_{g=0,\ d=2}(X_n)\ &=\frac{1-2n^2}{8}\ ,\ N_{g=1,\ d=2}(X_n)=\frac{2-5n^2+n^4}{48}\ ,\ N_{g=2,\ d=2}(X_n)=\frac{24-71n^2+n^4}{2880},\ \cdots
\end{aligned}$$

となる (この計算例は [Ko2] から引用).

6. Topological Vertex の応用

Topological vertex による分配関数の公式を用いれば，原理的には TCY3 の GW 不変量が全ての次数，種数に関して同時に求まる (§A.3 参照)．これは，ミラー対称性を利用していた一昔前の計算と比べてもずっと強力である．また，コンピューターを用いた数値計算にも向いている．これによって，例えば [CKYZ] にある表よりもずっと大きな次数，種数に関する不変量の表が作れるようになった．これは大きな進歩である．また，分配関数の明示的な表示があるおかげで，これまでは数値計算の実験を通して経験的に知られているのみだった不変量の性質を一般的に証明したり，ミラー対称性によって種数 0 の不変量についてのみ知られていた結果を種数が 1 以上の場合にも拡張することが可能となった．この節ではこれらの応用について述べる．

6.1. **Gopakumar–Vafa 予想の証明.** やや天下りだが，TCY3 X に対して，Gopakumar–Vafa (GV) 不変量 $n^g_\beta(X)$ を次の展開で定義する:

$$\log Z_X(q,Q)=\sum_{\beta\in H_2^{\mathrm{cpt}}(X,\mathbb{Z})}\sum_{g\geq 0}\sum_{k\geq 1}\frac{n^g_\beta(X)}{k}\left(2\sinh\frac{kg_s}{2}\right)^{2g-2}Q^{k\beta}\ , \tag{6}$$

ここで $q=e^{\sqrt{-1}g_s}$ とおいた. 分配関数 (5) を用いて, $X=X_n$ の GV 不変量を計算すると, $d=1$ では

$$n^{g=0}_{d=1}(X_n)=(-1)^n\ , \quad n^{g>0}_{d=1}(X_n)=0\ .$$

である．$d=2$ の場合についても $n^g_{d=2}(X_n)$ は整数であり, $g\geq n-1$ では 0 であることが分かる．次の定理は，TCY3 に対する GV 予想 (の一部) である．

Theorem 6.1 (Konishi [Ko1])**.** 各 $\beta\in H_2^{\mathrm{cpt}}(X,\mathbb{Z})$ に対し，$\{n^g_\beta(X)\}_{g\geq 0}$ は有限整数列である．

GW 不変量 $\{N^g_\beta(X)\}_{g\geq 0}$ は一般に無限有理数列であることを考えれば，上の定理は驚くべき主張である (上記 X_n の GW 不変量と GV 不変量の計算を参照)．このような主張が, 分配関数 $Z_X(q,Q)$ の明示公式を用いると, 初等整数論と組み合わせ論を用いて一般的に証明出来てしまうのである ([Ko2] を参照).

6.2. **Nekrasov 予想の証明.** Nekrasov [N1] は, 4 次元ゲージ理論におけるインスタントンの数え上げの分配関数を定義し，それが $\mathbb{P}^1$ 上の ALE ファイブレーションの構造を持つ TCY3 の分配関数に一致することを予想した．この予想は，分配関数の具体形からある組み合わせ論的な等式に帰着することが Iqbal+Kashani-Poor [IK] によって示され，その等式は Eguchi–Kanno [EK], Zhou [Z1] によって証明が与えられた (詳細は [Ka1] を参照)．この Nekrasov の予想は，種数が 0 の GW 不変量に関しては，local mirror symmetry の応用として知られていたものであったが，驚くべきことに，高い種数の場合をも含めて組み合わせ論的な議論で完全に証明されてしまった．なお，論文 [EK, Z1] は topological vertex に関する公式集としても非常に有用である．

6.3. **Flop invariance の証明.** 3 次元双有理幾何学では，フロップと呼ばれる双有理変換が重要であり，GW 不変量のフロップに関する変換を調べる問題を考えることは自然である．[KM] では次の定理を示した．

Theorem 6.2 (Konishi–Minabe [KM])**.** *2 つの TCY 3-fold* X と X^+ とが $(-1,-1)$-*curve* C に関するフロップ $\phi: X \dashrightarrow X^+$ で移り合うとする．このとき，$[C]$ の整数倍ではない $\beta\in H_2^{cpt}(X,\mathbb{Z})$ に対して，

$$N_{g,\phi_*(\beta)}(X^+)=N_{g,\beta}(X)\ ,$$

が成り立つ．さらに，

$$N_{g,d[C]}(X)=N_{g,d[C^+]}(X^+)=N_{g,d[\mathbb{P}^1]}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))\ ,$$

である．ここで，C^+ はフロップされた曲線である．

証明は，X と X^+ の扇を調べると，2 つの TCY3 の分配関数の違いが，フロップされる曲線の類 $[C]$ とフロップされた曲線の類 $[C^+]$ からの局所的な寄与のみであることが分かるので，skew Schur function に関する等式の証明に帰着する．等式の証明は [EK, Z1] の方法の応用である．この等式の証明の為の計算の系として, ある次数以上の GW 不変量が 0 であるこが示せる．また，定理 6.2 の応用として，非特異で完備なトーリック曲面 S とそのブローアップ $\hat{S}$ があったとき，標準束の全空間 K_S, $K_{\hat{S}}$ として与えられる TCY3 の GW 不変量の比較が出来る ([KM, §6])．定理 6.2 には, この他にも応用があると考えている.

6.4. **GW/DT 予想の証明.** §3 で少し述べたように，射影的な CY3 の GW 不変量と DT 不変量とが，生成母関数のレベルで相等しいという予想 [MNOP1, MNOP2] がある．[MNOP1] では，X_n やトーリック曲面の標準束の全空間という TCY3 (これらはノンコンパクトである) に対しても DT 不変量が定義され，上記の予想が証明されている．これも topological vertex の応用といえる．この DT 不変量を一般の TCY3 に対して定義し，GW 不変量との等価性を示す問題は未解決である (少なくとも, ちゃんと書かれた論文は無い).

Appendix A. Toric Calabi–Yau threefold とその分配関数

この節では, TCY3 とその分配関数の定義を与える．論文 [KM, §3] から引用する.

A.1. **Toric Calabi–Yau threefolds.**

Definition A.1. A toric Calabi–Yau (TCY) threefold is a three-dimensional smooth toric variety X over $\mathbb{C}$ associated with a fan Σ satisfying following conditions:

(i) the primitive generator $\vec{\omega}$ of every 1-cone satisfies $\vec{\omega}\cdot\vec{u}=1$ where $\vec{u}=(0,0,1)$;
(ii) all maximal cones are three dimensional;
(iii) $|\Sigma|\cap\{z=1\}$ is simply connected where $|\Sigma|=\bigcup_{\sigma\in\Sigma}\sigma\subset\mathbb{R}^3$ is the support of Σ and z is the third coordinate of $\mathbb{R}^3$.

The condition (i) is equivalent to the condition that $\wedge^3 T^*X$ is trivial (Calabi–Yau condition) and the condition (ii) implies that $\pi_1(X)=0$. The condition (iii) is imposed for simplicity of arguments. Examples are X_n (defined in §5) and the total space of the canonical bundle of a smooth complete toric surface.

We briefly describe necessary facts on (co)homology of TCY threefolds. Recall that the subset $\Sigma_n\subset\Sigma$ of n-cones is in one-to-one correspondence with the set of $(3-n)$-dimensional torus invariant subvarieties in X. Let $\Sigma_1=\{\rho_1,\dots,\rho_r\}$ be the set of 1-cones. Denote by $\vec{\omega}_i$ $(1\le i\le r)$ the primitive lattice vector generating ρ_i and by $D_{\rho_i}\subset X$ $(1\le i\le r)$ the torus invariant Weil divisor corresponding to ρ_i. The group $A_2(X)$ of all Weil divisors modulo rational equivalence is generated by $D_{\rho_1},\dots,D_{\rho_r}$ with rational equivalence given by $\sum_{j=1}^{r}A_{ij}D_{\rho_j}=0$ $(i=1,2,3)$ where $A=(A_{ij})$ is the $3\times r$ matrix

$$A=\big(\vec{\omega}_1,\dots,\vec{\omega}_r\big).$$

Let Σ_2' be the set of 2-cones which lie in the interior of $|\Sigma|$:

$$\Sigma_2'=\{\tau\in\Sigma_2|\,\tau\subset|\Sigma|\setminus\partial|\Sigma|\}.$$

It is in one-to-one correspondence with the set of torus invariant (hence rational) curves in X. Let us write $\Sigma_2'=\{\tau_1,\dots,\tau_p\}$ and let $C_{\tau_i}\subset X$ denote the rational curve corresponding to τ_i. We define $N_1^T(X)$ to be the set of 2-cycles generated by $C_{\tau_1},\dots,C_{\tau_p}$ modulo numerical equivalence. Note that by the intersection pairing $A_2(X)\times N_1^T(X)\to\mathbb{Z}$, $A_2(X)\otimes\mathbb{R}$ and $N_1^T(X)\otimes\mathbb{R}$ become dual to each other.

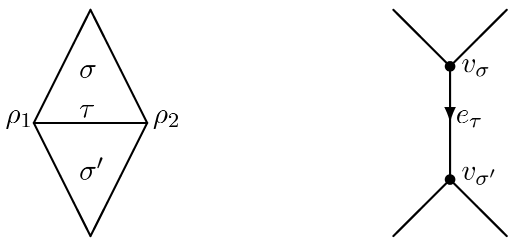

FIGURE 2. Fan (section at $z = 1$) and toric graph

Now let us explain the calculation of the intersection numbers and numerical equivalence. If ρ_j and τ_i spans a 3-cone, $D_{\rho_j}.C_{\tau_i} = 1$ and if ρ_j and τ_i do not span a cone in the fan, $D_{\rho_j}.C_{\tau_i} = 0$. If two 1-cones, say ρ_1, ρ_2, are contained in τ_i, then $D_{\rho_1}.C_{\tau_i}$ and $D_{\rho_2}.C_{\tau_i}$ are obtained via rational equivalence relations of D_{ρ_j}'s. For convenience, we introduce the following injective map

$$l_X : N_1^T(X) \to \{l \in \mathbb{Z}^r \mid A.l = \vec{0}\} = L_A, \quad Z \mapsto (D_{\rho_1}.Z, \ldots, D_{\rho_r}.Z). \tag{7}$$

Then $D_{\rho_1}.C_{\tau_i}$ and $D_{\rho_2}.C_{\tau_i}$ are obtained by solving the equation $A.l_X([C_{\tau_i}]) = \vec{0}$. (Hence they satisfy the relation $D_{\rho_1}.C_{\tau_i} + D_{\rho_2}.C_{\tau_i} = -2$.) The numerical equivalence can be read from linear relations between the vectors $l_X([C_{\tau_1}]), \ldots, l_X([C_{\tau_p}])$. By the analysis of the gluing of local coordinate systems around C_{τ_i}, we see that its normal bundle is isomorphic to $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(D_{\rho_1}.C_{\tau_i}) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(D_{\rho_2}.C_{\tau_i})$. We will use a term a $(-1,-1)$-curve for a torus invariant curve with the normal bundle isomorphic to $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$.

A.2. **Partition functions.** Let X be a TCY threefold and Σ be its fan. We briefly review how to write down the partition function of X.

First, consider the following directed graph Γ_X (called a toric graph) with labels on edges of a certain type. The vertex set is

$$V(\Gamma_X) = V_3(\Gamma_X) \cup V_1(\Gamma_X),\ V_3(\Gamma_X) = \{v_\sigma | \sigma \in \Sigma_3(X)\},\ V_1(\Gamma_X) = \{v_\tau | \tau \in \Sigma_2(X) \setminus \Sigma_2'(X)\}.$$

The edge set is

$$E(\Gamma_X) = E_3(\Gamma_X) \cup E_1(\Gamma_X),\ E_3(\Gamma_X) = \{e_\tau | \tau \in \Sigma_2'(X)\},\ E_1(\Gamma_X) = \{e_\tau | \tau \in \Sigma_2(X) \setminus \Sigma_2'(X)\}.$$

An edge $e_\tau \in E_3(\Gamma_X)$ joins $v_\sigma, v_{\sigma'} \in V_3(\Gamma)$ iff $\tau = \sigma \cap \sigma'$ (see Figure 2) and an edge $e_\tau \in E_1(\Gamma)$ joins $v_\sigma \in V_3(\Gamma_X)$ and $v_\tau \in V_1(\Gamma_X)$ iff σ is a unique 3-cone such that τ is a face of σ. (Note that a vertex in $V_3(\Gamma_X)$ is trivalent and a vertex in $V_1(\Gamma_X)$ is univalent.) The direction of edges can be taken arbitrarily. The label $n : E_3(\Gamma) \to \mathbb{Z}$, called the *framing*, is given as follows:

$$n(e_\tau) = \frac{D_{\rho_1}.C_\tau - D_{\rho_2}.C_\tau}{2},$$

where $\tau \in \Sigma_2'$ and $\rho_1, \rho_2 \in \Sigma_1$ are as shown in Figure 2. Note that Γ_X is connected by the condition (iii) in Definition A.1

Secondly, we write down the partition function from Γ_X. Let

$$\mathcal{P}(\Gamma_X) = \{\vec{\lambda} : E_3(\Gamma) \to \mathcal{P}\}.$$

$(\vec{\lambda}(e), \vec{\lambda}(e'), \vec{\lambda}(e''))$ $(\vec{\lambda}(e)^t, \vec{\lambda}(e'), \vec{\lambda}(e''))$ $(\vec{\lambda}(e)^t, \vec{\lambda}(e')^t, \vec{\lambda}(e''))$ $(\vec{\lambda}(e)^t, \vec{\lambda}(e')^t, \vec{\lambda}(e'')^t)$

FIGURE 3. $\vec{\lambda}_v$

Take the set of formal variables $\vec{Q} = (Q_e)_{e \in E_3(\Gamma_X)}$ associated to $E_3(\Gamma_X)$. Then the partition function of X is a formal power series in $\vec{Q}$ given by

$$Z_X(q, \vec{Q}) = \sum_{\vec{\lambda} \in \mathcal{P}(\Gamma)} \prod_{e \in E_3(\Gamma)} (-1)^{|\vec{\lambda}(e)|(n_e+1)} q^{\frac{\kappa(\vec{\lambda}(e))}{2} n(e)} Q_e^{|\vec{\lambda}(e)|} \prod_{v \in V_3(\Gamma)} C_{\vec{\lambda}_v}(q) \ . \tag{8}$$

Here $C_{\vec{\lambda}_v}(q)$ is the topological vertex defined in (1) and $\vec{\lambda}_v$ ($v \in V_3(\Gamma)$, $\vec{\lambda} \in \mathcal{P}(\Gamma)$) is as in Figure 3 (for $e \in E(\Gamma_X) \setminus E_3(\Gamma_X)$, set $\vec{\lambda}(e)$ to $\emptyset$). We remark that the partition function does not depend on the directions of edges.

A.3. **Geometrical meaning.** The Gromov–Witten invariant $N_{g,\beta}(X)$ of X with the genus g and the second homology class $\beta \in H_2^{cpt}(X, \mathbb{Z})$ (see [LLLZ] for a definition) is obtained as follows:

$$\sum_{g \geq 0} N_{g,\beta}(X) g_s^{2g-2} = \sum_{\substack{\vec{d} = (d_e)_{e \in E_3(\Gamma_X)}, \\ \vec{d}[\vec{C}] = [\beta]}} F_{\vec{d}}(e^{\sqrt{-1} g_s}), \tag{9}$$

where $[\vec{C}] = ([C_e])_{e \in E_3(\Gamma_X)}$ and $C_e \subset X$ is the rational curve corresponding to e. $F_{\vec{d}}(q)$ is the coefficient of $\vec{Q}^{\vec{d}} = \prod_{e \in E_3(\Gamma_X)} Q_e^{d_e}$ in $\log Z_X(q, \vec{Q})$.

Remark A.2. Precisely speaking, the partition function obtained in [LLLZ] has the expression almost same as (8) except that $C_{\vec{\lambda}_v}(q)$ is replaced by $\tilde{\mathcal{W}}_{\vec{\lambda}_v}(q)$. Here $\tilde{\mathcal{W}}_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(q)$ is a rational function in $q^{\frac{1}{2}}$ similar to $C_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(q)$ but has a slightly different expression. It is conjectured [LLLZ, Conjecture 8.3] that

$$\tilde{\mathcal{W}}_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(q) \ = \ C_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(q) \ . \tag{10}$$

In (9), we have used $C_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}(q)$ assuming that the conjecture is true. The identity (10) has been established if one of three partitions is empty. Note that this is sufficient to prove (9) for X_n and canonical bundles of smooth toric surfaces.

REFERENCES

[AKMV] M. Aganagic, A. Klemm, M. Marino and C. Vafa, *The topological vertex*, Commun. Math. Phys. **254**, 425 (2005) [arXiv:hep-th/0305132].

[AW] H. Awata and H. Kanno, *Instanton counting, Macdonald functions and the moduli space of D-branes*, JHEP **0505**, 039 (2005) [arXiv:hep-th/0502061].

[CKYZ] T. M. Chiang, A. Klemm, S. T. Yau and E. Zaslow, *Local mirror symmetry: Calculations and interpretations*, Adv. Theor. Math. Phys. **3**, 495 (1999) [arXiv:hep-th/9903053].

[EK] T. Eguchi and H. Kanno, *Topological strings and Nekrasov's formulas*, JHEP **0312**, 006 (2003) [arXiv:hep-th/0310235].

[IK] A. Iqbal and A. K. Kashani-Poor, *Instanton counting and Chern-Simons theory*, Adv. Theor. Math. Phys. **7**, 457 (2004) [arXiv:hep-th/0212279].

[Ka1] 菅野浩明, 位相的弦理論と重力・ゲージ理論対応, Pathway Lecture Series in Mathematics, 慶応大学, 2004.

[Ka2] ———, *Conifold* の幾何学と弦理論, Lectures at the University of Tokyo, 2005. (to appear ?)

[Ko1] Y. Konishi, *Integrality of Gopakumar-Vafa invariants of toric Calabi–Yau threefolds*, to appear in Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto, arXiv:math.AG/0504188.

[Ko2] ———, *Integrality of Gopakumar-Vafa invariants of toric Calabi–Yau threefolds*, 第 52 回幾何学シンポジウム講演要旨, 136–141, 2005.

[KM] Y. Konishi and S. Minabe, *Flop invariance of the topological vertex*, preprint, arXiv:math.AG/0601352.

[LLLZ] J. Li, C.-C. M. Liu, K. Liu and J. Zhou, *A Mathematical Theory of the Topological Vertex*, arXiv:math.AG/0408426.

[MNOP1] D. Maulik, N. Nekrasov, A. Okounkov, and R. Pandharipande, *Gromov–Witten theory and Donaldson-Thomas theory, I*, arXiv:math.AG/0312059.

[MNOP2] ———, *Gromov–Witten theory and Donaldson-Thomas theory, II*, arXiv:math.AG/0406092.

[N1] N. Nekrasov, *Seiberg-Witten prepotential from instanton counting*, Adv. Theor. Math. Phys **7** (2003) 831-864, [arXiv:hep-th/0206161].

[ORV] A. Okounkov, N. Reshetikhin and C. Vafa, *Quantum Calabi-Yau and classical crystals*, arXiv:hep-th/0309208.

[Z1] J. Zhou, *Curve counting and instanton counting*, arXiv:math.AG/0311237, to appear in Adv. Theor. Math. Phys..

[Z2] ———, *On deformed topological vertex*, preprint, arXiv:math.AG/0504460.