Morita equivalence for groupoids

廣田祐士*
慶應義塾大学大学院理工学研究科

1 Groupoids

定義 1.1 集合 G, G_0 と 以下の条件を満たす写像 $s, t : G \to G_0$ および $\iota : G \to G$, $\varepsilon : G_0 \to G$ が存在するとき, G を G_0 上の **groupoid** とよぶ.

1. 積 $G^{(2)} := \{\,(g,h) \mid g,h \in G, s(g) = t(h)\,\} \to G$, $(g,h) \mapsto gh$ が定義されて,

$$s(gh) = s(h), \quad t(gh) = t(g), \quad (gh)k = g(hk)$$

が成り立つ.
2. $s \circ \varepsilon = t \circ \varepsilon = id_X$
3. $g = g\varepsilon(s(g)) = \varepsilon(t(g))g$
4. $\iota(g) = g^{-1}$ と書くとき, $s(g^{-1}) = t(g)$, $\quad t(g^{-1}) = s(g)$ が成り立つ.

上の定義であらわれた写像 $s : G \to G_0$, $t : G \to G_0$ をそれぞれ **source map**, **target map** とよび, $\iota : G \to G$, $\varepsilon : G_0 \to G$ を **inversion map**, **identity section** という. また, G_0 上の groupoid G を $G \rightrightarrows G_0$ と書く.

例 1.2 任意の群 G は一点 $\{*\}$ 上の groupoid である.

□

例 1.3 (pair groupoid) 集合 X の直積 $G := X \times X$ は, 定義 1.1 で掲げた写像を

$$\begin{aligned} &s : G \to X,\ (x,y) \mapsto y, && t : G \to X,\ (x,y) \mapsto x \\ &\varepsilon : X \to G,\ x \mapsto (x,x), && \iota : G \to G,\ (x,y) \mapsto (y,x) \\ &G^{(2)} \to G,\ \big((x,y),\,(y,z)\big) \mapsto (x,z) \end{aligned}$$

と定めることで, X 上の groupoid となる. これを pair groupoid, もしくは coarse groupoid とよぶ.

□

*hirota@math.keio.ac.jp

例 1.4 (action groupoid) C^∞級多様体XにLie 群 G が作用しているとき, 定義 1.1 で掲げた写像を

$$
\begin{gathered}
s : G \times X \to X,\ (g,x) \mapsto x, \qquad t : G \times X \to X,\ (g,x) \mapsto g\cdot x \\
\varepsilon : X \to G \times X,\ x \mapsto (e,x), \qquad \iota : G \times X \to G \times X,\ (g,x) \mapsto (g^{-1}, gx) \\
(G \times X)^{(2)} \to G \times X,\ \big((g,x),(h,y)\big) \mapsto (gh,y) \quad (\text{ただし } x = h\cdot y)
\end{gathered}
$$

で定義すると, $G \times X$ は X 上の groupoid となる. これを action groupoid とよぶ.

□

2 Morita equivalence for groupoids

集合 X から groupoid $G \rightrightarrows G_0$ の底空間 G_0 への写像 $\mu : X \to G_0$ が与えられていると仮定し,

$$G * X = \{\, (g,x) \mid g \in G, x \in X, s(g) = \mu(x) \,\}$$

とおく. 写像 $G * X \to X$, $(g,x) \mapsto g\cdot x$ がつぎの条件を満たすとき $G * X \to X$ を G による X の上の**左作用** とよぶ.

1. $\forall (g,x) \in G * X;\ \mu(g\cdot x) = t(g)$
2. $(gh)\cdot x = g\cdot(h\cdot x)$
3. $\forall x \in X;\ \varepsilon(\mu(x))\cdot x = x$

そして写像 $\mu : X \to G_0$ を **moment map** という.
G の**右作用**も同様に定義される. すなわち, 上記の仮定の下で

$$X * G = \{\, (x,g) \mid g \in G, x \in X, t(g) = \mu(x) \,\}$$

とおくとき以下の条件を満たす写像 $X * G \to X$, $(x,g) \mapsto x\cdot g$ を G の X の上への右作用という.

1. $\forall (x,g) \in X * G;\ \mu(x\cdot g) = s(g)$
2. $x\cdot(gh) = (x\cdot g)\cdot h$
3. $\forall x \in X;\ x\cdot\varepsilon(\mu(x)) = x$

例 2.1 任意の groupoid $G \rightrightarrows G_0$ に対して groupoid の積演算 $G^{(2)} \to G$ は target map $t : G \to G_0$ 上の左作用となる.

□

集合 X に groupoid $G \rightrightarrows G_0$ および $H \rightrightarrows H_0$ がそれぞれ左, 右から作用しており, なおかつ二つの作用が可換であるとき X を (G,H)**-bibundle** とよぶ. これを記号で $G_0 \xleftarrow{\rho} X \xrightarrow{\sigma} H_0$ と表わす. ここで ρ, σ はそれぞれ左作用および右作用に関する moment map $\rho : X \to G_0, \sigma : X \to H_0$ である. 更に, 右作用に関する moment map $\mu : X \to H_0$ が全射の沈めこみで, μ の各ファイバー $\mu^{-1}(p)$, $(p \in H_0)$ に G が自由かつ推移的に作用しているとき, (G,H)-bibundle X は **left principal** であるという. 一方, 左作用に関する moment map が全射の沈めこみで, 各ファイバーに H が自由かつ推移的に作用しているとき, (G,H)-bibundle X は **right principal** であるという.

また, 二つの bibundle $G \overset{\rho}{\leftarrow} X \overset{\sigma}{\rightarrow} H$, $G \overset{\rho'}{\leftarrow} X' \overset{\sigma'}{\rightarrow} H$ に対して

1. $\rho'(\phi(x)) = \rho(x),\ \sigma'(\phi(x)) = \sigma(x) \quad (\forall x \in X)$
2. $\phi(g \cdot x) = g \cdot \phi(x),\ \phi(x \cdot h) = \phi(x) \cdot h \quad (\forall x \in X, g \in G, h \in H)$

を満たす全単射写像 $\phi : X \to X'$ が存在するとき, X と Y は同型であるという.

例 2.2 任意の groupoid $G \rightrightarrows G_0$ は, 自分自身が持つ積演算により左作用, 右作用が定義され, (G, G)-bibundle となる. 左作用および右作用に関する moment map はそれぞれ target map と source map である.

$\square$

いま (G, H)-bibundle $G_0 \xleftarrow{\rho_X} X \xrightarrow{\sigma_X} H_0$ と (H, K)-bibundle $H_0 \xleftarrow{\rho_Y} Y \xrightarrow{\sigma_Y}$ が与えられたと仮定する. X と Y のファイバー積

$$X \times_{H_0} Y := \{\, (x, y) \mid x \in X, y \in Y, \sigma_X(x) = \rho_Y(y) \,\}$$

には $(x, y) \cdot h := (xh, h^{-1}y)$ と定めることで H が右側から作用することがわかる. この作用による軌道空間を $X \odot_H Y = (X \times_{H_0} Y)/H$ と書くことにすると, 軌道空間 $X \odot_H Y$ は (G, K)-bibundle となる. ここで G による左作用と K による右作用はそれぞれ $g \cdot [x, y] := [gx, y], [x, y] \cdot k := [xyk]$ で定義され, 各々の作用に関する moment map $\bar{\rho} : X \odot_H Y \to G_0, \bar{\sigma} : X \odot_H Y \to K_0$ は $\bar{\rho}([x, y]) := \rho_X(x), \bar{\sigma}([x, y]) := \sigma_Y(y) \quad ([x, y] \in X \odot_H Y, g \in G, k \in K)$ と定められる.

定義 2.3 二つの groupoid $G \rightrightarrows G_0$, $H \rightrightarrows H_0$ が **森田同値** であるとは, left principal かつ right principal であるような (G, H)-bibundle X が存在するときをいう.

例 2.4 $G \rightrightarrows G_0$ を任意の groupoid とする. G_0 の任意の点 x に対して $\mathit{\Gamma}_x = s^{-1}(x) \cap t^{-1}(x)$ とおくと $\mathit{\Gamma}_x$ は $\{x\}$ 上の groupoid となる. もし, $G \rightrightarrows G_0$ が transitive, すなわち任意の *2* 点 $x_1, x_2 \in G_0$ に対して $x_1 = s(g), x_2 = t(g)$ をみたす $g \in G$ が存在するとき, $G \rightrightarrows G_0$ と $\mathit{\Gamma}_x \rightrightarrows \{x\}$ は森田同値となる. このとき $s^{-1}(x)$ が $(G, \mathit{\Gamma}_x)$- bibundle となる.

$\square$

さて, groupoid を対象とし, right principal bibundle の同型類を射とする圏 $\mathfrak{G}$ を考える. このとき射の合成 $\circ$ は

$$[X] \circ [Y] := [X \odot_H Y] \quad \big([X] \in Mor(G, H), [Y] \in Mor(H, K)\big)$$

で与えられ, 恒等射は例 2.1 で挙げられた bibundle である. ここで $G \rightrightarrows G_0$ から $H \rightrightarrows H_0$ への射全体を $Mor(G, H)$ で表わした. すると groupoid の森田同値に関して次のことがわかる ([3]).

定理 2.5 二つの groupoid が森田同値であるのは, それらが圏 $\mathfrak{G}$ において同型であるときに限る.

参考文献

[1] Bursztyn, H., Weinstein, A., Poisson geometry and Morita equivalence. math.SG/0402347.

[2] Canna da Silva, A., Weinstein, A., *Geometric models for noncommutative geometry*, Berkeley Mathematical Lecture Notes **10**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[3] Landsman, N. P., Quantized reduction as a tensor product, 137-180 in N.P. Landsman, M. Pflaum, M. Schlichenmaier(eds.), *Quantization of Singular Symplectic Quotients*, Birkhäuser, Basel, 2001

[4] Mackenzie, K., *General theory of Lie groupoids and Lie algebroids*, LMS Lecture Notes Series, **213**, Cambridge Univ. Press, 2005.

Yuji HIROTA
Department of Mathematics, Keio University
3-14-1 Hiyoshi, Yokohama, JAPAN 223-8522