On the isomorphism problem of Coxeter groups and related topics （コクセター群の同型問題とその周辺）

縫田 光司

2006 年 3 月 3 日

1　群の同型問題

あるクラス $\mathcal{C}$ に属する群がいつ互いに同型となるかを（主に生成元と基本関係による群表示を用いて）判定する問題を、クラス $\mathcal{C}$ における群の**同型問題**と呼ぶ。例えば、一般の群、有限生成な群、有限群、$\cdots$ などのクラスに応じて、対応する同型問題が存在する。

この問題は、歴史的には（位相）多様体の同型問題の研究を通じて注目され始めたようである（[12] 等を参照）。詳しくは、一般の多様体の同型問題が（アルゴリズム的な意味で）解けるならば有限生成群の同型問題も解け、更にその場合は Turing 機械の停止問題も解くことができることが示される。しかし、Turing 機械の停止問題は解けないことが知られているため、多様体や（有限生成）群の同型問題も一般には解けないことになる。

今回はこの同型問題を Coxeter 群の場合に考える。

2　Coxeter 群

以下に Coxeter 群の定義や基本性質を述べる。詳細は例えば [5] の第 5 章などを参照して欲しい。

2.1　定義

Coxeter **群**とは、以下のような表示

$$W = \langle S \mid (st)^{m_{s,t}} = 1 \text{ if } s, t \in S \text{ and } m_{s,t} < \infty \rangle$$

で定義される群 W のことである。ここで各 $m_{s,t}$ は条件 $m_{s,t} = m_{t,s} \in \{1, 2, 3, \ldots\} \cup \{\infty\}$ と $m_{s,t} = 1 \Leftrightarrow s = t$ を満たすように与えられ、この場合は実際に元 $st \in W$ の位数と一致する[1]。例えば各生成元 $s \in S$ の位数は 2 である。上の定義に現れた生成系 S を W の *Coxeter* **生成系**、その元を *Coxeter* **生成元**、対 (W, S) を *Coxeter* **系**と呼ぶ[2]。

[1] これは決して自明な事実ではないことに注意して欲しい。
[2] ここでは、S が有限集合であることは特に仮定しない。

表 1: Coxeter グラフと Coxeter 群の間の対応

Coxeter グラフ Γ	Coxeter 群 $W = W(\Gamma)$
グラフの直和	群の（制限）直積
グラフの「∞-join」	群の自由積
Γ の頂点部分グラフ $\Gamma_I = \Gamma\|_I$	W の *parabolic subgroup* $W_I = \langle I \rangle$
Γ の連結成分	W の**既約成分**
Γ の連結成分への分解 $\Gamma = \bigsqcup \Gamma_I$	W の**既約成分分解** $W = \prod W_I$
Γ が連結	W が**既約**

図 1: $\mathcal{D}_6$ の二通りの Coxeter グラフ

Coxeter 群を定める上述のデータ S と $m_{s,t}$ を視覚的に表示するために、*Coxeter* **グラフ**というグラフ Γ が用いられる。Γ は頂点集合 S の無向単純グラフ[3]であって、$3 \leq m_{s,t} \leq \infty$ のとき 2 頂点 s, t はラベル $m_{s,t}$ を持つ辺で結ばれる。$m_{s,t} = 2$ のときには s, t は辺で結ばれない。Coxeter グラフ Γ が定める Coxeter 群を $W(\Gamma)$ と書く。表 1 の上段は、グラフに対する操作が群に対するどのような操作と対応するかを示している。ここで二つの Coxeter グラフ Γ と Γ' の「∞-join」とは、Γ と Γ' の直和において、Γ の全ての頂点と Γ' の全ての頂点を結ぶラベル ∞ の辺たちを追加してできるグラフを表す造語である。また下段については、1 列目を用いて 2 列目に現れる用語を定義している。

注意 1. 位数 12 の二面体群 $\mathcal{D}_6 = \langle s, t \mid s^2 = t^2 = (st)^6 = 1 \rangle$ は、$\{s, t\}$ を生成系とすると図 1 の左側の Coxeter グラフから定まる Coxeter 群である。一方、新しい生成元として $a = s$、$b = tst$、$c = ststst$ を選ぶと、$(\mathcal{D}_6, \{a, b, c\})$ も Coxeter 系であり、対応するグラフは図 1 の右側である。この例は、*Coxeter* **グラフが同型でないからといって対応する** *Coxeter* **群が同型でないとは限らない**ことを示している。また、Coxeter 群の既約性や各既約成分の構造も、一般には（抽象群としての）同型写像で保たれないこともこの例が示している。

2.2 有限 Coxeter 群

良く知られているように、有限な既約 Coxeter 群を定める Coxeter グラフは図 2 のように完全に分類されている（H. S. M. Coxeter [4]）。ここで A, B, D の三つの無限系列に関しては、添字 n は生成元の個数（グラフの頂点数）を表す。

A_n 型 Coxeter 群 $W(A_n)$ は $n+1$ 次対称群 S_{n+1} であり、対応する Coxeter 生成元としては n 個の隣接互換が取れる。また、$[-n, n]$ を $-n$ から n までの整数の集合とし、-1 倍写像を -1 で表すとき、B_n 型 Coxeter 群 $W(B_n)$ は

$$W(B_n) = \{\sigma : [-n, n] \to [-n, n] \mid \text{ 全単射、 } \sigma \circ -1 = -1 \circ \sigma\}$$

[3]つまり、各辺は向き付けされておらず、両端点が異なり、また 2 頂点間は高々1 本の辺で結ばれる。

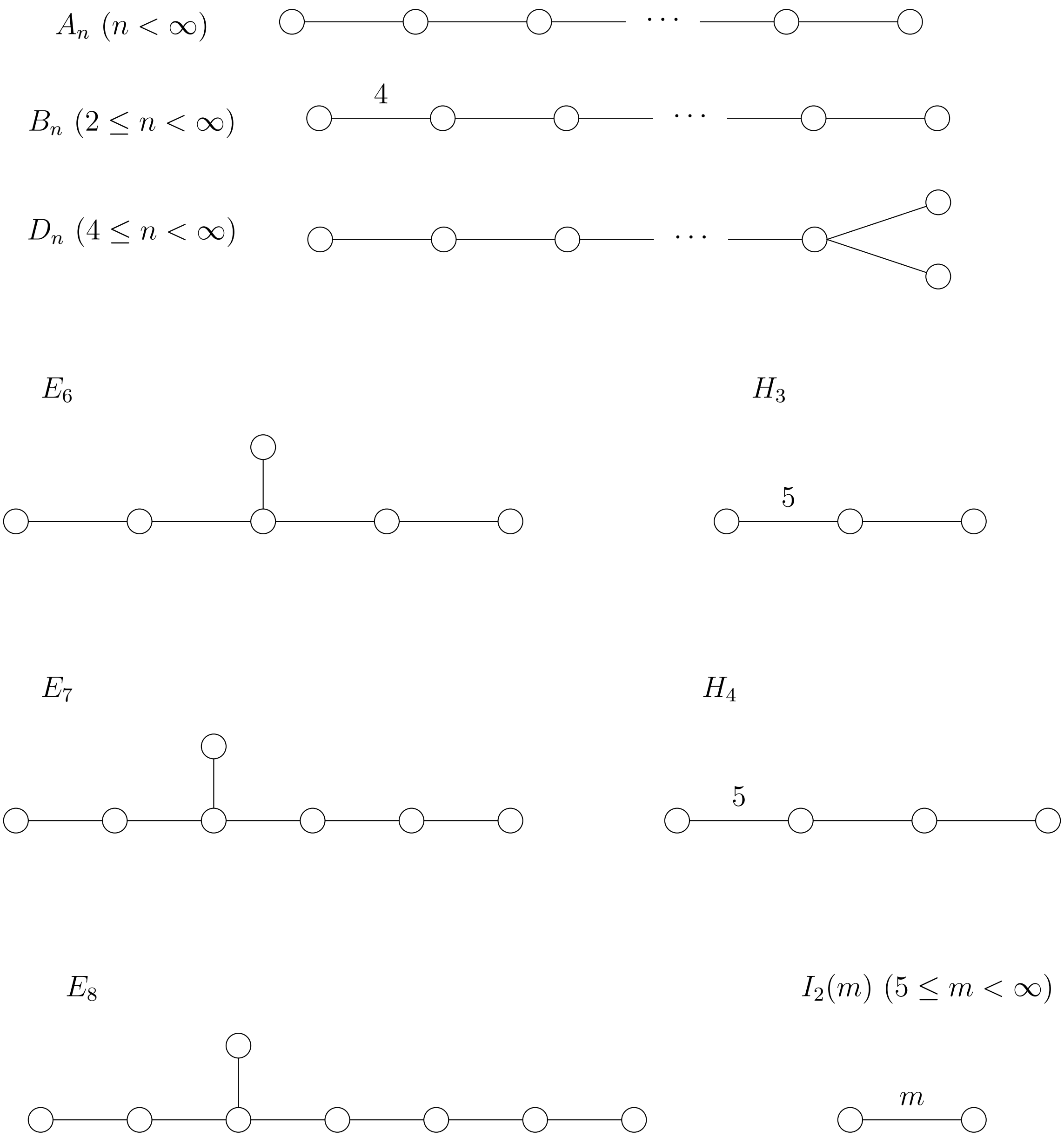

図 2: 有限既約 Coxeter 群の分類

で与えられる。その正規部分群として、D_n 型 Coxeter 群

$$W(D_n) = \{\sigma \in W(B_n) \mid \text{偶数個の } i > 0 \text{ について } \sigma(i) < 0\}$$

が含まれる。上記の分類や以下の結果を含め、有限 Coxeter 群の構造はかなり調べられている。

定理 2. 1. 既約な有限 Coxeter 群と既約でない Coxeter 群の間の同型は、

$$W(B_n) \simeq W(D_n) \times W(A_1) \quad (n \geq 3 \text{ は奇数、} D_3 = A_3)$$

$$W(I_2(2m)) \simeq W(I_2(m)) \times W(A_1) \quad (m \geq 3 \text{ は奇数、} I_2(3) = A_2)$$

の二通りで全てである。

2. 既約な Coxeter 群の自明でない（抽象群としての）直既約分解は、上の二つに

$$W(E_7) \simeq S_6(2) \times \{\pm 1\},\ W(H_3) \simeq \mathrm{Alt}_5 \times \{\pm 1\}$$

を加えた四通りで全てである[4]。

一方、有限**でない**既約 Coxeter 群は常に抽象群として直既約である（[10, 11]）。

2.3 鏡映

有限次元 Euclid 空間内の有限（実）鏡映群は全て Coxeter 群であり、また逆に全ての有限 Coxeter 群はこのようにして得られることが知られている。一方、有限でない Coxeter 群も Euclid 空間内の鏡映群として得られる場合があり、例えばアフィン Weyl 群はその一例である。

一般に、任意の Coxeter 群 W は、（一般には非退化とは限らない）双線型形式を持つ実ベクトル空間 V 内の鏡映群として実現できる。この実現において、W の元 w が V 内の鏡映であることと、w がある Coxeter 生成元と共役なことが同値である。このことを踏まえて、ある Coxeter 生成元と共役な W の元のことを W の**鏡映**と呼ぶ。

なお、同じ群から出発しても、*Coxeter* **生成系の選び方によってどの元が鏡映なのかに違いが生じる**。例えば注意 1 の例で、$c \in \mathcal{D}_6$ は生成系 $\{a, b, c\}$ の下では鏡映であるが、生成系 $\{s, t\}$ の下では $c = ststst$ は鏡映ではない。

3 Coxeter 群の同型問題の歴史と進展

1991 年に、A. M. Cohen は自身の講義録 [3] の中で、「Γ と Γ' が有限な連結 Coxeter グラフで、$\Gamma \not\simeq \Gamma'$ であれば必ず $W(\Gamma) \not\simeq W(\Gamma')$ であろうか」という問いを提示した。（グラフが連結でない場合は定理 2 を見よ。）なお、有限性の仮定を外すと以下のように簡単な反例が存在する。

例 3. S_∞ を無限対称群、即ち自然数全体の置換であって有限個の文字しか動かさないもの全体がなす群とする。また、この定義で「自然数全体」を「整数全体」に置き換えてできる群を $S_{\pm\infty}$ と書く。これらは A 型 Coxeter 群の場合と同様、無限個の隣接互換を Coxeter 生成元とする Coxeter 群である。（図 3 の上側が S_∞ の、下側が $S_{\pm\infty}$ の Coxeter グラフである。）今、各々の作用する集合 $\mathbb{N}$ と $\mathbb{Z}$ の間には全単射が存在するが、それが自然に S_∞ と $S_{\pm\infty}$ の間の同型写像を引き起こす。これが求める反例である。

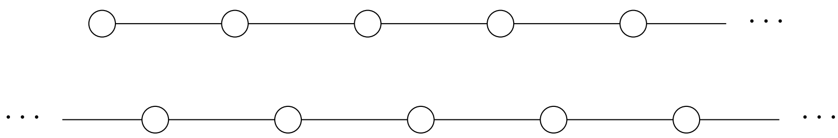

図 3: 無限対称群の Coxeter グラフ

Cohen の問いに対して、B. Mühlherr は 2000 年の論文 [6] において、反例を具体的に構成して否定的な答えを与えた。その後（[1]）Mühlherr らはこの反例の構成法の一般化として、*diagram twisting* という（可逆な）操作を定義した。これはある条件の下で Coxeter グラフを局所的に変形する操作であるが、**この *diagram twisting* は対応する *Coxeter* 群を不変にする**（Coxeter 生成系は変化する）ため、Cohen の問いに対する反例を無数に構成できる。更に diagram twisting は、Coxeter 群自体だけでなく**その鏡映全体の集合をも保つ**ことが示されている。

予想 4（[1]**）.** 二つの有限な Coxeter グラフ Γ と Γ' について、$W(\Gamma)$ と $W(\Gamma')$ の間に鏡映を保つ同型写像が存在する必要充分条件は、Γ と Γ' が有限回の diagram twisting によって移り合うことである。（なお、有限性の仮定を外すと無限対称群 S_∞ が反例を与える。）

更に Mühlherr や R. B. Howlett らの近年の研究によって、**有限生成な *Coxeter* 群の同型問題の解決は、上記の予想 *4* の解決に帰着できる**ことが明らかになった（[7]）。一方、有限生成でない Coxeter 群に関して同様の道筋が立つかどうかは現在もよくわかっていない。

なお、例えばアフィン Coxeter 群の Coxeter 生成系は共役を除いて一意的である（[2]）ことが示されるなど、いくつかの部分クラスに関しては同型問題が既に解決されている。

4　有限生成でない Coxeter 群

これまで紹介した様々な結果の殆んどにおいて Coxeter グラフの有限性、即ち Coxeter 群の有限生成性が仮定されているが、実際 Coxeter 群の同型問題に関する過去の研究の殆んど全ては対象が有限生成な群に限られている。一方、最近の筆者の研究では、有限生成とは限らない一般の Coxeter 群を扱い、以下のような結果を得た。

定理 5（[10]**）.** 一般の Coxeter 群の同型問題の解決は、有限でない既約 Coxeter 群の同型問題を解決することに帰着される。（有限生成な Coxeter 群に対しては [11] でも示されている。）

定理 6（[8]**）.**

1. W が（ある一つの Coxeter 生成系に関して）有限でない既約 Coxeter 群であり、更に任意の二つの Coxeter 生成元の積は有限位数を持つと仮定する。このとき W の Coxeter 生成系をどのように選んでも、鏡映全体の集合は常に同じものとなる。
2. W が（ある一つの Coxeter 生成系に関して）有限でない Coxeter 群であり、更に全ての Coxeter 生成元は互いに共役であると仮定する。このとき W の Coxeter 生成系をどのように選んでも、鏡映全体の集合は常に同じものとなる。

Coxeter 群において鏡映は最も扱いやすい元の一つであるため、定理 6 の結論を満たす Coxeter 群については、その Coxeter 生成系の選び方の多様性を調べるのが比較的容易となる。例えば、無限

[4]なお、$S_6(2)$ と Alt_5（5 次交代群）は直既約なだけでなく単純群でもある。

対称群 S_∞ も定理 6 の前提を満たすので、どのような Coxeter 生成系も標準的な生成系に関する鏡映（この場合は互換のこと）からなることが従う。この性質を用いて考察すると、**S_∞ の *Coxeter* グラフは図 *3* に示した二通りのグラフに限られる**ことを示すことができる。

参考文献

[1] N. Brady, J. P. McCammond, B. Mühlherr, W. D. Neumann, *Rigidity of Coxeter groups and Artin groups*, Geom. Dedicata 94 (2002) 91–109.

[2] R. Charney, M. Davis, *When is a Coxeter system determined by its Coxeter group?*, J. London Math. Soc. (2) 61 (2000) 441–461.

[3] A. M. Cohen, *Coxeter groups and three related topics*, in: Generators and Relations in Groups and Geometries (A. Barlotti et al. eds.), Kluwer, 1991, pp. 235–278.

[4] H. S. M. Coxeter, *The complete enumeration of finite groups of the form* $R_i^2 = (R_i R_j)^{k_{ij}} = 1$, J. London Math. Soc. **10** (1935) 21–25.

[5] J. E. Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge, 1990.

[6] B. Mühlherr, *On isomorphisms between Coxeter groups*, Des. Codes Cryptogr. 21 (2000) 189–189.

[7] B. Mühlherr, *The isomorphism problem for Coxeter groups*, arXiv:math.GR/0506572.

[8] K. Nuida, *Centralizers of reflections and reflection-independence of Coxeter groups*, arXiv:math.GR/0602165.

[9] K. Nuida, *Almost central involutions in split extensions of Coxeter groups by graph automorphisms*, arXiv:math.GR/0512210.

[10] K. Nuida, *On the direct indecomposability of infinite irreducible Coxeter groups and the Isomorphism Problem of Coxeter groups*, to appear in Communications in Algebra, arXiv:math.GR/0512210.

[11] L. Paris, *Irreducible Coxeter groups*, arXiv:math.GR/0412214.

[12] J. Stillwell, *Classical Topology and Combinatorial Group Theory 2nd ed.*, Springer, 1993.